PABLO IRIMIA REGA

TEORÍA DE COBORDISMO E INVARIANTES DERIVADOS ASINTÓTICOS DA TRAZA DA CALOR

154b
2023

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

PABLO IRIMIA REGA

TEORÍA DE COBORDISMO E INVARIANTES DERIVADOS ASINTÓTICOS DA TRAZA DA CALOR

154b

2023

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Máster

Teoría de cobordismo e invariantes derivados asintóticos da traza da calor

Pablo Irimia Rega

Xullo, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice xeral

Resumo

O obxectivo deste traballo é examinar os invariantes derivados asintóticos da calor, tanto no caso real como no caso complexo, para unha deformación xeneralizada de Witten nunha variedade de Riemann ou Kähler.

Para iso, comézase analizando os índices locais de densidade para o complexo de De Rham deformado e para o complexo de Dolbeault deformado. No primeiro dos casos, a deformación xeneralizada de Witten realízase en variedades de Riemann, empregando unha 1-forma pechada Θ. Vese que o índice de densidade é independente de Θ. No segundo caso, restrinxímonos a variedades Kähler. Agora, para a deformación xeneralizada de Witten, emprégase unha $(1,0)$-forma Θ verificando que $\partial\Theta = 0$. Neste caso, dase unha descrición explícita do índice local de densidade asociado, que permite ver unha dependencia non trivial de Θ. Unha vez estudados estos invariantes, introdúcense os invariantes derivados asintóticos da calor. Supoñendo que a dimensión da variedade é par, no caso real, vese que a integral da densidade local derivada da traza da calor é proporcional á clase de Euler da variedade base considerada. No caso complexo, onde de novo se supón que a variedade é Kähler, vese que a integral da densidade local para a traza da calor derivada definida polo complexo de Dolbeault é un número característico do fibrado tanxente complexo é do fibrado vectorial. Identifícase este número característico para dimensións complexas 1 e 2.

Finalmente, co fin de facer o mesmo en dimensións superiores, introdúcese a teoría de cobordismo. Comézase realizando un estudo xeral desta, centrándonos despois no cobordismo complexo. Preténdese empregalo nun futuro traballo, como ferramenta para o noso propósito.

Abstract

We examine the derived heat trace aymptotics in both the real and the complex settings for a generalized Witten perturbation on a Riemannian or Kählerian manifold.

Firstly, we examine the local index density of the perturbed De Rham complex and of the perturbed Dolbeault complex. In the former case, the generalized Witten perturbation is realiced in the Riemann manifold, using a closed 1-form Θ. We show that the perturbed index density is independent of Θ. In the latter, we asume the underlying geometry to be Kähler. Now, we introduce the generalized Witten perturbation, using a $(1,0)$-form Θ with $\partial\Theta = 0$. We give an explicit description of the associated index density which shows that it exhibits a nontrivial dependence on Θ. After that, we introduce the derived heat trace asymptotics. If the dimension is even, in the real context we show the integral of the local density for the derived heat trace asymptotics is proportional to the Euler class of the underlying manifold. In the complex setting, we, again, asume the manifold to be Kähler and show the integral of the local density for the derived heat trace asymptotics defined by the Dolbeault complex is a characteristic number of the complex tangent bundle and the twisting vector bundle. We compute this characteristic number if the complex dimension is 1 and 2.

Finally, Cobordism theory is introduced in order to use it to compute the characteristic number in higher dimension. We start by analyzing cobordism theory in a general way. After that, we focus on the complex cobordism, since we want to use it in a future work, as a tool for our purpouses.

Introdución

En 1982, Witten en [20] introduce a deformación da diferencial de De Rham. Para iso, considera unha variedade compacta sen bordo M de dimensión m, unha función h C^∞ sobre M, o produto exterior $\mathrm{ext}(dh)$ por dh e un parámetro real s. Baixo estas consideracións, define $d_{sh} = d + s\,\mathrm{ext}(dh)$. Como d_{sh} é equivalente "gauge" a d, os números de Betti asociados seguen a ser os mesmos. A correspondente codiferencial deformada de De Rahm está dada por $\delta_{sh} = \delta + s\,\mathrm{int}(dh)$, onde $\mathrm{int}(dh)$ é o produto interior por dh. Así, o Laplaciano deformado asociado é $\Delta_{sh} = d_{sh}\delta_{sh} + \delta_{sh}d_{sh}$. Agora, en xeral, Δ_{sh} non será equivalente "gauge" a Δ. Cando h é unha función Morse, Witten emprega esta familia de complexos elípticos co fin de dar unha proba analítica das desigualdades de Morse, analizando o espectro de Δ_{sh} cando $s \to \infty$.

De forma máis xeral, Novikov en [15] e en [14] definiu uns operadores deformados, análogos aos de Witten, mais agora empregando unha 1-forma real pechada Θ en M, en lugar de dh,

$$d_{s\Theta} = d + s\,\mathrm{ext}(\Theta), \quad \delta_{s\Theta} = \delta + s\,\mathrm{int}(\Theta), \quad \Delta_{s\Theta,\mathcal{M}} = d_{s\Theta}\delta_{s\Theta} + \delta_{s\Theta}d_{s\Theta}.$$

Novikov emprega estes operadores para estimar os ceros de Θ, no caso de ser unha función Morse. Como $d_{s\Theta}$ non ten porque ser equivalente "gauge" a d, os números de Betti torcidos dependen de s e de Θ. Agora ben, os números de Betti torcidos son constantes no complementario dun conxunto finito S de distintos valores de s, onde as dimensións *saltan*. Os números de Betti torcidos, cando $s \in \mathbb{R}\backslash S$, coñécense como *números de Novikov* da clase de cohomoloxía $[\Theta]$. Estes son empregados na versión de Novikov das desigualdades de Morse. Esta área de investigación segue a ser moi activa na actualidade.

Neste traballo considerarase o Laplaciano de Novikov con $s = 1$, $\Delta_{\Theta,\mathcal{M}}$. No Capítulo 1 introdúcense conceptos básicos necesarios para seguir con maior facilidade o traballo. A finalidade do Capítulo 2 será estudar os índices locais de densidade para a xa mencionada deformación de Novikov, no caso do complexo de De Rham, [3], e do complexo de Dolbeault, [1]. No primeiro dos casos vese que o índice local de densidade do complexo de De Rham torcido é a forma de Euler de ser m par, e é nulo se m é impar. En concreto, móstrase que non depende da forma Θ. Para o caso do complexo de Dolbeault, considérase un fibrado vectorial hermitiano (E, h) sobre unha variedade Kähler (M, g, J). De forma análoga ao caso real, introdúcese o operador de Dolbeault deformado $\bar{\partial}_{\bar{\Theta}} = \bar{\partial} + \mathrm{ext}(\bar{\Theta})\colon C^\infty(\Lambda^{0,i}(M) \otimes E) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{0,i+1}(M) \otimes E)$, onde agora Θ é unha $(1,0)$-forma cumprindo $\partial\Theta = 0$. O teorema de Riemann-Roch mostra que que o índice é a integral en M de $\{\mathrm{Td}(M, g, J) \wedge$

$\mathrm{ch}(E,h)\}_m$. Máis adiante, Atiyah, Bott e Patodi melloraron este teorema en [4], mostrando que $\{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge\mathrm{ch}(E,h)\}_m$ é o índice de densidade que aparece na expansión asintótica do núcleo da calor. Empregarase teoría de invarianza para dar unha descrición explícita do índice local de densidade do complexo de Dolbeault deformado, como deformación de $\{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge\mathrm{ch}(E,h)\}_m$. O resto de invariantes da calor para ordes inferiores serán nulas.

No Capítulo 3 estúdanse os invariantes derivados da traza da calor. Este concepto foi introducido por Günther e Schimming en [11]. Para iso, definiron unha sucesión de invariantes da calor secundarios. O primeiro deles chamáronlle o invariante derivado da calor. No caso do complexo de De Rham deformado defínese como

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,n}(\mathcal{M})(x) := \sum_p (-1)^p p\, a_{m,n}(\Delta^p_{\Theta,\mathcal{M}})(x),$$

onde $a_{m,n}(\Delta^p_{\Theta,\mathcal{M}})(x)$ é o seu invariante da traza da calor de orde n. Outra versión deste invariante é $\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,n}$, que se define de forma similar co complexo de Dolbeault deformado no caso Kähler. En concreto, neste capítulo verase que para o caso real, supoñendo que $\mathcal{M}$ é unha variedade de Riemann, $\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,n}$ se anula se $n < m-1$, e que mostra dependencia non trivial de Θ no caso de que $n \geq m$. Tamén se ve que $\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m-1} = -(4\pi)^{-1/2}\mathcal{E}_{m,m-1}$ se m é impar, e que $\int_M \mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m}\,\mathrm{dvol} = \frac{m}{2}\int_M \mathcal{E}_{m,m}\,\mathrm{dvol}$ se m é par (Teorema 3.8). En particular, $\int_M \mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m}\,\mathrm{dvol}$ é independente de Θ. Este último feito é crucial no estudo de certos invariantes da función zeta asociados a 1-formas pechadas.

O caso Kähler é máis complicado. En primeiro lugar, lógrase ver que $\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,n} = 0$ se $n < m-2$ e que $\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,n}$ mostra unha dependencia non trivial de Θ para $n \geq m-2$. Neste punto, o feito máis importante é que se logra ver que $\int_M \mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m}\,\mathrm{dvol}$ é un invariante característico independente de Θ (Teorema 3.10). A partir deste último feito, determínase $\int_M \mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m}\,\mathrm{dvol}$ en xeral para $m=2$ e $m=4$ en termos das clases características do fibrado tanxente complexo de M e o fibrado E (Teorema 3.13). Para $m=6$ o problema segue sen estar resolto. Aquí é onde entra a teoría de cobordismo. Como os números característicos son invariantes de cobordismo, coñecer os xeradores do anel de cobordismo complexo diranos en que variedades avaliar este invariante secundario para tratar de determinalo. Ao mesmo tempo, hai que avalialo en fibrados hermitianos apropiados. Así que se fará unha introdución da teoría de cobordismo complexo coa finalidade de ser usada con este propósito nunha continuación futura deste traballo.

No cuarto e último capítulo introdúcese a teoría de cobordismo. Para iso analízase con detalle o libro de Stong [19]. Preséntase unha idea xeral de que é o cobordismo, xunto con resultados importantes neste ámbito. Menciónase ademais algún que outro tipo de cobordismo (cobordimos non orientado, bordismo, cobordismo topolóxico, ...), prestando unha maior atención no cobordismo complexo.

Capítulo 1

Preliminares

O obxectivo deste capítulo é poñerse en contexto e introducir o marco no que se traballará. Para iso primeiro introducirase a ecuación da calor e algunha que outra propiedade coñecida da mesma. Esto permitirá introducir posteriormente no seguinte capítulo os invariantes que son o obxecto de estudo deste traballo. Ademais falarase de variedades Kähler e da álxebra de Clifford que serán empregadas ao longo do traballo. Finalmente definirase e introduciranse propiedades da clase característica de Chern e tamén da clase de Todd. A bibliografía empregada neste capítulo serán os libros de Peter Gilkey [8] e [9], e mais o libro de Hirzebruch [12].

1.1. Ecuación da calor

Comézase establecendo a notación que se empregará ao longo desta sección. Tómese $\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(m))$ un multi-índice formado por enteiros non negativos. Así defínese

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha(1) + \cdots + \alpha(m), \qquad & \partial_i &:= \tfrac{\partial}{\partial_{x_i}}, \\ d_x^\alpha &:= (\partial_1)^{\alpha(1)} \cdots (\partial_m)^{\alpha(m)}, \qquad & D_x^\alpha &:= (-\sqrt{-1})^{|\alpha|} d_x^\alpha. \end{aligned}$$

Con esta notación un operador diferencial (parcial linear) P de orde menor ou igual que $d > 0$ é un operador no espazo de funcións con valores complexos e soporte compacto, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, cunha expresión da forma

$$P := \sum_{|\alpha| \le d} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

onde $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Deste xeito, defínese o símbolo

$$\sigma(P) := \sum_{|\alpha| \le d} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Formalmente o que se fai é substituír o operador diferencial D_x^α polo monomio ξ^α. O símbolo principal é a parte con orde máxima. Así, no símbolo anterior, considéranse todos os monomios de orde d e defínese o seguinte polinomio homoxéneo de grao d e variable ξ:

$$\sigma_L(P) := \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

O operador P é elíptico de orden d se $\sigma_L(P)(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \neq 0$. Denotarase por $\mathcal{P}_{\mathrm{diff}}$ o espazo vectorial de todos os operadores diferenciais parciais. Nótese que este espazo vectorial ten unha filtración natural polos subespazos $\mathcal{P}^d_{\mathrm{diff}} \subset \mathcal{P}_{\mathrm{diff}}$ de operadores diferenciais parciais de orde menor ou igual que d.

Defínese $\mathcal{P}^d_{\mathrm{se}} \subset \mathcal{P}^d_{\mathrm{diff}}$ como o conxunto de operadores diferenciais parciais que son elípticos e simétricos de orde d. Denotarase por $\mathcal{P}^{d,+}_{se}$ o conxunto de aqueles operadores de $\mathcal{P}^d_{se}$ tales que $\sigma_L(P)(x,\xi)$ é definido positivo para $\xi \neq 0$.

Os conceptos anteriores xeneralízanse de forma obvia a abertos de $\mathbb{R}^n$. A partir deste punto, empregando coordenadas locais, pode xeneralizarse a variedades compactas sen bordo. Tamén se xeneralizan de forma obvia a seccións C^∞ dun fibrado vectorial E, empregando referencias locais, [8]. Para a simetría e a definición positiva de operadores diferenciais con esta xeneralidade empregarase unha métrica de Riemann en M e unha estrutura euclidiana ou hermitiana en E. Estase xa en condicións de definir a ecuación da calor.

Definición 1.1 (Ecuación da calor). Sexa $P \in \mathcal{P}^{d,+}_{se}$. A ecuación da calor consiste no seguinte sistema de ecuacións onde $t > 0$:

$$\begin{cases} (\partial_t + P)h(x,t) = 0 & \text{(ecuación de evolución)} \\ \lim\limits_{t\to 0} \quad h(x,t) = f(x) & \text{(condición inicial).} \end{cases}$$

Denótase por $e^{-tP}f$ a solución do sistema (e^{-tP} é o denominado operador da calor, que se pode definir usando o teorema espectral). Descomponse f nunha serie usando os autovectores de P, xeneralizando as series de Fourier (caso do Laplaciano nos toros planos),

$$f = \sum_n c_n\phi_n,$$

onde $c_n = (f,\phi_n)_{L^2}$, xeneralizando os coeficientes de Fourier. Defínese

$$\phi_n^*(f) = (f,\phi_n).$$

Agora, pódese ver (por exemplo no lema 1.6.5 de [8]) que

$$e^{-tP}f(x,t) = \sum_n e^{-t\lambda_n}c_n\phi_n(x) = \int_M K(t,x,y)f(y)\,\mathrm{dvol},$$

onde $K(t,x,y) := \sum_n e^{-t\lambda_n}\phi_n(x) \otimes \phi_n^*(y)$. Ademais, $K(t,x,y)$ pódese describir como a solución da ecuación da calor, avaliada en x, coa condición inicial a delta de Dirac δ_y, que é unha función xeneralizada singular (unha distribución). Un resultado de Seeley permitirá, a partir da anterior consideración, definir os *índices locais de densidade* que é un dos obxectos de estudo deste traballo.

1.2. O complexo de De Rham

O complexo de De Rham defínese como

$$\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M}) := \{d_i \colon C^\infty(\Lambda^i(M)) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{i+1}(M))\}_{0\leq i\leq m-1},$$

onde $\bigwedge^i(M) := \bigwedge^i(T^*M)$ é o fibrado vectorial de i-formas e d_i é a diferencial exterior. O laplaciano asociado é

$$\Delta_{\mathcal{M}} := d\delta + \delta d = \bigoplus_i \Delta^i_{\mathcal{M}} := \bigoplus_i d_{i-1}\delta_{i-1} + \delta_i d_i,$$

onde δ é o operador adxunto do operador de De Rham $d \colon C^\infty(\Lambda(M)) \longrightarrow C^\infty(\Lambda(M))$.

1.3. O complexo de Dolbeault

Sexa J unha estrutura integrable case complexa nunha variedade M de dimensión complexa $\mathfrak{m}$ e dimensión real $m = 2\mathfrak{m}$. É dicir, é unha sección

$$J \in C^\infty(\mathrm{End}(TM))$$

onde $J^2 = -\mathrm{Id}_{TM}$. Sexa E un fibrado vectorial holomorfo auxiliar sobre M equipado dunha métrica hermitiana, h. Sexa g unha métrica de Riemann en M J-invariante; (H, g, J) é unha variedade holomorfa hermitiana. Esténdese g a unha métrica hermitiana nas complexificacións

$$TM \otimes \mathbb{C},\ T^*M \otimes \mathbb{C},\ \text{ e } \Lambda(M) \otimes \mathbb{C}.$$

Considérase a descomposición nos $\pm\sqrt{-1}$-autoespazos de J, $TM \otimes \mathbb{C} = T_c(M) \oplus T^*_c M$. De forma inducida, obtense a descomposición $T^*M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0}M \oplus \Lambda^{0,1}M$, así, como bigraduación $\Lambda(M) \otimes \mathbb{C}$ pode ser expresado como

$$\Lambda(M) \otimes \mathbb{C} = \underset{p,q}{\oplus} \Lambda^{p,q}M,$$

onde $\Lambda^{p,q}M := \Lambda^p(\Lambda^{1,0}M) \otimes \Lambda^q(\Lambda^{0,1}M)$. Defínese entón ∂ e $\bar\partial$ como as compoñentes bihomoxéneas de d de bigraos $(1,0)$ e $(0,1)$; é dicir, $d = \partial + \bar\partial$ con

$$\partial \colon C^\infty(\Lambda^{p,q}(M) \otimes E) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{p+1,q}(M) \otimes E),$$
$$\bar\partial \colon C^\infty(\Lambda^{p,q}(M) \otimes E) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{p,q+1}(M) \otimes E).$$

O *complexo de Dolbeault con coeficientes en* E defínese como

$$\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}) := \{\bar\partial \colon C^\infty(\Lambda^{0,i}(M) \otimes E) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{0,i+1}(M) \otimes E)\}_{0\leq i\leq \mathfrak{m}-1}.$$

O laplaciano asociado é

$$\Delta_{\mathcal{K}} := (\bar\partial\delta'' + \delta''\bar\partial) = \bigoplus_i \Delta^{0,i}_{\mathcal{K}},$$

onde δ'' é o operador adxunto do operador de Dolbeault $\bar\partial$.

1.4. Variedade Kähler

No ámbito complexo, na maioría de ocasións, precisarase supor que a variedade considerada é Kähler. Por este motivo, verase deseguido a súa definición.

Dise que J é unha *estrutura integrable case complexa* nunha variedade M se é unha sección

$$J \in C^\infty(\mathrm{End}(TM)),$$

onde $J^2 = -\mathrm{Id}_{TM}$. Considerase unha variedade de Riemann equipada con esta estrutura J, $\mathcal{K} = (M, g, J)$, de forma que a métrica inducida por g no tanxente complexificado, $T_c M = TM \otimes \mathbb{C}$, tamén denotada por g, sexa unitaria e J-invariante. Así, $\mathcal{K}$ é unha variedade hermitiana e holomorfa. Defínese a 2-*forma Kähler* como

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY).$$

Baixo estas hipóteses tense que g é unha métrica Kähler no caso de verificar algunha das seguintes tres condicións equivalentes (Lema 3.5.5 de [8]).

- $d\Omega = 0$.
- Ω é harmónica. Esto é, $d\Omega = 0 = \delta\Omega$.
- $\nabla J = 0$, sendo ∇ a conexión de Levi-Civita.

Agora, $\mathcal{K}$ é unha *variedade Kähler* no caso de que sexa holomorfa e ademais admita unha métrica Kähler. Nótese que existen variedades holomorfas que non admiten estruturas tipo Kähler, como por exemplo $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2k-1}$.

1.5. Álxebra de Clifford

Sexa V un espazo vectorial real de dimensión n con un produto interior definido positivo. A *álxebra de Clifford* $\mathrm{Clif}(V)$ é a álxebra asociativa unitaria universal xerada por V e que está suxeita ás relacións

$$v * v + (v, v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é unha base ortonormal para V e $I = (i_1, \ldots, i_p)$ un multi-índice de xeito que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$. Entón,

$$e_i * e_j + e_j * e_i = -2\delta_{ij}.$$

Ademais,

$$e_I = e_{i_1} * \cdots * e_{i_p}$$

é un elemento da álxebra de Clifford.

$\mathrm{Clif}(V)$ induce un produto interior dende V. Ademais, $\{e_I\}$ forma unha base ortonormal para V. Denótase por $\Lambda(V)$ a álxebra exterior de V e por $\mathrm{End}(\Lambda(V))$ a álxebra linear de endomorfismos en $\Lambda(V)$. Existe unha representación de $\mathrm{Clif}(V)$ en $\mathrm{End}(\Lambda(V))$ dada pola multiplicación de Clifford, c. Esta defínese como

$$\begin{array}{rrcl} c\colon & V & \longrightarrow & \mathrm{End}(\Lambda(V)) \\ & v & \longmapsto & c(v) := \mathrm{ext}(v) - \mathrm{int}(v) \end{array}$$

onde ext e int son os produtos exterior e interior respectivamente. Pola propia definición tense que

$$c^2(v) = -(\mathrm{ext}(v)\,\mathrm{int}(v) + \mathrm{int}(v)\,\mathrm{ext}(v)) = -|v|^2\,\mathrm{Id}\,.$$

Como consecuencia, pódese estender c á álxebra de morfismos

$$c\colon\ \mathrm{Clif}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(\Lambda(V)).$$

1.6. Clases características

As clases características son invariantes topolóxicos dun fibrado vectorial representado por formas diferenciais. Neste capítulo definirase e enunciarase algunha das propiedades de tres clases características: A Clase de Chern, a Característica de Chern e a clase de Todd. Para máis información sobre clases características pódese consultar [5] ou [8].

1.6.1. Clase de Chern

Traballarase unicamente no ámbito complexo. Denótase por $\mathfrak{gl}(k,\mathbb{C})$ a álxebra de Lie do grupo xeral linear complexo.

Definición 1.2 (Clases de Chern). Considérase o polinomio en $\mathfrak{gl}(k,\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^{k\times k}$ dado por

$$c(A) = \det\left(\mathrm{Id} + \sqrt{-1}\frac{A}{2\pi}\right) = 1 + c_1(A) + c_2(A) + \cdots + c_k(A),$$

onde cada $c_l(A)$ é a compoñente homoxénea de grao l. Dado un fibrado vectorial complexo E de dimensión k sobre M, avaliando $c(A)$ na curvatura de calquera conexión en E (considerada como unha forma de grao 2 en M con coeficientes en $\mathfrak{gl}(k,\mathbb{C})$), obtense unha forma pechada sobre M con coeficientes en $\mathbb{C}$. A correspondente clase de cohomoloxía $c(E) \in H(M,\mathbb{C})$ é independente da conexión escollida e chámase *clase característica de Chern*. Cada clase $c_l(E) \in H^{2l}(M,\mathbb{C})$ defínense de forma similar e denomínase *l-ésima clase de Chern*. Ademáis $c_l(E)$ é a compoñente homoxénea de grao $2l$ de $c(E)$.

Propiedades 1.3 (das clases de Chern)*.* A continuación danse algunhas propiedades das clases de Chern cuxas probas se poden atopar en [8] ou en [5]. Se E, E_1 e E_2 son fibrados vectoriais complexos, entón,

- **Fórmula produto de Whitney:** $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1)c(E_2)$, ou o que é o mesmo $c_k(E_1 \oplus E_2) = \sum_{p+q=l} c_p(E_1)c_q(E_2)$.

- $c_l(E^*) = (-1)^l c_l(E)$.
- No caso de que E teña dimensión n, tense que
$$c_l(E) = 0, \quad l > n.$$

1.6.2. Característica de Chern

Definición 1.4 (Característica de Chern). Defínese a *característica de Chern* como antes mediante a función xeratriz en $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{C})$ dada por

$$\mathrm{ch}(A) = \mathrm{Tr}(e^{\sqrt{-1}A/2\pi}) = k + \mathrm{ch}_1(A) + \mathrm{ch}_2(A) + \cdots$$

Esta é unha serie na que cada termo $\mathrm{ch}_l(A)$ son as compoñentes homoxéneas de grao l, que dan lugar á *l-ésima característica de Chern*. Así, $\mathrm{ch}(A)$ é unha serie infinita, que aplicada a formas de grao 2 en M con coeficientes en $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{C})$ sempre vai a ter un número finito de términos, pois as potencias suficientemente altas de formas con grao positivo son nulas. Ademais, tense

$$\mathrm{ch}_l(A) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^l \frac{\mathrm{Tr}(A^l)}{l!}.$$

Dado un fibrado complexo E, avaliando $\mathrm{ch}(A)$ na curvatura de calquera conexión en E (considerada como unha forma de grao 2 en M con coeficientes en $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{C})$), obtense unha forma pechada sobre M con coeficientes en $\mathbb{C}$. A correspondente clase de cohomoloxía $\mathrm{ch}(E) \in H(M, \mathbb{C})$ é independente da conexión escollida e chámase *clase característica de Chern*. Cada clase $\mathrm{ch}_l(E) \in H^{2l}(M, \mathbb{C})$ defínense de forma similar e denomínase *l-ésima característica de Chern*. Ademáis, $\mathrm{ch}_l(E)$ é a compoñente homoxénea de grao $2l$ de $\mathrm{ch}(E)$.

Propiedades 1.5 (da característica de Chern). A proba das seguintes propiedades pódese ver en [8]. Sexan E, E_1 e E_2 fibrados complexos

- $\mathrm{ch}_l(E_1 \oplus E_2) = \mathrm{ch}_l(E_1) + \mathrm{ch}_l(E_1)$.
- **Fórmula produto de Whitney:** $\mathrm{ch}(E_1 \otimes E_2) = \mathrm{ch}(E_1)\,\mathrm{ch}(E_2)$, ou o que é o mesmo $\mathrm{ch}_l(E_1 \otimes E_2) = \sum_{p+q=l} \mathrm{ch}_p(E_1)\,\mathrm{ch}_q(E_2)$.
- $\mathrm{ch}_l(E^*) = (-1)^l\,\mathrm{ch}_l(E)$.
- $\mathrm{ch}(E)$ pode ser expresado en termos de clases de Chern.
$$\mathrm{ch} = \dim(E) + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) + \cdots$$

  Como consecuencia disto, as catro primeiras características de Chern poden ser expresadas en función das clases de Chern do seguinte xeito:
$$\begin{aligned} \mathrm{ch}_0 &= \dim(E), & \mathrm{ch}_1 &= c_1, \\ \mathrm{ch}_2 &= \tfrac{1}{2}(c_1^2 + c_2), & \mathrm{ch}_3 &= \tfrac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3). \end{aligned}$$

1.6.3. Clase de Todd

Empregando funcións xeratrices pode definirse a *clase de Todd*, tamén coñecida como *xénero de Todd*.

Definición 1.6 (Clase de Todd). Sexa $A \in \mathfrak{u}(k)$ con autovalores $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$. Sexa $x_j = \frac{\sqrt{-1}\lambda_j}{2\pi}$. A *clase de Todd* ou *xénero de Todd* defínese como antes usando a función xeratriz en $\mathfrak{u}(k)$ dada por

$$\mathrm{Td}(A) = \prod_j \frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} = \mathrm{Td}_0 + \mathrm{Td}_1 + \mathrm{Td}_2 + \cdots .$$

Ao igual que ocorría coa característica de Chern, a clase de Todd pode ser expresada en función da clase de Chern:

$$\mathrm{Td} = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}c_1c_2 + \cdots$$

Así,

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Td}_0 = 1, & \mathrm{Td}_1 = \frac{c_1}{2}, \\ \mathrm{Td}_2 = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2), & \mathrm{Td}_3 = \frac{1}{24}c_1c_2. \end{array}$$

Desta parte pódese ver máis información tanto en [8] como en [5]. Ademais, en [12] aparece a expresión de cada Td_l en función das clases de Chern ata $l = 6$.

Capítulo 2

Os índices locais de densidade

O obxectivo deste capítulo é calcular o que chamaremos *índices locais de densidade* tanto para o complexo de De Rham perturbado como para o complexo de Dolbeault perturbado. Para iso analizaremos en detalle [3] e [1].

2.1. Primeiras definicións

Considerarase unha variedade de Riemann $\mathcal{M} = (M, g)$ de dimensión m sen bordo e V un fibrado vectorial C^∞ sobre M equipado cunha métrica hermitiana. Denotarase por $C^\infty(V)$ ao espazo de seccións diferenciables en V.

Definición 2.1 (Operador de tipo Laplace). Un operador parcial de segunda orde, D, en $C^\infty(V)$ dise de *tipo Laplace* se é localmente da forma

$$D = -\left\{ \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \,\mathrm{id} + \sum_{k=1}^{m} A^k \frac{\partial}{\partial x^k} + B \right\},$$

respecto dun sistema de coordenadas locais $\vec{x} = (x^1, \ldots, x^m)$ de M e unha referencia local de V, onde $g^{ij} = g(dx^i, dx^j)$, e A^k e B endomorfismos locais de V.

