Ángel Cidre Díaz

SUBVARIEDADES HOMOXÉNEAS MINIMAIS NOS ESPAZOS HIPERBÓLICOS COMPLEXOS

154a
2023

Publicacións
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Ángel Cidre Díaz

SUBVARIEDADES HOMOXÉNEAS MINIMAIS NOS ESPAZOS HIPERBÓLICOS COMPLEXOS

154a

2023

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Subvariedades homoxéneas minimais nos espazos hiperbólicos complexos

Ángel Cidre Díaz

Xullo, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice xeral

Resumo

Os espazos simétricos constitúen unha clase importante de variedades de Riemann, xa que os seus grupos de isometrías teñen unha estrutura moi rica. Por este motivo, trátase dunha clase de espazos na que resulta moi interesante estudar a xeometría das súas subvariedades, en especial daquelas cun alto grao de simetría.

Por unha banda, a compoñente conexa da identidade do grupo de isometrías dun espacio simétrico de tipo non compacto pode escribirse como o produto dun grupo de Lie compacto cun grupo de Lie resoluble. As subvariedades do espazo simétrico que se obteñen como órbitas de subgrupos de Lie deste último denominámolas subvariedades homoxéneas resolubles.

Por outra banda, unha importante xeneralización do concepto de xeodésica a calquera dimensión é o de subvariedade minimal: aquela cuxo campo curvatura media é nulo.

O obxectivo fundamental deste traballo, que se enmarca na área da xeometría riemanniana de subvariedades, é o de clasificar as subvariedades homoxéneas resolubles minimais do espazo hiperbólico complexo, que é un exemplo de espazo simétrico de tipo non compacto.

Abstract

Symmetric spaces constitute a important class of Riemannian manifolds, since their isometry groups have a rich structure. Because of this fact, they turn out to be a class of spaces for which the study of their submanifolds is particularly interesting, especially of those with a high degree of symmetry.

On the one hand, the identity component of the isometry group of a symmetric space of non-compact type can be expressed as the product of a compact Lie group and a solvable Lie group. The submanifolds of the symmetric space that are obtained as orbits of a Lie group of such solvable Lie group are called solvable homogeneous submanifolds.

On the other hand, an important generalization of the notion of geodesic is that of minimal submanifold: a submanifold whose mean curvature vector field vanishes.

The main aim of this memoir is to classify the solvable homogeneous minimal submanifolds of the complex hyperbolic space, which is an example of a symmetric space of non-compact type.

Introdución

O concepto de *simetría* é unha das hipóteses simplificadoras máis frutíferas na historia da ciencia. En Matemáticas, a simetría dun obxecto está esencialmente relacionada co grupo de transformacións do mesmo que o deixan invariante. Baixo a hipótese de diferenciabilidade, o estudo da simetría leva ó ámbito dos grupos de Lie e das súas accións sobre variedades diferenciables. En moitos casos ten interés considerar tales variedades diferenciables dotadas dunha métrica, dando lugar ó concepto de variedade de Riemann. Neste contexto aparecen os espazos simétricos, que constitúen unha familia moi importante de variedades de Riemann cunha cantidade suficientemente grande de isometrías.

As variedades de Riemann xorden como unha xeneralización das curvas e superficies nos espazos euclidianos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, conceptos que teñen aplicacións prácticas evidentes no mundo real. Agora ben, tales obxectos non só teñen interés por si sós (é dicir, de xeito *intrínseco*), senón tamén con respecto do espazo ambiente no que están contidos (é dicir, de xeito *extrínseco*), aparecendo neste contexto conceptos coma por exemplo o de curvaturas principais ou curvatura media, que dalgunha forma describen como está 'metido' metricamente tal obxecto no espazo ambiente. De xeito similar, as variedades de Riemann aparecen con frecuencia mergulladas de xeito isométrico noutras variedades riemannianas ambiente. De feito, polo teorema de Nash, toda variedade riemanniana se pode mergullar isometricamente nun espazo euclidiano de suficiente dimensión. Así, a investigación en propiedades xeométricas extrínsecas de subvariedades riemannianas xorde de modo natural. Ademais, un tipo particularmente importante de subvariedades vén dado polas denominadas subvariedades homoxéneas, que son aquelas que aparecen como órbitas de accións isométricas de grupos de Lie.

No contexto da xeometría riemanniana de subvariedades, un concepto clásico de grande relevancia é o de minimalidade. Unha subvariedade M de dimensión n dunha variedade de Riemann é *minimal* se é un punto crítico para o funcional volume de dimensión n. Esta propiedade resulta ser equivalente a que a denominada curvatura media de M se anule identicamente. A *curvatura media* dunha subvariedade M é o campo de vectores normal a tal subvariedade obtido como a traza da súa segunda forma fundamental. A curvatura media dunha subvariedade mide, por tanto, canto se afasta tal subvariedade de ser un punto crítico do funcional volume. Trátase, ó igual que a minimalidade, dun concepto propio da xeometría extrínseca de subvariedades, é dicir, que depende de como unha subvariedade está posicionada ou colocada dentro doutra a nivel métrico, e non soamente da xeometría intrínseca desa subvariedade. Un subtipo especialmente ríxido de subvariedades minimais son as totalmente xeodésicas: aquelas cuxas xeodésicas son xeodésicas do ambiente, e que veñen caracterizadas pola propiedade de que a súa segunda forma fundamental se anula identicamente. Os subespazos afíns constitúen as subvariedades totalmente xeodésicas dos espazos euclidianos, mentres que as interseccións de subespazos lineares de $\mathbb{R}^{n+1}$ coa esfera unitaria $\mathbb{S}^n$ centrada na orixe definen todas as subvariedades totalmente xeodésicas de $\mathbb{S}^n$.

As subvariedades minimais xeneralizan a dimensións arbitrarias os conceptos clásicos de curva xeodésica e superficie minimal. Por unha banda, a centralidade das xeodésicas en xeometría riemanniana é clara desde mesmo antes do propio nacemento desta disciplina, pois xa se trataba de obxectos fundamentais para o estudo de superficies no espazo euclidiano. Por outra banda, o estudo das superficies minimais ten sido unha área moi frutífera no ámbito da xeometría diferencial, desde a descuberta por L. Euler e J. B. Meusnier dos primeiros exemplos non triviais (o catenoide e o helicoide) ata a recente teoría de Colding-Minicozzi [11]; véxase [30, 32]. Porén, o estudo de subvariedades minimais en dimensións superiores ou en espazos non euclidianos tamén está sendo un tema de grande actualidade. Sirvan de exemplo a teoría min-max para a construción de hipersuperficies minimais desenvolvida por F. C. Marques e A. Neves [29] (e que permitiu a resolución da conxectura de Willmore [28]), ou a resolución da conxectura de Lawson [7] ou a proba da desigualdade isoperimétrica para subvariedades minimais do espazo euclidiano [8], ambas debidas a S. Brendle.

Unha subvariedade M dunha variedade de Riemann ambiente $\widetilde{M}$ dise *extrinsecamente homoxénea*, ou simplemente *homoxénea*, se para calquera dous puntos p, $q \in M$ existe unha isometría φ do espazo ambiente $\widetilde{M}$ tal que envía un punto no outro, $\varphi(p) = q$, e deixa a subvariedade invariante, $\varphi(M) = M$. Isto equivale a que M sexa a órbita dunha acción isométrica dun grupo de Lie G sobre o ambiente $\widetilde{M}$. Por tanto, as subvariedades homoxéneas non son máis cas órbitas de accións isométricas. No ámbito da xeometría extrínseca, as subvariedades homoxéneas constitúen a clase de subvariedades con maior grao de simetría. Como se deduce da propia definición, para a súa existencia requírese que o espazo ambiente $\widetilde{M}$ teña un grupo de isometrías suficientemente grande. No plano euclidiano, as únicas subvariedades homoxéneas non triviais (i.e. distintas dos puntos e do espazo ambiente total) son as rectas e as circunferencias, mentres que no espazo euclidiano 3-dimensional obtemos os planos, as esferas, os cilindros, e as hélices (inclusive, de novo, as rectas e circunferencias). Porén, segundo aumentamos a dimensión do espazo ou permitimos unha maior complexidade no tocante á súa curvatura, obtemos unha maior riqueza de subvariedades homoxéneas, sempre e cando o espazo ambiente teña un grupo de isometrías suficientemente grande. Hai que sinalar que, incluso no propio ámbito dos espazos euclidianos (ou das súas esferas redondas), unha clasificación exhaustiva das subvariedades homoxéneas implicaría, en particular, unha descrición de todas as órbitas de todas as representacións de grupos compactos, o cal parece conducir a un problema combinatorio de enorme complexidade.

Parece natural preguntarse como de restritivo é o estudo daquelas subvariedades que cumpran simultaneamente as dúas propiedades mencionadas, é dicir, as subvariedades homoxéneas minimais. Esta pregunta remóntase polo menos ós traballos de W.-Y. Hsiang [23] e T. Takahashi [33], así como de M. P. Do Carmo e N. R. Wallach; véxase [4, §2.4.2] e [35] para unha introdución a estes traballos. Como consecuencia dos mesmos, tense que todo espazo homoxéneo compacto G/K se pode mergullar como unha subvariedade homoxénea e minimal dunha esfera redonda $\mathbb{S}^n$, para unha dimensión n suficientemente alta. Isto indica que existe unha impresionante cantidade non só de subvariedades homoxéneas nas esferas, senón tamén de subvariedades homoxéneas minimais.

Hai que sinalar que estas subvariedades homoxéneas minimais nas esferas $\mathbb{S}^n$, se ben son subvariedades homoxéneas dos espazos euclidianos correspondentes $\mathbb{R}^{n+1}$ (pois toda isometría de $\mathbb{S}^n$ é unha isometría linear de $\mathbb{R}^{n+1}$), non son minimais como subvariedades de $\mathbb{R}^{n+1}$ (o seu campo curvatura media é normal á esfera e non nulo). De feito, acontece que ningún espazo euclidiano admite subvariedades homoxéneas minimais, fóra daquelas que son totalmente xeodésicas (isto é, os subespazos afíns). Este resultado de rixidez débese a A. J. Di Scala [16]. É máis, o espazo hiperbólico (real) $\mathbb{R}H^n$ ten, neste sentido, un comportamento semellante ó espazo euclidiano: todas as súas subvariedades homoxéneas minimais son totalmente xeodésicas [17] (e por tanto, subespazos hiperbólicos reais de dimensión inferior $\mathbb{R}H^k$, $k < n$). Recordemos aquí que $\mathbb{R}H^n$ pode ser visto mediante diversos modelos, sendo un deles o do hiperboloide nun espazo de Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$, modelo no cal as subvariedades totalmente xeodésicas resultan de intersecar tal hiperboloide con subespazos lineares.

Espazos euclidianos, esferas e espazos hiperbólicos reais constitúen os denominados espazos forma reais: variedades de Riemann completas e simplemente conexas con curvatura seccional constante (nula, positiva e negativa, respectivamente). En certo sentido, trátase das variedades riemannianas máis sinxelas no que respecta á súa curvatura, e cun grupo de isometrías de maior dimensión. Os espazos forma reais son a clase máis sinxela dos denominados *espazos simétricos*, que son aquelas variedades de Riemann que admiten simetrías centrais respecto a todos os seus puntos. Desta propiedade dedúcese que os espazos simétricos son tamén homoxéneos. Ademais dos espazos forma reais, existen moitos máis espazos simétricos, todos eles clasificados por É. Cartan [9] nos anos 20. Adoitan distinguirse dúas grandes familias de espazos simétricos: os de tipo compacto e os de tipo non compacto. Entre os primeiros atópanse as esferas, os espazos proxectivos, as grasmannianas e os grupos de Lie compactos, entre outros, mentres que entre os de tipo non compacto atópanse os espazos hiperbólicos (non soamente os reais $\mathbb{R}H^n$, senón os complexos $\mathbb{C}H^n$, os cuaterniónicos $\mathbb{H}H^n$ e de Cayley $\mathbb{O}H^2$), o espazo de matrices definidas positivas de determinante un, as grassmannianas de subespazos de espazos pseudo-euclidianos, etc.

Máis alá dos espazos forma reais, os espazos simétricos constitúen unha familia moi interesante para o estudo do comportamento das subvariedades homoxéneas minimais, debido ás súas propiedades de simetría, que permiten o uso de técnicas máis alxébricas no ámbito da xeometría de subvariedades. Cabe esperar que nos espazos simétricos de tipo compacto, ó igual que sucede nas esferas, existan numerosas subvariedades homoxéneas minimais. Así, é coñecido que os espazos proxectivos complexos admiten subvariedades Kähler homoxéneas, que resultan ser minimais. Máis xeralmente, a acción de isotropía de calquera espazo simétrico de tipo compacto dá lugar a órbitas minimais [22]. Porén, descoñecemos se existen resultados máis xerais de construción de exemplos, ou de rixidez.

No ámbito dos espazos simétricos de tipo non compacto, cabería esperar un comportamento semellante ó caso máis simple deste tipo de espazos, o espazo hiperbólico real, onde toda subvariedade homoxénea minimal é totalmente xeodésica. Non obstante, cando menos desde os traballos de M. Lohnherr e H. Reckziegel [27], J. Berndt [2], e J. Berndt e M. Brück [3] hai uns 20 anos, sábese que os espazos hiperbólicos complexos, así como os restantes espazos hiperbólicos de curvatura non constante, admiten algunhas subvariedades homoxéneas minimais non totalmente xeodésicas. Se ben se trata dunha cantidade non numerable delas, estes exemplos coñecidos admiten unha descrición xeométrica e alxébrica relativamente sinxela en termos da descomposición de Iwasawa asociada ó espazo simétrico ambiente, polo que parece natural preguntarse se é posible obter unha clasificación. En espazos simétricos de rango superior, sábese da existencia de subvariedades minimais homoxéneas [6, 34] e, de novo, tales exemplos admiten interesantes descricións en termos de grupos de Lie. Porén, hai que sinalar que non se coñecen resultados xerais sobre subvariedades homoxéneas minimais neste contexto, máis alá dos obtidos por D. Alekseevsky e A. J. Di Scala [1], que proban que, baixo certas condicións, tales subvariedades teñen que ser totalmente xeodésicas.

Este traballo vén motivado polo proxecto a longo prazo de abordar o problema de clasificación das subvariedades homoxéneas minimais nos espazos simétricos de tipo non compacto. Como primeiro obxectivo de tal proxecto, neste traballo centrámonos no caso non coñecido máis sinxelo posible: o caso dos espazos hiperbólicos complexos $\mathbb{C}H^n$. Ademais, posto que todos os exemplos coñecidos xorden como órbitas de subgrupos da parte resoluble da descomposición de Iwasawa asociada a $\mathbb{C}H^n$ (órbitas de subgrupos de AN, na notación estándar na literatura e neste traballo), pediremos a hipótese adicional de que os grupos de isometrías que dan lugar ás subvariedades que pretendemos clasificar son subgrupos de AN. Así, por simplificar a linguaxe, neste traballo chamaremos *subvariedade homoxénea resoluble* dun espazo simétrico de tipo non compacto a calquera órbita da acción dalgún subgrupo conexo H da parte resoluble AN do grupo de isometrías de tal espazo simétrico. Esta é unha hipótese que, a día de hoxe, parece natural impoñer, non só polo feito de que, como dicimos, recollería todos os exemplos coñecidos ata hoxe, senón tamén porque o control da xeometría extrínseca de órbitas de subgrupos arbitrarios (i.e. non contidos en AN, senón no grupo total de isometrías de $\mathbb{C}H^n$) parece precisar de ferramentas descoñecidas na actualidade.

Polo tanto, a parte orixinal deste traballo (recollida no Capítulo 4) consistirá na *clasificación das órbitas minimais de subgrupos da parte resoluble da descomposición de Iwasawa de* $\mathbb{C}H^n$ ou, noutras palabras, na clasificación das subvariedades homoxéneas resolubles de $\mathbb{C}H^n$ que son minimais. Obteremos unha descrición dos subgrupos conexos H de AN que dan lugar a ditas órbitas, explicitando as súas álxebras de Lie. Como consecuencia, deduciremos que unha *subvariedade homoxénea resoluble de* $\mathbb{C}H^n$ *é minimal se e só se é totalmente xeodésica, ou unha hipersuperficie regrada de Lohnherr, ou unha subvariedade focal dunha familia isoparamétrica de hipersuperficies en* $\mathbb{C}H^n$. Unha hipersuperficie de Lohnherr resulta ser a única (salvo congruencia) hipersuperficie minimal homoxénea de $\mathbb{C}H^n$, así como a única hipersuperficie de $\mathbb{C}H^n$ que é regrada (por $\mathbb{C}H^{n-1}$ totalmente xeodésicos) e con curvaturas principais constantes, cf. [5, 27]. Unha familia isoparamétrica de hipersuperficies nunha variedade riemanniana é unha descomposición de tal variedade en subvariedades equidistantes, todas elas de codimensión un e con curvatura media constante excepto, ó sumo, dúas subvariedades de codimensión superior a un (denominadas subvariedades focais). O problema de clasificación das familias isoparamétricas remóntase a traballos de T. Levi-Civita, B. Segre e É. Cartan nos anos 30, e ten experimentado considerables avances nos últimos anos; véxase [12] para unha introdución a este tema. Unha das escasas clasificacións completas de familias isoparamétricas coñecidas é, precisamente, a que se obtivo para $\mathbb{C}H^n$ en [14]. Resulta que, neste contexto, cada familia isoparamétrica só admite unha ou ningunha subvariedade focal e, cando existe tal subvariedade focal, sempre é homoxénea resoluble minimal. Así, neste traballo caracterizamos as subvariedades focais de familias isoparamétricas de hipersuperficies en $\mathbb{C}H^n$ como as únicas subvariedades homoxéneas resolubles minimais de $\mathbb{C}H^n$, ademais da denominada hipersuperficie de Lohnherr e de certas subvariedades totalmente xeodésicas que non son focais de familias isoparamétricas.

A parte orixinal deste traballo, que vimos de explicar, require, tanto para a súa formulación como para a súa abordaxe, de diversas ferramentas da teoría de espazos simétricos. Por iso, boa parte dos nosos esforzos estarán dedicados a proporcionar unha introdución a este tipo de espazos, con énfase nos espazos hiperbólicos complexos $\mathbb{C}H^n$.

Así, este traballo está estruturado da seguinte maneira. No Capítulo 1 introduciremos algúns preliminares que consistirán en presentar definicións, resultados e notacións sobre variedades de Riemann e teoría de grupos de Lie que serán precisos para abordar as cuestións tratadas neste traballo. A continuación, no Capítulo 2 introduciremos de xeito xeral os espazos nos que traballaremos, isto é, os espazos simétricos, para máis adiante particularizar para achegarnos ó caso que nos interesa, introducindo a subfamilia dos espazos simétricos de tipo non compacto. Xa no Capítulo 3, presentaremos os espazos hiperbólicos complexos, uns espazos pertencentes a tal subfamilia e que son nos que se establece o resultado principal do traballo. Xa por último, no Capítulo 4, sentaremos o contexto no cal xorde o noso resultado principal, que é o de clasificación de subvariedades homoxéneas minimais nos espazos hiperbólicos complexos, para aportar finalmente a proba do mesmo.

Capítulo 1

Preliminares

Este primeiro capítulo de preliminares estará centrado na introdución da terminoloxía, da notación e dos resultados fundamentais da xeometría de Riemann e da teoría de grupos de Lie que serán empregados ó longo do traballo.

Dun xeito máis preciso, na Sección 1.1 recordaremos, entre outras, as nocións de variedade de Riemann e de conexión de Levi-Civita, para pasar a centrarnos a continuación na Sección 1.2 nas ferramentas propias do estudo de subvariedades, como a segunda forma fundamental e o operador de configuración. Tamén introduciremos un dos conceptos centrais deste traballo, como é o concepto de subvariedade minimal. Na Sección 1.3 revisaremos certos conceptos e ideas derivados das accións (isométricas) de grupos de Lie sobre variedades (de Riemann). Finalmente, na Sección 1.4 introducimos certas clases de álxebras de Lie (semisimples, resolubles, nilpotentes...) que están intimamente relacionadas cos espazos simétricos, ademais da forma de Killing, unha forma bilinear simétrica que tamén é de especial relevancia neste ámbito.

1.1. Variedades de Riemann

O obxectivo desta sección é fundamentalmente o de introducir a notación e algún dos resultados elementais que usaremos no contexto das variedades de Riemann. Para iso, seguiremos principalmente [25].

Dada unha variedade diferenciable M, chamaremos *métrica de Riemann*, ou *métrica riemanniana*, sobre M, a un campo de tensores diferenciable de tipo $(0, 2)$ simétrico e definido positivo, isto é, unha asignación g que a cada punto $p \in M$ lle fai corresponder diferenciablemente unha forma bilinear $g_p \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ que ademais define un produto escalar no espazo tanxente T_pM. En tal caso, diremos que (M, g) é unha *variedade de Riemann*, ou unha *variedade riemanniana*. Ademais, se tal forma bilinear é simétrica e non dexenerada, pero non necesariamente definida positiva en todo punto, dise que M é unha variedade *semi-riemanniana* ou *pseudo-riemanniana*.

Unha consecuencia inmediata de ter unha métrica riemanniana g nunha variedade diferenciable M é que esta nos permite definir distancias de curvas diferenciables a anacos.

Dada unha curva $\alpha\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \to M$ diferenciable a anacos, defínese a lonxitude de α con respecto da métrica g como

$$L_g(\alpha) := \int_a^b g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))dt.$$

Desta maneira, dados dous puntos $p, q \in M$, pódese definir o concepto de distancia entre eles do seguinte xeito. Denotemos por $\Omega_{p,q}$ o conxunto de curvas diferenciables a anacos, que chamaremos admisibles, unindo p e q, que ademais sempre será distinto do baleiro se M é conexa por [25, Proposición 2.50]. Neste caso, defínese a distancia de p a q como $d_g(p,q) := \text{mín}\{L_g(\alpha) : \alpha \in \Omega_{p,q}\}$.

Sexa M unha variedade de Riemann, e N unha variedade diferenciable. Se temos unha inmersión $f\colon N \to M$, logo podemos inducir unha métrica de Riemann f^*g en N, coñecida coma o *pull-back* da métrica g por f, do seguinte xeito

$$(f^*g)_p(X,Y) := g_p(f_{*p}X, f_{*p}Y),$$

para todo $p \in N$, e $X, Y \in T_pN$. Neste traballo, denotamos por f_* a diferencial dunha aplicación diferenciable f entre variedades. Pódese probar de xeito sinxelo que en efecto f^*g define unha métrica de Riemann. No caso de que (N, g') sexa unha variedade de Riemann, diremos que esta é *isométrica* a M se existe un difeomorfismo $f\colon N \to M$ de xeito que o pull-back de g por f coincide coa métrica g', isto é, se $f^*g = g'$.

Unha cuestión interesante á hora de traballar no contexto das variedades diferenciables é a de definir a aceleración de curvas, o que irremediablemente nos leva a 'derivar' campos de vectores. A formalización desta idea conséguese mediante a introdución do concepto de *conexión*. Dada unha variedade diferenciable M, unha conexión D en M é un operador

$$\begin{aligned} D\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y) &\longmapsto D_XY, \end{aligned}$$

que, para calquera $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, verifica as seguintes propiedades:

(I) $D_X(\lambda Y + \mu Z) = \lambda D_XY + \mu D_XZ$, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$-linearidade)

(II) $D_X(fY) = X(f)Y + fD_XY$, para todo $f \in C^\infty(M)$. (Regra de Leibniz)

(III) $D_{fX+hZ}Y = fD_XY + hD_ZY$, para todas $f, h \in C^\infty(M)$. ($C^\infty(M)$-linearidade)

Aquí, e no resto deste traballo, denotamos por $\mathfrak{X}(M)$ ó $C^\infty(M)$-módulo de campos de vectores diferenciables sobre M.

Vexamos como podemos empregar agora noción de conexión para derivar curvas na variedade M. En primeiro lugar, se $\alpha\colon I \subset \mathbb{R} \to M$ é unha curva diferenciable, chámase *campo de vectores diferenciable* ó longo de α a calquera aplicación diferenciable $v\colon I \subset \mathbb{R} \to TM$ de xeito que $v(t) \in T_{\alpha(t)}M$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ademais, denotarase por $\mathfrak{X}_t^\alpha$ o conxunto de campos de vectores diferenciables ó longo de α. Así, por [25, Teorema 4.24] tense que se D é unha conexión en M, e $\alpha\colon I \subset \mathbb{R} \to M$ unha curva diferenciable, entón existe un único operador $D_t\colon \mathfrak{X}_t^\alpha \to \mathfrak{X}_t^\alpha$ que verifica:

1. $D_t(\lambda v + \mu w) = \lambda D_t v + \mu D_t w$, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$-linearidade)

2. $D_t(fv) = (\frac{d}{dt} f)v + f D_t v$, para toda $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. (Leibniz)

3. Se V é a restrición a α dun campo de vectores Y en M, entón $D_t V(t) = D_{\dot{\alpha}(t)} Y$.

Deste xeito, dado $V \in \mathfrak{X}_t^\alpha$ diremos que V é un campo de vectores *paralelo* ó longo de α se $D_t V = 0$ para todo t no que esté definido V. Diremos que unha curva diferenciable $\alpha \colon I \subset \mathbb{R} \to M$ sobre unha variedade diferenciable M é unha *xeodésica* para a conexión D de M se o seu campo de vectores tanxente en todo punto, isto é, $\frac{d}{dt}_{|t} \alpha(t) \equiv \dot{\alpha}(t)$ é paralelo. Ademais, polo teorema de existencia e unicidade das xeodésicas [25, Teorema 4.27], tense que, para todo $p \in M$ e para todo $v \in T_p M$, e dado $t_0 \in \mathbb{R}$, existirá un intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo a t_0 e unha xeodésica $\alpha \colon I \to M$ de xeito que $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$. Ademais, esta será única no sentido de que se dadas dúas xeodésicas α, β, definidas nos correspondentes dominios $I_\alpha, I_\beta \subset \mathbb{R}$, pasan por un mesmo punto $p \in M$ co mesmo vector tanxente $v \in T_p M$, entón estas coincidirán en $I_\alpha \cap I_\beta$.

