PEDRO MARTÍN MÉNDEZ

FOLIACIONES TRANSVERSALMENTE HOMOGÉNEAS NO UNIMODULARES

158
2024

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

PEDRO MARTÍN MÉNDEZ

FOLIACIONES TRANSVERSALMENTE HOMOGÉNEAS NO UNIMODULARES

158
2024
Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

ESCOLA DE DOUTORAMENTO
INTERNACIONAL DA USC

TESIS DOCTORAL

Foliaciones Transversalmente Homogéneas no Unimodulares

Pedro Martín Méndez

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE COMPOSTELA

AÑO 2024

La presente tesis fue dirigida por Enrique Macías Virgós. Defendida en la Universidad de Santiago de Compostela el 1 de marzo de 2024.

A Silvia y a Marcos, como todo lo demás

Índice general

Resumen

En esta tesis estudiamos la cohomología básica de las foliaciones transversalmente homogéneas, generalizando resultados clásicos para las foliaciones de Lie y dando condiciones para que una foliación transversalmente homogénea sea unimodular. Estos resultados nos permiten enunciar nuestro teorema principal: en una foliación transversalmente homogénea no unimodular sobre una variedad compacta, si se cumplen ciertas hipótesis, se tiene que o bien la variedad, o bien las adherencias de las hojas, o bien el espacio total del fibrado de Blumenthal asociado a la foliación, fibran sobre $\mathbb{S}^1$.

Introducción

El estudio de las foliaciones comienza con Ehresmann y Reeb a mediados del siglo XX. Sus importantes aplicaciones en la física de sistemas dinámicos animaron a otros grandes matemáticos a profundizar en las propiedades de estas estructuras, sentando las bases de una disciplina cuyo estudio sigue siendo hoy en día objeto de múltiples publicaciones.

El concepto de foliación es una generalización del concepto de submersión, siendo la foliación definida por las fibras de un fibrado el ejemplo más simple. En un paso más, Fedida introdujo el concepto de foliación de Lie, definida a partir de una submersión equivariante sobre un grupo de Lie.

En 1979, Blumenthal, en [2], define las foliaciones transversalmente homogéneas, una generalización de las de Lie, donde la base de la submersión es una variedad homogénea.

Mi trabajo en foliaciones, siempre junto al profesor Enrique Macías Virgós, comenzó a finales del siglo pasado, dando como resultado el trabajo monográfico *Subgrupos Normalizadores en las Foliaciones de Lie* [33], donde estudiamos las propiedades de las foliaciones de Lie a partir del normalizador del subgrupo de holonomía de la foliación. Fue a partir de ahí cuando centré mis esfuerzos en el análisis de la cohomología básica y, más en concreto, en la unimodularidad de las foliaciones.

Una foliación es unimodular si su cohomología básica en grado máximo es distinta de cero. El primer ejemplo de foliación de Lie no unimodular, que detallamos en el Capítulo 21, lo dio Carrière [7] en 1982. Fue un contraejemplo a un teorema de dualidad de Reinhart para la cohomología básica de una foliación, publicado en 1956. El impacto de este resultado provocó que muchos investigadores se plantearan qué hipótesis adicional faltaba para que el teorema se cumpliese. Surgió así la idea, a partir de los trabajos de Kamber y Tondeur, de que era necesaria una hipótesis de armonicidad, que era equivalente a que las hojas de la foliación fuesen subvariedades minimales. Se vio entonces que esta condición era probablemente equivalente a la unimodularidad.

En 1985, El Kacimi Alaoui, Sergiescu y Hector demostraron en [12] que la cohomología básica de una foliación Riemanniana sobre una variedad compacta es de dimensión finita. Ese mismo año, Masa, en [35], demostró que, para una foliación Riemanniana orientable, la unimodularidad es equivalente a la existencia de una métrica Riemanniana para la cual las hojas son subvariedades minimales. Un año más tarde, El Kacimi Alaoui y Hector demostraron en [10] que la cohomología básica de una foliación satisface la dualidad de Poincaré si y solamente si la foliación es unimodular. Posteriormente, en 1990, un resultado de El Kacimi Alaoui y Nicolau en [11] evidenció que una foliación de Lie es unimodular si y solamente si lo son sus grupos de Lie asociados.

En 2005, a partir de estos y otros trabajos, Enrique Macías y yo enunciamos el siguiente teorema [30, Teorema 1.1]: si una foliación de Lie sobre una variedad compacta M es no unimodular entonces o bien M o bien las adherencias de las hojas de la foliación fibran sobre $\mathbb{S}^1$.

Surgía de manera natural el propósito de generalizar este resultado a las foliaciones transversalmente homogéneas. Aplazado durante años, fue fundamental el congreso *Geometry and Dynamics of Foliations* en el ICMAT de Madrid, en septiembre de 2014. Fue entonces cuando ideamos la estrategia para poder llevarlo a cabo, que ahora ha dado su fruto en este trabajo, donde además de generalizar el resultado de [30] doy, bajo ciertas hipótesis, condiciones para la unimodularidad de las foliaciones transversalmente homogéneas, generalizando resultados clásicos para las de Lie.

El primer paso de mi trabajo para generalizar resultados de foliaciones de Lie a foliaciones transversalmente homogéneas fue, lógicamente, estudiar a fondo el artículo de Blumenthal [2] donde las define. Entender por qué era necesaria la hipótesis de la efectividad de la acción del grupo y encontrar la forma de evitarla, como explicamos en el Capítulo 6, resultó un avance fundamental en nuestro propósito, pues esto nos permitiría realizar el estudio considerando que el grupo que actúa es simplemente conexo, apoyándonos en la descripción hecha del *core group* que damos en el Capítulo 1.

Una vez entendida la estructura de las foliaciones transversalmente homogéneas, la siguiente tarea a acometer sería estudiar la relación entre $\mathrm{H}(M/\mathcal{F})$, la cohomología básica de $\mathcal{F}$, y la cohomología de $N = G/K$, el espacio homogéneo sobre el cual modela la foliación. Generalizando resultados conocidos para las foliaciones de Lie demostramos que $\mathrm{H}(M/\mathcal{F})$ es isomorfa a $H_{\mathrm{H}}(N)$, la cohomología del complejo de formas en N que son invariantes por la acción de H, con $H = \overline{\Gamma}$, la adherencia del grupo de holonomía de $\mathcal{F}$, pero solamente cuando las fibras de la aplicación desarrollo son conexas. En las foliaciones transversalmente homogéneas la compacidad de la variedad M no garantiza que la submersión desarrollo sea un fibrado. Resultados de Hermann en [22] permiten asegurarlo cuando la foliación es Riemanniana.

Por lo tanto, para estudiar la unimodularidad cuando existe un desarrollo con fibras conexas definiendo la foliación necesitamos estudiar cuándo $H^n_{\mathrm{H}}(N)$, con $n = \dim N$, la cohomología en grado máximo, es distinta de cero. Ante la dificultad de atacar el problema de una forma directa, conseguimos generalizar resultados aplicables a las foliaciones de Lie para obtener la inyectividad del morfismo $H_G(N) \to H_{\mathrm{H}}(N)$ inducido por la inclusión $i\colon \Omega_G(N) \to \Omega_{\mathrm{H}}(N)$, en caso de que $H\backslash G$ sea compacto, G *fuertemente* unimodular (es decir, con $\det \mathrm{Ad}_G(k) = 1$ para todo $k \in K$) y H unimodular. Así, que $H_G(N) \neq 0$ garantiza que $H_{\mathrm{H}}(N) \neq 0$. Detallamos este argumento en el Capítulo 9.

Procedía entonces estudiar la cohomología del complejo $\Omega_G(N)$ de formas diferenciales en N invariantes por la acción de G. La cohomología de este complejo, como demostramos en el Capítulo 15, es isomorfa a la cohomología del complejo $L_K(\Lambda^r\mathfrak{p}, \mathbb{R})$ de aplicaciones lineales K-invariantes de $\Lambda^r\mathfrak{p}$ en $\mathbb{R}$, donde $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ álgebras de Lie de G y de K, respectivamente.

Como no resulta posible calcular de forma general las cohomologías en grado máximo, necesitábamos valernos de la dualidad de Poincaré para poder ceñir los cálculos a la cohomología en grado cero, donde sí era posible extraer conclusiones definitivas. Para ello, como detallamos en los Capítulos 3 y 4, estudiamos la homología y cohomología de $\mathfrak{g}$ con coeficientes en un módulo. Dado un $\mathfrak{g}$-módulo V, concluimos que $H^r(\mathfrak{g}, V^*) \cong H_r(\mathfrak{g}, V)^*$, es decir, la cohomología de $\mathfrak{g}$

con coeficientes en el dual de un módulo es el dual de la homología de $\mathfrak{g}$ con coeficientes en dicho módulo.

Si modificamos la representación ρ de $\mathfrak{g}$ que dota a V de estructura de $\mathfrak{g}$-módulo haciendo $\rho^t(X) = \rho(X) - \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X \cdot 1_V$ para $X \in \mathfrak{g}$ podremos definir $V^t = (V, \rho^t)$, el *módulo de Hazewinkel*. Este módulo será isomorfo a $V \otimes (\Lambda^n \mathfrak{g})^*$ y, como a nivel de complejos tendremos un isomorfismo entre $\Lambda^r \mathfrak{g} \otimes V^t$ y $L(\Lambda^{n-r}\mathfrak{g}, V)$, podremos concluir que $H_r(\mathfrak{g}, V^t) \cong H^{n-r}(\mathfrak{g}, V)$, lo que, en combinación con la dualidad obtenida al estudiar la homología y cohomología con coeficientes en un módulo, implicará que en cohomología se tiene que $H^r(\mathfrak{g}, (V^t)^*) \cong H^{n-r}(\mathfrak{g}, V)^*$.

Por último, estudiamos qué sucede si al módulo V lo dotamos de estructura de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo. Para ello, tomamos como hipótesis que $\mathfrak{k}$ es unimodular y que el par $(\mathfrak{g}, K)$ es reductivo, es decir, existe un subespacio vectorial $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ y tal que $\operatorname{Ad}_G(k)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ para todo $k \in K$. Si V es un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo consideramos el $(\mathfrak{g}, K)$-módulo de Hazewinkel, ahora V^{tw}, donde la representación de $\mathfrak{g}$ es ρ^t y la del grupo es la dada por $k \cdot_t v = \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}(k \cdot v)$, con $k \in K$ y $v \in V$. Este módulo será isomorfo a $V \otimes_{\mathbb{R}} (\Lambda^q \mathfrak{p})^*$, con $q = \dim \mathfrak{p}$. Así tendremos un isomorfismo de complejos $\Lambda^r \mathfrak{p} \otimes_K V^{tw} \cong L_K(\Lambda^{q-r}\mathfrak{p}, V)$, el complejo de aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales de K-módulos entre $\Lambda^{q-r}\mathfrak{p}$ y V. Ese isomorfismo nos permitió concluir que $H^r(\mathfrak{g}, K; V) \cong H_{q-r}(\mathfrak{g}, K; V^{tw})$ y, por consiguiente, que $H^r(\mathfrak{g}, K; V)^* \cong H^{q-r}(\mathfrak{g}, K, (V^{tw})^c)$, donde el subíndice c significa que debemos quedarnos únicamente con los elementos K-finitos, los contenidos en un subespacio invariante de dimensión finita, para garantizar la estructura de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo.

Para poder demostrar la dualidad de Poincaré para la cohomología con coeficientes en un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo le pedimos al par $(\mathfrak{g}, K)$ que sea reductivo. En el Capítulo 3 probamos que si la acción de G sobre N es efectiva y por isometrías entonces el par $(\mathfrak{g}, K)$ es reductivo. Si esto sucede, tendremos que la cohomología $H_G(N)$ del complejo $\Omega_G(G/K)$ de formas invariantes por la izquierda es isomorfa a la cohomología relativa $\mathrm{H}(\mathfrak{g}, K; \mathbb{R})$. El cálculo de la cohomología en grado cero de este complejo, detallado en el Capítulo 15, nos llevó a la conclusión de que $H^0(\mathfrak{g}, K; (\mathbb{R}^{tw})^*) \neq 0$ si G y K son fuertemente unimodulares, lo que nos puso en el camino de demostrar que si $\mathcal{F}$ es una G/K-foliación transversalmente homogénea sobre una variedad M tal que existe una métrica invariante en G/K, con $H \backslash G$ compacto, donde H es la adherencia del grupo de holonomía de $\mathcal{F}$, y de forma que la aplicación desarrollo $f \colon \widetilde{M} \to G/K$ tiene fibras conexas, se tiene que si G y K son fuertemente unimodulares y H es unimodular, entonces $\mathcal{F}$ es unimodular.

Para poder estudiar la unimodularidad en foliaciones que no están definidas por un desarrollo de fibras conexas demostramos, como se recoge en el Capítulo 13, que cualquier foliación transversalmente homogénea $\mathcal{F}$ sobre una variedad M modelando sobre un espacio homogéneo conexo N modelará también sobre $\widehat{N}$, la cubierta universal de N. Para ello consideramos $N = G_0/K_0$, con G_0 conexo, y, a partir de la construcción detallada en el Capítulo 11, definimos el grupo de Lie $G_\sharp$, que actuará transitiva y efectivamente en $\widehat{N}$ y sobre el cual puede construirse un morfismo de holonomía que dota a $\mathcal{F}$ de estructura de $\widehat{N}$-foliación transversalmente homogénea.

Sin embargo, aún exigiendo que M sea compacta no está garantizado que las fibras del nuevo desarrollo sean conexas, por lo que debimos restringir nuestro estudio a las foliaciones Riemannianas, para las que este desarrollo será un fibrado localmente trivial, lo que garantiza la conexidad de las fibras al ser $\widehat{N}$ simplemente conexo. Esto nos permitió aplicar los resultados que tenemos para ese caso, exigiendo a mayores que el desarrollo inicial de $\mathcal{F}$ como N-foliación tenga un número finito de componentes conexas, pues si no no sería posible establecer la necesaria correspondencia entre las adherencias de los grupos de holonomía de las dos formas de definir la foliación. Así, demostramos que dada $\mathcal{F}$ una N-foliación sobre una variedad compacta M, donde $N = G_0/K_0$, con G_0 conexo y $K_{0\sharp} = K_0/\operatorname{Core}(K_0)$ compacto, si suponemos que la foliación está definida por un desarrollo cuyas fibras tienen un número finito de componentes conexas, entonces, si los grupos $G_0/\operatorname{Core}(K_0)$ y $\overline{\Gamma}_0$ son unimodulares y $K_0/\operatorname{Core}(K_0)$ es fuertemente unimodular, se tiene que $\mathcal{F}$ es unimodular. Esta demostración está recogida en el Capítulo 16 de este trabajo.