Considérese agora a densidade riemanniana $\mathrm{dvol}(g) = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$. O seguinte resultado permitirá definir máis adiante os *índices locais de densidade*.

Teorema 2.2 (Seeley [18]). *Sexa D un operador de tipo Laplace sobre unha variedade de Riemann $\mathcal{M}$ sen bordo. O operador do calor e^{-tD} é de tipo traza. Existen invariantes locais $a_{m,n}(D)(x)$, que se anulan cando m é impar, tales que, cando $t \to 0$,*

$$\mathrm{Tr}\{e^{-tD}\} \sim \sum_{n=0}^{\infty} t^{(n-m)/2} \int_M a_{m,n}(D)(x)\, \mathrm{dvol}(g). \tag{2.1}$$

Definición 2.3 (Complexo elíptico de tipo Dirac). Sexa $\{(V_0, h_0), \ldots, (V_l, h_l)\}$ unha colección finita de fibrados vectoriais C^∞ sobre M equipados con métricas hermitianas.

Consideránse operadores de primeira orde $d_i\colon C^\infty(V_i) \longrightarrow C^\infty(V_{i+1})$ satisfacendo $d_{i+1}d_i = 0$ para $0 \leq i \leq l-1$. Dise que

$$\mathcal{C} := \{d_i\colon C^\infty(V_i) \longrightarrow C^\infty(V_{i+1})\}$$

é un *complexo elíptico de tipo Dirac* se os operadores de segunda orde asociados,

$$D^i_{\mathcal{C}} := d_i^* d_i + d_{i-1} d_{i-1}^*$$

son de tipo Laplace.

Os seus *grupos de cohomoloxía* son

$$H^i(\mathcal{C}) := \frac{\ker(d_i\colon C^\infty(V_i) \longrightarrow C^\infty(V_{i+1}))}{\operatorname{Im}(d_{i-1}\colon C^\infty(V_{i-1}) \longrightarrow C^\infty(V_{i+1}))}.$$

Como corolario do teorema de descomposición de Hodge tense que é posible identificar $H^i(\mathcal{C}) = \ker(D^i_{\mathcal{C}})$. Estes espazos vectoriais son de dimensión finita e defínese así

$$\operatorname{index}(\mathcal{C}) := \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \dim(H^i(\mathcal{C})) = \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \dim(\ker(D^i_{\mathcal{C}})).$$

Os invariantes asociados á traza do operador do calor defínense mediante

$$a_{m,n}(\mathcal{C})(x) := \sum_{i=0}^{l} (-1)^i a_{m,n}(D^i_{\mathcal{C}})(x) \tag{2.2}$$

Un argumento de cancelación debido a Bott mostra que

$$\operatorname{index}(\mathcal{C}) := \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \dim(\ker(D^i_{\mathcal{C}})) = \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \operatorname{Tr}\{e^{-tD^i_{\mathcal{C}}}\} \tag{2.3}$$

é independente de t. Así, por (2.1)

$$\operatorname{Tr}\{e^{-tD^i_{\mathcal{C}}}\} - \sum_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{\infty} t^{(n-m)/2} \int_M a_{m,n}(D^i_{\mathcal{C}})(x)\,dx \sim \int_M a_{m,m}(D^i_{\mathcal{C}})(x)\,dx, \tag{2.4}$$

e en consecuencia

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_M a_{m,m}(\mathcal{C})(x)\,dx &\overset{(2.2)}{=} \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \textstyle\int_M a_{m,m}(D^i_{\mathcal{C}})(x)\,dx \\
&\overset{(2.4)}{=} \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \left(\operatorname{Tr}\{e^{-tD^i_{\mathcal{C}}}\} - \sum_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{\infty} t^{(n-m)/2} \textstyle\int_M a_{m,n}(D^i_{\mathcal{C}})(x)\,dx \right) \\
&\overset{(2.3)}{=} \operatorname{index}(\mathcal{C}) - \sum_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{\infty} t^{(n-m)/2} \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \textstyle\int_M a_{m,n}(D^i_{\mathcal{C}})(x)\,dx \\
&\overset{(2.2)}{=} \operatorname{index}(\mathcal{C}) - \sum_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{\infty} t^{(n-m)/2} \textstyle\int_M a_{m,n}(\mathcal{C})(x)\,dx.
\end{aligned}$$

En definitiva, como se ten que $\operatorname{index}(\mathcal{C})$ é independente de t, necesariamente

$$\int_M a_{m,n}(\mathcal{C})(x)\,dx = \begin{cases} \operatorname{index}(\mathcal{C}) & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases} \tag{2.5}$$

Definición 2.4 (Índice local de densidade). O invariante $a_{m,m}(\mathcal{C})$ coñécese como *índice local de densidade*. Polo Teorema 2.2, tense que de ser m impar entón $a_{m,m}(\mathcal{C}) = 0$.

Sexan $\mathcal{C}_1 := \{\alpha_1^p \colon C^\infty(V_1^p) \longrightarrow C^\infty(V_1^{p+1})\}$ e $\mathcal{C}_2 := \{\alpha_2^p \colon C^\infty(V_2^p) \longrightarrow C^\infty(V_2^{p+1})\}$ complexos elípticos de tipo Dirac, cada un sobre a súa respectiva variedade de Riemann compacta sen bordo de dimensión m_i, $\mathcal{M}_i = (M_i, g_i)$. Considérase a variedade de Riemann produto das dúas anteriores, $\mathcal{M} = (M_1 \times M_2, g_1 + g_2)$. Defínese entón o complexo elíptico $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$ sobre $\mathcal{M}$ considerando

$$V^p = \bigoplus_{j+k=p} V_1^j \otimes V_2^k \qquad \text{e} \qquad \alpha^p = \bigoplus_{j+k=p} \alpha_1^j \otimes \mathrm{id}^k + (-1)^j \, \mathrm{id}^j \otimes \alpha_2^k. \tag{2.6}$$

Tendo en conta estas consideracións, o seguinte lema resulta inmediato.

Lema 2.5. *Sexan $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ dous complexos elípticos de tipo Dirac sobre variedades de Riemann $\mathcal{M}_i = (M_i, g_i)$ respectivamente. Sexa $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2$ sobre $\mathcal{M} = (M_1 \times M_2, g_1 + g_2)$ dado pola ecuación (2.6). Entón:*

(1) *$\mathcal{C}$ é un complexo elíptico de tipo Dirac.*

(2) *O operador de segunda orde asociado é $D_{\mathcal{C}}^p = \bigoplus_{j+k=p} \{D_{\mathcal{C}_1}^p \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes D_{\mathcal{C}_2}^p\}$, sendo $D_{\mathcal{C}_i}^p$ o respectivo operador de segunda orde asociado ao complexo $\mathcal{C}_i$.*

(3) $H^p(M_1 \times M_2, \mathcal{C}) = \bigoplus_{j+k=p} H^j(M_1, \mathcal{C}_1) \otimes H^k(M_2, \mathcal{C}_2)$.

(4) $\operatorname{Tr}\{e^{-tD_{\mathcal{C}}^p}\} = \sum_{j+k=p} \operatorname{Tr}\{e^{-tD_{\mathcal{C}_1}^p}\} \operatorname{Tr}\{e^{-tD_{\mathcal{C}_2}^p}\}$.

(5) $\operatorname{index}(\mathcal{C}) = \operatorname{index}(\mathcal{C}_1) \operatorname{index}(\mathcal{C}_2)$.

(6) $a_{m,n}(\mathcal{C})(x_1, x_2) = \sum_{j+k=n} a_{m_1,j}(\mathcal{C}_1)(x_1)\, a_{m_2,k}(\mathcal{C}_2)(x_2)$.

2.2. O complexo de De Rham

O *complexo de De Rham* é un dos primeiros exemplos de complexo elíptico de tipo Dirac. Lémbrese que se definía como

$$\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M}) := \{d_i \colon C^\infty(\Lambda^i(M)) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{i+1}(M))\}_{0 \le i \le m-1},$$

onde $\bigwedge^i(M) := \bigwedge^i(T^*M)$ é o fibrado vectorial de i-formas e d_i é a diferencial exterior. O laplaciano asociado, tal e como xa se mencionou, é $\Delta_{\mathcal{M}} = d\delta + \delta d$ onde δ é o operador adxunto do operador de De Rham, d.

Polo teorema de Hodge-De Rham, tense que se pode identificar $H^i(\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M}))$ co grupo topolóxico de cohomoloxía $H^i(M;\mathbb{R})$ e así, se $\chi(M)$ denota a característica de Euler-Poincaré, entón

$$\operatorname{index}(\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})) := \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \dim(H^i(\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M}))) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \dim(H^i(M;\mathbb{R})) = \chi(M).$$

A ecuación (2.5) permite afirmar que

$$\int_M a_{m,m}(\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M}))(x)\ \mathrm{dvol}(g) = \chi(M). \tag{2.7}$$

2.3. Teorema de Chern-Gauss-Bonnet

Sexan $\{e_1,\dots,e_m\}$ unha referencia local ortonormal para o fibrado tanxente TM e $\{e^1,\dots,e^m\}$ a referencia local ortonormal dual para o fibrado cotanxente T^*M. Suporase primeiro que a dimensión de M é par $m = 2\mathfrak{m}$. Sexan $I = (i_1,\dots,i_m)$ e $J = (j_1,\dots,j_m)$ coleccións ordenadas de m índices. Defínese

$$\sigma(I,J) := g(e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_m}, e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_m}).$$

Nótese que $\sigma(I,J)\neq 0$ se e só se I e J son coleccións de distintos índices. Ademais, nesta última situación, por estar ante coordenadas ortonormais, tense que $\sigma(I,J) = \pm 1$ onde o signo ven dado pola signatura da permutación de pasar de I a J. Defínese agora a *forma de Euler*†.

Definición 2.6 (Forma de Euler). Sexan R_{ijkl} as compoñentes do tensor de curvatura de $\mathcal{M}$; adóptase o convenio de que $R_{1221} = 1$ para a esfera unidade en $\mathbb{R}^3$. Defínese a *forma de Euler* como

$$\mathcal{E}_m(x,g) := \frac{(-1)^{\mathfrak{m}}}{8^{\mathfrak{m}}\pi^{\mathfrak{m}}\mathfrak{m}!}\sum_{\substack{|I|=m\\|J|=m}}\sigma(I,J)R_{i_1i_2j_1j_2}\cdots R_{i_{m-1}i_mj_{m-1}j_m}(x).$$

De ser m impar diremos que $\mathcal{E}_m(x,g) = 0$. Este concepto pode ser xeneralizado como segue

$$\mathcal{E}_{m,k}(x,g) := \frac{(-1)^k}{8^k\pi^k k!}\sum_{\substack{|I|=k\\|J|=k}}\sigma(I,J)R_{i_1i_2j_1j_2}\cdots R_{i_{k-1}i_kj_{k-1}j_k}(x), \tag{2.8}$$

sendo $\mathcal{E}_{m,m}(x,g) = \mathcal{E}_m(x,g)$.

O seguinte teorema de Chern permite relacionar a característica de Euler-Poincaré coa forma de Euler.

†Tamén se adoita chamar Pfaffiano.

Teorema 2.7 (Chern [6]). *Sexa $\mathcal{M} = (M, g)$ unha variedade de Riemann sen bordo C^∞ e compacta de dimensión par. Entón*

$$\chi(M) = \int_M \mathcal{E}_m(x, g) \ \mathrm{dvol}(g). \tag{2.9}$$

Se agora recordamos a ecuación (2.7) e temos en conta a ecuación (2.9) que se acaba de ver, ten sentido conxecturar que $a_{m,m}(\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M}))(x) = \mathcal{E}_m(x, g)$. En efecto, esta conxectura foi resolta por Patodi.

Teorema 2.8 (Patodi [16]). *Sexa M unha variedade de Riemann compacta e sen bordo. Entón*

$$a_{m,m}(\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M}))(x) = \mathcal{E}_m(x, g).$$

Como consecuencia tense

$$a_{m,n}(\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M}))(x) = \begin{cases} \mathcal{E}_m(x, g) & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m. \end{cases}$$

2.4. O complexo de Dolbeault

Sexa $\Omega(X, Y) := g(X, JY)$ a forma de Kähler. Lémbrese que se dí que (M, g, J) é *Kähler* se $d\Omega = 0$. Sexa entón $\mathcal{K} := (M, g, J, E, h)$ unha variedade Kähler. Considerase o complexo de Dolbeault con coeficientes en E normalizado co factor $\sqrt{2}$,

$$\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}) := \{\sqrt{2}\,\bar{\partial}\colon C^\infty(\Lambda^{0,i}(M) \otimes E) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{0,i+1}(M) \otimes E)\}_{0 \le i \le \mathfrak{m}-1}. \tag{2.10}$$

A razón de normalizar o operador de Dolbeault con este factor é para que o complexo $\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})$ sexa de tipo Dirac. O laplaciano asociado, $\Delta_{\mathcal{K}} := 2(\bar{\partial}\delta'' + \delta''\bar{\partial})$, onde δ'' é o operador adxunto do operador de Dolbeault $\bar{\partial}$, é de tipo Laplace.

Sexa $H^i(M; \mathcal{O}(E))$ o grupo de cohomoloxía de M con coeficientes no feixe de seccións holomorfas en E. Procédese ao igual que no complexo de De Rham e identificamos $H^i(M; \mathcal{O}(E))$ con $H^i(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}))$. Así,

$$\mathrm{index}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})) := \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim(H^i(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}))) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim(H^i(M; \mathcal{O}(E)),$$

Se E é trivial de rango 1, este é o xénero aritmético $p_a(M)$ de M. Empregando de novo a ecuación (2.5) obtense

$$\int_M a_{m,m}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}))(x) \ \mathrm{dvol}(g) = \mathrm{index}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})).$$

2.5. Teorema de Riemann-Roch

Un análogo do Teorema de Chern-Gauss-Bonnet pode ser conseguido para o complexo de Dolbeault. Emprégase o operador $\star$ de Hodge co fin de identificar as formas de grao máximo con funcións escalares. Neste contexto, o análogo do Teorema 2.7 é a clásica fórmula de Riemann-Roch.

Teorema 2.9 (Riemann-Roch). *Sexa* $\mathrm{Td}_m(M,g,J)$ *a forma de Todd. Así,*

$$\mathrm{index}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})) = \int_M \star\{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge \mathrm{ch}(E,h)\}_m \,\mathrm{dvol},$$

onde $\mathrm{ch}(E,h)$ *denota a característica de Chern.*

Observación 2.10. Empregar o operador estrela de Hodge neste caso será facer o seguinte, sendo $\Omega^{\mathfrak{m}}$ a forma de Kähler,

$$\star\{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge \mathrm{ch}(E,h)\}_m = \frac{1}{\mathfrak{m}!} g(\{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge \mathrm{ch}(E,h)\}_m, \Omega^{\mathfrak{m}}),$$

pois $\frac{1}{\mathfrak{m}!}\Omega^{\mathfrak{m}}$ é a forma de volume.

Atiyah, Bott e Patodi, xeneralizaron o Teorema 2.8, pedindo agora que a variedade fose Kähler.

Teorema 2.11 ([4]). *Se* $\mathcal{K} = (M,g,J)$ *é unha variedade Kähler, entón*

$$a_{m,m}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})) = \star\{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge \mathrm{ch}(E,h)\}_m.$$

En definitiva, tense que

$$a_{m,n}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})) = \begin{cases} \star\{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge \mathrm{ch}(E,h)\}_m & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m. \end{cases}$$

Observación 2.12. O teorema anterior non ten por que darse no caso de eliminar a hipótese de que a variedade sexa Kähler. Esto foi visto por Gilkey, Nikčević e Pohjanpelto en [10].

2.6. A deformación de Witten

En [20] Witten introduce o que se coñece como *derivada exterior deformada*. Para iso considera o produto exterior $\mathrm{ext}(\Theta)\colon \omega \longmapsto \Theta\wedge\omega$, e o seu dual, $\mathrm{int}(\Theta)$, o produto interior. Witten constrúe a derivada exterior deformada pola diferencial dunha función $h \in C^\infty(M)$ como

$$d_h := d + \mathrm{ext}(dh),$$

sendo $\delta_h := d + \mathrm{int}(dh)$ o seu adxunto. Esto permite definir o *complexo de De Rham deformado*: $\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_h$, onde de novo $\mathcal{M} = (M,g)$ é unha variedade de Riemann. Pódese ver cun sinxelo cálculo que $d_h\omega = e^{-h}d(e^h\omega)$ e entón é equivalente "gauge" á derivada exterior; i.e.,conxugado polo isomorfismo de multiplicación por e^h. Logo produce grupos de cohomoloxía isomorfos.

Como inspiración deste procedemento, xeneralízase e considérase unha 1-forma pechada en M, Θ con $d\Theta = 0$, e defínese

$$d_\Theta := d + \operatorname{ext}(\Theta) \quad \text{e} \quad \delta_\Theta := \delta + \operatorname{int}(\Theta).$$

Deste xeito

$$\begin{aligned} d_\Theta^2\omega &= d_\Theta(d\omega + \Theta\wedge\omega) = d(d\omega + \Theta\wedge\omega) + \Theta\wedge(d\omega + \Theta\wedge\omega) \\ &= d^2\omega + d\Theta\wedge\omega - \Theta\wedge d\omega + \Theta\wedge d\omega + \Theta\wedge\Theta\wedge\omega = 0. \end{aligned}$$

O laplaciano asociado é

$$\Delta_{\Theta,\mathcal{M}} = d_\Theta\delta_\Theta + \delta_\Theta d_\Theta = \bigoplus_i \Delta^i_{\Theta,\mathcal{M}} = \bigoplus_i d_\Theta^{i-1}\delta_\Theta^{i-1} + \delta_\Theta^i d_\Theta^i,$$

que seguen a ser operadores de tipo Laplace. Defínese entón o seguinte complexo elíptico que é unha deformación do complexo de De Rham mediante unha 1-forma pechada.

$$\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_\Theta := \{d_\Theta^i\colon C^\infty(\Lambda^i(M)) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{i+1}(M))\}_{0\le i\le \mathsf{m}-1}.$$

Este novo complexo segue a ser de tipo Dirac.

Este proceso realizado nun marco real pode ser simulado no caso complexo. Para iso considérase agora unha forma de tipo $(1,0)$ en M, Θ, verificando $\partial\Theta = 0$. Sexa tamén $\mathcal{K} := (M,g,J,E,h)$ e defínese $\bar\partial_{\bar\Theta} := \bar\partial + \operatorname{ext}(\bar\Theta)$ que non é mais que unha perturbación do operador de Dolbeault, $\bar\partial$. O seu operador adxunto é $\delta''_\Theta := \delta'' + \operatorname{int}(\Theta)$.O laplaciano asociado é

$$\Delta_{\Theta,\mathcal{K}} := 2(\bar\partial_\Theta\delta''_\Theta + \delta''_\Theta\bar\partial_\Theta) = \bigoplus_i \Delta^{0,i}_{\Theta,\mathcal{K}},$$

onde o 2 aparece co fin de que o complexo perturbado que se cree siga a ser de tipo Dirac (ao igual que se facía na definición do complexo de Dolbeault, normalízase o operador, véxase a ecuación (2.10)). Obtense así o complexo de Dolbeault perturbado

$$\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})_\Theta := \{\sqrt{2}\,\bar\partial_{\bar\Theta}\colon C^\infty(\Lambda^{0,i}(M)\otimes E) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{0,i+1}(M)\otimes E)\}_{0\le i\le \mathsf{m}-1},$$

que de novo volve a ser de tipo Dirac, i.e. $\Delta_{\Theta,\mathcal{K}}$ é de tipo Laplace. Este feito permite considerar os índices de densidade para os complexos de De Rham e de Dolbeault deformados

$$a^{\mathrm{deR}}_{m,n}(\mathcal{M})(x) := a_{m,n}(\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_\Theta)(x) = \sum_i (-1)^i a_{m,n}(\Delta^i_{\Theta,\mathcal{M}})(x),$$

$$a^{\mathrm{Dol}}_{m,n}(\mathcal{K})(x) := a_{m,n}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})_\Theta)(x) = \sum_i (-1)^i a_{m,n}(\Delta^{0,i}_{\Theta,\mathcal{K}})(x).$$

O obxectivo principal deste capítulo será ver que forma teñen os invariantes $a^{\mathrm{deR}}_{m,n}$ e $a^{\mathrm{Dol}}_{m,n}$.

2.7. Índices locais de densidade do complexo de De Rham deformado

Nesta sección enunciaranse e probaranse os resultados principais de [3], que permitirán ver a expresión de $a_{m,n}^{\mathrm{deR}}$.

2.7.1. Números de Betti torcidos

Comézase introducindo o que se coñecerá como *números de Betti torcidos*. Estes son

$$\beta_i(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_\Theta) := \dim(H^i(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_\Theta)).$$

Tendo en conta esta notación enúnciase e próbase o seguinte lema que nos dá moita información sobre como se comportan os números de Betti torcidos.

Lema 2.13. *Sexa $\mathcal{M} = (M, g)$ unha variedade de Riemann compacta e conexa. Entón:*

(1) ***Invarianza en cohomoloxía:*** *Se $[\Theta_1] = [\Theta_2]$ definen a mesma clase en $H^1(M;\mathbb{R})$, entón*
$$\beta_i(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta_1}) = \beta_i(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta_2}),\ \forall i.$$

(2) Se $[\Theta] \neq 0$ en $H^1(M;\mathbb{R})$, entón

$$\beta_0(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_\Theta) = 0.$$

(3) ***Dualidade de Poincaré:*** *Se M é orientable, entón*

$$\beta_i(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_\Theta) = \beta_{m-i}(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{-\Theta}).$$

(4) ***A fórmula de Künneth:*** *Sexan Θ_i 1-formas pechadas nas variedades de Riemann compactas $\mathcal{M}_i = (M_i, g_i)$ onde $i = 1, 2$. Considérase a variedade de Riemann compacta $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = (M_1 \times M_2, g_1 + g_2)$ e sexa $\Theta(x^1, x^2) := \Theta_1(x^1) + \Theta_2(x^2)$ en M. Así*

$$\beta_p(M_1 \times M_1, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_\Theta) = \sum_{i+j=p} \beta_i(M_1, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta_1})\beta_j(M_2, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta_2})$$

(5) Sexa M_g o g-toro (suma conexa de g toros). Se $[\Theta] \neq 0$ en $H^1(M;\mathbb{R})$, entón

$$\begin{array}{ll} \beta_0(M_g) = 1, & \beta_0(M_g, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_\Theta) = 0, \\ \beta_1(M_g) = 2g, & \beta_1(M_g, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_\Theta) = 2g - 2, \\ \beta_2(M_g) = 1, & \beta_2(M_g, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_\Theta) = 0, \end{array}$$

sendo $\beta_i(M_g)$ os números de Betti de M_g.

Proba. Faremos a proba dos 5 apartados por separado:

➽ **Proba de (1):**

Tense por hipótese que $[\Theta_1] = [\Theta_2]$ en $H^1(M;\mathbb{R})$, en consecuencia $\Theta_2 - \Theta_1 = dh$ para certo $h \in C^\infty(M)$, ou, equivalentemente , $\Theta_1 = \Theta_2 - dh$. Defínese agora $\Psi_h(\omega) := e^h\omega$, e así

$$\begin{aligned} d_{\Theta_1}(\Psi_h(\omega)) &= d(e^h\omega) + \Theta_1 \wedge e^h\omega = e^h(dh \wedge \omega + d\omega + \Theta_1 \wedge \omega) \\ &= e^h(dh \wedge \omega + d\omega + (\Theta_2 - dh) \wedge \omega) = e^h(d\omega + \Theta_2 \wedge \omega) = \Psi_h(d_{\Theta_2}(\omega)). \end{aligned}$$

Esto mostra que Ψ_h é un isomorfismo de cadeas que entrelaza os complexos $\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta_1}$ e $\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta_2}$ e en consecuencia os seus grupos de cohomoloxía asociados. Logo, necesariamente $\beta_i(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta_1}) = \beta_i(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta_2})$ para todo i.

➽ **Proba de (2):**

Supóñase por redución ao absurdo que existe $0 \neq f \in H^0(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_\Theta)$ sendo $[\Theta] \neq 0$ en $H^1(M,\mathbb{R})$, e cheguemos a unha contradición. Pódese supor que f é positivo nalgún aberto pois, de non ser así, tómase $-f$. Considérase agora un recubrimento por bolas xeodésicas de M: $\{\mathcal{O}_n\}$. Tales bolas son contráctiles. Como $d\Theta = 0$ (xa que Θ era unha forma pechada), pódese expresar $\Theta = dh_n$ en cada $\mathcal{O}_n$. Nótese agora que en $\mathcal{O}_n$ tense

$$d(e^{h_n}f) = e^{h_n}f dh_n + e^{h_n}df = e^{h_n}(f\Theta + df) = 0,$$

e en consecuencia tense que $e^{h_n}f = c_n'$, onde c_n' é unha constante, ou, o que é o mesmo, $f = c_n e^{-h_n}$. Como M é conexa por hipótese, pola forma de f sabemos que non cambia de signo (ten o signo que teña a constante c_n). Supúxose que f era positiva nalgún aberto, logo f será positiva globalmente e, en consecuencia, pódese escribir $f = e^h$, onde $h = \ln(f)$. Así $0 = df + f\Theta = e^h(dh + \Theta)$, e entón $\Theta = -dh = d(-h)$. Logo $[\Theta] = 0$ en $H^1(M,\mathbb{R})$, o que supón unha contradición.

➽ **Proba de (3):**

Sexa $\mathrm{Clif}(M)$ a álxebra de Clifford de M (pódense ver máis detalles en [8]). Existe unha representación natural de $\mathrm{Clif}(M)$ en $\mathrm{End}(\Lambda(M))$ dada pola multiplicación de Clifford

$$c(v) = \mathrm{ext}(v) - \mathrm{int}(v) \colon M \longrightarrow \mathrm{End}(\Lambda(M)),$$

de forma que verifica $c(v)^2 = -|v|^2 \,\mathrm{Id}$ e pódese estender para dar un morfismo de álxebras $c\colon \mathrm{Clif}(M) \longrightarrow \mathrm{End}(\Lambda(M))$. Así, sexa orn a forma de volume definida pola métrica e a orientación. O homomorfismo $c(\mathrm{orn})$ define unha isometría dende $\Lambda^i(M)$ a $\Lambda^{m-i}(M)$, onde $c(\mathrm{orn})^2 = (-1)^{m(m+1)/2}\,\mathrm{Id}$. Tense que

$$c(\mathrm{orn}) \circ d = (-1)^{m-1}\delta \circ c(\mathrm{orn}), \tag{2.11}$$

$$c(\mathrm{orn}) \circ \delta = (-1)^{m-1}d \circ c(\mathrm{orn}). \tag{2.12}$$

Polo que $c(\mathrm{orn})$ induce un isomorfismo entre $\ker(\Delta^i_{\mathcal{M}})$ e $\ker(\Delta^{m-i}_{\mathcal{M}})$ que se coñece como *dualidade de Poincaré*. Lémbrese que, dado un covector ξ, o produto de Clifford definíase como $c(\xi) = \mathrm{ext}(\xi) - \mathrm{int}(\xi)$. Pois ben, empregando ademais a dualidade de Poincaré tense

$$c(\mathrm{orn})\, c(\xi) = (-1)^{m-1} c(\mathrm{orn})\, c(\xi).$$

Deste xeito,

$$\mathrm{ext}(\xi)c(\mathrm{orn}) - \mathrm{int}(\xi)c(\mathrm{orn}) = (-1)^{m-1}c(\mathrm{orn})\,\mathrm{ext}(\xi) - (-1)^{m-1}c(\mathrm{orn})\,\mathrm{int}(\xi),$$

conseguindo finalmente as seguintes dúas igualdades:

$$\mathrm{ext}(\xi)c(\mathrm{orn}) = (-1)^{m}c(\mathrm{orn})\,\mathrm{int}(\xi), \tag{2.13}$$

$$\mathrm{int}(\xi)c(\mathrm{orn}) = (-1)^{m}c(\mathrm{orn})\,\mathrm{ext}(\xi). \tag{2.14}$$

En consecuencia, considerando agora o operador de De Rham deformado,

$$\begin{aligned} c(\mathrm{orn})\,d_{\Theta} &= c(\mathrm{orn})\,(d + \mathrm{ext}(\Theta)) = c(\mathrm{orn})\,d \; + c(\mathrm{orn})\,\mathrm{ext}(\Theta) \\ &\overset{(2.12)}{\underset{(2.13)}{=}} (-1)^{m-1}\delta\, c(\mathrm{orn}) + (-1)^{m}\,\mathrm{ext}(\Theta)c(\mathrm{orn}) \\ &= (-1)^{m-1}(\delta - \mathrm{ext}(\Theta))\,c(\mathrm{orn}) \\ &= (-1)^{m-1}\,(\delta + \mathrm{ext}(-\Theta))\; c(\mathrm{orn}) = (-1)^{m-1}\delta_{-\Theta}\,c(\mathrm{orn}). \end{aligned}$$

De forma completamente análoga considerando agora o operador adxunto de d_{Θ}, δ_{Θ}, e empregando as ecuacións (2.11) e (2.14), obtense que

$$c(\mathrm{orn}) \circ \delta_{\Theta} = (-1)^{m-1} d_{-\Theta} \circ c(\mathrm{orn}).$$

En consecuencia, $c(\mathrm{orn})$ induce tamén un isomorfismo entre $\ker(\Delta^{i}_{\Theta,\mathcal{M}})$ e $\ker(\Delta^{m-i}_{-\Theta,\mathcal{M}})$, e así,

$$\beta_i(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta}) = \beta_{m-i}(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{-\Theta}).$$

➻ **Proba de (4):**
Este apartado é consecuencia inmediata do apartado (3) do Lema 2.5 e mais de ter en conta a definición dos números de Betti torcidos posto que o complexo de De Rham deformado $\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta}$, onde $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$, pode ser descomposto como

$$\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta} = \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta_1+\Theta_2} = \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta_1} \otimes \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta_2}.$$

➻ **Proba de (5):**
A característica de Euler-Poincaré de M_g é $\chi(M_g) = 2 - 2g$, que pode definirse como a suma alternada dos seus números de Betti:

$$\chi(M_g) = \beta_0(M_g) - \beta_1(M_g) + \beta_2(M_g) = 2 - 2g.$$

Logo, por ser M_g conexa,pechada e orientada, necesariamente $\beta_0(M_g) = \beta_2(M_g) = 1$ e $\beta_0(M_g) = 2g$.

