

ALICIA MASCAREÑAS PAZOS

**SOLITONES ALGEBRAICOS
ASOCIADOS A FLUJOS
GEOMÉTRICOS EN
DIMENSIÓN TRES**

**156b
2023**

**Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología**

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

ALICIA MASCAREÑAS PAZOS

**SOLITONES ALGEBRAICOS ASOCIADOS A
FLUJOS GEOMÉTRICOS EN DIMENSIÓN
TRES**

156b

2023

**Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología**

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2023



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

Solitones algebraicos asociados a flujos geométricos en dimensión tres

Alicia Mascareñas Pazos

Julio, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice

Resumen	5
Introducción	7
1. Preliminares	11
1.1. Variedades de Riemann	11
1.2. La curvatura	13
1.3. Variedades homogéneas	14
1.3.1. Variedades localmente simétricas de dimensión 3	15
1.3.2. Grupos de Lie de dimensión 3 con métrica invariante a la izquierda	15
2. Solitones asociados al flujo de Ricci	19
2.1. El flujo de Ricci: soluciones autosimilares y solitones	19
2.2. Solitones de Ricci gradiente	23
2.3. Solitones de Ricci algebraicos	24
2.4. Solitones de Ricci homogéneos	26
3. Solitones asociados a flujos geométricos	29
3.1. T-Solitones homogéneos gradiente	32
3.2. T-Solitones algebraicos	33
4. T-Solitones algebraicos en dimensión 3	35
4.1. Grupo unimodular	36
4.2. Grupo no unimodular	40
5. Solitones algebraicos para algunos flujos	45
5.1. Solitones algebraicos para el flujo de Ricci	45
5.2. Solitones algebraicos para el flujo de Cotton	48
5.3. Solitones algebraicos para el flujo de la curvatura cruzada	53
Bibliografía	59

Resumen

El objetivo de esta memoria es presentar resultados de clasificación para solitones algebraicos asociados a determinados flujos geométricos. Dado que un análisis directo de dicha condición resulta muy complejo en función del campo de tensores que determina el flujo, centramos nuestra atención en describir las propiedades que ha de cumplir dicho campo de tensores para garantizar la existencia de solitones algebraicos. Dichas caracterizaciones se aplican finalmente al flujo de Cotton y el flujo de la curvatura cruzada.

Abstract

This dissertation is dedicated to the classification of algebraic solitons associated to specific geometric flows. Owing to the intricacy of a direct analysis of that condition depending on the tensor field determining the flow, we focus our attention on describing the properties that this tensor field must satisfy to guarantee the existence of algebraic solitons. These characterizations are finally applied to the Cotton flow and the cross-curvature flow.

Introducción

Durante el Siglo XX, gran parte de la comunidad matemática centró su atención en la resolución de la Conjetura de Poincaré; esta sostiene que toda variedad de dimensión 3 compacta, sin borde y simplemente conexa es homeomorfa a la esfera. En verdad, esta conjetura abrió las puertas a un objetivo mucho más ambicioso: la clasificación de las variedades de dimensión 3 desde un punto de vista topológico, salvo homeomorfismos.

En términos informales, en topología dos variedades son iguales (homeomorfas) si se puede deformar la una en la otra sin realizar cortes; los dos objetos de la Figura 1 representan la esfera de dimensión 2, puesto que el cacahuete se puede deformar en la bola, pero resulta más sencillo identificar el espacio topológico en el objeto de la izquierda.

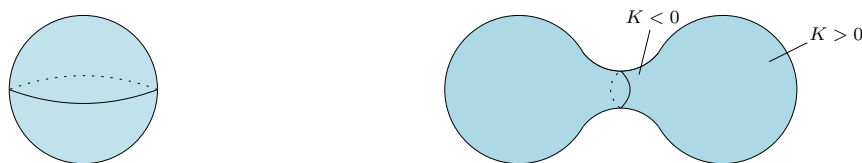


Figura 1: La 2-esfera \mathbb{S}^2 presentada en dos de sus formas.

Este problema, a priori topológico, puede abordarse desde el ámbito de la geometría diferencial gracias al siguiente resultado: toda variedad diferenciable admite una métrica Riemanniana. Así, para estudiar la topología de una variedad M se puede tomar una métrica arbitraria sobre M , y deformarla con el tiempo hasta alcanzar un espacio identificable en cierto sentido (la bola de la Figura 1 tiene curvatura constante). De este modo, el problema de clasificación se reformula en el sentido de encontrar una métrica identificable o canónica sobre la variedad M . La ventaja de deformar la métrica Riemanniana en lugar de la variedad radica en que la métrica se trata de funciones, de modo que se puede establecer una regla para hacer la deformación, o sea, una ecuación de evolución geométrica.

Con esto en mente, en 1982 Richard Hamilton [6] introduce el concepto de flujo de Ricci. Para una variedad Riemanniana (M, g) , el flujo de Ricci es una familia unoparamétrica de métricas que deforma la inicial g según la siguiente ecuación de evolución geométrica

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2\rho_t \quad ; \quad g_0 = g \quad (1)$$

donde ρ_t denota el tensor de Ricci asociado a la métrica g_t . Esta ecuación (1) es apropiada para el objetivo de Hamilton pues se trata de un análogo de la ecuación del calor para las métricas. De la misma forma que la ecuación del calor homogeneiza la distribución del calor en un dominio, la ecuación (1) tiende a distribuir la curvatura de Ricci uniformemente a lo largo de la variedad.

A nivel intuitivo, podemos analizar el caso dos dimensional, donde el tensor de Ricci se reescribe en términos de la curvatura de Gauss K como $\rho = Kg$. Así trabajando con la ecuación (1), se observa que las regiones donde $K < 0$ tienden a expandirse con el flujo (aumenta la distancia entre puntos) y las regiones donde $K > 0$ tienden a contraerse (disminuye la distancia). Observando la imagen 1 uno puede deducir que, conforme a lo esperado, el flujo de Ricci “redondea” el cacahuete hasta que toma la forma canónica de la bola.

Así, en principio el flujo de Ricci proporciona un método para “mejorar” la métrica inicial hasta alcanzar una métrica canónica, de la que se extrae una mejor comprensión de la topología de la variedad subyacente. En la práctica, lo más habitual es la aparición en tiempo finito de singularidades en el flujo; por ejemplo, la esfera con la métrica usual tiene curvatura positiva y se contrae hasta colapsar en un punto (véase ejemplo 2.2).

Un ejemplo particularmente importante de soluciones de (1) son los denominados *solitones de Ricci*. Son soluciones autosimilares que retienen su forma al ser procesadas por el flujo de forma que constituyen los puntos fijos geométricos (esto es, salvo homotecias y difeomorfismos). Estos solitones son atractores del flujo y aparecen en las posibles singularidades. Por tanto, juegan un papel esencial en el estudio del comportamiento asintótico del flujo de Ricci.

En la actualidad, el flujo de Ricci se ha consolidado como una herramienta habitual y poderosa en el campo de la geometría diferencial y la topología, y se han descrito muchas otras aplicaciones. A raíz de esto se han planteado nuevas ecuaciones de evolución geométrica, sustituyendo en la ecuación (1) el tensor de Ricci ρ por un nuevo campo de tensores simétrico T

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = T[t]. \quad (2)$$

El flujo de Cotton, el flujo de la curvatura cruzada, o el flujo determinado por el gradiente de la norma L^2 del tensor de curvatura son ejemplos ampliamente analizados en la bibliografía.

Con la intención última de conocer todos los solitones asociados a cualquier flujo (2), nos hemos fijado como objetivo del trabajo averiguar cuándo un tensor T determina un tipo particular de T -solitón. En concreto, la meta es describir las métricas invariantes a la izquierda sobre grupos de Lie que constituyen T -solitones algebraicos sobre grupos de Lie simplemente conexos de dimensión 3. Mientras que los T -solitones están determinados por un sistema de EDP generalmente sobredeterminado, en el caso de los T -solitones algebraicos dichas ecuaciones se reducen a un sistema algebraico.

La memoria se organiza como sigue.

El trabajo se inicia con un capítulo de preliminares, dedicado en gran parte a fijar la notación que se usará en adelante; en particular, la relacionada con las variedades de Riemann y los distintos tensores de curvatura que se construyen sobre estas, entre los que

se encuentra el tensor de Ricci. En la parte final del capítulo se presentan las variedades homogéneas, principal objeto de estudio, y su descripción en el caso simplemente conexo en dimensión 3: toda 3-variedad homogénea simplemente conexa es (localmente isométrica a) un espacio simétrico o un grupo de Lie dotado de una métrica invariante a la izquierda. Sobre estos grupos se estudiará la existencia de T-solitones algebraicos a partir de la descripción de las métricas invariantes a la izquierda aportada por Milnor en [13].

En el segundo capítulo, se lleva a cabo una exposición detallada del flujo de Ricci, que comienza por la conexión de las soluciones autosimilares del flujo con los solitones de Ricci. A continuación, se exponen dos tipos de solitones de Ricci; los solitones de Ricci gradiente y los solitones de Ricci algebraicos. Por último, se detallan los solitones de Ricci sobre variedades homogéneas de dimensión 3, que están completamente determinados y son de (al menos uno de) los dos tipos mencionados.

Tomando un tensor simétrico arbitrario T , en el siguiente capítulo se generaliza el flujo de Ricci a un T -flujo como solución de una nueva ecuación de evolución geométrica (2) que involucra al campo de tensores T . Aunque en principio el tensor es arbitrario, en el capítulo se presentan dos propiedades que debe cumplir el tensor para poder conectar las soluciones autosimilares del T -flujo y los T -solitones algebraicos. Se cierra el capítulo con la introducción de dos tipos de T -solitones, en paralelo al escenario del flujo de Ricci; los T -solitones gradiente y los T -solitones algebraicos.

En el capítulo 4, fijado un tensor simétrico T , procedemos a estudiar los T -solitones algebraicos sobre los grupos de Lie de dimensión 3 conexos y simplemente conexos, basándonos en la caracterización de Milnor introducida en el capítulo 1. Recopilamos las conclusiones en una serie de lemas, que para cada grupo recogen las condiciones sobre el tensor T para que este determine un T -soliton sobre el grupo.

En el último capítulo se dedica a aplicar los resultados sobre tres tensores en particular; el tensor de Ricci, el tensor de curvatura cruzada y el tensor de Cotton. Antes de nada, se confirma la clasificación ya conocida de los solitones de Ricci algebraicos. Finalmente, se describen los solitones algebraicos del tensor de Cotton y el tensor de curvatura cruzada mediante los métodos desarrollados en el capítulo anterior. Dichos solitones están recogidos en los siguientes resultados:

Teorema 5.2. *Sea $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un grupo de Lie Riemanniano de dimensión tres, donde la métrica es invariante a la izquierda. Entonces es un solitón algebraico de Cotton si y solo si es localmente conformemente llano (es decir, se anula el tensor de Cotton), o el grupo de Heisenberg con la única métrica invariante a la izquierda.*

Teorema 5.4. *Sea $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un grupo de Lie Riemanniano de dimensión tres, donde la métrica es invariante a la izquierda. Entonces es un solitón algebraico para el flujo de la curvatura cruzada si y solo si es un solitón de Ricci o una métrica invariante a la izquierda en el producto semi-directo $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$ determinada por*

$$[e_1, e_2] = k \left(-\frac{\delta}{\gamma} e_2 + e_3 \right), \quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal y $k := \frac{-\gamma^2 - 2\delta^2 \pm 2\sqrt{\gamma^2\delta^2 + \delta^4}}{\gamma}$.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo plasmaremos, a modo de introducción, una serie de conceptos y resultados que utilizaremos posteriormente a lo largo de este trabajo.

1.1. Variedades de Riemann

Sea M una variedad diferenciable de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $C^\infty(M)$ al álgebra de funciones diferenciables de la variedad sobre M y por T_pM al espacio de vectores tangentes a la variedad en el punto $p \in M$. El fibrado tangente a la variedad, que se construye como unión de los espacios tangentes a la variedad en todos sus puntos, se denotará por TM . Su generalización a cualquier orden, es decir, el fibrado de tensores de tipo (l, k) se denotará por $T_l^k(M)$ y el módulo de secciones diferenciables de fibrado, esto es, el conjunto campos de tensores de tipo (l, k) sobre M , se denotará por $\mathcal{T}_l^k(M)$. En particular, $\mathcal{T}(M)$ denotará el espacio de todos los campos de vectores diferenciables sobre M que representarán mediante letras mayúsculas X, Y, Z, \dots

Por otro lado, si (x^1, \dots, x^n) son coordenadas locales en M , los campos de vectores coordenados se denotarán por ∂_{x^i} o ∂_i , según conveniencia. El conjunto $\{\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n}\}$ constituye una base del espacio tangente en cada punto y su base dual $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ es una base del espacio cotangente en cada punto.

El principal objeto de nuestro estudio van a ser las *variedades de Riemann*, que no son más que un par (M, g) donde M es una variedad diferenciable, en principio de dimensión n , aunque nosotros nos centraremos en el caso tridimensional, y g es un tensor métrico; es decir, un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ simétrico y definido positivo.

Dada una variedad riemanniana (M, g) , diremos que $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una *referencia ortonormal* en un abierto \mathcal{U} de M si para todo punto $p \in M$ el conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$, con $e_i = E_i|_p$, forma una base ortonormal de T_pM ; es decir, si $g(e_i, e_j) = \delta_i^j$, donde δ_i^j denota la delta de Kronecker. En términos de una referencia local, podemos expresar cualquier campo de tensores, en particular, la métrica g como

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

donde $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$.

Isomorfismos musicales

La métrica permite transformar vectores en 1-formas y viceversa mediante los *isomorfismos musicales*.

La aplicación \flat transforma un vector X en una 1-forma X^\flat mediante la expresión $X^\flat(Y) = g(X, Y)$, donde $Y \in \mathcal{T}(M)$. En coordenadas locales, esto puede expresarse como $X^\flat = g_{ij}X^i dx^j$ de tal manera que la matriz asociada a \flat es (g_{ij}) .

Gracias al carácter no degenerado de la métrica, se puede considerar la inversa de \flat que denotaremos por \sharp y que lleva la 1-forma ω sobre el vector $\sharp\omega$ definido como el único verificando $g(\sharp\omega, X) = \omega(X) \forall X \in \mathcal{T}(M)$. En coordenadas locales $\sharp\omega = g^{ij}\omega_j \partial_i$ y su matriz asociada (g^{ij}) .

Dada una función $f \in C^\infty(M)$, definimos el *gradiente de f* como el campo de vectores $\text{grad}(f) = \sharp df$, donde df denota la diferencial de la función f .

Los isomorfismos musicales se pueden aplicar sobre campos de tensores de cualquier rango. A lo largo del trabajo, esto será se empleará principalmente para vincular tensores de tipo $(0, 2)$ simétricos y de tipo $(1, 1)$; así, sea T de tipo $(0, 2)$ simétrico, obtenemos el tensor de tipo $(1, 1)$ asociado $\sharp T$ como $T(X, Y) = g(\sharp T(X), Y)$.

Conexiones afines

Una *conexión afín* en una variedad M es un operador $D: \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \rightarrow \mathcal{T}(M)$ tal que

1. $D_X Y$ es $C^\infty(M)$ -lineal en X ,
2. $D_X Y$ es \mathbb{R} -lineal en Y ,
3. $D_X fY = X(f)Y + fD_X Y$,

para cualesquiera campos de vectores X e Y en M y cualquier función $f \in C^\infty(M)$.

Si (M, g) es una variedad riemanniana, existe una única conexión afín, que denotamos por ∇ , libre de torsión y que hace paralela la métrica g ; esto es, si X e Y son campos de vectores sobre la variedad M , entonces

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \quad Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

donde $[\cdot, \cdot]$ denota el corchete de Lie. Esta conexión se conoce como *conexión de Levi-Civita* y viene dada por la fórmula de Koszul:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g(X, [Z, Y]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]), \quad (1.1)$$

para cualesquiera X, Y y Z campos de vectores sobre M .

Dada una función $f \in C^\infty(M)$, se define el *operador hessiano de f* como el campo de tensores de tipo $(1, 1)$ dado por

$$h_f(X) = \nabla_X \text{grad}(f).$$

Mediante el operador \flat , se construye el *tensor hessiano de f* como el campo de tensores simétrico de tipo $(0, 2)$ dado por

$$\text{Hess}_f(X, Y) = h_f(X)^\flat(Y) = g(\nabla_X \text{grad}(f), Y),$$

y el *laplaciano de f* como la función dada por su traza $\Delta f = \text{tr } h_f$.

A partir de la conexión de Levi-Civita, se define también la *divergencia de un campo de vectores X* como la función $\text{div}(X) = \text{tr}\{Y \mapsto \nabla_X Y\}$.