Nos aprovechamos también de nuestra construcción y del grupo de Lie $G_\sharp$ para reformular los resultados de Blumenthal en [2] acerca de la foliación inducida sobre las adherencias de las hojas. Al igual que Blumenthal, exigimos como hipótesis que $K_{0\sharp}$ sea compacto, y obtuvimos resultados similares, pero donde el grupo que soporta la holonomía de la foliación inducida es $G_\sharp$, que se puede calcular directamente a partir de G_0 y K_0, en lugar de $\operatorname{Iso}(\widehat{N})$, el grupo de las isometrías de $\widehat{N}$, de difícil representación en muchas ocasiones. Demostramos también, restringiendo el estudio a las componentes conexas, que la foliación inducida en la adherencia de una hoja puede modelar sobre un espacio homogéneo conexo.

Tras todo este estudio estábamos ya en condiciones de generalizar a las foliaciones transversalmente homogéneas el mencionado teorema acerca de las foliaciones de Lie no unimodulares, obteniendo como conclusión nuestro teorema principal, que asegura que dado $N = G_0/K_0$ un espacio homogéneo, con $K_{0\sharp}$ compacto y fuertemente unimodular y G_0 conexo, y dada $\mathcal{F}$ una N-foliación transversalmente homogénea sobre una variedad compacta M definida por un desarrollo donde las fibras tienen un número finito de componentes conexas, se tiene que si $\mathcal{F}$ no es unimodular entonces o bien M, o bien las adherencias de las hojas , o bien el espacio total del fibrado de Blumenthal, fibran sobre $\mathbb{S}^1$. El fibrado de Blumental lo definimos en el Capítulo 6 inspirándonos en las construcciones de [2].

Para finalizar, atacamos directamente el cálculo de la cohomología del complejo de formas en N invariantes por H, para obtener como resultado final que $\Omega^r_{\mathrm{H}}(G/K) \cong L_K(\Lambda^r\mathfrak{p}, C^\infty_K(H\backslash G))$, donde $C^\infty_K(H\backslash G)$ es el espacio de funciones diferenciables de $H\backslash G$ en $\mathbb{R}$ que cumplen la condición de K-finitud. Sin embargo, no resultó posible utilizar este complejo para perfilar más las hipótesis de nuestros resultados. Queda, por tanto, como posible vía de ampliación de este trabajo en el futuro.

Una vez finalizado todo este estudio, cuyos resultados están recogidos en [29], surgió la necesidad de analizar la relación con la clase de cohomología de la forma de curvatura media, que Jesús Álvarez estudia en [1]. Realizamos ese estudio en la Parte VI de este trabajo, encontrando una fuerte relación de la función modular con la forma de curvatura media en las foliaciones de Lie de hojas densas. En estructuras más complicadas esa relación se diluye pues queda distorsionada por la divergencia de los campos de vectores que se escojan para el paralelismo transverso.

Es obligado terminar esta introducción agradeciéndole a mi profesor, tutor, director y, finalmente, buen amigo Enrique Macías sus ideas, su guía, sus correcciones y, sobre todo, su paciencia durante todos estos años. Sin su ayuda este trabajo no habría sido posible.

Y no puedo dejar de citar aquí a Jesús Álvarez, no solo por sus aportaciones y su ayuda cada vez que se la pedí, si no también por su calidez en todos nuestros encuentros.

De mis inicios, un recuerdo para Hellen Colman y para nuestras conversaciones sobre Matemáticas o sobre todo en general. Y ya en estos últimos tiempos, un abrazo para David, un chaval majísimo que no duda en ayudarte siempre que puede.

Por supuesto, a mi madre, a Alberto, a Ángeles y a todas esas personas que de vez en cuando me preguntaban qué tal llevaba la tesis, mi agradecimiento por su interés y un abrazo muy fuerte para todas ellas.

Parte I

Preliminares

Capítulo 1
Espacios Homogéneos

En este Capítulo detallaremos las acciones sobre espacios homogéneos y definiremos el *core group*, necesario para garantizar la efectividad de la acción y que nos permitirá más adelante trabajar con espacios simplemente conexos.

1.1. Acciones diferenciables

Sea G un grupo de Lie. No suponemos que sea conexo ni simplemente conexo.

Sea N una variedad diferenciable. Una acción por la izquierda de G sobre N es una aplicación diferenciable

$$\begin{array}{ccc} G \times N & \longrightarrow & N \\ (g,p) & \longmapsto & g \cdot p \end{array}$$

cumpliendo las siguientes propiedades:

1. $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$, para todo $g, h \in G$ y para todo $p \in N$;
2. $e \cdot p = p$, para todo $p \in N$.

De esta forma, para cualquier $g \in G$, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \lambda(g)\colon & N & \longrightarrow & N \\ & p & \longmapsto & g \cdot p \end{array}$$

es un difeomorfismo.

Definición 1.1. Dado $p \in N$ llamaremos grupo de isotropía de p al subgrupo G_p formado por los elementos de G que dejan fijo p. Es decir,

$$G_p = \{g \in G \colon g \cdot p = p\}.$$

Definición 1.2. La acción de G sobre N se dice

- *Efectiva*, si para todo $g \in G$, $g \neq e$, se tiene que $\lambda(g) \neq \mathrm{id}$.
- *Libre*, si no tiene puntos fijos, es decir, si $G_p = \{e\}$, para todo $p \in N$.
- *Propiamente discontinua*, si para todo $p \in N$ existe un entorno U de p tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \neq e$.

- *Transitiva*, si para todo $p, q \in N$ existe $g \in G$ tal que $q = g \cdot p$.

Un G-espacio homogéneo N es una variedad N sobre la que existe una acción por la izquierda transitiva del grupo de Lie G. De esta forma, llamando $K = G_o$ a la isotropía de un punto fijado $o \in N$ por la acción de G, se tiene un difeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} N & \cong & G/K \\ g \cdot o & \mapsto & [g] \end{array}$$

La siguiente Proposición nos permitirá considerar que el grupo de Lie G y el G-espacio homogéneo N son conexos:

Proposición 1.3. *Sea N una variedad no conexa sobre la que actúa transitivamente un grupo de Lie no conexo y sea $K = G_p$ la isotropía de un punto $p \in N$. Llamaremos N_p a la componente conexa de N que contiene a p. Entonces G_e, la componente conexa del neutro de G, actúa de forma transitiva en N_p, con isotropía $G_e \cap K$.*

Demostración. Podemos hacer actuar G_e en N_p haciendo

$$\begin{array}{ccc} G_e \times N_p & \xrightarrow{\Theta} & N_p \\ (g_0, x) & \longmapsto & g_0 \cdot x \end{array}$$

Esta acción está bien definida pues $G_e \times N_p$ es conexo y por tanto su imagen por Θ necesariamente ha de estar contenida en N_p.

Para comprobar que la acción es transitiva bastará probar que la órbita de $p \in N_p$ por la acción de G_e cubre todo N_p. Para ello, consideraremos la proyección

$$\begin{array}{cccc} \pi\colon & G & \longrightarrow & N \\ & g & \longmapsto & g \cdot p \end{array}$$

que será una aplicación abierta (ver, por ejemplo, el Teorema 3.58 de [50]). Nótese que G_e es abierto y cerrado en G. Así, la órbita $G_e \cdot p$, que es la imagen por π del abierto G_e, será un abierto en N, y por tanto en N_p. Si comprobamos que también es un cerrado el resultado estará demostrado. Para ello bastará comprobar que $\pi^{-1}(G_e \cdot p)$ es una unión de componentes conexas de G. Veámoslo:

Sea $g \in \pi^{-1}(G_e \cdot p)$, es decir, $\pi(g) = h \cdot p$, con $h \in G_e$. Considerando

$$G_p = \{k \in G \colon \pi(k) = p\}$$

se tiene que $h^{-1}g \in G_p$, con lo que existe $k \in G_p$ tal que $g = h \cdot k$, y por lo tanto

$$g \in G_e \cdot k \subset \bigcup_{k \in G_p} G_e \cdot k.$$

Recíprocamente, si $g \in \bigcup_{k \in G_p} G_e \cdot k$ existe $k \in G_p$ tal que $g \in G_e \cdot k$, con lo que existe $h \in G_e$ tal que $g = hk$. Y como $\pi(hk) = hk \cdot p = h \cdot p$ entonces $g = hk \in \pi^{-1}(G_e \cdot p)$.

Así, $\pi^{-1}(G_e \cdot p)$ es cerrado en G, pues su complementario será una unión de componentes conexas, con lo que $G_e \cdot p$ es cerrado en N y en N_p.

Por último, la isotropía en el punto p por la acción de G_e será

$$(G_e)_p = \{g \in G_e \colon g \cdot p = p\} = G_p \cap G_e. \quad \square$$

1.2. La efectividad de la acción

Para el desarrollo de nuestro trabajo, en ocasiones necesitaremos que la acción del grupo de Lie G sobre el espacio homogéneo $N = G/K$ sea efectiva. Conseguiremos esto cocientando G por el llamado *normal core group*, que será el mayor subgrupo normal de G contenido en K.

1.2.1. Normal core group

Sea N un G-espacio homogéneo. Fijemos un punto base $o \in N$ y sea $K = G_o \subset G$ su isotropía; entonces la aplicación $[g] \in G/K \mapsto g \cdot o \in N$ define un difeomorfismo compatible con las acciones.

Definición 1.4. El núcleo del morfismo $\lambda\colon G \to \mathrm{Diff}(N)$ dado por $\lambda(g)(o) = g \cdot o$ se llama el *core group* [41] de la acción. Lo denotamos por $\mathrm{Core}_G(K)$ o simplemente $\mathrm{Core}(K)$. Es decir,

$$\mathrm{Core}(K) = \{g \in G\colon \lambda(g) = \mathrm{id}\}.$$

La acción de G sobre N es efectiva si y solamente si $\mathrm{Core}(K) = \{e\}$.

Proposición 1.5. *Se tiene*

1. $\mathrm{Core}(K) = \bigcap_{p \in N} G_p$*, la intersección de los subgrupos de isotropía.*
2. $\mathrm{Core}(K) = \bigcap_{g \in G} gKg^{-1}$*, la intersección de los subgrupos conjugados a* K*.*
3. $\mathrm{Core}(K) = \{k \in K\colon gkg^{-1} \in K \ \forall\, g \in G\}$.
4. $\mathrm{Core}(K)$ *es el mayor subgrupo de* K *que es normal en* G*.*

Demostración.
1) Tenemos que $g \in G_p$ para todo $p \in N \Leftrightarrow g \cdot p = p$ para todo $p \in N \Leftrightarrow \lambda(g)(p) = p$ para todo $p \in N \Leftrightarrow \lambda(g) = \mathrm{id} \Leftrightarrow g \in \mathrm{Core}(K)$.
2) Sea $p = g \cdot o \in N$. Se tiene que $G_p = gG_og^{-1}$, puesto que

$$h \cdot p = p \Leftrightarrow hg \cdot o = g \cdot o \Leftrightarrow g^{-1}hg \cdot o = o.$$

3) Sabemos, por el apartado 2, que dado $k \in \mathrm{Core}(K)$ se tiene que $k = g^{-1}k_g g$ para todo $g \in G$, con $k_g \in K$. Esto implica que $gkg^{-1} \in K$ para todo $g \in G$.

Recíprocamente, dado $k \in K$ tal que $gkg^{-1} = k_g \in K$ para todo $g \in G$, se tiene que $k = g^{-1}k_g g$ para todo $g \in G$, lo que equivale a que $k \in \mathrm{Core}(K)$ por el apartado 2.

4) Que $\mathrm{Core}(K) \subset K$ se sigue del apartado 1.

Veamos que $\mathrm{Core}(K)$ es normal en G: basta probar que para todo $g \in G$ se tiene que $g\,\mathrm{Core}(K)g^{-1} \subset \mathrm{Core}(K)$. Escojamos entonces un $g \in G$. Dado $x \in \mathrm{Core}(K)$, hay que probar que $gxg^{-1} \in \mathrm{Core}(K)$, es decir, por el apartado 3, que para cualquier $g' \in G$ existe $k \in K$ tal que $gxg^{-1} = g'kg'^{-1}$. Pero como $x \in \operatorname{Core}(K)$ sabemos que para todo $h \in G$ existe $k_h \in K$ tal que $x = hk_hh^{-1}$. Tomando $h = g^{-1}g'$ llegamos a que

$$gxg^{-1} = gg^{-1}g'k_hg'^{-1}gg^{-1} = g'k_hg'^{-1}.$$

Veamos ahora que $\operatorname{Core}(K)$ es el mayor subgrupo de K que es normal en G. Sea entonces $H \subset K$ un subgrupo normal de G. Dado $h \in H$, tenemos que probar que $h \in \operatorname{Core}(K)$, es decir, que para todo $g \in G$ existe $k \in K$ tal que $h = gkg^{-1}$, o, lo que es equivalente, que $g^{-1}hg \in K$. Pero como H es normal en G tenemos ya que $g^{-1}hg \in H \subset K$. □

Nota 1.6. Del apartado 4 se deduce inmediatamente que K es normal en G si y solamente si $\operatorname{Core}(K) = K$.

Como consecuencia, $\operatorname{Core}(K)$ es un subgrupo cerrado de K (por ser intersección de cerrados) y normal en K, luego $K/\operatorname{Core}(K)$ es un grupo de Lie.

Proposición 1.7. *La acción de $G/\operatorname{Core}(K)$ sobre el espacio homogéneo N dada por $[g]\cdot p = g\cdot p$ está bien definida y es efectiva, con isotropía $K/\operatorname{Core}(K)$.*

Demostración. La acción está bien definida, puesto que si cogemos gk como representante de la clase $[g] \in G/\operatorname{Core}(K)$ tenemos que para todo $p \in N$

$$\lambda(gk)(p) = \lambda(g)(\lambda(k)(p)) = \lambda(g)(p),$$

pues $k \in \operatorname{Core}(K)$, es decir, $\lambda(k) = \mathrm{id}$.