Agora considérese por hipótese unha 1-forma pechada non nula en $H^1(M;\mathbb{R})$. Logo, pola afirmación (2) do lema, temos que $\beta_0(M, \mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta}) = 0$. Agora ben, $-\Theta$ define tamén unha clase non nula en $H^1(M;\mathbb{R})$. En consecuencia, empregando de novo (2), vese que $\beta_0(M,\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{-\Theta})=0$. Empregando o apartado (3) do mesmo lema, obtense que

$$0=\beta_0(M,\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{-\Theta})=\beta_2(M,\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta}).$$

Tan só falta calcular $\beta_1(M,\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta})$. Para iso temos en conta que o índice dun complexo elíptico (que neste caso coincide con $\chi(M_g,\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta})$) é invariante baixo perturbacións de orde inferior ao seu orde. Así

$$\begin{aligned}2-2g &= \chi(M_g)=\chi(M_g,\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta})\\ &= \beta_0(M,\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta})-\beta_1(M,\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta})+\beta_2(M,\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta})\\ &= -\beta_1(M,\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_{\Theta}),\end{aligned}$$

obtendo o resultado requirido. ■

2.7.2. A aplicación restrición

Fíxase m e a maiores un punto $x_0\in M$. Tómase un sistema de coordenadas locais centrado en x_0, $\vec{x}:=(x^1,\dots,x^m)$. Denotarase $g_{ij/k}:=\partial_{x^k}(g_{ij})$. Este proceso coñécese como tomar *variables formais*. Normalízanse as coordenadas de forma que $g_{ij}(\vec{x},g)(x_0)=\delta_{ij}$ e $g_{ij/k}(\vec{x},g)(x_0)=0$. Considérese un multi-índice formado por enteiros non negativos, $\alpha=(\alpha(1),\dots,\alpha(m))$. Defínese $|\alpha|=\alpha(1)+\cdots+\alpha(m)$ e $\partial_x^\alpha=\partial_{x^1}^{\alpha(1)}\cdots\partial_{x^m}^{\alpha(m)}$. Deste modo, denotarase tamén $g_{ij/\alpha}:=\partial_x^\alpha g_{ij}$, sendo $g_{ij/\alpha}=g_{ji/\alpha}$. Agora faise o mesmo con $\Theta=\sum_i\Theta_i dx^i$ e denótase $\Theta_{i/\alpha}:=\partial_x^\alpha\Theta_i$.

Con esta notación, $\widetilde{\mathcal{P}}_m$ é a álxebra de polinomios con variables $\{g_{ij/\alpha},\Theta_{i/\beta}\}$, sendo α e β multi-índices. Un polinomio $P\in\widetilde{\mathcal{P}}_m$ pódese avaliar obtendo $P(\vec{x},g,\Theta)(x_0)$, onde $\vec{x}$ é un sistema de coordenadas locais centrado en x_0 nas condicións descritas con anterioridade. Dirase que P é *invariante* se esta avaliación non depende do sistema local de coordenadas centradas en x_0:

$$P(\vec{x},g,\Theta)(x_0)=P(g,\Theta)(x_0).$$

De forma similar, $\mathcal{P}_m$ é o espazo vectorial de dimensión finita de todos os polinomios nas compoñentes da derivada covariante do tensor de curvatura da conexión de Levi-Civita e das compoñentes das derivadas covariantes de orde arbitrario da 1-forma pechada Θ. Ao igual que antes, un polinomio $P\in\mathcal{P}_m$ dirase *invariante* se a súa avaliación non depende do sistema local de coordenadas escollido. Defínese o *peso* como o número de derivadas que aparecen en $P\in\mathcal{P}_m$, aumentando por 1 no caso das compoñentes de Θ. Por exemplo, as compoñentes (R_{ijkl}) do tensor de curvatura da conexión de Levi-Civita teñen peso 2, a 1-forma pechada, ten peso 1 e cada derivada covariante incrementa o peso nunha unidade. Agora, $\mathcal{P}_{m,n}$ é o espazo vectorial de dimensión finita de polinomios invariantes de $\mathcal{P}_m$ de peso n. Estes espazos son triviais no caso de ser n impar. Analogamente, defínese $\widetilde{\mathcal{P}}_{m,n}$ como o espazo vectorial de dimensión finita de polinomios de $\widetilde{\mathcal{P}}_m$ que son invariantes de orde n ($\mathrm{ord}(P)=n$) onde se considerará, co fin de ser coherente coa definición de peso,

$$\mathrm{ord}(\Theta_{i/\beta}):=|\beta|+1\quad\text{ e }\quad\mathrm{ord}(g_{ij/\alpha}):=|\alpha|.$$

Para contar o número de veces que aparece un índice nunha variable defínese o *grao* como

$$\deg_\mu(\Theta_{i/\beta}) := \delta_{i\mu} + \beta(\mu) \quad \text{e} \quad \deg_\mu(g_{ij/\alpha}) := \delta_{i\mu} + \delta_{j\mu} + \alpha(\mu).$$

A *aplicación restrición* r é a contracción de índices para pasar de $\mathcal{P}_{m,n}$ a $\mathcal{P}_{m,n-1}$, onde o que se fai e substituír o rango de suma de 1 a m polo rango de suma de 1 a $m-1$.

Non existe unha base natural de $\mathcal{P}_{m,n}$ e a priori non é evidente que esta aplicación estea ben definida, mais é así polo feito de que se pode identificar $\mathcal{P}_{m,n}$ con $\widetilde{\mathcal{P}}_{m,n}$.

Lema 2.14. *A aplicación* $r\colon \mathcal{P}_{m,n} \longrightarrow \mathcal{P}_{m-1,n}$ *está ben definida.*

Proba. A aplicación restrición $\tilde{r}\colon \tilde{\mathcal{P}}_{m,n} \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}_{m-1,n}$ defínese dando a imaxe das variables $\Theta_{i/\beta}$ e $g_{ij/\alpha}$

$$\tilde{r}(\Theta_{i/\beta}) = \begin{cases} \Theta_{i/\beta} & \text{se } \deg_m(\Theta_{i/\beta}) = 0 \\ 0 & \text{se } \deg_\mu(\Theta_{i/\beta}) \neq 0 \end{cases}, \quad \tilde{r}(g_{ij/\alpha}) = \begin{cases} g_{ij/\alpha} & \text{se } \deg_\mu(g_{ij/\alpha}) = 0 \\ 0 & \text{se } \deg_\mu(g_{ij/\alpha}) \neq 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

e resulta estar ben definida. Pois ben, $\tilde{\mathcal{P}}_{m,n}$ pode ser identificado con $\mathcal{P}_{m,n}$ e en consecuencia $r\colon \mathcal{P}_{m,n} \longrightarrow \mathcal{P}_{m-1,n}$ tamén estará ben definida. ∎

Unha vez se ten garantido que a aplicación restrición está ben definida, procédese a estudar o seu núcleo. En primeiro lugar, identificarase $r = \tilde{r}$ e mais $\tilde{\mathcal{P}}_{m,n} = \mathcal{P}_{m,n}$ e defínese $\mathcal{Q}_{m,n}$ como o subespazo linear de $\mathcal{P}_{m,n}$ xerado unicamente polas variables $g_{ij/\alpha}$ (considerando $\Theta = 0$). O seguinte resultado caracteriza a forma de Euler anteriormente definida.

Lema 2.15 (Gilkey [7]). *Sexa n par:*

- *Se $n < m$, entón* $\ker(r\colon \mathcal{Q}_{m,n} \longrightarrow \mathcal{Q}_{m-1,n}) = \{0\}$ *(é dicir, r é inxectiva).*
- *Se $n = m$, entón* $\ker(r\colon \mathcal{Q}_{m,m} \longrightarrow \mathcal{Q}_{m-1,m}) = \operatorname{Span}(\mathcal{E}_m)$.

Pois ben, este resultado pódese xeneralizar e estender a $\mathcal{P}_{m,n}$ obtendo a mesma expresión para os núcleos.

Lema 2.16. *Sexa n par:*

- *Se $n < m$, entón* $\ker(r\colon \mathcal{P}_{m,n} \longrightarrow \mathcal{P}_{m-1,n}) = \{0\}$ *(é dicir, r é inxectiva).*
- *Se $n = m$, entón* $\ker(r\colon \mathcal{P}_{m,m} \longrightarrow \mathcal{P}_{m-1,m}) = \operatorname{Span}(\mathcal{E}_m)$.

Demostración. Sexa $0 \neq P \in \mathcal{P}_{m,n}$. Asumirase que $P \in \ker(r\colon \mathcal{P}_{m,n} \longrightarrow \mathcal{P}_{m-1,n})$; é dicir, que $r(P) = 0$. Sexa

$$A = g_{i_1 j_1/\alpha_1} \cdots g_{i_l j_l/\alpha_l} \Theta_{k_1/\beta_1} \cdots \Theta_{k_p/\beta_p}.$$

De non ter variables $g_{ij/\alpha}$ ou $\Theta_{k/\beta}$, considérase $l = 0$ ou $p = 0$, respectivamente. Como $r(A) = 0$ por ser $r(P) = 0$, $\deg_m(A) \neq 0$ (ver ecuación (2.15)). Como isto é certo para todo monomio de P, pódense permutar os índices das coordenadas para concluír que $\deg_\mu(A) \neq 0$ para $1 \leq \mu \leq m$. Substituíndo as coordenadas x^μ por $-x^\mu$, pódese afirmar que cada índice μ aparece un número par de veces, e como ademais temos que $\deg_\mu(A) \neq 0$ obtense $\deg_\mu(A) \geq 2$ para $1 \leq \mu \leq m$. Normalízanse as coordenadas centradas no punto x_0 de forma que $g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$ e $g_{ij/k}(x_0) = 0$. Entón, estase a dicir que $|\alpha_i| \geq 2$ para todo i. E, en consecuencia

$$\sum_{i=1}^{l} |\alpha_i| \geq 2l. \tag{2.16}$$

Ademais, empregando a definición de orde sendo A un monomio de $P \in \mathcal{P}_{m,n}$, obtense que

$$n = \mathrm{ord}(A) = \sum_{i=1}^{l} |\alpha_i| + \sum_{j=1}^{p} (|\beta_j| + 1). \tag{2.17}$$

Tendo presente que $2 \leq \deg_\mu(A)$ para $1 \leq \mu \leq m$,

$$\begin{aligned} 2m \quad &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{l}(2 + |\alpha_i|) + \sum_{j=1}^{p}(1 + \beta_j) = 2l + \sum_{i=1}^{l} |\alpha_i| + \sum_{j=1}^{p}(1 + \beta_j) \\ &\overset{(2.16)}{\leq} 2\textstyle\sum_{i=1}^{l} |\alpha_i| + \sum_{j=1}^{p}(1 + \beta_j) \leq 2\sum_{i=1}^{l} |\alpha_i| + 2\sum_{j=1}^{p}(1 + \beta_j) \overset{(2.17)}{=} 2n. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Así, se se supón que $n < m$ chégase a unha contradición pois acábase de ver que $m \leq n$. Como consecuencia P sería nulo, quedando probada a primeira parte do lema.

No caso de que $m = n$, todas as desigualdades de (2.18) pasan a ser igualdades, e así

$$2\sum_{j=1}^{p}(1 + \beta_j) = \sum_{j=1}^{p}(1 + \beta_j),$$

o cal só se pode dar no caso de que $p = 0$. Isto quere dicir que $P \in \mathcal{Q}_{m,m}$, logo o Lema 2.15 pode ser empregado concluíndo a proba do resultado. ■

2.7.3. Cálculo de $a_{m,n}^{\mathrm{deR}}$

Na sección anterior definiuse a aplicación restrición. Agora ben, esta tamén pode ser descrita de forma xeométrica tal e como se describe a continuación.

Sexa $\mathcal{M}_1 = (M_1, g_1, \Theta_1)$ unha variedade de Riemann de dimensión $m - 1$ equipada dunha 1-forma pechada. Sexa $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{S}^1, dx^2, \Theta_2 = 0)$ o círculo xunto coa métrica usual. Considérase a variedade de Riemann produto

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = (M_1 \times \mathbb{S}^1, g + dx^2, \Theta_1).$$

Tómese $P \in \mathcal{P}_{m,n}$, e así

$$r(P)(\mathcal{M}_1)(x_1) = P(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)(x_1, x_2),$$

para calquera $x_2 \in \mathbb{S}^1$. Considéranse neste contexto os invariantes $a_{m,n}^{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})(x_1, x_2)$. Como $\mathcal{M}_2$ é plano, tense que os seus índices se anulan en $\mathbb{S}^1$. Tendo en conta a propiedade (6) do Lema 2.5, tense que $a^{\mathrm{deR}}_{m,n}(x_1, x_2) = 0$. Esto significa que todo $a^{\mathrm{deR}}_{m,n} \in \mathcal{P}_{m,n}$ verifica que $r(a^{\mathrm{deR}}_{m,n}) = 0$. Así, de ser $n < m$, empregando a primeira parte do Lema 2.16, tense que $a^{\mathrm{deR}}_{m,n} = 0$. Para ver a expresión de $a^{\mathrm{deR}}_{m,m}$ temos en conta que

$$a^{\mathrm{deR}}_{m,m} \in \ker(r\colon \mathcal{P}_{m,m} \longrightarrow \mathcal{P}_{m-1,m}) = \mathrm{Span}(\mathcal{E}_m).$$

En consecuencia, é independente de Θ. Así, tomando $\Theta = 0$ e empregando o Teorema 2.8, tense que

$$a^{\mathrm{deR}}_{m,m}(\mathcal{M})(x_1, x_2) = a_{m,m}(\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M}))(x) = \mathcal{E}_m(x, g).$$

En definitiva, acábase de probar o seguinte teorema.

Teorema 2.17. *Adoptando a notación introducida con anterioridade,*

$$a^{\mathrm{deR}}_{m,n}(\mathcal{M}) = \begin{cases} \mathcal{E}_m(x,g) & \textit{se } n = m \\ 0 & \textit{se } n < m, \end{cases}$$

logo $a^{\mathrm{deR}}_{m,m}$ é independente de Θ.

No caso de ser $n > m$, comézase a ter dependencia de Θ tal e como mostra o seguinte lema.

Lema 2.18 (Sección 3.3 de [3]). *Se n é par e $n > m$, entón $a^{\mathrm{deR}}_{m,n}$ mostra unha dependencia non trivial de Θ.*

2.8. Índices locais de densidade do complexo de Dolbeault deformado

Esta sección empregarase para ver cal é a expresión de $a^{\mathrm{Dol}}_{m,n}(\mathcal{K})$. Para iso, enunciaranse e probaranse os resultados principais de [1].

Sexan $\mathcal{K}_1 = (M_1, g_1, J_1, E_1, h_1, \Theta_1)$ e $\mathcal{K}_2 = (M_2, g_2, J_2, E_2, h_2, \Theta_2)$. Defínese

$$\begin{aligned} M &:= M_1 \times M_2, & g &:= \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2, & E &:= \pi_1^* E_1 \otimes \pi_2^* E_2, \\ h &:= \pi_1^* g_1 \otimes \pi_2^* g_2, & \Theta &:= \pi_1^* \Theta_1 + \pi_2^* \Theta_2, & J &:= \pi_1^* J_1 \oplus \pi_2^* J_2. \end{aligned}$$

Finalmente considérase $\mathcal{K} = (M, g, J, E, h, \Theta)$. Tense que $\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}) = \mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_1) \otimes \mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_2)$. Así, pola parte (6) do Lema 2.5, tense que

$$a_{m,n}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}))(x_1, x_2) = \sum_{j+k=n} a_{m_1,j}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_1))(x_1) a_{m_2,k}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_2))(x_2). \tag{2.19}$$

Esta fórmula, coñecida como fórmula produto, será de gran utilidade ao longo desta sección.

Sexa $\vec{z} = (z^1, \dots, z^{\mathtt{m}})$, con $z^\alpha = x^\alpha + \sqrt{-1 y^\alpha}$, un sistema de coordenadas locais holomorfas en M. Sexa

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right).$$

Exténdese g a unha forma bilinear simétrica no fibrado tanxente complexo. Así, a condición de que g é J-invariante significa que

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^\beta}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}\right) = 0, \text{ defínese así } g_{\alpha\bar{\beta}} := g\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}\right)$$

define unha forma hermitiana positiva. Introdúcense variables formais ao igual que se fixo na sección anterior,

$$g_{\alpha_0\bar{\beta}_0/\alpha_1\ldots\alpha_j\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k} := \frac{\partial}{\partial z^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial z^{\alpha_j}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta_k}} g\left(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha_0}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta_0}}\right).$$

No caso de ser $j = 0$, non se terán derivadas holomorfas e o mesmo ocorre se $k = 0$ pero para as derivadas antiholomorfas das compoñentes de g. A forma de Kähler, $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$, pode ser expresada como

$$\Omega = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \sum_{\alpha_0=1}^{m} \sum_{\beta_0=1}^{m} g_{\alpha_0\bar{\beta}_0} dz^{\alpha_0} \wedge d\bar{z}^{\beta_0}.$$

De agora en diante imponse que $\mathcal{K} = (M, g, J)$ sexa unha variedade Kähler, é dicir, que $d\Omega = 0$. Esta última condición é equivalente ás simetrías

$$g_{\alpha_0\bar{\beta}_0/\alpha_1} = g_{\alpha_1\bar{\beta}_0/\alpha_0}, \quad g_{\alpha_0\bar{\beta}_0/\bar{\beta}_1} = g_{\alpha_0\bar{\beta}_1/\bar{\beta}_0}.$$

Sexa agora

$$g_{\left(\alpha_0\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_0\ldots\bar{\beta}_k\right)} := g_{\alpha_0\bar{\beta}_0/\alpha_1\ldots\alpha_j\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k}. \tag{2.20}$$

Pois ben, se σ_1 e σ_2 son permutacións de $j+1$ e $k+1$ índices respectivamente,

$$g_{\left(\alpha_0\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_0\ldots\bar{\beta}_k\right)} = g_{\left(\alpha_{\sigma_1(0)}\ldots\alpha_{\sigma_1(j)};\bar{\beta}_{\sigma_2(0)}\ldots\bar{\beta}_{\sigma_2(k)}\right)}. \tag{2.21}$$

De forma similar, introdúcense variables formais para as compoñentes da métrica hermitiana en E. Sendo $h_{p\bar{q}} := h(s_p, s_q)$, denótase

$$h_{\left(p\bar{q};\alpha_1\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k\right)} := h_{p\bar{q}/\alpha_1\ldots\alpha_j\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k}. \tag{2.22}$$

De novo, se σ_3 e σ_4 son permutacións de j e k elementos respectivamente, tense que

$$h_{\left(p\bar{q};\alpha_1\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k\right)} = h_{\left(p\bar{q};\alpha_{\sigma_3(1)}\ldots\alpha_{\sigma_3(j)};\bar{\beta}_{\sigma_4(1)}\ldots\bar{\beta}_{\sigma_4(k)}\right)}. \tag{2.23}$$

Faise o mesmo coa forma Θ. Como $\partial\Theta = 0$, $\Theta_{\alpha_0/\alpha_1} = \Theta_{\alpha_1/\alpha_0}$. Tómanse variables formais

$$\begin{aligned} \Theta_{\left(\alpha_0\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k\right)} &= \Theta_{\alpha_0/\alpha_1\ldots\alpha_j\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k}, \\ \bar{\Theta}_{\left(\alpha_1\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_0\ldots\bar{\beta}_k\right)} &= \bar{\Theta}_{\bar{\beta}_0/\alpha_1\ldots\alpha_j\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Se σ_5, σ_6 son permutacións de $j+1$ e k índices, respectivamente, e, de igual modo, σ_7 e σ_8 son permutacións de j e $k+1$ índices, entón

$$\begin{aligned}\Theta_{\left(\alpha_0\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k\right)} &= \Theta_{\left(\alpha_{\sigma_5(0)}\ldots\alpha_{\sigma_5(j)};\bar{\beta}_{\sigma_6(1)}\ldots\bar{\beta}_{\sigma_6(k)}\right)},\\ \bar{\Theta}_{\left(\alpha_1\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_0\ldots\bar{\beta}_k\right)} &= \bar{\Theta}_{\left(\alpha_{\sigma_7(1)}\ldots\alpha_{\sigma_7(j)};\bar{\beta}_{\sigma_8(0)}\ldots\bar{\beta}_{\sigma_8(k)}\right)}.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Tendo en conta a notación que acaba de ser introducida, o seguinte lema permite dar un sistema de coordenadas normalizado.

Lema 2.19 (Gilkey [7]). *Sexa $\mathcal{M} = (M, g, J, E, h, \Theta)$ e fíxase en M un punto z_0. Ademais, N é un enteiro positivo. Existe un sistema de coordenadas holomorfas $\vec{z} = (z^1, \ldots, z^{\mathfrak{m}})$ centradas en z_0 de forma que*

- *$g_{\alpha\bar{\beta}}(z_0) = \delta_{\alpha\beta}$ e $h_{p\bar{q}}(z_0) = \delta_{p,q}$.*
- *$g_{\left(\alpha_0\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_0\right)}(z_0) = g_{\left(\alpha_0;\bar{\beta}_0\ldots\bar{\beta}_k\right)}(z_0) = 0$ e $h_{(p\bar{q};\alpha_1\ldots\alpha_j)}(z_0) = h_{\left(p\bar{q};\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k\right)}(z_0) = 0$ para $1 \leq j, k \leq N$.*

Con todo anterior, defínese a álxebra de polinomios $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}}$ nas variables de ecuacións (2.20), (2.22) e (2.24) e con relacións impostas polas igualdades (2.20), (2.22), (2.25) e as do Lema 2.19:

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}} := \mathbb{C}\left[g_{\left(\alpha_0\ldots\alpha_{j_1};\bar{\beta}_0\ldots\bar{\beta}_{k_1}\right)}, h_{\left(p\bar{q};\alpha_1\ldots\alpha_{j_2};\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_{k_2}\right)}, \Theta_{\left(\alpha_0\ldots\alpha_{j_3};\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_{k_3}\right)}, \bar{\Theta}_{\left(\alpha_1\ldots\alpha_{j_4};\bar{\beta}_0\ldots\bar{\beta}_{k_4}\right)}\right],$$

onde $j_1 \geq 1$, $k_1 \geq 1$, $j_2 \geq 1$, $k_2 \geq 1$, $j_3 \geq 0$, $k_3 \geq 0$ e $j_4 \geq 0$. Se $P \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m}}$ é un polinomio cun monomio A, denotaremos por $c(A, P)$ o coeficiente de A. Así,

$$P = \sum_A c(A, P)A.$$

Dirase que A *é un monomio de* P no caso de que $c(A, P)$ sexa non nulo.

Agora defínese o peso ao igual que no anterior capítulo como a forma de contar o número de derivadas. Así,

$$\begin{aligned}\text{weight}(g_{\left(\alpha_0\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_0\ldots\bar{\beta}_k\right)}) = \text{weight}(h_{\left(p\bar{q};\alpha_1\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k\right)}) &:= j + k,\\ \text{weight}(\omega_{\left(\alpha_0\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k\right)}) = \text{weight}(\bar{\omega}_{\left(\alpha_1\ldots\alpha_j;\bar{\beta}_0\ldots\bar{\beta}_k\right)}) &:= 1 + j + k.\end{aligned}$$

Distinguiranse as variables de peso 1 que se denotarán por

$$\Xi_{(\alpha_1\ldots\alpha_e;\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_f)} := \Theta_{\alpha_1}\ldots\Theta_{\alpha_e}\bar{\Theta}_{\bar{\beta}_1}\ldots\bar{\Theta}_{\bar{\beta}_f},$$

onde, se non hai derivadas holomorfas e antiholomorfas ($e = f = 0$), escribirase $\Xi = 1$. Asignámoslle peso

$$\text{weight}(\Xi_{(\alpha_1\ldots\alpha_e;\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_f)}) := e + f.$$

Tendo en conta o peso das variables formais pódese definir o peso dun monomio. Sexa U_* e $\bar{V}_*$ coleccións de índices holomorfos e antiholomorfos, respectivamente, e posiblemente baleiros. Se A é un monomio, entón pódese expresar da seguinte forma

$$\begin{aligned} A = \ & g_{(U_1;\bar{V}_1)} \cdots g_{(U_a;\bar{V}_a)} h_{(p_1\bar{q}_1;U_{a+1};\bar{V}_{a+1})} \cdots h_{(p_b\bar{q}_b;U_{a+b};\bar{V}_{a+b})} \\ & \cdot \Theta_{(U_{a+b+1};\bar{V}_{a+b+1})} \cdots \Theta_{(U_{a+b+c};\bar{V}_{a+b+c})} \bar{\Theta}_{(U_{a+b+c+1};\bar{V}_{a+b+c+1})} \cdots \bar{\Theta}_{(U_{a+b+c+d};\bar{V}_{a+b+c+d})} \\ & \cdot \Xi_{(U_{a+b+c+d+1};\bar{V}_{a+b+c+d+1})}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Nótese que ao impoñer as ecuacións do Lema 2.19, entón todas as variables de $\mathfrak{A}_m$ teñen peso positivo. Esténdese entón a definición de peso a monomios do seguinte xeito:

$$\begin{aligned} \text{weight } (A) = & \sum_{i=1}^{a} \text{ weight } \left(g_{(U_i;\bar{V}_i)} \right) + \sum_{i=a+1}^{a+b} \text{ weight } \left(h_{(p_i\bar{q}_i;U_{a+b};\bar{V}_{a+b})} \right) \\ & + \sum_{i=a+b+1}^{a+b+c} \text{ weight } \left(\Theta_{(U_i;\bar{V}_i)} \right) + \sum_{i=a+b+c+1}^{a+b+c+d} \text{ weight } \left(\bar{\Theta}_{(U_i;\bar{V}_i)} \right) + e + f. \end{aligned}$$

A vantaxe de dar así a definición de peso dun monomio é que permite obter de maneira sinxela o concepto de lonxitude $\ell(A)$ dun monomio A. Consistirá no número de variables do monomio, entendendo que Ξ representa só unha variable. Así,

$$\ell(A) = \begin{cases} a+b+c+d+1 & \text{se } \Xi \neq 1 \\ a+b+c+d & \text{se } \Xi = 1. \end{cases}$$

Como é de esperar, dirase que un polinomio P é *homoxéneo de peso* n no caso de que todos os seus monomios sexan de peso n.

2.8.1. A aplicación restrición

A idea ben a ser a mesma que no caso do complexo de De Rham. Definirase de novo a aplicación restrición cos cambios oportunos. Esta permitirá calcular $a^{\mathrm{Dol}}_{m,n}$.

Sexa $\vec{z}$ un sistema de coordenadas centrado en z_0 de M, normalizado nas condicións do Lema 2.19 e $\vec{s}$ unha referencia local holomorfa de E. Deste xeito, $P \in \mathfrak{A}_\mathfrak{m}$ pode ser avaliado $P(\mathcal{K})(z_0)(\vec{z}, \vec{s})$. Ao igual que no caso real, dirase que P é *invariante* no caso de que esta avaliación non dependa nin de $\vec{s}$ nin de $\vec{z}$. Un exemplo de invariante é $a_{m,n}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}))$.

O subespazo de $\mathfrak{A}_\mathfrak{m}$ formado por todos os polinomios invariantes homoxéneos de peso n denotaranse como na sección anterior por $\mathcal{P}_{\mathfrak{m},n}$. No caso de ser n impar, estes subespazos volven a ser triviais polo feito de que non existen invariantes de peso impar. Polo comentado antes, tense que $a_{m,n}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})) \in \mathcal{P}_{\mathfrak{m},n}$.