Agora ben, no contexto riemanniano (e mesmo semi-riemanniano), o teorema fundamental da xeometría de Riemann [25, Teorema 5.10] garantiza a existencia dunha única conexión ∇ (a *conexión de Levi-Civita*) que cumpre dúas propiedades naturais:

1. ∇ é simétrica, isto é, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

2. ∇ é compatible coa métrica g, isto é, $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Ademais, dita conexión vén determinada pola seguinte fórmula (chamada *Fórmula de Koszul*):

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) =& \frac{1}{2}(Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &+ g([X, Y], Z) + g([Z, Y], X) + g([Z, X], Y)). \end{aligned}$$

No caso de que M sexa unha variedade de Riemann e ∇ é a súa conexión de Levi-Civita, entón o concepto de xeodésica para tal conexión está profundamente relacionado co de distancia mínima entre dous puntos. Por unha banda, pódese ver, introducindo teoría de *cálculo de variacións* que, en caso de que exista unha curva admisible parametrizada por arco unindo dous puntos de M e cuxa lonxitude sexa mínima (é dicir, igual á distancia entre os dous puntos), logo esta terá que ser necesariamente unha xeodésica parametrizada por lonxitude de arco, isto é, con vector tanxente unitario en todo punto (véxase [25, Teorema 6.4]). Non obstante, non é certo sempre que toda xeodésica unindo dous puntos sexa unha curva admisible de lonxitude mínima, nin moito menos que exista. Agora ben, terase, como consecuencia do teorema de Hopf-Rinow [25, Corolario 6.21] que se M é conexa e metricamente completa con respecto da distancia asociada a g, logo sempre existirá unha xeodésica *minimizante* unindo dous puntos dados calquera, é dicir, que é de lonxitude mínima entre as curvas admisibles que unen tales puntos.

1.2. Subvariedades de Riemann

Ó definir as variedades de Riemann, fixémolo intrinsicamente, é dicir, sen considerar un 'espazo ambiente' nas cales estaban contidas. Porén, para o noso obxectivo será unha cuestión fundamental a de estudar variedades de Riemann 'metidas' dentro doutra variedade de Riemann. Isto permitiranos considerar campos de vectores normais a unha subvariedade de Riemann, e, polo tanto, estudala extrinsecamente.

Sexa agora $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ unha variedade de Riemann, que consideraremos a nosa variedade ambiente. Diremos que unha variedade de Riemann M é unha subvariedade inmersa de $\widetilde{M}$ se existe unha inmersión isométrica $f\colon M \to \widetilde{M}$. Se M_1 e M_2 son dúas subvariedades de Riemann inmersas de $\widetilde{M}$ mediante inmersións f_1 e f_2, diremos que son *congruentes* se existe unha isometría $\varphi\colon \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ de xeito que $f_2 = \varphi \circ f_1$. Por outra banda, diremos que $M \subset \widetilde{M}$ é unha subvariedade inxectivamente inmersa de $\widetilde{M}$ se a inclusión $i\colon M \hookrightarrow \widetilde{M}$ é unha inmersión. Tense logo, polo que observamos anteriormente, que a inclusión inducirá a métrica de Riemann $g := i^*\widetilde{g}$ en M. Neste caso, dise que (M, g) é unha *subvariedade de Riemann inmersa* de $\widetilde{M}$. Obsérvese que, para cada punto $p \in M$ o espazo tanxente a p en $\widetilde{M}$ poderase descompoñer como $T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus T_p^{\perp}M$, sendo $T_p^{\perp}M$ o subespazo ortogonal a T_pM respecto de g. No caso de que $i\colon M \hookrightarrow \widetilde{M}$ sexa un mergullo, isto, é, se $i\colon M \to i(M) \subset \widetilde{M}$ é un homeomorfismo, dirase que M é unha *subvariedade de Riemann mergullada* de $\widetilde{M}$. En xeral, a non ser que se indique o contrario, entenderase simplemente por *subvariedade* dunha variedade de Riemann a unha subvariedade de Riemann inmersa.

Vexamos agora como podemos inducir unha conexión en M a partir da conexión de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ do espazo ambiente $\widetilde{M}$. En primeiro lugar, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vectores en M, sexan $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$, tales que $\widetilde{X}_{|M} = X$ e $\widetilde{Y}_{|M} = Y$, chamadas extensións dos campos de vectores X e Y a $\widetilde{M}$. Definimos entón o operador $\overline{\nabla}$ por $\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})_{|M}$ para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Pódese comprobar que $\overline{\nabla}$ está ben definida, é dicir, que non depende das extensións de X, Y a $\widetilde{M}$ escollidas. Obsérvese que, en principio, $(\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})_{|M} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ podería ter en cada punto compoñente tanxencial e compoñente normal a M non nulas. Polo tanto, consideramos a descomposición $(\overline{\nabla}_X Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\top} + (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}$. Así, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos a *segunda forma fundamental* de M como

$$II(X, Y) := (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}.$$

Por outra banda, pola coñecida como fórmula de Gauss [25, Teorema 8.2], se chamamos ∇ á conexión de Levi-Civita de (M, i^*g), entón, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, tense que

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y), \tag{1.1}$$

onde os dous sumandos da dereita son, respectivamente, as compoñentes tanxente e normal de $\overline{\nabla}_X Y$. Pódese probar que a segunda forma fundamental é tensorial (i.e. C^{∞}-linear) e simétrica (i.e. $II(X, Y) = II(Y, X)$).

Denotemos agora por $\mathfrak{X}^{\perp}(M)$ o conxunto de campos de vectores diferenciables normais a M en todo punto. Logo, para cada $\xi \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$, defínese o *operador de configuración* ou *operador forma* S_ξ de M asociado ó campo normal ξ do seguinte xeito: para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ defínese $S_\xi X \in \mathfrak{X}(M)$ como o campo de vectores determinado por $g(S_\xi X, Y) = g(I\!I(X,Y),\xi)$ para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$. O operador de configuración é tensorial en ξ, e, para ξ fixado, define un endomorfismo de TM que resulta ser autoadxunto con respecto da métrica g, debido á simetría de $I\!I$. Ademais, a ecuación de Weingarten [25, Proposición 8.4] establece que

$$S_\xi(X) = -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top, \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M),\ \xi \in \mathfrak{X}^\perp(M). \tag{1.2}$$

Chamaremos *campo de vectores curvatura media* da subvariedade M ó campo de vectores normal a M dado por $\sum_{i=1}^k I\!I(E_i,E_i)$, sendo $\{E_i\}_{i=1}^k$ unha referencia ortonormal de M e k a dimensión M. Defínense as *subvariedades minimais* como aquelas para as que a súa curvatura media se anula. Por como se define o operador de configuración a partir da segunda forma fundamental, isto é equivalente a que a traza do operador de configuración sexa nula para todo campo de vectores normais a M, isto é, que $\operatorname{tr} S_\xi = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M)$. Unha clase importante de subvariedades minimais son as *totalmente xeodésicas*: aquelas cuxa segunda forma fundamental se anula identicamente, $I\!I = 0$ (ou o que é o mesmo, $S = 0$). As subvariedades totalmente xeodésicas caracterízanse como aquelas subvariedades M cuxas xeodésicas son xeodésicas do espazo ambiente $\widetilde{M}$.

Para cada campo normal ξ, é posible definir a función curvatura media de M asociada a ξ, consistente no produto escalar do campo curvatura media con ξ, e que resulta ser igual á traza de S_ξ, xa que, en efecto, para unha referencia ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^k$ sobre M tense que

$$\operatorname{tr} S_\xi = \sum_{i=1}^k g(S_\xi(E_i),E_i) = \sum_{i=1}^k g(I\!I(E_i,E_i),\xi) = g(\sum_{i=1}^k I\!I(E_i,E_i),\xi).$$

Defínense tamén as curvaturas principais de M en $p \in M$ respecto do vector normal $\xi_p \in T_p^\perp M$ coma os autovalores de S_{ξ_p}. Así, a curvatura media $\operatorname{tr} S_\xi$ respecto dun campo normal ξ, nun punto $p \in M$, non é máis ca suma das curvaturas principais en p. Unha hipersuperficie M de $\widetilde{M}$ (i.e. unha subvariedade de codimensión un) dise que ten *curvatura media constante* se a súa función curvatura media, para un campo normal unitario ξ, é constante en M, e dise que ten *curvaturas principais constantes* se as súas curvaturas principais non dependen do punto $p \in M$. Claramente, toda hipersuperficie con curvaturas principais constantes ten curvatura media constante.

O concepto de subvariedade minimal xorde do estudo das subvariedades que minimizan (ou, de xeito máis xeral, que extremizan) a área, onde por 'área' nos refirimos ó volume k-dimensional das subvariedades de dimensión k. O caso máis clásico é o das superficies S en $\mathbb{R}^3$ para as cales, dada unha curva simple pechada C, se S é a superficie con menor área entre todas as superficies próximas a S e con borde $\partial S = C$, entón S é unha superficie minimal. Máis xeralmente, unha subvariedade M de dimensión k é minimal se e só se é localmente un punto crítico para o funcional volume k-dimensional. Neste traballo non precisaremos desta formulación variacional das subvariedades minimais; refirimos ó lector a [25, Teorema 8.18] ou [35, p. 10] para máis información.

1.3. Grupos de Lie e accións

Nesta parte introduciremos brevemente a notación que empregaremos para grupos de Lie, baseándonos principalmente en [26]. Ademais, tamén falaremos do concepto de acción dun grupo de Lie, e de certos obxectos asociados, como son as as variedades homoxéneas.

Un *grupo de Lie* é un grupo abstracto G cunha estrutura de variedade diferenciable real para a cal a operación do grupo e a inversión dun elemento son aplicacións diferenciables C^∞. Ademais, fixado un elemento $g \in G$, denotaremos por L_g á aplicación $L_g\colon h \in G \mapsto gh \in G$, é dicir, a operación pola esquerda por g. Analogamente, denótase por R_g á operación pola dereita por g.

Unha *álxebra de Lie* real é un espazo vectorial real $\mathfrak{g}$ xunto cunha aplicación bilinear, chamada habitualmente corchete de Lie, e que denotaremos por $[\cdot,\cdot]$, que ademais é antisimétrica e verifica a coñecida como identidade de Jacobi, isto é, que para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ cumpre que

$$[[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,Z],X] = 0.$$

Recordemos que a todo grupo de Lie G lle corresponde unha única álxebra de Lie $\mathfrak{g}$, conformada polos campos de vectores invariantes á esquerda de G, isto é, os campos de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $X \circ L_g = L_{g*} \circ X$ para todo $g \in G$, o cal quere dicir que $X_{gh} = L_{g*}(X_h)$ para todo $h \in G$. O corchete de Lie da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G non é máis có corchete de campos de vectores. Ademais, tal álxebra de Lie é isomorfa como espazo vectorial a T_gG para todo $g \in G$. Dito isomorfismo vén dado pola correspondencia $X \in \mathfrak{g} \mapsto X_g \in T_gG$. Porén, por convención simplemente se identifica $\mathfrak{g}$ con T_eG, sendo $e \in G$ o elemento neutro do grupo.

Denotaremos por Exp á exponencial dun grupo de Lie G, isto é, á aplicación $\operatorname{Exp}\colon \mathfrak{g} \to G$ que a cada $X \in \mathfrak{g}$ lle fai corresponder o elemento $\alpha_X(1) \in G$, onde $\alpha_X : \mathbb{R} \to G$ é a única curva integral do campo de vectores X en G pasando polo elemento neutro $e \in G$, isto é, tal que $\alpha_X(0) = e$, e $\dot\alpha(t) = X_{\alpha_X(t)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Recordemos ademais que $\operatorname{Exp}\colon \mathfrak{g} \to G$ é unha aplicación diferenciable, que, para todo homomorfismo de grupos de Lie (é dicir, homomorfismo de grupos abstractos que tamén é diferenciable) $f\colon G \to G'$ verifica que o seguinte diagrama é conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{f_*} & \mathfrak{g}' \\ {\scriptstyle\mathrm{Exp}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Exp}} \\ G & \xrightarrow{f} & G' \end{array}$$

onde f_* se identifica coa diferencial no neutro de f, pola identificación que facemos entre $\mathfrak{g}$ e T_eG.

Agora introduciremos un homomorfismo de grupos de Lie que empregaremos frecuentemente no traballo, como é a representación *adxunta* dun grupo (e dunha álxebra) de Lie. En primeiro lugar, se consideramos o homomorfismo de grupos de Lie $I_g\colon h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$, isto é, a conxugación por g, defínese logo a adxunta de G como $\mathrm{Ad}\colon g \mapsto I_{g*} \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, onde $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ denota o grupo de Lie dos automorfismos lineares do espazo vectorial $\mathfrak{g}$. Por outra banda, denotaremos por $\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, onde $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ se define como a álxebra de Lie de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ (que se identificará como espazo vectorial co espazo vectorial dos endomorfismos de $\mathfrak{g}$), á representación adxunta da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$, que ademais verificará $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Sexa G un grupo de Lie e M unha variedade diferenciable. Unha *acción diferenciable* pola esquerda é unha aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \varphi\colon G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto g \cdot p, \end{aligned}$$

tal que

(i) Para todo $p \in M$, $e \cdot p = p$, sendo e o elemento neutro de G.

(ii) Dados $g,\ h \in G$ e $p \in M$, $g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p$.

Neste caso, dirase que G actúa sobre M pola esquerda. Nótese que todo grupo G actúa sobre si mesmo pola esquerda mediante a acción dada pola operación de grupo.

Observación 1.1. Se G actúa sobre M pola esquerda entón, dado $p \in M$, a aplicación $\phi_p\colon G \to M$ dada por $\phi_p(g) = \varphi(g, p) = g \cdot p$ con $g \in G$, é C^∞.

Analogamente, dado $g \in G$ tamén é diferenciable a aplicación $\varphi_g\colon M \to M$ dada por $\varphi_g(p) = \varphi(g, p) = g \cdot p$ con $p \in M$.

Unha acción de G sobre M dise *efectiva* se cando $\varphi_g = \mathrm{id}$ entón $g = e \in G$. Por outra banda, a acción dise *transitiva* se para cada $p, q \in M$ existe un $g \in G$ tal que $g \cdot p = q$.

Dada unha acción diferenciable de G sobre M, e $p \in M$, denomínase *grupo de isotropía* de p ó subgrupo de Lie pechado de G dado por

$$G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\},$$

e *órbita* da acción de G por p á subvariedade inmersa de M dada por

$$G \cdot p = \{g \cdot p : g \in G\}.$$

Se agora M é unha variedade de Riemann, unha acción diferenciable dun grupo de Lie G sobre M dise *isométrica* se os difeomorfismos de M dados por φ_g, con $g \in G$ (véxase Observación 1.1), son isometrías de M. Se a acción é efectiva, o grupo G pode verse como un subgrupo do grupo $\mathrm{I}(M)$ de isometrías de M, que se sabe que é un grupo de Lie [31].

Unha subvariedade P dunha variedade de Riemann M dise *(extrinsecamente) homoxénea* se para calquera $p, q \in P$ existe unha isometría f da variedade ambiente M tal que $f(p) = q$ e $f(P) = P$. Equivalentemente, P é subvariedade homoxénea de M se e só se existe un subgrupo H de $\mathrm{I}(M)$ tal que $P = H \cdot p$ para algún $p \in P$; noutras palabras, P é unha órbita dunha acción isométrica sobre M.

Pódese probar que unha subvariedade homoxénea P de M é subvariedade mergullada de M se e só se $H = \{f \in \mathrm{I}(M) : f(P) = P\}$ é subgrupo pechado (e por tanto subgrupo de Lie) de $\mathrm{I}(M)$. Isto último significa que a acción de H en M é propia. A miúdo, é habitual restrinxir o estudo de accións isométricas a aquelas que son propias, pois estas accións teñen propiedades que as fan máis manexables (grupos de isotropía pechados, espazos de órbita Hausdorff, órbitas mergulladas). Porén, neste traballo non precisaremos impoñer esta hipótese adicional. Para máis información sobre accións isométricas e propias, pódese consultar [4, Chapter 2].

Unha clase moi importante de accións diferenciables vén inducida polas representacións de grupos de Lie, isto é, polos homomorfismos de grupos de Lie $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, onde V é un espazo vectorial de dimensión finita. No caso de que V sexa un espazo euclidiano (i.e. estea dotado dun produto interior), a representación ρ dise ortogonal se $\rho(g)$ é unha isometría linear de V, para todo $g \in G$. Así, neste caso, ρ induce unha acción isométrica en V. Por outra banda, a representación ρ dise *irreducible* se os únicos subespazos invariantes de V son o trivial e o total, isto é, se os únicos subespazos W de V tales que $\rho(g)w \in W$ para todo $g \in G$ e para todo $w \in W$ son $W = 0$ ou $W = V$.

De xeito análogo, as representacións de álxebras de Lie son homomorfismos de álxebras de Lie, isto é, aplicacións lineares que preservan o corchete de Lie, da forma $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{\mathbb{K}}(V)$, onde $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Neste caso, tamén se di que φ é irreducible se de novo os únicos subespazos invariantes de V son o trivial e o total.

O caso particular en que $P = M$ sexa a variedade ambiente total sobre a que actúa isométrica e transitivamente un grupo de Lie G é de especial relevancia. Así, dise que unha variedade riemanniana conexa M é unha *variedade homoxénea* ou *espazo homoxéneo* se para calquera $p, q \in M$ existe unha isometría f de M tal que $f(p) = q$. Neste caso, existe un grupo de Lie G que actúa isometrica e transitivamente sobre M. A nivel diferenciable, o teorema de caracterización de espazos homoxéneos garantiza que unha variedade diferenciable M sobre a que actúa diferenciable e transitivamente un grupo de Lie G é difeomorfa ó conxunto de clases á esquerda $G/G_p = \{gG_p : g \in G\}$ dotado da topoloxía cociente asociada á proxección canónica $G \to G/G_p$ e dunha certa estrutura diferenciable. Aquí, G_p é o grupo de isotropía nun punto arbitrario (pero fixado) $p \in M$. Reciprocamente, dado un grupo de Lie conexo G e un subgrupo pechado H de G, o conxunto de clases á esquerda G/H pode dotarse dunha estrutura diferenciable que o convirte nun espazo homoxéneo (a nivel diferenciable). Así, os espazos homoxéneos (en particular, calquera órbita dunha acción diferenciable) admiten unha descrición como cocientes de grupos de Lie.

Como lembramos antes, toda representación (ortogonal) induce unha acción diferenciable (isométrica). Pero, por outra banda, dada calquera acción diferenciable sobre unha variedade M, temos asociada una representación para cada punto $p \in M$. Así, se $\varphi\colon G \times M \to M$ é unha acción diferenciable, defínese a *representación de isotropía* de φ en $p \in M$ como

$$\begin{aligned} \rho\colon G_p &\longrightarrow \mathrm{GL}(T_pM) \\ h &\longmapsto \rho(h) := (\varphi_h)_{*p}, \end{aligned}$$

sendo $\varphi_h\colon M \to M$, $q \mapsto \varphi_h(q) = \varphi(h, q)$. Recordemos que, dado que $h \in G_p$, entón cúmprese que $\varphi_h(p) = \varphi(h, p) = p$. Se M está dotada dunha métrica riemanniana, e φ é unha acción isométrica, entón é claro que a representación de isotropía en todo p é unha representación ortogonal.

1.4. Álxebras de Lie e forma de Killing

Nesta sección recordamos a definición de varias clases importantes de álxebras de Lie, así como da forma de Killing dunha álxebra de Lie.

Dada unha álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita, definimos a súa *serie derivada* como

$$\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(1)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathfrak{g}^{(2)} := [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \quad \dots, \quad \mathfrak{g}^{(n)} := [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}],$$

onde pode verse facilmente por indución que cada $\mathfrak{g}^{(i)}$ con $i \in \mathbb{N}$ da serie derivada de $\mathfrak{g}$ é un ideal de $\mathfrak{g}$. Diremos que $\mathfrak{g}$ é *resoluble* se existe $k \in \mathbb{N}$ de xeito que $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$. Ademais, $\mathfrak{g}$ dirase resoluble en k pasos se $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ e $\mathfrak{g}^{(k-1)} \neq 0$, con $k \geq 1$. Obsérvese que, en particular, calquera álxebra de Lie abeliana non trivial é resoluble en 1 paso.

Por outra banda, defínese a *serie central descendente* de $\mathfrak{g}$ como

$$\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathfrak{g}_2 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1], \quad \dots, \quad \mathfrak{g}_n := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{n-1}].$$

De novo, pode verse por indución que cada $\mathfrak{g}_i$, con $i \in \mathbb{N}$, é un ideal de $\mathfrak{g}$. Pois ben, diremos que $\mathfrak{g}$ é *nilpotente* se existe $k \in \mathbb{N}$ de xeito que $\mathfrak{g}_k = 0$. Ademais $\mathfrak{g}$ dirase nilpotente en k pasos se $\mathfrak{g}_k = 0$ e $\mathfrak{g}_{k-1} \neq 0$, con $k \geq 1$.

Pode verse por indución que $\mathfrak{g}^{(k)} := [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{k-1}] \subset \mathfrak{g}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, polo que toda álxebra de Lie nilpotente é resoluble. Ademais, tamén é claro que unha álxebra de Lie abeliana será tamén nilpotente. Porén, non é certo necesariamente que unha álxebra de Lie resoluble sexa nilpotente; nin tampouco que unha álxebra de Lie nilpotente sexa abeliana.

Por outra banda, tense que existe un único ideal resoluble maximal para a inclusión en $\mathfrak{g}$. Isto débese a que se existiran dous, isto é $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, logo $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ tamén sería un ideal resoluble que contén a $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$. Así, defínese o *radical* dunha álxebra de Lie $\mathfrak{g}$, isto é, $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$, coma o único ideal resoluble maximal para a inclusión en $\mathfrak{g}$. En particular, $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ é o único ideal resoluble de $\mathfrak{g}$ que contén a todos os ideais resolubles de $\mathfrak{g}$.

Unha álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ dirase *simple* se $\dim\mathfrak{g} \geq 2$ e non ten ningún ideal propio non trivial. Equivalentemente, $\mathfrak{g}$ será simple se non ten ideais propios non triviais e se $\mathfrak{g}$ non é abeliana, xa que deste xeito aseguramos que $\dim\mathfrak{g} \geq 2$.

Por outra banda, $\mathfrak{g}$ dise *semisimple* se non ten ningún ideal resoluble non trivial, isto é, se $\operatorname{rad}\mathfrak{g} = 0$. Ademais, se $\mathfrak{g}$ é semisimple, o único ideal abeliano de $\mathfrak{g}$ é o 0. O recíproco tamén será certo, xa que se $\mathfrak{r} := \operatorname{rad}\mathfrak{g} \neq 0$, por ser resoluble, existirá $k \in \mathbb{N}$ de xeito que $\mathfrak{r}^{(k)} = [\mathfrak{r}^{(k-1)}, \mathfrak{r}^{(k-1)}] = 0$, con $\mathfrak{r}^{(k-1)} \neq 0$, polo que $\mathfrak{r}^{(k-1)}$ sería un ideal abeliano distinto de 0. Unha álxebra de Lie resulta ser semisimple se e só se é suma directa de álxebras de Lie simples.

Sexa $\mathfrak{g}$ unha álxebra de Lie. Defínese a *forma de Killing* $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{g}$ como

$$\mathcal{B}(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)), \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

A forma de Killing dunha álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ resulta ser unha forma bilinear simétrica de $\mathfrak{g}$ que xoga un papel esencial na teoría de álxebras e grupos de Lie.

Concluímos esta sección enunciando dous resultados que serán empregados posteriormente. Recordemos que unha álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ dise *compacta* se existe un grupo de Lie compacto G con álxebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Proposición 1.2 ([37, Proposición 3.25])**.** *Se $\mathfrak{g}$ é unha álxebra de Lie compacta, entón existe un produto interno en $\mathfrak{g}$ para o cal $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é antisimétrico para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

O seguinte resultado dinos como se comporta $\mathcal{B}$ con respecto ós automorfismos de álxebras de Lie de $\mathfrak{g}$. Recordemos que un automorfismo de $\mathfrak{g}$ é un isomorfismo de $\mathfrak{g}$ que preserva o corchete de Lie, e que todo automorfismo dun grupo de Lie G ten por diferencial a un automorfismo da súa álxebra de Lie. Ademais, denotaremos por $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ o conxunto dos automorfismos dunha álxebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Proposición 1.3 ([37, Proposición 1.36])**.** *Sexa $\mathfrak{g}$ unha álxebra de Lie, $\mathcal{B}$ a súa forma de Killing, e $A \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, logo*

(a) *$\mathcal{B}$ é A-invariante, isto é, $\mathcal{B}(AX, AY) = \mathcal{B}(X,Y)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

(b) *Sexan $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Entón $\mathcal{B}(\mathrm{ad}(Z)X, Y) + \mathcal{B}(X, \mathrm{ad}(Z)Y) = 0$.*

Capítulo 2

Espazos simétricos

Este capítulo está centrado na introdución e no estudo da estrutura tanto xeométrica como alxébrica dos espazos simétricos, con énfase naqueles de tipo non compacto.

Deste xeito, comezamos introducindo a noción de espazo simétrico, deducimos algúns feitos inmediatos da definición, e presentamos algúns exemplos sinxelos de espazos simétricos. Na Sección 2.1 estudamos a descomposición de Cartan da álxebra de Lie do grupo de isometrías dun espazo simétrico, o que nos permite distinguir na Sección 2.2 entre espazos simétricos de tipo euclídeo, tipo compacto e tipo non compacto. A continuación, pasamos a centrarnos nos espazos simétricos de tipo non compacto. Así, introducimos a descomposición de Iwasawa (Sección 2.3), a través da cal identificaremos o noso espazo simétrico cun grupo de Lie resoluble con métrica invariante á esquerda. Esta identificación vainos permitir reescribir a xeometría do noso espazo simétrico en termos de álxebras de Lie, que é precisamente o obxectivo da Sección 2.4.

En canto ás referencias que se empregaron neste capítulo, ata a Sección 2.2, con esta incluída, seguiuse esencialmente [37]. Por outra banda, nas sección 2.3 empregáronse principalmente resultados de [24]. Xa por último, na Sección 2.4 seguiuse principalmente [13, pp. 85-87].

Definición 2.1. Diremos que unha variedade de Riemann conexa M é un *espazo simétrico* se para cada punto $p \in M$ existe unha isometría $\sigma_p \colon M \to M$, chamada *reflexión xeodésica*, tal que $\sigma_p(p) = p$, e $(\sigma_p)_{*p} = -\operatorname{id}$.

Observación 2.2. Obsérvese que, dado que cada reflexión xeódesica σ_p con $p \in M$ fixa o punto p e a súa diferencial é a oposta da identidade, séguese de [21, Lema I.11.2] que é única en cada punto.

No seguinte resultado vemos que os espazos simétricos son variedades completas e homoxéneas.