Veamos que la acción es efectiva. Sea $[g] \in G/\operatorname{Core}(K)$ tal que $[g]\cdot p = p$ para todo $p \in N$. Pero

$$\begin{aligned}
[g]\cdot p = p \quad \forall p \in N &\Leftrightarrow \lambda(g)(p) = p \quad \forall p \in N \\
&\Leftrightarrow \lambda(g) = \mathrm{id} \\
&\Leftrightarrow g \in \operatorname{Core}(K) \\
&\Leftrightarrow [g] = [e] \text{ en } G/\operatorname{Core}(K).
\end{aligned}$$

Para esta nueva acción se tiene que $\lambda_{G/\operatorname{Core}(K)}([g]) = \lambda_G(g)$ y que la isotropía de $o \in N$ es $K/\operatorname{Core}(K)$. □

Lema 1.8. *Sea $k \in \operatorname{Core}(K)$. Si G es conexo entonces k y gkg^{-1} están en la misma componente conexa de K para todo $g \in G$, lo que equivale a que $[k] = [gkg^{-1}] \in K/K_e$ para todo $g \in G$.*

Demostración. Sea $k \in \operatorname{Core}(K)$, esto es, $gkg^{-1} \in K$ para todo $g \in G$, por el apartado 3 de la Proposición 1.5. Definimos $\varphi\colon G \to K$ tal que $\varphi(g) = gkg^{-1}$. Como G es conexo entonces $\operatorname{im}\varphi \subset K$ es conexo, y como $\varphi(e) = k$, necesariamente $\operatorname{im}\varphi = kK_e$, que es la componente conexa de K que contiene a k. Así, $gkg^{-1} \in kK_e$ para todo $g \in G$, y $[gkg^{-1}] = [k] \in K/K_e$. □

Proposición 1.9. *Si G es conexo entonces* $\operatorname{Core}(K) \cap K_e = \operatorname{Core}(K_e)$.

Demostración. Sea $k \in \operatorname{Core}(K) \cap K_e$. Entonces, por un lado, sabemos que $k \in \operatorname{Core}(K)$, o lo que es lo mismo, $gkg^{-1} \in K$ para todo $g \in G$ (por el Lema 1.8 sabemos además que están en la misma componente conexa de K). Por otro lado, $k \in K_e$, es decir, $[k] = [gkg^{-1}] = [e] \in K/K_e$ para todo $g \in G$, y por tanto $gkg^{-1} \in K_e$ para todo $g \in G$.

El recíproco es inmediato, pues $\operatorname{Core}(K_e) \subset \operatorname{Core}(K)$ y $\operatorname{Core}(K_e) \subset K_e$. □

Corolario 1.10. *Se tiene que* $(\operatorname{Core}(K))_e \subset \operatorname{Core}(K_e) \subset \operatorname{Core}(K)$.

Demostración. Es evidente que $(\operatorname{Core}(K))_e \subset \operatorname{Core}(K) \cap K_e$ porque $\operatorname{Core}(K) \subset K$. Y que $\operatorname{Core}(K_e) \subset \operatorname{Core}(K)$ se sigue de que $K_e \subset K$. □

Nota 1.11. Los recíprocos en el Corolario 1.10 no se cumplen. Que K sea conexo no implica necesariamente que $\operatorname{Core}(K)$ sea conexo. Por ejemplo, considerando el subgrupo conexo $\mathrm{SO}(2)$ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, como el único subgrupo normal no trivial de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ es $\{\pm \mathrm{I}\}$, es inmediato que

$$(\mathrm{SO}(2)^\sharp)_e = \{I\} \subsetneq \mathrm{SO}(2)^\sharp = (\mathrm{SO}(2)_e)^\sharp = \{\pm \mathrm{I}\},$$

donde $\mathrm{H}^\sharp$ representa $\operatorname{Core}(\mathrm{H})$.

Proposición 1.12. *Si G es conexo entonces* $\operatorname{Core}(K)/\operatorname{Core}(K_e)$ *es un subgrupo de* K/K_e.

Demostración. Por la Proposición 1.9 sabemos que $\operatorname{Core}(K_e) = \operatorname{Core}(K) \cap K_e$. Así, aplicando el primer Teorema de Isomorfía tendremos que

$$\operatorname{Core}(K)/\operatorname{Core}(K_e) = \operatorname{Core}(K)/(\operatorname{Core}(K) \cap K_e) \cong \operatorname{Core}(K) \cdot K_e/K_e. \quad \square$$

Proposición 1.13. *Si G es conexo entonces* $\operatorname{Core}(K)/\operatorname{Core}(K_e) \subset Z(K/K_e)$*, el centro del grupo* K/K_e*. En particular, el grupo* $\operatorname{Core}(K)/\operatorname{Core}(K_e)$ *es abeliano.*

Demostración. Sea $[\alpha] \in \operatorname{Core}(K)/\operatorname{Core}(K_e)$ y sea $[k] \in K/K_e$. Entonces

$$[\alpha][k][\alpha^{-1}][k^{-1}] = [\alpha][k\alpha^{-1}k^{-1}].$$

Pero sabemos, por el Lema 1.8, que $k\alpha^{-1}k^{-1}$ está en la misma componente conexa de $\operatorname{Core}(K)$ que α^{-1} y, por tanto,

$$[\alpha][k][\alpha^{-1}][k^{-1}] = [\alpha][\alpha^{-1}] = [e] \in K/K_e. \quad \square$$

Proposición 1.14. *Se tiene que* $\pi_0(K/\operatorname{Core}(K))$ *es isomorfo a* $K/(K_e \cdot \operatorname{Core}(K))$.

Demostración. Sabemos que $\pi_0(K/\operatorname{Core}(K))$ es isomorfo a

$$(K/\operatorname{Core}(K))/(K/\operatorname{Core}(K))_e.$$

Por la Proposición 1.3 y por el primer Teorema de Isomorfía sabemos que

$$(K/\operatorname{Core}(K))_e \cong K_e/(\operatorname{Core}(K) \cap K_e) \cong (K_e \cdot \operatorname{Core}(K))/\operatorname{Core}(K).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\pi_0(K/\operatorname{Core}(K)) &\cong (K/\operatorname{Core}(K))/(K_e \cdot \operatorname{Core}(K)/\operatorname{Core}(K)) \\ &\cong K/(K_e \cdot \operatorname{Core}(K)).\end{aligned}$$

□

Terminamos con un resultado que será necesario para demostrar el teorema de estructura para las foliaciones transversalmente homogéneas:

Teorema 1.15 (Teorema 4.2 de [21]). *Sea G un grupo de Lie y $K \subset G$ un subgrupo cerrado. Entonces G/K tiene una única estructura analítica, compatible con la topología cociente, con la propiedad de que los $\lambda(g) \colon G/K \to G/K$ son difeomorfismos analíticos.*

Corolario 1.16. *Dado N un G-espacio homogéneo conexo, se tiene que si $\lambda(g) = \mathrm{id}$ en un abierto $\Omega \subset N$ entonces $\lambda(g) = \mathrm{id}$ en todo N.*

Demostración. En el Corolario 1.2.6, pág. 14, de [27] se prueba que una función analítica definida en un intervalo real que tenga un punto de acumulación en el conjunto de ceros se anula en todo el dominio. A partir de ahí es inmediato deducir que si dos funciones analíticas coinciden en un intervalo entonces coinciden en todo el dominio, siempre que éste sea conexo (basta considerar la resta entre ambas funciones para estar en la situación anterior). Es sencillo extender ese resultado a dos funciones analíticas definidas en un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$.

Dada entonces $\lambda(g) \colon N \to N$, difeomorfismo analítico en virtud del Teorema 1.15, consideramos un abierto distinguido $U \subset N$ tal que $U \cap \Omega \neq \emptyset$. Pasando a $\mathbb{R}^n$, con $n = \dim N$, obtendremos una función analítica que coincide con la identidad en un abierto, con lo que coincidirá en todo el dominio, y así $\lambda(g)$ coincide con la identidad en todo el abierto U. Considerando abiertos distinguidos adyacentes, teniendo en cuenta que en las intersecciones $\lambda(g) = \mathrm{id}$, podremos ir extendiendo la igualdad por todo N, si N es conexo. Si N no es conexo esa igualdad sólo estaría asegurada a lo largo de una componente conexa. □

Corolario 1.17. *Sea G un grupo de Lie y sea $K \subset G$ un subgrupo cerrado. Para cualquier abierto $U \subset G$ se cumple que $\bigcap_{g \in U} gKg^{-1} = \bigcap_{g \in G} gKg^{-1}$.*

Demostración. Sea $\pi \colon G \to G/K$. Tenemos que $x \in gKg^{-1}, \forall g \in U$, es equivalente a

$$\begin{aligned} & xg \in gK \quad \forall g \in U \\ \Leftrightarrow\ & [xg] = [g] \text{ en } G/K \quad \forall g \in U \\ \Leftrightarrow\ & \lambda(x) = \mathrm{id} \text{ en } \pi(U) \\ \Leftrightarrow\ & \lambda(x) = \mathrm{id} \\ \Leftrightarrow\ & x \in \mathrm{Core}(K) \end{aligned}$$

por el Corolario 1.16.

La otra inclusión es trivial. □

De manera análoga se demuestra también el siguiente corolario:

Corolario 1.18. *Sea $\Omega \subset N$ un abierto. Se cumple que $\bigcap_{p \in \Omega} G_p = \bigcap_{p \in N} G_p$.*

1.2.2. El álgebra de Lie de $\mathrm{Core}(K)$

Proposición 1.19. *El grupo* $(\mathrm{Core}(K))_e$ *es el mayor subgrupo conexo de* K *que es normal en* G.

Demostración. Por conexidad, como $\mathrm{Core}(K)$ es normal en G entonces su componente conexa del neutro, $(\mathrm{Core}(K))_e$, también lo es. Por lo tanto, solamente falta probar que no hay ningún subgrupo conexo de K normal en G que contenga estrictamente a $(\mathrm{Core}(K))_e$.

Sea entonces H un subgrupo conexo de K normal en G. Como $\mathrm{Core}(K)$ es el mayor subgrupo de K que es normal en G tenemos que $H \subset \mathrm{Core}(K)$. Y como H es conexo, entonces $H \subset (\mathrm{Core}(K))_e$, que es lo que queríamos probar. □

Proposición 1.20. *Sea* G *un grupo de Lie y sea* K *un subgrupo cerrado de* G*, con* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{k}$ *sus respectivas álgebras de Lie. Entonces el álgebra de Lie de* $\mathrm{Core}(K)$ *es el mayor ideal de* $\mathfrak{g}$ *contenido en* $\mathfrak{k}$.

Demostración. El álgebra de Lie de $\mathrm{Core}(K)$ será el álgebra de Lie correspondiente al grupo de Lie $(\mathrm{Core}(K))_e$, que es un subgrupo normal y conexo de G, lo que equivale (Teorema 3.48 de [50]) a que su álgebra de Lie sea un ideal de $\mathfrak{g}$, obviamente contenido en $\mathfrak{k}$, pues $(\mathrm{Core}(K))_e \subset K_e$.

Sea ahora $\mathfrak{h}$ otro ideal de $\mathfrak{g}$ contenido en $\mathfrak{k}$. Tendrá asociado un subgrupo H conexo y normal en G contenido en K. Pero por la Proposición 1.19 sabemos que $H \subset (\mathrm{Core}(K))_e$, y por lo tanto $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}$. □

Denotaremos por $\mathrm{Core}(\mathfrak{k})$ el álgebra de Lie de $\mathrm{Core}(K)$.

1.3. La variedad N como $\widehat{G}$-espacio homogéneo

Para poder levantar nuestras construcciones de N a su cubierta universal, $\widehat{N}$, resultará necesario conseguir que el grupo de Lie que actúe sobre el espacio homogéneo sea simplemente conexo. En esta sección nos ocuparemos de dotar al G-espacio homogéneo N, donde suponemos G conexo, de una estructura de $\widehat{G}$-espacio homogéneo, donde $\widehat{G}$ denota la cubierta universal del grupo de Lie G.

Proposición 1.21. *Dada* $p\colon \widehat{G} \to G$ *cubierta universal de* G *se tiene que* $\widehat{G}$ *actúa de forma transitiva sobre* $N = G/K$ *con isotropía* $p^{-1}(K)$.

Demostración. Dados $\hat{g} \in \widehat{G}$ y $p \in N$, la acción de $\widehat{G}$ sobre N vendrá dada por $\hat{g} \cdot p = p(\hat{g}) \cdot p$. Como p es un morfismo de grupos se cumplen las propiedades de acción, pues:

1. Para todo $p \in N$ se cumple que $\hat{e} \cdot p = p(\hat{e}) \cdot p = e \cdot p = p$.

2. $(\hat{g}\hat{g}') \cdot p = p(\hat{g}\hat{g}') \cdot p = (p(\hat{g}) \cdot p(\hat{g}')) \cdot p = \hat{g} \cdot (\hat{g}' \cdot p)$. para todo $\hat{g}, \hat{g}' \in \widehat{G}$, $p \in N$.

Ahora, dado $o \in N$, demostraremos que su isotropía por la acción de $\widehat{G}$ sobre N será $\widehat{G}_o = p^{-1}(K)$, con K la isotropía en o para la acción de G sobre N:

$$\hat{g} \in \widehat{G}_o \Leftrightarrow \hat{g} \cdot o = p(\hat{g}) \cdot o = o \Leftrightarrow p(\hat{g}) \in K \Leftrightarrow \hat{g} \in p^{-1}(K). \quad \square$$

Nota 1.22. Tendremos una cubierta $p_{|p^{-1}(K)} \colon p^{-1}(K) \to K$, que no será necesariamente la universal. De hecho, $p^{-1}(K)$ no tiene por qué ser conexo.

1.3.1. La efectividad de la acción de $\widehat{G}$

Demostraremos ahora que si consideramos la cubierta universal $\widehat{G}$ en lugar de G, el cociente para lograr la efectividad de la acción será el mismo en los dos casos, lo que nos permitirá considerar siempre G como un grupo de Lie simplemente conexo.