Vólvese a considerar o grao como ferramenta para contar o número de veces que aparece un índice (xa sexa holomorfo ou antiholomorfo) nas variables de $\mathfrak{A}_\mathfrak{m}$. Defínese $\deg_\alpha$, sendo análogo o caso onde o índice é antiholomorfo, $\deg_\beta$. Tómase,

$$\begin{array}{ll}
\deg_\alpha\left(g_{\left(\alpha_0\ldots\alpha_j;\bar\beta_0\ldots\bar\beta_k\right)}\right)=\sum_{\nu=0}^{j}\delta_{\alpha\alpha_\nu}, & \deg_\alpha\left(h_{\left(p\bar q;\alpha_1\ldots\alpha_j;\bar\beta_1\ldots\bar\beta_k\right)}\right)=\sum_{\nu=1}^{j}\delta_{\alpha\alpha_\nu},\\
\deg_\alpha\left(\Theta_{\left(\alpha_0\ldots\alpha_j;\bar\beta_1\ldots\bar\beta_k\right)}\right)=\sum_{\nu=0}^{j}\delta_{\alpha\alpha_\nu}, & \deg_\alpha\left(\bar\Theta_{\left(\alpha_1\ldots\alpha_j;\bar\beta_0\ldots\bar\beta_k\right)}\right)=\sum_{\nu=1}^{j}\delta_{\alpha\alpha_\nu},\\
\deg_\alpha\left(\Xi_{\left(\alpha_1\ldots\alpha_e;\bar\beta_1\ldots\bar\beta_f\right)}\right)=\sum_{\nu=1}^{e}\delta_{\alpha\alpha_\nu}. &
\end{array}$$

Esténdese agora o concepto a monomios de $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}}$. De novo faise tan só para índices holomorfos, sendo análogo para índices antiholomorfos:

$$\begin{aligned}
\deg_\alpha(A)= &\sum_{i=1}^{a}\deg_\alpha\left(g_{\left(U_i;\bar V_i\right)}\right)+\sum_{i=a+1}^{a+b}\deg_\alpha\left(h_{\left(p_i\bar q_i;U_{a+b};\bar V_{a+b}\right)}\right)\\
&+\sum_{i=a+b+1}^{a+b+c}\deg_\alpha\left(\Theta_{\left(U_i;\bar V_i\right)}\right)+\sum_{i=a+b+c+1}^{a+b+c+d}\deg_\alpha\left(\bar\Theta_{\left(U_i;\bar V_i\right)}\right)\\
&+\deg_\alpha\left(\Xi_{\left(U_{a+b+c+d+1};\bar V_{a+b+c+d+1}\right)}\right).
\end{aligned}$$

Darase agora unha definición xeométrica da aplicación restrición. Con este fin, considérese o toro plano 2-dimensional, $\mathbb{T}^2$, con E trivial e $\Theta=0$. Suponse que $\mathcal{N}$ ten dimensión complexa $\mathfrak{m}-1$, tómase $\mathcal{K}=\mathcal{N}\times\mathbb{T}^2$. Se P é un polinomio invariante de dimensión complexa $\mathfrak{m}$, entón a inclusión natural de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{K}$ induce unha formula local invariante $r(P)$ en dimensión complexa $\mathfrak{m}-1$ de forma que

$$r(P)(\mathcal{N})(z_1)=P(\mathcal{N}\times\mathbb{T})(z_1,z_2).$$

Queda entón definida a aplicación restrición

$$r\colon\mathcal{P}_{\mathfrak{m},n}\longrightarrow\mathcal{P}_{\mathfrak{m}-1,n}\ \text{ ou }\ r\colon\mathcal{P}_{m,n}\longrightarrow\mathcal{P}_{m-2,n}.$$

Pola súa definición, ao igual que xa se razoou con anterioridade no caso real, tense que $r(P)=0$ precisamente de $\deg_{\mathfrak{m}}(A)\neq 0$ para todo monomio A de P. Se P é invariante, os índices poden ser permutados. En consecuencia, tense o seguinte lema de forma inmediata

Lema 2.20. *Se $P\in\mathcal{P}_{\mathfrak{m},n}$, entón*

$$r(P)=0\Leftrightarrow\deg_\mu(A)\neq 0,\ \textit{ para todo monomio } A \textit{ de } P,\ 1\leq\mu\leq\mathfrak{m}.$$

Agora, como corolario inmediato da ecuación (2.19), tense que $r(a_{m,n}^{\mathrm{Dol}})=0$.

O seguinte lema dinos que un índice aparecerá as mesmas veces como índice holomorfo que como índice antiholomorfo.

Lema 2.21. *Sexa A un monomio de $0\neq P\in\mathcal{P}_{\mathfrak{m},n}$. Entón, $\deg_\mu(A)=\deg_{\bar\mu}(A)$ para calquera μ.*

Proba. Tense que $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{m},n}$, logo P é invariante. En consecuencia, poden permutarse os índices. Pode entón suporse que $\mu = 1$. Considérase un cambio de coordenadas co fin de definir un sistema de coordenadas $\vec{y}$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \begin{cases} e^{\sqrt{-1}\theta}\frac{\partial}{\partial z^1} & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{\partial}{\partial z^\alpha} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\bar{\beta}}} = \begin{cases} e^{-\sqrt{-1}\theta}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{1}}} & \text{se } \beta = 1 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{\beta}}} & \text{se } \beta > 1. \end{cases}$$

Para calcular P^y, o que se fai formalmente é substituír 1 por $1 \cdot e^{\sqrt{-1}\theta}$ e $\bar{1}$ por $\bar{1} \cdot e^{-\sqrt{-1}\theta}$. O resto de índices quedan sen cambios. Así,

$$A^y = (e^{\sqrt{-1}\theta})^{\deg_1(A)}(e^{-\sqrt{-1}\theta})^{\deg_{\bar{1}}(A)}A = e^{\sqrt{-1}(deg_1(A)-deg_{\bar{1}}(A))\theta}A.$$

En consecuencia, como P é invariante,

$$\sum_A c(A,P)A = P = P^y = \sum_A e^{\sqrt{-1}(\deg_1(A)-\deg_{\bar{1}}(A))\theta}c(A,P)A.$$

Logo, necesariamente, $\deg_1(A) - \deg_{\bar{1}}(A) = 0 \Leftrightarrow \deg_1(A) = \deg_{\bar{1}}(A)$ se $c(A,P) \neq 0$. ■

Definición 2.22. Se B é un monomio, denotarase por $\mathcal{B}(B)$ o conxunto de todos os monomios A de forma que intercambiando unicamente un índice, $1 \to 2$ ou $\bar{2} \to \bar{1}$ en A, se obtén B. Alternativamente, pode definirse como o conxunto daqueles monomios A que se conseguen ao cambiar unicamente un índice $2 \to 1$ ou $\bar{1} \to \bar{2}$ en B. Úsanse os índices 1 e 2 co fin de ser ilustrativos mais, poderían ser empregados calquera par deles.

Tendo agora en conta a definición anterior xunto co lema, tense o seguinte resultado cuxa proba é bastante intuitiva. Esta pode ser vista en [1].

Lema 2.23. *Sexa $0 \neq P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{m},n}$. Se B é un monomio calquera, entón ou ben ningún monomio de $\mathcal{B}(B)$ é monomio de P ou ben polo menos dous monomios de $\mathcal{B}(B)$ son monomios de P.*

Así, o lema anterior permitiranos afirmar que se existe un monomio de $\mathcal{B}(B)$ que é monomio de P, entón existirá polo menos outro monomio de $\mathcal{B}(B)$ en P distinto. Este argumento será empregado con regularidade de aquí en diante, como por exemplo na proba do seguinte lema.

Lema 2.24. *Sexa $0 \neq P \in \ker(r) \cap \mathcal{P}_{\mathfrak{m},2n}$, onde $2n \leq m$. Existe un monomio A de P que é da forma dada na ecuación (2.26) onde $U_\mu = (\mu \dots \mu)$, para $\mu \leq n$. Máis aínda, tense que $\ell(A) \geq \mathfrak{m}$ e no caso de darse a igualdade, ningún dos U_μ é baleiro.*

Proba. Farase a proba en tres pasos:

➻ **Paso 1:**

Centrámonos nas coleccións de índices $(U_\mu; \bar{V}_\mu)$, suprimindo na notación todos os g, h, Θ, $\bar{\Theta}$ e Ξ. Así, escóllese un monomio $A = (U_1; \bar{V}_1)A_0$, de forma que $\deg_1(U_1)$ é máximo. No caso de ter que $U_1 = (1 \dots 1)$, este paso remataría e seguiríase co paso 2. De non ser así, teríase que $U_1 = (1 \dots 1\alpha \dots)$ onde $\alpha \neq 1$. Permutando índices de ser preciso, pódese supor que $\alpha = 2$. Sexa $B = (1\ldots 11\ldots;\bar{V}_1)A_0 \in \mathcal{B}(A)$ entón, tamén se ten que $A \in \mathcal{B}(B)$. Empregando o Lema 2.23, existirá outro monomio de P, $A_1 \neq A$, en $\mathcal{B}(B)$. A_1 non se pode obter cambiando un índice de B en U_1 pois, de ser así, necesariamente, teríase que $A = A_1$. Así, $A_1 = (1\ldots 11\ldots;\bar{V}_1')$, logo $\deg_1(A_1) = 1 + \deg_1(A)$, é dicir, ten un 1 mais que A no primeiro dos multi-índices, en contradición coa maximalidade suposta para o conxunto U_1. En definitiva, acábase de ver que $U_1 = (1\ldots 1)$.Pásase entón ao paso 2.

➻ **Paso 2:**
Tómese $A = (1\ldots 1;\bar{V}_1)(U_2;\bar{V}_2)A_0$ de forma que $\deg_2(U_2)$ é máximo. De ser $U_2 = (2\ldots 2)$ pasaríase ao paso 3. De non ser así, $U_2 = (2\ldots 2\alpha\ldots)$. Agora considérase

$$B = (1\ldots 1;\bar{V}_1)(2\ldots 22\ldots;\bar{V}_2)A_0.$$

Neste caso, na definición 2.22, os índices que se cambiarán serán $(2,\alpha)$ en lugar de $(1,2)$. Así, $B \in \mathcal{B}(A)$ e en consecuencia $A \in \mathcal{B}(B)$. Empregando de novo o Lema 2.23 existirá $A_1 \neq A$ monomio de P en $\mathcal{B}(B)$. Nótese que cambiar $\alpha \to 2$ non afecta a U_1 e co mesmo argumento empregado no paso 1, chégase a que $A_1 = (1\ldots 1;\bar{V}_1)(2\ldots 22\ldots;\bar{V}_2')A_0$, en contradición coa maximalidade de U_2. En consecuencia, pódese escoller

$$A = U_2 = (2\ldots 2)(1\ldots 1;\bar{V}_1)(2\ldots 2;\bar{V}_2)A_0.$$

➻ **Paso 3:**
Continuando deste modo, pódese chegar ata $\mu = \mathfrak{m}$ ou ata $\mu = \ell(A)$. Como $\deg_\mu(A) \neq 0$ e, como por hipótese se ten que $P \in \ker(r)$, obtense que $r(P) = 0$. Empregando o Lema 2.20, tense que $\deg_\mu(A) \neq 0$ para todo monomio A de P con $1 \leq \mu \leq \mathfrak{m}$, entón tense que $\mathfrak{m} \leq \ell(A)$. No caso de darse a igualdade, necesariamente, todos os índices teñen que aparecer polo feito de terse que $\deg_\mu(A) \neq 0$ para $1 \leq \mu \leq \mathfrak{m}$ e, así, ningún dos U_μ sería baleiro. ■

Considérase agora a seguinte subálxebra de $\mathfrak{A}_\mathfrak{m}$ que consiste en considerar tan só as variables de peso dous,

$$\mathfrak{B}_\mathfrak{m} = \mathbb{C}\left[g_{(\alpha_0\alpha_1;\bar{\beta}_0\bar{\beta}_1)}, h_{(p\bar{q};\alpha_1;\bar{\beta}_1)}, \Theta_{(\alpha_0;\bar{\beta}_1)}, \bar{\Theta}_{(\alpha_1;\bar{\beta}_0)}\right].$$

Esta álxebra xogará un papel fundamental á hora de ver a forma que teñen os invariantes $a^{\mathrm{Dol}}_{m,n}$.

Lema 2.25. *Sexa $n \leq m$.*

- *Se $n < m$,* $\ker(r) \cap \mathcal{P}_{\mathfrak{m},n} = \{0\}$.
- *Se $n = m$,* $\ker(r) \cap \mathcal{P}_{\mathfrak{m},m} \subset \mathfrak{B}_m \oplus \bigoplus_{\alpha_1,\bar{\beta}_1} \Theta_{\alpha_1}\bar{\Theta}_{\bar{\beta}_1}\mathfrak{B}_m$.

Proba. Sexa $0 \neq P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{m},n} \cap \ker(r)$ onde $n \leq m$. Como $r(P) = 0$ (pois $P \in \ker(r)$), empregando o Lema 2.20, tense que $\deg_\mu(A) \neq 0$ para todo monomio A de P e para $1 \leq \mu \leq \mathfrak{m}$. Agora analízanse as variables de peso 1: $\Xi = \Xi_{(\alpha_1\ldots\alpha_e;\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_f)}$.

➽ **Caso 1:** $\boxed{e = 0.}$
Empregando a notación da ecuación (2.26), tense que $\deg_\alpha(A) = 0$, para $\alpha > a+b+c+d$. Como se ten $\deg_{\mathfrak{m}}(A) \neq 0$, obtense que $a + b + c + d \geq \mathfrak{m}$. Así,

$$m \geq n = \text{weight}(A) \geq 2a + 2b + 2c + 2d + f \geq 2a + 2b + 2c + 2d \geq 2\mathfrak{m} = m.$$

Agora, no caso de ter que $n < m$, coa anterior desigualdade, chégase a unha contradición. En consecuencia, $P = 0$. De ser $n = m$, a cadea de desigualdades pasaría a ser todo igualdades. Así, $f = 0$ e P só tería variables de peso 2.

➽ **Caso 2:** $\boxed{f = 0.}$
Razoando de xeito totalmente análogo, chégase a que se $n < m$, entón $P = 0$. No caso de ser $n = m$ obteríase que $e = 0$ e ademais P so tería variables de peso 2.

➽ **Caso 3:** $\boxed{e, f \neq 0.}$
Tense que $a + b + c + d + 1 \geq \mathfrak{m}$, pois, en canso contrario, teríase que $\deg_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ o cal é falso. Así,

$$\begin{aligned} m &\geq n = \text{weight}(A) \geq 2a + 2b + 2c + 2d + e + f \\ &\geq 2a + 2b + 2c + 2d + 2 = 2(a + b + c + d + 1) \geq 2\mathfrak{m} = m. \end{aligned}$$

Como consecuencia, obtense que todas as desigualdades pasan a ser igualdades. En particular, tense que $m = n$ e que $f = e = 1$. O resto de variables que forman A teñen peso 2.

En definitiva, no caso de ser $n < m$, tense que necesariamente $P = 0$.

Para o caso $n = m$ fanse as seguintes observacións. Calquera variable $\bar{\Theta}_{(\cdot;\cdot)}$ de peso 2 ten índices holomorfos. De non ser así, o Lema 2.24, mostra que existirá un monomio en P de forma que $\deg_\alpha(A) = 0$, para certos índices holomorfos α. Esto supón unha contradición co feito de que $\deg_\mu(A) \neq 0$, para $1 \leq \mu \leq \mathfrak{m}$ e para todo monomio A de P, por ser $r(P) = 0$ (Lema 2.20). O mesmo argumento vale para ver que calquera variable $\Theta_{(\cdot;\cdot)}$ de peso 2 ten índices antiholomorfos (o Lema 2.24 tamén é certo para índices antiholomorfos). En definitiva, acábase de ver que todas as variables que forman A están en $\mathfrak{B}_{\mathfrak{m}}$. Queda entón probada a segunda parte. ■

O seguinte lema permite expresar en función da segunda clase de Todd e da parte imaxinaria da forma Θ considerada na deformación do complexo, o índice local de densidade para $m = n = 2$.

Lema 2.26. *Se $\mathcal{M} = (M, g)$ é unha superficie de Riemann, entón*

$$a_{2,2}^{\text{Dol}}(\mathcal{M}) = \star \left(Tod_2(\mathcal{M}) + \frac{d(\text{Im}(\Theta))}{\pi} \right).$$

Proba. A proba deste lema pódese atopar na sección 7 de [1]. ■

Antes de enunciar e probar o seguinte lema, dáse a seguinte definición.

Definición 2.27. Dirase que *un índice antiholomorfo, $\bar\beta$, toca un índice antiholomorfo, $\bar\gamma$, en A*, se $g_{(\alpha\alpha;\bar\beta\bar\gamma)}$ forma parte do monomio A. Como é de esperar, dirase que $\bar\beta$ tócase a si mesmo no caso de que $\bar\gamma = \bar\beta$.

Dirase que *un índice holomorfo, α, toca un índice antiholomorfo, $\bar\beta$, en A*, no caso de que $\Theta_{(\alpha;\bar\beta)}$, $\bar\Theta_{(\alpha;\bar\beta)}$ ou ben $\Xi_{(\alpha;\bar\beta)}$ formen parte de A.

Lema 2.28. *Sexa $0 \neq P \in \ker(r) \cap \mathcal{P}_{\mathfrak{m},m}$. Existe un monomio en P que é da seguinte forma*

$$\begin{aligned} A = \;& g_{\left(11;\bar\beta_1\bar\beta_2\right)} \cdots g_{\left(aa;\bar\beta_{2a-1}\bar\beta_{2a}\right)} h_{\left(p_{a+1}\bar q_{a+1};a+1;\overline{a+1}\right)} \cdots h_{(p_b\bar q_b;a+b;a+b)} \\ & \cdot \Theta_{(a+b+1;\overline{a+b+1})} \cdots \Theta_{(a+b+c;\overline{a+b+c})} \bar\Theta_{(a+b+c+1;\overline{a+b+c+1})} \cdots \bar\Theta_{(a+b+c+d;\overline{a+b+c+d})} \Xi, \end{aligned}$$

onde $\Xi = 1$ ou ben $\Xi = \Xi_{(\mathfrak{m};\bar{\mathfrak{m}})}$ e $\beta_\mu \leq a$ para $1 \leq \mu \leq 2a$.

Proba. Aplicando o Lema 2.24 e a segunda parte do Lema 2.25, obtense que

$$\begin{aligned} A = & g_{\left(11;\bar\beta_1\bar\beta_2\right)} \cdots g_{\left(aa;\bar\beta_{2a-1}\bar\beta_{2a}\right)} h_{\left(p_{a+1}\bar q_{a+1};a+1;\bar\beta_{a+1}\right)} \cdots h_{\left(p_b\bar q_b;a+b;\bar\beta_{a+b}\right)} \\ & \cdot \Theta_{\left(a+b+1;\bar\beta_{a+b+1}\right)} \cdots \Theta_{\left(a+b+c;\bar\beta_{a+b+c}\right)} \bar\Theta_{\left(a+b+c+1;\bar\beta_{a+b+c+1}\right)} \cdots \bar\Theta_{\left(a+b+c+d;\bar\beta_{a+b+c+d}\right)} \Xi, \end{aligned} \tag{2.27}$$

onde $\Xi = 1$ ou ben $\Xi = \Xi_{(\mathfrak{m};\bar\beta_m)}$.

Agora emprégase o Lema 2.21 e a ecuación anterior, chegando a que

$$a < \beta \iff \deg_\beta(A) = 1 \overset{(2.21)}{\iff} \deg_{\bar\beta}(A) = 1.$$

Supóñase entón que $a < \beta$. Deste xeito, polo xa visto, tense que $\deg_\beta(A) = \deg_{\bar\beta}(A) = 1$. Sexa tamén $\gamma \neq \beta$. Constrúese un monomio B onde se substitúe en A $\bar\beta$ por $\bar\gamma$. Deste xeito, $\deg_{\bar\beta}(B) = 0$. Como consecuencia, tense que A se obtén a partir de B despois de intercambiar un único índice $\bar\gamma \to \bar\beta$, logo $A \in \mathcal{B}(B)$. Aplícase agora o Lema 2.23 para escoller un monomio de P, $A_1 \in \mathcal{B}(B)$, de forma que $A_1 \neq A$. Agora, como se ten que $\deg_{\bar\beta}(B) = 0$ e que $\deg_{\bar\beta}(A_1) > 0$, séguese que A_1 se obtén partindo de B ao cambiar un índice $\bar\gamma$ por $\bar\beta$. De modo equivalente, A_1 conséguese de A intercambiando un índice $\bar\beta$ por $\bar\gamma$. En particular, tense que dous índices antiholomorfos de grao 1 non se poden tocar, pois, de ser así, chegaríase a que $A = A_1$, o cal é unha contradición.

O mesmo que se viu antes para índices $a < \beta$ ocorre para índices β, de forma que $\deg_{\bar\beta}(A) = 1$. En efecto, escóllase un monomio A da forma dada na ecuación (2.27) e de xeito que o número de índices antiholomorfos que se tocan a si mesmos é máximo. Supóñase agora que $\deg_{\bar\beta}(A) = 1$ e que $\bar\beta$ toca outro índice antiholomorfo $\bar\gamma$ en A. Entón existe outro monomio de P, $A_1 \neq A_2$, que se obtén intercambiando os índices $\bar\beta$ e $\bar\gamma$. Así conseguiríase que A_1 teña un índice tocándose a si mesmo a maiores que os que ten A. Esto non pode ser posible pois suporía unha contradición coa maximalidade no número de índices tocándose a si mesmos suposta en A. En definitiva, $\{\bar V_1, \ldots, \bar V_a\}$ son unicamente índices antiholomorfos de A de grao 2.

Se A se constrúe como se comentou, entón todo índice holomorfo de grao 1 toca un índice antiholomorfo $\bar{\beta}$ de grao 1 en A. Agora, entre todos os monomios A construídos no transcurso desta proba, escóllese aquel A tal que o número de índices holomorfos α que tocan o índice antiholomorfo $\bar{\alpha}$ é maximal. Tómase $a + b < \alpha$. Se o índice holomorfo α toca un índice antiholomorfo $\bar{\beta}$ de forma que $\alpha \neq \beta$, poderíanse intercambiar $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ para construír un monomio A_1 de P onde se ten a maiores un índice holomorfo tocando un índice antiholomorfo. Esto supón unha contradición. Así, A é da forma que di o lema. ■

Este último resultado permite analizar en detalle o núcleo da aplicación restrición. Para iso, primeiro considérase a compoñente k-ésima da clase de Chern, ch_k, e o anel graduado

$$\mathfrak{T}_m := \mathbb{C}[\mathrm{ch}_k(TM, J, g), \mathrm{ch}_k(E, h), d\Theta, d\bar{\Theta}, \Theta, \bar{\Theta}] = \bigoplus_k \mathfrak{T}_m^k. \tag{2.28}$$

Tense entón o seguinte lema cuxa proba pode ser consultada en [1].

Lema 2.29. *Coa notación introducida con anterioridade e supoñendo que a variedade é Kähler,*

- $\ker(r\colon \mathcal{P}_{m,n} \longrightarrow \mathcal{P}_{m-2,n}) = \{0\}$ *se* $n < m$.
- $\ker(r\colon \mathcal{P}_{m,m} \longrightarrow \mathcal{P}_{m-2,m}) = \star\mathfrak{T}_m^m$.

2.8.2. Cálculo de $a_{m,n}^{\mathrm{Dol}}$

Sexa Θ unha forma de tipo $(1,0)$ en M verificando $\partial\Theta = 0$. Sexa $\mathcal{K} := (M, g, J, E, h)$. Considérese o complexo de Dolbeault deformado por Θ. Denotarase

$$\omega := \sum_k \frac{1}{k!\pi^k}(d(\mathrm{Im}(\Theta)))^k, \tag{2.29}$$

onde $\mathrm{Im}(\Theta) = \frac{\sqrt{-1}}{2}(\bar{\Theta} - \Theta)$ é a parte imaxinaria de Θ. Considérase tamén

$$\{\mathrm{Td} \wedge \mathrm{ch} \wedge \omega\}_m := \sum_{i+j+k=m} \mathrm{Td}(M, g, J)_i \wedge \mathrm{ch}(E, h)_j \wedge \omega_k.$$

Emprégase agora o Lema 2.25. Sexa $\mathcal{K}$ nas condicións descritas na ecuación (2.19). Tendo en conta que $a_{m,n}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})) = 0$ para $n < m$, tómase $n = m$ na ecuación anteriormente citada, obtendo

$$a_{m,m}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}))(x_1, x_2) = a_{m_1,m_1}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_1))(x_1) a_{m_2,m_2}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_2))(x_2). \tag{2.30}$$

A mesma fórmula pode ser probada por indución para un produto numerable de variedades.

Sexa agora

$$\mathcal{N}_k(0) = (N, J_N, g_N, E_N, h_N)$$

unha estrutura de dimensión complexa k equipada cunha $(1,0)$-forma que é trivial, $\Theta_0 = 0$. Sexa tamén

$$\mathbb{T}^2 = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, dx^2 + dy^2, J_2, E = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{C}, h_0 = 0),$$

o toro coa métrica plana e a estrutura complexa usual $J_2\colon \frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}$ e $J_2\colon \frac{\partial}{\partial y} \longrightarrow -\frac{\partial}{\partial x}$. Equípase agora o toro $\mathbb{T}^2$ cunha $(0,1)$-forma posiblemente non trivial que denotaremos por Θ_i de forma que $\partial\Theta_i = 0$; $\mathbb{T}^2(\Theta_i)$. Denótase $\vec{\Theta} := (\Theta_1, \ldots, \Theta_{\mathfrak{m}-k})$ e

$$\mathcal{K}(k, \vec{\Theta}) := \mathcal{N}_k \times \mathbb{T}^2(\Theta_1) \times \cdots \times \mathbb{T}^2(\Theta_{\mathfrak{m}-k}).$$

Así, pola ecuación (2.30), tense que

$$a_{m,m}(\mathcal{C}_{\text{Dol}}(\mathcal{K}(k, \vec{\Theta}))) = a_{2k,2k}(\mathcal{C}_{\text{Dol}}(\mathcal{N}_k))a_{2,2}(\mathcal{C}_{\text{Dol}}(\mathbb{T}^2(\Theta_1)) \cdots a_{2,2}(\mathcal{C}_{\text{Dol}}(\mathbb{T}^2(\Theta_{\mathfrak{m}-k})).$$

Agora, tendo en conta que $a_{2k,2k}(\mathcal{C}_{\text{Dol}}(\mathcal{N}_k)) = \star\{\text{Td}(N, g_N, J_N,) \wedge \text{ch}(E_N, h_N)\}_{2k}$ (Teorema 2.11), que $a_{2,2}(\mathcal{C}_{\text{Dol}}(\mathbb{T}^2(\Theta_i)) = \star\left(Todd_2(\mathbb{T}^2(\Theta_i)) + \frac{d(\text{Im}(\Theta)_i)}{\pi}\right)$ para $1 \leq i \leq \mathfrak{m} - k$ (Lema 2.26) e a definición de ω na ecuación (2.29), chégase finalmente a que

$$\{a_{m,m} - \{\text{Td} \wedge \text{ch} \wedge \omega\}_m\}(\mathcal{K}(k, \vec{\Theta})) = 0,$$

quedando probado o seguinte resultado.

Teorema 2.30. $a^{\text{Dol}}_{m,n} = \begin{cases} \star\{\text{Td} \wedge \text{ch} \wedge \omega\}_m & \textit{se } n = m \\ 0 & \textit{se } n < m. \end{cases}$

Capítulo 3

Invariantes derivados asintóticos da traza da calor

Este capítulo céntrase na análise do traballo [2] de J. Álvarez e P. Gilkey. Comézase recordando a notación empregada para denotar o índice local de densidade dos complexos de De Rham e Dolbeault deformados e posteriormente introducindo os invariantes derivados.

Os índices locais de densidade dos complexos de De Rham e Dolbeault deformados son, respectivamente,

$$a_{m,n}^{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})(x) := a_{m,n}(\mathcal{C}_{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})_\Theta)(x) = \sum_i (-1)^i a_{m,n}(\Delta_{\Theta,\mathcal{M}}^i)(x),$$

$$a_{m,n}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})(x) := a_{m,n}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})_\Theta)(x) = \sum_i (-1)^i a_{m,n}(\Delta_{\Theta,\mathcal{K}}^{0,i})(x).$$

Para máis detalles pódese ver a sección onde se trata a deformación de Witten (sección 2.6). Pásase agora a definir as invariantes asintóticas derivadas da traza da calor para o complexo de De Rham e o de Dolbeault.

$$\mathfrak{a}_{m,n}^{\mathrm{deR}}(\mathcal{M})(x) := \sum_p (-1)^p p\, a_{m,n}(\Delta_{\Theta,\mathcal{M}}^p)(x),$$

$$\mathfrak{a}_{m,n}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})(x) := \sum_p (-1)^p p\, a_{m,n}(\Delta_{\Theta,\mathcal{K}}^{0,p})(x).$$

O motivo de chamarlle derivados é o seguinte. Sexa

$$\mathfrak{A}_{m,n}^{\mathrm{deR}}(s)(x) := \sum_p (-1)^p s^p\, a_{m,n}(\Delta_{\Theta,\mathcal{M}}^p)(x),$$

$$\mathfrak{A}_{m,n}^{\mathrm{Dol}}(s)(x) := \sum_p (-1)^p s^p\, a_{m,n}(\Delta_{\Theta,\mathcal{K}}^{0,p})(x).$$

Pois ben, tense de forma inmediata que

$$\begin{aligned} a_{m,n}^{\mathrm{deR}} &= \mathfrak{A}_{m,n}^{\mathrm{deR}}(s)(x)|_{s=1}, \quad \mathfrak{a}_{m,n}^{\mathrm{deR}} = \partial_s \mathfrak{A}_{m,n}^{\mathrm{deR}}(s)(x)|_{s=1}, \\ a_{m,n}^{\mathrm{Dol}} &= \mathfrak{A}_{m,n}^{\mathrm{Dol}}(s)(x)|_{s=1}, \quad \mathfrak{a}_{m,n}^{\mathrm{Dol}} = \partial_s \mathfrak{A}_{m,n}^{\mathrm{Dol}}(s)(x)|_{s=1}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Neste intre, imitarase o feito nas anteriores seccións co fin de calcular a expresión de $\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,n}$ e mais de $\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,n}$. Para iso recupérase a seguinte notación que xa foi introducida con anterioridade.