Proposición 2.3. *Sexa M un espazo simétrico, $p \in M$ un punto arbitrario, e σ_p a súa reflexión xeodésica. Entón, tense que:*

(a) *Se γ é unha xeodésica tal que $\gamma(0) = p$, entón $\sigma_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.*

(b) *M é completo.*

(c) *M é homoxéneo. De feito, dados $p_1, p_2 \in M$ tense que σ_m, con m punto medio de p_1 e p_2 dunha xeodésica minimizante que os une, é unha isometría de M tal que $\sigma_m(p_1) = p_2$.*

Demostración. (a) En primeiro lugar, como σ_p, a reflexión xeodésica de M no punto p, é unha isometría, entón a curva α definida como $\alpha := (\sigma_p \circ \gamma)$ é una xeodésica con condicións iniciais $\alpha(0) = (\sigma_p \circ \gamma)(0) = \sigma_p(p) = p$, $\dot{\alpha}(0) = (\sigma_p)_{*p}(\dot{\gamma}(0)) = -\dot{\gamma}(0)$. Pola unicidade das xeodésicas que pasan por un mesmo punto coa mesma velocidade, terase necesariamente que $\alpha(t) = \gamma(-t)$.

(b) Vexamos primeiro que M é completo, o cal, polo Teorema de Hopf-Rinow [25, p.169] equivale a probar que é xeodesicamente completo. Para iso, sexa $\gamma_p \colon [0, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ unha xeodésica tal que $\gamma_p(0) = p$. Sexa agora $q = \gamma_p(t_0)$, con $t_0 \in (\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)$, e consideramos $\beta(t) := \gamma_p(\varepsilon - t)$, é dicir á curva que obtemos percorrendo γ_p en sentido contrario. Tense entón que β está definida para $t \in (0, \varepsilon]$. Sexa agora $c(t) = \beta(t + \varepsilon - t_0)$, que é unha xeodésica definida en $(t_0 - \varepsilon, t_0]$, tal que $c(0) = q$, polo que empregando (a), $(\sigma_q \circ c)(t) = c(-t) = \beta(-t + \varepsilon - t_0) = \gamma_p(t + t_0)$, e como c está definida ata $t_0 > \frac{\varepsilon}{2}$ entón γ_p poderase estender ata $2t_0 > \varepsilon$. Deste xeito, como o t_0 fora fixado de xeito arbitrario, podemos seguir definindo indefinidamente γ_p a toda a recta real. Polo tanto, concluímos que M é xeodesicamente completo.

(c) Vexamos agora que M é homoxéneo. Sexan $p, q \in M$ dous puntos arbitrarios, e $\gamma \colon [-t_0, t_0] \to M$ un segmento de xeodésica minimizante que os une con $\gamma(-t_0) = p$, e $\gamma(t_0) = q$, cuxa existencia vén garantida por un corolario do teorema de Hopf-Rinow [25, Corolario 6.21], tendo en conta que M é conexa e xeodesicamente completa. Sexa $m = \gamma(0) \in M$ o punto medio de tal segmento xeodésico. Entón se consideramos a isometría σ_m, e a curva $\beta := \sigma_m \circ \gamma$, logo, por (a), terase que $\beta(t) = \gamma(-t)$, e polo tanto $\sigma_m(p) = \sigma_m(\gamma(-t_0)) = \beta(-t_0) = \gamma(t_0) = q$, polo que se ten o resultado. □

Observación 2.4. Do resultado anterior dedúcese que o grupo de isometrías $\mathrm{I}(M)$ dun espazo simétrico M, que resulta ser un grupo de Lie [31, pp. 400-416], actúa transitivamente sobre M. Polo tanto M é difeomorfo ó cociente de $\mathrm{I}(M)$ polo grupo de isotropía dun punto fixado pero arbitrario $p \in M$ (véxase [26, p. 552]), é dicir $M \cong G/K$, con G grupo de Lie e $K = G_p$ subgrupo pechado de G, que ademais, será compacto por [37, Proposición 6.17]). De feito, tal difeomorfismo virá dado mediante a asignación

$$\begin{aligned} G/K &\longrightarrow M \\ gK &\longmapsto g(p). \end{aligned}$$

Ademais, podemos restrinxirnos á compoñente conexa da identidade do grupo de isometrías $\mathrm{I}(M)$, como veremos na proposición seguinte.

Proposición 2.5. *Sexa $G = \mathrm{I}^0(M)$ a compoñente conexa da identidade do grupo de isometrías $\mathrm{I}(M)$ dun espazo simétrico M. Entón, G é un grupo de Lie que tamén actúa transitivamente sobre M.*

Demostración. En primeiro lugar, é un resultado elemental da teoría de grupos de Lie o feito de que a compoñente conexa do elemento neutro dun grupo de Lie é tamén un grupo de Lie (pode verse en [26, Proposición 7.14]).

Vexamos agora que G actúa transitivamente sobre M. Para iso, sexan $p, q \in M$, e comprobemos que existe $h \in G = \mathrm{I}^0(M)$ de xeito que $h(p) = q$. Pola Proposición 2.3 (c), tense que se consideramos un segmento de xeodésica $\gamma\colon [0,1] \to M$ unindo p e q, logo $\sigma_{\gamma(\frac{1}{2})}(p) = q$. Ademais, como $\sigma_p(p) = p$, logo $\sigma_{\gamma(\frac{1}{2})} \circ \sigma_p(p) = q$. Sexa agora

$$\begin{aligned} \psi\colon [0,1] &\longrightarrow \mathrm{I}(M) \\ t &\longmapsto \sigma_{\gamma(\frac{t}{2})} \circ \sigma_p. \end{aligned}$$

Aínda que non o faremos xa que habería que entrar en detalle, pódese probar que ψ é continua considerando en $\mathrm{I}(M)$ a topoloxía compacto-aberta subxacente á estrutura de $\mathrm{I}(M)$ como grupo de Lie. Ademais, tense que $\psi(0) = \sigma_p^2 = \mathrm{id}$, e que $\psi(1) = \sigma_{\gamma(\frac{1}{2})} \circ \sigma_p$, polo que ψ é un camiño en $\mathrm{I}(M)$ unindo o elemento identidade do grupo de isometrías cunha isometría que leva p en q, polo que se conclúe o resultado. □

Observación 2.6 (Espazos simétricos e pares simétricos)*.* A partir de agora neste capítulo, a non ser que se diga o contrario, dado un espazo simétrico M, este considerarémolo como G/K para $G = \mathrm{I}^0(M)$, e K o grupo de isotropía dun punto $p \in M$. Porén, cabe sinalar que na práctica dado un espazo simétrico $M \cong G/K$, non sempre se considera $G = \mathrm{I}^0(M)$. De xeito máis preciso, é moi habitual tomar como G a algún grupo de Lie que non necesariamente actúa efectivamente sobre M, senón que actúa de xeito case efectivo sobre M, isto é, tal que o núcleo inefectivo $\{g \in G : g(p) = p, \text{ para todo } p \in M\}$ é un grupo discreto de G. Deste xeito, usualmente adóitase considerar un *par simétrico* $(G,\ K)$, onde G é un grupo de Lie conexo que actúa isometricamente e case efectivamente sobre M, K é un subgrupo compacto de G, e tal que existe un automorfismo involutivo s de G de xeito que $G_0^s \subset K \subset G^s$; onde $G^s := \{g \in G\colon s(g) = g\}$ e G_0^s é a compoñente conexa do elemento neutro de G^s. En todo caso, se (G, K) é un par simétrico asociado ó espazo simétrico $M \cong G/K$, entón G resulta ser un recubrimento finito de $\mathrm{I}^0(M)$, de xeito que ambos grupos, G e $\mathrm{I}^0(M)$, teñen a mesma álxebra de Lie. Estas sutilezas non xogarán un papel importante neste traballo.

A continuación, veremos algúns exemplos clásicos de espazos simétricos.

Exemplo 2.7 (Os espazos modelo $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{R}H^n$ como espazos simétricos)**.** Vexamos que a variedade diferenciable $\mathbb{R}^n$ coa métrica usual é un espazo simétrico. Para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$, consideramos a aplicación $\sigma_p(p+v) = p - v$, para $v \in \mathbb{R}^n$. É claro que σ_p é unha isometría, pois $(\sigma_p)_{*(p+v)} = \mathrm{id}$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Ademais, σ_p deixa fixo o punto p, e $\sigma_{*p} = -\mathrm{id}$, polo que σ_p é unha reflexión xeodésica respecto do punto p, e deste xeito tense que $\mathbb{R}^n$ é un espazo simétrico.

Por outra banda, sexa $\mathbb{S}^n$ a esfera centrada na orixe de radio 1 en $\mathbb{R}^{n+1}$. Trátase dunha subvariedade de Riemann coa métrica inducida da euclidiana, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dado $p \in \mathbb{S}^n$, consideramos a aplicación dada por $\sigma_p(q) = -q + 2\langle q, p\rangle p$. Intuitivamente, se consideramos unha base ortonormal $\{v_0, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ con $p = v_0$, logo $q = \sum_{i=0}^n \langle q, v_i\rangle v_i$, e $\sigma_p(q) = \langle q, v_0\rangle v_0 - \sum_{i=1}^n \langle q, v_i\rangle v_i$, polo que se mantén a compoñente do vector q na dirección de p e se consideran as opostas do resto, de xeito que se 'reflexaría' o vector q con respecto de p. Vexamos que, de feito, σ_p é unha reflexión xeodésica respecto do punto p. En primeiro lugar, como σ_p é linear, logo $(\sigma_p)_{*q} = \sigma_p$ para todo $q \in \mathbb{S}^n$. Pódese comprobar facilmente que $\langle \sigma_p(v), \sigma_p(w)\rangle = \langle v, w\rangle$, polo que σ_p é unha isometría. Ademais, $\sigma_p(p) = p$, e no espazo tanxente a p, isto é, $T_p\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p\rangle = 0\}$, tense que $(\sigma_p)_{*p} = -\operatorname{id}$, polo que se conclúe que $\mathbb{S}^n$ é tamén un espazo simétrico.

De xeito similar, pódese comprobar que para o espazo hiperbólico real $\mathbb{R}H^n$, isto é,

$$\mathbb{R}H^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{1,n} : \langle x, x\rangle = -1, \ x_0 > 0\},$$

onde $\mathbb{R}^{1,n}$ denota ó espazo de Lorentz-Minkowski (é dicir, a un espazo vectorial real de dimensión $n+1$ dotado da métrica lorentziana $\langle x, y\rangle = -x_0y_0 + \sum_{k=1}^n \langle x_i, y_i\rangle$), a aplicación $\sigma_p(x) = -x - 2\langle x, p\rangle p$ é tamén unha reflexión xeodésica para todo $p \in \mathbb{R}H^n$.

Exemplo 2.8 (Grupos de Lie compactos)**.** Sexa G un grupo de Lie compacto. Tense que este admite sempre unha *métrica bi-invariante* (véxase [25, Corolario 3.15]), é dicir, unha métrica g, que é *invariante pola esquerda e pola dereita*, isto é

$$R_h^* g = L_h^* g = g, \quad \text{para todo } h \in G.$$

Neste caso, tense que a aplicación $\sigma_e(h) = h^{-1}$ é a reflexión xeodésica no elemento neutro e. En primeiro lugar, claramente fixa ó elemento neutro, e como $\sigma_e(\operatorname{Exp}(tX)) = \operatorname{Exp}(tX)^{-1} = \operatorname{Exp}(-tX)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $X \in \mathfrak{g}$, logo $(\sigma_e)_{*e} = -\operatorname{id}$.

Por outra banda, tense que σ_e é unha isometría de G. En primeiro lugar, como $(\sigma_e)_{*e} = -\operatorname{id}$, logo σ_e é unha isometría en e. Por outra banda, como claramente $\sigma_e \circ L_h = R_{h^{-1}} \circ \sigma_e$, e por tanto $(\sigma_e)_{*h} \circ (L_h)_{*e} = (R_{h^{-1}})_{*e} \circ (\sigma_e)_{*e}$, e as traslacións pola esquerda e pola dereita son isometrías por ser ser a métrica de G bi-invariante, terase que $(\sigma_e)_{*h}$ tamén o é para todo $h \in G$. Por último, dado $g \in G$, pódese comprobar tamén de xeito similar que $\sigma_g = L_g \circ R_g \circ \sigma_e$ é unha isometría de G que deixa fixo g e para a que ademais $(\sigma_g)_{*g} = -\operatorname{id}$, polo que para calquera punto de G a reflexión xeodésica respecto del é isometría de G. Deste xeito, conclúese que G é un espazo simétrico.

Exemplo 2.9 (As grassmannianas de k-planos)**.** As grassmanianas de k-planos sobre os espazos vectoriais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ ou sobre o módulo pola dereita $\mathbb{H}^n$, onde $\mathbb{H}$ denota a álxebra dos cuaternios, que se denotan por $G_k(\mathbb{R}^n)$, $G_k(\mathbb{C}^n)$ e $G_k(\mathbb{H}^n)$, respectivamente, son, esencialmente, espazos nos que os k-subespazos vectoriais son os puntos de tales conxuntos. Así, por exemplo, tense que $\mathbb{R}P^n = G_1(\mathbb{R}^n)$, pois neste caso os puntos de tal espazo pódense identificar cos 1-subespazos vectoriais en $\mathbb{R}^n$, isto é, as rectas pasando pola orixe.

Aínda que non entraremos en detalle, pódese ver, por exemplo en [37, pp. 131-133], que as grassmannianas son tamén espazos simétricos. En particular, tamén serán espazos simétricos o espazo proxectivo real $\mathbb{R}P^n$, o espazo proxectivo complexo $\mathbb{C}P^n$, e o espazo proxectivo cuaterniónico $\mathbb{H}P^n$.

2.1. A descomposición de Cartan

Unha vez introducidos os espazos simétricos, veremos que, dado un espazo simétrico $M \cong G/K$, con $G = \mathrm{I}^0(M)$, e K grupo de isotropía dun punto $p \in M$ fixado, sempre é posible atopar unha descomposición da álxebra de Lie do seu grupo de isometrías, chamada *descomposición de Cartan*, mediante a suma directa de dous subespazos, a saber, un correspondente á álxebra de Lie do grupo de isotropía e outro que será isomorfo a T_pM. En primeiro lugar, diremos que unha aplicación diferenciable $\sigma\colon M \to M$, con M variedade diferenciable en xeral, é unha involución se $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Obsérvese que a reflexión xeodésica σ_p, para calquera $p \in M$, é unha involución, xa que por ser σ_p^2 unha isometría e $(\sigma_p^2)_{*p} = (\sigma_p)_{*p} \circ (\sigma_p)_{*p} = \mathrm{id}_{*p}$, entón como ademais $\sigma_p^2(p) = p$, logo como consecuencia da unicidade das isometrías co mesmo valor e coa mesma diferencial nun mesmo punto, necesariamente se terá que $(\sigma_p)^2 = \mathrm{id}_M$. Tense agora o seguinte resultado.

Proposición 2.10. *Sexa $M \cong G/K$ un espazo simétrico, con $G = \mathrm{I}^0(M)$ e K grupo de isotropía dun punto fixado $p \in M$. Sexa s a aplicación $s\colon G \to G, g \mapsto \sigma_p g \sigma_p$. Entón tense:*

(a) *A diferencial de s, isto é, $s_*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, é unha involución.*

(b) *Se $G^s := \{g \in G\colon s(g) = g\}$, entón $G_0^s \subset K \subset G^s$.*

Demostración. (a) En primeiro lugar, como $\sigma_p = \sigma_p^{-1}$, entón s é unha conxugación por un elemento $\sigma_p \in \mathrm{I}(M)$ fixado, polo que s será un automorfismo que preserva G. Ademais, como $(\sigma_p)^2 = \mathrm{id} \in G$, claramente se terá que $s^2(h) = h$, para todo $h \in G$, polo que s é unha involución. Polo tanto, tamén se terá que $s_* \circ s_* = (s^2)_* = \mathrm{id}$, e deste xeito s_* é unha involución.

(b) Vexamos que $K \subset G^s$. Dado $h \in K$, entón $s(h)(p) = (\sigma_p h \sigma_p)(p) = p = h(p)$. Ademais, $(s(h))_{*p} = (\sigma_p)_{*p} h_{*p} (\sigma_p)_{*p} = (-\mathrm{id}) h_{*p} (-\mathrm{id}) = h_{*p}$. Agora, como unha isometría está caracterizada polo seu valor e pola súa diferencial nun punto, tense logo que $s(h) = h$. Como $h \in K$ é arbitrario, próbase así que $K \subset G^s$.

Vexamos agora que $G_0^s \subset K$. En primeiro lugar, tense que G_s é un subgrupo de Lie de G, pois é inmediato ver que é un grupo abstracto, e ademais é pechado pois se $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G^s$ é unha sucesión que converxe a un $g \in G$, logo, por ser s continua,

$$s(g) = \lim_{n\to\infty} s(g_n) = \lim_{n\to\infty} g_n = g,$$

polo que $g \in G^s$. Así, polo teorema de Cartan [26, Teorema 20.12], G^s será un subgrupo de Lie (pechado) de G, e polo tanto a compoñente conexa do elemento neutro tamén. Deste xeito, ten sentido considerar a súa álxebra de Lie. Sexa $X \in \mathrm{Lie}(G_0^s)$, isto é, na álxebra de Lie de G_0^s, entón $\mathrm{Exp}(tX) \in G_0^s$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora, como $s(\mathrm{Exp}(tX)) = \mathrm{Exp}(tX)$ por definición de G_0^s, séguese que $\sigma_p \mathrm{Exp}(tX) \sigma_p = \mathrm{Exp}(tX)$, polo que aplicando ambas expresións a p, temos que $\sigma_p \mathrm{Exp}(tX)(p) = \mathrm{Exp}(tX)(p)$. Agora ben, como $(\sigma_p)_{*p} = -\mathrm{id}$, tense para todo t suficientemente pequeno que σ_p non pode fixar outro punto distinto de p. Entón, necesariamente $\mathrm{Exp}(tX)(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, polo que $\mathrm{Exp}(tX) \in K$, e como G_0^s é un grupo de Lie conexo, está xerado por unha veciñanza do elemento neutro que ó mesmo tempo é homeomorfa a un aberto de $\mathrm{Lie}(G_0^s)$, polo que se ten o resultado. □

Motivados por este resultado, introducimos a seguinte

Definición 2.11. Se $M \cong G/K$ é un espazo simétrico, onde $K = G_p$, con $p \in M$, chámase *involución de Cartan* de M á diferencial da aplicación $s\colon G \to G, g \mapsto \sigma_p g \sigma_p$, que pola Proposición 2.10, xa vimos que en efecto é unha involución. Ademais denotaremos esta diferencial por θ, isto é, $\theta = s_*\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Neste punto, é claro que se M é un espazo simétrico, logo o par formado por $\mathrm{I}^0(M)$ e o grupo de isotropía K dun punto $p \in M$ é un par simétrico. En efecto, isto terase pola Proposición 2.10 e porque ademais se ten que $\mathrm{I}(M)$, e polo tanto, $\mathrm{I}^0(M)$ actúa de xeito efectivo en M.

Por outra banda, pódese ver en [37, p. 145] que o cociente dos dous elementos de calquera par simétrico é tamén un espazo simétrico. De feito, tal e como se desenvolve en [37], todos os resultados que enunciamos para espazos simétricos serán tamén certos para pares simétricos, aínda que por simplicidade o faremos para espazos simétricos tal e como dixemos que os íamos a considerar na Observación 2.6.

Proposición 2.12. *Sexa $M \cong G/K$ un espazo simétrico, con $G = \mathrm{I}^0(M)$ e K grupo de isotropía dalgún $p \in M$. Entón, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{p}$ son os autoespazos asociados ós autovalores $+1$ e -1, respectivamente, da involución de Cartan θ respecto do punto p. Ademais, $\mathfrak{k}$ é a álxebra de Lie de K e, por outra banda, tamén se ten que*

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}.$$

Demostración. En primeiro lugar, como pola Proposición 2.10 $\theta^2 = \mathrm{id}$, entón θ diagonaliza, e ademais ten como posibles autovalores a ± 1. Isto tense de xeito inmediato do feito de que

$$X = \frac{1}{2}(X + \theta X) + \frac{1}{2}(X - \theta X),$$

para todo vector $X \in \mathfrak{g}$, polo que queda expresado como a suma dun autovector asociado ó autovalor 1 e de outro asociado ó -1; entón pódese atopar unha base formada por autovectores asociados a ± 1. Deste xeito, $\mathfrak{g}$ poderase descompoñer como suma directa de dous autoespazos de s_*, isto é $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{p}$ son os autoespazos asociados ós autovalores 1 e -1, respectivamente.

Vexamos agora que $\mathfrak{k}$ é a álxebra de Lie de $K = G_p$. Para iso, como $G_0^s \subset K \subset G^s$ pola Proposición 2.10 (b), terase que a álxebra de Lie de K é a mesma que a de G^s, xa que esta última é a mesma que a de G_0^s.

Sexa $\mathfrak{g}'$ a álxebra de Lie de G^s. Vexamos que $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{k}$. Se $X \in \mathfrak{g}'$, entón $\mathrm{Exp}(tX) \in G^s$, logo $s(\mathrm{Exp}(tX)) = \mathrm{Exp}(tX)$. Agora empregando o feito de que $\mathrm{Exp} \circ s_* = s \circ \mathrm{Exp}$, entón $\mathrm{Exp}(tX) = \mathrm{Exp} \circ s_*(tX)$. Agora, derivando a ambos lados en $t = 0$, e tendo en conta que $\mathrm{Exp}_{*0} = \mathrm{id}$,

$$X = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\mathrm{Exp} \circ s_*(tX)) = \mathrm{Exp}_{*0}(\frac{d}{dt}_{|t=0}(ts_*(X))) = s_*(X),$$

e así $X \in \mathfrak{k}$. Por outra banda, o feito de que $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}'$ séguese de que dado $X \in \mathfrak{k}$, entón $s_*(X) = X$, polo que $s(\operatorname{Exp}(X)) = \operatorname{Exp}(s_*(X)) = \operatorname{Exp}(X)$. Ademais, polo feito de ser $\mathfrak{k}$ álxebra de Lie terase que $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$.

Por último, a inclusión $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ tense do feito de que, como s_* é un homomorfismo de álxebras de Lie, entón dado $X \in \mathfrak{p}$, $s_*([X, X]) = [s_*(X), s_*(X)] = [-X, -X] = [X, X]$. A inclusión $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ obtense de maneira análoga. □

Definición 2.13. Sexa M un espazo simétrico, chamaremos *descomposición de Cartan* de M á descomposición dada na Proposición 2.12, para a involución de Cartan de M.

Observación 2.14. En xeral, se M é un espazo homoxéneo para o cal o grupo de Lie G actúa transitivamente, podemos asociarlle a cada $X \in \mathfrak{g}$ un campo de vectores X^*, chamado *campo de vectores fundamental* en M, mediante $X^*_p = \frac{d}{dt}_{|t=0} \operatorname{Exp}(tX)(p)$. Fixado $p \in M$, definimos tamén a aplicación

$$\begin{aligned} f\colon \mathfrak{g} &\longrightarrow T_pM \\ X &\longmapsto \frac{d}{dt}_{|t=0} \operatorname{Exp}(tX)(p). \end{aligned}$$

De feito, se chamamos K ó grupo de isotropía dun punto $p \in M$, terase que tal aplicación coincide coa diferencial de $\phi := \varphi \circ \pi$, sendo $\varphi\colon G/K \to M$, $gK \mapsto g(p)$, o difeomorfismo visto na Observación 2.4 e $\pi\colon G \to G/K$, $g \mapsto gK$, a proxección canónica. En efecto, dado $X \in \mathfrak{g}$, e identificando $\mathfrak{g} \simeq T_eG$ como espazos vectoriais, tense que

$$\phi_*(X) = \phi_*(\frac{d}{dt}_{|t=0} \operatorname{Exp}(tX)) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi \circ \operatorname{Exp}(tX) = f(X),$$

polo que $\phi_* = f$, e polo tanto, f é linear. Ademais, como sabemos que π é submersión, e φ é un difeomorfismo, logo $\phi_* = f$ é sobrexectiva. Ademais, se $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ é a álxebra de Lie de K, logo, dado $X \in \mathfrak{k}$, tense que $\operatorname{Exp}(tX)(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, polo que $f(X) = 0$. Deste xeito, $\mathfrak{k} \subset \ker f$. A igualdade séguese do feito de que por ser f sobrexectiva, $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(G) = \dim(K) + \dim(M) = \dim(\mathfrak{k}) + \dim(\operatorname{Im} f)$.

Supoñamos agora que $M \cong G/K$ é un espazo simétrico, onde recordemos $K = G_p$ para algún $p \in M$, e sexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ a descomposición de Cartan de M. Logo, como $\mathfrak{k} = \ker f$, entón necesariamente $\mathfrak{p}$ e T_pM son isomorfos como espazos vectoriais.

Observación 2.15. Obsérvese que, como consecuencia de que $\operatorname{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e pola Proposición 2.12, pódese comprobar de xeito sinxelo que $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{p}$ son espazos ortogonais respecto de $\mathcal{B}$, isto é, que $\mathcal{B}(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$.

2.2. Tipos de espazos simétricos

Nesta sección definiremos o concepto de tipo nun espazo simétrico. Este daranos información sobre a álxebra de Lie do seu grupo de isometrías a partir da forma de Killing restrinxida á álxebra de Lie do subespazo da descomposición de Cartan que se corresponde co espazo tanxente do espazo simétrico. Aínda que imos traballar estritamente con espazos simétricos de tipo non compacto, por completitude (e porque isto non supón moito máis traballo), presentaremos os resultados correspondentes ó concepto de tipo en termos xerais.

Definición 2.16. Sexa $M \cong G/K$ un espazo simétrico. M dirase un *espazo simétrico irreducible* se a restrición da representación de isotropía $K \to \mathrm{GL}(T_pM)$, $k \mapsto k_{*p}$, á compoñente conexa da identidade de K é irreducible.

Definición 2.17. Sexa $M \cong G/K$ un espazo simétrico e sexa $\mathfrak{p}$ o autoespazo de autovalor un da involución de Cartan da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo G. Sexa $\mathcal{B}$ a forma Killing de $\mathfrak{g}$, e $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ a súa restrición a $\mathfrak{p}$. Entón M dise:

- De tipo compacto se $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ é definida negativa.
- De tipo non compacto se $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ é definida positiva.
- De tipo euclídeo se $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} \equiv 0$.

Agora enunciamos un lema, que é consecuencia do Lema de Schur [37, Lema 5.1] e que nos servirá para probar a proposición seguinte.

Lema 2.18 ([37, Lema 6.15])**.** *Sexan $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dúas formas bilineares e simétricas sobre un espazo vectorial V de xeito que $\mathcal{B}_1$ é definida positiva. Se un grupo de Lie compacto K actúa irreducíblemente en V por unha representación ρ, de xeito que $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ son invariantes por K, isto é, se*

$$\mathcal{B}_i(\rho(k)v, \rho(k)w) = \mathcal{B}_i(v, w),$$

para todo $k \in K$, para todo $v, w \in V$, entón $\mathcal{B}_2 = \lambda\mathcal{B}_1$ para algunha constante λ.