Lema 1.23. *El core group de la acción de $\widehat{G}$ sobre N es*

$$\operatorname{Core}(p^{-1}(K)) = p^{-1}(\operatorname{Core}(K)),$$

donde $\operatorname{Core}(K)$ *es el core group de la acción de G.*

Demostración. Según la definición de core group, tendremos:

$$\operatorname{Core}(p^{-1}(K)) = \bigcap_{\hat{g} \in \widehat{G}} \hat{g}\, p^{-1}(K)\, \hat{g}^{-1},$$

y

$$p^{-1}(\operatorname{Core}(K)) = p^{-1}\left(\bigcap_{g \in G} gKg^{-1}\right).$$

Sea entonces $x \in \operatorname{Core}(p^{-1}(K))$. Dado $g \in G$, tomando $\hat{g} \in p^{-1}(g)$ sabemos que existe $\hat{x}_{\hat{g}} \in p^{-1}(K)$ tal que $x = \hat{g}\hat{x}_{\hat{g}}\hat{g}^{-1}$. Así,

$$p(x) = p(\hat{g}\hat{x}_{\hat{g}}\hat{g}^{-1}) = p(\hat{g})p(\hat{x}_{\hat{g}})p(\hat{g}^{-1}) = gp(\hat{x}_{\hat{g}})g^{-1},$$

lo que, tomando $x_g = p(x_{\hat{g}})$, nos permite concluir que $x \in p^{-1}(\operatorname{Core}(K))$.

Recíprocamente, supongamos $x \in p^{-1}(\operatorname{Core}(K))$. Dado $\hat{g} \in \widehat{G}$ sea $g = p(\hat{g})$. Como $p(x) \in \operatorname{Core}(K)$ sabemos que $p(x) = gx_g g^{-1}$ con $x_g \in K$. Escojamos $\hat{x}_g \in \widehat{G}$ tal que $p(\hat{x}_g) = x_g$. Así,

$$p(\hat{g}\hat{x}_g\hat{g}^{-1}) = gx_g g^{-1} = p(x).$$

Por lo tanto, existe una transformación de la cubierta, $\gamma \in \operatorname{Aut}(p)$, tal que $x = \gamma\hat{g}\hat{x}_g\hat{g}^{-1}$. Pero como $\operatorname{Aut}(p) \cong \pi_1(G)$ es el núcleo de p, que es normal en $\widehat{G}$, tendremos que existe $\gamma' \in \pi_1(G)$ tal que $\gamma\hat{g} = \hat{g}\gamma'$, y así $x = \hat{g}\gamma'\hat{x}_g\hat{g}^{-1}$, donde $\gamma'\hat{x}_g \in p^{-1}(K)$, pues $p(\gamma'\hat{x}_g) = x_g \in K$. $\square$

Corolario 1.24. *Los grupos $\widehat{G}/\operatorname{Core}(p^{-1}(K))$ y $G/\operatorname{Core}(K)$ son isomorfos.*

Demostración. La aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \widehat{G}/p^{-1}(\operatorname{Core}(K)) & \longrightarrow & G/\operatorname{Core}(K) \\ & [\hat{g}] & \longmapsto & [p(\hat{g})] \end{array}$$

está bien definida: si consideramos un representante $\hat{g}\cdot\hat{k}$ de la clase $[\hat{g}] \in \widehat{G}/p^{-1}(K)$, con $\hat{k} \in p^{-1}(\operatorname{Core}(K))$, tendremos que

$$\varphi([\hat{g}\hat{k}]) = [p(\hat{g}\hat{k})] = [p(\hat{g})p(\hat{k})] = [p(\hat{g})] = \varphi([\hat{g}]).$$

Por otro lado, φ es un isomorfismo, pues, además de ser claramente sobre, es también inyectiva, ya que, dado $[\hat{g}] \in \ker\varphi$ se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi([\hat{g}]) = [e] \in G/\operatorname{Core}(K) &\Leftrightarrow [p(\hat{g})] = [e] \in G/\operatorname{Core}(K) \\ &\Leftrightarrow p(\hat{g}) \in \operatorname{Core}(K) \\ &\Leftrightarrow \hat{g} \in p^{-1}(\operatorname{Core}(K)) \\ &\Leftrightarrow [\hat{g}] = [e] \in \widehat{G}/p^{-1}(\operatorname{Core}(K)). \end{aligned}$$ □

1.3.2. La cubierta universal $\widehat{N}$

Esta proposición y su corolario, de sobra conocidos, serán de gran utilidad en nuestro trabajo:

Proposición 1.25. *Sea K un subgrupo cerrado de un grupo de Lie conexo G y sea K_e la componente conexa del neutro. Se tiene que la proyección natural $G/K_e \to G/K$ es una cubierta cuyo grupo de automorfismos es K/K_e.*

Corolario 1.26. *Si G es conexo y simplemente conexo, la cubierta universal de $N = G/K$ es $\widehat{N} = G/K_e$. Además, $\pi_1(N) \cong K/K_e$.*

1.3.3. Las acciones sobre $\widehat{N}$

Sea $N = G/K$ un G-espacio homogéneo con G conexo y simplemente conexo. Por la Proposición 1.7 sabemos que el grupo $G/\operatorname{Core}(K)$ actuará de forma efectiva sobre N. Así tendremos que

$$N = G/K = (G/\operatorname{Core}(K))/(K/\operatorname{Core}(K)).$$

Por el Corolario 1.26 sabemos que la cubierta universal de N es $\widehat{N} = G/K_e$. Sin embargo, para tener una acción efectiva deberemos considerar el grupo $G/\operatorname{Core}(K_e)$, de forma que

$$\widehat{N} = G/K_e = (G/\operatorname{Core}(K_e))/(K_e/\operatorname{Core}(K_e)).$$

Podemos definir una acción de G en $\widehat{N}$ haciendo $g\cdot[x] = [gx]$, donde $g \in G$ y $[x] \in G/K_e$. Las traslaciones en $\widehat{N}$ por elementos de G, $\hat{\lambda}(g)\colon \widehat{N} \to \widehat{N}$, con $\hat{\lambda}(g)([x]) = [gx]$, harán conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \widehat{N} \arrow[r, "\hat{\lambda}(g)"] \arrow[d, "\pi"'] & \widehat{N} \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "\lambda(g)"'] & N \end{tikzcd}$$

de forma que $\pi \circ \hat{\lambda}(g) = \lambda(g) \circ \pi$. Si consideramos la acción de $G/\operatorname{Core}(K)$ en N tendremos que $\lambda([g]) = \lambda(g)$, con $[g] \in G/\operatorname{Core}(K)$. De la misma manera, haciendo actuar los elementos de $G/\operatorname{Core}(K_e)$ en $\widehat{N}$, tendremos $\hat{\lambda}([g]) = \hat{\lambda}(g)$, con $[g] \in G/\operatorname{Core}(K_e)$.

Nota 1.27. Para distinguir entre las clases de los diferentes grupos, y así clarificar los cálculos, utilizaremos la notación $[\ ]^\sharp$ para los elementos de $G/\operatorname{Core}(K)$ y $[\ ]_\sharp$ para los elementos de $G/\operatorname{Core}(K_e)$.

1.4. Aplicación Posterior

Partiremos de un espacio homogéneo $N = G_0/K_0$, donde supondremos G_0 conexo, pero no simplemente conexo, y actuando de forma no efectiva en N. Como queremos que el grupo de Lie que actúe en N sea simplemente conexo, para así poder levantar a $\widehat{N}$, consideraremos la cubierta $p\colon \widehat{G_0} \to G_0$ y el subgrupo $p^{-1}(K_0)$, de forma que

$$N = G_0/K_0 = \widehat{G_0}/p^{-1}(K_0).$$

La acción de $\widehat{G_0}$ en N tampoco es efectiva, pero el Corolario 1.24 asegura que el paso a una acción efectiva es el mismo en ambos casos, pues

$$\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(p^{-1}(K_0)) \cong G_0/\operatorname{Core}(K_0),$$

con lo que se tiene también que

$$p^{-1}(K_0)/\operatorname{Core}(p^{-1}(K_0)) \cong K_0/\operatorname{Core}(K_0).$$

Capítulo 2
Grupos de Lie unimodulares

La función modular juega un papel fundamental en nuestro trabajo. En este Capítulo damos algunos resultados básicos que necesitaremos más adelante.

2.1. Función modular

Todo grupo de Lie G admite una medida μ invariante por la izquierda, de forma que para todo subconjunto de Borel $E \subset G$ y para todo $g \in G$ se tiene que $\mu(gE) = \mu(E)$. Llamaremos a esta medida, única salvo constante multiplicativa positiva, *medida de Haar*.

Definición 2.1. Llamaremos *función modular* de G al morfismo de grupos

$$m_G \colon G \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

dado por $\mu(Eg) = m_G(g)\mu(E)$.

Definición 2.2. El grupo de Lie G es *unimodular* si $m_G(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Es evidente que, de forma equivalente, podemos definir un grupo unimodular como aquel en el que la medida de Haar es biinvariante.

Proposición 2.3 (Proposición 5.1.3 de [13])**.** *Todo grupo de Lie discreto es unimodular.*

Consideremos ahora que $\dim G \geq 1$. Sea $\mathrm{Ad}_G \colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ la representación adjunta del grupo de Lie G en su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, es decir $\mathrm{Ad}_G(g) = I(g)_{*e} \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, donde $I(g) \colon G \to G$ es el automorfismo interior $I(g)(h) = ghg^{-1}$.

Proposición 2.4. *Si* $\dim G \geq 1$, *entonces*

$$m_G(g) = |\det \mathrm{Ad}_G(g)|.$$

Como hipótesis para futuros resultados, necesitaremos introducir, restringiendo la Definición 2.2, la siguiente definición:

Definición 2.5. Diremos que un grupo de Lie G es *fuertemente unimodular* si se cumple que $\det \mathrm{Ad}_G(g) = 1$ para todo $g \in G$.

2.2. La función modular en cubiertas

Proposición 2.6. *Si G es un grupo de Lie y K un subgrupo normal de G, entonces, para cualquier $x \in G$:*

$$\det \mathrm{Ad}_G(x) = \det \mathrm{Ad}_G(x)|_{\mathfrak{k}} \cdot \det \mathrm{Ad}_{G/K}([x]),$$

donde $\mathfrak{k}$ denota el álgebra de Lie de K.

Demostración. Para cada $x \in G$, como G/K es un grupo de Lie, definiremos su aplicación adjunta partiendo de $J([x])\colon G/K \to G/K$ dada por $J([x])([g]) = [xgx^{-1}]$, para construir $\mathrm{Ad}_{G/K}([x]) = J([x])_*\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$.

Así, derivando el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "I(x)"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/K \arrow[r, "J([x])"] & G/K \end{tikzcd}$$

obtendremos este otro:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{Ad}_G(x)"] \arrow[d, "\pi_*"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\pi_*"] \\ \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \arrow[r, "\mathrm{Ad}_{G/K}([x])"'] & \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \end{tikzcd}$$

que nos permite obtener la relación

$$\pi_* \circ \mathrm{Ad}_G(x) = \mathrm{Ad}_{G/K}([x]) \circ \pi_*. \tag{2.2.1}$$

Considerando $\ker(\pi_*) = \mathfrak{k}$ (álgebra de Lie asociada a K), podemos tomar una descomposición del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, donde π_* es un isomorfismo lineal entre $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$.

Como K es normal en G entonces $I(x)(k) \in K$ para todo $x \in G$ y, por lo tanto, al derivar tenemos que $\mathrm{Ad}_G(x)_{|\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{k}$. Así, tomando $u_1, \ldots, u_k$ una base de $\mathfrak{k}$, con $k = \dim \mathfrak{k}$, llamaremos U a la matriz asociada a $\mathrm{Ad}_G(x)_{|\mathfrak{k}}$. Considerando $v_1, \ldots, v_{n-k}$, con $n = \dim G$, una base de $\mathfrak{m}$ y llamando V a la matriz asociada a $\mathrm{Ad}_{G/K}([x])$ para la base $\pi_* v_1, \ldots, \pi_* v_{n-k}$ tendremos que la matriz asociada a $\mathrm{Ad}_G(x)$ se descompone de la forma

$$\begin{bmatrix} U & * \\ 0 & V \end{bmatrix},$$

con lo que

$$\det \mathrm{Ad}_G(x) = \det U \cdot \det V = \det \mathrm{Ad}_G(x)|_{\mathfrak{k}} \cdot \det \mathrm{Ad}_{G/K}([x]). \quad \square$$

Corolario 2.7. *Sea G un grupo de Lie y sea K un subgrupo discreto y normal. Entonces*

$$\det \mathrm{Ad}_G(x) = \det \mathrm{Ad}_{G/K}([x])$$

para todo $x \in G$. En particular, dada $p\colon G \to G'$ una cubierta de grupos de Lie, se tiene que $\det \mathrm{Ad}_G(x) = \det \mathrm{Ad}_{G'}(p(x))$, para todo $x \in G$.

Demostración. Inmediato teniendo en cuenta la Proposición 2.6 y que, al ser K discreto, su álgebra de Lie es trivial. □

Corolario 2.8. *Sea K un subgrupo cerrado de G y sea $C = \mathrm{Core}(K)$. El grupo de Lie K/C es fuertemente unimodular si y solamente si*

$$\det \mathrm{Ad}_K(y) = \det \mathrm{Ad}_K(y)_{|\mathrm{Core}(\mathfrak{k})}$$

para todo $y \in K$.

Demostración. Por la Proposición 2.6 sabemos que

$$\det \mathrm{Ad}_K(y) = \det \mathrm{Ad}_K(y)_{|\mathrm{Core}(\mathfrak{k})} \cdot \det \mathrm{Ad}_{K/C}([y]).$$

Que K/C sea fuertemente unimodular equivale a que

$$\det \mathrm{Ad}_{K/C}([y]) = 1$$

para todo $[y] \in K/C$, con lo que el resultado es inmediato. □

2.3. Álgebras de Lie unimodulares

Sea $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ la representación adjunta $\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_{*e}$ del álgebra de Lie, definida como $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$.