Tómase un sistema de coordenadas locais centrado en x_0, $\vec{x} := (x^1, \dots, x^m)$. Sexa $\alpha = (\alpha(1), \dots, \alpha(m))$ un multi-índice formado por enteiros non negativos e defínese tamén $|\alpha| = \alpha(1) + \cdots + \alpha(m)$. Descomponse a forma $\Theta = \sum_i \Theta_i dx^i$. Así defínese

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha &:= \partial_{x^1}^{\alpha(1)} \cdots \partial_{x^m}^{\alpha(m)}, \qquad & g_{ij} &:= g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}), \\ g_{ij/\alpha} &:= \partial_x^\alpha g_{ij}, & \Theta_{i/\alpha} &:= \partial_x^\alpha \Theta_i. \end{aligned}$$

Recórdese ademais que, con esta notación, definíase o peso como unha forma de contar o número de derivadas. Así,

$$\mathrm{weight}(g_{ij/\alpha}) = |\alpha|, \quad \mathrm{weight}(\Theta_{i/\alpha}) = |\alpha| + 1.$$

Sexa $S_m(\mathbb{R})$ o espazo vectorial de matrices $m \times m$, reais e simétricas. Ademais, considérase o subconxunto de matrices que definen un produto interior definido positivo, $\mathcal{O}_m \subset S_m(\mathbb{R})$. Defínese

$$\mathfrak{R}_m := C^\infty(\mathcal{O}_m)[g_{ij/\alpha}, \Theta_i, \Theta_{i/\alpha}]_{|\alpha|>0}.$$

O peso induce unha graduación natural en $\mathfrak{R}_m$ e así, este pode ser descomposto como $\mathfrak{R}_m = \bigoplus_n \mathfrak{R}_{m,n}$ onde $\mathfrak{R}_{m,n}$ son os polinomios de $\mathfrak{R}_m$ que son homoxéneos de peso n. Se $P \in \mathfrak{R}_m$, este pode ser avaliado nun sistema de coordenadas. Pois ben, ao igual que se fixo anteriormente, dirase que P é *invariante* se esta avaliación é independente do sistema de coordenadas escollido. Ao anel dos invariantes de $\mathfrak{R}_m$ denotarémolo por $\mathfrak{I}_m$. Ao igual que sucedía con $\mathfrak{R}_m$, $\mathfrak{I}_m$ pode ser descomposto como $\mathfrak{I}_m = \bigoplus_n \mathfrak{I}_{m,n}$, onde $\mathfrak{I}_{m,n} \subset \mathfrak{R}_{m,n}$. O espazo de invariantes tendo p-formas como coeficientes, $\mathfrak{I}^p_{m,n}$, defínese de xeito análogo.

Esto mesmo pode ser considerado no caso complexo. A situación é a seguinte. Sexa (M, g, J) unha variedade hermitiana e asúmese que $J^* g = g$ en lugar de impoñer que a variedade sexa Kähler. Sexa (E, h) un fibrado vectorial holomorfo sobre M de dimensión l. Fíxase un punto z_0 en M e escóllense coordenadas holomorfas, $\vec{z} := \{z^1, \dots, z^{\mathtt{m}}\}$, centradas no punto z_0 e unha referencia local para E, $\vec{s} = (s_1, \dots, s_l)$. Sexan agora $\{\alpha_1 \dots \alpha_j\}$ o conxunto de índices holomorfos e $\{\beta_1 \dots \beta_k\}$ o conxunto de índices antiholomorfos. Ao igual que antes denotarase

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial z^\alpha} &:= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^\alpha} - \sqrt{-1}\tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\right), \qquad & \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} &:= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial}{\partial x^\alpha} + \sqrt{-1}\tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\right), \\ g_{\alpha\bar{\beta}} &:= g\left(\tfrac{\partial}{\partial z^\alpha}, \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}\right), & h_{p\bar{q}} &:= h(s_p, s_q). \end{aligned}$$

Ademais, definirase tamén

$$g_{\alpha_0\bar{\beta}_0/\alpha_1\dots\alpha_j\bar{\beta}_1\dots\bar{\beta}_k} := \frac{\partial}{\partial_{z^{\alpha_1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial_{z^{\alpha_j}}} \frac{\partial}{\partial_{\bar{z}^{\beta_1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial_{\bar{z}^{\beta_k}}} g\left(\frac{\partial}{\partial_{z^{\alpha_0}}}, \frac{\partial}{\partial_{\bar{z}^{\beta_0}}}\right),$$

$$h_{p\bar{q}/\alpha_1\dots\alpha_j\bar{\beta}_1\dots\bar{\beta}_k} := \frac{\partial}{\partial_{z^{\alpha_1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial_{z^{\alpha_j}}} \frac{\partial}{\partial_{\bar{z}^{\beta_1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial_{\bar{z}^{\beta_k}}} h(s_p, s_q),$$

$$\Theta_{\alpha_0/\alpha_1\dots\alpha_j\bar{\beta}_1\dots\bar{\beta}_k} := \frac{\partial}{\partial_{z^{\alpha_1}}}\cdots\frac{\partial}{\partial_{z^{\alpha_j}}}\frac{\partial}{\partial_{\bar{z}^{\beta_1}}}\cdots\frac{\partial}{\partial_{\bar{z}^{\beta_k}}}\Theta_{\alpha_0},$$
$$\bar{\Theta}_{\bar{\beta}_0/\alpha_1\dots\alpha_j\bar{\beta}_1\dots\bar{\beta}_k} := \frac{\partial}{\partial_{z^{\alpha_1}}}\cdots\frac{\partial}{\partial_{z^{\alpha_j}}}\frac{\partial}{\partial_{\bar{z}^{\beta_1}}}\cdots\frac{\partial}{\partial_{\bar{z}^{\beta_k}}}\bar{\Theta}_{\bar{\beta}_0}.$$

Como ata agora, dise que non hai derivadas holomorfas no caso de que $j = 0$. Analogamente, dise que non hai derivadas antiholomorfas no caso de que $k = 0$. Lémbrese que se definía o peso como unha ferramenta que permitía contar o número de derivadas. Así,

$$\text{weight}(g_{\alpha_0\bar{\beta}_0/\alpha_1\dots\alpha_j\bar{\beta}_1\dots\bar{\beta}_k}) = \text{weight}(h_{p\bar{q}/\alpha_1\dots\alpha_j\bar{\beta}_1\dots\bar{\beta}_k}) = j + k,$$

$$\text{weight}(\Theta_{\alpha_0/\alpha_1\dots\alpha_j\bar{\beta}_1\dots\bar{\beta}_k}) = \text{weight}(\bar{\Theta}_{\bar{\beta}_0/\alpha_1\dots\alpha_j\bar{\beta}_1\dots\bar{\beta}_k}) = j + k + 1.$$

Sexa $S_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C})$ o espazo vectorial de matrices complexas $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ hermitianas. Sexa tamén $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}} \subset S_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}) \times S_l(\mathbb{C})$ o espazo formado polas matrices g e h que definen un produto interior definido positivo. Neste caso, o anel de polinomios considerado é

$$\mathfrak{W}_m := C^\infty(\mathcal{U}_{\mathfrak{m}})[g_{\alpha_0\bar{\beta}_0/\alpha_1\dots\alpha_j\bar{\beta}_1\dots\bar{\beta}_k}, h_{p\bar{q}/\alpha_1\dots\alpha_j\bar{\beta}_1\dots\bar{\beta}_k}, \Theta_{\alpha_0/\alpha_1\dots\alpha_j\bar{\beta}_1\dots\bar{\beta}_k}, \bar{\Theta}_{\bar{\beta}_0/\alpha_1\dots\alpha_j\bar{\beta}_1\dots\bar{\beta}_k}, \Theta_{\alpha_0}, \bar{\Theta}_{\bar{\beta}_0}], \tag{3.2}$$

onde se considerará que $j + k > 0$. Coma no caso real, dirase que $P \in \mathfrak{W}_m$ é *invariante* no caso de que avaliar P non dependa das coordenadas escollidas. Sexa $\mathfrak{K}_m$ o anel de invariantes no contexto Kähler. Ao igual que acontecía antes, $\mathfrak{K}_m = \bigoplus_n \mathfrak{K}_{m,n}$ está graduado onde $\mathfrak{K}_{m,n}$ son os polinomios que son homoxéneos de peso n. Por exemplo, $a_{m,n}(\Delta_{\mathcal{K}}^{p,q}) \in \mathfrak{K}_{m,n}$. Defínese de xeito similar o espazo de invariantes que teñen p-formas como coeficientes. Denotarase por $\mathfrak{K}_{m,n}^p$.

O peso dun polinomio describe o seu comportamento baixo homotopías. Tal comportamento é recollido no seguinte lema. Poderíase tomar como definición equivalente de peso, definindo este concepto como o enteiro k.

Lema 3.1. *Coa notación xa introducida e sendo c unha constante,*

- ***Caso real:*** *Tómese* $P \in \mathfrak{I}_{m,k}^p$. *Así,* $P(x, c^2 g, \Theta) = c^{p-k} P(x, g, \Theta)$.
- ***Caso complexo:*** *Tómese* $P \in \mathfrak{K}_{m,k}^p$. *Así,*

$$P\left(x, c^2 g, J, E, h, \Theta\right) = c^{p-k} P(x, g, J, E, h, \Theta)$$

.

Exemplo 3.2. Convén poñer un exemplo co fin de ser ilustrativos. Supóñase que se multiplica por c^2 a métrica: $\tilde{g}_{ij} = c^2 g_{ij}$. Considérese unha forma Θ. Esta tiña peso igual a 1. Entón, $||\Theta||_{\tilde{g}} = c^2 ||\Theta||_g$. Así, tense que $||\Theta||_g$ ten peso 2 e que $||\Theta||_g \in \mathfrak{I}_{m,2}^0$

A aplicación restrición xa foi introducida, tanto para o caso complexo como para o real. Pois ben, do mesmo xeito, obtéñense as aplicacións restricións

$$r\colon \mathfrak{I}_{m,k}^p \longrightarrow \mathfrak{I}_{m-2,k}^p,$$
$$r\colon \mathfrak{K}_{m,k}^p \longrightarrow \mathfrak{K}_{m-2,k}^p.$$

Coa notación introducida, tense que no caso real os invariantes de peso n, que se denotaban por $\mathcal{P}_{m,n}$, coinciden con $\mathfrak{J}^p_{m,k}$ con $p=0$. No caso complexo, estes invariantes tamén coinciden con $\mathfrak{K}^0_{m,k}$. Empregando entón esta nova notación, que xeneraliza a anteriormente introducida, recórdanse deseguido no seguinte lema a información sobre o núcleo da aplicación restrición. Esta xa foi presentada ao longo do traballo.

Lema 3.3. *Distinguirase o caso real e o complexo onde se suporá no segundo caso que a variedade é Kähler.*

- *Caso Real:*
  - $\ker(r:\mathfrak{J}^0_{m,n}\to\mathfrak{J}^0_{m-1,n})=\{0\}$ *se* $n<m$.
  - $\ker(r:\mathfrak{J}^0_{m,m}\to\mathfrak{J}^0_{m-1,m})=\mathrm{Span}(\mathcal{E}_m)$ *se* m *é par.*
- *Caso complexo:*
  - $\ker(r:\mathfrak{K}^0_{m,n}\to\mathfrak{K}^0_{m-2,n})=\{0\}$ *se* $n<m$.
  - $\ker(r:\mathfrak{K}^0_{m,m}\to\mathfrak{K}^0_{m-2,m})=\star\mathfrak{T}^m_m$.

Enúncianse agora uns lemas que serán de gran utilidade máis adiante á hora de probar os resultados principais desta sección.

A proba do seguinte lema pódese atopar no artigo [2], tanto do caso real, como do complexo. Unha vez enunciado, demostrarase tan só o caso real como consecuencia dun teorema que é resultado dos traballos de Günther e Schimming, [11].

Lema 3.4.

$$r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,n})=-(4\pi)^{-1/2}a^{\mathrm{deR}}_{m-1,n}\qquad e\qquad r(\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,n})=-(4\pi)^{-1}a^{\mathrm{Dol}}_{m-2,n}.$$

Teorema 3.5 (Gilkey [8]). *Sendo*

$$c(m,k,p)=\begin{cases}(-1)^p\begin{pmatrix} m-p\\ k\end{pmatrix} & se\ p\le m-k\\ 0 & se\ p>m-k,\end{cases}$$

tense que se $n+k=m$, *entón*

$$\sum_p c(m,k,p)a_{m,n}\left(\Delta^p_{\mathcal{C}}\right)(x)=(4\pi)^{-k/2}\mathcal{E}_{m,n}.$$

Probase agora o caso real do lema empregando este teorema.

Proba do caso real do Lema 3.4. Verase que

$$r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,n})=-(4\pi)^{-1/2}a^{\mathrm{deR}}_{m-1,n}.$$

Considérase o complexo de De Rham e tómase $k = 1$ no teorema anterior. Así, $c(m, 1, p) = (-1)^p(m - p)$. Escóllese $n = m - 1$. Empregando o teorema chégase a que

$$\begin{aligned}
(4\pi)^{-1/2}\mathcal{E}_{m,m-1}(x, g) &= \textstyle\sum_p (-1)^p(m - p)a_{m,m-1}\left(\Delta^p_{\mathcal{M}}\right)(x) \\
&= m \textstyle\sum_p (-1)^p a_{m,m-1}\left(\Delta^p_{\mathcal{M}}\right)(x) - \textstyle\sum_p (-1)^p p a_{m,m-1}\left(\Delta^p_{\mathcal{M}}\right)(x) \\
&= a^{\mathrm{deR}}_{m,m-1}(\mathcal{M}) - \mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m-1}(\mathcal{M}) \\
&= -\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m-1}(\mathcal{M}).
\end{aligned}$$

Aplicando agora a aplicación restrición, chégase a que

$$r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m-1}(\mathcal{M})) = -(4\pi)^{-1/2} r(\mathcal{E}_{m,m-1}(x, g)) = -(4\pi)^{-1/2}\mathcal{E}_{m-1}(x, g) = -(4\pi)^{-1/2} a^{\mathrm{deR}}_{m-1,n}.$$

■

En [3] pódense ver os seguintes dous cálculos.

Lema 3.6 (Cálculos en dimensións baixas).

$$a^{\mathrm{deR}}_{1,2} = -(\pi)^{-1/2}\delta\Theta \qquad e \qquad a^{\mathrm{Dol}}_{2,2} = (8\pi)^{-1}\tau - (\pi)^{-1}\delta(\mathrm{Re}(\Theta)),$$

onde τ é a curvatura escalar e $\mathrm{Re}(\Theta)$ a parte real da forma Θ.

Lema 3.7. *Sexa $P \in \mathfrak{J}_{m,n}$, con $m \neq n$. Supóñase que $\int_M P(x, g, \Theta)\, \mathrm{dvol}(g)$ é independente de g e de Θ para toda variedade de dimensión m pechada, M. Entón, existe $Q^1_{m,n-1} \in \mathfrak{J}^1_{m,n-1}$ tal que $P = \delta Q^1_{m,n-1}$.*

Demostración. A proba deste lema pódese ver no capítulo 5 de [2]. ■

É o momento de enunciar un primeiro teorema que mostra a forma que teñen $\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,n}$.

Teorema 3.8. *Sexa $\mathcal{M} = (M, g)$ unha variedade de Riemann de dimensión m equipada cunha 1-forma pechada, Θ. Entón,*

(1) Se $n < m - 1$, entón $\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,n} = 0$.

(2) Se m é impar, entón

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m-1} = -(4\pi)^{-1/2}\mathcal{E}_{m,m-1}$$

é independente de Θ. †

(3) Se m é par, entón

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m} = \frac{m}{2}\mathcal{E}_m + \delta Q^1_{m,m-1},$$

onde $Q^1_{m,m-1} \in \mathfrak{J}^1_{m,m-1}$.

† Ver ecuación (2.8) para recordar a definición de $\mathcal{E}_{m,k}$.

Proba. Demóstranse os tres apartados por separado:

➽ **Proba de (1):**

Supóñase entón que $n < m-1$. O Lema 3.4 permite afirmar que $r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,n}) = -(4\pi)^{-1/2}a^{\mathrm{deR}}_{m-1,n}$. O Teorema 2.17, ademais, mostra que $a^{\mathrm{deR}}_{m-1,n} = 0$. Agora, empregando o Lema 3.3, tense que $\ker(r : \mathfrak{I}^0_{m,n} \to \mathfrak{I}^0_{m-1,n}) = \{0\}$. En definitiva chégase a que

$$r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,n}) = -(4\pi)^{-1/2}a^{\mathrm{deR}}_{m-1,n} \overset{(2.17)}{\Longrightarrow} r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,n}) = 0 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \boxed{\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,n} = 0.}$$

➽ **Proba de (2):**

Suponse que m é impar. Emprégase de novo o Lema 3.4 para ter que

$$r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m-1}) = -(4\pi)^{-1/2}a^{\mathrm{deR}}_{m-1,m-1}.$$

Ademais, o Teorema 2.17 permite afirmar que

$$a^{\mathrm{deR}}_{m-1,m-1} = \mathcal{E}_{m-1}.$$

En consecuencia,

$$r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m-1}) = -(4\pi)^{-1/2}\mathcal{E}_{m-1}.$$

Agora ben, a aplicación restrición defíniase restrinxindo índices polo que, sen mais que ter en conta a definición de $\mathcal{E}_{m,k}$, vese que

$$r(-(4\pi)^{-1/2}\mathcal{E}_{m,m-1}) = -(4\pi)^{-1/2}\mathcal{E}_{m-1,m-1} = -(4\pi)^{-1/2}\mathcal{E}_{m-1}.$$

Como polo Lema 3.3 $r : \mathfrak{I}^0_{m,m-1} \to \mathfrak{I}^0_{m-1,m-1}$ é inxectiva,

$$r((4\pi)^{-1/2}\mathcal{E}_{m,m-1}) = r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m-1}) \Longrightarrow \boxed{\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m-1} = -(4\pi)^{-1/2}\mathcal{E}_{m,m-1}.}$$

➽ **Proba de (3):**

Emprégase, como nos dous apartados anteriores, o Lema 3.4 para afirmar que

$$r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m}) = -(4\pi)^{-1/2}a^{\mathrm{deR}}_{m-1,m} \in \mathfrak{I}^0_{m-1,m}.$$

Pola ecuación (2.5) tense que $\int_M a^{\mathrm{deR}}_{m-1,m}\ \mathrm{dvol}(g) = 0$ e así,

$$\int_M r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m})\ \mathrm{dvol}(g) = -(4\pi)^{-1/2}\int_M a^{\mathrm{deR}}_{m-1,m}\ \mathrm{dvol}(g) = 0.$$

Deste xeito, tomando como $P(x,g,\Theta) = r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m})$, estase nas hipóteses do Lema 3.7 pois, como consecuencia do que se acaba de ver, $\int_M r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m})\ \mathrm{dvol}(g)$ non depende nin de g nin de Θ. Así,

$$r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m}) = \delta Q^1_{m-1,m-1},$$

con $Q^1_{m-1,m-1} \in \mathfrak{I}^1_{m-1,m-1}$. Supóñase unha preimaxe $Q^1_{m,m-1}$ de forma que $r(Q^1_{m,m-1}) = Q^1_{m-1,m-1}$. Así, como ademais se ten que $\delta r = r\delta$, empregando o Lema 3.3,

$$\begin{aligned} r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m}) = \delta Q^1_{m-1,m-1} &\Rightarrow r(\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m} - \delta Q^1_{m,m-1}) = 0 \\ &\Rightarrow \mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m} - \delta Q^1_{m,m-1} \in \ker(r\colon \mathfrak{I}^0_{m,m} \longrightarrow \mathfrak{I}^0_{m-1,m}) = \mathrm{Span}(\mathcal{E}_m). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m} - \delta Q^1_{m,m-1} = C(m)\cdot \mathcal{E}_m.$$

Tan só falta calcular o coeficiente $C(m)$. Para iso tómase $\Theta = 0$ e así,

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m} = C(m)\cdot \mathcal{E}_m = C(m)\cdot a^{\mathrm{deR}}_{m,m}. \tag{3.3}$$

Emprégase agora a dualidade de Poincaré, $a_{m,m}(\Delta^p_{\mathcal{M}}) = a_{m,m}(\Delta^{m-p}_{\mathcal{M}})$, para ver que

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m} &= 2\sum_p (-1)^p p\cdot a_{m,m}(\Delta^p_{\mathcal{M}}) \\ &= \sum_p (-1)^p p\cdot a_{m,m}(\Delta^p_{\mathcal{M}}) + \sum_p (-1)^p (m-p)\cdot a_{m,m}(\Delta^{m-p}_{\mathcal{M}}) \\ &= \sum_p (-1)^p \cdot a_{m,m}(\Delta^p_{\mathcal{M}})(p+m-p) = m\cdot a^{\mathrm{deR}}_{m,m}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

As ecuacións (3.3) e (3.4) mostran que $C(m) = \frac{m}{2}$ e, en definitiva,

$$\boxed{\mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m} = \frac{m}{2}\mathcal{E}_m + \delta Q^1_{m,m-1}.}$$

■

Nótese que a afirmación (3) deste último teorema permite ver que $\int_M \mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,n}\,\mathrm{dvol}$ é un número característico independente de Θ pois

$$\int_M \mathfrak{a}^{\mathrm{deR}}_{m,m}\,\mathrm{dvol} = \int_M \left(\frac{m}{2}\mathcal{E}_m + \delta Q^1_{m,m-1}\right)\mathrm{dvol} = \int_M \frac{m}{2}\mathcal{E}_m\,\mathrm{dvol}\,.$$

O marco complexo ten unha maior dificultade. Antes de enunciar un primeiro resultado que permite dar un paso na dirección de calcular $\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,n}$, introducirase algún resultado e concepto. Comézase co anel de formas características. Sexan entón c_k a k-ésima clase de Chern, ch_k a k-ésima característica de Chern e Td_k a k-ésima clase de Todd. Finalmente, $T_cM := (TM, J)$ é o fibrado tanxente complexo asociado. O anel de formas características é

$$\mathfrak{C}_m := \mathbb{C}\left[\mathrm{ch}_1\left(T_cM\right), \ldots, \mathrm{ch}_{\mathfrak{m}}\left(T_cM\right), \mathrm{ch}_1(E,h), \ldots, \mathrm{ch}_{\mathfrak{m}}(E,h)\right].$$

Este pode ser descomposto en compoñentes homoxéneas,

$$\mathfrak{C}_m = \bigoplus_k \mathfrak{C}^{2k}_m \text{ onde } \mathfrak{C}^{2k}_m \subset \mathfrak{K}^{2k}_{m,2k}.$$

Agora introducirase notación adicional e mostrarase que os invariantes da traza do calor, $a_{m,n}(\Delta^{p,q}_{\mathcal{K}})$, non involucran as variables Θ_{α_0} nin $\bar{\Theta}_{\bar{\beta}_0}$.

Adóptase a notación xa introducida na ecuación (3.2). Sexa entón $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}} \subset S_{\mathfrak{m}}(\mathbb{C}) \times S_l(\mathbb{C})$ o subespazo formado polas matrices g e h que definen un produto interior definido positivo. Considéranse os seguintes subaneis de $\mathfrak{W}_m$:

$$\mathfrak{U}_m := C^\infty(\mathcal{U}_{\mathfrak{m}})[g_{\alpha_0\bar{\beta}_0/\alpha_1\ldots\alpha_j\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k}, h_{p\bar{q}/\alpha_1\ldots\alpha_j\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k}]_{j+k>0},$$

$$\mathfrak{V}_m := C^\infty(\mathcal{U}_{\mathfrak{m}})[g_{\alpha_0\bar{\beta}_0/\alpha_1\ldots\alpha_j\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k}, h_{p\bar{q}/\alpha_1\ldots\alpha_j\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k}, \Theta_{\alpha_0/\alpha_1\ldots\alpha_j\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k}, \bar{\Theta}_{\bar{\beta}_0/\alpha_1\ldots\alpha_j\bar{\beta}_1\ldots\bar{\beta}_k}]_{j+k>0},$$

onde en ambos aneis se omiten as variables Θ_{α_0} e $\bar{\Theta}_{\bar{\beta}_0}$. Ao igual que en anteriores ocasións, considéranse $\mathfrak{U}_{m,n} \subset \mathfrak{U}_m$ e $\mathfrak{V}_{m,n} \subset \mathfrak{V}_m$ os subespazos de peso n.

Agora tamén se eliminarán ditas variables no anel $\mathfrak{T}_m$, definido na ecuación (2.28). Denótase

$$\mathfrak{S}_m := \mathbb{C}[\mathrm{ch}_k(TM, J, g), \mathrm{ch}_k(E, h), d\Theta, d\bar{\Theta}] = \bigoplus_k \mathfrak{S}^n_m \subset \mathfrak{S}_m.$$

O motivo de non considerar ditas variables é consecuencia do seguinte lema.

Lema 3.9. *Tense que $a_{m,n}(\Delta^{p,q}_{\mathfrak{K}}) \in \mathfrak{V}$ ou, o que é o mesmo, en $a_{m,n}(\Delta^{p,q}_{\mathcal{K}}) \in \mathfrak{V}_{m,n}$ non se ven involucradas as variables Θ_{α_0} e $\bar{\Theta}_{\bar{\beta}_0}$.*

Proba. A proba deste lema pode verse con detalle na sección 6.2 de [2]. ■

Nótese que este lema que se acaba de ver permite ver que $a^{\mathrm{Dol}}_{m,n} \in \mathfrak{V}_{m,n}$. Agora enúnciase o seguinte teorema que é o análogo do Teorema (3.8), mais agora no marco Kähler.

Teorema 3.10. *Sexa $\mathcal{K} = (M, g, J, E, h)$, onde (M, g, J) é unha variedade Kähler e (E, h) é un fibrado vectorial hermitiano holomorfo sobre M. Ademais, equiparase dunha $(1, 0)$-forma pechada auxiliar, Θ.*

(1) Se $n < m - 2$,

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,n} = 0.$$

(2) Se $n = m - 2$,

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m-2} = \frac{-1}{4\pi(\mathfrak{m}-1)!} g\left(\mathrm{Td}(M, g, J) \wedge \mathrm{ch}(E, h) \wedge \omega, \Omega^{\mathfrak{m}-1}\right).$$

Aínda máis, existe $Q^1_{m,m-3} \in \mathfrak{K}^1_{m,m-3}$ de forma que

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m-2} = \frac{-1}{4\pi(\mathfrak{m}-1)!} g\left(\mathrm{Td}(M, g, J) \wedge \mathrm{ch}(E, h), \Omega^{\mathfrak{m}-1}\right) + \delta Q^1_{m,m-3}.$$

(3) Sendo $Q^1_{m,m-1} \in \mathfrak{K}^1_{m,m-1}$ e $R^m_m \in \mathfrak{C}^m_m$ unha forma característica, tense que

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m} = \frac{1}{\mathfrak{m}!} g\left(R^m_m, \Omega^{\mathfrak{m}}\right) + \delta Q^1_{m,m-1}.$$

Proba. Procédese coa demostración que se separa en tres partes correspondentes aos apartados que se queren ver.