Proposición 2.19. *Sexa $M \cong G/K$ un espazo simétrico. Entón terase que*

(a) *Se M é irreducible, entón M será ou ben de tipo compacto, de tipo non compacto, ou de tipo euclídeo.*

(b) *Se M é de tipo compacto, entón G é semisimple e G e M son compactos.*

(c) *Se M é de tipo non compacto, entón G é semisimple e G e M son non compactos.*

(d) *M é de tipo euclídeo se e só se $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = 0$.*

Demostración. (a) Para probar este apartado empregaremos o Lema 2.18. En primeiro lugar, xa temos que K actúa irreducíblemente en $\mathfrak{p} \simeq T_pM$, polo que só falta ver que $g(\cdot,\cdot)$ e $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ son invariantes por K, sendo $g(\cdot,\cdot)$ a métrica de M. Agora ben, o primeiro feito séguese directamente de que todo $k \in K$ é unha isometría de M e que dado $v \in V$, $\rho(k)v = (\varphi_k)_{*p}(v) = k_{*p}(v)$. Por outra banda, dedúcese da Observación 2.14 que a restrición a $\mathfrak{p}$ da aplicación f alí definida establece unha equivalencia entre a representación de isotropía $\rho\colon K \to \mathrm{GL}(T_pM)$ e a representación adxunta de K en $\mathfrak{p}$, é dicir, $\mathrm{Ad}\colon K \to \mathrm{GL}(\mathfrak{p})$, $k \mapsto \mathrm{Ad}(k)$. Posto que $\mathrm{Ad}(k)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é un automorfismo da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$, verifica que $\mathcal{B}(\mathrm{Ad}(k)X, \mathrm{Ad}(k)Y) = \mathcal{B}(X,Y)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Así, mediante a equivalencia de representacións mencionada ($\mathrm{Ad}(k) \cong k_*$), tense en particular que $\mathcal{B}(k_*X, k_*Y) = \mathcal{B}(X,Y)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{p}$ e todo $k \in K$. Deste xeito, conclúese que $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} = \lambda g(\cdot,\cdot)$, para algún λ, co cal se terá que $\mathcal{B}$ será ou ben definido positivo, definido negativo, ou identicamente cero.

(b) Sexa s a involución de Cartan de M, entón, s_* preserva $\mathcal{B}$ por ser un automorfismo de $\mathfrak{g}$. Vexamos en primeiro lugar que $\mathcal{B}_{|\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$ é definido negativo. Como $\mathfrak{k}$ é compacta por ser K compacto, entón, pola Proposición 1.2, $\mathfrak{k}$ admite un produto escalar para o cal $\mathrm{ad}(X)$ é unha transformación antisimétrica de $\mathfrak{g}$ para todo $X \in \mathfrak{k}$. Polo tanto, dado $X \in \mathfrak{k}$, terase que $\mathrm{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ terá autovalores imaxinarios puros, polo que $\mathcal{B}(X,X) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)^2) \leq 0$. Vexamos que, de feito $\mathcal{B}(X,X) < 0$ para todo $X \in \mathfrak{k}$ distinto de 0. Por redución ó absurdo, se $X \neq 0$ e $\mathcal{B}(X,X) = 0$, entón $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)^2) = 0$, polo que necesariamente $\mathrm{ad}(X) = 0$, o cal é equivalente a que $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Porén, como nun espazo simétrico o grupo de isometrías actúa de maneira efectiva, logo farao de maneira case efectiva, polo que $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{k}$ non poden ter ideais distintos do cero en común [37, p.145], polo que por ser $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k}$ claramente un ideal de $\mathfrak{g}$ que tamén o é de $\mathfrak{k}$, entón $X = 0$.

Para concluír, como $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ é definida negativa por hipótese, entón $\mathcal{B}$ é non dexenerada, logo polo criterio de Cartan de semisimplicidade [24, Teorema 1.45], $\mathfrak{g}$ é semisimple. Ademais, como $\mathcal{B}$ é definida negativa se, e só se, $\mathfrak{g}$ é compacta por [37, p.45], entón tamén o será G, e M por ser cociente de G.

(c) Razoando do mesmo xeito que (b), chégase a que por hipótese, como $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ é definida positiva, entón $\mathcal{B}$ é non dexenerada, polo que $\mathfrak{g}$ é semisimple. Agora, como $\mathcal{B}$ xa non é definida positiva, entón $\mathfrak{g}$ é non compacta, polo que G non será compacto. Agora, como $M \cong G/K$, e K é compacto, logo M non será compacto.

(d) Por hipótese, tense que se $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} = 0$, entón, como $\mathcal{B}(\mathfrak{k},\mathfrak{p}) = 0$, e $\mathcal{B}_{|\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$ é definida negativa, o subespazo

$$\ker \mathcal{B} := \{X \in \mathfrak{g} : \mathcal{B}(X,Y) = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\},$$

coincide con $\mathfrak{p}$. Ademais, $\ker \mathcal{B}$ é un ideal de $\mathfrak{g}$. En efecto, pois se $X \in \ker \mathcal{B}$, e $Y \in \mathfrak{g}$, logo dado $Z \in \mathfrak{g}$, $\mathcal{B}([X,Y],Z) = -\mathcal{B}(Y,[X,Z]) = 0$, polo que $[\ker \mathcal{B}, \mathfrak{g}] \subset \ker \mathfrak{g}$. Agora, por ser $\mathfrak{p} = \ker \mathcal{B}$ ideal, tamén será álxebra de Lie, e terase que $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{k} = 0$, xa que $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$. Reciprocamente, se $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] = 0$, logo xunto co feito de que $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, terase de xeito inmediato que $\mathcal{B}_{|\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}} = 0$. $\square$

2.3. A descomposición de Iwasawa

Nesta sección preséntanse un par de resultados que serán de gran relevancia no traballo como son a descomposición de Iwasawa para álxebras e grupos de Lie. A primeira proporcionaranos unha descomposición dunha álxebra de Lie semisimple como suma (a nivel de espazos vectoriais) dunha álxebra compacta, unha abeliana e unha nilpotente. Por outra banda, a correspondente para grupos de Lie diranos que, para un grupo de Lie semisimple, o produto cartesiano dos subgrupos conexos correspondentes ás álxebras de

Lie da descomposición de Iwasawa da álxebra de Lie do grupo en cuestión é difeomorfo ó mesmo. Dito resultado será o que empregaremos para considerar ós espazos simétricos de tipo non compacto, para os que a álxebra de Lie do seu grupo de isometrías é semisimple pola Proposición 2.19, como grupos de Lie.

Aínda así, como o ámbito no que se sitúan estes resultados se afasta do contido que se pretende abarcar, non se entrará en detalle na teoría no que se encadra, a saber, a teoría de sistemas de raíces, nin se demostrará o teorema correspondente a grupos de Lie. Deste xeito, limitarémonos a dar unha breve introdución dos espazos de raíces restrinxidas e que nos permitirá enunciar e entender tales resultados de descomposición. Para máis detalles, pódese consultar [24] ou [21].

Proposición 2.20 ([24, Teorema 6.51])**.** *Sexa $M \cong G/K$ un espazo simétrico, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ a súa descomposición de Cartan respecto da involución θ. Sexa $\mathfrak{a}$ un subespazo abeliano maximal de $\mathfrak{p}$. Entón todo subespazo abeliano maximal de $\mathfrak{p}$ é conxugado de $\mathfrak{a}$ baixo a acción adxunta de K, polo que todos os subespazos abelianos maximais teñen a mesma dimensión.*

Esta proposición permítenos dar a seguinte definición.

Definición 2.21. Sexa $M \cong G/K$ un espazo simétrico, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ a súa descomposición de Cartan. Defínese o *rango* de M como $\dim \mathfrak{a}$, sendo $\mathfrak{a}$ un subespazo abeliano maximal de $\mathfrak{p}$.

Agora enunciaremos un lema que nos será útil.

Lema 2.22 ([20, Apéndice A.8])**.** *Sexa V un espazo vectorial de dimensión finita, e $\mathcal{A} \subset \operatorname{End}(V)$ un conxunto de endomorfismos diagonalizables que conmutan entre si. Entón, todos os endomorfismos de $\mathcal{A}$ diagonalizan simultaneamente, isto é, existe unha base de V formada por autovectores de todos os endomorfismos en $\mathcal{A}$.*

A partir de agora, centrarémonos sempre nos espazos simétricos de tipo non compacto, pois como diximos ao comezo da Sección 2.2, serán estes o contexto no que traballaremos.

Dado un espazo simétrico de tipo non compacto, podemos dotar á álxebra de Lie do seu grupo de isometrías dun produto escalar de xeito natural a partir da forma de Killing da mesma.

Lema 2.23. *Sexa $M \cong G/K$ un espazo simétrico de tipo non compacto, entón a forma bilinear simétrica*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\theta \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto \mathcal{B}_\theta(X, Y) := -\mathcal{B}(\theta(X), Y), \end{aligned}$$

é definida positiva. Ademais, tamén se ten que:

(a) *Se $X \in \mathfrak{k}$, entón $\operatorname{ad}(X) \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é antisimétrica respecto de $\mathcal{B}_\theta$.*

(b) *Se $X \in \mathfrak{p}$, entón $\operatorname{ad}(X) \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é simétrica respecto de $\mathcal{B}_\theta$.*

Demostración. Vexamos en primeiro lugar que $\mathcal{B}_\theta$ é definida positiva. Sexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ a descomposición de Cartan de M. Se $X \in \mathfrak{p}$, logo

$$\mathcal{B}_\theta(X, X) = -\mathcal{B}(\theta X, X) = -\mathcal{B}(-X, X) > 0,$$

xa que $\mathcal{B}_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ é definida positiva por ser M de tipo non compacto. Por outra banda, se $X \in \mathfrak{k}$, logo

$$\mathcal{B}_\theta(X, X) = -\mathcal{B}(\theta X, X) = -\mathcal{B}(X, X) > 0,$$

por ser $\mathcal{B}_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$ definido negativo por ser $\mathfrak{k}$ compacta. Así concluímos que $\mathcal{B}_\theta$ é en efecto un produto escalar en $\mathfrak{g}$.

(a) Dado $X \in \mathfrak{k}$, Vexamos que se cumpre que $\mathcal{B}_\theta(\mathrm{ad}(X)(Y), Z) = -\mathcal{B}_\theta(Y, \mathrm{ad}(X)(Z))$, para todo $Y, Z \in \mathfrak{g}$. En efecto, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\theta(\mathrm{ad}(X)(Y), Z) &= \mathcal{B}_\theta([X, Y], Z) = -\mathcal{B}(\theta([X, Y]), Z)\\ &= -\mathcal{B}([\theta X, \theta Y], Z) = -\mathcal{B}([X, \theta Y], Z)\\ &= \mathcal{B}(\theta Y, [X, Z]) = -\mathcal{B}_\theta(Y, [X, Z])\\ &= -\mathcal{B}_\theta(Y, \mathrm{ad}(X)(Z)),\end{aligned}$$

como queriamos probar.

(b) Próbase de xeito totalmente análogo, tendo en conta que para $X \in \mathfrak{p}$, $\theta X = -X$. □

Observación 2.24. Sexa $H \in \mathfrak{a}$, con $\mathfrak{a}$ un subespazo abeliano maximal de $\mathfrak{p}$. Dado que $H \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, temos que $\theta H = -H$, e polo tanto tense que

$$\mathcal{B}_\theta(\mathrm{ad}(H)X, Y) = -\mathcal{B}_\theta(X, \mathrm{ad}(\theta H)Y) = \mathcal{B}_\theta(X, \mathrm{ad}(H)Y),$$

polo que $\mathrm{ad}(H) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é autoadxunto con respecto de $\mathcal{B}_\theta$. Ademais, o conxunto

$$\mathcal{A} = \{\mathrm{ad}(H) : H \in \mathfrak{a}\}$$

é un conxunto conmutativo de automorfismos de $\mathfrak{g}$. En efecto, pois dados $H_1, H_2 \in \mathfrak{a}$, tense que

$$[\mathrm{ad}(H_1), \mathrm{ad}(H_2)] = \mathrm{ad}([H_1, H_2]),$$

xa que $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ é un homomorfismo de álxebras de Lie. Agora ben tense que, por ser os elementos de $\mathcal{A}$ autoadxuntos, estes diagonalizarán, polo que empregando o Lema 2.22, terase que o farán de xeito simultáneo.

Definición 2.25. Sexa $M \cong G/K$ un espazo simétrico de tipo non compacto, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ a súa descomposición de Cartan, e $\mathfrak{a}$ un subespazo maximal abeliano de $\mathfrak{p}$. Chámanse *espazo de raíz restrinxida* a cada un dos autoespazos comúns de $\{\mathrm{ad}(H) : H \in \mathfrak{a}\}$, isto é, a cada un dos subespazos vectoriais de $\mathfrak{g}$ definidos para cada $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ como

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \lambda(H)X \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$$

con $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$. Por outra banda, os $\lambda \neq 0$ tales que $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$ serán as *raíces restrinxidas* de $\mathfrak{g}$, e denotaremos por Σ o conxunto delas, isto é,

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* : \lambda \neq 0,\ \mathfrak{g}_\lambda \neq 0\}.$$

Deste xeito, temos a seguinte descomposición en suma directa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda,$$

chamada *descomposición de* $\mathfrak{g}$ *en espazos de raíces restrinxidas*.

Observación 2.26. Obsérvese que, nas condicións da Definición 2.25, terase que $\mathfrak{g}_0 \neq 0$ pois $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_0$, e $\mathfrak{a} \neq 0$, xa que todo subespazo xerado por un único vector non nulo é abeliano e distinto do subespazo trivial.

Observación 2.27. Obsérvese ademais que a Definición 2.25 depende da elección do punto $p \in M$ considerado (que determina a descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$), e da elección do subespazo maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Agora ben, terase que diferentes eleccións de $p \in M$ e do subespazo abeliano maximal $\mathfrak{a}$ darán lugar a descomposicións que serán conxugadas baixo a acción adxunta de G [24, Corolario 6.19 e Teorema 6.51]

Proposición 2.28. *Sexa* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda$ *unha descomposición en espazos de raíces de* $\mathfrak{g}$*. Logo téñense as seguintes propiedades:*

(a) *A suma directa* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda$ *tamén é ortogonal respecto de* $\mathcal{B}_\theta$*.*

(b) $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ *para calquera raíces* λ, μ *de* Σ*.*

(c) $\theta \mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_{-\lambda}$*, polo que se* $\lambda \in \Sigma$*, logo tamén* $-\lambda \in \Sigma$*.*

(d) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{k}_0$*, como suma directa ortogonal, onde* $\mathfrak{k}_0 = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$*, é dicir o centralizador de* $\mathfrak{a}$ *en* $\mathfrak{k}$*, isto é*

$$Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{k} : [X, H] = 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$$

Demostración. (a) Sexan $\lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*$ distintos, isto é, para os que existe $H \in \mathfrak{a}$ de xeito que $\lambda(H) \neq \mu(H)$. Supoñamos, sen perda de xeneralidade, que $\lambda(H) \neq 0$, xa que algún dos dous ten que ser distinto de 0, por ser distintos. Logo, por ser $H \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, tense que polo Lema 2.23 (b), $\mathrm{ad}(H)$ é simétrica respecto de $\mathcal{B}_\theta$ e deste xeito se $X \in \mathfrak{g}_\lambda$ e $Y \in \mathfrak{g}_\mu$, entón

$$\mathcal{B}_\theta(X, Y) = \frac{1}{\lambda(H)} \mathcal{B}_\theta(\mathrm{ad}(H)(X), Y) = \frac{1}{\lambda(H)} \mathcal{B}_\theta(X, \mathrm{ad}(H)(Y)) = \frac{\mu(H)}{\lambda(H)} \mathcal{B}_\theta(X, Y),$$

e como $\frac{\mu(H)}{\lambda(H)} \neq 1$, tense necesariamente que $\mathcal{B}_\theta(X, Y) = 0$.

(b) Sexan $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_\mu$. Pola identidade de Jacobi, tense que

$$\begin{aligned} 0 &= [H, [X, Y]] + [Y, [H, X]] + [X, [Y, H]] = [H, [X, Y]] + [Y, \lambda(H)X] + [X, -\mu(H)Y] \\ &= [H, [X, Y]] - \lambda(H)[X, Y] - \mu(H)[X, Y] = [H, [X, Y]] - ((\lambda + \mu)(H)[X, Y], \end{aligned}$$

polo que despexando se obtén que $[X,Y] \in \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$, como queriamos probar.

(c) Sexa $X \in \mathfrak{g}_\lambda$, logo, tendo en conta que $\theta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é un homomorfismo involutivo de álxebras de Lie, e que como $H \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, logo $\theta H = -H$, tense logo que

$$[H, \theta X] = \theta[\theta H, X] = \theta[-H, X] = \theta(-\lambda(H))X = -\lambda(H)\theta X$$

polo que $\theta\mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{g}_{-\lambda}$. Agora, tamén se terá $\theta\mathfrak{g}_{-\lambda} \subset \mathfrak{g}_\lambda$, polo que aplicando θ a ambos lados séguese que $\mathfrak{g}_{-\lambda} = \theta^2\mathfrak{g}_{-\lambda} \subset \theta\mathfrak{g}_\lambda$, obténdose a igualdade.

(d) En primeiro lugar, polo apartado anterior, tense que $\theta\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0$, polo que $\mathfrak{g}_0$ é θ-invariante. Deste xeito, terase que como pola descomposición de Cartan, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, logo $\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_0) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0)$. Agora, como $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0$ e $\mathfrak{a}$ é un subespazo abeliano maximal en $\mathfrak{p}$, logo terase que $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0$. Vexamos isto último. Por redución ó absurdo, se existe algún $X \in (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0) \setminus \mathfrak{a}$ entón $[X, H] = 0$ para todo $H \in \mathfrak{a}$, xa que $X \in \mathfrak{g}_0$. Así, o subespazo $\mathfrak{p} + \mathbb{R}X \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0$ é un subespazo abeliano en $\mathfrak{p}$ que contén estrictamente a $\mathfrak{a}$, contradicindo a maximalidade do mesmo.

Por último, tense claramente que $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{k} : [X, H] = 0 \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$, polo que se conclúe o resultado. □

Observación 2.29. Sexa $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. Como a forma de Killing é non dexenerada en $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, podemos definir $H_\lambda \in \mathfrak{a}$ pola relación $\mathcal{B}(H_\lambda, H) = \lambda(H)$, para todo $H \in \mathfrak{a}$. Logo podemos introducir un producto escalar en $\mathfrak{a}^*$ dado por

$$\langle \lambda, \mu \rangle := \mathcal{B}(H_\lambda, H_\mu).$$

De feito, como pode verse en [24, pp. 103-116], tense que Σ é un *sistema abstracto de raíces en* $\mathfrak{a}^*$, isto é, un subconxunto finito de vectores non nulos do espazo vectorial euclídeo $\mathfrak{a}^*$ que satisfai as seguintes propiedades:

(a) $\mathfrak{a}^* = \operatorname{span} \Sigma$.

(b) Dados $\alpha, \beta \in \Sigma$, tense que $a_{\alpha\beta} := \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$.

(c) Dados $\alpha, \beta \in \Sigma$, tense que $\beta - a_{\alpha\beta}\alpha \in \Sigma$.

Observación 2.30. Pódese tomar un criterio de positividade en Σ do seguinte xeito. Consideramos un hiperplano linear P no espazo vectorial $\mathfrak{a}^*$ que non interseque a Σ, o cal é posible posto que Σ é un conxunto finito. Entón, P divide o $\mathfrak{a}^*$ en dous semiespazos que chamamos P^+ e P^-. Agora, diremos que $\lambda \in \Sigma$ é positiva se pertence ó semiespazo P^+ e negativo se pertence a P^-. Denotaremos por Σ^+ o conxunto de raíces positivas con este criterio. Ademais, denotaremos por $\mathfrak{n}$ ó subespazo vectorial

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda,$$

que é unha subálxebra de Lie de $\mathfrak{g}$, xa que $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$, e a suma de raíces positivas ou ben non é raíz, ou ben é unha raíz positiva.

Proposición 2.31 (Descomposición de Iwasawa de álxebras de Lie)**.** *Toda álxebra de Lie real semisimple* $\mathfrak{g}$ *admite unha descomposición en suma directa de subespazos vectoriais da forma*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

onde $\mathfrak{a}$ *é unha álxebra de Lie abeliana,* $\mathfrak{n}$ *é nilpotente,* $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ *é unha subálxebra de Lie resoluble de* $\mathfrak{g}$*, e* $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$*.*

Demostración. En primeiro lugar, $\mathfrak{a}$ é abeliana por construción. Por outra banda, pola Proposición 2.28 (b), terase que os $\mathfrak{n}_i$ da serie central descendente de $\mathfrak{n}$ son

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}_1 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] &= \left[\bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda, \bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda \right] \subset \bigoplus_{\lambda_1, \lambda_2 \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{\lambda_1 + \lambda_2}, \\
\mathfrak{n}_2 &\subset \left[\bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda, \bigoplus_{\lambda_1, \lambda_2 \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{\lambda_1 + \lambda_2} \right] \subset \bigoplus_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \\
&\vdots \\
\mathfrak{n}_i &\subset \left[\bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda, \bigoplus_{\lambda_1, \ldots \lambda_i \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{\sum_{k=1}^{i+1} \lambda_k} \right] \subset \bigoplus_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{i+1} \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_{\sum_{k=1}^{i+1} \lambda_k},
\end{aligned}$$

e como Σ é finito, terase que $\mathfrak{n}_j = 0$ a partir dalgún $j \in \mathbb{N}$. Vexamos isto con detalle. Para iso, sexa $\mu \in \mathfrak{a}^*$ de xeito que $\langle \mu, \lambda \rangle > 0$ para todo $\lambda \in \Sigma^+$, que non será máis que o vector normal ao hiperplano P definido en 2.30 apuntado cara P^+. Sexan agora

$$a := \min_{\lambda \in \Sigma^+} \langle \mu, \lambda \rangle, \quad b := \max_{\lambda \in \Sigma^+} \langle \mu, \lambda \rangle.$$

Entón, tomando un $k \in \mathbb{N}$ de xeito que $k > \frac{b}{a}$, logo $\mathfrak{n}^k = 0$, xa que se $\sum_{i=1}^k \lambda_i$ é raíz positiva con $\lambda_{i=1} \in \Sigma^+$, logo $\langle \mu, \sum_i^k \lambda_i \rangle \geq ka > \frac{b}{a} a = b$, o cal é unha contradición. Deste xeito, concluímos que $\mathfrak{n}$ é nilpotente.

Deste xeito, como de novo pola Proposición 2.28 (b) se ten que $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$, logo $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ será resoluble, por selo $\mathfrak{n}$ tamén, xa que é nilpotente.

Vexamos agora que $\mathfrak{k} + (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$ é unha suma directa. Para iso, sexa $X \in \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$. Logo, $\theta X = X$, e $\theta X \in \mathfrak{a} \oplus \theta \mathfrak{n}$ pola Proposición 2.28, e deste xeito, necesariamente $X \in \mathfrak{a}$, pois $\mathfrak{n} \cap \theta \mathfrak{n} = 0$. Agora ben se $X \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ logo $X = 0$, pois $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{p} = 0$.

Por último, vexamos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. En efecto, como $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda$, e $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$ pola Proposición 2.28 (d), logo, dado $X \in \mathfrak{g}$, existirán $H \in \mathfrak{a}$, $X_0 \in \mathfrak{m}$ e $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$ para cada $\lambda \in \Sigma$ de xeito que

$$X = H + X_0 + \sum_{\lambda \in \Sigma} X_\lambda = (X_0 + \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (X_{-\lambda} + \theta(X_{-\lambda}))) + H + \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (X_\lambda - \theta(X_{-\lambda})),$$

polo que X se pode descompoñer en suma de elementos de $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{n}$, respectivamente. $\square$

Agora enunciamos o resultado fundamental desta sección.

Teorema 2.32 (Descomposición de Iwasawa, [24, Teorema 6.46])**.** *Sexa G un grupo de Lie semisimple, e sexa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ unha descomposición de Iwasawa da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Sexan A e N os subgrupos de Lie conexos de G con álxebras de Lie $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{n}$ respectivamente. Entón os grupos A e N son pechados e simplemente conexos, e a aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi \colon K \times A \times N &\longrightarrow G \\ (k, a, n) &\longmapsto kan, \end{aligned}$$

é un difeomorfismo.

Observación 2.33. Obsérvese que, nas condicións do Teorema 2.32, tense que o subgrupo pechado $\{1\} \times A \times N$ de $K \times A \times N$ é difeomorfo ao subgrupo $AN = \{an : a \in A,\ n \in N\}$ de G por ser $\Phi \colon K \times A \times N \to G$ un difeomorfismo. Deste xeito, tense que AN é un subgrupo de Lie (pechado) de G.

2.4. O modelo resoluble dun espazo simétrico de tipo non compacto

Nesta sección veremos como, a partir da descomposición de Iwasawa, un espazo simétrico de tipo non compacto será difeomorfo ó subgrupo de Lie resoluble AN do grupo de isometrías. Tal difeomorfismo permitiranos definir de xeito natural unha métrica en AN que ademais veremos que é invariante á esquerda. Xa por último, deduciremos a expresión da conexión de Levi-Civita do mesmo.

Proposición 2.34. *Sexa $M \cong G/K$ un espazo simétrico de tipo non compacto, con $G = \mathrm{I}^0(M)$ e $K = G_p$, con $p \in M$. Sexa $G = K \times A \times N$ a descomposición de Iwasawa de G, dada polo Teorema 2.32. Entón a aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi \colon AN &\longrightarrow M \\ h &\longmapsto h(p), \end{aligned}$$

é un difeomorfismo.