Definición 2.9. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es unimodular si $\mathrm{traza}\ \mathrm{ad}(X) = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Proposición 2.10. *Sean c_{ij}^k las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ respecto de una base $(e_1, \ldots, e_n)$. Entonces $\mathfrak{g}$ es unimodular si y solamente si $\sum_{j=1}^n c_{ij}^j = 0$ para todo $i = 1, ..., n$.*

Demostración. Se tiene que

$$\mathrm{traza}\ \mathrm{Ad}(e_i) = \sum_{j=1}^n \langle [e_i, e_j], e_j \rangle = \sum_{j=1}^n \langle \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k, e_j \rangle = \sum_{j=1}^n c_{ij}^j,$$

donde $\langle \, , \rangle$ es un producto interior en $\mathfrak{g}$ para el que la base (e_i) es ortonormal. □

Teorema 2.11. *Sea G un grupo de Lie y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Se tiene que $\mathfrak{g}$ es unimodular si y sólo si la componente conexa del neutro G_e es unimodular.*

Demostración. Se tiene $\det \mathrm{Ad}(\exp X) = e^{\mathrm{traza}\,\mathrm{ad}(X)}$ [40, II.9.7]. A partir de esta igualdad se deduce de manera inmediata que existe un entorno U del neutro $e \in G$ para el que se cumple que $\mathrm{traza}\,\mathrm{ad}(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ si y solo si $\det \mathrm{Ad}(g) = 1$ para todo $g \in U$. La generalización a todo G se tiene de considerar que todo elemento de G se puede escribir como producto de elementos de U. □

Ejemplo 2.12. La conexidad de G_e juega un papel fundamental en el Teorema 2.11. Existen grupos de Lie no unimodulares para los que la componente conexa del neutro sí es unimodular. Veamos un ejemplo:

Consideremos el grupo afín bidimensional

$$\mathrm{GA}^+ = \left\{ \begin{bmatrix} e^x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si tomamos el subgrupo no conexo

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} e^m & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ m \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R} \right\},$$

tenemos que K_e es el subgrupo formado por las matrices de la forma $\begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, con $y \in \mathbb{R}$. Tendrá como álgebra de Lie asociada el álgebra de Lie abeliana de dimensión 1, que obviamente es unimodular. Sin embargo, K no es unimodular, pues dado un elemento $k = \begin{bmatrix} e^m & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K$ se tiene que $\det \mathrm{Ad}_K(k) = e^m$.

2.4. Formas de volumen invariantes

2.4.1. Grupos de Lie

Proposición 2.13. *Un grupo de Lie conexo es unimodular si y solamente si admite una forma de volumen bi-invariante.*

Demostración. Sea $n = \dim G$. Denotaremos por L_g y R_g las traslaciones por la izquierda y por la derecha, respectivamente, de forma que $L_g(x) = gx$ y $R_g(x) = xg$ para todo $x \in G$. Sabemos que en G existe ω forma de volumen en G invariante por la izquierda , es decir, una n-forma no nula en ningún punto tal que $L_g^*\omega = \omega$, para todo $g \in G$.

Como L_g y R_g conmutan, se tiene que $R_g^*\omega$ es invariante por la izquierda, pues

$$L_g^* R_g^* \omega = (R_g \circ L_g)^* \omega = (L_g \circ R_g)^* \omega = R_g^* L_g^* \omega = R_g^* \omega.$$

Así, como ω y $R_g^*\omega$ son invariantes por la izquierda, solamente se diferenciarán en una constante, con lo que

$$R_g^* \omega = c \cdot \omega, \quad c \neq 0,$$

de lo que podemos deducir que

$$L_{g^{-1}}^* R_g^* \omega = L_{g^{-1}}^* c\omega = c L_{g^{-1}}^* \omega = c\omega.$$

Dados entonces $v_1, \dots, v_n \in T_x G$, como $I_{g^{-1}} = R_g \circ L_{g^{-1}}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} ((L_{g^{-1}}^* R_g^*)\omega)_e(v_1, \dots, v_n) &= ((R_g \circ L_{g^{-1}})^* \omega)_e(v_1, \dots, v_n) \\ &= \omega_e((R_g \circ L_{g^{-1}})_{*e}(v_1), \dots, (R_g \circ L_{g^{-1}})_{*e}(v_n)) \\ &= \omega_e(\mathrm{Ad}(g^{-1})(v_1), \dots, \mathrm{Ad}(g^{-1})(v_n)) \\ &= \det \mathrm{Ad}(g^{-1}) \omega_e(v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

y así $c = \det \mathrm{Ad}(g^{-1})$.

Nótese que $\det(\mathrm{Ad}_G(g)) > 0$ para todo $g \in G$ por ser G conexo. Por tanto, es claro que ω será también invariante por la derecha si y solamente si $\det(\mathrm{Ad}_G(g)) = 1$ para todo $g \in G$, es decir, si G es unimodular. □

2.4.2. Espacios homogéneos

Sea G un grupo de Lie conexo de dimensión $n = \dim G$ y sea H un subgrupo cerrado.

Dado un elemento $g \in G$, la traslación por la derecha $R_g \colon G \to G$ induce en el cociente una aplicación

$$\rho(g) \colon H\backslash G \to H\backslash G.$$

Se tiene que $\rho(g) \circ \pi = \pi \circ R_g$, donde $\pi \colon G \to H\backslash G$ es la proyección natural.

Helgason demuestra en [21] los dos siguientes resultados, de gran utilidad en nuestro trabajo:

Proposición 2.14.

$$\det(\rho(h)_{*[e]}) = \frac{\det \mathrm{Ad}_H(h)}{\det \mathrm{Ad}_G(h)}, \quad \forall h \in H.$$

Teorema 2.15 (Pág. 368 de [21]). *En un espacio homogéneo $W = H\backslash G$ existe una forma de volumen invariante por la acción $[g'] \cdot g = [g'g]$ de G si y solo si $\det \mathrm{Ad}_G(h) = \det \mathrm{Ad}_H(h)$, para todo $h \in H$.*

Capítulo 3
Cohomología de $\mathfrak{g}$-módulos

Dedicaremos este capítulo y el siguiente al estudio de la cohomología. Detallaremos explícitamente la cohomología de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con coeficientes, en primer lugar, en un $\mathfrak{g}$-módulo y después, en el Capítulo 4, en un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo. Esto nos permitirá estudiar en el Capítulo 15 la cohomologia en grado máximo del complejo $\Omega_G(G/K)$ de formas diferenciales en G/K invariantes por la acción de G.

Seguiremos la estructura y traduciremos a nuestro caso particular los resultados sobre cohomología con coeficientes que expone Knapp en los Capítulos VI y VII de [24], valiéndonos de la representación que Hazewinkel define en [19].

Demostraremos entonces, en este capítulo, la dualidad en complejos de cadenas y cocadenas. Después estudiaremos la dualidad de Poincaré para la cohomología del álgebra de Lie y extenderemos estos resultados para demostrar la dualidad para homología y cohomología con coeficientes en un módulo.

3.1. Homología y cohomología de complejos

Un *complejo de cadenas* $(C_\bullet, \partial)$ es una sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{r+1}} C_r \xrightarrow{\partial_r} C_{r-1} \xrightarrow{\partial_{r-1}} \cdots$$

de espacios vectoriales y morfismos $\partial_r \colon C_r \to C_{r-1}$ tales que $\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$. Así, tendremos que $\operatorname{im} \partial_{r+1} \subset \ker \partial_r$ para todo $r \in \mathbb{Z}$.

Definición 3.1. Dado un complejo de cadenas $(C_\bullet, \partial)$ denotamos por $\mathrm{H}_\bullet(C)$ su homología, que vendrá dada por

$$\mathrm{H}_r(C) = \frac{\ker \partial_r}{\operatorname{im} \partial_{r+1}}.$$

Análogamente, un *complejo de cocadenas* $(C^\bullet, \delta)$ es una sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{r-1}} C^r \xrightarrow{\delta^r} C^{r+1} \xrightarrow{\delta^{r+1}} \cdots$$

de espacios vectoriales y morfismos $\delta^r \colon C^r \to C^{r+1}$ tales que $\delta^r \circ \delta^{r-1} = 0$. Así, tendremos que $\operatorname{im} \delta^{r-1} \subset \ker \delta^r$ para todo $r \in \mathbb{Z}$.

Definición 3.2. Dado un complejo de cocadenas $(C^\bullet, \delta)$ denotamos por $\mathrm{H}^\bullet(C)$ su cohomología, que vendrá dada por

$$\mathrm{H}^r(C) = \frac{\ker \delta^r}{\operatorname{im} \delta^{r-1}}.$$

Dado un complejo de cadenas (C, ∂) denotaremos por C^* el complejo de cocadenas que se obtiene dualizando los espacios vectoriales y los morfismos,

$$C_r^* \xrightarrow{\partial_{r+1}^*} C_{r+1}^*$$

Denotaremos $\mathrm{H}^\bullet(C^*)$ la cohomología de este complejo.

Lema 3.3. *Sean U, V, W espacios vectoriales y sean f y g aplicaciones lineales $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ tales que $g \circ f = 0$. Entonces*

$$f^* \circ g^* = 0$$

y

$$\frac{\ker f^*}{\operatorname{im} g^*} \cong \left(\frac{\ker g}{\operatorname{im} f}\right)^*.$$

Demostración. Sea $x \in \ker f^* \subset V^*$, es decir, una aplicación $x\colon V \to \mathbb{R}$ tal que $x \circ f = f^*(x) = 0$, es decir $x_{|\operatorname{im} f} = 0$. Entonces, la restricción $x_{|\ker g}\colon \ker g \to \mathbb{R}$ pasa al cociente y tenemos $\bar{x}\colon \ker g / \operatorname{im} f \to \mathbb{R}$ dada por $\bar{x}([v]) = x(v)$ para todo $v \in \ker g$. Podemos definir por tanto un morfismo

$$\theta\colon \ker f^* \to \left(\frac{\ker g}{\operatorname{im} f}\right)^*$$

dado por $\theta(x) = \bar{x}$ para todo $x \in \ker f^*$.

Comprobemos que $\ker\theta = \operatorname{im} g^*$:

Si $x \in \ker\theta$, entonces $\theta(x)(v) = \bar{x}([v]) = x(v) = 0$ para todo $v \in \ker g$; es decir, $x_{|\ker g} = 0$. Entonces, como $V = \ker g \oplus V'$, con $V' \cong \operatorname{im} g$, y $W = \operatorname{im} g \oplus W' \cong V' \oplus W'$, la aplicación x se puede extender a todo W por la aplicación cero de W', con lo que hemos construido una aplicación $x^+\colon W \to \mathbb{R}$ tal que $x = x^+ \circ g = g^*(x^+)$. Por tanto $x \in \operatorname{im} g^*$.

Recíprocamente, es inmediato que si $x = g^*(x^+) = x^+ \circ g$, con $x^+\colon W \to \mathbb{R}$, entonces $x_{|\ker g} = 0$ y por tanto $\theta(x) = 0$.

Así, $\ker\theta = \operatorname{im} g^*$ y podemos pasar al cociente, obteniendo un morfismo inyectivo

$$\theta\colon \frac{\ker f*}{\operatorname{im} g^*} \to \left(\frac{\ker g}{\operatorname{im} f}\right)^*.$$

Además θ también será sobreyectivo, pues dada $\bar{x}\colon \ker g/\operatorname{im} f \to \mathbb{R}$ tendremos $x\colon \ker g \to \mathbb{R}$ que se anula en $\operatorname{im} f$ y que por tanto se puede extender a $x\colon V \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(x) = \bar{x}$. □

Corolario 3.4. *Dado un complejo de cadenas (C, ∂) se tiene que la cohomología del dual es el dual de la homología,*

$$\mathrm{H}^\bullet(C^*) \cong \mathrm{H}_\bullet(C)^*.$$

Demostración. Es inmediato a partir del Lema 3.3 pues

$$\mathrm{H}^r(C^*) = \frac{\ker \partial_{r+1}^*}{\operatorname{im} \partial_r^*} \cong \left(\frac{\ker \partial_r}{\operatorname{im} \partial_{r+1}}\right)^* = \mathrm{H}_r(C)^*. \quad \square$$

Lema 3.5. *Sean* (C, d) *y* (C', d') *dos complejos de cocadenas y sean* $\lambda^r : C^r \to (C')^r$ *isomorfismos de espacios vectoriales tales que existe* $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, *con*

$$\mathrm{d}' \circ \lambda^r = t \cdot \lambda^{r+1} \circ \mathrm{d} \quad \forall r \in \mathbb{Z}.$$

Se tiene entonces que los λ^r *inducen un isomorfismo en cohomología.*

Demostración. Definimos el isomorfismo $\phi \colon \mathrm{H}^r(C) \to \mathrm{H}^r(C')$ haciendo $\phi([\alpha]) = [\lambda^r(\alpha)]$. Veamos en primer lugar que está bien definido: si escogemos α' otro representante de la clase de cohomología $[\alpha]$, existe $\beta \in C^{r-1}$ tal que $\alpha' = \alpha + \mathrm{d}\beta$, y por tanto

$$\phi([\alpha']) = \phi([\alpha + \mathrm{d}\beta]) = [\lambda^r(\alpha)] + [\lambda^r(\mathrm{d}\beta)] = [\lambda^r(\alpha)],$$

ya que

$$[\lambda^r(\mathrm{d}\beta)] = [\frac{1}{t}\mathrm{d}'\lambda^{r-1}(\beta)] = [\mathrm{d}'(\frac{1}{t}\lambda^{r-1}(\beta))] = 0.$$

Nótese también que $\lambda^r(\alpha) \in \ker \mathrm{d}'$, pues $\mathrm{d}'\lambda^r(\alpha) = t \cdot \lambda^{r+1}(\mathrm{d}\alpha) = 0$, pues $\alpha \in \ker \mathrm{d}$.

Veamos que ϕ es inyectiva:

Supongamos que $\phi([\alpha]) = 0$. Entonces $[\lambda^r(\alpha)] = 0$ y por tanto existe $\gamma' \in C'^{r-1}$ tal que $\lambda^r(\alpha) = \mathrm{d}'(\gamma')$. Sea $\gamma \in C^{r-1}$ tal que $\lambda^{r-1}(\gamma) = \gamma'$. Entonces $\mathrm{d}\gamma$ cumple que

$$\lambda^r(\mathrm{d}\gamma) = \frac{1}{t}\mathrm{d}'\lambda^{r-1}(\gamma) = \frac{1}{t}\mathrm{d}'(\gamma'),$$

y por lo tanto

$$\lambda^r(\alpha) = t\lambda^r(\mathrm{d}\gamma) = \lambda^r(\mathrm{d}t\gamma),$$

con lo que, por ser λ^r isomorfismo, $\alpha = \mathrm{d}t\gamma$ y $[\alpha] = 0$.