1.2. La curvatura

Partiendo de la conexión de Levi-Civita, podemos definir lo que se conoce como *operador de curvatura*, o tensor de curvatura de tipo $(1, 3)$ según el criterio

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z,$$

para cualesquiera X, Y, Z campos de vectores sobre M . En coordenadas locales, se expresa como:

$$R = R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l.$$

A partir de este operador se puede definir el *tensor de curvatura* como el campo de tensores de tipo $(0, 4)$ dado por

$$R(X, Y, Z, V) = g(R(X, Y)Z, V).$$

Este tensor satisface las siguientes identidades algebraicas

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & R(X, Y, Z, V) = -R(Y, X, Z, V) = -R(X, Y, V, Z), \\ \text{(ii)} \quad & R(X, Y, Z, V) + R(Y, Z, X, V) + R(Z, X, Y, V) = 0, \\ \text{(iii)} \quad & R(X, Y, Z, V) = R(Z, V, X, Y), \end{aligned} \tag{1.2}$$

y la identidad diferencial:

$$\text{(iv)} \quad (\nabla_X R)(Y, Z, U, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, U, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, U, V) = 0. \tag{1.3}$$

Las identidades (ii) y (iv) se conocen como primera y segunda identidades de Bianchi, respectivamente.

Un *tensor curvatura algebraico* sobre un espacio vectorial \mathcal{V} es cualquier tensor de tipo $(0, 4)$, $A: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga las identidades algebraicas (1.2). Si $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial con un producto interior, entonces el tensor R^0 definido por

$$R^0(X, Y, Z, V) = \langle X, Z \rangle \langle U, V \rangle - \langle X, V \rangle \langle Y, Z \rangle \tag{1.4}$$

cumple las propiedades (1.2) y se denomina *tensor curvatura algebraico estándar*. Empleando el tensor curvatura algebraico estándar del espacio tangente a una variedad en un punto p , se define la *curvatura seccional* del plano $\Pi \subset T_p M$ como

$$K(\Pi) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{R^0(X, Y, X, Y)},$$

donde aquí $\{X, Y\}$ es una base arbitraria de Π . Si el valor de la curvatura seccional es independiente tanto del plano Π como del punto $p \in M$, diremos que la variedad (M, g) tiene curvatura seccional constante. Además, la curvatura seccional es constantemente c si, y solamente si, el tensor de curvatura se expresa como

$$R(X, Y)Z = c \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\},$$

en cuyo caso la variedad será localmente isométrica a una esfera \mathbb{S}^n (si $c > 0$), al espacio euclídeo \mathbb{R}^n (si $c = 0$), o al espacio hiperbólico \mathbb{H}^n (si $c < 0$).

A partir del operador de curvatura podemos definir el *tensor de Ricci* como el campo de tensores de tipo $(0, 2)$ dado por

$$\rho(X, Y) = \text{tr}\{Z \mapsto R(X, Z)Y\}.$$

El tensor de Ricci de una variedad riemanniana es simétrico y, por lo tanto, el *operador de Ricci*, dado por $g(\text{Ric } X, Y) = \rho(X, Y)$, es un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ auto-adjunto. La traza de este operador tiene nombre propio y es la *curvatura escalar* de la variedad. Si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una referencia ortonormal de una variedad riemanniana, entonces el tensor de Ricci y la curvatura escalar se expresan como

$$\rho(X, Y) = \sum_i R(X, E_i, Y, E_i), \quad \tau = \sum_{ij} R(E_i, E_j, E_i, E_j).$$

Además, considerando un sistema local de coordenadas (x^1, \dots, x^n) en la variedad, el tensor de Ricci y la curvatura escalar se escriben en coordenadas como

$$\rho(X, Y) = g^{ij} R(X, \partial_{x^i}, Y, \partial_{x^j}), \quad \tau = g^{ij} \rho(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}).$$

Se dice que una variedad riemanniana (M, g) de dimensión n es *Einstein* si su tensor de Ricci es un múltiplo del tensor métrico. En tal caso, al tomar trazas se observa que

$$\rho = \frac{\tau}{n}g,$$

y la curvatura escalar τ es necesariamente constante si la variedad M es conexa y su dimensión es mayor o igual que tres. Para variedades conexas de dimensión 3, la condición de ser Einstein es equivalente a la de ser de curvatura seccional constante [9].

1.3. Variedades homogéneas

Una variedad Riemanniana (M, g) es homogénea si existe un subgrupo G del grupo de isometrías de (M, g) que actúa transitivamente sobre M . Equivalentemente, para cada par de puntos $p, q \in M$ existe una isometría $\Phi : M \rightarrow M$ tal que $\Phi(p) = q$. Si la aplicación Φ es simplemente una isometría de un entorno de p en un entorno de q , entonces diremos que la variedad (M, g) es localmente homogénea. Toda variedad Riemanniana homogénea y conexa es completa [Kobayashi-Nomizu].

Un caso especial de variedades (localmente) homogéneas es el proporcionado por los espacios (localmente) simétricos. Una variedad (M, g) es localmente simétrica si y solo si las simetrías locales $s_p : \exp_p(ru) \mapsto s_p(\exp_p(ru)) = \exp_p(-ru)$, que están definidas en entornos abiertos suficientemente pequeños del punto $p \in M$, son isometrías. Todo espacio simétrico es homogéneo, ya que podemos conectar cualesquiera dos puntos $p, q \in M$ por una isometría; esto se debe a que la variedad es geodésicamente completa por ser simétrico. Así, podemos conectar esos dos puntos p y q por una geodésica γ_{pq} . Si denotamos por $m \in \gamma_{pq}$ al punto medio, entonces la simetría geodésica en m es una isometría conectando los puntos, $s_m(p) = q$.

Otro ejemplo de variedades homogéneas viene dado por los grupos de Lie G con una métrica invariante a la izquierda $\langle \cdot, \cdot \rangle$, donde las isometrías son las translaciones a la izquierda $L_h, h \in G$.

Además, bajo ciertas condiciones, las variedades riemannianas de dimensión 3 pueden clasificarse en alguno de estos tipos; Sekigawa demostró en [19] que toda variedad riemanniana homogénea conexa y simplemente conexa en dimensión tres es un espacio simétrico o isométrico a un grupo de Lie con una métrica invariante a la izquierda $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Examinemos más a fondo las posibilidades para cada una de estas dos clases, que como precisaremos más adelante, no son necesariamente excluyentes.

1.3.1. Variedades localmente simétricas de dimensión 3

Dado que el tensor de curvatura de todo espacio simétrico es paralelo, también lo es el tensor de Ricci. Así, un espacio localmente simétrico de dimensión tres es Einstein o localmente isométrico a un producto $\mathbb{R} \times N(c)$, donde $N(c)$ es una superficie de curvatura seccional constante c . Como las métricas de Einstein en dimensión tres tienen curvatura seccional constante, toda variedad localmente simétrica es localmente homotética a uno de los modelos $\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$, o un producto $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, o $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$. Mientras que el espacio simétrico $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ no puede ser difeomorfo a ningún grupo de Lie, los otros espacios modelo son isométricos a ciertos grupos de Lie.

1.3.2. Grupos de Lie de dimensión 3 con métrica invariante a la izquierda

Todo grupo de Lie G tiene asociada un álgebra de Lie \mathfrak{g} determinada por el espacio tangente en el neutro, $\mathfrak{g} = T_e G$ y reciprocamente, toda álgebra de Lie tiene asociado un único grupo de Lie (salvo isomorfismos) conexo y simplemente conexo. Dado que los objetos con los que trabajaremos son invariantes por translaciones a la izquierda, podemos restringir nuestro análisis a las correspondientes álgebras de Lie.

Toda métrica de Riemann invariante a la izquierda en un grupo de Lie G viene determinada por un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido positivo sobre su álgebra de Lie \mathfrak{g} . Considerando los grupos de Lie de dimensión tres, una descripción de dichos productos escalares en las correspondientes álgebras de Lie dependería de seis parámetros reales. Sin embargo, pa-

ra nuestros objetivos resulta más útil la descripción proporcionada por Milnor [13], que describe la estructura de grupo a partir de una base ortonormal del álgebra de Lie.

Sea $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un álgebra de Lie de dimensión tres con un producto escalar definido positivo. Llamaremos *operador de estructura* al endomorfismo del álgebra de Lie $L(x \wedge y) = [x, y]$, donde “ \wedge ” denota el producto vectorial $\langle x \wedge y, z \rangle = \det(x, y, z)$.

Grupos de lie unimodulares

Las álgebras de Lie *unimodulares* ($\text{tr ad}(x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$) están caracterizadas por el hecho de poseer un operador de estructura auto-adjunto [13, Lema 4.1]. Así pues, en el caso unimodular, considerando una base ortonormal orientada $\{e_1, e_2, e_3\}$ de auto-vectores de L se pueden describir todas las métricas invariantes a la izquierda a partir de la estructura del álgebra de Lie

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad (1.5)$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal de \mathfrak{g} y los autovalores λ_i se denominarán la constantes de estructura. Basádonos en la elección de orientación, se puede asumir que a lo sumo uno de los λ_i es negativo. Así, la estructura de autovalores del operador de configuración determina el álgebra de Lie como sigue:

- (i) Las álgebras semi-simples $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ se corresponden con la situación $\ker L = \{0\}$, donde todos los autovalores tienen el mismo signo (en el caso de $\mathfrak{su}(2)$), o existen autovalores de signos opuestos (en el caso de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$).

Las métricas invariantes a la izquierda constituyen, salvo homotecias, una familia dos-paramétrica determinada por (1.5) con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, \lambda_2, \lambda_3)$.

- (ii) El operador de estructura tiene núcleo de dimensión uno en el caso del grupo Euclídeo, correspondiente al álgebra de Lie $\mathfrak{e}(2)$ y el grupo de Poincaré, correspondiente al álgebra de Lie $\mathfrak{e}(1, 1)$. El grupo Euclídeo se corresponde con la situación en que los autovalores no nulos tengan el mismo signo, mientras que el grupo de Poincaré se obtiene cuando los autovalores no nulos tengan signos opuestos.

Salvo una rotación en los vectores $\{e_i\}$, podemos suponer que los autovalores del operador de estructura están dados por $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$. Tras una homotecia $e_i \mapsto \frac{1}{\lambda_1} e_i$, tenemos que existe (salvo homotecias) una familia uno-paramétrica de métricas invariantes a la izquierda en los grupos Euclideo y de Poincaré determinada por (1.5) con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, \lambda_2, 0)$.

- (iii) El grupo de Heisenberg se corresponde con el álgebra de Lie unimodular cuyo operador de estructura verifica $\dim \ker L = 2$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los autovalores del operador de estructura son $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1, 0, 0)$. Considerando ahora la métrica homotética determinada por la base ortogonal $\hat{e}_i = \frac{1}{\lambda_1} e_i$, se tiene que toda métrica invariante a la izquierda sobre el grupo de Heisenberg es homotética a la determinada por (1.5) con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, 0)$.

- (iv) Cuando el operador de estructura $L = 0$, se obtiene el álgebra de Lie abeliana que se corresponde con el grupo abeliano \mathbb{R}^3 .

Un cálculo inmediato muestra que en tal situación cualquier métrica invariante a la izquierda es llana, es decir, localmente isométrica al espacio Euclídeo.

Los grupos de Lie asociados a las álgebras de Lie unimodulares de dimensión tres se corresponden con los siguientes:

- El *grupo especial unitario* $SU(2)$ constituido por las matrices unitarias 2×2 de determinante uno. Cuando los tres coinciden los tres autovalores, el grupo de Lie resultante es homotético a la esfera S^3 con la métrica usual.
- El recubrimiento universal del *grupo lineal especial* $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, donde $SL(2, \mathbb{R})$ está formado por las matrices reales 2×2 con determinante uno.
- El recubrimiento universal $\widetilde{E}(2)$ del *grupo Euclídeo* $E(2)$ formado por los movimientos rígidos del plano Euclídeo. Se corresponde con un producto semi-directo $\mathbb{R} \ltimes_{\varphi} \mathbb{R}^2$, donde el endomorfismo φ tiene autovalores complejos imaginarios.
- El *grupo de Poincaré* $E(1, 1)$ correspondiente a los movimientos rígidos del plano de Minkowski. Se corresponde con un producto semi-directo $\mathbb{R} \ltimes_{\varphi} \mathbb{R}^2$, donde el endomorfismo φ es auto-adjunto con traza cero.
- El *grupo de Heisenberg*, Heis, que se corresponde con el producto semi-directo $\mathbb{R} \ltimes_{\varphi} \mathbb{R}^2$, donde el endomorfismo φ es nilpotente en dos pasos.
- El *grupo abeliano* \mathbb{R}^3 .

En definitiva, las seis posibilidades para las constantes de estructura de un álgebra de Lie orientada correspondiente a un grupo de Lie unimodular simplemente conexo de dimensión 3 se recogen en la siguiente tabla:

Signos de autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Grupos unimodulares asociados
+ + +	$SU(2)$
+ + -	$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$
+ + 0	$\widetilde{E}(2)$
+ - 0	$E(1, 1)$
+ 0 0	Heis
0 0 0	\mathbb{R}^3

Grupos de lie no unimodulares

La descripción dada por Milnor de las álgebras de Lie *no unimodulares* se centra en el estudio del núcleo unimodular $\mathfrak{u} = \{x \in \mathfrak{g}; \text{tr ad}(x) = 0\}$, que es un ideal abeliano de \mathfrak{g} que contiene al conmutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Por tanto el álgebra de Lie \mathfrak{g} es un producto semi-directo $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes \mathfrak{u}$ [13]. El producto semi-directo está determinado por el endomorfismo $\text{ad}(e_1)$, que es independiente de la elección de $e_1 \notin \mathfrak{u}$. Así, las métricas invariantes a la izquierda sobre los grupos de Lie no unimodulares están determinados por

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3, \quad [e_2, e_3] = 0, \tag{1.6}$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal de \mathfrak{g} y $\text{tr ad}(e_1) = \alpha + \delta \neq 0$.

La descripción anterior admite dos simplificaciones. En primer lugar uno puede asumir que $\text{tr ad}(e_1) = (\alpha + \delta) = 2$ trabajando en la clase homotética de la métrica de partida. Por otro lado, rotando los vectores $\{e_2, e_3\}$, existe una base ortonormal del núcleo unimodular de forma que $\text{ad}(e_1)(e_2)$ es ortogonal a $\text{ad}(e_1)(e_3)$, o lo que es equivalente, $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

De entre las extensiones semi-directas determinadas por un endomorfismo $\varphi = -\text{ad}(e_1)$, las siguientes son especialmente significativas:

- (i) Si el endomorfismo φ es un múltiplo de la identidad, entonces la curvatura de la correspondiente métrica invariante a la izquierda es constante y negativa. El correspondiente grupo de Lie $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es homotético al espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 .
- (ii) Si el endomorfismo φ es auto-adjunto y singular ($\dim \ker \varphi = 1$), entonces el grupo de Lie Riemanniano resultante es homotético a la variedad producto $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$, donde \mathbb{H}^2 es el plano hiperbólico.

A modo de resumen final, el siguiente recoge las variedades riemannianas homogéneas conexas y simplemente en dimensión 3 (módulo isometrías locales).

$\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$	\mathbb{S}^3	$SU(2)$	$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$	Unimodular
	\mathbb{R}^3	$\widetilde{E}(2)$	$E(1, 1)$	Heis
	$\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$			
	\mathbb{H}^3	No unimodular		
<u>Simétricas</u>	<u>Grupos de Lie</u>			

Capítulo 2

Solitones asociados al flujo de Ricci

En este capítulo expondremos algunos resultados conocidos para solitones de Ricci con especial énfasis en la descripción de los solitones de Ricci homogéneos en dimensión tres. Estos resultados servirán no solo de modelo para la situación más general sino que en muchos casos proporcionan solitones para flujos asociados a ciertos campos de tensores.

2.1. El flujo de Ricci: soluciones autosimilares y solitones

Sea M una variedad diferenciable. Un *flujo de Ricci sobre M* es una familia uno-paramétrica g_t de métricas de Riemann sobre M , de forma que se cumple la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2\rho_t, \quad (2.1)$$

donde ρ_t denota el tensor de Ricci asociado a la métrica g_t . Hamilton probó en [6] la existencia local de solución para el flujo de Ricci sobre variedades cerradas (compactas y sin frontera).