Demostración. En primeiro lugar, vexamos que φ é inxectiva. Sexan $g, h \in AN$, se $\varphi(g) = \varphi(h)$ logo $g(p) = h(p)$, e entón, $h^{-1}g(p) = p$, e deste xeito $h^{-1}g \in K \cap AN$. Agora ben, polo Teorema 2.32, isto implica que necesariamente $h^{-1}g = e$ pois doutro xeito a aplicación Φ dada en dito teorema non sería bixectiva. Polo tanto, $g = h$, e φ é inxectiva. Ademais, φ tamén será sobrexectiva. En efecto, dado $q \in M$, logo pola transitividade do grupo G actuando en M, existe $g \in G$ de xeito que $g(q) = p$, ou, equivalentemente, que $g^{-1}(p) = q$. Agora, usando a descomposición de Iwasawa, existirán $k \in K, a \in A, n \in N$ de xeito que $g = kan$. Entón tense que

$$q = g^{-1}(p) = n^{-1}a^{-1}k^{-1}(p) = n^{-1}a^{-1}(p).$$

Agora, como AN é un subgrupo de G, $n^{-1}a^{-1} = (an)^{-1} \in AN$ polo que φ é sobrexectiva. Por último, vexamos que φ é un difeomorfismo local. Para iso, observamos que estamos tomando $\varphi = \phi_{|AN}$, é dicir, como a restrición a AN da aplicación

$$\begin{aligned} \phi\colon G &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto g(p), \end{aligned}$$

que é unha submersión [26, Teorema 7.25]. Se consideramos agora a súa diferencial, isto é, $\phi_{*e}\colon \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \to T_pM$, sabemos que é sobrexectiva e ademais $\ker \phi_* = \mathfrak{k}$, polo tanto $\varphi_{*e} = (\phi_{|AN})_{*e}\colon \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \to T_pM$ é un isomorfismo. Agora, pola homoxeneidade dos grupos de Lie, terase que $\varphi_{*g} = (\phi_{|AN})_{*g}\colon T_gAN \to T_{g(p)}M$ tamén é un isomorfismo para todo $g \in AN$. Deste xeito, como φ é un difeomorfismo local e bixectivo, concluímos que φ é un difeomorfismo. □

Observación 2.35. Pola Proposición 2.34, tense que todo espazo simétrico de tipo non compacto resulta ser difeomorfo a un grupo de Lie. Ademais, como M é unha variedade de Riemann, o difeomorfismo φ permítenos dotar a AN dunha estrutura de variedade de Riemann grazas ó pull-back φ^*g da métrica de Riemann g de M. Ademais, tal métrica é invariante pola esquerda no grupo de Lie AN. En efecto, sexa $h \in AN$, vexamos entón que

$$L_h^*\varphi^*g = \varphi^*g.$$

En primeiro lugar, tense que, dado $h' \in AN$,

$$(h^{-1} \circ \varphi \circ L_h)(h') = h^{-1}(\varphi(hh')) = h^{-1}(hh'(p)) = h'(p) = \varphi(h'),$$

polo que $(h^{-1} \circ \varphi \circ L_h) = \varphi$. Entón, como $h \in AN \subset G$ é unha isometría de M, tense logo que

$$L_h^*\varphi^*g = L_h^*\varphi^*(h^{-1})^*g = (h^{-1} \circ \varphi \circ L_h)^*g = \varphi^*g,$$

polo que se obtén que φ^*g é invariante pola esquerda.

A partir de agora, se M é un espazo simétrico con métrica de Riemann g, denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{AN} := \varphi^*g$ tanto á métrica invariante á esquerda en AN como ó correspondente produto escalar en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

Observación 2.36. Supoñamos que $M \cong G/K$ é un espazo simétrico irreducible de tipo non compacto. Logo, polo Lema 2.18, a métrica de M nun punto $p \in M$ é un múltiplo do produto escalar da forma de Killing modificada $\mathcal{B}_\theta$ restrinxida a $\mathfrak{p}$, isto é

$$\phi^*g_p(\cdot, \cdot) = k\mathcal{B}_\theta,$$

para algún $k > 0$, sendo $\phi\colon G \to M$, $g \mapsto g(p)$. Sexa, para tal constante k, o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle := k\mathcal{B}_\theta$, definido en $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Vexamos agora cal é a relación entre $\langle \cdot, \cdot \rangle_{AN}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sexan $X, Y \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Denotando cos subíndices $\mathfrak{p}, \mathfrak{k}$ as proxeccións, con respecto a $\mathcal{B}_\theta$, de X e de Y, tense que

$$\langle X, Y \rangle_{AN} = \varphi^*g_p(X_\mathfrak{k} + X_\mathfrak{p}, Y_\mathfrak{k} + Y_\mathfrak{p}) = g_p(\phi_*X_\mathfrak{p}, \phi_*Y_\mathfrak{p}),$$

xa que $X_{\mathfrak{k}}, Y_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{k} = \ker \phi_{*e}$. Agora, como $\phi^* g_p = k\mathcal{B}_\theta$, e tendo en conta que $\mathfrak{p} = \ker(\theta + \mathrm{id})$, e $\mathfrak{k} = \ker(\theta - \mathrm{id})$, logo

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle_{AN} &= k\mathcal{B}_\theta(X_{\mathfrak{p}}, Y_{\mathfrak{p}}) = k\mathcal{B}_\theta(\frac{\mathrm{id}-\theta}{2}X, \frac{\mathrm{id}-\theta}{2}Y)\\ &= \frac{k}{4}\mathcal{B}_\theta(2X_{\mathfrak{a}} + X_{\mathfrak{n}} - \theta X_{\mathfrak{n}}, 2Y_{\mathfrak{a}} + Y_{\mathfrak{n}} - \theta Y_{\mathfrak{n}})\\ &= \frac{k}{4}(4\mathcal{B}_\theta(X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}}) + \mathcal{B}_\theta(X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}}) + \mathcal{B}_\theta(\theta X_{\mathfrak{n}}, \theta Y_{\mathfrak{n}}))\\ &= k\mathcal{B}_\theta(X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}}) + \frac{k}{2}\mathcal{B}_\theta(X_{\mathfrak{n}, Y_{\mathfrak{n}}}) = \langle X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}}\rangle + \frac{1}{2}\langle X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}}\rangle.\end{aligned}$$

Nótese ademais que, por cumprirse para $\mathcal{B}_\theta$, logo claramente tamén se ten que, para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$\langle \mathrm{ad}(X)Y, Z\rangle = -\langle Y, \mathrm{ad}(\theta X)Z\rangle.$$

Vexamos por último a fórmula para a conexión de Levi-Civita do grupo de Lie con métrica invariante á esquerda AN. Sexan entón X, Y, Z campos de vectores en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, sabemos que esta vén dada pola fórmula de Koszul

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle_{AN} =& \frac{1}{2}(X\langle Y, Z\rangle_{AN} + Y\langle X, Z\rangle_{AN} - Z\langle X, Y\rangle_{AN}\\ &+ \langle [X, Y], Z\rangle_{AN} + \langle [Z, Y], X\rangle_{AN} + \langle [Z, X], Y\rangle_{AN}).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Agora ben, por ser a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{AN}$ invariante pola esquerda, entón terase, para calquera vectores $V, W \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ que, entendendo os mesmos como campos de vectores avaliados en $e \in AN$,

$$\langle V_g, W_g\rangle_{AN} = \langle L_{g*}V_e, L_{g*}W_e\rangle_{AN} = L_g^*\langle V_e, W_e\rangle_{AN} = \langle V_e, W_e\rangle_{AN},$$

para todo $g \in AN$. Polo tanto, o produto escalar de campos de vectores invariante á esquerda en AN é constante, e deste xeito os primeiros tres termos de (2.1) anularanse. Agora, usando a antisimetría do corchete de Lie e tendo en conta que $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$, logo para calquera X, Y, Z campos de vectores en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ tense que

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z\rangle_{AN} &= \frac{1}{2}(\langle [X, Y], Z\rangle_{AN} - \langle [Y, Z], X\rangle_{AN} - \langle [X, Z], Y\rangle_{AN})\\ &= \frac{1}{4}(\langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(\langle [X, Y], Z\rangle - \langle \mathrm{ad}(Y)(Z), X\rangle - \langle \mathrm{ad}(X)(Z), Y\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(\langle [X, Y], Z\rangle + \langle \mathrm{ad}(\theta Y)(X), Z\rangle + \langle \mathrm{ad}(\theta X)(Y), Z\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(\langle [X, Y] + \mathrm{ad}(\theta Y)(X) + \mathrm{ad}(\theta X)(Y), Z\rangle,\end{aligned}$$

e deste xeito, concluímos que

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle_{AN} = \frac{1}{4}(\langle [X, Y] + [\theta X, Y] - [X, \theta Y], Z\rangle, \tag{2.2}$$

para calquera X, Y, Z campos de vectores en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

Capítulo 3

O espazo hiperbólico complexo

Neste capítulo pasamos xa a centrarnos no espazo hiperbólico complexo, que é precisamente o espazo simétrico de tipo non compacto (e rango un) obxecto deste traballo, posto que no Capítulo 4 estudaremos unha certa clase das súas subvariedades homoxéneas minimais.

Comezaremos introducindo e describindo o espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$. Por outra banda, na Sección 3.1 estudaremos a súa estrutura riemanniana. Finalmente, na Sección 3.2, tratamos e detallamos de xeito explícito, para o caso particular do espazo hiperbólico complexo, as cuestións que se introduciron en xeral para espazos simétricos de tipo non compacto na Sección 2.3 do Capítulo 2. Para a exposición levada a cabo neste capítulo, seguimos fundamentalmente a referencia [19, pp. 8-29].

En primeiro lugar, introduciremos brevemente o espazo dentro do cal consideraremos como subvariedade aberta a $\mathbb{C}H^n$, isto é, o espazo proxectivo complexo $\mathbb{C}P^n$. Este defínese como o conxunto cociente de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ dado pola relación de equivalencia $z \sim \omega$, con $z, \omega \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ se existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de xeito que $\omega = \lambda z$. Equivalentemente, de xeito análogo ó que acontece co espazo proxectivo real $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$ pode verse tamén como o cociente da relación de equivalencia $\sim$ restrinxida á esfera de radio r, $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, a cal vén dada por $z \sim \omega$ se e só se existe $\lambda \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ de xeito que $\omega = \lambda z$.

A partir de agora, denotaremos por

$$\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$$

á proxección canónica de $\mathbb{S}^{2n+1}$ sobre o espazo proxectivo complexo $\mathbb{C}P^n$, chamada *aplicación* ou *fibración de Hopf*. De novo, de xeito similar ó que se dá no caso real, pódese comprobar, considerando cartas locais da forma $U_i = \{\pi(z_0, \dots, z_n) : z_i \neq 0\}$, que $\mathbb{C}P^n$ é unha variedade diferenciable de dimensión complexa n (e polo tanto de dimensión real $2n$).

Unha vez introducido $\mathbb{C}P^n$ xa podemos definir $\mathbb{C}H^n$, tanto no plano diferenciable coma no plano riemanniano. En primeiro lugar, en $\mathbb{C}^{n+1}$ considérase o seguinte produto escalar (non definido positivo)

$$\langle z, w \rangle = \mathrm{Re}(-z_0\bar{w}_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k\bar{w}_k), \tag{3.1}$$

para $z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$. Se identificamos $\mathbb{C}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{2n+2}$ de xeito que para $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ facemos

$$(z_0, \ldots, z_n) = (u_0 + \mathrm{i}\, u_1, \ldots, u_{2n} + \mathrm{i}\, u_{2n+1}) \equiv (u_0, u_1, \ldots, u_{2n}, u_{2n+1}),$$

entón, tal produto escalar identifícase co de sinatura $(2, 2n)$

$$\langle u, v \rangle = -u_0 v_0 - u_1 v_1 + \sum_{k=2}^{2n+1} u_k v_k,$$

en $\mathbb{R}^{2n+2}$, para $u, v \in \mathbb{R}^{2n+2}$.

Definamos agora o coñecido como espazo *anti-de Sitter* de radio $r \in \mathbb{R}$, isto é

$$H_1^{2n+1}(r) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z, z \rangle = -r^2\} \subset \mathbb{C}^{n+1}.$$

Entón, definimos $\mathbb{C}H^n$ como variedade diferenciable como a imaxe de $H_1^{2n+1}(r)$ pola proxección canónica $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$, é dicir,

$$\mathbb{C}H^n := \pi(H_1^{2n+1}(r)).$$

Agora imos a dar unha descrición alternativa de $\mathbb{C}H^n$. En primeiro lugar, observamos que o hiperplano complexo $\{(z_0, \ldots z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : z_0 = 0\}$ non corta ó espazo anti-de Sitter, xa que se $z \in H_1^{2n+1}(r)$, entón

$$\operatorname{Re}(-z_0 \bar{z}_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k \bar{z}_k) < 0,$$

e como $\sum_{k=1}^{n} z_k \bar{z}_k \geq 0$, logo necesariamente $\operatorname{Re}(-z_0 \bar{z}_0) < 0$, polo que $z_0 \neq 0$. Deste xeito, $\mathbb{C}H^n \subset U_0$, sendo U_0 o aberto $\{\pi(z_0, \ldots, z_n) : z_0 \neq 0\}$ en $\mathbb{C}P^n$, que se coñece como carta afín. Vexamos agora que

$$\mathbb{C}H^n = \{\pi(1, z_1, \ldots, z_n) : -1 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 < 0\}.$$

Se chamamos ó conxunto da dereita da igualdade C, entón se $\pi(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}H^n$, logo $-|z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = -r^2$, polo que dividindo a ambos lados da igualdade por $|z_0| \neq 0$, terase que

$$-1 + \frac{|z_1|^2}{|z_0|^2} + \ldots + \frac{|z_n|^2}{|z_0|^2} = -\frac{r^2}{|z_0|^2} < 0,$$

e como $\pi(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \pi(1, \frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}) \in C$, tense $\mathbb{C}H^n \subset C$. Para ver que $C \subset \mathbb{C}H^n$, sexa $\pi(1, z_1, \ldots, z_n) \in C$, logo existe $a \in \mathbb{R}$ de xeito que $-1 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = -a^2 < 0$, o cal é equivalente a que

$$-1 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = \frac{-r^2}{r^2/a^2},$$

e multiplicando a ambos lados da igualdade terase que

$$-\frac{r^2}{a^2} + |\frac{r}{a} z_1|^2 + \ldots + |\frac{r}{a} z_n|^2 = -r^2,$$

e así $\pi(1, z_1, \ldots, z_n) = \pi(\frac{r}{a}, \frac{r}{a}z_1, \ldots, \frac{r}{a}z_n) \in \mathbb{C}H^n$. Deste xeito, $\mathbb{C}H^n = \pi(\{1\} \times B_{\mathbb{C}^n}(0,1))$, polo que $\mathbb{C}H^n$ é difeomorfo a unha bóla aberta usual de $\mathbb{C}^n$ e así $\mathbb{C}H^n$ é unha subvariedade diferenciable aberta de $\mathbb{C}P^n$.

Vexamos agora que $\mathbb{C}H^n$ é un espazo homoxéneo. Para iso, consideramos a acción dada por

$$\begin{aligned} \phi\colon\ \mathrm{U}(1,n) \times \mathbb{C}H^n &\longrightarrow \mathbb{C}H^n \\ (A, \pi(z)) &\longmapsto \pi(Az), \end{aligned}$$

sendo $\mathrm{U}(1,n) = \{A \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C}) : AI_{1,n}A^* = I_{1,n}\}$, onde A^* denota a matriz conxugada da matriz trasposta de A, e onde

$$I_{1,n} = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right),$$

sendo I_n a matriz identidade de orde n. A acción que se deu está ben definida xa que $\pi(\lambda Az) = \pi(A\lambda z) = \pi(Az)$ para todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Ademais, esta é diferenciable como consecuencia de que a acción $\varphi\colon\ \mathrm{U}(1,n) \times H_1^{2n+1}(r) \to H_1^{2n+1}(r)$ dada por $(A, z) \mapsto Az$ é diferenciable, e π é unha submersión, polo que $\pi \circ \varphi$ é diferenciable. Deste xeito, tense o seguinte diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}(1,n) \times H_1^{2n+1}(r) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \pi"'] \arrow[dr, "\pi \circ \varphi"] & H_1^{2n+1}(r) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{U}(1,n) \times \mathbb{C}H^n \arrow[r, "\phi"'] & \mathbb{C}H^n \end{tikzcd}$$

e así, como $\mathrm{id} \times \pi$ é submersión, terase por [26, Prop.4.29] que ϕ é diferenciable.

Vexamos agora que a acción é transitiva. Para iso, chega con ver que a acción φ sobre o espazo $H_1^{2n+1}(r)$ o é. Para iso, sexa $z \in H_1^{2n+1}(r)$ arbitrario. Entón, completamos $\frac{1}{r}z$ a unha base $\mathbb{C}$-ortonormal respecto do produto $\langle \cdot, \cdot \rangle$, o cal se pode facer polo proceso de Gram-Schmidt. Así terase que existirán $z_1, \ldots, z_n \in H_1^{2n+1}(r)$ de xeito que

$$A = (\ \frac{1}{r}z \mid z_1 \mid \ldots \mid z_n\ ) \in \mathrm{U}(1,n),$$

onde A denota unha matriz cuxas columnas están constituidas (en columnas) polos elememos da base ortonormal $\{\frac{1}{r}z, z_1, \ldots, z_r\}$. Ademais, $Are_1 = z$, sendo $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ a base canónica de $\mathbb{C}^{n+1}$, e como $re_1 \in H_1^{2n+1}(r)$, e o $z \in H_1^{2n+1}(r)$ foi fixado arbitrariamente, logo φ é transitiva, e polo tanto tamén o será a acción inducida $\phi\colon\ \mathrm{U}(1,n) \times \mathbb{C}H^n \to \mathbb{C}H^n$.

Porén, interesaranos considerar como grupo que actúa transitivamente ó grupo unitario especial $\mathrm{SU}(1,n)$, isto é, o conxunto de matrices de $\mathrm{U}(1,n)$ con determinante igual a 1. De xeito parecido, pódese probar que $\mathrm{SU}(1,n)$ actúa transitivamente sobre $H_1^{2n+1}(r)$, de feito, cambiando de signo unha columna de A da forma z_i, con $i \geq 1$, pódese conseguir unha nova matriz con determinante igual a 1, e polo tanto en $\mathrm{SU}(1,n)$.

Temos polo tanto que $\mathbb{C}H^n$ é un espazo homoxéneo (como variedade diferenciable). Calculemos agora o subgrupo de isotropía dun punto, por exemplo de $\pi(re_1)$. Agora ben, as matrices $A \in \mathrm{SU}(n+1)$ tales que $\pi(Are_1) = \pi(re_1)$ necesariamente serán as que verifican $Are_1 = \lambda re_1$ para algún $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Deste xeito, a primeira fila e columna de A ten que ser λe_1. Logo o subgrupo de isotropía de $\pi(re_1)$ será o conxunto das matrices por bloques da forma $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n)$ con determinante igual a 1, isto é $\mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n))$, polo que podemos describir $\mathbb{C}H^n$ como

$$\mathbb{C}H^n = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(1)\,\mathrm{U(n)}),$$

onde $\mathrm{S}(\mathrm{U}(1)\,\mathrm{U(n)}) := \mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U(n)})$.

3.1. Estrutura riemanniana do espazo hiperbólico complexo

Unha vez visto que $\mathbb{C}H^n$ é un espazo homoxéneo, veremos que tamén será un espazo simétrico. Para iso é necesario introducir unha métrica de Riemann no mesmo. A idea será introducir unha métrica no espazo anti-de Sitter, e a partir desta, inducila en $\mathbb{C}H^n$ a través da proxección canónica $\pi\colon H_1^{2n+1}(r) \to \mathbb{C}H^n$.

Terase que o espazo tanxente a $H_1^{2n+1}(r)$ nun punto z do mesmo será

$$T_z H_1^{2n+1}(r) = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} : \langle z, w\rangle = 0\},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar dado en (3.1). Agora, restrinxíndonos a $H_1^{2n+1}(r)$, como $\frac{1}{r}z$ está asociado ó índice -1 da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, logo esta terá sinatura $(1, 2n)$ restrinxida ó subespazo $(\frac{1}{r}z)^\perp = T_z H_1^{2n+1}(r)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$, e será polo tanto unha métrica de Lorentz.

Sexa agora ∇ a conexión de Levi-Civita de $\mathbb{R}^{2n+2}$. Denotaremos por ξ ó campo de vectores normal a $H_1^{2n+1}(r)$ dado por $\xi_z = \frac{1}{r}z$ para cada $z \in H_1^{2n+1}(r)$, para o que se terá ademais que $\langle \xi, \xi \rangle = -1$. Logo, dado un campo de vectores tanxente $X \in T_z H_1^{2n+1}(r)$, que escribiremos en coordenadas locais como $X = \sum_{j=0}^{2n-1} x_j \frac{\partial}{\partial u_j}$, tense logo que

$$\nabla_X \xi = \frac{1}{r}\nabla_X \sum_{i=0}^{2n-1} u_i \frac{\partial}{\partial u_j} = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{2n-1} X u_i \frac{\partial}{\partial u_j} = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-1} x_j \frac{\partial u_i}{\partial u_j}\frac{\partial}{\partial u_j} = \frac{1}{r}X,$$

pois $\frac{\partial u_i}{\partial u_j} = 1$ se $i = j$, e $\frac{\partial u_i}{\partial u_j} = 0$ noutro caso. Así, pola fórmula de Weingarten (1.2), tense que o operador de configuración do espazo anti-de Sitter cumpre que $S_\xi X = -\frac{1}{r}X$. Logo, pola relación entre a segunda forma fundamental e o operador de configuración, $\langle -\frac{1}{r}X, Y\rangle = \langle I\!I(X,Y), \xi\rangle$ para X, Y tanxentes a $H_1^{2n+1}(r)$. Agora ben, como ξ_z xera o espazo normal ó espazo anti-de Sitter en cada $z \in H_1^{2n+1}(r)$, entón $I\!I(X,Y) = \frac{\langle X,Y\rangle}{r}\xi$, e deste xeito pola fórmula de Gauss (1.1) tense que a conexión de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ de $H_1^{2n+1}(r)$ vén dada por

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{\langle X, Y\rangle}{r}\xi,$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(H_1^{2n+1}(r))$.

Denotemos por $\widetilde{J}\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$, $\widetilde{J}X = iX$, a estrutura complexa de $\mathbb{C}^{n+1}$. Sexa $V = \widetilde{J}\xi = \mathrm{i}\,\xi$, que é un vector tanxente a $H_1^{2n+1}(r)$, pois $\langle z, \mathrm{i}\, z\rangle = \mathrm{Re}(-z_0\overline{\mathrm{i}\, z_0} + \sum_{k=1}^{n} z_k\overline{\mathrm{i}\, z_k}) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1}$. Ademais, V é unitario pois tense que $\langle V, V\rangle = \langle \xi, \xi\rangle = -1$. Logo, podemos descompoñer ortogonalmente o espazo tanxente a $H_1^{2n+1}(r)$ nas chamadas compoñentes *vertical* e *horizontal* como

$$TH_1^{2n+1}(r) = \mathbb{R}V \oplus V^{\perp},$$

onde $V^{\perp} = \{X \in TH_1^{2n+1}(r) : \langle X, V\rangle = 0\}$. O núcleo da diferencial π_{*z} é $\mathbb{R}V_z$, polo que se induce un isomorfismo entre $V_z^{\perp}$ e $T_{\pi(z)}\mathbb{C}H^n$. Así, a cada elemento $X \in T_{\pi(z)}\mathbb{C}H^n$, asóciaselle o único vector X_z^L de $V_z^{\perp}$ que cumpre $\pi_{*z}(X_z^L) = X$, e que se denomina levantamento horizontal de X a $H_1^{2n+1}(r)$.

Antes de introducir a métrica de Riemann, definiremos a estrutura case complexa en $\mathbb{C}H^n$, é dicir, un tensor J de tipo $(1,1)$ en $\mathbb{C}H^n$ tal que $J^2 = -\,\mathrm{id}$. Primeiro, consideremos a xeodésica $t \mapsto \varphi_t(z)$ sobre $H_1^{2n+1}(r)$ que parte de z con velocidade inicial $\widetilde{J}z = \mathrm{i}\, z = rV_z$, a cal recorre a fibra de $\pi(z)$, que é $\pi^{-1}(\pi(z)) = \{e^{\mathrm{i}\, t}z : 0 \le t \le 2\pi\}$. O conxunto $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ danos un grupo uniparamétrico de isometrías, e de feito, φ_t pódese expresar como $e^{\mathrm{i}\, t}\,\mathrm{id}$, sendo id a matriz identidade. Así, pódese ver facilmente que $\varphi_t \in \mathrm{U}(1,n)$. Ademais, por preservar as fibras, terase que $\pi\circ\varphi_t = \pi$, polo que, se $X \in T_{\pi(z)}\mathbb{C}H^n$, logo $\pi_{*e^{\mathrm{i}\, t}z}(\varphi_t)_{*z}X_z^L = \pi_{*z}X_z^L = X$. Ademais, como $(\varphi_t)_{*z}X_z^L \in V_{\varphi_t(z)}^{\perp}$ por ser $X_z^L \in V_z^{\perp}$, e φ_t unha isometría que preserva a distribución vertical, logo $X_{\varphi_t(z)}^L = (\varphi_t)_{*z}X_z^L$.

Con isto, podemos definir J, a estrutura case complexa de $\mathbb{C}H^n$, por $JX := \pi_*(\widetilde{J}X^L)$ para X campo de vectores en $\mathbb{C}H^n$, ou, de xeito equivalente, por $J\pi_*(X) = \pi_*(\widetilde{J}X)$, para X campo de vectores en $V^{\perp}$. Vexamos que J está ben definida. Por unha banda, como podemos identificar $(\varphi_t)_{*z} \equiv e^{\mathrm{i}\, t}\,\mathrm{id}$, logo $(\varphi_t)_{*z}$ e $\widetilde{J}$ conmutan. Como ademais, se ten que $\pi\circ\varphi_t = \pi$, logo

$$\pi_{*z}(\widetilde{J}X_z^L) = \pi_{*e^{\mathrm{i}\, t}z}((\varphi_t)_{*z}(\widetilde{J}X_z^L)) = \pi_{*e^{\mathrm{i}\, t}z}(\widetilde{J}(\varphi_t)_{*z}X_z^L) = \pi_{*e^{\mathrm{i}\, t}z}(\widetilde{J}X_{e^{\mathrm{i}\, t}z}^L).$$

Por último, terase claramente que J é linear, e, por ser $V^{\perp}$ $\widetilde{J}$-invariante, logo $J^2 = -\,\mathrm{id}$.

Agora introduciremos unha métrica de Riemann en $\mathbb{C}H^n$. Para isto, pediremos que a proxección π sexa unha submersión semi-riemanniana, facendo que a restrición de π_{*z} a $V_z^{\perp} \subset T_zH_1^{2n+1}(r)$ sexa unha isometría para cada $z \in H_1^{2n+1}(r)$. Así, definiremos en $\mathbb{C}H^n$ unha métrica mediante $\langle X, Y\rangle := \langle X^L, Y^L\rangle$, para X, Y vectores tanxentes nun mesmo punto a $\mathbb{C}H^n$. Tratarase dunha definición correcta, pois as isometrías φ_t actúan transitivamente nas fibras. Para ver que é definida positiva, tan só hai que ter en conta que a métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ten sinatura 2 en $\mathbb{C}^{n+1}$, e como ξ e V son dous vectores temporais (é dicir, de norma negativa) ortogonais para tal métrica, logo esta é definida positiva en $V^{\perp}$. Ademais tamén se tratará dunha métrica *hermitiana* pois, se X, Y son campos de vectores en $\mathbb{C}H^n$, logo

$$\langle JX, JY\rangle = \langle(\pi_*(\widetilde{J}X^L))^L, (\pi_*(\widetilde{J}Y^L))^L\rangle = \langle\widetilde{J}X^L, \widetilde{J}Y^L\rangle = \langle X^L, Y^L\rangle = \langle X, Y\rangle.$$

O espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$ é, de feito, un exemplo de *variedade de Kähler*. Unha variedade de Kähler é unha variedade complexa M dotada dunha métrica riemanniana de xeito que a estrutura case complexa J asociada é unha isometría en cada tanxente (i.e. a variedade M é hermitiana) e paralela respecto da conexión de Levi-Civita, isto é, $\nabla J = 0$. Xunto cos espazo euclidianos complexos $\mathbb{C}^n$ e os espazos proxectivos complexos $\mathbb{C}P^n$, os espazos hiperbólicos complexos $\mathbb{C}H^n$ constitúen unha das tres familias dos denominados espazos forma complexos: aquelas variedades de Kähler completas e simplemente conexas con curvatura seccional holomorfa constante, i.e. tal que a curvatura seccional de calquera 2-plano complexo span$\{X, JX\}$ é sempre a mesma, digamos c. Os casos $c > 0$, $c = 0$ e $c < 0$ correspóndense, respectivamente, con $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}H^n$. Para máis información sobre variedades complexas, Kähler e espazos forma complexos, pode consultarse [10, 36, 19].