➽ **Proba de (1):**

A proba deste apartado é completamente análoga á xa feita no marco real. Suponse que $n < m - 2$. O Lema 3.4 mostra que $r(\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,n}) = -(4\pi)^{-1} a^{\mathrm{Dol}}_{m-2,n}$ e o Teorema 2.30 que $a^{\mathrm{Dol}}_{m-2,n} = 0$. Agora, empregando o Lema 3.3, tense que $\ker(r : \mathfrak{K}^0_{m,n} \to \mathfrak{K}^0_{m-2,n}) = \{0\}$. En definitiva,

$$r(\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,n}) = -(4\pi)^{-1/2} a^{\mathrm{Dol}}_{m-2,n} \overset{(2.30)}{\Longrightarrow} r(\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,n}) = 0 \overset{(3.3)}{\Longrightarrow} \boxed{\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,n} = 0.}$$

➽ **Proba de (2):**
Emprégase o Lema 3.4 para ver que $r(\mathfrak{a}_{m,m-2}) = -(4\pi)^{-1}a^{\mathrm{Dol}}_{m-2,m-2}$ e, aplicando tamén o Teorema 2.30, obtense

$$r(\mathfrak{a}_{m,m-2}) = \frac{-(4\pi)^{-1}}{(\mathfrak{m}-1)!}g(\{\mathrm{Td}(T_cM)\wedge \mathrm{ch}(E)\wedge\omega\}_{m-2},\Omega^{\mathfrak{m}-1}).$$

Agora ben, tendo en conta que a aplicación restrición se define restrinxindo índices de m a $m-2$, tense que

$$\begin{aligned}&r\left(\tfrac{-(4\pi)^{-1}}{(\mathfrak{m}-1)!}g(\{\mathrm{Td}(T_cM)\wedge \mathrm{ch}(E)\wedge\omega\}_{m},\Omega^{\mathfrak{m}-1})\right)\\ &\qquad= \frac{-(4\pi)^{-1}}{(\mathfrak{m}-1)!}g(\{\mathrm{Td}(T_cM)\wedge \mathrm{ch}(E)\wedge\omega\}_{m-2},\Omega^{\mathfrak{m}-1})\end{aligned}$$

Polo Lema 3.3, tese que $r:\mathfrak{K}^0_{m,m-2}\to\mathfrak{K}^0_{m-2,m-2}$ é inxectiva, en consecuencia,

$$\begin{aligned}r(\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m-2}) &= r\left(\tfrac{-(4\pi)^{-1}}{(\mathfrak{m}-1)!}g(\{\mathrm{Td}(T_cM)\wedge \mathrm{ch}(E)\wedge\omega\}_{m},\Omega^{\mathfrak{m}-1})\right)\\ &\Rightarrow \boxed{\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m-2} = \frac{-(4\pi)^{-1}}{(\mathfrak{m}-1)!}g(\{\mathrm{Td}(T_cM)\wedge ch(E)\wedge\omega\}_{m},\Omega^{\mathfrak{m}-1}).}\end{aligned}$$

Para a segunda parte, tense en conta que por definición $\omega = 1 + d\Phi$ e que Td e ch son pechados, así,

$$\begin{aligned}\{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge\mathrm{ch}(E,h)\wedge\omega\}_{m-2} = {}& \{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge\mathrm{ch}(E,h)\}_{m-2}\\ &+d\{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge\mathrm{ch}(E,h)\wedge\Phi\}_{m-3}.\end{aligned}$$

Aplicando o produto interior por $\frac{1}{(\mathfrak{m}-1)!}\Omega^{\mathfrak{m}-1}$, que non é mais que o operador $\star$ de Hodge en dimensión complexa $\mathfrak{m}-1$, e multiplicando pola constante $(-4\pi)^{-1}$, tense que

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m-2} &= \tfrac{(-4\pi)^{-1}}{(\mathfrak{m}-1)!}g\left(\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge\mathrm{ch}(E,h)\wedge\omega,\Omega^{\mathfrak{m}-1}\right)\\ &= \tfrac{(-4\pi)^{-1}}{(\mathfrak{m}-1)!}g\left(\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge\mathrm{ch}(E,h),\Omega^{\mathfrak{m}-1}\right)\\ &\quad+(-4\pi)^{-1}\star\{d\{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge\mathrm{ch}(E,h)\wedge\Phi\}_{m-3}\}\\ &= \tfrac{(-4\pi)^{-1}}{(\mathfrak{m}-1)!}g\left(\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge\mathrm{ch}(E,h),\Omega^{\mathfrak{m}-1}\right)\\ &\quad+\delta\left((-4\pi)^{-1}\star\{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge\mathrm{ch}(E,h)\wedge\Phi\}_{m-3}\right).\end{aligned}$$

Deste xeito,

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m-2} = \frac{(-4\pi)^{-1}}{(\mathfrak{m}-1)!}g\left(\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge\mathrm{ch}(E,h),\Omega^{\mathfrak{m}-1}\right)+\delta Q^1_{m-2,m-3},$$

onde $Q^1_{m-2,m-3} = (-4\pi)^{-1}\star\{\mathrm{Td}(M,g,J)\wedge\mathrm{ch}(E,h)\wedge\Phi\}_{m-3}$. Agora ben, como $r\delta = \delta r$ e r está ben definida, tense que se pode levantar $Q^1_{m-2,m-3}\in\mathfrak{K}^1_{m-2,m-3}$ a $\mathfrak{K}^1_{m,m-3}$. En definitiva, existirá $Q^1_{m,m-3} \in \mathfrak{K}^1_{m,m-3}$ tal que

$$\boxed{\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m-2} = \frac{(-4\pi)^{-1}}{(\mathfrak{m}-1)!} g\left(\mathrm{Td}(M,g,J) \wedge \mathrm{ch}(E,h), \Omega^{\mathfrak{m}-1}\right) + \delta Q^1_{m,m-3}.}$$

➽ **Proba de (3):**
Os mesmos argumentos feitos no apartado (3) do Teorema 3.8 repítense agora no marco Kähler.

O Lema 3.4 afirma que

$$r(\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m}) = -(4\pi)^{-1} a^{\mathrm{Dol}}_{m-2,m} \in \mathfrak{K}^0_{m-2,m},$$

e a ecuación (2.5) mostra que $\int_M a^{\mathrm{Dol}}_{m-2,m}\ \mathrm{dvol}(g) = 0$. Así,

$$\int_M r(\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m})\ \mathrm{dvol}(g) = -(4\pi)^{-1} \int_M a^{\mathrm{Dol}}_{m-2,m}\ \mathrm{dvol}(g) = 0.$$

Deste xeito, tomando como $P(x,g,\Theta) = r(\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m})$, estase nas hipóteses do Lema 3.7. Entón,

$$r(\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m}) = \delta \tilde{Q}^1_{m-2,m-1},$$

con $\tilde{Q}^1_{m-2,m-1} \in \mathfrak{V}^1_{m-2,m-1}$. Tómese $\tilde{Q}^1_{m,m-1}$ de forma que $r(\tilde{Q}^1_{m,m-1}) = Q^1_{m-2,m-1}$. Así, como $\delta r = r\delta$, emprégase o Lema 3.3 para ver que

$$\begin{aligned} r(\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m}) &= \delta Q^1_{m-2,m-1} \\ &\Rightarrow \mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m} - \delta\tilde{Q}^1_{m,m-1} \in \ker(r\colon \mathfrak{K}^0_{m,m} \longrightarrow \mathfrak{K}^0_{m-1,m}) \cap \mathfrak{V}_{m,m} = \star\{\mathfrak{T}^m_m\} \cap \mathfrak{V}_{m,m}. \end{aligned}$$

Agora ben, $\star\{\mathfrak{T}^m_m\} \cap \mathfrak{V}_{m,m} = \mathfrak{S}^m_m$ e, como $\mathfrak{S}^m_m$ está formado por variables pechadas, tense que se pode descompoñer como

$$\mathfrak{S}^m_m = \mathfrak{C}^m_m + d\{\Theta \wedge \mathfrak{S}^{m-2}_m + \bar{\Theta} \wedge \mathfrak{S}^{m-2}_m\}.$$

Empregando o operador estrela de Hodge,

$$\star\mathfrak{S}^m_m = \star\mathfrak{C}^m_m + \delta \star \{\Theta \wedge \mathfrak{S}^{m-2}_m + \bar{\Theta} \wedge \mathfrak{S}^{m-2}_m\}.$$

O feito de que

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m} - \delta\tilde{Q}^1_{m,m-1} \in \star\mathfrak{S}^m_m = \star\mathfrak{C}^m_m + \delta \star \{\Theta \wedge \mathfrak{S}^{m-2}_m + \bar{\Theta} \wedge \mathfrak{S}^{m-2}_m\},$$

equivale a que

$$\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{m,m} \in \star\mathfrak{C}^m_m + \delta\left(\star\{\Theta \wedge \mathfrak{S}^{m-2}_m + \bar{\Theta} \wedge \mathfrak{S}^{m-2}_m\} + \delta\tilde{Q}^1_{m,m-1}\right).$$

Finalmente, tendo en conta que o operador $\star$ de Hodge verifica que

$$\star\{R^m_m\} = \frac{1}{\mathfrak{m}!} g(R^m_m, \Omega^{\mathfrak{m}}),$$

sendo Ω a forma Kähler de $\mathcal{K}$ e $R_m^m \in \mathfrak{C}_m^m$, tense que existirán $R_m^m \in \mathfrak{C}_m^m$ e $Q_{m,m-1}^1 \in \mathfrak{K}_{m,m-1}^1$ de xeito que

$$\boxed{\mathfrak{a}_{m,m}^{\mathrm{Dol}} = \frac{1}{\mathfrak{m}!} g\left(R_m^m, \Omega^{\mathfrak{m}}\right) + \delta Q_{m,m-1}^1.}$$

■

Vese entón que para eliminar ω débese introducir un termo de diverxencia adicional (apartado (2) do teorema anterior). Ademais, o apartado (3) deste último teorema mostra que $\int_M \mathfrak{a}_{m,n}^{\mathrm{Dol}}$ dvol é un número característico que non depende da estrutura dada no marco Kähler. En efecto,

$$\int_M \mathfrak{a}_{m,m}^{\mathrm{Dol}} \,\mathrm{dvol} = \int_M \left(\frac{1}{\mathfrak{m}!} g\left(R_m^m, \Omega^{\mathfrak{m}}\right) + \delta Q_{m,m-1}^1 \right) \mathrm{dvol} = \int_M \frac{1}{\mathfrak{m}!} g\left(R_m^m, \Omega^{\mathfrak{m}}\right) \mathrm{dvol} \in \mathfrak{C}_m^m. \tag{3.5}$$

O que se trata agora é de intentar calcular R_m^m. Para iso, primeiro introdúcense uns resultados previos ao principal.

Teorema 3.11. *Sexa E un fibrado vectorial holomorfo sobre unha variedade Kähler $\mathcal{K}$, Δ_E o laplaciano complexo con coeficientes en E e Δ^n o laplaciano real. Entón,*

(1) $\Delta_E^{p,q} = \Delta_{\Lambda^{p,0}\otimes E}^{0,q}$.

(2) Existe un isomorfismo linear conxugado que intercambia $\Delta_E^{p,q}$ e $\Delta_{E^*}^{m-p,m-q}$.

(3) A conxugación complexa intercambia $\Delta_E^{p,q}$ e $\Delta_E^{q,p}$. Ademais $\Delta^n = \bigoplus_{p+q=n} \Delta_E^{p,q}$.

(4) Se $m = 2$, entón

$$\mathrm{index}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})) = \int_M \{\frac{1}{2} c_1(T_c M)\,\mathrm{ch}_0(E) + c_1(E)\}\,\mathrm{dvol}\,.$$

(5) Se $m = 4$,

$$\mathrm{index}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})) = \int_M \{\mathrm{Td}_2(T_c M)\,\mathrm{ch}_0(E) + \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}_1(T_c M)\,\mathrm{ch}_1(E) + \mathrm{ch}_2(E)\}\,\mathrm{dvol}\,.$$

Proba. A afirmación (1) é consecuencia inmediata da definición. No caso de (2) e (3), trátase da dualidade de Serre e, finalmente. as afirmacións (4) e (5), séguense do teorema de Riemann-Roch (Teorema 2.9). ■

Lema 3.12. *Sexan $\mathcal{K}_1 = (M_1, g_1)$ e $\mathcal{K}_2 = (M_2, g_2)$ variedades de dimensións m_1 e m_2, respectivamente. Sexa $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 = (M, g)$ e $m = m_1 + m_2$ a dimensión de $\mathcal{K}$. Entón,*

$$\int_M \mathfrak{a}_{m,m}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} = \int_{M_1} \mathfrak{a}_{m_1,m_1}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} \int_{M_2} a_{m_2,m_2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} + \int_{M_1} a_{m_1,m_1}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} \int_{M_2} \mathfrak{a}_{m_2,m_2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol}\,.$$

Proba. Por definición

$$\int_M a_{m,n}(\Delta_{\mathcal{K}}^{0,p})\ \mathrm{dvol} = \sum_{p_1+p_2=p} \sum_{n_1+n_2=n} \int_{M_1} a_{m_1,n_1}(\Delta_{\mathcal{K}_1}^{0,p_1})\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} a_{m_2,n_2}(\Delta_{\mathcal{K}_2}^{0,p_2})\ \mathrm{dvol}\,.$$

Así, sumando en p e multiplicando por $(-1)^p s^p$,

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_M \mathfrak{A}_{m,n}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})(s)\ \mathrm{dvol} = \int_M \sum_p (-1)^p s^p a_{m,n}(\Delta_{\mathcal{K}}^{0,p}) \\ =\ & \textstyle\sum_p \sum_{p_1+p_2=p} \sum_{n_1+n_2=n} \int_{M_1} (-1)^{p_1} s^{p_1} a_{m_1,n_1}(\Delta_{\mathcal{K}_1}^{0,p_1})\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} (-1)^{p_2} s^{p_2} a_{m_2,n_2}(\Delta_{\mathcal{K}_2}^{0,p_2})\ \mathrm{dvol} \\ =\ & \textstyle\sum_{n_1+n_2=n} \int_{M_1} \mathfrak{A}_{m_1,n_1}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_1)(s)\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} \mathfrak{A}_{m_2,n_2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_2)(s)\ \mathrm{dvol}\,. \end{aligned}$$

Polo tanto,

$$\int_M \mathfrak{A}_{m,n}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})(s)\ \mathrm{dvol} = \sum_{n_1+n_2=n} \int_{M_1} \mathfrak{A}_{m_1,n_1}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_1)(s)\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} \mathfrak{A}_{m_2,n_2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_2)(s)\ \mathrm{dvol}\,.$$

Se agora se deriva respecto a s e se avalía en $s = 1$, tendo en conta a ecuación (3.1), chegase a que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_M \mathfrak{a}_{m,m}^{\mathrm{Dol}}\ \mathrm{dvol} &= \textstyle\sum_{n_1+n_2=n} \int_{M_1} \mathfrak{a}_{m_1,n_1}^{\mathrm{Dol}}\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} a_{m_2,n_2}^{\mathrm{Dol}}\ \mathrm{dvol} + \int_{M_1} a_{m_1,n_1}^{\mathrm{Dol}}\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} \mathfrak{a}_{m_2,n_2}^{\mathrm{Dol}}\ \mathrm{dvol} \\ &= \textstyle\int_{M_1} \mathfrak{a}_{m_1,m_1}^{\mathrm{Dol}}\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} a_{m_2,m_2}^{\mathrm{Dol}}\ \mathrm{dvol} + \int_{M_1} a_{m_1,m_1}^{\mathrm{Dol}}\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} \mathfrak{a}_{m_2,m_2}^{\mathrm{Dol}}\ \mathrm{dvol}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade é consecuencia de ter en conta que $a_{m_1,n_1}^{\mathrm{Dol}} = 0$, se $n_1 \neq m_1$. ■

Ademais, tamén se ten que os invariantes da traza da calor son aditivos con respecto ás sumas directas. É dicir, se $\mathcal{K} = (M, g, J, E_1 \oplus E_2, h_1 \oplus h_2)$, $\mathcal{K}_1 = (M, g, J, E_1, h_1)$ e $\mathcal{K}_2 = (M, g, J, E_2, h_2)$ entón,

$$a_{m,n}(\Delta_{\mathcal{K}}^{p,q}) = a_{m,n}(\Delta_{\mathcal{K}_1}^{p,q}) + a_{m,n}(\Delta_{\mathcal{K}_2}^{p,q}).$$

Estase xa en condicións de enunciar e probar o seguinte resultado.

Teorema 3.13. *Emprégase o Teorema 3.10 para expresar* $\mathfrak{a}_{m,m}^{\mathrm{Dol}} = \frac{1}{m!} g\,(R_m^m, \Omega^{\mathfrak{m}}) + \delta Q_{m,m-1}^1$ *onde* $Q_{m,m-1}^1 \in \mathfrak{K}_{m,m-1}^1$ *e con* $R_m^m \in \mathfrak{C}_m^m$. *Sexa* $\mathcal{K} = (M, g, J, E, h)$, *onde* (M, g, J) *é unha variedade Kähler e* (E, h) *un fibrado vectorial hermitiano. Así,*

(1) Se $m = 2$,

$$R_2^2 = \frac{1}{3} c_1(T_c M)\,\mathrm{ch}_0(E) + \frac{1}{2} c_1(E).$$

(2) Se $m = 4$,

$$R_4^4 = \left(\mathrm{Td}_2 + \frac{1}{24} c_1^2\right)(T_c M)\,\mathrm{ch}_0(E) + \frac{7}{12} c_1\,(T_c M)\, c_1(E) + \mathrm{ch}_2(E).$$

Proba. Faranse os dous apartados por separado e en ambos casos a clave será ter en conta que tanto $a_{m,n}^{\mathrm{Dol}}$ como $\mathfrak{a}_{m,m}^{\mathrm{Dol}}$ poden ser expresados en termos de clases características, onde solo aparece a característica de Chern, ch.

➻ **Proba de 1**

Suponse que $m = 2$. Nótese que, polo comentado na ecuación (3.5), para calcular R_2^2 pódese no seu lugar calcular

$$\int_M \mathfrak{a}_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol}\,.$$

Por definición

$$\mathfrak{a}_{2,2}^{\mathrm{Dol}} := \sum_p (-1)^p p \cdot a_{2,2}(\Delta_{\Theta,\mathcal{K}}) = 0 \cdot a_{2,2}(\Delta_{\Theta,\mathcal{K}}^{0,0}) - 1 \cdot a_{2,2}(\Delta_{\Theta,\mathcal{K}}^{0,1}) = -a_{2,2}(\Delta_{\Theta,\mathcal{K}}^{0,1}).$$

Ao igual que antes, Δ_E é o laplaciano complexo con coeficientes en E. Entón, existirán constantes α^k e β^k tales que

$$a_{2,2}\left(\Delta_E^{0,q}\right) = \alpha^q c_1\left(T_c M\right)\mathrm{ch}_0(E) + \beta^q c_1(E), \tag{3.6}$$

Agora ben, como $\Lambda^{1,0}(M)$ é o dual de $T_c M$, tense que $c_1\left(\Lambda^{1,0}M\right) = -c_1(T_c M)$. O obxectivo será entón calcular os coeficientes α^1 e β^1. Para iso, en primeiro lugar, suponse que $\dim(E) = 1$ e emprégase o Teorema 3.11 para calcular,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_M a_{2,2}\left(\Delta_E^{0,1}\right)\mathrm{dvol} &= \textstyle\int_M \left\{\alpha^1 c_1\left(T_c M\right)\mathrm{ch}_0(E) + \beta^1 c_1(E)\right\}\mathrm{dvol}\\
&= \textstyle\int_M \left\{\alpha^1 c_1\left(T_c M\right)\dim(E) + \beta^1 c_1(E)\right\}\mathrm{dvol}\\
&= \textstyle\int_M \left\{\alpha^1 c_1\left(T_c M\right) + \beta^1 c_1(E)\right\}\mathrm{dvol}\\
&\overset{(2)}{=} \textstyle\int_M a_{2,2}\left(\Delta_{E^*}^{1,0}\right)\mathrm{dvol} \overset{(1)}{=} \int_M a_{2,2}\left(\Delta_{\Lambda^{1,0}(M)\otimes E^*}^{0,0}\right)\mathrm{dvol}\\
&= \textstyle\int_M \left\{\alpha^0 c_1\left(T_c M\right) + \beta^0 c_1\left(\Lambda^{1,0}(M)\right) + \beta^0 c_1\left(E^*\right)\right\}\mathrm{dvol}\\
&= \textstyle\int_M \left\{\left(\alpha^0 - \beta^0\right) c_1\left(T_c M\right) - \beta^0 c_1(E)\right\}\mathrm{dvol}\,.
\end{aligned}$$

En particular, chégase a que

$$\int_M \left\{\alpha^1 c_1\left(T_c M\right) + \beta^1 c_1(E)\right\}\mathrm{dvol} = \int_M \left\{\left(\alpha^0 - \beta^0\right) c_1\left(T_c M\right) - \beta^0 c_1(E)\right\}\mathrm{dvol},$$

e polo tanto $\alpha^1 = \alpha^0 - \beta^0$ e $\beta^1 = -\beta^0$.

Agora, empregando a ecuación (2.5) e de novo o Teorema 3.11,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_M \left\{\frac{1}{2}c_1\left(T_c M\right) + c_1(E)\right\}\mathrm{dvol} &\overset{(4)}{=} \mathrm{index}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}))\\
&= \textstyle\int_M a_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol}\\
&= \textstyle\int_M \left\{a_{2,2}\left(\Delta_E^{0,0}\right) - a_{2,2}\left(\Delta_E^{0,1}\right)\right\}\mathrm{dvol}\\
&= \textstyle\int_M \left\{\left(\alpha^0 - \alpha^1\right) c_1\left(T_c M\right) + \left(\beta^0 - \beta^1\right) c_1(E)\right\}\mathrm{dvol}\,.
\end{aligned}$$

Así, tendo en conta que xa se viu que $\alpha^1 = \alpha^0 - \beta^0$ e $\beta^1 = -\beta^0$,

$$\int_M \left\{\frac{1}{2}c_1\left(T_c M\right) + c_1(E)\right\}\mathrm{dvol} = \int_M \left\{\beta^0 c_1\left(T_c M\right) + 2\beta^0 c_1(E)\right\}\mathrm{dvol}\,.$$

En consecuencia, tense que $\beta_0 = \frac{1}{2}$ e polo tanto que $\boxed{\beta_1 = -\frac{1}{2}.}$

Para calcular agora α_0 e α_1, considerarase $\mathbb{S}^2$ a esfera unidade en $\mathbb{R}^3$ coa métrica usual e a estrutura complexa. Pódese ver que $c_1(T_c\mathbb{S}^2) = \frac{\tau}{4\pi}$. Ademais, no caso de que E sexa trivial, McKean e Singer, en [13], calcularon $a_{2,2}(\Delta^n)$, vendo que en particular

$$a_{2,2}(\Delta^0) = \frac{\tau}{24\pi} \quad \text{e} \quad a_{2,2}(\Delta^1) = \frac{-4\tau}{24\pi}.$$

Deste xeito, considérase E trivial e, empregando isto último xunto co Teorema 3.11, tense que

$$a_{2,2}\left(\Delta^{0,0}\right) \overset{(3)}{=} a_{2,2}\left(\Delta^0\right) = \frac{\tau}{24\pi} = \frac{1}{6}c_1\left(T_c\mathbb{S}^2\right) = \alpha_0 c_1\left(T_c\mathbb{S}^2\right),$$
$$a_{2,2}\left(\Delta^{0,1}\right) \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}a_{2,2}\left(\Delta^1\right) = \frac{1}{2}\frac{(-4\tau)}{24\pi} = -\frac{1}{3}c_1\left(T_c\mathbb{S}^2\right) = \alpha_1 c_1\left(T_c\mathbb{S}^2\right).$$

En conclusión, $\alpha_0 = \frac{1}{6}$ e $\boxed{\alpha_1 = -\frac{1}{3}.}$ Empregase o visto ata agora para finalmente obter

$$\begin{aligned} \textstyle\int_M \mathfrak{a}_{2,2}^{\text{Dol}}\,\text{dvol} &= \textstyle\int_M -a_{2,2}(\Delta^{0,1}_{\Theta,\mathcal{K}})\,\text{dvol} = \int_M \left\{-\alpha^1 c_1\left(T_cM\right)\text{ch}_0(E) - \beta^1 c_1(E)\right\}\,\text{dvol} \\ &= \textstyle\int_M \left\{\frac{1}{3}c_1\left(T_cM\right)\text{ch}_0(E) + \frac{1}{2}c_1(E)\right\}\,\text{dvol}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

o que proba que

$$\boxed{R_2^2 = \frac{1}{3}c_1\left(T_cM\right)\text{ch}_0(E) + \frac{1}{2}c_1(E).}$$

➽ **Proba de 2**

Suponse que $m = 4$ e que $\mathcal{K} = (M, g, J, E, h)$ é unha superficie complexa (dimensión complexa igual a 2). Así, existirán constantes α e β e ademais unha clase característica $P_2\left(T_cM\right)$ de xeito que

$$\int_M \mathfrak{a}_{4,4}^{\text{Dol}}\,\text{dvol} = \int_M \left\{P_2\left(T_cM\right)\text{ch}_0(E) + \alpha c_1\left(T_cM\right)c_1(E) + \beta\,\text{ch}_2(E)\right\}\,\text{dvol}\,. \tag{3.8}$$

Co mesmo razoamento que no apartado anterior, isto permitirá calcular R_4^4. Para o calculo dos coeficientes, escollerase de formas concretas a variedade $\mathcal{K}$.

Para β, considérase $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$, onde $\mathcal{K}_i$ son toros planos e (E_i, h_i) son fibrados en liña, con $\int_{M_i} c_1(E_i)\,\text{dvol} \neq 0$ para $i = 1, 2$. Así,

$$\int_M c_1\left(T_c(M)\right)\,\text{dvol} = 0, \tag{3.9}$$

$$\int_M \left\{P_2\left(T_cM\right)\text{ch}_0(E)\right\}\,\text{dvol} = 0, \tag{3.10}$$

$$\int_M \text{ch}_2\left(E_1 \otimes E_2\right)\,\text{dvol} = \int_{M_1} c_1\left(E_1\right)\,\text{dvol} \cdot \int_{M_2} c_1\left(E_2\right)\,\text{dvol}\,. \tag{3.11}$$

Agora, empregando as ecuacións (3.9) e (3.10) na ecuación (3.8) tense que

$$\int_M \mathfrak{a}_{4,4}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} = \int_M \beta\,\mathrm{ch}_2(E_1 \otimes E_2)\,\mathrm{dvol}\,.$$

Empregando o Lema (3.12) e a ecuación (3.11),

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{M_1} \mathfrak{a}_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol}\int_{M_2} a_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} + {} & \textstyle\int_{M_1} a_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol}\int_{M_2} \mathfrak{a}_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} = \int_M \mathfrak{a}_{4,4}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol}\\ & \textstyle= \int_M \beta\,\mathrm{ch}_2(E_1 \otimes E_2)\,\mathrm{dvol}\\ & \textstyle= \beta \int_{M_1} c_1(E_1)\,\mathrm{dvol} \cdot \int_{M_2} c_1(E_2)\,\mathrm{dvol}\,.\end{aligned}$$

Tendo en conta nas ecuacións (3.6) e (3.7) a ecuación (3.9), conséguese afirmar que

$$\int_{M_i} \mathfrak{a}_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} = \frac{1}{2}\int_{M_i} c_1(E_i)\,\mathrm{dvol} \quad \text{onde } i = 1, 2,$$

$$\int_{M_i} a_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} = \int_{M_i} c_1(E_i)\,\mathrm{dvol} \quad \text{onde } i = 1, 2.$$

En definitiva, chegase a que

$$\begin{aligned}\textstyle\beta \int_{M_1} c_1(E_1)\,\mathrm{dvol} \cdot \int_{M_2} c_1(E_2)\,\mathrm{dvol} = {} & \textstyle\frac{1}{2}\int_{M_1} c_1(E_1)\,\mathrm{dvol} \cdot \int_{M_2} c_1(E_2)\,\mathrm{dvol}\\ & \textstyle+ \int_{M_1} c_1(E_1)\,\mathrm{dvol} \cdot \frac{1}{2}\int_{M_2} c_1(E_2)\,\mathrm{dvol}\\ = {} & \textstyle\int_{M_1} c_1(E_1)\,\mathrm{dvol} \cdot \int_{M_2} c_1(E_2)\,\mathrm{dvol}\,.\end{aligned}$$

En consecuencia, tense que $\boxed{\beta = 1.}$

Agora, para obter o valor de α, suponse $M_1 = \mathbb{S}^2$, E_1 trivial, M_2 o toro plano e finalmente que $\int_{M_2} c_1(E_2) \neq 0$. Deste xeito, conséguese que

$$P_2(T_cM)ch_0(E) = P_2(T_cM_1 \oplus \mathbf{1})\,\mathrm{ch}_0(E) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{ch}_2(E) = \mathrm{ch}_2(E_2) = 0.$$

Procedendo de forma análoga ao xa feito no caso anterior, calcúlase,

$$\begin{aligned}\textstyle\alpha \int_{M_1} c_1(T_cM_1)\,\mathrm{dvol}\int_{M_2} c_1(E_2)\,\mathrm{dvol} & \textstyle= \int_M \mathfrak{a}_{4,4}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol}\\ & \textstyle= \int_{M_1} \mathfrak{a}_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} \cdot \int_{M_2} a_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol}\\ & \textstyle\quad + \int_{M_1} a_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} \cdot \int_{M_2} \mathfrak{a}_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol}\\ & \textstyle= \frac{1}{3}\int_{M_1} c_1(T_cM_1)\,\mathrm{dvol} \cdot \int_{M_2} c_1(E_2)\,\mathrm{dvol}\\ & \textstyle\quad + \frac{1}{2}\int_{M_1} c_1(T_cM_1)\,\mathrm{dvol} \cdot \frac{1}{2}\int_{M_2} c_1(E_2)\,\mathrm{dvol}\\ & \textstyle= (\frac{1}{3} + \frac{1}{4})\int_{M_1} c_1(T_cM_1)\,\mathrm{dvol} \cdot \int_{M_2} c_1(E_2)\,\mathrm{dvol}\,.\end{aligned}$$

Como consecuencia, $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}.}$

Tan só queda calcular $P_2(T_cM)\,\mathrm{ch}_0(E)$. Para iso considérase $E = \mathbf{1} \oplus \Lambda^{0,2}(T_cM)$. Empregando a dualidade de Serre, obtense o seguinte:

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_{4,4}^{\mathrm{Dol}}\ (\mathcal{K}) & = 0 \cdot a_{4,4}\left(\Delta^{0,0}_{\mathbf{1}\oplus\Lambda^{2,0}}\right) - a_{4,4}\left(\Delta^{0,1}_{\mathbf{1}\oplus\Lambda^{2,0}}\right) + 2a_{4,4}\left(\Delta^{0,2}_{\mathbf{1}\oplus\Lambda^{2,0}}\right)\\ & = -a_{4,4}\left(\Delta^{2,1}_{\mathbf{1}\oplus(\Lambda^{2,0})^*}\right) + 2a_{4,4}\left(\Delta^{2,0}_{\mathbf{1}\oplus(\Lambda^{2,0})^*}\right)\\ & = -a_{4,4}\left(\Delta^{0,1}_{\Lambda^{2,0}\oplus\mathbf{1}}\right) + 2a_{4,4}\left(\Delta^{0,0}_{\Lambda^{2,0}\oplus\mathbf{1}}\right).\end{aligned}$$