Teorema 2.1 (Teorema de existencia y unicidad de Hamilton). *Sea M una variedad cerrada y g_0 una métrica Riemanniana sobre M . Entonces existe un único flujo de Ricci g_t , con $t \in [0, T)$ para cierto $T > 0$, verificando la condición inicial $g_{t=0} = g_0$.*

Ejemplo 2.2. La situación más sencilla en el estudio del flujo de Ricci ocurre cuando la métrica inicial g_0 es una métrica de Einstein, es decir, $\rho_{g_0} = \lambda g_0$ para cierta $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, la familia uno-paramétrica de métricas homotéticas $g_t = (1 - 2\lambda t)g_0$ es un flujo de Ricci ya que verifica la Ecuación (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2\lambda g_0 = -2\rho_{g_0} = -2\rho_{g_t},$$

donde en la última igualdad empleamos la invarianza por homotecias del tensor de Ricci.

En particular, si consideramos M una variedad cerrada, el Teorema 2.1 garantiza que este es, además, el único flujo de Ricci con métrica inicial g_0 . Dicho flujo se comporta de forma diferenciada sobre la métrica inicial g_0 en función del signo de la curvatura escalar:

- (i) Si la curvatura escalar $\tau = n\lambda > 0$ entonces $\lambda > 0$, y el flujo g_t está definido en un intervalo $t \in (-\infty, \frac{1}{2\lambda})$. El flujo de Ricci “contrae” a la métrica para tiempo positivo y existe una singularidad en tiempo finito.

A modo de ejemplo, partimos de la esfera unitaria con la métrica usual (\mathbb{S}^n, g_0) , que es Einstein con $\rho_0 = (n-1)g_0$. El único flujo de Ricci asociado con métrica inicial g_0 viene dado por $g_t = (1 - 2(n-1)t)g_0$ y hace que la esfera colapse a un punto en tiempo $T = \frac{1}{2(n-1)}$ como ilustra la siguiente Figura 2.1.

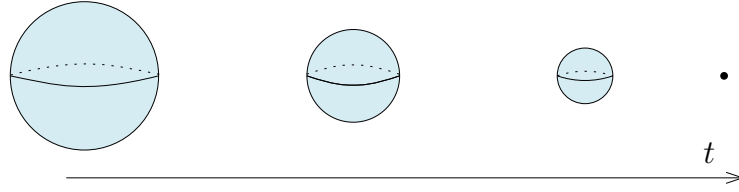


Figura 2.1: Contracción de la esfera en tiempo finito.

- (ii) Si la curvatura escalar $\tau = 0$, entonces la variedad inicial (M, g_0) es Ricci llana y el flujo (definido en toda la recta real) es constante.
- (iii) Si la curvatura escalar $\tau = n\lambda < 0$ entonces $\lambda < 0$ y el flujo g_t está definido en un intervalo $t \in (\frac{1}{2\lambda}, +\infty)$. El flujo de Ricci “expande” a la métrica para tiempo positivo.

Los únicos puntos fijos genuinos del flujo de Ricci están determinados por las métricas Ricci llanas correspondientes al caso (ii) en el ejemplo 2.2. Desde un punto de vista geométrico, uno podría considerar aquellos flujos que se mantengan constantes módulo difeomorfismos y escalamientos, lo que da lugar a la noción de solución autosimilar.

Una *solución autosimilar* del flujo de Ricci con métrica inicial g_0 es una familia uno-paramétrica de métricas dadas por

$$g_t := \sigma(t) \psi_t^* g_0 \quad (2.2)$$

verificando la Ecuación (2.1), donde $\sigma(t)$ es una función positiva con $\sigma(0) = 1$ y $\psi_t : M \rightarrow M$ es un grupo uno-paramétrico de difeomorfismos de M .

Observación 2.3. Veremos a continuación que existe una correspondencia biunívoca entre soluciones autosimilares del flujo de Ricci y los denominados *solitones de Ricci*. Un *solitón de Ricci* asociado a (2.1) es un triple (M, g, X) tal que X es un campo de vectores en la variedad de Riemann (M, g) verificando la ecuación

$$\mathcal{L}_X g + \rho = \mu g \quad (2.3)$$

para cierto $\mu \in \mathbb{R}$, donde \mathcal{L} denota la derivada de Lie. Cuando no sea necesario precisar el campo, diremos simplemente que la métrica g es un solitón de Ricci sobre M .

Supongamos que $g_t = \sigma(t)\psi_t^*g_0$ es una solución autosimilar del flujo de Ricci (2.1). Teniendo en cuenta que $\rho_{g_t} = \rho_{\psi_t^*g_0} = \psi_t^*\rho_{g_0}$ tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t = -2\rho_{g_t} = -2\psi_t^*\rho_{g_0} = \psi_t^*(-2\rho_{g_0}). \quad (2.4)$$

Por otro lado, derivando en la expresión de las métricas g_t se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t = \sigma'(t)\psi_t^*g_0 + \sigma(t)\psi_t^*(\mathcal{L}_Xg_0) = \psi_t^*(\sigma'(t)g_0 + \sigma(t)\mathcal{L}_Xg_0) \quad (2.5)$$

donde X denota el generador infinitesimal de ψ_t , esto es, el campo de vectores determinado por $X(\psi_t(p)) = \frac{d}{dt}(\psi_t(p))$. Eliminando el pull-back en 2.4 y 2.5 obtenemos

$$-2\rho_{g_0} = \sigma'(t)g_0 + \mathcal{L}_{\tilde{X}}g_0$$

donde $\tilde{X}(t) := \sigma(t)X(t)$. Si denotamos $\mu = -\frac{1}{2}\sigma'(0)$, la ecuación anterior en $t = 0$ es:

$$\mathcal{L}_Xg_0 + 2\rho_{g_0} = 2\mu g_0.$$

Así pues, dada una *solución autosimilar* del flujo de Ricci, existe un campo de vectores $\frac{1}{2}X$ en M tal que

$$\mathcal{L}_{\frac{1}{2}X}g_0 + \rho_{g_0} = \mu g_0,$$

lo que muestra que $(M, g_0, \frac{1}{2}X)$ es un solitón de Ricci.

Recíprocamente, veamos que todo solitón de Ricci da lugar a una solución autosimilar de (2.1). A fin de simplificar la demostración, supondremos que X es un campo de vectores completo en una variedad Riemanniana (M, g) . Sea $\psi_t : M \rightarrow M$ la familia de difeomorfismos generada por X según:

$$\frac{d}{dt}(\psi_t(p)) = \frac{2}{1-2\mu t}X(\psi_t(p)) \quad y \quad \psi_0 = \text{Id}_M$$

que está definida para todo $t \in (-\infty, \frac{1}{2\mu})$ si $\mu > 0$, para todo $t \in (-\infty, \frac{1}{2\mu})$ $\mu > 0$ y para todo $t \in \mathbb{R}$ si $\mu = 0$. Si consideramos la familia uno-paramétrica de métricas $g_t = (1-2\mu t)\psi_t^*g$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}g_t &= -2\mu\psi_t^*g + (1-2\mu)\psi_t^*\mathcal{L}_{\frac{1}{1-2\mu t}X}g \\ &= \psi_t^*(-2\mu g + \mathcal{L}_{X(\psi_t(p))}g). \end{aligned}$$

Ahora, como el campo de vectores X verifica la ecuación $\mathcal{L}_Xg + \rho_g = \mu g$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t = \psi_t^*(-2\rho) = -2\psi_t^*\rho_g = -2\rho_{\psi_t^*g} = -2\rho_{(1-2\mu t)\psi_t^*g} = -2\rho_{g_t}$$

y por tanto g_t es una solución autosimilar del flujo de Ricci.

Observación 2.4. Sea (M, g, X) un solitón de Ricci. Tomando trazas en la expresión (2.3) se tiene que $2 \operatorname{div}(X) + \tau = n\mu$, con lo que $\mu = \frac{1}{n}(\tau + 2 \operatorname{div}(X))$. En definitiva, la constante del solitón μ está determinada por la propia ecuación.

El signo que toma la constante del solitón influye en el comportamiento del flujo de Ricci. Así, diremos que un solitón de Ricci es *contractivo*, *estático* o *expansivo* si $\mu > 0$, $\mu = 0$ o $\mu < 0$ respectivamente.

Observemos ahora que el campo X de la ecuación (2.3) es único salvo campos de vectores homotéticos.

Nota 2.5. Un campo de vectores ξ sobre una variedad Riemanniana (M, g) es *Killing* si su flujo local se realiza por isometrías. Más generalmente, un campo será *homotético* si su flujo local se realiza por homotecias. Equivalentemente, ξ es un campo homotético si y solo si la derivada de Lie $\mathcal{L}_\xi g = \kappa g$ para alguna constante $\kappa \in \mathbb{R}$, que se anula cuando el campo es de Killing. El conjunto de campos de vectores homotéticos (o de Killing) sobre una variedad de Riemann (M, g) tiene una estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Fijada una variedad de Riemann (M, g) , un cálculo sencillo a partir de la ecuación (2.3) muestra que

- (i) Si X_1 y X_2 son solitones de Ricci en (M, g) con constantes de solitón μ_1 y μ_2 , respectivamente, entonces $\xi = X_1 - X_2$ es un campo de vectores homotético con $\mathcal{L}_\xi g = (\mu_1 - \mu_2)g$.
- (ii) Si (M, g, X) es un solitón de Ricci con constante de solitón μ y ξ es un campo de vectores homotético verificando $\mathcal{L}_\xi g = \kappa g$, entonces $(M, g, X + \xi)$ es un solitón de Ricci con constante de solitón $\mu + \kappa$.

Así, para una variedad fijada (M, g) , el conjunto de campos que verifican (2.3) es un *espacio afín asociado a homotecias*.

Tal y como se señaló previamente, nos enfocaremos en la descripción de solitones de Ricci homogéneos de dimensión 3, esto es, analizar qué variedades de Riemann homogéneas (M^3, g) admiten un campo X verificando la ecuación (2.3).

La existencia de campos de Killing está garantizada sobre espacios homogéneos, si bien la existencia de campos estrictamente homotéticos es una condición más restrictiva y solo puede ocurrir en la situación homogénea si la variedad es llana. En consecuencia, si una variedad homogénea no llana admite un solitón de Ricci (M, g, X) , cualquier otro solitón de Ricci sobre (M, g) ha de tener la misma constante de solitón y, por tanto, el nuevo campo de solitón se diferencia del primero en un campo de vectores de Killing. Así pues, el estudio de los solitones de Ricci homogéneo se realiza módulo campos de vectores de Killing.

Observación 2.6. Si la variedad (M, g) es Einstein $\rho = \mu g$, se verifica la ecuación (2.3) para el campo de vectores $X \equiv 0$ (o cualquier campo Killing). Así, cuando la variedad sea Einstein diremos que el solitón (M, g, X) es trivial.

En el estudio de los solitones es fundamental tener en cuenta que la existencia de solitones de Ricci es una propiedad invariante por homotecias. La ecuación (2.3) es homotéticamente invariante tras un reescalado del campo de vectores solitón mediante $\kappa^2 \in \mathbb{R}$, de forma que:

$$(M, g, X) \text{ solitón con constante } \mu \quad \Leftrightarrow \quad (M, \kappa^2 g, \frac{1}{\kappa^2} X) \text{ solitón con constante } \frac{\mu}{\kappa^2}$$

Así pues, a la hora de describir los solitones de Ricci homogéneos, lo haremos módulo homotecias a fin de simplificar la exposición.

En las siguientes dos secciones presentamos dos tipos (no excluyentes) de solitones de Ricci; los solitones de Ricci gradiente y algebraicos.

2.2. Solitones de Ricci gradiente

Veamos en primer lugar un tipo especial de solitones de Ricci. Un solitón de Ricci (M, g, X) se dice *gradiente* si el campo del solitón $X = \frac{1}{2} \text{grad}(f)$, donde $\text{grad}(f)$ denota el gradiente de una función potencial $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. En esta situación denotaremos el solitón como (M, g, f) . Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}_X g = \mathcal{L}_{\frac{1}{2} \text{grad}(f)} g = \text{Hess}_f$, la ecuación (2.3) se reescribe como:

$$\text{Hess}_f + \rho = \mu g,$$

y la constante $\mu = \tau + \Delta f$.

Observación 2.7. La propiedad de ser solitón gradiente se mantiene por homotecias de la métrica; si para cierta $\kappa \in \mathbb{R}$, consideramos la métrica homotética $(M, \kappa^2 g, \frac{1}{\kappa^2} X)$, el campo solitón continua siendo un solitón gradiente $\frac{1}{\kappa^2} X = \text{grad}(\frac{1}{2\kappa^2} f)$.

Diremos que un solitón de Ricci gradiente es *rígido* si la variedad (M, g) es isométrica a un producto $N \times \mathbb{R}^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, donde (N, g_N) es una variedad de Einstein con $\rho_N = \mu g_N$ y la función potencial está determinada por la norma de la proyección en el factor euclídeo; $f(\cdot) = \frac{\mu}{2} \|\pi_{\mathbb{R}^k}(\cdot)\|^2$. De la propia construcción se sigue que los solitones rígidos estáticos son triviales (Einstein), ya que en dicho caso la función potencial se anula y su gradiente también.

Los solitones de Ricci gradientes son rígidos bajo la hipótesis de homogeneidad (incluso de homogeneidad local), como mostraron Petersen y Wylie:

Teorema 2.8 ([17]). *Sea (M, g) una variedad homogénea. Si (M, g, f) es un solitón de Ricci gradiente, entonces es rígido.*

Observación 2.9. Los solitones rígidos no triviales en dimensión tres han de corresponderse con productos de la forma $N \times \mathbb{R}$, donde (N, g_N) es una superficie de Einstein. Dado que bajo nuestras hipótesis las variedades Einstein de dimensión dos tienen curvatura constante, cualquier solitón rígido no trivial de dimensión tres es localmente homotético a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ o $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$. En ambas situaciones la variedad subyacente es simétrica y, por tanto, homogénea.

2.3. Solitones de Ricci algebraicos

Los solitones de Ricci se corresponden con soluciones autosimilares (2.2) del flujo de Ricci, $g_t := \sigma(t)\psi_t^*g_0$, donde ψ_t es una familia uno-paramétrica de difeomorfismos. Cuando la variedad bajo consideración es un grupo de Lie G , los automorfismos del grupo son transformaciones que preservan tanto la estructura algebraica de grupo como la diferenciable (difeomorfismos). Así pues, fijada una métrica invariante a la izquierda sobre un grupo de Lie, una cuestión natural es la existencia de soluciones autosimilares del flujo de Ricci determinadas por una familia uno-paramétrica de automorfismos $\Psi_t : G \rightarrow G$. Lauret mostró en [10] que dichas soluciones autosimilares se corresponden con ciertas derivaciones sobre el álgebra de Lie del grupo.

Así, decimos que un grupo de Lie con métrica invariante por la izquierda $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *solitón de Ricci algebraico* si su operador de Ricci verifica

$$\text{Ric} = \mu \text{Id} + D, \quad (2.6)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y D es una derivación en \mathfrak{g} , el álgebra de Lie de G .

Observación 2.10. Los solitones de Ricci algebraicos se mantienen por homotecias de la métrica; si $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un solitón de Ricci algebraico con constante de solitón μ , y para cierta constante $\kappa \in \mathbb{R}$ consideramos la métrica homotética $\widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle} := \kappa^2 \langle \cdot, \cdot \rangle$, está continua siendo un solitón algebraico con contante de solitón $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\kappa^2}$ puesto que

$$\widetilde{\text{Ric}} - \tilde{\mu} \text{Id} = \frac{1}{\kappa^2} \text{Ric} - \tilde{\mu} \text{Id} = \frac{1}{\kappa^2} (\text{Ric} - \kappa^2 \tilde{\mu} \text{Id}) = \frac{1}{\kappa^2} (\text{Ric} - \mu \text{Id}),$$

que es una derivación por serlo $\text{Ric} - \mu \text{Id}$.

Examinemos ahora como un solitón de Ricci *algebraico* da lugar a un solitón de Ricci.

Dado que los solitones de Ricci algebraicos son una estructura puramente algebraica determinada a nivel de un álgebra de Lie, a fin de construir el solitón de Ricci asociado, consideramos el único grupo de Lie G conexo y simplemente conexo asociado al álgebra de Lie \mathfrak{g} . De hecho, a lo largo de todo el trabajo supondremos todas las variedades son conexas y simplemente conexas o, en otro caso, los resultados se referirán a su recubrimiento universal.