Que ϕ es sobreyectiva es trivial por serlo λ^r. □

3.2. Cohomología del álgebra de Lie

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión n. El álgebra exterior $\Lambda\mathfrak{g}^*$, está formada por las aplicaciones r-lineales alternadas

$$\alpha \colon \mathfrak{g} \times \overset{r)}{\cdots} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R},$$

con $0 \leq r \leq n$, es decir, elementos de $L(\Lambda^r\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = (\Lambda^r\mathfrak{g})^*$.

Sea $e_1, ..., e_n$ una base de $\mathfrak{g}$ y sea $\theta^1, \ldots, \theta^n$ la base dual. Una base de $\Lambda^r\mathfrak{g}^*$ estará formada por las formas $\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_r}$, con $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n$.

Se define la diferencial de Koszul $\delta \colon \Lambda^r\mathfrak{g}^* \to \Lambda^{r+1}\mathfrak{g}^*$ como

$$\delta\alpha(v_0, ..., v_r) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\alpha([v_i, v_j], v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_r).$$

Dado que $\delta^2 = 0$, se tiene un complejo $(\Lambda^\bullet\mathfrak{g}^*, \delta)$ cuya cohomología se denota $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g})$; es la cohomología del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con coeficientes en $\mathbb{R}$.

Proposición 3.6. *Para todo* $l = 1, \ldots, n$, *con* $n \geq 2$, *se tiene que*

$$\delta(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\theta}^l \wedge \cdots \wedge \theta^n) = (-1)^{l-1} \operatorname{traza} \operatorname{ad}(e_l) \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n. \tag{3.2.1}$$

Demostración. En primer lugar, nótese que

$$(\theta^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\theta}^l \wedge \cdots \wedge \theta^n)(e_1, \ldots, \hat{e}_k, \ldots, e_n) = \delta^l_k,$$

es decir, se anulará salvo si $k = l$, donde valdrá 1. Así, haciendo $\tilde{\theta}_l = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\theta}^l \wedge \cdots \wedge \theta^n$ para simplificar notaciones, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\tilde{\theta}_l)(e_1, \ldots, e_n) &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (\tilde{\theta}_l)([e_i, e_j], e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, \hat{e}_j, \ldots, e_n) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (\tilde{\theta}_l)(c^i_{ij} e_i + c^j_{ij} e_j, e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, \hat{e}_j, \ldots, e_n) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (c^i_{ij} (\tilde{\theta}_l)(e_i, e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, \hat{e}_j, \ldots, e_n) \\
&\quad + c^j_{ij} (\tilde{\theta}_l)(e_j, e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, \hat{e}_j, \ldots, e_n)) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (c^i_{ij} (-1)^{i-1} (\tilde{\theta}_l)(e_1, \ldots, e_i, \ldots, \hat{e}_j, \ldots, e_n) \\
&\quad + c^j_{ij} (-1)^{j-2} (\tilde{\theta}_l)(e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_j, \ldots, e_n)) \\
&= \sum_{i<l} (-1)^{i+l} c^i_{il} (-1)^{i-1} + \sum_{l<j} (-1)^{l+j} c^j_{lj} (-1)^{j-2} \\
&= \sum_{i<l} (-1)^{l-1} c^i_{il} + \sum_{l<j} (-1)^{l-2} c^j_{lj} \\
&= \sum_{i<l} (-1)^{l-1} c^i_{il} + \sum_{l<j} (-1)^{l-1} c^j_{jl} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{l-1} c^i_{il}
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.7. *Un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es unimodular si y solo si* $\mathrm{H}^n(\mathfrak{g}) \neq 0$, *con* $n = \dim \mathfrak{g}$. *En ese caso* $\mathrm{H}^n(\mathfrak{g}) =< \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta^n >\cong \mathbb{R}$.

Demostración. Si $\mathfrak{g}$ es unimodular, se tiene que $\operatorname{traza} \operatorname{ad}(e_i) = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ y por tanto la diferencial $\delta \colon \Lambda^{n-1}\mathfrak{g}^* \to \Lambda^n \mathfrak{g}^*$ es cero, con lo que

$$\mathrm{H}^n(\mathfrak{g}) = \Lambda^n \mathfrak{g}^* = \langle \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta^n \rangle \cong \mathbb{R}.$$

Recíprocamente, si $\mathrm{H}^n(\mathfrak{g}) \neq 0$ se tiene que $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$ no puede ser la diferencial de una $(n-1)$-forma, lo que, teniendo en cuenta de nuevo la fórmula (3.2.1) implica que $\operatorname{traza} \operatorname{ad}(e_i)$ se anula para todo $i = 1, \ldots, n$, o equivalentemente, que $\mathfrak{g}$ es unimodular. □

Sea G un grupo de Lie. Una forma invariante $\omega \in \Omega_G(G)$ queda determinada por su valor en el neutro, $\omega_e \in \Lambda\mathfrak{g}^*$, pues

$$\omega_g(v_1, \ldots, v_r) = w_e(L_{g*e}^{-1}(v_1), \ldots, L_{g*e}^{-1}(v_r)).$$

Proposición 3.8. *La cohomología del complejo $\Omega_G(G)$ de formas invariantes es la del álgebra de Lie,* $\mathrm{H}_G(G) \cong \mathrm{H}(\mathfrak{g})$.

Demostración. Basta considerar el isomorfismo $\varphi\colon \Omega_G(G) \to \Lambda\mathfrak{g}^*$ dado por $\varphi(\omega) = \omega_e$. □

Daremos ahora una demostración directa de la dualidad de Poincaré para la cohomología del álgebra de Lie:

Teorema 3.9. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie unimodular de dimensión n. Se tiene que*

$$\mathrm{H}^r(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{H}^{n-r}(\mathfrak{g}).$$

Demostración. En el Corolario 3.7 vimos que si $\mathfrak{g}$ es unimodular entonces $\mathrm{H}^n(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{R}$, con $n = \dim \mathfrak{g}$.

Dado $\Lambda^r\mathfrak{g}^*$ consideramos su dual $(\Lambda^r\mathfrak{g}^*)^*$, formado por las aplicaciones lineales de $\Lambda^r\mathfrak{g}^*$ en $\mathbb{R}$. Sobre $\Lambda^\bullet\mathfrak{g}^*$ tendremos la diferencial $\delta\colon \Lambda^{r-1}\mathfrak{g}^* \to \Lambda^r\mathfrak{g}^*$; su dual $\delta^*\colon (\Lambda^r\mathfrak{g}^*)^* \to (\Lambda^{r-1}\mathfrak{g}^*)^*$ vendrá dado por $\delta^*(\alpha) = \alpha \circ \delta$. Así, si hacemos $C^r = (\Lambda^{n-r}\mathfrak{g}^*)^*$ tendremos el complejo $(C^\bullet, \delta^*)$. Necesitaremos ahora la sucesión

$$\sigma(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ es par} \\ 1 & \text{si } r \text{ es impar} \end{cases}$$

que cumple que

$$\sigma(n+1) - \sigma(n) = (n+1) \mod 2. \tag{3.2.2}$$

Sea entonces el morfismo $\widehat{\ }\colon \Lambda^r\mathfrak{g}^* \to (\Lambda^{n-r}\mathfrak{g}^*)^*$ definido por

$$\widehat{\alpha}(\beta) = (-1)^{\sigma(r)}\alpha \wedge \beta \in \Lambda^n\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}.$$

Veamos que $\widehat{\ }$ es de complejos:

Partimos del diagrama

$$\begin{tikzcd} \Lambda^r\mathfrak{g}^* \arrow[r, "\widehat{\ }"] \arrow[d, "\delta"'] & (\Lambda^{n-r}\mathfrak{g}^*)^* \arrow[d, "\delta^*"] \\ \Lambda^{r+1}\mathfrak{g}^* \arrow[r, "\widehat{\ }"] & (\Lambda^{n-r-1}\mathfrak{g}^*)^*. \end{tikzcd}$$

Dada $\alpha \in \Lambda^r\mathfrak{g}^*$, se tiene que $(\delta^* \circ \widehat{\ })(\alpha) = \delta^*(\widehat{\alpha})$, que será una aplicación que evaluada en $\beta \in \Lambda^{n-r-1}\mathfrak{g}^*$ devolverá

$$\delta^*(\widehat{\alpha})(\beta) = (\widehat{\alpha} \circ \delta)(\beta) = \widehat{\alpha}(\delta\beta) = (-1)^{\sigma(r)}\alpha \wedge \delta\beta \in \Lambda^n\mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}.$$

Por el otro lado, tenemos que

$$(\widehat{\ } \circ \delta)(\alpha)(\beta) = \widehat{\delta\alpha}(\beta) = (-1)^{\sigma(r+1)}\delta\alpha \wedge \beta \in \mathbb{R}.$$

Así, para ver que es de complejos hay que probar que para cualquier forma $\beta \in \Lambda^{n-r-1}\mathfrak{g}^*$ se tiene que

$$(-1)^{\sigma(r)}\alpha \wedge \delta\beta = (-1)^{\sigma(r+1)}\delta\alpha \wedge \beta,$$

o, lo que por la ecuación 3.2.2 es equivalente:

$$(-1)^{r-1}\alpha \wedge \delta\beta = \delta\alpha \wedge \beta. \tag{3.2.3}$$

Pero que $\mathfrak{g}$ sea unimodular significa que $\delta^{n-1}\colon \Lambda^{n-1}\mathfrak{g}^* \to \Lambda^n\mathfrak{g}^*$ se anula, y por tanto, como $\alpha\wedge\beta$ será una $(n-1)$-forma, tendremos

$$0 = \delta(\alpha \wedge \beta) = \delta\alpha \wedge \beta + (-1)^r\alpha \wedge \delta\beta,$$

lo que claramente implica que se cumple 3.2.3.

Probemos ahora que $\widehat{\ }$ es inyectiva en cada grado. Sea el morfismo $\star\colon \Lambda^r\mathfrak{g}^* \to \Lambda^{n-r}\mathfrak{g}^*$ dado por

$$\star(\theta^{i1} \wedge \cdots \wedge \theta^{ir}) = \mathrm{signo}(i_1, \dots, i_r)\theta^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\theta^{i1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\theta^{ir}} \wedge \cdots \wedge \theta^n,$$

donde los $\theta^1, \dots, \theta^n$ forman una base de $\mathfrak{g}^*$. Se cumple que, dada

$$\alpha = \sum c_I\alpha^I \in \Lambda^r\mathfrak{g}^*,$$

se tiene que $\alpha \wedge \star\alpha = \sum c_I^2$.

Sea entonces $\alpha \in \Lambda^r\mathfrak{g}^*$ tal que $\widehat{\alpha} = 0$, lo que implica que $\hat{\alpha}(\star\alpha) = \alpha \wedge \star\alpha = 0$. Pero para que $\alpha \wedge \star\alpha \in \mathbb{R}$ se anule necesariamente $\alpha = 0$. Por tanto, $\widehat{\ }$ es inyectivo.

Como $\Lambda^r\mathfrak{g}^*$ y $\Lambda^{n-r}\mathfrak{g}^*$ son espacios vectoriales de dimensión finita, para probar que el morfismo inyectivo $\widehat{\ }$ es un isomorfismo basta probar que $\Lambda^r\mathfrak{g}^*$ y $\Lambda^{n-r}\mathfrak{g}^*$ tienen la misma dimensión, lo que es trivial pues

$$\dim \Lambda^r\mathfrak{g}^* = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \dim \Lambda^{n-r}\mathfrak{g}^*.$$

Por tanto, $\widehat{\ }$ es un isomorfismo de complejos, y el morfismo inverso $(\widehat{\ })^{-1}$ también es de complejos.

Así, tenemos inducido un isomorfismo en cohomología entre $\mathrm{H}^r(\mathfrak{g})$ y la cohomología del complejo (C^r, δ^*), donde, considerando $(\Lambda\mathfrak{g}^*, \delta)^*$, tendremos que

$$\mathrm{H}^r(C) = \frac{\ker(\delta^{n-r-1})^*}{\mathrm{im}(\delta^{n-r})^*}.$$

Pero, por el Lema 3.3 se tiene que

$$\mathrm{H}^r(C) \cong \frac{\ker \delta^{n-r}}{\mathrm{im}\,\delta^{n-r-1}} = \mathrm{H}^{n-r}(\mathfrak{g}). \quad \square$$

3.3. Cohomología con coeficientes en un módulo

Definición 3.10. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Una representación de $\mathfrak{g}$ en un espacio vectorial V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\rho\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$, es decir una aplicación lineal que cumple

$$\rho([X,Y]) = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y) \circ \rho(X).$$

Denotaremos $X \cdot v = \rho(X)(v)$ y diremos que V es un $\mathfrak{g}$-módulo.

Definición 3.11. Llamaremos representación dual a $\rho^*\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V^*)$, donde

$$\rho^*(X)(\varphi)(v) = -\varphi(X \cdot v),$$

con $X \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in V^*$ y $v \in V$.

Nótese el signo menos.

Definición 3.12. La cohomología del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con coeficientes en el módulo V se denota por $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}; V)$. Se calcula con el complejo de las aplicaciones lineales de $\Lambda\mathfrak{g}$ en V.

Dada $\omega \in L(\Lambda^r\mathfrak{g}, V)$ con $r \geq 1$ la diferencial será

$$\begin{aligned}
&(\delta\omega)(X_0 \wedge \cdots \wedge X_r) \\
=&\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i \cdot \omega(X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_r) \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_r),
\end{aligned}$$

donde la operación en el primer sumando vendrá dada por la representación de $\mathfrak{g}$ sobre el módulo V.

En particular, para $r = 1$ la diferencial vendrá dada por

$$(\delta\omega)(X,Y) = \omega(X) - \omega(Y) - \omega([X,Y]),$$

con $X, Y \in \mathfrak{g}$; y para $r = 0$ se tiene que $L(\Lambda^0\mathfrak{g}, V) = V$, y

$$\delta(v)(X) = X \cdot v,$$

con $v \in V$ y $X \in \mathfrak{g}$.

Por tanto

$$\mathrm{H}^0 = \ker \delta^0 = \{v \in V\colon X \cdot v = 0\ \forall\, X \in \mathfrak{g}\},$$

es decir, el submódulo $V^{\mathfrak{g}}$ de elementos invariantes.