3.2. O espazo hiperbólico complexo como espazo simétrico

Vexamos agora que $\mathbb{C}H^n$ é un espazo simétrico. Para iso, se consideramos $p = \pi(re_1)$, terase que a aplicación linear dada pola matriz

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -I_n \end{array}\right)$$

é unha isometría en $\mathbb{C}^{n+1}$ que inducirá unha isometría en $\mathbb{C}H^n$, posto que $A \in \mathrm{U}(1,n)$ e vimos que as matrices de $\mathrm{U}(1,n)$ inducen isometrías en $\mathbb{C}H^n$. Neste caso, a isometría inducida vén dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi(re_1)} \colon \mathbb{C}H^n &\longrightarrow \mathbb{C}H^n \\ \pi(z) &\longmapsto \sigma_{\pi(re_1)}(\pi(z)) := \pi(Az), \end{aligned}$$

que cumpre que $(\sigma_{\pi(re_1)} \circ \pi)_{*z} = (\pi \circ A)_{*z}$ para todo $z \in H_1^{2n+1}(r)$. Ademais, dado $z \in H_1^{2n+1}(r)$, terase empregando a regra da cadea, que

$$(\sigma_{\pi(re_1)})_{*\pi(z)} = \pi_{*Az} \circ A \circ (\pi_{*z})^{-1}_{|V^\perp}. \tag{3.2}$$

Ademais, é claro que $\sigma_{\pi(re_1)}$ deixa fixo $\pi(re_1)$.

Vexamos que $(\sigma_{\pi(re_1)})_{*\pi(re_1)} = -\,\mathrm{id}$. Isto tense do feito de que, dado $X \in T_{\pi(re_1)}\mathbb{C}H^n$, entón $X^L_{re_1} \in V^\perp$, polo que, empregando a igualdade (3.2) terase que

$$(\sigma_{\pi(re_1)})_{*\pi(re_1)}(X) = (\pi_{*re_1} \circ A \circ \pi^{-1}_{*re_1})(X) = \pi_{*re_1}(AX^L_{re_1}) = \pi_{*re_1}(-X^L_{re_1}) = -X,$$

para todo $X \in T_{\pi(re_1)}\mathbb{C}H^n$. Por último, observemos que como as matrices de $\mathrm{U}(1,n)$ actúan transitivamente sobre $\mathbb{C}H^n$, a existencia dunha reflexión xeodésica que é isometría en torno a un punto de $\mathbb{C}H^n$ implica a existencia de reflexións xeodésicas que son isometrías con respecto a calquera outro punto de $\mathbb{C}H^n$. Deste xeito, conclúese que $\mathbb{C}H^n$ é un espazo simétrico.

3.2.1. Estrutura do espazo hiperbólico complexo

Xa vimos que $\mathbb{C}H^n \cong \mathrm{SU}(1,n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(1)\,\mathrm{U(n)})$ é un espazo simétrico. Deste xeito, a partir de agora denotaremos $G = \mathrm{SU}(1,n)$, e $K = \mathrm{S}(\mathrm{U}(1)\,\mathrm{U(n)})$.

Agora, para denotar un tipo de matrices que empregaremos a partir de agora, fixaremos a notación

$$\lceil \lambda, v, X \rceil = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{i}\,\lambda & v^* \\ \hline v & X \end{array}\right),$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}^n$ e X unha matriz complexa de orde n.

Vexamos agora cales son as álxebras de Lie de G é de K. Por unha banda, como a álxebra de Lie de $G = \mathrm{SU}(1,n)$ é

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1,n) = \{Y \in \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C}) : Y I_{1,n} + I_{1,n} Y^* = 0, \ \operatorname{tr} Y = 0\},$$

que pode verse facilmente que coincide co conxunto

$$\{\lceil \lambda, v, X \rceil : \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{C}^n, X \in \mathfrak{u}(n), \mathrm{i}\,\lambda + \operatorname{tr} X = 0\}.$$

Pode verse ademais que

$$\lceil \lambda, v, X \rceil \lceil \mu, w, Y \rceil = \left(\begin{array}{c|c} -\lambda\mu + v^* w & \mathrm{i}\,\lambda w^* + v^* Y \\ \hline \mathrm{i}\,\mu v + X w & v w^* + X Y \end{array}\right),$$

para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{C}^n$ e $X, Y \in \mathfrak{u}(n)$. Deste xeito, pode obterse a seguinte expresión para o corchete de Lie de $\mathfrak{su}(1,n)$

$$[\lceil \lambda, v, X \rceil, \lceil \mu, w, Y \rceil] = \lceil 2 \operatorname{Im} v^* w, \mathrm{i}(\mu v - \lambda w) + X w - Y v, [X, Y] + v w^* - w v^* \rceil.$$

Agora, calculemos as expresión para a forma de Killing de $\mathfrak{su}(1,n)$. Por unha banda, é ben coñecido que a forma de Killing de $\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C})$ vén dada por

$$\mathcal{B}(A, B) = 2(n+1) \operatorname{tr} AB - 2 \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B. \tag{3.3}$$

Por unha banda, como a álxebra de Lie $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ é un ideal de $\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C})$, entón a súa forma de Killing é a restrición da forma de Killing de $\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C})$, isto é, $\mathcal{B}(A, B) = 2(n+1) \operatorname{tr} AB$. Agora ben, a forma de Killing de $\mathfrak{su}(1,n)$ será de novo a restrición da de $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$, xa que se pode ver facilmente que $\mathfrak{su}(1,n)$ é unha forma real da mesma, é dicir, que $\mathfrak{su}(1,n) \oplus \mathrm{i}\,\mathfrak{su}(1,n) = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$. Deste xeito, terase que

$$\mathcal{B}(A, B) = 2(n+1) \operatorname{tr} AB, \tag{3.4}$$

Sexa agora a aplicación linear $\theta \colon \mathfrak{su}(1,n) \to \mathfrak{su}(1,n)$ dada por

$$\theta \lceil \lambda, v, X \rceil = -\lceil \lambda, v, X \rceil^* = \lceil \lambda, -v, X \rceil.$$

Tal aplicación linear cumpre claramente que $\theta^2 = \mathrm{id}$, e ademais $\theta[A, B] = [\theta A, \theta B]$ para todos $A, B \in \mathfrak{su}(1, n)$, polo que é un homomorfismo de álxebras de Lie.

Agora, razoando como se fai na proba do Lema 2.23 para a descomposición de Cartan con respecto da involución θ, terase que $\mathcal{B}_\theta$, isto é, a aplicación bilinear simétrica dada por $\mathcal{B}_\theta(A, B) = -\mathcal{B}(\theta A, B)$ para $A, B \in \mathfrak{su}(1, n)$, é definida positiva. Deste xeito, $\mathcal{B}_\theta$ define un produto escalar en $\mathfrak{su}(1, n)$, e θ é unha involución de Cartan para a álxebra de Lie semisimple $\mathfrak{su}(1, n)$. Polo tanto, a descomposición de Cartan de $\mathfrak{su}(1, n)$ virá dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{p} = \{A \in \mathfrak{su}(1, n) : \theta A = -A\}$, e $\mathfrak{k} = \{A \in \mathfrak{su}(1, n) : \theta A = A\}$ é a álxebra de Lie de $K = \mathrm{S}(\mathrm{U}(1)\,\mathrm{U}(\mathrm{n})) \cong \mathrm{U}(\mathrm{n})$. Tendo en conta que a álxebra de Lie de $\mathrm{U}(n)$ é a álxebra de Lie das matrices anti-hermitianas, isto é

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : X + X^* = 0\},$$

entón, como en particular $\mathfrak{u}(1) = \mathrm{i}\,\mathbb{R}$, logo

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(n)) = \{\lceil \lambda, 0, X \rceil : \lambda \in \mathbb{R},\ X \in \mathfrak{u}(n),\ \ \mathrm{i}\,\lambda + \operatorname{tr} X = 0\}.$$

Ademais, $\mathfrak{p} = \{A \in \mathfrak{su}(1, n) : \theta A = -A\} = \{\lceil 0, v, 0 \rceil : v \in \mathbb{C}^n\} \cong \mathbb{C}^n$.

3.2.2. A descomposición de Iwasawa asociada ós espazos hiperbólicos complexos

Xa vimos no capítulo anterior que, se $M \cong G/K$ é un espazo simétrico con descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, entón o rango de M é a dimensión dun subespazo abeliano maximal de $\mathfrak{p}$, a cal é sempre a mesma pola Proposición 2.20. No caso de $\mathbb{C}H^n$ dita dimensión será igual a 1, polo que se tratará dun espazo de rango un. De feito, vexamos que o seguinte subespazo

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R}\lceil 0, e_1, 0 \rceil \subset \mathfrak{p},$$

de dimensión 1 é maximal entre os subespazos abelianos de $\mathfrak{p}$. Supoñamos que existe un subespazo abeliano $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ que contén a $\mathfrak{a}$. Logo, dado $\lceil 0, v, 0 \rceil \in \mathfrak{b}$, entón tense que cumprir que $0 = [\lceil 0, e_1, 0 \rceil, \lceil 0, v, 0 \rceil] = \lceil 2 \operatorname{Im} v^* e_1, 0, v e_1^* - e_1 v^* \rceil$. Agora ben, tense que

$$v e_1^* = \left(\begin{array}{c|c} v_1 & \\ \vdots & \quad 0 \quad \\ v_n & \end{array} \right), \ e_1 v^* = \left(\begin{array}{c} \overline{v}_1 \ \ \dots \ \ \overline{v}_n \\ \hline \\ 0 \\ \\ \end{array} \right),$$

polo que se terá que $v_i = 0$ para todo $i \geq 2$. Ademais, tamén se ten que cumprir que $v_1 = \overline{v}_1$, polo que entón $v_1 \in \mathbb{R}$, polo que deste xeito $v \in \mathbb{R}e_1$, polo que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, e $\mathfrak{a}$ é maximal.

Se consideramos a familia de operadores autoadxuntos $\{\operatorname{ad}(H) : H \in \mathfrak{a}\}$, terase pola Observación 2.24 que os operadores diagonalizan simultaneamente. Sexa Σ o conxunto das raíces restrinxidas de $\mathfrak{g}$. Neste caso terase que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_\alpha &= \left\{\left[0,(0,v),\left(\begin{array}{c|c} 0 & v^* \\ \hline -v & 0\end{array}\right)\right] : v\in\mathbb{C}^{n-1}\right\}\cong\mathbb{C}^{n-1}\\
\mathfrak{g}_{-\alpha} = \theta\mathfrak{g}_\alpha &= \left\{\left[0,(0,-v),\left(\begin{array}{c|c} 0 & v^* \\ \hline -v & 0\end{array}\right)\right] : v\in\mathbb{C}^{n-1}\right\}\cong\mathbb{C}^{n-1}\\
\mathfrak{g}_{2\alpha} &= \left\{\left[\mu,(\mathrm{i}\,\mu,0),\left(\begin{array}{c|c} -\mathrm{i}\,\mu & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\right] : \mu\in\mathbb{R}\right\}\cong\mathbb{R}\\
\mathfrak{g}_{-2\alpha} = \theta\mathfrak{g}_{2\alpha} &= \left\{\left[\mu,(-\mathrm{i}\,\mu,0),\left(\begin{array}{c|c} -\mathrm{i}\,\mu & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\right] : \mu\in\mathbb{R}\right\}\cong\mathbb{R}\\
\mathfrak{g}_0 &= \left\{\left[\mu,xe_1,\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{i}\,\mu & 0 \\ \hline 0 & Y\end{array}\right)\right] : \mu,x\in\mathbb{R},\ Y\in\mathfrak{su}(n-1), 2\,\mathrm{i}+\operatorname{tr}Y=0\right\}.
\end{aligned}$$

Deste xeito, temos a seguinte descomposición en espazos de raíces de $\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(1,n)$, que ademais é ortogonal respecto de $\mathcal{B}_\theta$:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-2\alpha}\oplus\mathfrak{g}_{-\alpha}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_\alpha\oplus\mathfrak{g}_{2\alpha}.$$

Unha vez dada a descomposición en espazos de raíces, estamos en disposición de dar a descomposición de Iwasawa da álxebra de Lie do grupo de isometrías de $\mathbb{C}H^n$, isto é de $\mathfrak{su}(1,n)$. Para iso, consideraremos unha orde no espazo de raíces Σ que faga que α e 2α sexan raíces positivas. Entón, temos o subespazo

$$\mathfrak{n}=\mathfrak{g}_\alpha\oplus\mathfrak{g}_{2\alpha}=\left\{\left[\mu,(\mathrm{i},v),\left(\begin{array}{c|c} -\mathrm{i}\,\mu & v^* \\ \hline -v & 0\end{array}\right)\right] : \mu\in\mathbb{R},\ v\in\mathbb{C}^{n+1}\right\},$$

que sabemos pola Proposición 2.31 que é unha subálxebra de Lie nilpotente.

Deste xeito, terase a seguinte descomposición de Iwasawa da álxebra de Lie $\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(1,n)$, respecto do subespazo abeliano maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ e do criterio de positividade Σ:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} &= \{\lceil \lambda, 0, X \rceil : \lambda \in \mathbb{R},\ X \in \mathfrak{u}(n),\ \mathrm{i}\,\lambda + \operatorname{tr} X = 0\} \oplus \mathbb{R}\lceil 0, e_1, 0 \rceil \\
&\oplus \left\{ \left\lceil \mu, (\mathrm{i}, v), \left(\begin{array}{c|c} -\mathrm{i}\,\mu & v^* \\ \hline -v & 0 \end{array} \right) \right\rceil : \mu \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{C}^{n+1} \right\} \\
&= \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} \mathrm{i}\,\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & X & \\ 0 & & & \end{array} \right) : \lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{u}(n), \mathrm{i}\,\lambda + \operatorname{tr} X = 0 \right\} \\
&\oplus \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & x e_1 \\ \hline x e_1 & 0 \end{array} \right) : x \in \mathbb{R} \right\} \\
&\oplus \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{i}\,\mu & -\mathrm{i}\,\mu & v^* \\ \hline \mathrm{i}\,\mu & -\mathrm{i}\,\mu & v^* \\ \hline v & -v & 0 \end{array} \right) : \mu \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{C}^{n-1} \right\}
\end{aligned}$$

Recordemos que dita descomposición tan só o é como suma directa de subespazos vectoriais de $\mathfrak{g}$, e non en suma directa de álxebras de Lie (xa que por exemplo $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \neq 0$), nin tampouco é ortogonal nin respecto de $\mathcal{B}$ nin de $\mathcal{B}_\theta$, pois $\mathfrak{k}$ non é normal a $\mathfrak{n}$.

Sexan agora A e N os subgrupos de Lie conexos de $G = \mathrm{SU}(1, n)$ con álxebra de Lie $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{n}$ respectivamente. Recordemos que o teorema de descomposición de Iwasawa 2.32 nos asegura que a aplicación

$$\begin{aligned} K \times A \times N &\longrightarrow G \\ (k, a, n) &\longmapsto kan, \end{aligned}$$

é un difeomorfismo, polo que, pola Observación 2.33, $AN \subset G$ é un subgrupo de Lie pechado e conexo difeomorfo a $\{1\} \times A \times N$.

3.2.3. O modelo do grupo de Lie resoluble

Nesta sección centrarémonos en calcular de xeito explícito, utilizando as matrices da álxebra de Lie $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, a conexión de Levi-Civita do espazo hiperbólico complexo. Para iso, empregaremos a fórmula de Koszul (2.1) aplicada ó grupo de Lie AN coa súa métrica invariante á esquerda que fai que AN sexa isométrico a $\mathbb{C}H^n$. Por simplicidade de notación, de aquí en diante denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica invariante á esquerda de AN considerada na Sección 2.4, no caso particular $M = \mathbb{C}H^n$.

Da Sección 2.4 sabemos que o produto escalar de dous campos de vectores X, Y invariantes á esquerda virá dado por

$$\langle X, Y \rangle = k(\mathcal{B}_\theta(X_\mathfrak{a}, Y_\mathfrak{a}) + \frac{1}{2}\mathcal{B}_\theta(X_\mathfrak{n}, Y_\mathfrak{n})),$$

para certa constante $k \in \mathbb{R}$, onde $(\cdot)_{\mathfrak{a}}$ e $(\cdot)_{\mathfrak{n}}$ indican proxección ortogonal sobre $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{n}$ respectivamente. Agora ben, no que segue de sección consideraremos $l \in \mathbb{R}$ como a única constante tal que $k = -\frac{1}{l(n+1)}$, isto é, $l = -\frac{1}{k(n+1)}$. Agora expresaremos en termos matriciais o produto interior de dous elementos de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Por un lado, facendo cálculos, chégase á seguinte expresión para o produto de dous elementos de tal espazo vectorial:

$$\begin{aligned}\langle \Big[b, (a+ib, v), \left(\begin{array}{c|c} -\mathrm{i}\, b & v^* \\ \hline -v & 0 \end{array}\right)\Big], \Big[d, (c+\mathrm{i}\, d, w), \left(\begin{array}{c|c} -\mathrm{i}\, d & w^* \\ \hline -w & 0 \end{array}\right)\Big]\rangle \\ = -\frac{4}{l}(ac+bd+\mathrm{Re}(v^* w)) = -\frac{4}{l}\langle (a+\mathrm{i}\, b, v), (c+\mathrm{i}\, d, w)\rangle_{\mathbb{R}^{2n}},\end{aligned}$$

para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e $v, w \in \mathbb{C}^{n-1}$, onde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$ é o produto escalar usual en $\mathbb{R}^{2n}$, dado por $\langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \mathrm{Re}(v_1^* v_2)$, se $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$.

No que segue, seranos útil empregar a seguinte notación para os elementos de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$:

$$\lfloor x+\mathrm{i}\, y, v\rfloor = \Big[y, (x+\mathrm{i}, v), \left(\begin{array}{c|c} -\mathrm{i}\, y & v^* \\ \hline -v & 0 \end{array}\right)\Big],$$

con $x, y \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Estudemos agora a estrutura complexa inducida sobre $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Para iso, sexa $X = \lfloor x+\mathrm{i}\, y, v\rfloor \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ e fixemos $p = \pi(re_1) \in \mathbb{C}H^n$ como fixemos anteriormente no capítulo. Sexa $\pi\colon H_1^{2n+1}(r) \to \mathbb{C}H^n$ a proxección usual de $H_1^{2n+1}(r)$ sobre o espazo hiperbólico complexo, e $\varphi\colon AN \to \mathbb{C}H^n$ o difeomorfismo dado na Proposición 2.34. Agora, pola Observación 2.14, sabemos que, por ser $G = \mathrm{SU}(1,n)$ un grupo de Lie que actúa transitivamente sobre $\mathbb{C}H^n$, a $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ corresponderalle o vector $\frac{d}{dt}_{|t=0} \mathrm{Exp}(tX)(p) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \mathrm{Exp}(tX)(\pi(re_1))$.

Deste xeito, ó vector $\frac{1}{r}X$ corresponderalle o seguinte campo de vectores de $T_p\mathbb{C}H^n$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\varphi_*(X) &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}_{|t=0}\varphi(\mathrm{Exp}\, tX) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\mathrm{Exp}(tX)(\pi(re_1)) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\pi(\mathrm{Exp}(tX)(re_1)) \\ &= \pi_*(\frac{d}{dt}_{|t=0}\mathrm{Exp}\, tX(e_1)) = \pi_*(Xe_1) = \pi_*(\mathrm{i}\, y, x+\mathrm{i}\, y, v) = \pi_*(0, x+\mathrm{i}\, y, v),\end{aligned}$$

xa que $\gamma(t) = \pi(r\,\mathrm{Exp}\, tX(e_1))$ é claramente a curva integral en $\mathbb{C}H^n$ do campo de vectores fundamental asociado a X pasando por p, e $\pi_*(\mathrm{i}\, e_1) = 0$, debido a que $\mathrm{i}\, e_1 \in \mathbb{R}V$, sendo $V = \widetilde{J}\xi$ o vector vertical que consideraramos anteriormente. Agora, por como se definiu a estrutura complexa de J de $\mathbb{C}H^n$, terase que

$$\frac{1}{r}J\varphi_*(X) = J\pi_*(Xe_1) = \pi_*(\widetilde{J}(Xe_1)_{V^\perp}) = \pi_*(\mathrm{i}(0, x+\mathrm{i}\, y, v)) = \pi_*(0, -y+\mathrm{i}\, x, \mathrm{i}\, v),$$

sendo $\widetilde{J}$ a estrutura complexa de $\mathbb{C}^{n+1}$, que consiste en multiplicar as coordenadas por i, e $(\cdot)_{V^\perp}$ a proxección sobre o subespazo $V^\perp$ de $T_{re_1}H_1^{2n+1}(r)$. Vexamos a continuación cal é a matriz de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ que lle corresponde a $J\varphi_*(X) = r\pi_*(0, -y+\mathrm{i}\, x, \mathrm{i}\, v) \in T_p\mathbb{C}H^n$. Agora ben, tal matriz de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, que chamaremos Y, terá que cumprir que $\pi_*(Ye_1) =$

$\pi_*(0, -y + \mathrm{i}\, x, \mathrm{i}\, v)$, polo que a primeira columna de Y ten que ser un múltiplo complexo do vector $(0, -y + \mathrm{i}\, x, \mathrm{i}\, v)$, polo que podemos tomar $Y = \lfloor -y + \mathrm{i}\, x, \mathrm{i}\, v \rfloor$, de xeito que podemos considerar como estrutura complexa sobre $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ a dada por

$$J\lfloor x + \mathrm{i}\, y, v\rfloor = \mathrm{i}\lfloor x + \mathrm{i}\, y, v\rfloor.$$

Temos logo que $J\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{2\alpha}$ xa que un elemento de $\mathfrak{a}$ se expresa da forma $\lfloor x, 0\rfloor$ con $x \in \mathbb{R}$, polo que

$$J\lfloor x, 0\rfloor = \lfloor \mathrm{i}\, x, 0\rfloor = \lceil x, (\mathrm{i}\, x, 0), \left(\begin{array}{c|c} -\mathrm{i}\, x & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\rceil,$$

que é un elemento de $\mathfrak{g}_{2\alpha}$. Reciprocamente, tamén é claro que todo elemento de $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ se pode expresar como $\mathrm{i}\lfloor x, 0\rfloor$, con $x \in \mathbb{R}$. Ademais, tamén é claro que $J\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_\alpha$, polo que $\mathfrak{g}_\alpha$ é J invariante.

Por outra banda, facendo contas, pódense obter tamén as seguintes expresións para o produto escalar en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ e para o corchete de Lie:

$$\begin{aligned} \langle \lfloor x + \mathrm{i}\, y, v\rfloor, \lfloor a + \mathrm{i}\, b, w\rfloor \rangle &= \frac{-4}{l}\langle (x + \mathrm{i}\, y, v), (a + \mathrm{i}\, b, w)\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} \\ [\lfloor x + \mathrm{i}\, y, v\rfloor, \lfloor a + \mathrm{i}\, b, w\rfloor] &= \lfloor 2\,\mathrm{i}\langle \mathrm{i}(x + \mathrm{i}\, y, v), a + \mathrm{i}\, b, w\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}, -av + xw\rfloor. \end{aligned}$$

para $\lfloor x + \mathrm{i}\, y, v\rfloor$ e $\lfloor a + \mathrm{i}\, b, w\rfloor$ elementos de $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{n}$. Deste xeito, aplicando a fórmula de Koszul para a conexión de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ de AN, terase que:

$$\begin{aligned} &2\langle \overline{\nabla}_X Y, Z\rangle = \\ &= \langle \lfloor 4ty + 2\langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}} + \mathrm{i}(-4yz + 2\langle \mathrm{i}\, v, w\rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}}), -2zv - 2y\,\mathrm{i}\, w - 2t\,\mathrm{i}\, v\rfloor, \lfloor a + \mathrm{i}\, b, u\rfloor\rangle, \end{aligned}$$

polo que se deduce que

$$\overline{\nabla}_{\lfloor x + \mathrm{i}\, y, v\rfloor}\lfloor z + \mathrm{i}\, t, w\rfloor = \lfloor 2ty + \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}} + \mathrm{i}(-2yz + \langle \mathrm{i}\, v, w\rangle_{\mathbb{R}^{2n-2}}), -zv - y\,\mathrm{i}\, w - t\,\mathrm{i}\, v\rfloor.$$

Definamos agora os campos de vectores unitarios seguintes

$$B := \lceil 0, \frac{\sqrt{-l}}{2} e_1, 0\rceil = \lfloor \frac{\sqrt{-l}}{2}, 0\rfloor, \quad Z := JB = \lfloor i\frac{\sqrt{-l}}{2}, 0\rfloor.$$

Tense entón que $\mathfrak{a} = \mathbb{R}B$ e $\mathfrak{g}_{2\alpha} = \mathbb{R}Z$.

Deste xeito, como $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{R}Z$, dados $U, V \in \mathfrak{g}_\alpha$, a conexión de Levi-Civita de AN pódese reescribir nos seguintes termos:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{aB+U+cZ}(bB + V + dZ) = &\sqrt{-l}\Big((\frac{1}{2}\langle U, V\rangle + cd)B - \frac{1}{2}(bU + cJV + dJU) \\ &+ \frac{1}{2}\langle JU, V\rangle - bcZ\Big). \end{aligned}$$

ademais, tamén é fácil de deducir seguintes relacións:

$$[B, Z] = \sqrt{-l}Z, \tag{3.5}$$

$$[B, U] = \frac{\sqrt{-l}}{2} U, \tag{3.6}$$

$$[U, V] = \sqrt{-l} \langle JU, V \rangle Z, \tag{3.7}$$

$$[Z, U] = 0. \tag{3.8}$$

Capítulo 4

Subvariedades homoxéneas minimais nos espazos hiperbólicos complexos

O espazo hiperbólico complexoO espazo hiperbólico complexo Neste capítulo, que constitúe a parte orixinal da memoria, pasamos a estudar e clasificar unha certa clase de subvariedades do espazo hiperbólico complexo que son simultaneamente homoxéneas e minimais. Nas seguintes liñas facemos máis precisa esta afirmación.