Dado que $D = \text{Ric} - \mu \text{Id}$ es una derivación en \mathfrak{g} , consideramos el grupo uno-paramétrico de automorfismos de G determinado por

$$d(\Psi_t)_e = \text{Exp}\left(\frac{t}{2}D\right)$$

y el campo de vectores X en G correspondiente al generador infinitesimal de Ψ_t determinado por

$$X(p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Psi_t(p).$$

Así, calculando la derivada de Lie de la métrica invariante a la izquierda respecto al campo de vectores X y evaluando sobre vectores tangentes en el neutro, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X \langle \cdot, \cdot \rangle)(e_i, e_j) &= \frac{d}{dt}(\Psi_t^* \langle \cdot, \cdot \rangle)(e_i, e_j) \\
&= \frac{1}{2}(\langle De_i, e_j \rangle + \langle e_i, De_j \rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle \text{Ric } e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \text{Ric } e_j \rangle) - \mu \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \rho(e_i, e_j) - \mu \langle e_i, e_j \rangle.
\end{aligned}$$

Por tanto, si suponemos que los vectores $\{e_i\}$ forman una base ortonormal de $T_e G$ entonces

$$\mathcal{L}_X \langle \cdot, \cdot \rangle - \rho = -\mu \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Así pues, se tiene que $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle, -X)$ es un solitón de Ricci.

Observación 2.11. Los solitones de Ricci algebraicos no triviales están completamente determinados en dimensiones bajas. En el caso de dimensión tres, estos se corresponden con tres situaciones diferentes. Todas ellas se realizan sobre extensiones semi-directas del grupo abeliano y pueden ser descritas como métricas en \mathbb{R}^3 de la siguiente forma.

- Solitones algebraicos sobre el grupo de Heisenberg: la geometría Nil_3 .

Utilizando la descripción de Milnor de las métricas invariantes a la izquierda esbozada en el capítulo anterior, toda métrica invariante a la izquierda en el grupo de Heisenberg es homotética a la métrica determinada por los autovalores del operador de estructura $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, 0)$.

En coordenadas cartesianas (x, y, z) de \mathbb{R}^3 , la métrica invariante a la izquierda en el grupo de Heisenberg se expresa como $g = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$, o equivalentemente

$$g = dx \otimes dx + (1 + x^2)dy \otimes dy + dz \otimes dz - x(dy \otimes dz + dz \otimes dy)$$

- Solitones algebraicos sobre el grupo de Poincaré: la geometría Sol_3 .

Las métricas invariantes a la izquierda sobre el grupo de Poincaré $E(1, 1)$ se corresponden homotéticamente con los posibles espectros $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, \lambda, 0)$, para $\lambda < 0$. La existencia de solitones algebraicos se corresponde con la situación en que $\lambda = -1$. En coordenadas cartesianas (x, y, z) de \mathbb{R}^3 , el solitón de Ricci algebraico en $E(1, 1)$ se corresponde con la métrica

$$g = dx \otimes dx + e^{2x} dy \otimes dy + e^{-2x} dz \otimes dz$$

- Solitones algebraicos sobre grupos de Lie no unimodulares.

Las métricas invariantes a la izquierda sobre grupos de Lie no unimodulares en dimensión tres se corresponden con las extensiones semi-directas del grupo abeliano \mathbb{R}^2 [13]. Por tanto están determinados por los endomorfismos $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que definen la extensión semi-directa. En este caso, la condición de ser un solitón de Ricci algebraico es equivalente al carácter auto-adjunto del endomorfismo Φ . Así pues, el

endomorfismo Φ está descrito en una base ortonormal por sus autovalores α, δ , donde $\alpha + \delta \neq 0$.

Considerando \mathbb{R}^3 con coordenadas cartesianas (x, y, z) , estos solitones se corresponden con las métricas

$$g_{\alpha, \delta} = dx \otimes dx + e^{-2x\alpha} dy \otimes dy + e^{-2x\delta} dz \otimes dz, \quad \alpha + \delta \neq 0.$$

2.4. Solitones de Ricci homogéneos

En esta sección se detallan los solitones de Ricci homogéneos de dimensión 3, los cuales pueden clasificarse como solitones gradientes o algebraicos. La descripción se realiza módulo homotecias, por tanto es fundamental tener en cuenta las observaciones 2.7 2.10.

Según se puede consultar en [3], la curvatura escalar de todo solitón de Ricci (M, g, X) verifica la identidad

$$\Delta\tau = 2\mu\tau - 2\|\rho\|^2 + \langle X, \text{grad}(\tau) \rangle.$$

En la situación (localmente) homogénea la curvatura escalar es constante, por lo que se tiene que $\|\rho\|^2 = \mu\tau$. Estudiamos los distintos escenarios que se presentan en función del signo de μ , es decir, según el solitón de Ricci sea estático, contractivo o expansivo.

Si el solitón de Ricci homogéneo es estático ($\mu = 0$), entonces $\|\rho\|^2 = 0$, de donde se sigue que la variedad Riemanniana subyacente es Ricci llana y por tanto llana (localmente isométrica a \mathbb{R}^3) [20].

Si el solitón de Ricci homogéneo es contractivo ($\mu > 0$) entonces es gradiente, según fue probado por Naber [15]. Atendiendo al Teorema 2.8, tenemos que es por tanto rígido (localmente isométrico a \mathbb{S}^3 o $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$, el las rígidas restantes tienen $\mu \leq 0$).

La posibilidad restante es el caso del solitón expansivo ($\mu < 0$) que fue analizada por Arroyo y Lafuente en [1], donde muestran que su análisis puede restringirse al caso algebraico:

Teorema 2.12 ([1]). *Todo solitón homogéneo expansivo en dimensión $n \leq 6$ es homotético a un solitón algebraico.*

En consecuencia, la lista de solitones de Ricci homogéneos de dimensión 3 se reduce a los siguientes:

- Los solitones triviales o Einstein. $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3$ o \mathbb{H}^3 .
- Los solitones rígidos no triviales $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$.
- Los solitones algebraicos no triviales en *Heis*, $E(1, 1)$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ descritos en la Observación 2.11.

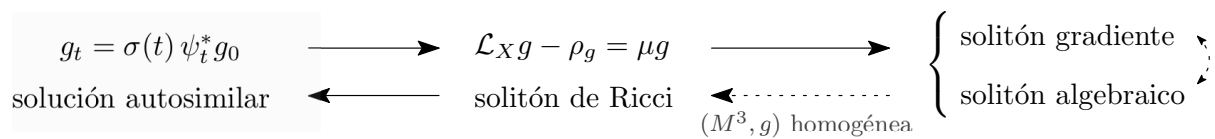
Es importante señalar que las clases anteriores no son disjuntas. De hecho, mientras que el solitón $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ no se puede corresponder con ningún solitón algebraico al no ser la esfera paralelizable, el solitón rígido en $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ es al mismo tiempo un solitón algebraico.

Dicho solitón se realiza en el grupo no unimodular $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$ y se corresponde con la métrica en \mathbb{R}^3 determinada por $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + e^{-2x} dz \otimes dz$. En cuanto a los solitones triviales, son rígidos y algebraicos.

Alternativamente, atendiendo al signo de la constante de solitón, los solitones homogéneos de dimensión 3 se pueden clasificar en:

- Solitones estáticos: \mathbb{R}^3
- Solitones contractivos : \mathbb{S}^3 o $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$
- Solitones expansivos: \mathbb{H}^3 , o los solitones algebraicos no triviales en *Heis*, $E(1,1)$ y $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$ descritos en la Observación 2.11 (entre los que se encuentra $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ como señalamos previamente).

A continuación, se presenta un esquema que resume las ideas expuestas en el capítulo.



Capítulo 3

Solitones asociados a flujos geométricos

Sea M una variedad y $\mathbb{T}[t]$ una familia uno-paramétrica de campos de tensores simétricos de tipo $(0, 2)$ sobre M . Un \mathbb{T} -flujo sobre M es una familia uno-paramétrica g_t de métricas de Riemann sobre M , de forma que se cumple la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = \mathbb{T}[t]. \quad (3.1)$$

Un caso particular de la situación anterior es el flujo de Ricci, donde la familia de campos de tensores $\mathbb{T}[t]$ está dada por los tensores de Ricci: $\mathbb{T}[t] = -2\rho[g_t]$. En general asumiremos que existe una relación subyacente entre el campo de tensores $\mathbb{T}[t]$ y la métrica g_t y, en particular, que $\mathbb{T}[t]$ es invariante por g_t -isometrías. En este caso, denotaremos la familia de métricas por $\mathbb{T}[g_t]$ o \mathbb{T}_{g_t} .

En paralelo a lo que sucedía en el caso Ricci, aquellas soluciones que evolucionan mediante escalamiento y difeomorfismos a partir de una métrica inicial se denominan soluciones autosimilares del flujo (3.1). Así, una *solución autosimilar* del \mathbb{T} -flujo con métrica inicial g_0 es una familia uno-paramétrica de métricas dadas por:

$$g_t := \sigma(t)\psi_t^* g_0 \quad (3.2)$$

verificando la Ecuación (3.1), donde $\sigma(t)$ es una función positiva tal que $\sigma(0) = 1$ y $\psi_t : M \rightarrow M$ es un grupo uno-paramétrico de difeomorfismos de M .

En relación a las soluciones autosimilares del flujo, surgen los \mathbb{T} -*solitones*, esto es, triples (M, g, X) donde X es un campo de vectores en la variedad de Riemann (M, g) verificando la ecuación:

$$\mathcal{L}_X g - \mathbb{T}[g] = \mu g \quad (3.3)$$

para cierto $\mu \in \mathbb{R}$, donde \mathcal{L} denota la derivada de Lie. Cuando no sea necesario precisar el campo, diremos simplemente que la métrica g es un \mathbb{T} -solitón sobre M .

Para una variedad fijada (M, g) , se verifica nuevamente que el conjunto de campos verificando (3.3), es un *espacio afín asociado a homotecias*. Por tanto, la descripción de \mathbb{T} -solitones homogéneos se realiza módulo campos de vectores Killing.

Observación 3.1. Cuando en una variedad (M, g) , la métrica es múltiplo del tensor $T[g] = kg$, $k \in \mathbb{R}$, entonces se verifica la ecuación (3.3) para el campo de vectores $X \equiv 0$ (o cualquier campo de Killing). Consiste en la generalización de las variedades Einstein y decimos que g es un T-soliton trivial.

Para poder relacionar las soluciones autosimilares y los solitones asociados a un tensor simétrico arbitrario $T \in \mathcal{T}^2(M)$, este debe cumplir ciertas propiedades.

Diremos que un tensor simétrico $T \in \mathcal{T}^2(M)$ es *natural* si $T[\psi^*g] = \psi^*T[g]$ para cualquier difeomorfismo $\psi : M \rightarrow M$ y cualquier métrica Riemanniana g . Entre otros, el tensor de Ricci ρ , el tensor de Cotton \tilde{C} o el tensor de curvatura cruzada H , que introduciremos en el siguiente capítulo, constituyen ejemplos de tensores simétricos naturales. La siguiente proposición establece que si T verifica esta propiedad, podemos obtener T-solitones a partir de soluciones autosimilares.

Proposición 3.2. *Sea $T \in \mathcal{T}^2(M)$ un campo de vectores de tipo $(0, 2)$ sobre una variedad diferenciable M tal que T es natural. Si $g_t := \sigma(t)\psi_t^*g_0$ es una solución autosimilar del T-flujo (3.1), entonces g_0 es un T-soliton.*

Demostración. Supongamos que $g_t = \sigma(t)\psi_t^*g_0$ es una solución autosimilar del T-flujo (3.1). Teniendo en cuenta que T es natural obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t = T[g_t] = T[\sigma(t)\psi_t^*g_0] = \psi_t^*T[\sigma(t)g_0]. \quad (3.4)$$

Por otro lado, derivando en la expresión de las métricas g_t se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}g_t = \sigma'(t)\psi_t^*g_0 + \sigma(t)\psi_t^*(\mathcal{L}_Xg_0) = \psi_t^*(\sigma'(t)g_0 + \sigma(t)\mathcal{L}_Xg_0) \quad (3.5)$$

donde X denota el generador infinitesimal de ψ_t , esto es, el campo de vectores determinado por $X(\psi_t(p)) = \frac{d}{dt}(\psi_t(p))$. Eliminando el pull-back en 3.4 y 3.5 obtenemos

$$T[\sigma(t)g_0] = \sigma'(t)g_0 + \mathcal{L}_{\tilde{X}}g_0$$

donde $\tilde{X}(t) := \sigma(t)X(t)$. Si denotamos $\mu := -\sigma'(0)$, la ecuación anterior en $t = 0$ es:

$$T[g_0] = -\mu g_0 + \mathcal{L}_Xg_0.$$

Así pues, dada una *solución autosimilar* del T-flujo, existe un campo de vectores X en M tal que $\mathcal{L}_Xg_0 - T[g_0] = \mu g_0$, lo que muestra que (M, g_0, X) es un T-soliton. \square

La situación recíproca, esto es, la obtención de soluciones autosimilares a partir de T-solitones siendo T natural, solo está asegurada en el caso $\mu = 0$ (T-soliton estático).

Proposición 3.3. *Sea $T \in \mathcal{T}^2(M)$ un campo de $(0, 2)$ -vectores sobre una variedad diferenciable M tal que T es natural. Si g_0 es un T-soliton estático ($\mu = 0$), entonces existe una solución autosimilar de (3.1) de la forma $g_t = \psi_t^*g_0$.*

Demostración. Sea (M, g_0, X) es un T-soliton estático, de modo que X es un campo de vectores tal que $\mathcal{L}_X g_0 = T[g_0]$. A fin de simplificar la demostración, supondremos que X es un campo completo. Sea $\psi_t : M \rightarrow M$ la familia de difeomorfismos generado por X . Entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_t^* g_0 = \psi_t^* (\mathcal{L}_X g_0) = \psi_t^* T[g_0] = T[\psi_t^* g_0],$$

donde en la última igualdad empleamos que T es natural. Por tanto, $g_t = \psi_t^* g_0$ es una solución de (3.1). \square

Si el tensor T es además homogéneo (por homotecias), obtenemos soluciones autosimilares a partir de T-solitones para el resto de casos y no sólo el estático. Un tensor simétrico $T \in \mathcal{T}^2(M)$ es *homogéneo (por homotecias) de grado q* si $T[cg] = c^q T[g]$ para cualquier escalado positivo cg de la métrica g . De los tensores previamente mencionados, el tensor de Ricci ρ y de Cotton \tilde{C} son homogéneos de grado $q = 0$ y el tensor de curvatura cruzada H es homogéneo de grado $q = -1$.

Proposición 3.4. *Sea $T \in \mathcal{T}^2(M)$ un campo de $(0, 2)$ -vectores sobre una variedad diferenciable M tal que T es natural y homogéneo de grado q . Si g_0 un T-soliton, entonces existe una solución autosimilar de (3.1) de la forma $g_t = \sigma(t) \psi_t^* g_0$.*

Demostración. Supongamos que (M, g_0, X) es un T-soliton con constante de soliton μ . A fin de simplificar la demostración, supondremos que X es un campo completo. Definimos la función $\sigma(t)$ como la solución de la ecuación diferencial

$$\sigma'(t) = -\mu \sigma(t)^q ; \quad \sigma(0) = 1$$

y sea $\psi_t : M \rightarrow M$ la familia de difeomorfismos generada por X según:

$$\frac{d}{dt}(\psi_t(p)) = \sigma(t)^{q-1} X(\psi_t(p)) \quad \text{y} \quad \psi_0 = \text{Id}_M.$$

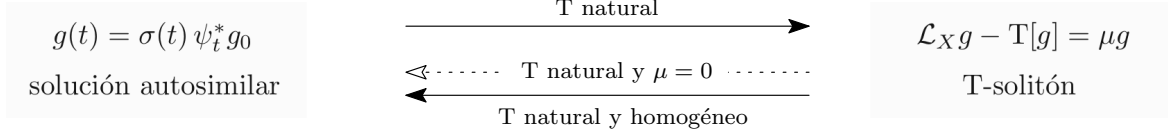
Si consideramos la familia uno-paramétrica de métricas $g_t = \sigma(t) \psi_t^* g_0$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_t &= \sigma'(t) \psi_t^* g_0 + \sigma(t) \psi_t^* (\mathcal{L}_{\sigma(t)^{q-1} X} g_0) \\ &= -\mu \sigma(t)^q \psi_t^* g_0 + \sigma(t)^q \psi_t^* (\mathcal{L}_X g_0) \\ &= \sigma(t)^q \psi_t^* (-\mu g_0 + \mathcal{L}_X g_0). \end{aligned}$$

Ahora, como el campo de vectores X verifica la ecuación $\mathcal{L}_X g_0 - T[g_0] = \mu g_0$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = \sigma(t)^q \psi_t^* (T[g_0]) = \sigma(t)^q T[\psi_t^* g_0] = T[\sigma(t)^q \psi_t^* g_0]$$

donde en las dos últimas igualdades empleamos que T es natural y homogéneo de grado q respectivamente. Por consiguiente, g_t es una solución autosimilar del T-flujo. \square



El siguiente esquema resume las conclusiones derivadas de las proposiciones anteriores .