3.4. Homología de un álgebra de Lie

La homología de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con coeficientes en un módulo V (página 284 de [24]) se calcula usando el complejo $\Lambda\mathfrak{g} \otimes V$ con la diferencial descendente ∂ definida por

$$\begin{aligned}&\partial(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r \otimes v)\\ =&\sum_{i=1}^{r}(-1)^i X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_r \otimes X_i \cdot v\\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}[X_i, X_j] \wedge X_1 \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_r \otimes v\end{aligned}$$

si $r > 1$. Si $r = 1$ se define directamente

$$\partial(X \otimes v) = -X \cdot v.$$

3.5. Dualidad con coeficientes

Para probar la dualidad de Poincaré con coeficientes en un módulo (ver Teorema 3.9) empezaremos viendo el isomorfismo natural dado por la adjunción entre Hom y $\otimes$.

Proposición 3.13. $\mathrm{H}^r(\mathfrak{g}; V^*) \cong \mathrm{H}_r(\mathfrak{g}; V)^*$.

Para ello probaremos este Lema.

Lema 3.14. *Los complejos $L(\Lambda^\bullet\mathfrak{g}, V^*)$ y $(\Lambda^\bullet\mathfrak{g} \otimes V)^*$ son isomorfos.*

Demostración. En grados superiores a cero definiremos un isomorfismo

$$\widehat{\ }\colon L(\Lambda^r\mathfrak{g}, V^*) \cong (\Lambda^r\mathfrak{g} \otimes V)^*$$

si hacemos

$$\widehat{\varphi}(a \otimes b) = \varphi(a)(b),$$

con $\varphi\colon \Lambda^r\mathfrak{g} \to V^*$.

Es inmediato comprobar que $\widehat{\ }$ es un isomorfismo. Por tanto, solamente faltará comprobar que es de complejos. Para ello, hay que probar que $\partial^* \circ \widehat{\ } = \widehat{\ } \circ \delta$. Veámoslo:

Por un lado, tendremos, dado $\varphi \in L(\Lambda^r\mathfrak{g}, V^*)$, que $\partial^*(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi} \circ \partial$, evaluado en un elemento $X_0 \wedge \cdots \wedge X_r \otimes v$, será:

$$\begin{aligned}&\widehat{\varphi}\partial(X_0, \ldots, X_r \otimes v) =\\ &\widehat{\varphi}\left(\sum_{i=0}^{r}(-1)^{i+1} X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_r \otimes X_i \cdot v\right.\\ &\quad\left. + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}[X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_r \otimes v\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{r} (-1)^{i+1} \varphi(X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_r)(X_i \cdot v) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \varphi([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_r)(v).
\end{aligned}
$$

Por el otro lado, tendremos que $(\widehat{\ } \circ \delta)(\varphi) = \widehat{\delta\varphi}$. Evaluando en el mismo elemento de $\Lambda^{r+1}\mathfrak{g} \otimes V$ queda

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\delta\varphi}(X_0 \wedge \cdots \wedge X_r \otimes v) \\
=&(\delta\varphi)(X_0 \wedge \cdots \wedge X_r)(v) \\
=&\sum_{i=0}^{r} (-1)^{i} (X_i \cdot \varphi)(X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_r)(v) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \varphi([X_i, X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_r)(v),
\end{aligned}
$$

donde la operación en el primer sumando es la referida a la representación dual, sobre V^*, y por tanto

$$(X_i \cdot \varphi)(X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_r)(v) = -\varphi(X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_r)(X_i \cdot v).$$

En grado 0 tendremos que

$$L(\Lambda^0\mathfrak{g}, V^*) \cong V^* \cong (\Lambda^0\mathfrak{g} \otimes V)^*,$$

y por tanto $\widehat{\ } = \mathrm{id}_{V^*}$. Así, dado $\varphi \in V^*$, se tiene que

$$(\partial^* \circ \widehat{\ })(\varphi)(X \otimes v) = \partial^*(\varphi)(X \otimes v) = (\varphi \circ \partial)(X \otimes v) = -\varphi(X \cdot v),$$

mientras que

$$(\widehat{\ } \circ \delta)(\varphi)(X \otimes v) = \widehat{\delta\varphi}(X \otimes v) = (\delta\varphi)(X)(v) = (X \cdot \varphi)(v) = -\varphi(X \cdot v). \quad \square$$

3.6. Módulo de Hazewinkel

Definiremos en este epígrafe una nueva estructura de $\mathfrak{g}$-módulo para el espacio vectorial V basada en los resultados de Hazewinkel en [19].

Definición 3.15. El espacio vectorial $\Lambda^n\mathfrak{g}$ tiene estructura de $\mathfrak{g}$-módulo, que vendrá dada por

$$
\begin{aligned}
&X \cdot X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \\
=&\sum_{i=1}^{n} X_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{ad}_X(X_i) \wedge \cdots \wedge X_n \\
=&\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} [X, X_i] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_n.
\end{aligned}
$$

Proposición 3.16. *Dada* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *base de* $\mathfrak{g}$ *se tiene que*

$$X \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Escogiendo un elemento e_k de la base de $\mathfrak{g}$ tendremos:

$$\begin{aligned} e_k \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n &= \sum_{i=1}^{n} e_1 \wedge \cdots \wedge \operatorname{ad}(e_k)(e_i) \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_1 \wedge \cdots \wedge \sum_{j=1}^{n} c_{ki}^{j} e_j \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_1 \wedge \cdots \wedge c_{ki}^{i} e_i \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{ki}^{i} \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \operatorname{traza} \operatorname{ad}(e_k) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \end{aligned}$$

donde c_{ij}^{k} son las constantes de estructura.

Por otro lado, si se expresa $X = \sum_k X^k e_k$ será $\operatorname{ad}_X = \sum_k X^k \operatorname{ad}(e_k)$, y el resultado se sigue por la linealidad de la traza. □

Lema 3.17 (Teorema 5, pág. 207 de [45])**.** *Si los vectores* $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ *se expresan como* $X_i = \sum_j X_i^j e_j$ *entonces*

$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_n = \det(X_i^j) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

Corolario 3.18. *La representación dual en* $(\Lambda^n \mathfrak{g})^*$ *está dada por*

$$X \cdot \epsilon = -\operatorname{traza} \operatorname{ad}_X \cdot \epsilon,$$

con $\epsilon \in (\Lambda^n \mathfrak{g})^*$.

Demostración. Para una base $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ de $\Lambda^n \mathfrak{g}$ se tiene

$$(X \cdot \epsilon)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = -\epsilon(X \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = -\operatorname{traza} \operatorname{ad}_X \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n). \quad \square$$

Definición 3.19. Si M y N son $\mathfrak{g}$-módulos entonces $M \otimes N$ es un $\mathfrak{g}$-módulo. La representación de $\mathfrak{g}$ que dará estructura de $\mathfrak{g}$-módulo a $M \otimes N$ vendrá dada por la acción

$$X \cdot (m \otimes n) = (X \cdot m) \otimes n + m \otimes (X \cdot n),$$

con $X \in \mathfrak{g}$, $m \in M$, $n \in N$, donde $X \cdot m$ y $X \cdot n$ son las acciones de $\mathfrak{g}$ sobre M y N respectivamente.

Proposición 3.20. *Se cumple que*

$$\rho([X,Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X).$$

Demostración. Por un lado

$$\begin{aligned}
&[X,Y](m\otimes n)\\
&= ([X,Y]\cdot m)\otimes n + m\otimes([X,Y]\cdot n)\\
&= (X\cdot Y\cdot m - Y\cdot X\cdot m)\otimes n + m\otimes(X\cdot Y\cdot n - Y\cdot X\cdot n)\\
&= (X\cdot Y\cdot m)\otimes n - (Y\cdot X\cdot m)\otimes n + m\otimes(X\cdot Y\cdot n) - m\otimes(Y\cdot X\cdot n).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
&(X\cdot Y - Y\cdot X)(m\otimes n)\\
&= X\cdot Y\cdot(m\otimes n) - Y\cdot X\cdot(m\otimes n)\\
&= X((Y\cdot m)\otimes n + m\otimes(Y\cdot n)) - Y((X\cdot m)\otimes n + m\otimes(X\cdot n))\\
&= (X\cdot Y\cdot m)\otimes n + (Y\cdot m)\otimes(X\cdot n) + (X\cdot m)\otimes(Y\cdot n)\\
&\quad + m\otimes(X\cdot Y\cdot n) - (Y\cdot X\cdot m)\otimes n - (X\cdot m)\otimes(Y\cdot n)\\
&\quad - (Y\cdot m)\otimes(X\cdot n) - m\otimes(Y\cdot X\cdot n)\\
&= (X\cdot Y)\cdot m\otimes n + m\otimes(X\cdot Y\cdot n) - (Y\cdot X\cdot m)\otimes n - m\otimes(Y\cdot X\cdot n).
\end{aligned}$$ □

Así tendremos definido en $V\otimes(\Lambda^n\mathfrak{g})^*$ una estructura de $\mathfrak{g}$-módulo de forma que para $X\in\mathfrak{g}$ y $v\otimes\epsilon\in V\otimes(\Lambda^n\mathfrak{g})^*$ se tiene que

$$X\cdot(v\otimes\epsilon) = (X\cdot v)\otimes\epsilon - \operatorname{traza}\operatorname{ad}_X\cdot v\otimes\epsilon.$$

Definición 3.21. Dada una representación ρ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que dota al espacio vectorial V de estructura de $\mathfrak{g}$-módulo, llamaremos *módulo de Hazewinkel* al par $V^t = (V,\rho^t)$, donde ρ^t es la representación de $\mathfrak{g}$ en V dada por

$$\rho^t(X) = \rho(X) - \operatorname{traza}\operatorname{ad}_X\cdot 1_V,$$

con $X\in\mathfrak{g}$.

Proposición 3.22. *Se tiene que ρ^t es una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

Demostración. La linealidad de ρ^t está garantizada por la linealidad de ρ y de la representación adjunta. Así, solo es necesario demostrar que

$$\rho^t([X,Y]) = \rho^t(X)\rho^t(Y) - \rho^t(Y)\rho^t(X),$$

lo que se comprueba sin dificultad. □

Proposición 3.23. *El módulo $V\otimes(\Lambda^n\mathfrak{g})^*$ es isomorfo al módulo de Hazewinkel V^t.*

Demostración. Escogiendo una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathfrak{g}$ definiremos el isomorfismo $f\colon V \otimes (\Lambda^n\mathfrak{g})^* \to V^t$ dado por

$$f(v \otimes \epsilon) = \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \cdot v.$$

Para comprobar que es un isomorfismo, definiremos una inversa $f^{-1}\colon V^t \to V \otimes (\Lambda^n\mathfrak{g})^*$ dada por $f^{-1}(v) = v \otimes \epsilon_0$, donde $\epsilon_0 \in (\Lambda^n\mathfrak{g})^*$ es tal que $\epsilon_0(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 1$.

De esta forma tenemos que

$$(f \circ f^{-1})(v) = f(v \otimes \epsilon_0) = \epsilon_0(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \cdot v = v,$$

y, a la inversa:

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(v \otimes \epsilon) &= f^{-1}(\epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \cdot v) = \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \cdot v \otimes \epsilon_0 \\ &= v \otimes \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \cdot \epsilon_0 = v \otimes \epsilon.\end{aligned}$$

Veamos que f es compatible con la estructura de módulo. Con $X \in \mathfrak{g}$ se tiene

$$\begin{aligned}\rho^t(X)(f(v \otimes \epsilon)) &= \rho^t(X)(\epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \cdot v) \\ &= \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\rho^t(X)(v) \\ &= \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)X \cdot v - \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \cdot \operatorname{traza}\operatorname{ad}_X \cdot v \\ &= f(\rho(X)(v \otimes \epsilon)),\end{aligned}$$

es decir, $\rho^t(X)f = f\rho(X)$. □

3.7. Dualidad en Hazewinkel

Teorema 3.24. *Se tiene que* $\mathrm{H}_r(\mathfrak{g}, V^t) \cong \mathrm{H}^{n-r}(\mathfrak{g}, V)$.

El resultado es consecuencia del siguiente Lema:

Lema 3.25. *Se tiene un isomorfismo de complejos* $\Lambda^r\mathfrak{g} \otimes V^t \cong L(\Lambda^{n-r}\mathfrak{g}, V)$.

Demostración. Dada una base $e_1, \cdots, e_n$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, a partir de los duales podemos obtener una forma de volumen $\epsilon_0 \in (\Lambda^n\mathfrak{g})^*$ tal que $\epsilon_0(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 1$. Una vez escogida ϵ_0, definiremos un isomorfismo

$$\lambda\colon \Lambda^r\mathfrak{g} \otimes V^t \to L(\Lambda^{n-r}\mathfrak{g}, V).$$

Para simplificar la escritura, denotaremos

$$\xi = X_1 \wedge \cdots \wedge X_r \in \Lambda^r\mathfrak{g}$$

y

$$\psi = Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{n-r} \in \Lambda^{n-r}\mathfrak{g}.$$

Entonces el isomorfismo λ hace corresponder a cada $\xi \otimes v \in \Lambda^r \mathfrak{g} \otimes V^t$ la aplicación lineal $\lambda(\xi \otimes v) \colon \Lambda^{n-r}\mathfrak{g} \to V$ dada por

$$\lambda(\xi \otimes v)(\psi) = \epsilon(\xi \wedge \psi) \cdot v.$$

Para comprobar que es un isomorfismo definiremos la inversa

$$\lambda^{-1} \colon L(\Lambda^{n-r}\mathfrak{g}, V) \to \Lambda^r \mathfrak{g} \otimes V^t.$$

Para ello tendremos en cuenta que todo elemento de $L(\Lambda^{n-r}\mathfrak{g}, V)$ se puede expresar como combinación lineal de elementos $\varphi \in L(\Lambda^{n-r}\mathfrak{g}, V)$ tales que existen $i_1 < \ldots < i_r$ con

$$\varphi(e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_r}} \wedge \cdots \wedge e_n) = v,$$

y se anulan para cualquier otro elemento de la base. Así, bastará definir la inversa λ^{-1} para los φ de esta forma haciendo

$$\lambda^{-1}(\varphi) = (-1)^\sigma e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \otimes v,$$

donde $\sigma = \sigma(i_1, \ldots, i_r)$ es la signatura de la permutación que reordena el elemento

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_r}} \wedge \cdots \wedge e_n$$

para convertirlo en $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$.