Súmase agora a liña dous e tres da anterior ecuación, tendo ademais en conta que polo Lema 3.11 se ten que $a_{4,4}\left(\Delta^{2,1}_{\mathbf{1}\oplus(\Lambda^{2,0})^*}\right) = a_{4,4}\left(\Delta^{0,1}_{E}\right)$ e mais que $a_{4,4}\left(\Delta^{2,0}_{\mathbf{1}\oplus(\Lambda^{2,0})^*}\right) = a_{4,4}\left(\Delta^{0,2}_{E}\right)$, obtendo que

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{4,4}(\mathcal{M}) &= -a_{4,4}\left(\Delta^{2,1}_{\mathbf{1}\oplus(\Lambda^{2,0})^*}\right) + 2a_{4,4}\left(\Delta^{2,0}_{\mathbf{1}\oplus(\Lambda^{2,0})^*}\right) - a_{4,4}\left(\Delta^{0,1}_{\Lambda^{2,0}\oplus\mathbf{1}}\right) + 2a_{4,4}\left(\Delta^{0,0}_{\Lambda^{2,0}\oplus\mathbf{1}}\right) \\ &= 2a_{4,4}\left(\Delta^{0,0}_{E}\right) - 2a_{4,4}\left(\Delta^{0,1}_{E}\right) + 2a_{4,4}\left(\Delta^{0,2}_{E}\right) \\ &= 2a^{\mathrm{Dol}}_{4,4}(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Agora substitúese o que xa se sabe na ecuación (3.8), obtendo

$$\int_M \mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{4,4}\ \mathrm{dvol} = \int_M \left\{P_2\left(T_cM\right)\mathrm{ch}_0(E) + \frac{7}{12}c_1\left(T_cM\right)c_1(E) + \mathrm{ch}_2(E)\right\}\mathrm{dvol}\,. \tag{3.12}$$

Tendo en conta o que se acaba de ver de que $\mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{4,4}(\mathcal{M}) = a^{\mathrm{Dol}}_{4,4}(\mathcal{M})$, o Teorema 3.11 apartado (5) a ecuación (2.5), a ecuación (3.12) e que $\mathrm{ch}_1 = c_1$, chégase a que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_M \mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{4,4}\ \mathrm{dvol} &= \textstyle\int_M \left\{P_2\left(T_cM\right)\mathrm{ch}_0(E) + \frac{7}{12}c_1\left(T_cM\right)c_1(E) + \mathrm{ch}_2(E)\right\}\mathrm{dvol} \\ &= \textstyle\int_M a^{\mathrm{Dol}}_{4,4}\ \mathrm{dvol} \overset{(2.5)}{=} \mathrm{index}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})) \\ &\overset{(3.11)}{=} \textstyle\int_M \{\mathrm{Td}_2(T_cM)\,\mathrm{ch}_0(E) + \frac{1}{2}c_1(T_cM)c_1(E) + \mathrm{ch}_2(E)\}\ \mathrm{dvol}\,. \end{aligned}$$

Esto quere dicir que

$$\begin{aligned} &\int_M \left\{P_2\left(T_cM\right)\mathrm{ch}_0(E) + \frac{7}{12}c_1\left(T_cM\right)c_1(E) + \mathrm{ch}_2(E)\right\}\mathrm{dvol} \\ &= \int_M \{\mathrm{Td}_2(T_cM)\,\mathrm{ch}_0(E) + \frac{1}{2}c_1(T_cM)c_1(E) + \mathrm{ch}_2(E)\}\ \mathrm{dvol}\,. \end{aligned}$$

Así,

$$P_2\left(T_cM\right)\mathrm{ch}_0(E) = \mathrm{Td}_2(T_cM)\,\mathrm{ch}_0(E) - \frac{1}{12}c_1(T_cM)c_1(E).$$

Empregando agora que $\mathrm{ch}_0(E) = 2$ e que $c_1(E) = -c_1(T_cM)$,

$$P_2\left(T_cM\right)2 = \mathrm{Td}_2(T_cM)2 + \frac{1}{12}c_1^2(T_cM) \Rightarrow \boxed{P_2\left(T_cM\right) = \mathrm{Td}_2(T_cM) + \frac{1}{24}c_1^2(T_cM).}$$

En definitiva, chégase a que

$$\int_M \mathfrak{a}^{\mathrm{Dol}}_{4,4}\ \mathrm{dvol} = \int_M \left\{\left(\mathrm{Td}_2 + \frac{1}{24}c_1^2\right)\left(T_cM\right)\mathrm{ch}_0(E) + \frac{7}{12}c_1\left(T_cM\right)c_1(E) + \mathrm{ch}_2(E)\right\}\mathrm{dvol}\,.$$

En consecuencia

$$\boxed{R^4_4 = \left(\mathrm{Td}_2 + \frac{1}{24}c_1^2\right)\left(T_cM\right)\mathrm{ch}_0(E) + \frac{7}{12}c_1\left(T_cM\right)c_1(E) + \mathrm{ch}_2(E).}$$

■

Para dimensións superiores (dimensión complexa maior que 3), o problema segue aberto. A continuación expóñense dous casos particulares onde, empregando o xa probado, se pode ver de forma sinxela cal é a expresión de R_m^m.

Teorema 3.14. *De novo, emprégase o Teorema 3.10 para expresar* $\mathfrak{a}_{m,m}^{\mathrm{Dol}} = \frac{1}{m!} g\left(R_m^m, \Omega^{\mathfrak{m}}\right) + \delta Q_{m,m-1}^1$ *onde* $Q_{m,m-1}^1 \in \mathfrak{K}_{m,m-1}^1$ *e con* $R_m^m \in \mathfrak{C}_m^m$. *Mais agora, suponse que* $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \cdots \times \mathcal{K}_{\mathfrak{m}}$, *onde* $\mathcal{K}_i = (M_i, g_i, J_i)$ *son superficies de Riemann e* (E_i, h_i) *son fibrados en liña hermitianos.*

(1) Se todos os $\mathcal{K}_i = (M_i, g_i, J_i)$ *son toros planos, entón*

$$R_m^m = \frac{1}{2}\mathfrak{m} a_{m,m}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}) = \frac{1}{2}\mathfrak{m}\, \mathrm{ch}_{\mathfrak{m}}(E).$$

(2) No caso de ser todos os (E_i, h_i) *triviais, tense que*

$$R_m^m = \frac{2}{3}\mathfrak{m} a_{m,m}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}) = \frac{2}{3}\mathfrak{m}\, \mathrm{Td}_{\mathfrak{m}}\left(T_c M\right).$$

Proba. Próbanse os dous apartados por separado.

➽ **Proba de (1):**
Sexa $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \cdots \times \mathcal{K}_{\mathfrak{m}}$ con $\mathcal{K}_i = (M_i, g_i, J_i)$ toros planos de dimensión real 2 e (E_i, h_i) fibrados hermitianos sobre M_i. Sexa $E = E_1 \otimes \cdots \otimes E_{\mathfrak{m}}$. Así, tense que $\mathrm{ch}_{\mathfrak{m}}(E) = c_1(E_1) \dots c_1(E_{\mathfrak{m}})$. Por unha banda, tendo en conta que $c_1(T_c M_i) = 0$, empregando a ecuación (2.5) e o apartado (4) do Lema 3.11,

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{M_i} a_{2,2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_i)\ \mathrm{dvol} &\overset{(2.5)}{=} \mathrm{index}(\mathcal{C}_{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_i)) \\ &\overset{(3.11)}{=} \textstyle\int_{M_i} \left\{ \frac{1}{2} c_1(T_c M_i)\, \mathrm{ch}_0(E) + c_1(E_i) \right\} \mathrm{dvol} = \int_{M_i} c_1(E_i)\ \mathrm{dvol}\,. \end{aligned}$$

Así,

$$\int_M a_{22}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})\ \mathrm{dvol} = \prod_i \int_{M_i} a_{22}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_i)\ \mathrm{dvol} = \prod_i \int_{M_i} c_1(E_i)\ \mathrm{dvol}\,. \tag{3.13}$$

Por indución, pódese xeneralizar a fórmula dada no Lema 3.12 para un conxunto numerable de produtos. Obtendo así que se $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \cdots \times \mathcal{K}_n$ é un produto de variedades de dimensións m_i, onde a dimensión de $\mathcal{K}$ é $m = m_1 + \cdots + m_n$, entón

$$\begin{aligned} \textstyle\int_M \mathfrak{a}_{m,m}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})\ \mathrm{dvol} &= \textstyle\int_{M_1} \mathfrak{a}_{m_1,m_1}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_1)\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} a_{m_2,m_2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_2)\ \mathrm{dvol} \cdots \int_{M_n} a_{m_n,m_n}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_n)\ \mathrm{dvol} \\ &\quad + \textstyle\int_{M_1} a_{m_1,m_1}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_1)\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} \mathfrak{a}_{m_2,m_2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_2)\ \mathrm{dvol} \cdots \int_{M_n} a_{m_n,m_n}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_n)\ \mathrm{dvol} \\ &\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\quad + \textstyle\int_{M_1} a_{m_1,m_1}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_1)\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} a_{m_2,m_2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_2)\ \mathrm{dvol} \cdots \int_{M_n} \mathfrak{a}_{m_n,m_n}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_n)\ \mathrm{dvol}\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

No teorema anterior chegábase a que

$$\int_{M_i} \mathfrak{a}_{2,2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_i)\ \mathrm{dvol} = \frac{1}{2}\int_{M_i} c_1\left(E_i\right)\ \mathrm{dvol},$$

sendo $\mathcal{K}_i$ toros planos. Ademais xa se viu que

$$\int_{M_i} a_{2,2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_i)\ \mathrm{dvol} = \int_{M_i} c_1(E_i)\ \mathrm{dvol}\,.$$

Pois ben, empregando isto mais a ecuación (3.14) para o caso particular que atinxe,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_M \mathfrak{a}_{m,m}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})\ \mathrm{dvol} \quad &= \textstyle\int_{M_1} \mathfrak{a}_{m_1,m_1}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_1)\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} a_{m_2,m_2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_2)\ \mathrm{dvol}\cdots\int_{M_\mathfrak{m}} a_{m_\mathfrak{m},m_\mathfrak{m}}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_n)\ \mathrm{dvol}\\
&\quad+\textstyle\int_{M_1} a_{m_1,m_1}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_1)\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} \mathfrak{a}_{m_2,m_2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_2)\ \mathrm{dvol}\cdots\int_{M_\mathfrak{m}} a_{m_\mathfrak{m},m_\mathfrak{m}}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_\mathfrak{m})\ \mathrm{dvol}\\
&\qquad\qquad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots\\
&\quad+\textstyle\int_{M_1} a_{m_1,m_1}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_1)\ \mathrm{dvol} \int_{M_2} a_{m_2,m_2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_2)\ \mathrm{dvol}\cdots\int_{M_\mathfrak{m}} \mathfrak{a}_{m_\mathfrak{m},m_\mathfrak{m}}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_n)\ \mathrm{dvol}\\
&= \mathfrak{m}\cdot\tfrac{1}{2}\textstyle\int_{M_1} c_1(E_1)\ \mathrm{dvol}\cdots\int_{M_\mathfrak{m}} c_1(E_\mathfrak{m})\ \mathrm{dvol} \ = \mathfrak{m}\cdot\tfrac{1}{2}\prod_i \int_{M_i} c_1(E_i)\ \mathrm{dvol}\\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\mathfrak{m}\textstyle\int_M a_{22}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})\ \mathrm{dvol},
\end{aligned}$$

onde a última das igualdades é consecuencia da igualdade (3.13). Do mesmo xeito, tense que

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_M \mathfrak{a}_{m,m}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})\ \mathrm{dvol} \quad &= \mathfrak{m}\cdot\tfrac{1}{2}\textstyle\int_{M_1} c_1(E_1)\ \mathrm{dvol}\cdots\int_{M_\mathfrak{m}} c_1(E_\mathfrak{m})\ \mathrm{dvol}\\
&= \mathfrak{m}\cdot\tfrac{1}{2}\textstyle\int_M c_1(E_1)\cdots c_1(E_\mathfrak{m})\ \mathrm{dvol} = \mathfrak{m}\cdot\tfrac{1}{2}\int_M \mathrm{ch}_\mathfrak{m}(E)\ \mathrm{dvol}\,.
\end{aligned}$$

En definitiva, chégase a que

$$\int_M \mathfrak{a}_{m,m}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})\ \mathrm{dvol} = \mathfrak{m}\cdot\frac{1}{2}\int_M \mathrm{ch}_\mathfrak{m}(E)\ \mathrm{dvol} = \frac{1}{2}\cdot\mathfrak{m}\int_M a_{22}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})\ \mathrm{dvol}$$

e, polo tanto, a que

$$\boxed{R_m^m = \frac{1}{2}\mathfrak{m}a_{m,m}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}) = \frac{1}{2}\mathfrak{m}\,\mathrm{ch}_\mathfrak{m}(E).}$$

➽ **Proba de (2):**

Este apartado próbase de xeito similar ao apartado anterior. Sexan $\mathcal{K}_i$ variedades de Riemann arbitrarias con (E_i, h_i) triviais. En consecuencia, $c_1(E_i) = 0$. Así, procedendo coma antes,

$$\int_{M_i} a_{2,2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}_i)\ \mathrm{dvol} = \int_{M_i} \frac{1}{2}c_1(T_cM_i)\ \mathrm{dvol}\,. \tag{3.15}$$

En consecuencia,

$$\int_M a_{2,2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})\ \mathrm{dvol} = \prod_i \int_{M_i} \frac{1}{2}c_1(T_cM_i)\ \mathrm{dvol} = \frac{1}{2^\mathfrak{m}}\prod_i \int_{M_i} c_1(T_cM_i)\ \mathrm{dvol}. \tag{3.16}$$

Empregando a ecuación (3.7) nesta escolla particular de $\mathcal{K}$, tense que

$$\int_{M_i} \mathfrak{a}_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\, \mathrm{dvol} = \int_M \frac{1}{3} c_1\,(T_c M)\,\mathrm{dvol}\,. \tag{3.17}$$

Procedendo coma antes e substituíndo na ecuación (3.14) o que se obtivo en (3.15) e en (3.17),

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_M \mathfrak{a}_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} &= \mathfrak{m}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2^{\mathfrak{m}-1}}\textstyle\int_{M_1} c_1(T_cM_1)\,\mathrm{dvol}\cdots\int_{M_\mathfrak{m}} c_1(T_cM_\mathfrak{m})\,\mathrm{dvol}\\
&= \mathfrak{m}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2^{\mathfrak{m}}}\textstyle\int_M c_1(T_cM_1)\cdots c_1(T_cM_\mathfrak{m})\,\mathrm{dvol}\\
&= \mathfrak{m}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\textstyle\int_M \frac{c_1(T_cM_1)}{2}\cdots\frac{c_1(T_cM_\mathfrak{m})}{2}\,\mathrm{dvol}\\
&= \mathfrak{m}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\textstyle\int_M \mathrm{Td}_1(T_cM_1)\cdots\mathrm{Td}_1(T_cM_\mathfrak{m})\,\mathrm{dvol}\\
&= \mathfrak{m}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\textstyle\int_M \mathrm{Td}_\mathfrak{m}(T_cM),
\end{aligned}$$

onde as últimas dúas igualdades son consecuencia de que $\mathrm{Td}_1 = \frac{c_1}{2}$ e de que $\mathrm{Td}_1(T_cM_1)\cdots\mathrm{Td}_1(T_cM_\mathfrak{m}) = \mathrm{Td}_\mathfrak{m}(T_cM)$ respectivamente. Agora ben, na anterior ecuación tamén se podería empregar o visto na ecuación (3.16), chegando a que

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_M \mathfrak{a}_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} &= \mathfrak{m}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2^{\mathfrak{m}-1}}\textstyle\int_{M_1} c_1(T_cM_1)\,\mathrm{dvol}\cdots\int_{M_\mathfrak{m}} c_1(T_cM_\mathfrak{m})\,\mathrm{dvol}\\
&= \mathfrak{m}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 2\cdot\tfrac{1}{2^{\mathfrak{m}}}\textstyle\int_{M_1} c_1(T_cM_1)\,\mathrm{dvol}\cdots\int_{M_\mathfrak{m}} c_1(T_cM_\mathfrak{m})\,\mathrm{dvol}\\
&= \mathfrak{m}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\textstyle\int_M a_{2,2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})\,\mathrm{dvol}\,.
\end{aligned}$$

Polo tanto

$$\int_M \mathfrak{a}_{2,2}^{\mathrm{Dol}}\,\mathrm{dvol} = \mathfrak{m}\cdot\frac{2}{3}\int_M a_{2,2}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K})\,\mathrm{dvol} = \mathfrak{m}\cdot\frac{2}{3}\int_M \mathrm{Td}_\mathfrak{m}(T_cM)\,\mathrm{dvol}\,.$$

Deste xeito,

$$\boxed{R_m^m = \frac{2}{3}\mathfrak{m}a_{m,m}^{\mathrm{Dol}}(\mathcal{K}) = \frac{2}{3}\mathfrak{m}\,\mathrm{Td}_\mathfrak{m}\,(T_cM)\,.} \quad \blacksquare$$

Capítulo 4

Teoría de Cobordismo

4.1. Introdución

Neste capítulo farase un estudo xeral sobre a teoría de cobordismo, prestando especial atención no cobordismo complexo. Como en calquera campo, o problema inicial é a clasificación dos obxectos salvo isomorfismos e detectar invariantes. Grosso modo, entenderemos que dúas variedades sen bordo serán cobordantes se a súa unión disxunta é o bordo dalgunha variedade. A primeira descrición desta relación de equivalencia foi dada por H. Poincaré. A súa idea de cobordismo esencialmente é a mesma que a que se coñece actualmente. A primeira aplicación da teoría de cobordismo foi desenvolta por L.S. Pontrjagin. O seu obxectivo era estudar os grupos de homoloxía estable das esferas como as clases de cobordismo de variedades. Posteriormente, R.Thom, proba que o problema de cobordismo é equivalente a un problema de homotopía. Así, Thom, trouxo a técnica de Pontrjagin ao estudo de variedades.

4.2. A categoría de cobordismo

O obxectivo deste capítulo é establecer a notación na teoría de cobordismo. Comezaremos considerando o seguinte problema (Rudyak [17]). Dada unha variedade (diferenciable) pechada M, cando é posible afirmar que é o bordo dunha variedade compacta con bordo? Esto pode ser resolto como segue: Dirase que dúas variedades M e N son *cobordantes* se a unión disxunta de ambas, $M \sqcup N$, son bordo dalgunha variedade compacta con bordo. Nótese que "ser cobordantes" é unha relación de equivalencia, logo pode considerarse o conxunto de clases de cobordismo dunha variedade con bordo k-dimensional: $\mathfrak{N}_k$. Xunto coa operación unión disxunta, $\mathfrak{N}_k$ resulta ser un grupo, que chamaremos *grupo de cobordismo*. Agora a cuestión é como poden ser calculados os grupos $\mathfrak{N}_k$. A resposta deuna R.Thom en 1954 traendo as ideas de Pontrjagin a este contexto e aplicando teoría de homotopía. En concreto, proba o teorema que hoxe en día coñecemos como Teorema de Pontrjagin-Thom (Teorema 4.12) o que despois lle permitirá afirmar que

$$\mathfrak{N}_k = \mathbb{Z}/2[x_i], \quad \dim x_i = i, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad i \neq 2^s - 1.$$

O obxectivo agora é definir de forma abstracta o concepto de *categoría de cobordismo*, onde, posteriormente, poderemos xerar unha teoría de cobordismo. Deste xeito, dando unha definición e construíndo un marco con maior abstracción, seremos capaces de obter máis exemplos. Antes de nada, motívase esta definición tomando como exemplo, ao igual que antes, a categoría das variedades diferenciables compactas con bordo:

Sexa $\mathcal{O}$ a categoría cuxos obxectos son variedades diferenciables compactas e con bordo e cuxos morfismos son as aplicacións diferenciables que levan o bordo dunha variedade no bordo doutra. Esta categoría ten as seguintes propiedades:

- Ten sumas finitas (a unión disxunta) e obxecto inicial (a variedade baleira).
- Para cada obxecto da categoría $\mathcal{O}$, o seu bordo é tamén unha variedade e o bordo dun bordo é sempre o baleiro (é dicir, o obxecto inicial). Isto define un funtor aditivo, $\partial\colon \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$.
- Para toda variedade M podemos considerar a inclusión do seu bordo na variedade: $i(M)\colon \partial M \longrightarrow M$. Esta inclusión danos unha transformación natural de funtores aditivos, $i : \partial \longrightarrow I$, onde $I\colon \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ denota o funtor identidade.
- O teorema de mergullos de Whitney permite afirmar que para esta categoría existe unha categoría pequena, $\mathcal{O}_0$, tal que cada obxecto de $\mathcal{O}$ é isomorfo a un obxecto de $\mathcal{O}_0$.

Tomando como exemplo esta categoría, chamaremos *categoría de cobordismo* a unha categoría que verifique as mesmas catro propiedades que se acaban de citar. É dicir:

Definición 4.1 (Categoría de cobordismo). Unha *categoría de cobordismo*, $(\mathcal{C}, \partial, i)$, é unha tripla verificando:

- $\mathcal{C}$ é unha categoría con sumas finitas e obxecto inicial.
- $\partial\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ é un funtor tal que para calquera obxecto X da categoría, $\partial\partial(X)$ é o obxecto inicial.
- $i\colon \partial \longrightarrow I$ é unha transformación natural de funtores aditivos.
- Existe unha subcategoría pequena, $\mathcal{C}_0$, de $\mathcal{C}$ tal que cada obxecto de $\mathcal{C}$ é isomorfo a un obxecto de $\mathcal{C}_0$.

Esta definición tan abstracta permítenos unificar as ideas. Para comezar, introducimos o concepto de relación de cobordismo.

Definición 4.2 (Obxectos cobordantes). Se $(\mathcal{C}, \partial, i)$ é unha categoría de cobordismo, dirase que os obxectos X e Y de $\mathcal{C}$ son *cobordantes* se existen obxectos U e V de $\mathcal{C}$ tales que a suma de X e ∂U é isomorfo á suma de Y e ∂V. En tal caso, escribiremos $X \equiv Y$. (Pódese ver que $\equiv$ é unha relación de equivalencia)

Definición 4.3 (Obxectos pechados e limitados). Un obxecto X de $\mathcal{C}$ dise *pechado* se ∂X é un obxecto inicial. Un obxecto X de $\mathcal{C}$ dirase que é *limitado* se é cobordante cun obxecto inicial.

O conxunto de clases de equivalencia (baixo $\equiv$) dos obxectos pechados de $\mathcal{C}$ ten unha operación inducida pola suma en $\mathcal{O}$. Esta operación é asociativa, conmutativa e ten elemento unidade. Estase en condicións de dar a definición de *subgrupo de cobordismo*.

Definición 4.4 (Subgrupo de cobordismo). O *subgrupo de cobordismo* dunha categoría de cobordismo $(\mathcal{C}, \partial, i)$ é o conxunto de clases de equivalencia de obxectos pechados de $\mathcal{C}$, coa operación inducida pola suma en $\mathcal{C}$. Denotarémolo por $\Omega(\mathcal{C}, \partial, i)$.

4.3. Cobordismo Relativo

Co fin de estudar a relación entre dúas categorías de cobordismo, convén ter dispoñible un semigrupo de cobordismo relativo. No caso xeométrico isto é posible se xuntamos dúas variedades co mesmo bordo para formar unha variedade pechada. No caso categórico, a idea será substituír un par de obxectos tendo o mesmo bordo por un par de obxectos pechados. Precisarase a construción do *grupo de Grothendieck*.

Para calquera categoría con sumas finitas onde as clases de isomorfismos dos obxectos forman un conxunto, $\mathfrak{X}$, defínese $K(\mathfrak{X})$, o *grupo de Grothendieck* de $\mathfrak{X}$, como o o conxunto de clases de equivalencia dos pares (X, X') de obxectos de $\mathfrak{X}$, onde (X, X') é equivalente a (Y, Y') se e só se existe un obxecto A de $\mathfrak{X}$ tal que $X + Y' + A \cong X' + Y + A$. O grupo $K(\mathfrak{X})$ é un grupo abeliano coa operación inducida pola suma en $\mathfrak{X}$.

Unha vez introducida a construción do grupo de Grothendieck, consideramos dúas categorías de cobordismo, $(\mathcal{C}, \partial, i)$ e $(\mathcal{C}', \partial', i')$; un funtor aditivo, $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, e unha equivalencia natural de funtores aditivos, $t\colon \partial' F \cong F\partial$, verificando o seguinte diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \partial' F(A) \arrow[rr, "t(A)"] \arrow[dr, "i'_{F(A)}"'] & & F(\partial A) \arrow[dl, "F(i_A)"] \\ & F(A). & \end{tikzcd}$$

Sexa $\mathcal{P}$ a categoría cuxos obxectos son triplas (X, Y, f), onde $X \in \mathcal{C}'$, $Y \in \mathcal{C}$, Y é pechado e $f\colon \partial' X \longrightarrow FY$ é un isomorfismo. Denotaremos agora por $\mathrm{Map}((X, Y, f), (X', Y', f'))$ ao conxunto de pares de aplicacións (ϕ, ψ), con $\phi\colon X \longrightarrow X'$ e $\psi\colon X \longrightarrow X'$, tales que o diagrama seguinte conmuta

$$\begin{tikzcd} \partial' X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial'\phi"'] & FY \arrow[d, "F\psi"] \\ \partial' X' \arrow[r, "f'"] & FY' \end{tikzcd}$$

Entón, $\mathcal{P}$ ten sumas finitas e unha categoría pequena, $\mathcal{P}_0$, tal que cada obxecto de $\mathcal{P}$ é isomorfo a un obxecto de de $\mathcal{P}_0(X \in \mathcal{C}'_0, Y \in \mathcal{C}, f)$.

Agora considérase a categoría $\mathcal{S}$, formada polos pares de obxectos da categoría $\mathcal{P}$, $((X,Y,f),(X',Y',f'))$ tales que $Y \cong Y'$. Supóñase $x,x',y,y' \in \mathcal{P}$. Considérase a relación de equivalencia en $\mathcal{S}$, dada por $(x,x') \sim (y,y')$ se existen obxectos $v,u \in \mathcal{P}$ de forma que $x+u \cong y+v$ e $x'+u \cong y'+v$. O conxunto de clases de equivalencia, $\mathcal{S}/\sim$, é un grupo abeliano coa operación inducida pola suma.

Denotamos agora por $\mathcal{C}'_{\mathrm{cl}}$ á subcategoría de $\mathcal{C}'$ formada polos obxectos pechados. Así, temos o seguinte homomorfismo:

$$\begin{array}{rccl} \beta\colon & K(\mathcal{C}'_{\mathrm{cl}}) & \longrightarrow & \mathcal{S}/\sim \\ & (X,X') & \longmapsto & ((X,\emptyset,j),(X',\emptyset,j')), \end{array}$$

onde $\emptyset$ é un obxecto inicial de $\mathcal{C}$ e j,j' son os únicos isomorfismos de obxectos iniciais.

Agora ben, se temos o seguinte homomorfismo

$$\alpha\colon \mathcal{S}/\sim \longrightarrow K(\mathcal{C}'_{\mathrm{cl}})/(\partial'_* K(\mathcal{C}') + F_* K(\mathcal{C}_{\mathrm{cl}}))$$

de forma que a composición de α con β é a aplicación de paso ao cociente de $K(\mathcal{C}'_{\mathrm{cl}})$, entón é posible definir un semigrupo de cobordismo do seguinte xeito:

Para obxectos (X,Y,f) e (X',Y',f') de $\mathcal{P}$, escribirase $(X,Y,f) \equiv (X',Y',f')$ se existen obxectos U e U' de $\mathcal{C}$ onde $Y+\partial U \cong Y'+\partial U'$ e para os cales

$$\alpha((X+FU, Y+\partial U, f+tU),(X'+FU', Y'+\partial U', f'+tU')) = 0.$$

Empregando que α é un homomorfismo, pódese ver que $\equiv$ é unha relación de equivalencia. Agora defínese o *semigrupo de cobordismo relativo*, $\Omega(F,t,\alpha)$, como o conxunto de clases de equivalencia baixo $\equiv$ de elementos de $\mathcal{P}$ coa suma inducida en $\mathcal{P}$.

4.4. Variedades con estrutura

As teorías estándar de cobordismo están baseadas en variedades con estruturas adicionais no fibrado tanxente ou no fibrado normal. Denotarase por $G_{r,n}$ a variedade de Grassman de r-planos non orientados en $\mathbb{R}^{r+n}$ e por γ_n^r o fibrado de r-planos sobre $G_{r,n}$ consistindo en pares, formados por un r-plano en $\mathbb{R}^{r+n}$ e un punto do r-plano. Así, $B0_r = \lim\limits_{n\to\infty} G_{r,n}$, con fibrado universal $\gamma^r = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n^r$.