Observación 3.5. Nótese que el tensor $\mathbf{T}[g] = -2\rho_g$ es natural y homogéneo de grado $q = 0$. Considerando ese tensor, el desarrollo de este capítulo se corresponde con lo expuesto en el capítulo anterior para solitones de Ricci. Diremos que el T-soliton es *contractivo*, *estático* o *expansivo* cuando la constante de soliton es $\mu > 0$, $\mu = 0$ o $\mu < 0$ respectivamente.

Observación 3.6. En ciertas fuentes de documentación, se presenta la ecuación de T-soliton con el signo opuesto $\mathcal{L}_X g + \mathbf{T}[g] = \lambda g$, y el caso Ricci se corresponde con $\mathbf{T}[g] = 2\rho_g$. En este caso, el signo de la constante de soliton determina el tipo de soliton contrario.

$\lambda = 0$	estático	$\mu = 0$
$\lambda > 0$	contractivo	$\mu < 0$
$\lambda < 0$	expansivo	$\mu > 0$

3.1. T-Solitones homogéneos gradiente

De manera análoga a lo que sucedía en el caso Ricci, diremos que un T-soliton (M, g, X) es *gradiente* si el campo del soliton $X = \frac{1}{2} \text{grad}(f)$, donde $\text{grad}(f)$ denota el gradiente de una función potencial $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. En esta situación denotaremos el soliton como (M, g, f) . Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}_X g = \mathcal{L}_{\frac{1}{2} \text{grad}(f)} g = \text{Hess}_f$, la ecuación (3.3) se reescribe como:

$$\text{Hess}_f - \mathbf{T}[g] = \mu g.$$

El Teorema 2.8 enunciaba que un soliton de Ricci gradiente homogéneo es el producto de una métrica Einstein y un espacio euclídeo. La siguiente proposición generaliza tal resultado.

Teorema 3.7 (Teorema 1.1, [18]). *Sea (M, g) una variedad homogénea. Si (M, g, f) es un T-soliton gradiente tal que T es natural y con divergencia cero, entonces (M, g) es isométrica a un producto $N \times \mathbb{R}^k$ para algún $k \geq 1$ y f es una función sobre el factor euclídeo \mathbb{R}^k .*

3.2. T-Solitones algebraicos

Extendemos el concepto de solitón de Ricci algebraico presentado en la sección 2.3. Así, definimos los T-solitones algebraicos para la ecuación de evolución geométrica (3.1) y luego estudiamos la relación entre T-solitones y T-solitones algebraicos.

Un grupo de Lie simplemente conexo con métrica invariante a la izquierda $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un T-solitón algebraico si el $(1, 1)$ -tensor \widehat{T} obtenido tras levantar un índice en T verifica

$$\widehat{T}[\langle \cdot, \cdot \rangle] = -\mu \text{Id} + D \quad (3.6)$$

donde D es una derivación en \mathfrak{g} , el álgebra de Lie de G y $\mu \in \mathbb{R}$.

La siguiente proposición establece la relación entre T-solitones algebraicos y T-solitones. Dado que los T-solitones algebraicos son una estructura puramente algebraica determinada a nivel de un álgebra de Lie, a fin de construir el T-solitón asociado, consideramos el único grupo de Lie G conexo y simplemente conexo asociado al álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Proposición 3.8. *Sea G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo dotado con una métrica invariante por la izquierda $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un T-solitón algebraico entonces es un T-solitón.*

Demostración. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un T-solitón algebraico. Entonces $D = \widehat{T}[\langle \cdot, \cdot \rangle] + \mu \text{Id}$ es una derivación para cierta constante $\mu \in \mathbb{R}$. Consideramos el grupo uno-paramétrico de automorfismos de G determinado por

$$d(\Psi_t)_e = \text{Exp}\left(\frac{t}{2}D\right),$$

y denotamos por X al campo de vectores de G correspondiente al generador infinitesimal de ψ_t determinado por

$$X(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Psi_t(p).$$

Así, calculando la derivada de Lie de la métrica invariante a la izquierda respecto al campo de vectores X y evaluando sobre vectores tangentes en el neutro, se tiene que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \langle \cdot, \cdot \rangle)(e_i, e_j) &= \frac{d}{dt}(\Psi_t^* \langle \cdot, \cdot \rangle)(e_i, e_j) \\ &= \frac{1}{2}(\langle D e_i, e_j \rangle + \langle e_i, D e_j \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle \widehat{T}[\langle \cdot, \cdot \rangle] e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \widehat{T}[\langle \cdot, \cdot \rangle] e_j \rangle) + \mu \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \text{T}[\langle \cdot, \cdot \rangle](e_i, e_j) + \mu \langle e_i, e_j \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, si suponemos que los vectores $\{e_i\}$ forman una base ortonormal de $T_e G$ entonces

$$\mathcal{L}_X \langle \cdot, \cdot \rangle - \text{T}[\langle \cdot, \cdot \rangle] = \mu \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Así pues, se tiene que $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle, X)$ es un T-solitón. \square

Capítulo 4

T-Solitones algebraicos en dimensión 3

En este capítulo procedemos a estudiar los T-solitones algebraicos sobre G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo de dimensión 3 con álgebra de Lie \mathfrak{g} . La búsqueda de T-solitones a menudo conlleva la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales complejos, mientras que los T-solitones algebraicos pueden obtenerse mediante métodos algebraicos, como veremos en este capítulo.

Sea T un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ simétrico sobre un grupo de Lie G conexo y simplemente conexo de dimensión 3, dotado de una métrica invariante a la izquierda $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A lo largo del capítulo asumiremos que T es natural. Denotamos por \hat{T} el campo de tensores de tipo $(1, 1)$ asociado a T .

Observación 4.1. Como consecuencia de la naturalidad de T y de la invarianza por la izquierda de la métrica se tiene que

$$(L_h)^* T[\langle \cdot, \cdot \rangle] = T[(L_h)^* \langle \cdot, \cdot \rangle] = T[\langle \cdot, \cdot \rangle] \quad \forall h \in G.$$

En definitiva, T es invariante por la izquierda. Así, en función del contexto nos referiremos a T como un campo de tensores sobre G o bien como un tensor sobre \mathfrak{g} .

Sea entonces T un tensor de tipo $(0, 2)$ sobre \mathfrak{g} . Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de \mathfrak{g} , emplearemos la notación $T_{ij} := T(e_i, e_j)$, y dado que T es simétrico, en la matriz de componentes (T_{ij}) sustituiremos las entradas bajo la diagonal por \cdot .

Lo expuesto en la sección 3.2 nos permite sostener que $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un T-soliton algebraico si la aplicación lineal $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definida por $D = \hat{T}[\langle \cdot, \cdot \rangle] + \mu \text{Id}$, es una derivación de \mathfrak{g} , esto es

$$D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \quad (4.1)$$

Denotando por Φ al tensor de tipo $(1, 2)$ $\Phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por

$$\Phi(x, y) := D[x, y] - [Dx, y] - [x, Dy] \quad x, y \in \mathfrak{g},$$

la condición de ser una derivación (4.1) se expresa equivalentemente como $\Phi(x, y) = 0_{\mathfrak{g}}$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

En la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathfrak{g} , denotamos la componentes

$$\Phi(e_i, e_j) = \Phi_{ij}^m e_m, \quad [e_i, e_j] = c_{ij}^m e_m, \quad De_i = D_i^m e_m.$$

Así, la condición de ser una derivación (4.1) se expresa en coordenadas como

$$\Phi_{ij}^m = c_{ij}^k D_k^m - c_{kj}^m D_i^k - c_{ik}^m D_j^k = 0. \quad (4.2)$$

Observación 4.2. La aplicación Φ es antisimétrica puesto que el corchete es antisimétrico y en consecuencia

$$\Phi(x, y) = D[x, y] - [Dx, y] - [x, Dy] = -D[y, x] + [y, Dx] + [Dy, x] = -\Phi(y, x)$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Así, para comprobar que D es una derivación, es suficiente pedir que $\Phi_{12}^m = \Phi_{13}^m = \Phi_{23}^m = 0$ para $m = 1, 2, 3$.

El diagrama de equivalencias es el siguiente.

$$\begin{array}{ccccccc} (G, \langle \cdot, \cdot \rangle) & & D = \widehat{T}[\langle \cdot, \cdot \rangle] + \mu Id & & \Phi(x, y) = 0_{\mathfrak{g}} & & \Phi_{12}^m = \Phi_{13}^m = \Phi_{23}^m = 0 \\ \text{T-soliton} & \Leftrightarrow & \text{derivación} & \Leftrightarrow & \forall x, y \in \mathfrak{g} & \Leftrightarrow & m = 1, 2, 3 \end{array}$$

Haciendo uso de la estructura algebraica del álgebra de Lie, establecemos un criterio, que recogeremos en forma de lemas, para determinar cuando una métrica invariante a la izquierda sobre el correspondiente grupo de Lie asociado es un T-soliton algebraico para la ecuación de evolución geométrica (3.1). Estudiamos por separado los casos unimodular y no unimodular.

4.1. Grupo unimodular

Sea G un grupo de Lie unimodular de dimensión 3 conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie \mathfrak{g} y dotado de una métrica invariante a la izquierda. Según se detalló previamente en el apartado 1.3.2, estos grupos están caracterizados mediante las constantes de estructura λ_i dadas por

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2 \quad (4.3)$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal de \mathfrak{g} de autovectores del operador estructura.

Sea entonces T un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico y natural sobre \mathfrak{g} . Conforme a lo expuesto, $D = \widehat{T} + \mu Id$ será una derivación si las componentes $\Phi_{12}^m = \Phi_{13}^m = \Phi_{23}^m = 0$ para $m = 1, 2, 3$. Un cálculo directo a partir de la expresión (4.3) muestra que dichas componentes están dadas por

$$\begin{aligned} \Phi_{12}^1 &= (\lambda_1 + \lambda_3) T_{13}, & \Phi_{13}^1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2) T_{12}, \\ \Phi_{12}^2 &= (\lambda_2 + \lambda_3) T_{23}, & \Phi_{13}^2 &= -\lambda_2(\mu + T_{11} - T_{22} + T_{33}), \\ \Phi_{12}^3 &= -\lambda_3(\mu + T_{11} + T_{22} - T_{33}), & \Phi_{13}^3 &= -(\lambda_2 + \lambda_3) T_{23}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{23}^1 &= -\lambda_1(\mu - T_{11} + T_{22} + T_{33}), \\ \Phi_{23}^2 &= (\lambda_1 + \lambda_2) T_{12}, \\ \Phi_{23}^3 &= (\lambda_1 + \lambda_3) T_{13}.\end{aligned}$$

Nótese que $\Phi_{12}^1 = \Phi_{23}^3$, $\Phi_{12}^2 = -\Phi_{13}^3$ y $\Phi_{13}^1 = -\Phi_{23}^2$. Por tanto, es suficiente comprobar que se anulan los términos de la izquierda de dichas igualdades.

Observación 4.3. Las componentes de la divergencia del campo de tensores T sobre el grupo de Lie $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ obtenido por traslación a la izquierda del tensor T están dadas por

$$\operatorname{div}(T)_1 = (\lambda_3 - \lambda_2) T_{23}, \quad \operatorname{div}(T)_2 = (\lambda_1 - \lambda_3) T_{13}, \quad \operatorname{div}(T)_3 = (\lambda_2 - \lambda_1) T_{12}.$$

Así la divergencia de T resulta

$$\operatorname{div}(T) = (\lambda_3 - \lambda_2) T_{23} e^1 + (\lambda_1 - \lambda_3) T_{13} e^2 + (\lambda_2 - \lambda_1) T_{12} e^3$$

donde $\{e^\ell\}$ es la base dual de la base ortonormal $\{e_\ell\}$.

A continuación estudiaremos la existencia de T -solitones algebraicos en los distintos grupos unimodulares, con especial atención al caso no trivial, esto es, cuando $\widehat{T} \neq \kappa \operatorname{Id}$.

Caso 1. T -solitones algebraicos en grupo especial unitario y en grupo lineal especial

Las constantes de estructura en este caso son distintas de cero $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$. Así, de la expresión de la componente

$$\Phi_{12}^3 = -\lambda_3(\mu + T_{11} + T_{22} - T_{33})$$

se sigue que $\mu = -T_{11} - T_{22} + T_{33}$, y sustituyendo en las componentes

$$\Phi_{13}^2 = 2\lambda_2(T_{33} - T_{22}), \quad \Phi_{23}^1 = 2\lambda_1(T_{11} - T_{33}),$$

se tiene que $T_{22} = T_{33} = T_{11}$. Faltan por anular las componentes

$$\Phi_{13}^1 = -(\lambda_1 + \lambda_2) T_{12}, \quad \Phi_{12}^1 = (\lambda_1 + \lambda_3) T_{13}, \quad \Phi_{12}^2 = (\lambda_2 + \lambda_3) T_{23}.$$

Llegados a este punto, distinguimos casos:

Caso 1.1. T -solitones algebraicos en $SU(2)$

Utilizando las componentes Φ_{13}^1 , Φ_{12}^1 y Φ_{12}^2 y el hecho de que los autovalores λ_i tienen el mismo signo, se tiene que $T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0$ y obtenemos un solitón trivial sin divergencia $T = T_{11} \operatorname{Id}$.

Lema 4.4. *Sea T un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ simétrico y natural sobre $SU(2)$. Entonces determina un T -solitón algebraico si y solo si es trivial, i.e., $\widehat{T} = \kappa \operatorname{Id}$.*

Caso 1.2. T-solitones algebraicos en $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$

A lo largo de este caso asumimos que $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ y el λ_3 tiene signo distinto $\lambda_3 \neq 0$ en la base ortonormal (4.3), lo que no supone ninguna restricción.

Empleando la expresión de la componente $\Phi_{13}^1 = -(\lambda_1 + \lambda_2) T_{12}$ se sigue que $T_{12} = 0$. Faltan por anular las componentes

$$\Phi_{12}^1 = (\lambda_1 + \lambda_3) T_{13}, \quad \Phi_{12}^2 = (\lambda_2 + \lambda_3) T_{23}.$$

Distinguimos dos escenarios:

- (i) $\lambda_1 = -\lambda_3$. Se anula directamente la componente Φ_{12}^1 , y solo queda por anular el elemento

$$\Phi_{12}^2 = (\lambda_2 + \lambda_3) T_{23}.$$

Subdividimos de nuevo en dos casos:

- $\lambda_3 = -\lambda_2$: La componente Φ_{12}^2 se anula directamente y obtenemos un T-soliton no trivial con divergencia.
- $\lambda_3 \neq -\lambda_2$: Utilizando la componente Φ_{12}^2 se sigue que $T_{23} = 0$ y obtenemos un T-soliton no trivial con divergencia.

- (ii) $\lambda_1 \neq -\lambda_3$. Utilizando la componente Φ_{12}^1 se sigue que $T_{13} = 0$. Solo queda por anular el elemento

$$\Phi_{12}^2 = (\lambda_2 + \lambda_3) T_{23}.$$

Subdividimos de nuevo en dos casos:

- $\lambda_3 = -\lambda_2$: La componente Φ_{12}^2 se anula directamente y obtenemos un T-soliton no trivial con divergencia.
- $\lambda_3 \neq -\lambda_2$: Utilizando la componente Φ_{12}^1 se sigue que $T_{23} = 0$ y obtenemos un soliton trivial sin divergencia.

Lema 4.5. *Un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ simétrico y natural T sobre $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ determina un T-soliton algebraico no trivial si y solo si las componentes de T en la base ortonormal (4.3) están dadas por:*

(i) Si $\lambda_1 = -\lambda_3 = \lambda_2$:

(ii) Si $\lambda_1 = -\lambda_3 \neq \lambda_2$ o bien $\lambda_1 \neq -\lambda_3 = \lambda_2$:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{11} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{11} \end{pmatrix}.$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{11} & 0 \\ T_{31} & 0 & T_{11} \end{pmatrix}.$$

Observación 4.6. La diferencia esencial entre el caso (i) y el caso (ii) es que el operador de Ricci tiene dos autovalores iguales en la primera situación, mientras que los tres autovalores son distintos en (ii). Por tanto el grupo de isometrías tiene dimensión cuatro para cualquier métrica invariante a la izquierda determinada por (i), mientras que la dimensión es tres en el caso de las métricas invariantes a la izquierda determinadas por (ii).

Caso 2. T-solitones algebraicos en los grupos Euclídeo y de Poincaré

A lo largo de este caso asumimos que $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_3 = 0$ en la base ortonormal (4.3), lo que no supone ninguna restricción.