En primeiro lugar, e como se viu na Sección 3.2.3, recordemos que $\mathbb{C}H^n$ resulta ser isométrico ó grupo de Lie resoluble AN equipado cunha certa métrica invariante á esquerda. Aquí, AN constitúe a parte resoluble da descomposición de Iwasawa $G = K \times A \times N$ da compoñente conexa $G = \mathrm{I}(\mathbb{C}H^n)^0$ do grupo de isometrías de $\mathbb{C}H^n$; lembremos que, salvo un cociente finito, $G = \mathrm{SU}(1, n)$, e que $K = \mathrm{S}(\mathrm{U}(1)\,\mathrm{U}(\mathrm{n})) \cong \mathrm{U}(\mathrm{n})$ é o subgrupo de isotropía de G dun certo punto base $p \in \mathbb{C}H^n$, que fixamos de aquí en diante. Recordemos tamén que AN é o produto semidirecto do grupo abeliano A co grupo nilpotente N. Sexan $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ as álxebras de Lie de A, N e AN, respectivamente, e recordemos que $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$.

Como se comentou na introdución, un problema interesante no ámbito da xeometría de subvariedades en espazos simétricos é a determinación das subvariedades homoxéneas minimais dun espazo dado; é dicir, fixado un espazo simétrico $M = G/K$, determinar as órbitas $H \cdot q$ de subgrupos conexos H de G que teñen curvatura media nula. No caso dos espazos simétricos de tipo non compacto e curvatura non constante, este problema está totalmente aberto. Na práctica, a súa abordaxe vese enormemente complicada pola dificultade de calcular a xeometría de órbitas de subgrupos H que conteñan compoñentes 'rotacionais', i.e. compoñentes en K. Actualmente, descoñecemos técnicas que permitan lidar con esta situación xeral.

Por iso, nós restrinxiremos a nosa atención ás subvariedades homoxéneas que se obteñen como órbitas dalgún subgrupo conexo H de AN. Por simplicidade de linguaxe, cremos interesante introducir a seguinte terminoloxía.

Definición 4.1. Sexa $M = G/K$ un espazo simétrico de tipo non compacto e con descomposición de Iwasawa asociada $G = K \times A \times N$. Chamaremos *subvariedade homoxénea resoluble* de M a calquera órbita $H \cdot q$, $q \in M$, dalgún subgrupo conexo H do grupo resoluble de Iwasawa AN.

Este tipo de subvariedades homoxéneas parecen xogar un papel moi importante en xeometría de subvariedades de espazos simétricos de tipo non compacto. Así, en varios traballos recentes téñense obtido diversas clasificacións que involucran estes obxectos; por exemplo, no estudo de foliacións hiperpolares [6], de solvariedades Einstein [34], ou de solitóns de Ricci [18]. En relación ó problema que nos ocupa, é importante incidir en que non se coñecen exemplos de subvariedades homoxéneas minimais en espazos simétricos de tipo non compacto que non sexan homoxéneas resolubles, polo que restrinxirnos a este subtipo de subvariedades homoxéneas parece razoable. Así, podemos enunciar o resultado de clasificación principal deste traballo:

Teorema 4.2. *Unha subvariedade homoxénea resoluble (non trivial) de $\mathbb{C}H^n$ é minimal se e só se congruente á órbita $H \cdot p$ pola orixe $p \in \mathbb{C}H^n$ dun subgrupo conexo H de $AN \subset G$ con algunha das seguintes álxebras de Lie:*

(a) $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$, *para calquera subespazo totalmente real* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathfrak{g}_\alpha \cong \mathbb{C}^{n-1}$.

(b) $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, *para calquera subespazo (real) propio* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathfrak{g}_\alpha \cong \mathbb{C}^{n-1}$.

Lembremos que o espazo de raíz $\mathfrak{g}_\alpha$ é isomorfo ó espazo euclidiano complexo $\mathbb{C}^{n-1}$, de xeito que está dotado dun produto interior para o cal a estrutura complexa J é unha isometría linear. Chamamos subespazo real do espazo vectorial complexo $\mathfrak{g}_\alpha \cong \mathbb{C}^{n-1}$ a calquera subespazo vectorial do espazo vectorial real $\mathfrak{g}_\alpha \cong \mathbb{R}^{2n-2}$ subxacente. En particular, un subespazo real non ten por que ser invariante pola estrutura complexa J. Se isto sucede, i.e. $J\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ para un subespazo real $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}_\alpha$, dicimos que $\mathfrak{m}$ é un subespazo complexo. Outro tipo particular de subespazo real vén dado polos subespazos totalmente reais, que son aqueles subespazos reais $\mathfrak{m}$ tales que $J\mathfrak{m}$ é ortogonal a $\mathfrak{m}$. Porén, é fácil darse conta que non todo subespazo real de $\mathbb{C}^{n-1}$ é complexo ou totalmente real. É máis, mentres que en $\mathbb{C}$ só existen tres subespazos reais salvo congruencia holomorfa (os subespazos trivial e total, e calquera recta real), se $n \geq 3$, existe unha cantidade non numerable de subespazos reais de $\mathbb{C}^{n-1}$, módulo congruencia holomorfa (i.e. módulo congruencia por un elemento de $\mathrm{U}(n-1)$). Véxase [13, §2.3] para máis información sobre subespazos reais.

Observación 4.3. Como veremos, a órbita pola orixe $H \cdot p$ no primeiro caso do Teorema 4.2 é unha subvariedade totalmente xeodésica e totalmente real de $\mathbb{C}H^n$, isto é, un espazo hiperbólico real $\mathbb{R}H^k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, mergullado de xeito totalmente xeodésico en $\mathbb{C}H^n$. No segundo caso, $H \cdot p$ nunca é totalmente real (xa que $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \subset \mathfrak{h}$ é unha liña complexa, pois $J\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{2\alpha}$), pero si pode ser complexa, cousa que sucede precisamente cando $\mathfrak{m}$ é un subespazo complexo de $\mathfrak{g}_\alpha \cong \mathbb{C}^{n-1}$, o cal dá lugar a un subespazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^k$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, mergullado de xeito totalmente xeodésico en $\mathbb{C}H^n$. Por tanto, os únicos exemplos minimais non totalmente xeodésicos que se obteñen xorden no segundo caso tomando $\mathfrak{m}$ como subespazo non complexo de $\mathfrak{g}_\alpha$. Ademais, todas as subvariedades totalmente xeodésicas (non triviais, propias) de $\mathbb{C}H^n$ se recuperan como subvariedades homoxéneas resolubles, pois, salvo congruencia, ditas subvariedades totalmente xeodésicas son da forma $\mathbb{C}H^k$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, ou $\mathbb{R}H^k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Observación 4.4. Se ben existe un número finito de subvariedades totalmente xeodésicas de $\mathbb{C}H^n$, salvo congruencia, o teorema anterior indica que existe unha cantidade infinita non numerable de subvariedades homoxéneas minimais de $\mathbb{C}H^n$ se $n \geq 3$, debido á liberdade de escolla de subespazo $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_\alpha \cong \mathbb{C}^{n-1}$. Aquí é importante indicar que dous subespazos $\mathfrak{m}_1$ e $\mathfrak{m}_2$ de $\mathfrak{g}_\alpha$ dan lugar a subvariedades homoxéneas congruentes se e só se existe $k \in K_0 \cong \mathrm{U}(n-1)$ tal que $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}_2$. Véxase [13] para máis información sobre o problema de congruencia de subespazos reais dun espazo vectorial complexo.

Como consecuencia do Teorema 4.2 deduciremos agora unha interesante caracterización das subvariedades homoxéneas resolubles minimais en termos das familias isoparamétricas de hipersuperficies de $\mathbb{C}H^n$. Non entraremos neste traballo a recordar os principais resultados da teoría de hipersuperficies isoparamétricas, e limitarémonos a lembrar a súa definición e propiedades básicas necesarias para comprender e deducir a caracterización que recollemos no Teorema 4.5. Para máis información, refirimos ó lector ós artigos expositivos [12] e [15], e ó libro [4].

Unha hipersuperficie M dunha variedade riemanniana $\bar{M}$ dise *isoparamétrica* se M e as súas hipersuperficies equidistantes (ou paralelas) próximas a M teñen curvatura media constante. Recordemos que unha hipersuperficie M se di que ten curvatura media constante se a función curvatura media, $\operatorname{tr} S_\xi$, onde S é o operador forma de M e ξ é un campo unitario normal a M (tal vez definido só localmente), é constante. Exemplos de hipersuperficies isoparamétricas son os (subconxuntos abertos de) hiperplanos, as esferas e os cilindros no espazo euclidiano $\mathbb{R}^n$ (de feito, resultan ser todos os exemplos). No espazo hiperbólico real $\mathbb{R}H^n$, as hipersuperficies isoparamétricas son as esferas xeodésicas, os hiperespazos hiperbólicos reais $\mathbb{R}H^{n-1}$ totalmente xeodésicos e as súas hipersuperficies equidistantes, os tubos ó redor de subespazos hiperbólicos reais totalmente xeodésicos de dimensión menor $\mathbb{R}H^k$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, ou as horosferas. Nas esferas, o problema de clasificación é moi complicado, e segue aberto a día de hoxe, a pesar de importantes avances recentes.

Unha *familia isoparamétrica de hipersuperficies* é unha descomposición dunha variedade riemanniana $\bar{M}$ en hipersuperficies isoparamétricas (equidistantes entre si) xunto con, como moito, dúas subvariedades de codimensión superior. Estas subvariedades de codimensión maior ca un denomínanse *subvariedades focais* da familia isoparamétrica. Pénsese na descomposición de $\mathbb{R}^3$ en planos paralelos; ou na partición de $\mathbb{R}^3$ en esferas concéntricas, xunto con ese centro común; ou na descomposición da esfera $\mathbb{S}^2$ en polo norte, polo sur, e paralelos. Son estes exemplos de familias isoparamétricas con ningunha, unha ou dúas subvariedades focais, respectivamente.

Pois ben, un dos poucos resultados completos de clasificación de familias isoparamétricas de hipersuperficies dispoñibles a día de hoxe corresponde, precisamente, ós espazos hiperbólicos complexos $\mathbb{C}H^n$. Este resultado, debido a J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez e V. Sanmartín-López [14], resulta ser moito máis complicado có debido a É. Cartan para $\mathbb{R}H^n$. Porén, coa terminoloxía e notación introducidas neste traballo, é posible describir os exemplos desa clasificación dun xeito sinxelo. Tales exemplos son:

(a) As foliacións de $\mathbb{C}H^n$ por horosferas, é dicir, as foliacións congruentes á familia de órbitas da acción do grupo nilpotente N de Iwasawa sobre $\mathbb{C}H^n$ (que non teñen subvariedades focais).

(b) As familias obtidas tomando tubos ó redor das subvariedades totalmente xeodésicas $\mathbb{R}H^n$ e $\mathbb{C}H^k$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ (obsérvese a diferenza entre os dous casos: os tubos ó redor de $\mathbb{R}H^k$, $k < n$, non son isoparamétricos).

(c) As hipersuperficies de Lohnherr e as súas hipersuperficies equidistantes (véxase a Observación 4.6 para a súa definición).

(d) Os tubos ó redor das subvariedades homoxéneas resolubles $H \cdot p$ de $\mathbb{C}H^n$ con $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, para calquera subespazo propio $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}_\alpha$.

Posto que este último exemplo de familia isoparamétrica ten como única subvariedade focal a unha subvariedade homoxénea resoluble minimal das indicadas no Teorema 4.2 (b), é inmediato que combinando o teorema de clasificación de familias isoparamétricas en [14] co Teorema 4.2, se obtén a seguinte caracterización das subvariedades homoxéneas resolubles minimais de $\mathbb{C}H^n$.

Teorema 4.5. *Unha subvariedade homoxénea resoluble de $\mathbb{C}H^n$ é minimal se e só se é totalmente xeodésica, unha hipersuperficie de Lohnherr, ou unha subvariedade focal dunha familia isoparamétrica de hipersuperficies.*

Observación 4.6. Unha hipersuperficie de Lohnherr (a miúdo denotada W^{n-1}) é un caso particular de subvariedade homoxénea resoluble minimal das indicadas no Teorema 4.2 (b): precisamente cando $\mathfrak{m}$ ten codimensión un en $\mathfrak{g}_\alpha$. Noutras palabras, trátase da órbita pola orixe p do subgrupo conexo H de $AN \subset G = \mathrm{SU}(1, n)$ con álxebra de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \ell^\perp \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, onde $\ell^\perp$ é o complemento ortogonal dunha recta $\ell = \mathbb{R}U$ ($U \in \mathfrak{g}_\alpha$, $U \neq 0$) en $\mathfrak{g}_\alpha$. Así, a acción de H sobre $\mathbb{C}H^n$ dá lugar a unha foliación por hipersuperficies: a órbita por p é, por definición, a hipersuperficie de Lohnherr W^{n-1}, e as restantes son as hipersuperficies paralelas ou equidistantes a W^{n-1}. Salvo congruencia en $\mathbb{C}H^n$, existe unha única hipersuperficie de Lohnherr. Admite varias caracterizacións, por exemplo, como a única hipersuperficie homoxénea minimal de $\mathbb{C}H^n$ [5], ou como a única hipersuperficie con curvaturas principais constantes en $\mathbb{C}H^n$ que é regrada por $\mathbb{C}H^{n-1}$ totalmente xeodésicos [27].

4.1. Proba do teorema principal

Sabemos polo capítulo anterior que $\mathbb{C}H^n$ admite unha estrutura de grupo de Lie mediante un difeomorfismo cun subgrupo de Lie da forma $AN \subset \mathrm{SU}(1, n)$. Polo tanto ten unha álxebra de Lie da forma $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, con $\mathfrak{a} = \mathbb{R}B$ por ser $\mathbb{C}H^n$ de rango un. Ademais, o subespazo $\mathfrak{n}$ descomponse na suma directa $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$, con $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 2n - 2$, e $\mathfrak{g}_{2\alpha} = \mathbb{R}Z$. É máis, como variedade riemanniana, o espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$ é isométrico ó grupo de Lie resoluble AN dotado dunha certa métrica invariante á esquerda. En concreto, esta métrica fai que $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ sexa unha descomposición ortogonal, e os campos invariantes á esquerda B e Z sexan unitarios. Ademais, a estrutura complexa de $\mathbb{C}H^n$ induce unha estrutura complexa ortogonal J en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ que fai que $JB = Z$ e que $\mathfrak{g}_\alpha$ sexa J-invariante. Refirimos ó lector ó Capítulo 3 para máis información sobre estes resultados e notación.

O obxectivo deste capítulo é estudar un certo tipo de subvariedades homoxéneas minimais de $\mathbb{C}H^n$, en concreto, aquelas que se obteñen como órbitas da acción dalgún subgrupo do grupo resoluble de Iwasawa AN. Recordemos que unha subvariedade é minimal se o seu vector curvatura media se anula para todo punto, ou, equivalentemente se a traza do operador de configuración é nula con respecto de todo campo de vectores normal. De feito isto chegará con comprobalo para un punto, pois o vector curvatura media dunha subvariedade homoxénea $H \cdot p$ é invariante polas isometrías do grupo H que a ten por órbita.

Por tanto, estamos interesados en clasificar aquelas órbitas $H \cdot q$, $q \in \mathbb{C}H^n$, de subgrupos H de AN que son minimais. Posto que AN actúa transitivamente sobre $\mathbb{C}H^n$, calquera punto $q \in \mathbb{C}H^n$ se pode escribir da forma $q = g(p)$, con $g \in AN$ e onde p é o punto de $\mathbb{C}H^n$ fixado pola isotropía K e que, recordemos, determinaba unha descomposición de Cartan de $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(1,n)$ (véxase Sección 2.1 e Capítulo 3). Como $g \in AN$, claramente se ten $g^{-1}ANg = AN$, e por tanto

$$H \cdot q = H \cdot g(p) = g((g^{-1}Hg) \cdot p),$$

é dicir, a órbita de H por q é isométrica (vía $g \in AN$) a unha órbita por p da acción dun subgrupo de AN (concretamente $g^{-1}Hg$). Isto xustifica que poidamos restrinxir o noso estudo ás órbitas de subgrupos de AN que pasan polo punto base p. Agora ben, a isometría $\varphi\colon AN \to \mathbb{C}H^n$, $\varphi(g) = g(p)$, dada pola Proposición 2.34 induce unha correspondencia un a un entre subgrupos de AN e as súas órbitas por $p \in \mathbb{C}H^n$. Así pois, o noso estudo redúcese a determinar *que subgrupos conexos H de AN son minimais*, no sentido de estudar se teñen curvatura media cero como subvariedades do grupo de Lie AN dotado coa súa métrica invariante á esquerda. Para abordar este problema, consideraremos as posibles subálxebras de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, e calcularemos a curvatura media dos subgrupos conexos H de AN correspondentes. Neste sentido, como xa se comentou, sería suficiente con realizar este cálculo no elemento neutro de AN, se ben os cálculos que desenvolveremos neste capítulo tamén se poden ver como aplicados a campos invariantes á esquerda sobre o subgrupo H de AN, campos que a miúdo consideraremos ben tanxentes ou ben normais a H.

Para facer os cálculos empregaremos a expresión da conexión de Levi-Civita de $\mathbb{C}H^n$, que se viu na Sección 3.2.3. Porén, por simplicidade, tomaremos sen perda de xeneralidade a curvatura seccional holomorfa, isto é l, como -1. Deste xeito, temos a expresión

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{aB+U+cZ}(bB+V+dZ) =& (\frac{1}{2}\langle U,V\rangle + cd)B - \frac{1}{2}(bU + cJV + dJU) \\ &+ \frac{1}{2}\langle JU,V\rangle Z - bcZ,\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde B, Z son unitarios, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $U,V \in \mathfrak{g}_\alpha$. Recordemos que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota a métrica riemanniana en AN invariante á esquerda que convirte a AN en isométrico a $\mathbb{C}H^n$.

En primeiro lugar, co motivo de simplificar os cálculos, escribiremos expresións máis sinxelas da conexión de Levi-Civita, as cales, grazas á linearidade desta, nos servirán para calcular de maneira simple calquera expresión da mesma respecto a calquera vectores.

Por un lado, se derivamos na dirección de B tense que

$$\overline{\nabla}_B\, B = 0, \quad \overline{\nabla}_B\, U = 0, \quad \overline{\nabla}_B\, Z = 0,$$

para todo $U \in \mathfrak{g}_\alpha$. Sexan U, V elementos de $\mathfrak{g}_\alpha$. Entón, temos

$$\overline{\nabla}_U\, B = -\frac{1}{2}U, \quad \overline{\nabla}_U\, V = \frac{1}{2}\langle U, V\rangle B + \frac{1}{2}\langle JU, V\rangle Z, \quad \overline{\nabla}_U\, Z = -\frac{1}{2}JU.$$

Por último, para $Z \in \mathfrak{g}_{2\alpha}$,

$$\overline{\nabla}_Z\, B = -Z, \quad \overline{\nabla}_Z\, U = -\frac{1}{2}JU, \quad \overline{\nabla}_Z\, Z = B.$$

Sexa H un subgrupo de Lie conexo da parte resoluble AN da descomposición de Iwasawa asociada ó espazo hiperbólico complexo $\mathbb{C}H^n$. Como é habitual, denotamos por $\mathfrak{h}$ a álxebra de Lie de H. Para poder calcular a curvatura media de H como subvariedade de AN, o primeiro paso consiste en determinar como podemos escribir $\mathfrak{h}$ con respecto á descomposición $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$. Así, argumentos sinxelos de álxebra linear (véxase [13, p. 1203]) permiten determinar que un subespazo vectorial calquera de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ admite unha das seguintes descricións:

Caso 1: $\mathfrak{m}$, con $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_\alpha$.

Caso 2: $\mathbb{R}(B + U) \oplus \mathfrak{m}$, con $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_\alpha$, e $U \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$, é dicir, con $U \perp \mathfrak{m}$.

Caso 3: $\mathbb{R}(B + U + aZ) \oplus \mathfrak{m}$, con $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_\alpha$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $U \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$.

Caso 4: $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}(U + Z)$, con $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_\alpha$ e $U \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$.

Caso 5: $\mathbb{R}(B + U) \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}(V + Z)$, con $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_\alpha$ e $U, V \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$.

Recordemos que o símbolo $\ominus$ denota complemento ortogonal.

Procederemos do seguinte xeito. Para cada un dos posibles subespazos de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ arriba citados, estudaremos cales deles, ou baixo que condicións extra, dan lugar a unha subálxebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

A continuación, para cada subálxebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, calcularemos a xeometría da órbita $H \cdot p$, onde H denota o subgrupo de Lie de AN con álxebra de Lie $\mathfrak{h}$. Así, nos casos nos que $H \cdot p$ non sexa unha subvariedad minimal, limitarémonos a atopar un vector normal ξ a $H \cdot p$ en $\mathbb{C}H^n$ tal que a traza do seu operador de configuración S_ξ sexa distinta de cero. Por outra banda, no caso de que $H \cdot p$ sexa minimal, para argumentalo teremos que comprobar que a traza de S_ξ é nula para calquera vector normal unitario ξ a $H \cdot p$.

Caso 1

En primeiro lugar, vexamos cando $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}$, con $\mathfrak{m}$ subespazo vectorial de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ contido en $\mathfrak{g}_\alpha$, é subálxebra de Lie. Neste caso, tan só fai falta asegurarse que $[U, V] \in \mathfrak{h}$ para todo $U, V \in \mathfrak{m}$. Agora ben, pola ecuación 3.7 isto terase se, e só se, $\langle JU, V\rangle Z \in \mathfrak{m}$, o cal se terá se, e só se, $\langle JU, V\rangle = 0$. Como isto se terá que cumprir para todo $U, V \in \mathfrak{m}$, logo $\mathfrak{m}$ ten que ser totalmente real, é dicir $J\mathfrak{m} \perp \mathfrak{m}$. En particular, como $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = 0$, logo $\mathfrak{h}$ terá que ser unha álxebra de Lie abeliana.

Describamos agora o espazo ortogonal a $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, que denotaremos por $\mathfrak{h}^\perp$, dunha forma que nos sexa cómoda para realizar os cálculos. Neste caso, é sinxelo obter a descomposición

$$\mathfrak{h}^\perp = (\mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}) \oplus \mathbb{R}B \oplus \mathbb{R}Z.$$

Se fixamos como vector normal B, logo, para todo vector non nulo $U \in \mathfrak{m} = \mathfrak{h}$ temos que,

$$\overline{\nabla}_U B = -\frac{1}{2}U,$$

de onde se segue

$$S_B U = -(\overline{\nabla}_U B)^\top = \frac{1}{2}U,$$

onde $(\cdot)^\top$ denota a proxección sobre o tanxente. Deste xeito, terase que, neste caso $S_B = \frac{1}{2}\,\mathrm{id}$, e entón $\operatorname{tr} S_B = \frac{1}{2}\dim \mathfrak{m} > 0$. Polo tanto, como falla a condición para o vector normal B, logo a órbita polo punto p do subgrupo de Lie de AN cuxa álxebra de Lie é $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}$, con $\mathfrak{m}$ un subespazo totalmente real de $\mathfrak{g}_\alpha$, non é minimal.

Caso 2

Vexamos que condicións temos que impoñer para que $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(B + U) \oplus \mathfrak{m}$, con $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_\alpha$, e $U \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$, é dicir, con $U \perp \mathfrak{m}$, sexa subálxebra de Lie. En primeiro lugar, sexa V un elemento de $\mathfrak{m}$. Como se ten que cumprir que

$$[B + U, V] = [B, V] + [U, V] = \frac{1}{2}V + \langle JU, V\rangle Z \in \mathfrak{h} = \mathbb{R}(B + U) \oplus \mathfrak{m},$$

necesariamente $\langle JU, V\rangle = 0$. Como isto ten que acontecer para todo $V \in \mathfrak{m}$, logo $\mathfrak{m} \perp \mathbb{C}U = \mathbb{R}U \oplus \mathbb{R}JU$. Ademais, para que $[V, W] = \langle JV, W\rangle Z$ poida pertencer a $\mathfrak{h}$ para todo $V, W \in \mathfrak{m}$, teremos de pedir de novo que $\langle JV, W\rangle = 0$ para todos $V, W \in \mathfrak{m}$, polo que $\mathfrak{m}$ ten que ser totalmente real.

Calculemos agora o operador de configuración. Para iso, expresamos o espazo ortogonal a $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ do seguinte xeito,

$$\mathfrak{h}^\perp = \mathbb{R}(-|U|^2 B + U) \oplus (\mathfrak{g}_\alpha \ominus (\mathbb{R}U \oplus \mathfrak{m})) \oplus \mathbb{R}Z.$$

Tomando agora o vector normal $-|U|^2B+U \in \mathfrak{h}^\perp$, tense que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{B+U}(-|U|^2B+U) &= \overline{\nabla}_U(-|U|^2B)+\overline{\nabla}_U U = \frac{1}{2}|U|^2(B+U), \text{ e que}\\ \overline{\nabla}_V(-|U|^2B+U) &= \overline{\nabla}_V(-|U|^2B)+\overline{\nabla}_V U = \frac{1}{2}|U|^2V+\langle JV,U\rangle Z = \frac{1}{2}|U|^2V,\end{aligned}$$

para todo $V \in \mathfrak{m}$, xa que $\mathfrak{m} \perp \mathbb{C}U$. Polo tanto,

$$\begin{aligned}S_{-|U|^2B+U}(B+U) &= -\frac{1}{2}|U|^2(B+U)\\ S_{-|U|^2B+U}V &= -\frac{1}{2}|U|^2V,\end{aligned}$$

e así, $S_{-|U|^2B+U} = -\frac{1}{2}|U|^2 \operatorname{id}$ con respecto a unha base formada polo vector $B+U$ xunto con calquera base de $\mathfrak{m}$, polo que $\operatorname{tr} S_{-|U|^2B+U} < 0$ para todo vector U non nulo. Por outra banda obsérvese que, aínda que non collemos o vector normal unitario como podería ser lóxico, isto non inflúe para realizar os cálculos, pois simplemente habería que dividir pola norma ó aplicar o operador de configuración. Logo, como para U non nulo $\operatorname{tr} S_{-|U|^2B+U} \neq 0$, a partir de agora faremos os cálculos para $U=0$, xa que a subálxebra de Lie $\mathfrak{h} = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{m}$ é a única deste caso que se podería corresponder cunha subvariedade minimal. Tomemos agora Z como vector normal. Neste caso tense

$$\overline{\nabla}_B Z = 0, \quad \overline{\nabla}_V Z = -\frac{1}{2}JV,$$

para todo $V \in \mathfrak{m}$. Agora ben, se tomamos as compoñentes tanxentes respecto da subvariedade $H \cdot p$, onde H é o subgrupo de Lie de AN con álxebra de Lie $\mathfrak{h}$, terase que ambas serán iguais a cero, pois $JV \perp \mathfrak{m}$ para todo $V \in \mathfrak{m}$, por ser $\mathfrak{m}$ totalmente real. Deste xeito, $S_Z \equiv 0$, e polo tanto tamén $\operatorname{tr} S_Z = 0$.