Definición 4.5 ((B_r,f_r) estrutura). Sexa $f_r\colon B_r \longrightarrow B0_r$ unha fibración. Se ξ é un fibrado vectorial n-dimensional sobre un espazo X, clasificado por $\xi\colon X \longrightarrow B0_r$, entón unha (B_r,f_r) *estrutura* en ξ é unha clase de homotopía de levantamentos a B_r. Nótese que unha (B_r,f_r) estrutura depende da aplicación a $B0_r$.

Lema 4.6. *Para r o suficientemente grande, existe unha correspondencia un a un entre (B_r,f_r) estruturas para o fibrado normal de calquera dous mergullos $i_1,i_2\colon M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+r}$, onde M^n é unha variedade diferenciable (con ou sen bordo) de dimensión n.*

Definición 4.7 ((B,f) estrutura e (B,f) variedade). Dada unha sucesión (B,f) de fibracións $f_r\colon B_r \longrightarrow B0_r$ e aplicacións $g_r\colon B_r \longrightarrow B_{r+1}$, tales que verifican o seguinte diagrama conmutativo, onde j_r denota a inclusión usual:

$$\begin{tikzcd} B_r \arrow[r, "g_r"] \arrow[d, "f_r"'] & B_{r+1} \arrow[d, "f_{r+1}"] \\ B0_r \arrow[r, "j_r"] & B0_{r+1} \end{tikzcd}$$

Unha (B_r,f_r) estrutura no fibrado normal de M^n en $\mathbb{R}^{r+n}$ define unha única (B_{r+1},f_{r+1}) estrutura vía a inclusión $\mathbb{R}^{n+r}\subset\mathbb{R}^{n+r+1}$. Unha (B,f) estrutura en M^n é unha clase de equivalencia de sucesións de (B_r,f_r) estruturas $\xi=(\xi_r)$, no fibrado normal de M, sendo dúas de estas sucesións equivalentes se coinciden para un r o suficientemente grande. Unha (B,f) variedade será un par formado por unha variedade M^n e unha (B,f) estrutura sobre M^n.

Observación 4.8. Se W^w é unha variedade e M^m unha subvariedade de W con fibrado normal trivial, é posible embeber M en $\mathbb{R}^{m+r}$, para r o suficientemente grande, e estendelo, por medio da trivialización, a un mergullo dunha veciñanza de M en W a $\mathbb{R}^{w+r}=\mathbb{R}^{m+r}\times\mathbb{R}^{w-m}$. Así, a veciñanza antes considerada en $\mathbb{R}^{m+r}$ é ortogonal a M. Entón, poderase estender a un mergullo de W en $\mathbb{R}^{w+r}$. Os planos normais a M en $\mathbb{R}^{m+r}$ serán a restrición a M dos planos normais a W en $\mathbb{R}^{w+r}$. Se agora, $\tilde{\nu}\colon W\longrightarrow B_r$ é o levantamento da aplicación normal de W, entón a súa restrición a M, $\tilde{\nu}|_M\colon M\longrightarrow B_r$, é un levantamento da aplicación normal de M. En consecuencia, unha (B,f)-estrutura em W induce unha (B,f)-estrutura en M ben definida.

Definición 4.9 (Categoría de cobordismo de (B,f) variedades). Unha categoría de cobordismo de (B,f) variedades é a categoría cuxos obxectos son variedades diferenciables compactas con (B,f) estrutura, e cuxas aplicacións son os mergullos diferenciables que conservan o bordo con fibrado normal trivializado. O semigrupo de cobordismo desta categoría denotarémola por $\Omega(B,f)$, e o sub-semigrupo de clases de equivalencia de variedades pechadas de dimensión n denotarémolas por $\Omega_n(B,f)$.

Proposición 4.10. *O semigrupo de cobordismo $\Omega(B,f)$ é un grupo abeliano.*

Proba. Sexa M^n unha variedade pechada que está embebida en $\mathbb{R}^{n+r}$ para algún r o suficientemente grande e $\tilde{\nu}\colon M\longrightarrow B_r$ o levantamento da aplicación normal. Empregando o anterior mergullo e a inclusión usual de I en $\mathbb{R}$, embebemos $M\times I$ en $\mathbb{R}^{n+r}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^{n+r+1}$. A aplicación normal para $M\times I$ é a composición da proxección en M e da aplicación normal a M. Así, o levantamento para M define unha (B,f) estrutura en $M\times I$ que, ao mesmo tempo, induce unha estrutura en $M\times 0$ (observación anterior). O normal entrante ao longo de $M\times 1$ dá pé a unha (B,f) estrutura inducida en $M\times 1$. Con esta estrutura tense que $M+M\times 1\cong\partial(M\times 1)$ na categoría. En consecuencia, esta estrutura en $M\times 1$ é unha inversa para a estrutura de M en $\Omega(B,f)$. ■

Pénsase agora $B0_r$ como o espazo de r-planos contidos nun subespazo $\mathbb{R}^s$ de $\mathbb{R}^\infty$ de dimensión finita. Tómase o produto vectorial usual do subespazo de $\mathbb{R}^\infty$, consistindo nos vectores cun número finito de compoñentes non nulas. Deste xeito, obtense unha métrica de Riemann no fibrado universal γ^r. Se ξ é un fibrado de r-planos sobre o espazo X, con aplicación clasificante $\xi\colon X \longrightarrow B0_r$, tense unha métrica de Riemann inducida en ξ. Defínese entón o *espazo de Thom*.

Definición 4.11 (Espazo de Thom). O *espazo de Thom* de ξ, $T\xi$, é o espazo obtido partindo do espazo total de ξ colapsando todos os vectores de tamaño polo menos un a un punto, denotado por ∞.

Supóñase que $\xi\colon X \longrightarrow B0_r$ é un fibrado inducido por outro fibrado $\eta\colon Y \longrightarrow B0_r$, mediante a aplicación $g\colon X \longrightarrow Y$ (i.e. $\xi = g^*\eta$). Entón, a aplicación de fibrado usual $\xi = g^*\eta \longrightarrow \eta$, induce a seguinte aplicación entre os espazos de Thom de ξ e η

$$Tg\colon T\xi \longrightarrow T\eta.$$

A aplicación $j_r\colon B0_r \longrightarrow B0_{r+1}$ induce un fibrado vectorial $j_r^*(\gamma^{r+1})$ sobre $B0_r$, que se pode identificar coa suma de Whitney de γ^r e unha liña de fibrado trivial. Entón $Tj_r^*(\gamma^{r+1})$ pode ser identificado como a suspensión de $T\gamma^r$. Como consecuencia, obtense o seguinte diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Sigma TB_r \arrow[r, "Tg_r"] \arrow[d, "\Sigma Tf_r"'] & TB_{r+1} \arrow[d, "Tf_{r+1}"] \\
\Sigma TB0_r \arrow[r, "Tj_r"] & TB0_{r+1}
\end{tikzcd}$$

e tamén se obtén un homomorfismo entre os grupos de homotopía

$$Tg_r \circ \Sigma\colon \pi_{n+r}(TB_r, \infty) \longrightarrow \pi_{n+r+1}(TB_{r+1}, \infty),$$

onde Σ denota a suspensión , $TB0_r$ e TB_r denotan, respectivamente, os espazos de Thom $T\gamma^r$ e $Tf_r^*\gamma^r$. Estase en condicións de enunciar o teorema principal desta sección.

Teorema 4.12 (Teorema de Pontrjagin-Thom [19]). $\Omega_n(B, f) \cong \lim\limits_{n\to\infty} \pi_{n+r}(TB_r, \infty)$.

4.5. Clases e números característicos

No ámbito da teoría de cobordismo, o uso de clases características proporciona invariantes. Co fin de introducir as ferramentas para o cálculo destes invariantes, a cohomoloxía xoga un papel central.

Definición 4.13 (Espectro). Un espectro $\underset{\sim}{E}$ é unha sucesión $\{E_n : n \in \mathbb{Z}\}$ de Espazos con punto base común cunha sucesión de aplicacións $e_n\colon \Sigma E_n \longrightarrow E_{r+1}$, onde Σ denota a suspensión.

Exemplo 4.14 (Espectro da esfera). Un exemplo de espectro é o da esfera: $\underset{\sim}{\mathbb{S}} = \{\mathbb{S}^n, \sigma_n\}$, onde $\sigma_n \colon \Sigma\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ é a aplicación identidade.

Definición 4.15 (Grupos de homoloxía e cohomoloxía). Definimos os grupos de homoloxía e cohomoloxía con coeficientes no espectro $\underset{\sim}{E}$ como

$$H_n(X, A; \underset{\sim}{E}) = \lim_{i\to\infty} \pi_{n+i}((X/A) \wedge E_i),$$

$$H^n(X, A; \underset{\sim}{E}) = \lim_{i\to\infty} \left[\Sigma^i(X/A), E_{n+i}\right],$$

onde X/A é o espazo resultado de colapsar A a un punto, $\wedge$ é o produto smash $U \wedge V = U \times V/((U \times *) \cup (* \times V))$ e $[\cdot,\cdot]$ denota clases de homotopía de aplicacións. $H_*(X; \underset{\sim}{E})$ denotará $H_*(X, \emptyset; \underset{\sim}{E})$ onde $X/\emptyset$ é a unión disxunta de X e un punto. Se Y é un espazo con punto base p, escribirase $\tilde{H}_*(Y; \underset{\sim}{E})$ para denotar $H_*(Y, p; \underset{\sim}{E})$.

Definición 4.16 (Anel espectro). Un *anel espectro* é un espectro $\underset{\sim}{A} = \{A_p, a_p\}$ cunha aplicación $\alpha \colon \underset{\sim}{S} \longrightarrow \underset{\sim}{A}$ e un apareamento $m \colon (\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{A}) \longrightarrow \underset{\sim}{A}$, é dicir, unha aplicación tal que o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
(\Sigma A_p) \wedge A_q \arrow[r, "a_p \wedge 1"] & A_{p+1} \wedge A_q \arrow[dr, "m_{p+1,q}"] & \\
\Sigma(A_p \wedge A_q) \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\Sigma m_{p,q}"] & \Sigma(A_{p+q}) \arrow[r, "a_{p+q}"] & A_{p+q+1} \\
A_p \wedge (\Sigma A_q) \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "1 \wedge a_q"] & A_p \wedge A_{q+1} \arrow[ur, "m_{p,q+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

representa as clases do grupo $[\Sigma(A_p \wedge A_q), A_{p+q+1}]$ relacionadas mediante

$$[m_{p+1,q} \circ (a_p \wedge 1) \circ \lambda] = [a_{p+q} \circ \Sigma m_{p,q}] = (-1)^p [m_{p,q+1} \circ (1 \wedge a_q) \circ \mu],$$

tales que o diagrama seguinte conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^p \wedge A_q \arrow[r, "\alpha_p \wedge 1"] \arrow[d, equal] & A_p \wedge A_q \arrow[dd, "m_{p,q}"] & A_p \wedge \mathbb{S}^q \arrow[l, "1 \wedge \alpha_q"'] \arrow[d] \\
\Sigma^p A_q \arrow[dr, "\tilde{a}"'] & & \mathbb{S}^q \wedge A_p = \Sigma^q A_p \arrow[dl, "(-1)^{pq}\tilde{a}"] \\
& A_{p+q} &
\end{tikzcd}$$

sendo $\tilde{a}$ a composición múltiple das suspensións de aplicacións a_j e $(-1)^{pq}\tilde{a}$, a aplicación cuxa clase no grupo $[\Sigma^q A_p, A_{p+q}]$ é $(-1)^{pq}$ veces a clase de $\tilde{a}$.

Definición 4.17 (Clase de Thom). Sexa (B, f) unha serie de fibracións $f_r\colon B_r \longrightarrow B0_r$ Unha *clase de Thom* é unha aplicación de espectros $U\colon \underset{\sim}{T}B \longrightarrow \underset{\sim}{A}$ onde $\underset{\sim}{A}$ é un anel espectro.

Sexa M^n unha (B, f) variedade, $i\colon M^n \longrightarrow H^{n+r}$ (con r o suficientemente grande) un mergullo, onde a fronteira de M, ∂M, está embebida en $\mathbb{R}^{n+r-1}$ co fibrado ortogonal usual ao longo dun entorno tubular de ∂M. Sexa N o fibrado normal de M e N' o fibrado normal de ∂M. Agora considérase un levantamento $\nu\colon M \longrightarrow B_r$, definindo a estrutura (B, f) en M. Esta aplicación induce a seguinte entre os complexos de Thom, $T\nu\colon TN \longrightarrow TB_r$.

Sexa
$$N \xrightarrow{\Delta} N \times N \xrightarrow{\pi\times p} M \times TN \longrightarrow (M/\partial M) \wedge TN,$$
sendo Δ a aplicación diagonal e p o colapso no complexo de Thom. Baixo esta aplicación, os vectores de norma polo menos un son enviados ao punto base, ao igual que os vectores sobre ∂M (é dicir N'). Deste xeito, indúcese a seguinte aplicación
$$\phi\colon TN/TN' \longrightarrow (M/\partial M) \wedge TN.$$

Se $c\colon H^{n+r} \longrightarrow TN$ é o colapso estándar, a proxección en TN/TN' manda $\mathbb{R}^{n+r-1}$ ao punto base, logo define un colapso
$$c\colon \mathcal{S}^{n+r} = (H^{n+r} \cup \infty)/(\mathbb{R}^{n+r-1} \cup \infty) \longrightarrow TN/TN'.$$

Tómase unha clase de Thom $U = \{U_r\}\colon \underset{\sim}{T}B \longrightarrow \underset{\sim}{A}$. Tense así
$$\mathbb{S}^{n+r} \xrightarrow{c} TN/TN' \xrightarrow{\phi} (M/\partial M) \wedge TN \xrightarrow{1\wedge T\nu} (M/\partial M) \wedge TB_r \xrightarrow{1\wedge U_r} (M/\partial M) \wedge A_r,$$
que representa unha clase de $\pi_{n+r}((M/\partial M) \wedge A_r)$. Se facemos que r tenda a infinito, definirase unha clase $[M, \partial M] \in H_n(M, \partial M; \underset{\sim}{A})$ que depende unicamente da estrutura (B, f) de M.

Definición 4.18 (Clase fundamental de $(M, \partial M)$). Se M^n é unha (B, f) variedade e $U\colon \underset{\sim}{T}B \longrightarrow \underset{\sim}{A}$ unha clase de Thom, entón, unha *clase fundamental* de $(M, \partial M)$ é unha clase $[M, \partial M] \in H_n(M, \partial M; \underset{\sim}{A})$.

Definición 4.19 (Clase característica universal). Unha *clase característica universal* con coeficientes en $\underset{\sim}{A}$ para fibrados (B, f) é unha clase $x \in H^n(B, \emptyset; \underset{\sim}{A})$, onde se ten que $B = \lim\limits_{i\to\infty}\{B_r, g_r\}$. Se ξ é un fibrado de r-planos sobre X con (B_r, f_r) estrutura dada polo levantamento $\hat{\xi}\colon X \longrightarrow B_r$, entón a *clase x-característica de fibrado* (B_r, f_r) é a clase $x(\hat{\xi}) = \hat{\xi}^*\bar{g}^*(x) \in H^n(X, \emptyset; \underset{\sim}{A})$, onde $\bar{g}\colon B_r \longrightarrow B$ é a aplicación usual de paso ao límite. A *clase característica x-normal* dunha (B, f) variedade, M, é a clase $x(M) \in H^n(X, \emptyset; \underset{\sim}{A})$ definida por $x(M) = x(\nu)$, onde $\nu\colon M \longrightarrow B_r$ é un levantamento da aplicación normal, definindo a (B, f) estrutura de M.

Definición 4.20 (Número x-característico). Se M^n é unha (B, f) variedade pechada e $x \in H^p(B, \emptyset; \underset{\sim}{A})$, entón o número x-característico de M é a clase en $H^{p-n}(pt, \emptyset; \underset{\sim}{A})$ obtida ao avaliar $x(M)$ na clase fundamental de M.

Deste xeito, se $x(M) \in H^p(B; \underset{\sim}{A})$ está representada por $\chi\colon \Sigma^i(M/\emptyset) \longrightarrow A_{p+i}$ e ademais $[M] \in H_n(M; \underset{\sim}{A})$ está representado pola aplicación $\mu\colon \mathbb{S}^{n+r} \longrightarrow (M/\emptyset) \wedge A_r$, entón $x[M] =< x(M), [M] >\in H^{p-n}(pto; \underset{\sim}{A})$ está representado mediante a seguinte aplicación

$$\mathbb{S}^{n+r+i} \xrightarrow{\Sigma^i\mu} \Sigma^i(M/\emptyset) \wedge A_r \xrightarrow{\chi\wedge 1} A_{p+i} \wedge A_r \xrightarrow{m_{p+i,r}} A_{p+i+r}.$$

Os números característicos na teoría de cobordismo cobran importancia grazas ao seguinte resultado introducido por Pontrjagin.

Teorema 4.21. *Se $x \in H^p(B; \underset{\sim}{A})$ e M^n é unha (B, f) variedade pechada, entón o número x-característico de M depende unicamente da clase de (B, f) cobordismo de M.*

4.6. Algúns exemplos de cobordismo

No Capítulo 4 do libro de Stong [19] aparecen numerosos exemplos de cobordismo. Neste caso o interese deste traballo recae sobre o *cobordismo complexo* mais comentarase brevemente algún outro exemplo importante como ferramenta para determinados problemas de clasificación.

4.6.1. Cobordismo non orientado, $\mathcal{M}_*$

Os obxectos de estudo son as variedades compactas e coincide co cobordismo (B, f) con $B_r = B0_r$ e f_r sendo a aplicación identidade. $\mathcal{M}_*$ é o anel de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sobre as clases x_i de dimensión i, para todo enteiro que non sexa da forma $2^s - 1$.

4.6.2. Cobordismo orientado, Ω_*^{SO}

Os obxectos da categoría son as variedades orientadas. Neste caso, coincide co (B, f) cobordismo onde $B_r = BS0_r$ é o espazo clasificante para o grupo especial ortogonal $S0_r$. O cobordismo está determinado pola cohomoloxía en $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_2$. Todas as relacións dos números en $\mathbb{Z}_2$ veñen dadas polas relacións de Wu, xunto coa nulidade da primeira clase de Stiefel-Whithney. No caso dos números en $\mathbb{Z}$, as relación veñen dadas polo teorema de Riemann-Roch.

4.6.3. Bordismo, $\Omega_*(B, f)[X, A]$

Sexa $F\colon (B, f) \longrightarrow \mathfrak{X}$ o funtor esquecemento, que vai dende a categoría das (B, f) variedades á categoría dos espazos topolóxicos. Deste xeito, un ten a categoría de cobordismo de (B, f) variedades sobre un espazo X. Se $A \subset X$ é un subespazo, tense un funtor $J\colon (B,f)/A \longrightarrow (B,f)/X$ que está inducido pola inclusión de A en X. Entón, o cobordismo $(B,f)/X$ é unicamente a teoría de cobordismo baseada no fibrado $B_r \times X \xrightarrow{\pi} B_r \xrightarrow{f_r} B0_r$, onde π é a proxección. O grupo de bordismo relativo do par (X,A) é $\Omega_n(B,f)[X,A] = \Omega_n(J,\alpha)$, sendo $\alpha = f_r \circ \pi$. Historicamente, estes grupos foron introducidos por Atiyah e chamounos grupos de bordismo (B,f) para o par (X,A). Reservou o nome de cobordismo para a teoría dual de teoría de cohomoloxía con coeficientes no espectro $T\underset{\sim}{B}$.

4.6.4. Cobordismo topolóxico, Ω_*^{Top}

O obxecto de estudo son as variedades topolóxicas. É unha ferramenta de moito interese pero non se coñece demasiado sobre este tipo de cobordismo. Principalmente debido á transversalidade, froito da construción de Pontrjagin-Thom.

4.7. Cobordismo complexo, Ω_*^U

Agora centrarémonos no cobordismo complexo, Ω_*^U, posto que é o que cobra maior importancia no noso estudo. Historicamente, o cobordismo de variedades estables case complexas foi definido e completamente determinado polos matemáticos Milnor e Novikov. Concretamente este é o (B,f)-cobordismo onde $B_{2r} = B_{2r+1}$ é o espazo clasificante BU_r para fibrados complexos de r-planos. Os obxectos son variedades cunha estrutura de fibrado vectorial complexo concreta no fibrado normal ou no fibrado tanxente estable. Ademais, Ω_*^U é o anel enteiro de polinomios de clases x_i de dimensión $2i$, para cada i, onde cada x_i representa unha variedade alxébrica complexa proxectiva. Lémbrese que se ten que $\Omega_n^U \cong \lim\limits_{r\to\infty} \pi_{n+2r}(TBU_r, \infty)$, logo isto permite empregar os recursos da homotopía para estudar o cobordismo complexo.

Teorema 4.22. *Os grupos Ω_n^U son finitamente xerados e $\Omega_*^U \otimes \mathbb{Q}$ é o anel de polinomios racional con clases de cobordismo dos espazos proxectivos complexos.*

Co fin de estudar o subgrupo de torsión, un fai uso da cohomoloxía en $\mathbb{Z}_p$ con p primo. Como $H^*(BU_r;\mathbb{Z})$ é libre de torsión, tese, polo teorema de coeficientes universais, que $H^*(BU_r;\mathbb{Z}_p) \cong H^*(BU_r;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p$ é a $\mathbb{Z}_p$ álxebra de polinomios nas clases de Chern c_i módulo p. Para seguir, precísase coñecer as operacións en cohomoloxía módulo p.

A *álxebra de Steenrod módulo p*, $\mathcal{A}_p$, para un primo impar p é a seguinte álxebra graduada:

$$(\mathcal{A}_p)^i = H^{n+i}(K(\mathbb{Z}_p,n);\mathbb{Z}_p), \quad i < n.$$

Así, $\mathcal{A}_p$ é unha álxebra graduada asociativa sobre $\mathbb{Z}_p$, xerado polos símbolos β de grao 1 e $\mathcal{P}^i$ de grao $2i(p-1)$ con todas as relacións dadas por:

$$\beta^2 = 0,$$

$$\mathcal{P}^a\mathcal{P}^b = \sum_{k=0}^{[a/p]} (-1)^{a+k} \binom{(p-1)(b-k)-1}{a-pk} \mathcal{P}^{a+b-k}\mathcal{P}^k \qquad \text{se } a < pb,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^a\beta\mathcal{P}^b &= \textstyle\sum_{k=0}^{[a/p]}(-1)^{a+k}\binom{(p-1)(b-k)}{a-pk}\beta\mathcal{P}^{a+b-k}\mathcal{P}^k \\ &\quad + \textstyle\sum_{k=0}^{[(a-1)/p]}(-1)^{a+k-1}\binom{(p-1)(b-k)-1}{a-pk-1}\mathcal{P}^{a+b-k}\beta\mathcal{P}^k \quad \text{se } a \leq pb.\end{aligned}$$

Ademais, para cada par (X, A), existe un apareamento natural

$$\mathcal{A} \otimes H^*(X, A; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^*(X, A; \mathbb{Z}_p),$$

tal que:

- β é o operador cobordo de Bockstein asociado coa sucesión de coeficientes
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0.$$
- $\beta(xy) = (\beta x)y + (-1)^{\dim x}x(\beta y)$.
- $\mathcal{P}^i \colon H^n(X, A; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{n+2i(p-1)}(X, A; \mathbb{Z}_p)$ é aditivo.
- $\mathcal{P}^0 u = u$ para todo u.
- $\mathcal{P}^i u = u^p$ se dim $u = 2i$.
- $\mathcal{P}^i u = 0$ se dim $u < 2i$.
- (Fórmula de Cartan) $\mathcal{P}^i(xy) = \sum\limits_{j+k=i} \mathcal{P}^j x \cdot \mathcal{P}^k y$.

Agora pódese definir a aplicación diagonal,

$$\begin{array}{rccl}\Delta\colon & \mathcal{A}_p & \longrightarrow & \mathcal{A}_p \otimes \mathcal{A}_p \\ & \beta & \longmapsto & \Delta(\beta) = \beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta \\ & \mathcal{P}^i & \longmapsto & \Delta(\mathcal{P}^i) = \sum\limits_{j+k=1} \mathcal{P}^j \otimes \mathcal{P}^k,\end{array}$$

a que fai de $\mathcal{A}_p$ unha álxebra de Hopf sobre $\mathbb{Z}_p$, conexa. Obtéñense entón os seguintes lemas.

Lema 4.23. *$\tilde{H}^*(X, \mathbb{Z}_p)$ é un $\mathcal{A}_p/Q_0$-módulo, sendo Q_0 o operador de Bockstein, que se caracteriza por ser $Q_0 = \beta$ se p é impar e $Q_0 = Sq^1 \colon H^n(X, A; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{n+1}(X, A; \mathbb{Z}_2)$ de ser $p = 2$.*

Lema 4.24. *Sexa X un espectro converxente onde $\tilde{H}^*(X; \mathbb{Z})$ non ten torsión p-primaria e tal que $\tilde{H}^*(X; \mathbb{Z}_p)$ é un $\mathcal{A}_p/Q_0$-módulo. Entón, a homotopía de X non ten torsión p-primaria.*

Agora enúncianse os resultados principais desta sección, que nos permiten obter información sobre Ω_*^U.

Teorema 4.25. *O grupo Ω_n^U é cero para n impar e, no caso de ser n par, é abeliano e libre de rango igual ao número de particións de m. Aínda máis, dúas variedades case complexas estables son cobordantes se e só se teñen os mesmos números característicos en cohomoloxía enteira.*

Proba. Como $\tilde{H}^*(TBU;\mathbb{Z})$ é libre de torsión e os grupos módulo p son libres sobre $\mathcal{A}_p/Q_0$ para todo primo p, tense que os grupos de homotopía Ω_n^U son libres de torsión. Agora, como o núcleo do homomorfismo de Hurewicz, $\Omega_n^U \longrightarrow \tilde{H}_n(TBU;\mathbb{Z})$, é un grupo de torsión, pero Ω_n^U é libre de torsión, entón o cobordismo complexo está determinado polos números característicos en cohomoloxía enteira. ■

Teorema 4.26. *Ω_n^U é o anel de polinomios de clases x_i de dimensión $2i$. Ademais, poden escollerse xeradores $x_i \in \Omega_n^U$ de forma que, se $i+1=p^s$, sendo p primo, todos os números enteiros de Chern de x_i sexan divisibles por p.*

Bibliografía

[1] J. Álvarez López, P. Gilkey, The Witten deformation of the Dolbeault complex, J. Geom. 112 (2) (2021) Paper No. 25, 20.
URL `https://doi.org/10.1007/s00022-021-00589-0`

[2] J. Álvarez López, P. Gilkey, Derived heat trace asymptotics for the de Rham and Dolbeault complexes, Pure Appl. Funct. Anal. 8 (1) (2023) 49–66.
URL `https://doi.org/10.1080/23799927.2023.2184722`

[3] J. Álvarez López, P. B. Gilkey, The local index density of the perturbed de Rham complex, Czechoslovak Math. J. 71(146) (3) (2021) 901–932.
URL `https://doi.org/10.21136/CMJ.2021.0142-20`

[4] M. Atiyah, R. Bott, V. K. Patodi, On the heat equation and the index theorem, Invent. Math. 19 (1973) 279–330.
URL `https://doi.org/10.1007/BF01425417`

[5] R. Bott, L. W. Tu, Differential forms in algebraic topology., Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[6] S.-s. Chern, A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, Ann. of Math. (2) 45 (1944) 747–752.
URL `https://doi.org/10.2307/1969302`

[7] P. B. Gilkey, Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes, Advances in Math. 10 (1973) 344–382.
URL `https://doi.org/10.1016/0001-8708(73)90119-9`

[8] P. B. Gilkey, Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem, Studies in Advanced Mathematics, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[9] P. B. Gilkey, Asymptotic formulae in spectral geometry, Studies in Advanced Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[10] P. B. Gilkey, S. Nikčević, J. Pohjanpelto, The local index formula for a Hermitian manifold, Pacific J. Math. 180 (1) (1997) 51–56.
URL `https://doi.org/10.2140/pjm.1997.180.51`

[11] P. Günther, R. Schimming, Curvature and spectrum of compact Riemannian manifolds, J. Differential Geometry 12 (4) (1977) 599–618.
URL http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214434229

[12] F. Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry., enlarged ed., Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.

[13] H. P. McKean, Jr., I. M. Singer, Curvature and the eigenvalues of the Laplacian, J. Differential Geometry 1 (1) (1967) 43–69.
URL http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214427880

[14] S. P. Novikov, Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory., Dokl. Akad. Nauk SSSR (no. 1) (1981) 31–35.
URL https://www.mathnet.ru/eng/dan44681

[15] S. P. Novikov, The hamiltonian formalism and a many-valued analogue of morse theory, Russian Mathematical Surveys 37 (5) (1982) 1.
URL https://dx.doi.org/10.1070/RM1982v037n05ABEH004020

[16] V. K. Patodi, Curvature and the eigenforms of the Laplace operator, J. Differential Geometry 5 (1971) 233–249.
URL http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214429791

[17] Y. B. Rudyak, On Thom spectra, orientability, and cobordism, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998, with a foreword by Haynes Miller.

[18] R. T. Seeley, Complex powers of an elliptic operator., in: Singular Integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill., 1966), American Mathematical Society, 1967, pp. 288–307.

[19] R. E. Stong, Notes on cobordism theory., Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968, mathematical notes.

[20] E. Witten, Supersymmetry and Morse theory, J. Differential Geometry 17 (4) (1982) 661–692.
URL http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214437492