La componente Φ_{12}^3 se anula directamente. Empleando las componente $\Phi_{12}^1 = \lambda_1 T_{13}$ y $\Phi_{12}^2 = \lambda_2 T_{23}$ se deduce que $T_{13} = T_{23} = 0$. Asimismo, de la expresión de la componente $\Phi_{13}^2 = \lambda_2(\mu + T_{11} - T_{22} + T_{33})$ se sigue que $\mu = -T_{11} + T_{22} - T_{33}$. Además, sustituyendo en la componente

$$\Phi_{23}^1 = 2\lambda_1(T_{11} - T_{22})$$

se concluye que $T_{22} = T_{11}$. Falta por anular el elemento:

$$\Phi_{23}^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) T_{12}$$

Partiendo de esto, dividimos en casos:

Caso 2.1. $\lambda_2 = -\lambda_1$ ($\subsetneq E(1, 1)$)

La componente Φ_{23}^2 se anula directamente y obtenemos un T-solitón no trivial con divergencia.

Caso 2.2. $\lambda_2 \neq -\lambda_1$ ($E(1, 1)$ o $\tilde{E}(2)$)

Utilizando la componente Φ_{23}^2 se sigue que $T_{12} = 0$ y obtenemos un T-solitón no trivial sin divergencia.

Lema 4.7. *Un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ simétrico y natural T sobre $E(1, 1)$ o $\tilde{E}(2)$ determina un T-solitón algebraico no trivial si y solo si las componentes de T en la base ortonormal (4.3) están dadas por:*

(i) Si $\lambda_2 = -\lambda_1$:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ \cdot & T_{11} & 0 \\ \cdot & \cdot & T_{33} \end{pmatrix}.$$

(ii) Si $\lambda_2 \neq -\lambda_1$:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ \cdot & T_{11} & 0 \\ \cdot & \cdot & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Observación 4.8. Nótese que el solitón será trivial si $T_{12} = 0$ y $T_{11} = T_{33}$ en el caso (i) y si $T_{11} = T_{33}$ en el caso (ii).

Caso 3. T-solitones algebraicos en grupo de Heisenberg

A lo largo de este caso asumimos que $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ en la base ortonormal (4.3), lo que no supone ninguna restricción.

Las componentes Φ_{12}^3 , Φ_{13}^2 y Φ_{23}^1 se anulan directamente. Empleando la expresión de la componente $\Phi_{12}^1 = \Phi_{23}^3 = \lambda_1 T_{13}$ se deduce que $T_{13} = 0$ y de igual manera, de

la componente $\Phi_{23}^2 = -\Phi_{13}^1 = \lambda_1 T_{12}$ que $T_{12} = 0$. Además, de la componente $\Phi_{23}^1 = -\lambda_1(\mu - T_{11} + T_{22} + T_{33})$ se extrae que $\mu = -T_{11} - T_{22} - T_{33}$. Obtenemos un T-soliton no trivial sin divergencia.

Lema 4.9. *Un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ simétrico y natural T sobre Heis determina un T-soliton algebraico no trivial si y solo si las componentes de T en la base ortonormal (4.3) están dadas por*

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ \cdot & T_{22} & T_{23} \\ \cdot & \cdot & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Observación 4.10. Nótese que el soliton será trivial si $T_{23} = 0$ y $T_{11} = T_{22} = T_{33}$.

Caso 4. T-solitones algebraicos en el grupo Abeliano \mathbb{R}^3

Dado que toda aplicación lineal $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una derivación del álgebra Abeliana, en este caso cualquier campo de tensores simétrico y natural T de tipo $(0, 2)$ determina un T-soliton algebraico. Además, se sigue del carácter abeliano que toda métrica invariante a la izquierda sobre \mathbb{R}^3 es necesariamente llana.

4.2. Grupo no unimodular

Sea G un grupo de Lie no unimodular de dimensión 3 conexo y simplemente conexo con álgebra de Lie \mathfrak{g} y dotado de una métrica invariante a la izquierda. Según se detalló previamente en el apartado 1.3.2, un álgebra de Lie no unimodular de dimensión 3 es un producto semi-directo $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes \mathfrak{u}$, de tal manera que toda métrica invariante a la izquierda en un grupo de Lie no unimodular está determinada por:

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3, \quad [e_2, e_3] = 0 \quad (4.4)$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal de \mathfrak{g} y $\text{tr ad}(e_1) = (\alpha + \delta) \neq 0$, y de tal manera que $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$. En lo que sigue el endomorfismo $\varphi : \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{u}$ que determina la extensión semi-directa desempeñará un papel esencial.

Sea entonces T un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico y natural sobre \mathfrak{g} . Conforme a lo expuesto, $D = \widehat{T} + \mu \text{Id}$ será una derivación si las componentes $\Phi_{12}^m = \Phi_{13}^m = \Phi_{23}^m = 0$ para $m = 1, 2, 3$. Un cálculo directo a partir de la expresión (4.4) muestra que dichas componentes están dadas por

$$\begin{aligned} \Phi_{12}^1 &= \alpha T_{12} + \beta T_{13}, & \Phi_{13}^1 &= -\gamma T_{12} + \delta T_{13}, \\ \Phi_{12}^2 &= -\alpha(\mu + T_{11}) + (\beta - \gamma) T_{23}, & \Phi_{13}^2 &= (-\alpha + \delta) T_{23} - \gamma(\mu + T_{11} - T_{22} + T_{33}), \\ \Phi_{12}^3 &= (\alpha - \delta) T_{23} - \beta(\mu + T_{11} + T_{22} - T_{33}), & \Phi_{13}^3 &= -\delta(\mu + T_{11}) + (-\beta + \gamma) T_{23}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{23}^1 &= 0, \\ \Phi_{23}^2 &= -\gamma T_{12} + \alpha T_{13}, \\ \Phi_{23}^3 &= -\delta T_{12} + \beta T_{13},\end{aligned}$$

Observación 4.11. Las componentes de la divergencia del campo de tensores T sobre el grupo de Lie $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ obtenido por traslación a la izquierda del tensor T están dadas por

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(T)_1 &= \alpha(-T_{11} + T_{22}) + (\beta + \gamma) T_{23} + \delta(-T_{11} + T_{33}), & \operatorname{div}(T)_2 &= (-2\alpha - \delta) T_{12} - \beta T_{13}, \\ \operatorname{div}(T)_3 &= -\gamma T_{12} - (\alpha + 2\delta) T_{13}.\end{aligned}$$

Así la divergencia de T resulta

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(T) &= (\alpha(-T_{11} + T_{22}) + (\beta + \gamma) T_{23} + \delta(-T_{11} + T_{33})) e^1 + ((-2\alpha - \delta) T_{12} - \beta T_{13}) e^2 \\ &\quad + (-\gamma T_{12} - (\alpha + 2\delta) T_{13}) e^3\end{aligned}$$

donde $\{e^\ell\}$ es la base dual de la base ortonormal $\{e_\ell\}$.

A continuación estudiaremos la existencia de T -solitones algebraicos en los distintos grupos no unimodulares, con especial atención al caso no trivial, esto es, cuando $\widehat{T} \neq \kappa \operatorname{Id}$.

Las componentes Φ_{ij}^m deben anularse, y en consecuencia, su suma también. Entonces, partiendo del hecho de que $\alpha + \delta \neq 0$, podemos deducir que:

- De la suma $\Phi_{13}^1 + \Phi_{23}^2 = (\alpha + \delta) T_{13}$ se sigue que $T_{13} = 0$.
- De la suma $\Phi_{12}^1 + \Phi_{23}^3 = (\alpha + \delta) T_{12}$ se sigue que $T_{12} = 0$.
- De la suma $\Phi_{12}^2 + \Phi_{13}^3 = -(\alpha + \delta)(\mu + T_{11})$ se sigue que $T_{11} = \mu$.

Faltan por anular los elementos:

$$\begin{aligned}\Phi_{12}^2 &= -\Phi_{13}^3 = (\beta - \gamma) T_{23}, & \Phi_{12}^3 &= (\alpha - \delta) T_{23} + \beta(T_{33} - T_{22}), \\ \Phi_{13}^2 &= -(\alpha - \delta) T_{23} - \gamma(T_{33} - T_{22}).\end{aligned}$$

Nótese que es suficiente comprobar que se anula Φ_{12}^2 para que se anule Φ_{13}^3 . En vista de la situación, distinguimos dos escenarios:

Caso 1. Extensiones semi-directas determinadas por una derivación auto-adjunta ($\beta = \gamma$)

La componente Φ_{12}^2 se anula directamente. Además, teniendo en cuenta que $\alpha\gamma + \beta\delta = \gamma(\alpha + \delta) = 0$ se tiene que $\gamma = 0$ y en consecuencia $\beta = 0$. Por tanto, faltan por anular las componentes

$$\Phi_{12}^3 = -\Phi_{13}^2 = (\alpha - \delta) T_{23}.$$

Resulta apropiado dividir en los siguientes subcasos:

Caso 1.1. $\alpha = \delta$

La componente Φ_{12}^3 se anula directamente y obtenemos un T-soliton algebraico no trivial con divergencia.

Caso 1.2. $\alpha \neq \delta$

Empleando la expresi3n de la componente Φ_{12}^3 se sigue que $T_{23} = 0$. Obtenemos un T-soliton no trivial con divergencia.

Caso 2. Extensiones semi-directas determinadas por una derivaci3n no auto-adjunta ($\beta \neq \gamma$)

De la expresi3n de la componente Φ_{12}^2 se sigue que $T_{23} = 0$. Faltarían por anular:

$$\Phi_{12}^3 = \beta(T_{33} - T_{22}), \quad \Phi_{13}^2 = -\gamma(T_{33} - T_{22}).$$

Dividimos en los siguientes dos subcasos:

Caso 2.1. $\gamma = 0$

La componente Φ_{13}^2 se anula directamente. De la expresi3n de la componente Φ_{12}^3 se sigue que $T_{22} = T_{33}$. Obtenemos un T-soliton no trivial con divergencia.

Caso 2.2. $\gamma \neq 0$

De la expresi3n de la componente Φ_{13}^3 se sigue que $T_{22} = T_{33}$. Obtenemos un T-soliton no trivial con divergencia.

Lema 4.12. *Un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ simétrico y natural T sobre un grupo no unimodular de dimensi3n 3 determina un T-soliton algebraico no trivial si y solo si las componentes de T en la base ortonormal (4.4) est3n dadas por:*

(i) Si $\beta = \gamma = 0$ y $\alpha = \delta$:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ \cdot & T_{22} & T_{23} \\ \cdot & \cdot & T_{33} \end{pmatrix}.$$

(ii) Si $\beta = \gamma = 0$ y $\alpha \neq \delta$:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ \cdot & T_{22} & 0 \\ \cdot & \cdot & T_{33} \end{pmatrix}.$$

(iii) Si $\beta \neq \gamma$:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ \cdot & T_{33} & 0 \\ \cdot & \cdot & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Observación 4.13. El caso (i) se corresponde con un espacio de curvatura seccional constante $K = -\delta^2$ y, por tanto, homotético a \mathbb{H}^3 . En este caso el solitón será trivial si $T_{11} = T_{22} = T_{33}$ y $T_{23} = 0$. En el caso (ii) el operador de Ricci tiene tres autovalores distintos y el T-solitón algebraico es trivial si y solo si $T_{11} = T_{22} = T_{33}$. Finalmente, en el caso (iii) el T-solitón algebraico es trivial si y solo si $T_{11} = T_{33}$.

Capítulo 5

Solitones algebraicos para algunos flujos

Utilizando los resultados del capítulo anterior, nos centraremos ahora en el análisis de los solitones algebraicos asociados al flujo de Ricci, así como los correspondientes a los flujos de Cotton y de la curvatura cruzada. Si bien los resultados de clasificación correspondientes a los flujos de Ricci y de Cotton ya eran conocidos, la aplicación de los resultados del Capítulo 4 permiten simplificar la derivación de dichos solitones.

Observación 5.1. Los flujos que analizaremos en este capítulo se corresponden con tensores T naturales y homogéneos bajo homotecias, por lo que la condición de ser T -solitón algebraico es invariante por homotecias. Asimismo, la correspondencia con las soluciones auto-similares del flujo es válida en todos los casos de T -solitones algebraicos.

5.1. Solitones algebraicos para el flujo de Ricci

En esta sección, se realiza un estudio de los solitones de Ricci en grupos de Lie de dimensión 3 empleando el método presentado en el Capítulo 4.

Analizamos por separado los escenarios unimodular y no unimodular.

Cuando G se trata de un grupo unimodular y se considera una base ortonormal de autovectores de \mathfrak{g} como la presentada en 4.3, las componentes del tensor de Ricci son

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3), \\ \rho_{22} &= -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3), \\ \rho_{33} &= -\frac{1}{2}(\lambda_3^2 - (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)^2),\end{aligned}$$

y el resto de componentes $\rho_{ij} = 0$, es decir, el tensor diagonaliza.

- (i) **Caso 1.** Los grupos $SU(2)$ y $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ con $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$.

Los lemas 4.4 Y 4.5 nos permiten establecer las condiciones bajo las que ρ determina un solitón de Ricci algebraico. Se debe verificar que $\rho_{11} = \rho_{22} = \rho_{33}$. Esta igualdad, junto con la diagonalidad de ρ , implica que el solitón de Ricci asociado es trivial. Además, la igualdad sólo se verifica si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ y $\rho = \frac{\lambda_1^2}{2} Id$. Por tanto, en este caso obtenemos un solitón de Ricci sobre $SU(2)$ cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ y es trivial. Estas condiciones aseguran que la métrica tiene una curvatura constante $K = \frac{\lambda_1^2}{2}$, por lo que la variedad es homotética a la esfera S^3 .

- (ii) **Caso 2.** Los grupos $\tilde{E}(2)$ y $E(1, 1)$ con $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$.

Las componentes no nulas del tensor de Ricci en este caso son

$$\rho_{11} = -\rho_{22} = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2), \quad \rho_{33} = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2.$$

Basándonos en el lema 4.7, para que ρ determine un solitón de Ricci algebraico se debe verificar que $\rho_{11} = \rho_{22}$. La última igualdad se tiene en dos situaciones:

- (i) Si $\lambda_2 = \lambda_1$. En tal caso, $\rho = 0$ y obtenemos un solitón trivial sobre $\tilde{E}(2)$. Es un espacio de curvatura seccional constante $K = 0$, llano.
- (ii) Si $\lambda_2 = -\lambda_1$. En tal caso, $\rho = -\lambda_1^2 \text{diag}[0, 0, 1]$ y la métrica es un solitón no trivial sobre $\tilde{E}(1, 1)$.

- (iii) **Caso 3.** El grupo Heis con $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Las componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$\rho_{11} = \rho_{22} = -\rho_{33} = -\frac{\lambda_1^2}{2}.$$

Dado que $\rho_{11} \neq \rho_{33}$, gracias al lema 4.9 podemos concluir que la única métrica invariante a la izquierda módulo homotecias sobre Heis es un solitón de Ricci no trivial.

- (iv) **Caso 4.** El grupo \mathbb{R}^3 con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

El tensor de Ricci se anula, y por tanto, esta métrica es un solitón de Ricci trivial tal que la variedad asociada es llana.

Cuando G se trata de un grupo no unimodular y se considera una base ortonormal de \mathfrak{g} como la presentada en 4.4, las componentes del tensor de Ricci son

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{2}(-2(\alpha^2 + \delta^2) - (3\beta + \gamma)^2), \\ \rho_{22} &= \frac{1}{2}(-\beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha(\alpha + \delta)), \\ \rho_{33} &= \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2 - 2\delta(\alpha + \delta)), \\ \rho_{32} &= \rho_{23} = -\alpha\gamma - \beta\delta, \end{aligned}$$

y el resto de componentes $\rho_{ij} = 0$.

- (i) **Caso auto-autoadjunto** con $\beta = \gamma$. Tal y como mostramos en el capítulo anterior, se tiene que $\beta = \gamma = 0$. Así, las componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$\rho_{11} = -\alpha^2 - \delta^2, \quad \rho_{22} = -\alpha(\alpha + \delta), \quad \rho_{33} = -\delta(\alpha + \delta).$$

Conforme al lema 4.12, ρ determina siempre un solitón de Ricci algebraico en este caso puesto que $\rho_{23} = 0$, independientemente del valor del resto de componentes. Desglosamos en casos trivial y no trivial:

- Si $\alpha = \delta \neq 0$. Las componentes de la diagonal coinciden $\rho_{11} = \rho_{22} = \rho_{33}$, tal que $\rho = -2\delta^2 Id$. Se llega en esta situación a un solitón de Ricci trivial, de tal manera que la variedad subyacente es homotética al espacio \mathbb{H}^3 .
 - En caso contrario. Se obtiene un solitón de Ricci no trivial.
- (ii) **Caso no auto-autoadjunto** con $\beta \neq \gamma$.