Por último, sexa $V \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$. Tense que

$$\overline{\nabla}_B V = 0, \quad \text{e} \quad \overline{\nabla}_W V = \frac{1}{2}\langle W,V\rangle B + \frac{1}{2}\langle JW,V\rangle Z = \frac{1}{2}\langle JW,V\rangle Z,$$

para todo $W \in \mathfrak{m}$, pois $V \perp W$. Logo, como $(\overline{\nabla}_W V)^\top = 0$, tense de novo que $S_V \equiv 0$ para calquera vector normal V en $\mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$, e polo tanto tamén $\operatorname{tr} S_V = 0$. Como o $V \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$ é arbitrario, entón $\operatorname{tr} S_\xi = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{h}^\perp$.

Polo tanto, para o caso $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(B+U) \oplus \mathfrak{m}$ con $U=0$ e $\mathfrak{m}$ totalmente real, temos que S_ξ é nulo para calquera vector ξ en $\mathfrak{h}^\perp$. Así, $H \cdot p$ é neste caso unha subvariedade minimal que de feito é totalmente xedésica. Trátase, en concreto, dun subespazo hiperbólico real $\mathbb{R}H^k$ totalmente xeodésico, con $k = \dim \mathfrak{m} + 1$. Deste xeito, aparece recollida no apartado (a) do Teorema 4.2, e correspóndese cun dos exemplos totalmente xeodésicos recollidos no Teorema 4.5.

Caso 3

Comezamos comprobando que condicións temos impoñer para que $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(B + U + aZ) \oplus \mathfrak{m}$, con $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_\alpha$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $U \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$, sexa subálxebra de Lie. En primeiro lugar, hai que impoñer que $[B + U + aZ, V] \in \mathfrak{h}$, para todo $V \in \mathfrak{m}$ polo que

$$\begin{aligned}[B + U + aZ, V] &= [B, V] + [U, V] + a[Z, V] = \frac{1}{2}V + \langle JU, V\rangle Z + a[Z, V]\\ &= \frac{1}{2}V + \langle JU, V\rangle Z \in \mathfrak{h}.\end{aligned}$$

Deste xeito, tense que cumprir necesariamente que $\langle JU, V\rangle = 0$ para todo $V \in \mathfrak{m}$, polo que temos que impoñer a condición $U \perp \mathbb{C}\mathfrak{m}$. Por outra banda, tense que cumprir $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$. Agora ben, dados $W, V \in \mathfrak{m}$,

$$[W, V] = \langle JW, V\rangle Z,$$

polo que de novo, $\langle JW, V\rangle = 0$. Como isto se ten que cumprir para calquera $V, W \in \mathfrak{m}$, necesariamente $\mathfrak{m}$ debe ser totalmente real.

Polo tanto, para que $\mathfrak{h}$ sexa subálxebra de Lie de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, é necesario impoñer que $U \perp \mathbb{C}\mathfrak{m}$ e que $\mathfrak{m}$ sexa totalmente real.

Neste caso, vexamos que $\mathfrak{h}$ non se corresponde cunha subvariedade minimal. Para iso, tomamos o vector $-aB + Z$, que claramente é normal a $\mathfrak{h}$, e vexamos que $\operatorname{tr} S_{-aB+Z} \neq 0$. En efecto, en primeiro lugar, tense que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{B+U+aZ}(-aB + Z) &= \overline{\nabla}_U(-aB + Z) + \overline{\nabla}_{aZ}(-aB + Z)\\ &= \overline{\nabla}_U(-aB) + \overline{\nabla}_U Z + a(B + aZ) = \frac{a}{2}U - \frac{1}{2}JU + a(B + aZ).\end{aligned}$$

Porén, para calcular a traza interesaranos a compoñente de $S_{-aB+Z}(B+U+aZ)$ na dirección de $B + U + aZ$. Para iso, tendo en conta que normalizando podemos estender $B + U + aZ$ a unha base ortonormal, logo, como B e Z son unitarios, terase que

$$\langle\frac{a}{2}U - \frac{1}{2}JU + a(B + aZ), B + U + aZ\rangle = -a(1 + \frac{1}{2}|U|^2 + a^2).$$

Logo, a compoñente de $S_{-aB+Z}(B + U + aZ)$ con respecto ó vector unitario $\frac{1}{|B+U+aZ|}(B + U + aZ)$ é $\frac{-a(1+\frac{1}{2}|U|^2+a^2)}{|B+U+aZ|}$. Por outra banda, dado $V \in \mathfrak{m}$, que xa supoñemos unitario, tense que

$$\overline{\nabla}_V(-aB + Z) = \overline{\nabla}_V(-aB) + \overline{\nabla}_V Z = \frac{1}{2}aV - \frac{1}{2}JV,$$

polo que por ser $\mathfrak{m}$ totalmente real se terá que $S_{-aB+Z}(V) = -\frac{a}{2}V$. Polo tanto, a traza de S_{-aB+Z} será

$$\operatorname{tr} S_{-aB+Z} = \frac{-a(1 + \frac{1}{2}|U|^2 + a^2)}{|B + U + aZ|^2} - \frac{a(\dim \mathfrak{m})}{2} = -a\left(\frac{1 + \frac{1}{2}|U|^2 + a^2}{|B + U + aZ|^2} + \frac{\dim \mathfrak{m}}{2}\right),$$

que claramente é distinto de cero, pois a o é por hipótese. Deste xeito, concluímos que para este caso, a subálxebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ non se corresponderá cunha subvariedade minimal.

Caso 4

Neste caso, $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}(U + Z)$, con $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_\alpha$ e $U \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$. De novo, comezamos impoñendo condicións para que $\mathfrak{h}$ sexa unha subálxebra de Lie de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. En primeiro lugar, dados $V, W \in \mathfrak{m}$, tense que

$$[V, W] = \langle JV, W\rangle Z,$$

polo que $[V, W] \in \mathfrak{h}$ se $\mathfrak{m}$ é totalmente real, ou ben se $U = 0$. Vexamos agora que condición se ten que cumprir para que $[U + Z, W] \in \mathfrak{h}$ para todo $W \in \mathfrak{m}$. Agora ben, tense que

$$[U + Z, W] = [U, W] = \langle JU, W\rangle Z \quad \text{para todo } W \in \mathfrak{m},$$

polo que $[U + Z, W] \in \mathfrak{h}$ se, e só se $\mathbb{C}U \perp \mathfrak{m}$. En calquera caso, é claro que B é un vector ortogonal a $\mathfrak{h}$, e imos ver que a traza do operador de configuración S_B é distinta de cero.

Así, por unha banda temos que

$$\overline{\nabla}_V B = -\frac{1}{2}V \quad \text{para todo } V \in \mathfrak{m}, \text{ e que} \quad \overline{\nabla}_{U+Z} B = -\frac{1}{2}U - Z,$$

e deste xeito, terase que $S_B V = \frac{1}{2}V$ para todo $V \in \mathfrak{m}$. Por outra banda, como $\overline{\nabla}_{U+Z} B$ non é un vector de $\mathfrak{h}$, vexamos cal é a súa compoñente na dirección do vector $U + Z$. Como antes, calculamos primeiro

$$\langle \frac{1}{2}U + Z, U + Z\rangle = \frac{1}{2}|U|^2 + 1,$$

e polo tanto, a compoñente na dirección de $\frac{1}{|U+Z|}(U + Z)$ será $\frac{\frac{1}{2}|U|^2+1}{|U+Z|}$. Deste xeito, terase que

$$\operatorname{tr} S_B = \frac{1}{2}\dim\mathfrak{m} + \frac{\frac{1}{2}|U|^2 + 1}{|U + Z|^2} > 0,$$

de onde deducimos que $\mathfrak{h}$ non se pode corresponder cunha subvariedade minimal de $\mathbb{C}H^n$.

Caso 5

Vexamos que condicións temos que impoñerlle a $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(B + U) \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}(V + Z)$, con $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_\alpha$ e $U, V \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$, para que esta sexa unha subálxebra de Lie de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. En primeiro lugar, precisamos que $[B + U, W] \in \mathfrak{h}$ para todo $W \in \mathfrak{m}$. Agora ben,

$$[B + U, W] = \frac{1}{2}W + \langle JU, W\rangle Z,$$

que pertencerá a $\mathfrak{h}$ no caso de que $V = 0$, ou ben no caso que $\langle JU, W\rangle = 0$ para todo $W \in \mathfrak{m}$, polo que $\mathbb{C}U \perp \mathfrak{m}$.

Agora, dado $W \in \mathfrak{m}$, vexamos en que casos $[V + Z, W] \in \mathfrak{h}$. Para iso, calculamos

$$[V + Z, W] = [V, W] = \langle JV, W\rangle Z,$$

que estará en $\mathfrak{h}$ se $\mathbb{C}V \perp \mathfrak{m}$, xa que nese caso estaría na dirección de $Z \in \mathfrak{h}$.

Por outra banda, dados $W, T \in \mathfrak{m}$, logo $[W,T] = \langle JW, T\rangle Z \in \mathfrak{h}$ se de novo $V = 0$, ou ben $J\mathfrak{m} \perp \mathfrak{m}$, é dicir se $\mathfrak{m}$ é totalmente real.

Por último, queda comprobar o caso $[B+U, V+Z] \in \mathfrak{h}$. Terase que

$$[B+U, V+Z] = [B,V] + [B,Z] + [U,V] = \frac{1}{2}V + Z + \langle JU, V\rangle Z.$$

Agora ben, tal vector pertencerá a $\mathfrak{h}$ se $V = 0$, ou, noutro caso, se é un múltiplo de $V + Z$. Nese caso, como $\frac{1}{2}$ está multiplicando a V, logo habería que impoñer a condición

$$\langle JU, V\rangle = -\frac{1}{2}$$

para que se puidese sacar factor común.

En resumo, $\mathfrak{h}$ será unha subálxebra de Lie de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ exclusivamente nos dous seguintes casos: ou ben $V = 0$; ou ben $\langle JU, V\rangle = -\frac{1}{2}$ e os espazos vectoriais $\mathbb{C}U$, $\mathbb{C}V$ e $J\mathfrak{m}$ son todos eles ortogonais a $\mathfrak{m}$. Dividimos agora o estudo atendendo a estas dúas posibilidades.

Caso 5.1

Se $V = 0$, podemos describir o espazo normal a $\mathfrak{h}$ como

$$\mathfrak{h}^\perp = (\mathfrak{g}_\alpha \ominus (\mathbb{R}U \oplus \mathfrak{m})) \oplus \mathbb{R}(-|U|^2 B + U).$$

Neste caso, comezamos tomando o vector normal $-|U|^2B + U$, e terase logo que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{B+U}(-|U|^2B + U) &= \overline{\nabla}_U(-|U|^2B + U) = \overline{\nabla}_U(-|U|^2B) + \overline{\nabla}_U U \\ &= \frac{1}{2}|U|^2U + \frac{1}{2}|U|^2B = \frac{|U|^2}{2}(B+U),\end{aligned}$$

polo que $S_{-|U|^2B+U}\left(\frac{1}{|B+U|}(B+U)\right) = -\frac{|U|^2}{2|B+U|}(B+U)$. Agora, para cada $W \in \mathfrak{m}$ terase que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_W(-|U|^2B + U) &= \overline{\nabla}_W(-|U|^2B) + \overline{\nabla}_W U \\ &= \frac{|U|^2}{2}W + \frac{1}{2}\langle W, U\rangle B + \frac{1}{2}\langle JW, U\rangle Z = \frac{|U|^2}{2}W + \frac{1}{2}\langle JW, U\rangle Z,\end{aligned}$$

onde a última igualdade séguese de que $W \perp U$. Polo tanto, como neste caso $\frac{|U|^2}{2}W + \frac{1}{2}\langle JW, U\rangle Z \in \mathfrak{h}$, terase logo que $S_{-|U|^2B+U}W = -\frac{|U|^2}{2}W - \frac{1}{2}\langle JW, U\rangle Z$, polo que a compoñente na dirección de W é $-\frac{|U|^2}{2}$. Por último terase que

$$\overline{\nabla}_Z(-|U|^2B + U) = \overline{\nabla}_Z(-|U|^2B) + \overline{\nabla}_Z U = |U|^2Z - \frac{1}{2}JU,$$

e entón a compoñente de $S_{-|U|^2B+U}(Z)$ respecto de Z será $-|U|^2$. Deste xeito,

$$\operatorname{tr} S_{-|U|^2B+U} = -|U|^2 - \frac{\dim \mathfrak{m}|U|^2}{2} - \frac{|U|^2}{2} = -|U|^2(1 + \frac{\dim \mathfrak{m}}{2} + \frac{1}{2}),$$

Se U é un vector non nulo, entón a traza do operador de configuración con respecto ó vector normal (non necesariamente unitario) $-|U|^2B + U$ é non nula, polo que $H \cdot p$ resulta ser unha subvariedade de $\mathbb{C}H^n$ non minimal. Así, de agora en diante tomaremos $U = 0$, polo que podemos reescribir $\mathfrak{h} = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}Z$, onde agora podemos asumir que $\mathfrak{m}$ é subespazo vectorial de $\mathfrak{g}_\alpha$ distinto do total.

Sexa W un vector en $\mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$. Imos calcular a traza do operador de configuración S_W respecto ó vector W. Por unha banda, temos que $\overline{\nabla}_B W = 0$. Ademais, temos tamén que

$$\overline{\nabla}_Z W = -\frac{1}{2}JW, \quad \text{e que} \quad \overline{\nabla}_T W = \frac{1}{2}\langle JT, W\rangle Z$$

para calquera $T \in \mathfrak{m}$. De aquí podemos deducir que $S_W Z = -(\overline{\nabla}_Z W)^\top = (-1/2)JW^\top$ e que $S_W T = -(\overline{\nabla}_T W)^\top = (-1/2)\langle JT, W\rangle Z$. En particular, isto implica que $H \cdot p$ é totalmente xeodésica se e só se $\langle JT, W\rangle = 0$ e $JW \perp \mathfrak{m}$ para todo $T \in \mathfrak{m}$ e todo $W \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathfrak{m}$. Isto equivale a que $\mathfrak{m}$ sexa un subespazo complexo de $\mathfrak{g}_\alpha$. Nestas condicións, $H \cdot p$ é un subespazo hiperbólico complexo totalmente xeodésico $\mathbb{C}H^k$, con $k = 1 + \dim \mathfrak{m}$.

En calquera caso, temos que $\langle S_W T, T\rangle = 0$ para calquera $T \in \mathfrak{m}$, e que $\langle S_W Z, Z\rangle = 0$, posto que W pertence a $\mathfrak{g}_\alpha$, que é J-invariante. Tendo isto en conta, xunto con $\overline{\nabla}_W B = 0$, deducimos que se $\mathfrak{h} = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}Z$, entón $H \cdot p$ será unha subvaridade minimal de $\mathbb{C}H^n$, con independencia do subespazo vectorial real (propio) $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}_\alpha$ que consideremos. Como argumentamos arriba, dita subvariedade será totalmente xeódesica se e só se $\mathfrak{m}$ é un subespazo complexo de $\mathfrak{g}_\alpha$.

Finalmente, nótese que os exemplos desta forma aparecen recollidos no apartado (b) do Teorema 4.2. Ademais, os tubos arredor destas subvariedades son sempre exemplos de hipersuperficies isoparamétricas [14], polo que aparecen tamén recollidos no Teorema 4.5. Por último, a distinción entre os casos totalmente xeodésicos e os que non o son aparece recollida na Observación 4.3

Caso 5.2

Neste caso, temos que $\mathbb{C}U, \mathbb{C}V$ e $J\mathfrak{m}$ son normais a $\mathfrak{m}$ e ademais $\langle JU, V\rangle = -\frac{1}{2}$. Disto último dedúcese que $-\frac{1}{2}B + JV$ é normal a $\mathfrak{h}$. Agora, con obter outro vector normal a $\mathfrak{h}$ que non estea en $\mathfrak{g}_\alpha \ominus (\mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}\{U, V\})$ xa nos chegará para describir $\mathfrak{h}^\perp$. Pode comprobarse facilmente que o vector $-|V|^2Z + V - \langle U, V\rangle B$ é normal a $\mathfrak{h}$. Polo tanto,

$$\mathfrak{h}^\perp = (\mathfrak{g}_\alpha \ominus (\mathfrak{m} \oplus \operatorname{span}\{U, V\})) \oplus \mathbb{R}(-\frac{1}{2}B + JV) \oplus \mathbb{R}(-|V|^2Z + V - \langle U, V\rangle B).$$

Vexamos agora que neste caso $\mathfrak{h}$ non se corresponderá cunha superficie minimal. Tomando o vector $-\frac{1}{2}B + JV$, terase por un lado que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{B+U}(-\frac{1}{2}B + JV) &= \overline{\nabla}_U(-\frac{1}{2}B + JV)\\ &= \overline{\nabla}_U(-\frac{1}{2}B) + \overline{\nabla}_U\, JV = \frac{1}{4}U + \frac{1}{2}\langle U, JV\rangle B + \frac{1}{2}\langle JU, JV\rangle Z\\ &= \frac{1}{4}(U + B) + \frac{1}{2}\langle U, V\rangle Z,\end{aligned}$$

e polo tanto, a compoñente de $S_{-\frac{1}{2}B+JV}\left(\frac{1}{|B+U|}(B+U)\right)$ con respecto a $\frac{1}{|B+U|}(B+U)$ será $\frac{-1}{4}$. Por outra banda, dado $W \in \mathfrak{m}$, tense que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_W(-\frac{1}{2}B + JV) &= \overline{\nabla}_W(-\frac{1}{2}B) + \overline{\nabla}_W\, JV\\ &= \frac{1}{4}W + \frac{1}{2}\langle W, JV\rangle B + \frac{1}{2}\langle JW, JV\rangle Z = \frac{1}{4}W,\end{aligned}$$

dado que $\mathbb{C}V \perp W$. Entón, a compoñente de $S_{-\frac{1}{2}B+JV}W$ na dirección de W será $-\frac{1}{4}$. Por último,

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{V+Z}(\frac{-1}{2}B + JV) &= \overline{\nabla}_V(\frac{-1}{2}B) + \overline{\nabla}_V\, JV + \overline{\nabla}_Z(\frac{-1}{2}B) + \overline{\nabla}_Z\, JV\\ &= \frac{1}{4}V + \frac{1}{2}\langle JV, JV\rangle Z + \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}V\\ &= \frac{3}{4}V + \frac{|V|^2| + 1}{2}Z.\end{aligned}$$

Calculemos agora a compoñente de $S_{-\frac{1}{2}B+JV}\left(\frac{1}{|V+Z|}(V+Z)\right)$ con respecto de $\frac{1}{|V+Z|}(V+Z)$. Obtemos que

$$\begin{aligned}\langle -\overline{\nabla}_{V+Z}(\frac{-1}{2}B + JV), V + Z\rangle &= -\langle\frac{3}{4}V + \frac{|V|^2 + 1}{2}Z, V + Z\rangle\\ &= -(\frac{3}{4}|V|^2 + \frac{|V|^2 + 1}{2}),\end{aligned}$$

polo que tal compoñente será

$$-\frac{\frac{3}{4}|V|^2 + \frac{|V|^2+1}{2}}{|V + Z|^2},$$

que claramente é menor que cero. Polo tanto como todos os termos da traza de $S_{\frac{-1}{2}B+JV}$ son negativos, a traza tamén o será, polo que neste caso $\mathfrak{h}$ tampouco se corresponderá cunha subvariedade minimal.

Como resumo ó estudo que vimos de levar a cabo, temos que as subálxebras incluídas nos Casos 1, 2 e 4 non dan nunca lugar a subvariedades minimais de $\mathbb{C}H^n$.

Por outra banda, cando $\mathfrak{h} = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{m}$, onde $\mathfrak{m}$ é un subespazo totalmente real de $\mathfrak{g}_\alpha$, que é un subcaso particular do Caso 2, temos que $H \cdot p$ é unha subvariedade totalmente xeódesica de $\mathbb{C}H^n$, e polo tanto minimal. Os exemplos así construídos aparecen recollidos no apartado (a) do Teorema 4.2, e correspóndese cos exemplos totalmente xeodésicos citados no Teorema 4.5.

Por último, para $\mathfrak{h} = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}Z$, con $\mathfrak{m}$ un subespazo propio de $\mathfrak{g}_\alpha$ (subcaso do Caso 4.1), temos que $H \cdot p$ é subvariedade minimal de $\mathbb{C}H^n$, que é totalmente xeodésica se e só se $\mathfrak{m}$ é complexo. Todos estes exemplos están recollidos no apartado (b) do Teorema 4.2, e aparecen tamén citados no Teorema 4.5, pois os tubos ó seu redor dan lugar a hipersuperficies isoparamétricas do espazo hiperbólico complexo.

Bibliografía

[1] D. V. Alekseevsky, A. J. Di Scala: Minimal homogeneous submanifolds of symmetric spaces. *Lie groups and symmetric spaces. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **210** (2003), 11–25.

[2] J. Berndt: Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces. *Math. Z.* **229** (1998), no. 4, 589–600.

[3] J. Berndt, M. Brück: Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces. *J. Reine Angew. Math.* **541** (2001), 209–235.

[4] J. Berndt, S. Console, C. Olmos: *Submanifolds and holonomy. Second edition.* Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.

[5] J. Berndt, J. C. Díaz-Ramos: Homogeneous hypersurfaces in complex hyperbolic spaces. *Geom. Dedicata* **138** (2009), 129–150.

[6] J. Berndt, J. C. Díaz-Ramos, H. Tamaru: Hyperpolar homogeneous foliations on symmetric spaces of noncompact type. *J. Differential Geom.* **86** (2010), no. 2, 191–235.

[7] S. Brendle: Embedded minimal tori in $\mathbb{S}^3$ and the Lawson conjecture. *Acta Math.* **211** (2013), no. 2, 177–190.

[8] S. Brendle: The isoperimetric inequality for a minimal submanifold in Euclidean space. *J. Amer. Math. Soc.* **34** (2021), no. 2, 595–603.

[9] É. Cartan: Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. *Bull. Soc. Math. France* **54** (1926), 214–264.

[10] T. E. Cecil, P. J. Ryan: *Geometry of hypersurfaces* Volume 10. Springer, 2015.

[11] T. H. Colding, W. P. Minicozzi, II: *A course in minimal surfaces.* Graduate Studies in Mathematics, 121. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[12] Q.-S. Chi: The isoparametric story, a heritage of Élie Cartan. *Proceedings of the International Consortium of Chinese Mathematicians 2018*, 197–260, Int. Press, Boston, MA, 2020.

[13] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez, A. Kollross: Polar actions on complex hyperbolic spaces *Math. Z.* **287** (2017), no. 3–4, 1183–1213.

[14] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López: Isoparametric hypersurfaces in complex hyperbolic spaces. *Adv. Math.* **314** (2017), 756–805.

[15] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López: Submanifold geometry in symmetric spaces of noncompact type. *São Paulo J. Math. Sci.* **15** (2021), no. 1, 75–110.

[16] A. J. Di Scala: Minimal homogeneous submanifolds in Euclidean spaces. *Ann. Global Anal. Geom.* **21** (2002), no. 1, 15–18.

[17] A. Di Scala, C. Olmos: The geometry of homogeneous submanifolds of hyperbolic space. *Math. Z.* **237** (2001), no. 1, 199–209.

[18] M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López, H. Tamaru: Codimension one Ricci soliton subgroups of solvable Iwasawa groups. *J. Math. Pures Appl.* **152** (2021), 69–93.

[19] M. Domínguez Vázquez: *Hipersuperficies con curvaturas principais constantes nos espazos proxectivo e hiperbólico complexos.* Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología. Universidade de Santiago de Compostela, 2010.

[20] Brian C. Hall: Lie groups, Lie algebras, and representations. *Quantum Theory for Mathematicians.* Springer, New York, NY, 2013. 333-366.

[21] S. Helgason: *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Academic press, 1979.

[22] D. Hirohashi, H. Tasaki, H. Song, R. Takagi: Minimal orbits of the isotropy groups of symmetric spaces of compact type. *Differential Geom. Appl.* **13** (2000), no. 2, 167–177.

[23] W.-y. Hsiang: On the compact homogeneous minimal submanifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **56** (1966), 5–6.

[24] A. W. Knapp: *Lie groups beyond an introduction. Second edition.* Progress in Mathematics, 140. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[25] J. Lee: *Introduction to Riemannian manifolds.* Springer, Cham, Switzerland, 2018.

[26] J. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer, New York, 2013.

[27] M. Lohnherr, H. Reckziegel: On ruled real hypersurfaces in complex space forms. *Geom. Dedicata* **74** (1999), no. 3, 267–286.

[28] F. C. Marques, A. Neves: Min–max theory and the Willmore conjecture. *Ann. of Math. (2)* **179** (2014), 683–782.

[29] F. C. Marques, A. Neves: Applications of min-max methods to geometry. *Geometric analysis*, 41–77, Lecture Notes in Math., 2263, Fond. CIME/CIME Found. Subser., Springer, Cham,2020.

[30] W. H. Meeks, III, J. Pérez: *A survey on classical minimal surface theory*. University Lecture Series, 60. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[31] S. B. Myers, N. E. Steenrod: The group of isometries of a Riemannian manifold. *Ann. of Math. (2)* **40** (1939), no. 2, 400-416.

[32] J. Pérez: A new golden age of minimal surfaces. *Notices Amer. Math. Soc.* **64** (2017), no. 4, 347–358.

[33] T. Takahashi: Minimal immersions of Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan* **18** (1966), 380–385.

[34] H. Tamaru: Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and Einstein solvmanifolds. *Math. Ann.* **351** (2011), no. 1, 51–66.

[35] N. R. Wallach: Minimal immersions of symmetric spaces into spheres. *Symmetric spaces (Short Courses, Washington Univ., St. Louis, Mo., 1969–1970)*, pp. 1–40. Pure and Appl. Math., Vol. 8, Dekker, New York, 1972.

[36] K. Yano, M. Kon: *Structures on manifolds*. Series in Pure Math. 3, World Scientific, Singapore, 1984.

[37] W. Ziller: *Lie groups. Representation theory and symmetric spaces*. Lecture notes, 2010. Available online at: `https://www2.math.upenn.edu/~wziller/math650/LieGroupsReps.pdf` (último acceso: xullo de 2022).