Basándonos en el lema 4.12 se debe verificar que $\rho_{23} = 0$. En virtud de las hipótesis $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$, $\alpha + \delta \neq 0$ y $\beta \neq \gamma$, las únicas opciones son:

- $\gamma = \delta = 0$. Las únicas componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$\rho_{11} = \rho_{22} = -\alpha^2 - \frac{\beta^2}{2}, \quad \rho_{33} = \frac{\beta^2}{2}.$$

El lema 4.12 indica también que $\rho_{22} = \rho_{33}$ de lo que sigue $\beta = \alpha = 0$. Se llega a una contradicción con el hecho de que $\beta \neq \gamma$, y no aparecen solitones de Ricci con estos parámetros.

- $\alpha = -\frac{\beta\delta}{\gamma}$. Las componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= -\frac{1}{16\gamma^2} ((\beta - 3\gamma)(\beta + \gamma) - 4\delta^2) (2\beta\gamma^3 - \gamma^4 + \beta^2(3\gamma^2 + 4\delta^2)), \\ \rho_{22} &= \frac{1}{16\gamma^3} (\gamma(\beta + \gamma)^2 + 4\beta\delta^2) (-2\beta\gamma^3 + \gamma^4 + \beta^2(3\gamma^2 + 4\delta^2)), \\ \rho_{33} &= \frac{1}{16\gamma} ((\beta - 3\gamma)(\beta + \gamma) - 4\delta^2) (\gamma(\beta + \gamma)^2 + 4\beta\delta^2). \end{aligned}$$

El lema 4.12 indica que existirán solitones de Ricci cuando $\rho_{22} = \rho_{33}$. Esta igualdad se verifica únicamente si $\beta = -\gamma$, y en tal caso, $\rho = -2\delta^2 Id$. Obtenemos un solitón de Ricci trivial, de tal manera que la variedad subyacente es homotética al espacio \mathbb{H}^3 .

En la siguiente tabla 5.1 se recopila la casuística que se acaba de estudiar.

Grupo de Lie	Solitón trivial		Solitón no trivial	
Unimodular				
SU(2)	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	$\rho = \frac{\lambda_1^2}{2} Id$	-	-
$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$	-	-	-	-
$\widetilde{E}(2)$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\rho = 0$	-	-
E(1, 1)	-	-	$\lambda_1 = -\lambda_2$	$\rho = -2\lambda_1^2 \text{diag}[0, 0, 1]$
Heis	-	-	Siempre	$\rho = -\frac{\lambda_1^2}{2} \text{diag}[-1, 1, 1]$
\mathbb{R}^3	Siempre	$\rho = 0$	-	-
No unimodular				
Auto-adjunto	$\alpha = \delta \neq 0$	$\rho = -2\delta^2 Id$	Caso contrario	$\rho = (\alpha + \delta) \text{diag}[\frac{-\alpha^2 - \delta^2}{(\alpha + \delta)}, -\alpha, -\delta]$
No auto-adjunto	$\beta = -\gamma \neq 0$ y $\alpha = \delta \neq 0$	$\rho = -2\delta^2 Id$	-	-

Figura 5.1: Solitones de Ricci ρ .

Conforme a lo esperado, la descripción de los solitones de Ricci algebraicos expuesta en esta tabla coincide con la observación 2.11.

5.2. Solitones algebraicos para el flujo de Cotton

Las variedades Riemannianas de dimensión tres localmente conformemente llanas están caracterizadas por la anulación de su tensor de Cotton, dado por

$$C(X, Y, Z) = (\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z) \quad (5.1)$$

donde $S = \rho - \frac{r}{4}g$ es el tensor de Schouten. El tensor de Cotton es especialmente relevante en el estudio de la geometría conforme, dado que su anulación caracteriza las variedades localmente conformemente llanas en dimensión tres [11]. En dimensiones superiores es una condición necesaria para el carácter localmente conforme llano, pero ya no es un invariante conforme.

Puesto que el tensor de Cotton es antisimétrico en las dos primeras componentes podemos definir a partir de él las tres 2-formas

$$C_i := \frac{1}{2} C_{nmi} dx^n \wedge dx^m,$$

donde (x^1, x^2, x^3) es una sistema de coordenadas locales de M . Si además suponemos que M tiene la orientación dada por la forma de volumen $v_g = \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, a partir de estas 2-formas y del operador estrella de Hodge, podemos definir tres nuevas 1-formas como

$$\star C_i = \star\left(\frac{1}{2}C_{nmi}dx^n \wedge dx^m\right) = \frac{1}{2}C_{nmi} \star(dx^n \wedge dx^m) = \frac{1}{2}C_{nmi}\epsilon^{nm\ell}dx^\ell,$$

donde ϵ^{abc} representa la paridad de la permutación de los índices $\{a, b, c\}$ con respecto a $\{1, 2, 3\}$. Estas tres 1-formas nos permiten ahora definir el tensor de Cotton de tipo $(1, 1)$, dado en componentes por

$$C_i^\ell = \frac{1}{2}C_{nmi}\epsilon^{nm\ell},$$

y por tanto el tensor de tipo $(0, 2)$ asociado a él viene dado por

$$C_{ij} = \frac{1}{2}C_{nmi}\epsilon^{nm\ell}g_{\ell j}.$$

Finalmente, realizamos el siguiente reescalado

$$\tilde{C}_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{g}}C_{nmi}\epsilon^{nm\ell}g_{\ell j}, \quad (5.2)$$

obteniendo de este modo un tensor de tipo $(0, 2)$ invariante por cambios conformes de métrica y que también llamaremos *tensor de Cotton*. Es importante destacar que por los pasos seguidos, esta construcción sólo es cierta para variedades de dimensión tres.

Se puede consultar en [14] que el tensor de Cotton es simétrico. Así, haciendo uso del tensor de Cotton de tipo $(0, 2)$ dado por la Ecuación (5.2), se define en [8] un nuevo flujo geométrico, llamado *flujo de Cotton*, consistente en una familia uniparamétrica de métricas en una variedad de dimensión tres verificando

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = \kappa \tilde{C}_{g_t}, \quad (5.3)$$

donde \tilde{C}_{g_t} es el tensor de Cotton de tipo $(0, 2)$ correspondiente a la métrica g_t y κ es una constante real no nula.

El tensor de Cotton, es invariante por isometrías. Dado que el tensor de Schouten y la conexión de Levi-Civita son invariantes por isometrías, así lo es el tensor de Cotton de tipo $(1, 2)$. Ahora bien, en dimensión tres se utiliza el operador de Hodge $\star : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda^1$ para asociar al tensor de Cotton de tipo $(1, 2)$ un tensor de tipo $(0, 2)$, \tilde{C} , que es el que se emplea en la formulación del flujo de Cotton (5.3). Dado que el operador de Hodge solo está definido para variedades orientables y depende de la orientación elegida, así sucede con el tensor de Cotton de tipo $(0, 2)$. Al trabajar con grupos de Lie, la orientabilidad está garantizada y consideraremos solamente aquellas isometrías que conserven la orientación. Además, se trata de un tensor homogéneo de grado $d = 0$. Una aplicación inmediata de los resultados de la sección previa muestra el siguiente Teorema (véase también [2]).

Teorema 5.2. *Sea $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un grupo de Lie Riemanniano de dimensión tres, donde la métrica es invariante a la izquierda. Entonces es un solitón algebraico de Cotton si y solo si es localmente conformemente llano (es decir, se anula el tensor de Cotton), o el grupo de Heisenberg con la única métrica invariante a la izquierda.*

Demostración. Analizamos por separado los escenarios unimodular y no unimodular.

Cuando G se trata de un grupo unimodular y se considera una base ortonormal de autovectores de \mathfrak{g} como la presentada en 4.3, las componentes del tensor de Cotton son

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{11} &= \frac{1}{4} (2\lambda_1^3 - \lambda_1^2(\lambda_2 + \lambda_3) - (\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_2 + \lambda_3)), \\ \tilde{C}_{22} &= \frac{1}{4} (-\lambda_1^3 + 2\lambda_2^3 + \lambda_1^2\lambda_3 - \lambda_2^2\lambda_3 - \lambda_3^3 + \lambda_1(-\lambda_2^2 + \lambda_3^2)), \\ \tilde{C}_{33} &= \frac{1}{4} (-\lambda_1^3 + \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_2^3 - \lambda_2\lambda_3^2 + 2\lambda_3^3 - \lambda_1(-\lambda_2^2 + \lambda_3^2)),\end{aligned}$$

y el resto de componentes $\tilde{C}_{ij} = 0$, es decir, el tensor diagonaliza.

(i) **Caso 1.** Los grupos $SU(2)$ y $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ con $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$.

Los lemas 4.4 y 4.5 nos permiten establecer las condiciones bajo las que \tilde{C} determina un \tilde{C} -solitón algebraico. Se debe verificar que $\tilde{C}_{11} = \tilde{C}_{22} = \tilde{C}_{33}$. Esta igualdad, junto con la diagonalidad de \tilde{C} implica que el \tilde{C} -solitón asociado es trivial. Además, la igualdad sólo se verifica si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ y $\tilde{C} = 0$. Por tanto, en este caso obtenemos un \tilde{C} -solitón sobre $SU(2)$ cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, y la variedad es localmente conformemente llana. Es un espacio de curvatura seccional constante homotético a la esfera S^3 .

(ii) **Caso 2.** Los grupos $\tilde{E}(2)$ y $E(1, 1)$ con $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$.

Las componentes no nulas del tensor de Cotton en este caso son

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{11} &= \frac{1}{4} (2\lambda_1^3 - \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_2^3), & \tilde{C}_{22} &= \frac{1}{4} (-\lambda_1^3 + 2\lambda_2^3 - \lambda_1\lambda_2^3), \\ \tilde{C}_{33} &= -\frac{1}{4} (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_1 + \lambda_2).\end{aligned}$$

Basándonos en el lema 4.7, para que \tilde{C} determine un \tilde{C} -solitón algebraico se debe verificar que $\tilde{C}_{11} = \tilde{C}_{22}$. Se sigue de esta última igualdad que $\lambda_1 = \lambda_2$, y en tal caso, $\tilde{C} = 0$. Por tanto, en este caso, solo existen \tilde{C} -solitones sobre $\tilde{E}(2)$ cuando $\lambda_1 = \lambda_2$, y la variedad es localmente conformemente llana. Es un espacio de curvatura seccional nula.

(iii) **Caso 3.** El grupo Heis con $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Las componentes no nulas del tensor de Cotton son

$$\tilde{C}_{11} = \frac{\lambda_1^3}{2}, \quad \tilde{C}_{22} = \frac{\lambda_1^3}{4}, \quad \tilde{C}_{33} = \frac{\lambda_1^3}{4}.$$

Dado que $\tilde{C}_{11} \neq \tilde{C}_{22}$, gracias al lema 4.9 podemos concluir que la única métrica invariante a la izquierda módulo homotecias sobre Heis es un \tilde{C} -solitón no trivial.

(iv) **Caso 4.** El grupo \mathbb{R}^3 con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

El tensor de Cotton se anula, y por tanto, esta métrica es un \tilde{C} -solitón trivial tal que la variedad asociada es llana.

Cuando G se trata de un grupo no unimodular y se considera una base ortonormal de \mathfrak{g} como la presentada en 4.4, las componentes del tensor de Cotton son

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{11} &= -\frac{1}{4}(\beta - \gamma) \left((\beta + \gamma)^2 + (\alpha - \delta)^2 \right), \\ \tilde{C}_{22} &= \frac{1}{4} \left(-\beta^3 - \beta\gamma^2 - 2\gamma^3 + \alpha^2(-\beta + \gamma) + \alpha\delta(\beta + 3\gamma) + 2\delta^2(\beta - \gamma) \right), \\ \tilde{C}_{33} &= \frac{1}{4} \left(2\beta^3 + 2\alpha^2(\beta - \gamma) + \beta^2\gamma + \gamma^3 - \alpha\delta(3\beta + \gamma) - \beta\delta^2 + \gamma\delta^2 \right), \\ \tilde{C}_{32} = \tilde{C}_{23} &= \frac{1}{4} \left(-2\alpha^2\delta + \beta\delta(-3\beta + \gamma) + \alpha(-\beta\gamma + 3\gamma^2 + 2\delta^2) \right),\end{aligned}$$

y el resto de componentes $\tilde{C}_{ij} = 0$.

(i) **Caso auto-autoadjunto** con $\beta = \gamma$. Tal y como mostramos en el capítulo anterior, se tiene que $\beta = \gamma = 0$. Así, la única componente no nula del tensor de Cotton es

$$\tilde{C}_{23} = -\frac{1}{2}\alpha\delta(-\alpha + \delta).$$

- Si $\alpha = \delta \neq 0$. Se anula el tensor de Cotton y la variedad subyacente es homotética al espacio \mathbb{H}^3 .
- Si $\alpha \neq \delta$. Basándonos en el lema 4.12, para que \tilde{C} determine un \tilde{C} -solitón algebraico se debe verificar que $\tilde{C}_{23} = 0$. Por tanto, se anula el tensor de Cotton.

(ii) **Caso no auto-autoadjunto** con $\beta \neq \gamma$.

Basándonos en el lema 4.12 se debe verificar que $\tilde{C}_{23} = 0$. En virtud de las hipótesis $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$, $\alpha + \delta \neq 0$ y $\beta \neq \gamma$, las únicas opciones son

- $\gamma = \delta = 0$. Las únicas componentes no nulas del tensor de Cotton son

$$\tilde{C}_{11} = \tilde{C}_{22} = -\frac{1}{2}\tilde{C}_{33} = -\frac{1}{4}\beta(\alpha^2 + \beta^2).$$

El lema 4.12 indica también que $\tilde{C}_{22} = \tilde{C}_{33}$ de lo que sigue $\beta = \alpha = 0$. Llegamos a una contradicción con el hecho de que $\beta \neq \gamma$.

- $\beta = \alpha = 0$. Las únicas componentes no nulas del tensor de Cotton son

$$\tilde{C}_{11} = \tilde{C}_{33} = -\frac{1}{2}\tilde{C}_{22} = \frac{1}{4}\gamma(\gamma^2 + \delta^2).$$

El lema 4.12 indica también que $\tilde{C}_{22} = \tilde{C}_{33}$ de lo que sigue $\gamma = \delta = 0$. Llegamos a una contradicción con el hecho de que $\gamma \neq \beta$.

- $\beta = -\gamma \neq 0$ y $\delta = \alpha \neq 0$. Se anula el tensor de Cotton y, por tanto, es un \tilde{C} -solitón trivial. Es un espacio de curvatura seccional constante $K = -\delta^2$, por lo que es homotética al espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 y un solitón de Ricci trivial.

En conclusión, los \tilde{C} -solitones sobre grupos no unimodulares son triviales tal que se anula el tensor de Cotton y se corresponden con el caso auto-adjunto o no auto-adjunto cuando $\beta = -\gamma \neq 0$ y $\delta = \alpha \neq 0$.

En la siguiente tabla 5.2 se recopila la casuística que se acaba de estudiar.

Grupo de Lie	Solitón trivial		Solitón no trivial	
Unimodular				
SU(2)	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	$\tilde{C} = 0$	-	-
$\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$	-	-	-	-
$\tilde{\text{E}}(2)$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\tilde{C} = 0$	-	-
E(1, 1)	-	-	-	-
Heis	-	-	Siempre	$\tilde{C} = \frac{\lambda^3}{4} \text{diag}[2, -1, -1]$
\mathbb{R}^3	Siempre	$\tilde{C} = 0$	-	-
No unimodular				
Auto-adjunto	Siempre	$\tilde{C} = 0$	-	-
No auto-adjunto	$\beta = -\gamma \neq 0$ y $\delta = \alpha \neq 0$	$\tilde{C} = 0$	-	-

Figura 5.2: Solitones asociados al tensor de Cotton \tilde{C} .

En definitiva, se verifica el enunciado del teorema. □

Observación 5.3. Un aspecto relevante del resultado anterior es la existencia de solitones algebraicos de Ricci en dimensión tres que no son solitones algebraicos de Cotton; el grupo $E(1, 1)$ con la métrica determinada por $\lambda_2 = -\lambda_1$ es un solitón de Ricci algebraico no trivial que no es un solitón de Cotton.

5.3. Solitones algebraicos para el flujo de la curvatura cruzada

Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión tres orientada y denotemos con $\omega = \omega_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ la forma de volumen. Sea $\omega^{ijk} = g^{ia} g^{jb} g^{kc} \omega_{abc}$. Se define el *tensor de curvatura cruzada* como el campo de tensores de tipo $(0, 2)$ H determinado por (ver [5])

$$H_{ij} = \frac{1}{8} R_{ilpq} \omega^{pqk} R_{kjr s} \omega^{rsl}.$$

Levantando índices con la métrica se obtiene el campo de tensores curvatura cruzada de tipo $(1, 1)$ dado por $h_i^j = g^{ja} H_{ai}$.

El tensor de curvatura cruzada es simétrico y natural, esto es, se conserva por isometrías (independientemente de que conserven o inviertan la orientación). Además, es homogéneo de grado $d = -1$ por homotecias, esto es $H[\kappa g] = \kappa^{-1} H[g]$.

En lo que respecta a este tensor, se tiene pleno conocimiento de los H -solitones triviales, abarcando no solo el caso algebraico. El tensor curvatura cruzada de una variedad Riemanniana es un múltiplo escalar de la métrica si y solo si la métrica es Einstein o el operador de Ricci tiene autovalores $\text{Ric} = \text{diag}[\lambda, \lambda, 0]$, con $\lambda \neq 0$. Así pues, los espacios \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 , \mathbb{H}^3 y $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ se corresponden con solitones triviales para el flujo de la curvatura cruzada.

El siguiente teorema describe los solitones algebraicos para el flujo de la curvatura cruzada. Es resultado de aplicar los criterios construídos en el capítulo 4 sobre el tensor de curvatura cruzada H .

Teorema 5.4. *Sea $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un grupo de Lie Riemanniano de dimensión tres, donde la métrica es invariante a la izquierda. Entonces es un solitón algebraico para el flujo de la curvatura cruzada si y solo si es un solitón de Ricci o una métrica invariante a la izquierda en el producto semi-directo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ determinada por*

$$[e_1, e_2] = k \left(-\frac{\delta}{\gamma} e_2 + e_3 \right), \quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal y $k := \frac{-\gamma^2 - 2\delta^2 \pm 2\sqrt{\gamma^2 \delta^2 + \delta^4}}{\gamma}$.

Demostración. Analizamos por separado los escenarios unimodular y no unimodular.

Cuando G se trata de un grupo unimodular y se considera una base ortonormal de autovectores de \mathfrak{g} como la presentada en 4.3, las componentes del tensor de curvatura cruzada son

$$H_{11} = \frac{1}{16} \left((\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3 - 3\lambda_3^2 \right) \left(\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 3\lambda_2^2 - 2\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_3^2 \right),$$

$$H_{22} = -\frac{1}{16} \left((\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3 - 3\lambda_3^2 \right) \left(3\lambda_1^2 - (\lambda_2 - \lambda_3)^2 - 2\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) \right),$$

$$H_{33} = \frac{1}{16} \left((\lambda_1 - \lambda_2)^2 \left(-3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 10\lambda_1\lambda_2 + 8\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2) - 6\lambda_3^2 \right) + \lambda_3^4 \right),$$

y el resto de componentes $H_{ij} = 0$, es decir, el tensor diagonaliza.

(i) **Caso 1.** Los grupos $SU(2)$ y $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ con $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$. Los lemas 4.4 Y 4.5, nos permiten establecer las condiciones bajo las que H determina un H -solitón algebraico. Basándonos en los lemas 4.4 Y 4.5, para que H determine un H -solitón algebraico. Se debe verificar que $H_{11} = H_{22} = H_{33}$. Esta igualdad junto con la diagonalidad de H , implica que el H -solitón asociado es trivial. Además, la igualdad sólo se verifica si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ y $H = \frac{\lambda_1^2}{4} Id$. Por tanto, en este caso obtenemos un H -solitón sobre $SU(2)$ cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ y es trivial. Estas condiciones aseguran que la métrica tiene una curvatura constante $K = \frac{\lambda_1^2}{4}$, por lo que la variedad es homotética a la esfera \mathbb{S}^3 .

(ii) **Caso 2.** Los grupos $\widetilde{E}(2)$ y $E(1, 1)$ con $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$.

Las componentes no nulas del tensor de curvatura cruzada en este caso son

$$H_{11} = \frac{1}{16} (\lambda_1 - \lambda_2)^3 (\lambda_1 + 3\lambda_2), \quad H_{22} = \frac{1}{16} (\lambda_1 - \lambda_2)^3 (\lambda_2 + 3\lambda_1),$$

$$H_{33} = \frac{1}{16} (\lambda_1 - \lambda_2)^3 (\lambda_1 + 3\lambda_2) (\lambda_2 + 3\lambda_1).$$

Basándonos en el lema 4.7, para que H determine un H -solitón algebraico se debe verificar que $H_{11} = H_{22}$. La última igualdad se tiene en dos situaciones:

- (i) Si $\lambda_2 = \lambda_1$. En tal caso $H = 0$ y obtenemos un H -solitón trivial sobre $\widetilde{E}(2)$. Es un espacio de curvatura seccional constante $K = 0$, llano.
- (ii) Si $\lambda_2 = -\lambda_1$. En tal caso, $H = \lambda_1^4 \text{diag}[-1, -1, 1]$ y la métrica es un H -solitón no trivial sobre $\widetilde{E}(1, 1)$.

(iii) **Caso 3.** El grupo Heis con $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Las componentes no nulas del tensor de curvatura cruzada son

$$H_{11} = \frac{\lambda_1^4}{16}, \quad H_{22} = H_{33} = -\frac{3\lambda_1^4}{16}.$$

Dado que $H_{11} \neq H_{22}$, gracias al lema 4.9 podemos concluir que la única métrica invariante a la izquierda módulo homotecias sobre Heis es un H -solitón no trivial.

(iv) **Caso 4.** El grupo \mathbb{R}^3 con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

El tensor de curvatura cruzada se anula, y por tanto, esta métrica es un H -solitón trivial tal que la variedad asociada es llana.

Cuando G se trata de un grupo no unimodular y se considera una base ortonormal de \mathfrak{g} como la presentada en 4.4, las componentes del tensor de curvatura cruzada son

$$\begin{aligned}
H_{11} &= \frac{1}{16} ((3\gamma - \beta)(3\beta - \gamma)(\beta + \gamma)^2 - 32\alpha\beta\gamma\delta - 4\delta^2(\beta - \gamma)^2 - 4\alpha^2((\beta - \gamma)^2 - 4\delta^2)), \\
H_{22} &= \frac{1}{16} (4\alpha^2 + (3\beta - \gamma)(\beta + \gamma)) (-(\beta + \gamma)^2 4\alpha\delta), \\
H_{33} &= \frac{1}{16} ((\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta) ((\beta - 3\gamma)(\beta + \gamma) - 4\delta^2), \\
H_{32} = H_{23} &= -\frac{1}{4} ((\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta) (\alpha\gamma + \beta\delta),
\end{aligned}$$

y el resto de componentes $H_{ij} = 0$.

- (i) **Caso auto-autoadjunto** con $\beta = \gamma$. Tal y como mostramos en el capítulo anterior, se tiene que $\beta = \gamma = 0$. Así, las componentes no nulas del tensor de curvatura cruzada son

$$H_{11} = \alpha^2\delta^2, \quad H_{22} = \alpha^3\delta, \quad H_{33} = \alpha\delta^3.$$

Conforme al lema 4.12, H determina siempre un H -solitón algebraico en este caso puesto que $H_{23} = 0$, independientemente del valor del resto de componentes. Desglosamos en casos trivial y no trivial:

- Si $\alpha = \delta \neq 0$, $\alpha = 0$ y $\delta \neq 0$ ó $\delta = 0$ $\alpha \neq 0$. Las componentes de la diagonal coinciden $H_{11} = H_{22} = H_{33}$ y obtenemos un H -solitón trivial. El tensor es $H = \delta^4 Id$ si $\alpha = \delta \neq 0$ y se anula en los otros dos casos.
- En caso contrario, se obtiene un H -solitón no trivial.

- (ii) **Caso no auto-autoadjunto** con $\beta \neq \gamma$.

Basándonos en el lema 4.12 se debe verificar que $H_{23} = 0$. En virtud de las hipótesis $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$, $\alpha + \delta \neq 0$ y $\beta \neq \gamma$, las únicas opciones son:

- $\gamma = \delta = 0$. Las únicas componentes no nulas del tensor de curvatura cruzada son

$$H_{11} = H_{22} = -\frac{1}{16}\beta^2(4\alpha^2 + 3\beta^2), \quad H_{33} = \frac{1}{16}\beta^4.$$

El lema 4.12 indica también que $H_{22} = H_{33}$ de lo que sigue $\beta = \alpha = 0$. Llegamos a una contradicción con el hecho de que $\beta \neq \gamma$.

- $\alpha = -\frac{\beta\delta}{\gamma}$. Las componentes no nulas del tensor de curvatura cruzada son

$$\begin{aligned}
H_{11} &= -\frac{1}{16\gamma^2} ((\beta - 3\gamma)(\beta + \gamma) - 4\delta^2) (2\beta\gamma^3 - \gamma^4 + \beta^2(3\gamma^2 + 4\delta^2)), \\
H_{22} &= \frac{1}{16\gamma^3} (\gamma(\beta + \gamma)^2 + 4\beta\delta^2) (-2\beta\gamma^3 + \gamma^4 + \beta^2(3\gamma^2 + 4\delta^2)), \\
H_{33} &= \frac{1}{16\gamma} ((\beta - 3\gamma)(\beta + \gamma) - 4\delta^2) (\gamma(\beta + \gamma)^2 + 4\beta\delta^2).
\end{aligned}$$

El lema 4.12 indica también que $H_{22} = H_{33}$ y las únicas situaciones en las que esto ocurre son:

- (i) Si $\beta = -\gamma$. Entonces $H = \delta^4 Id$ con $\delta \neq 0$, es decir, obtenemos un H -solitón trivial.
- (ii) Si $\beta = k = \frac{-\gamma^2 - 2\delta^2 \pm 2\sqrt{\gamma^2\delta^2 + \delta^4}}{\gamma}$. Entonces $H_{22} = H_{33} = 0$ y

$$H_{11} = \tilde{k} := -\frac{4\delta^2 (\gamma^2 + \delta^2)^2 \zeta}{\gamma^6}.$$

donde $\zeta = \gamma^4 + 8\delta^4 \mp 8\delta^2 \sqrt{\delta^2 (\gamma^2 + \delta^2)} \mp 4\gamma^2 (\mp 2\delta^2 + \sqrt{\delta^2 (\gamma^2 + \delta^2)})$.

En la siguiente tabla 5.3 se recopila la casuística que se acaba de estudiar.

Grupo de Lie	Solitón trivial		Solitón no trivial	
Unimodular				
SU(2)	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	$H = \frac{\lambda_1^2}{4} Id$	-	-
$\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$	-	-	-	-
$\widetilde{E}(2)$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$H = 0$	-	-
E(1, 1)	-	-	$\lambda_1 = -\lambda_2$	$H = -\lambda_1^4 \text{diag}[1, 1, -1]$
Heis	-	-	Siempre	$H = -\frac{\lambda_1^4}{16} \text{diag}[-1, 3, 3]$
\mathbb{R}^3	Siempre	$H = 0$	-	-
No unimodular				
Auto-adjunto	$\alpha = \delta \neq 0$ $\alpha = 0$ y $\delta \neq 0$ o viceversa	$H = \delta^4 Id$ $H = 0$	Caso contrario	$H = \text{diag}[\alpha^2\delta^2, \alpha^3\delta, \alpha\delta^3]$
No auto-adjunto	$\beta = -\gamma \neq 0$ y $\alpha = \delta \neq 0$	$H = \delta^4 Id$	$\alpha = -\frac{\beta\delta}{\gamma}$ y $\beta = k$	$H = \tilde{k} \text{diag}[1, 0, 0]$

Figura 5.3: Solitones asociados al tensor de curvatura cruzada H .

En definitiva, se verifica el enunciado del teorema. □

Observación 5.5. Es importante destacar que todos los solitones de Ricci son también H -solitones. No obstante, al considerar el tensor de curvatura, se observa la existencia de un solitón sobre un grupo no unimodular y no auto-adjunto, que no es un solitón de Ricci.

Examinando las tablas 5.1, 5.2 y 5.3 y prestando especial atención a las observaciones 5.3 y 5.5, se construye el siguiente esquema que ilustra la relación entre los solitones algebraicos asociados a los diferentes tensores.

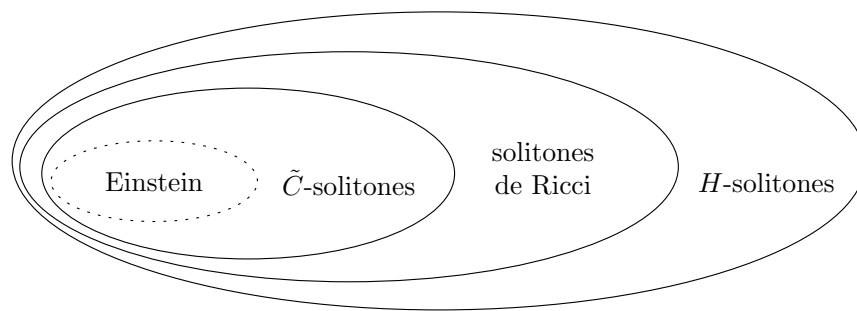


Figura 5.4: Relación entre solitones algebraicos asociados a distintos tensores.

Bibliografía

- [1] Arroyo R. M., Lafuente R. (2015) *Homogeneous Ricci solitons in low dimensions.*, IMRN No. 13, 4901–4932.
- [2] Calviño-Louzao E., Hervella L. M., Seoane-Bascoy J., Vázquez-Lorenzo R. (2013) *Homogeneous Cotton Solitons.* J. Phys. A, Math. Theor. 46, No. 28.
- [3] Catino G., Mastrolia P. , Monticelli D. D., Rigoli M. (2016) *Analytic and geometric properties of generic Ricci solitons.* Trans. Am. Math. Soc. 368, No. 11, 7533–7549.
- [4] Chow B. et al. (2007) *The Ricci flow: techniques and applications. Part I. Geometric aspects.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS).
- [5] Chow B., Hamilton R. S. (2004) *The cross curvature flow of 3-manifolds with negative sectional curvature.* Turk. J. Math. 28, No. 1, 1–10.
- [6] Hamilton R. S. (2008) *Three-manifolds with positive Ricci curvature.* J. Differ. Geom. 17, 255–306.
- [7] Hilton P. J., Stammbach U. A. (1997) *A course in homological algebra.* 2nd ed. New York, NY: Springer.
- [8] Kisisel A. U. Ö., Sarioglu O., Tekin B. (2008) *Cotton flow.* Classical Quantum Gravity 25, No. 16.
- [9] Kühnel W. (2015) *Differential geometry. Curves-surfaces-manifolds.* Translated from the 2013 German edition by Bruce Hunt, with corrections and additions by the author. 3rd edition. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS).
- [10] Lauret J. (2001) *Ricci soliton homogeneous nilmanifolds.* Math. Ann. 319, No. 4, 715–733.
- [11] Lee J. M. (2018) *Introduction to Riemannian manifolds. 2nd edition.* Cham: Springer.
- [12] Loday J.-L. (1996) *Künneth-style formula for the homology of Leibniz algebras.*, Math. Z. 221, No. 1, 41–47 .
- [13] Milnor J. W. (1976) *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups.*, Adv. Math. 21, 293–329.

-
- [14] Moroianu S. (2015) *The Cotton tensor and Chern-Simons invariants in dimension 3: an introduction*. Bul. Acad. ?tiin?e Repub. Mold., Mat. 2015, No. 2(78), 3–20.
- [15] Naber A. (2010) *Noncompact shrinking four solitons with nonnegative curvature*. J. Reine Angew. Math. 645, 125–153.
- [16] Petersen P. (2016) *Riemannian geometry. 3rd edition*. Cham: Springer.
- [17] Petersen P., Wylie W. (2009) *On gradient Ricci solitons with symmetry*. Proc. Am. Math. Soc. 137, No. 6, 2085–2092.
- [18] Petersen P., Wylie W. (2022) *Rigidity of homogeneous gradient soliton metrics and related equations*. Differ. Geom. Appl. 84.
- [19] Sekigawa K. (1977) *On some 3-dimensional curvature homogeneous spaces*. Tensor, New Ser. 31, 87–97.
- [20] Spiro A. (1993) *A remark on locally homogeneous Riemannian spaces*. Result. Math. 24, No. 3–4, 318–325.
- [21] Wears T. H. (2016) *On algebraic solitons for geometric evolution equations on three-dimensional Lie groups*. Tbil. Math. J. 9, No. 2, 33–58.