Se tiene entonces que $\lambda \circ \lambda^{-1} = \mathrm{id}$, pues

$$(\lambda \circ \lambda^{-1})(\varphi)(\gamma) = (-1)^\sigma \lambda(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \otimes v)(\gamma),$$

que se anulará excepto para $\gamma = e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_r}} \wedge \cdots \wedge e_n$. Por tanto

$$\begin{aligned}&(\lambda \circ \lambda^{-1})(\varphi)(\gamma)\\ =&(-1)^\sigma \epsilon(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_r}} \wedge \cdots \wedge e_n) \cdot v\\ =&(-1)^{2\sigma} \cdot v = v = \varphi(\gamma).\end{aligned}$$

Faltará únicamente probar que λ induce un isomorfismo en cohomología. Para ello, a partir del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^r \mathfrak{g} \otimes V^t \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\partial"'] & L(\Lambda^{n-r}\mathfrak{g}, V) \arrow[d, "\delta"] \\ \Lambda^{r-1} \mathfrak{g} \otimes V^t \arrow[r, "\lambda"] & L(\Lambda^{n-r+1}\mathfrak{g}, V) \end{tikzcd}$$

se prueba que

$$(-1)^r \delta \circ \lambda = \lambda \circ \partial, \tag{3.7.1}$$

con lo que el resultado que buscamos se obtendrá como corolario inmediato del Lema 3.5. La demostración de 3.7.1 se puede encontrar en la página 290 de [24]. □

Combinando el Teorema 3.24 y la Proposición 3.13 tendremos probada ya la dualidad de Poincaré:

Teorema 3.26. *En cohomología se tiene:*

$$\mathrm{H}^r(\mathfrak{g}, (V^t)^*) \cong \mathrm{H}^{n-r}(\mathfrak{g}, V)^*.$$

Demostración.

$$\mathrm{H}^{n-r}(\mathfrak{g}, V)^* \cong \mathrm{H}_r(\mathfrak{g}, V^t)^* \cong \mathrm{H}^r(\mathfrak{g}, (V^t)^*). \quad \square$$

Capítulo 4
Cohomología de $(\mathfrak{g}, K)$-módulos

Como continuación del Capítulo 3, introduciremos ahora la nocion de $(\mathfrak{g}, K)$-modulo y la representación que Hazewinkel define en [19]. Terminaremos con la dualidad para homología y cohomología relativas, siguiendo el Capítulo VII de [24].

4.1. $(\mathfrak{g}, K)$-módulos

Definición 4.1. Sea G un grupo de Lie y sea V un espacio vectorial. Una representación de G en V es un homomorfismo de grupos $\alpha\colon G \to \mathrm{GL}(V)$.

Habitualmente abreviaremos $\alpha(g)(v) = g \cdot v$.

Definición 4.2. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y sea V un espacio vectorial. Una representación de $\mathfrak{g}$ en V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$.

Habitualmente abreviaremos $\rho(X)(v) = X \cdot v$.

Por ejemplo, al derivar la representación α de G obtenemos una representación α_* de $\mathfrak{g}$ dada por

$$X \cdot v = \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}(\exp tX \cdot v).$$

Definición 4.3. (página 335 de [24]) Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Sea K un subgrupo de Lie de G con álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Un espacio vectorial V se dice $(\mathfrak{g}, K)$-módulo si existe una representación $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ y una representación $\alpha\colon K \to \mathrm{GL}(V)$ cumpliendo que

1. $k \cdot (X \cdot (k^{-1} \cdot v)) = \mathrm{Ad}(k)(X) \cdot v, \quad \forall\, k \in K, X \in \mathfrak{g}, v \in V$;
2. para todo $v \in V$, $K \cdot v$ genera un subespacio de V de dimensión finita;
3. al derivar, se tiene que $\alpha_* = \rho_{|\mathfrak{k}}$, es decir,

$$X \cdot v = \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}(\exp tX \cdot v), \quad \forall X \in \mathfrak{k}, v \in V.$$

Nota 4.4. La segunda condición es necesaria cuando el módulo V tiene dimensión infinita, para poder derivar la acción de K.

Lema 4.5. *Sea $v \in V$. Las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

1. v es K-finito, es decir, $K \cdot v$ genera un subespacio de dimensión finita;

2. *v esta contenido en un subespacio invariante de dimensión finita.*

Demostración. Si $K \cdot v$ genera un subespacio S de dimensión finita, todo elemento de S es de la forma $w = \sum_{i=1}^{s} c_i(k_i \cdot v) = \sum_{i=1}^{s}(k_i \cdot c_i v)$, con $c_i \in \mathbb{R}$. Entonces S es K-invariante, pues para todo $k \in K$,

$$k \cdot w = \sum_{i=1}^{s} k \cdot (k_i \cdot c_i v) = \sum_{i=1}^{s}(kk_i \cdot c_i v) = \sum_{i=1}^{s} c_i(kk_i \cdot v),$$

lo que es una combinación lineal de elementos de $K \cdot v$ y, por lo tanto, está en S. Así, $x \in S$, que es invariante y de dimensión finita.

Recíprocamente, si $v \in S$, con S subespacio invariante de dimensión finita, cualquier elemento de la forma $k \cdot v$ estará en S, con lo que el subespacio generado por $K \cdot v$ estará contenido en S, por lo que será de dimensión finita. □

Definición 4.6. Dado un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo V llamaremos V^K al submódulo formado por los elementos $v \in V$ que son K-invariantes, es decir, tales que $k \cdot v = v$ para todo $k \in K$.

4.2. La acción sobre $\Lambda^q \mathfrak{p}$

En lo que sigue supondremos que:

1. El álgebra de Lie $\mathfrak{k}$ es unimodular.
2. El par $(\mathfrak{g}, K)$ es reductivo, es decir existe un un subespacio vectorial $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ y tal que $\mathrm{Ad}_G(k)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ para todo $k \in K$.

En ocasiones escribiremos $\mathrm{Ad}(k)$ en vez de $\mathrm{Ad}_G(k)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ y ad_X en vez de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(X)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

No supondremos que K sea conexo.

Denotaremos $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)\colon \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ la restricción de $\mathrm{Ad}_G(k)$ a $\mathfrak{p}$.

Como espacio vectorial $\mathfrak{p}$ es isomorfo a $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. Consideremos una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que los $e_1, \ldots, e_q$ forman una base de $\mathfrak{p}$ y los $e_{q+1}, \ldots, e_n$ forman una base de $\mathfrak{k}$.

Proposición 4.7. *Sea $q = \dim \mathfrak{p}$. La estructura de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo en $\Lambda^q \mathfrak{p}$ vendrá dada por las acciones*

$$X \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_q = \operatorname{traza} \mathrm{ad}_X \, e_1 \wedge \cdots \wedge e_q$$

y

$$k \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_q = \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k) \, e_1 \wedge \cdots \wedge e_q,$$

con $X \in \mathfrak{g}$, $k \in K$.

Demostración. La condición $\mathrm{Ad}(k)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ significa que $\mathfrak{p}$ es un K-módulo, y por tanto lo es $\Lambda^r \mathfrak{p}$, para $0 \leq r \leq q$, con la acción

$$k \cdot X_1 \wedge \cdots \wedge X_r = \mathrm{Ad}(k)(X_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{Ad}(k)(X_r),$$

con $k \in K$.

Sin embargo, en general, $\Lambda^r\mathfrak{p}$ no tiene estructura de $\mathfrak{g}$-módulo. En cambio, en grado máximo podemos definir una estructura de $\mathfrak{g}$-módulo utilizando el isomorfismo $R_\tau\colon \Lambda^q\mathfrak{p} \to \Lambda^n\mathfrak{g}$, que se define multiplicando por la derecha por $\tau = e_{q+1} \wedge \cdots \wedge e_n$.

Por la Proposición 3.16 sabemos que si $X \in \mathfrak{g}$ entonces $X \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$.

De esta forma, podremos definir una estructura de $\mathfrak{g}$-módulo en $\Lambda^q\mathfrak{p}$ con

$$X \cdot \eta = R_\tau^{-1}(X \cdot R_\tau(\eta)),$$

es decir

$$X \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_q = \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X e_1 \wedge \cdots \wedge e_q.$$

Comprobemos que al derivar la acción de K obtenemos la acción de $\mathfrak{g}$. Sea $\alpha\colon K \to \mathrm{GL}(V)$, con $V = \Lambda^q\mathfrak{p}$, y $\alpha(k)(v) = \det \mathrm{Ad}_\mathfrak{p}(k)v$. Entonces $\alpha_*\colon \mathfrak{k} \to \mathrm{End}(V)$ vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
\alpha_*(X)(v) &= \left(\mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}\alpha(\exp tX)\right)(v) \\
&= \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}\left(\alpha(\exp tX)(v)\right) \\
&= \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}\left(\det \mathrm{Ad}_\mathfrak{p}(\exp tX)v\right) \\
&= \left(\mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0} \det \mathrm{Ad}_\mathfrak{p}(\exp tX)\right) v.
\end{aligned}$$

Por la regla de la cadena la derivada es

$$(D\det)_I \circ (D\mathrm{Ad}_\mathfrak{p})_e(X) = \operatorname{traza} \operatorname{ad}_\mathfrak{p}(X)$$

donde llamamos $\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}X}\colon \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$ a la restricción de ad_X. Aquí usamos que $X \in \mathfrak{k}$ y por tanto $[X, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$.

La restricción de la acción de $\mathfrak{g}$ daría $\operatorname{traza} \operatorname{ad}_\mathfrak{g}(X)$, pero como para $X \in \mathfrak{k}$ es

$$\operatorname{ad}_X = \begin{bmatrix} \operatorname{ad}_\mathfrak{k}(X) & 0 \\ 0 & \operatorname{ad}_\mathfrak{p}(X) \end{bmatrix}$$

se tiene que $\operatorname{traza} \operatorname{ad}_\mathfrak{p}(X) = \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X$, pues $\operatorname{traza} \operatorname{ad}_\mathfrak{p}(X) = 0$ por ser $\mathfrak{k}$ unimodular.

Ahora deberemos probar que se cumple la compatibilidad entre las acciones, es decir, que $k \cdot (X \cdot v) = \mathrm{Ad}(k)(X) \cdot (k \cdot v)$ para todo $k \in K$, $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
k \cdot (X \cdot v) &= k \cdot (\operatorname{traza} \operatorname{ad}_X v) \\
&= \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X (k \cdot v) \\
&= \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X \ \det \mathrm{Ad}_\mathfrak{p}(k) \cdot v,
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(k)(X) \cdot (k \cdot v) &= \mathrm{Ad}(k)(X) \cdot (\det \mathrm{Ad}_\mathfrak{p}(k)v) \\
&= \det \mathrm{Ad}_\mathfrak{p}(k) \ \operatorname{traza} \operatorname{ad}(\mathrm{Ad}(k)(X))\, v.
\end{aligned}$$

Así, para probar la igualdad, como $\phi = \mathrm{Ad}(k)$ es un isomorfismo de álgebras de Lie, necesitaremos demostrar el siguiente Lema:

Lema 4.8. *Sea $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ un isomorfismo de álgebras de Lie. Entonces*

$$\operatorname{traza} \operatorname{ad}_{\phi(X)} = \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X.$$

Demostración. Se tiene

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)],$$

o lo que es lo mismo:

$$(\phi \circ \operatorname{ad}_X)(Y) = (\operatorname{ad}_{\phi(X)} \circ \phi)(Y).$$

Por tanto

$$\operatorname{ad}_{\phi(X)} = \phi \circ \operatorname{ad}_X \circ \phi^{-1},$$

con lo que $\operatorname{traza} \operatorname{ad}_{\phi(X)} = \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X$. □

Por último, nótese que se cumple la segunda condición de la Definición 4.3, la K-finitud, pues $\Lambda^q \mathfrak{p}$ es de dimensión finita.

Esto termina la demostración de la Proposición 4.7. □

4.3. Cohomología relativa

Sea $q = n - k$ la dimensión de $\mathfrak{p}$ y sea $0 \le r \le q$. Dado un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo V, consideraremos el complejo $L_K(\Lambda^r \mathfrak{p}, V)$, es decir, las aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales de K-módulos entre $\Lambda^r \mathfrak{p}$ y V.

Lema 4.9. *Se tiene que $L_K(\Lambda^0 \mathfrak{p}, V) \cong V^K$, el espacio de invariantes.*

Demostración. Se tiene que $\Lambda^0 \mathfrak{p} = \mathbb{R}$, con lo que los elementos $\zeta \in L_K(\Lambda^0 \mathfrak{p}, V)$ serán los morfismos $\mathbb{R}$-lineales de K-módulos entre $\mathbb{R}$ y V, que tienen que cumplir que $\zeta(k \cdot r) = k \cdot \zeta(r)$ para todo $k \in K$, $r \in \mathbb{R}$. Pero $k \cdot r = r$ para la acción trivial en $\mathbb{R}$. Por tanto, podemos identificar cada elemento ζ de $L_K(\Lambda^0 \mathfrak{p}, V)$ con un elemento $v = \zeta(1) \in V$ que cumple que $k \cdot v = v$ para todo $k \in K$, es decir, un elemento invariante $v \in V^K$. □

Si $r = 0$ podemos definir directamente $\delta v(X) = X \cdot v$.

La diferencial $\delta\colon L_K(\Lambda^r \mathfrak{p}, V) \to L_K(\Lambda^{r+1} \mathfrak{p}, V)$ de un elemento de grado $r \ge 1$ vendrá dada por

$$\begin{aligned}
&(\delta\omega)(X_0 \wedge \cdots \wedge X_r) \\
&= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i X_i \cdot \omega(X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_r) \\
&\qquad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}} \wedge X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_r),
\end{aligned}$$

donde $[X, Y]_{\mathfrak{p}}$ representa la proyección del corchete en $\mathfrak{p}$.

Definición 4.10. Denotaremos la cohomología de este complejo como $\mathrm{H}^r(\mathfrak{g}, K; V)$. Es la *cohomología de $\mathfrak{g}$ relativa a K con coeficientes en V.*

Para ver que δ está bien definido hay que probar que $\delta\omega$, con $\omega \in L_K(\Lambda^r\mathfrak{p}, V)$, es de K-módulos, es decir:

$$k \cdot (\delta\omega)(X_0 \wedge \cdots \wedge X_r) = (\delta\omega)(k \cdot X_0 \wedge \cdots \wedge X_r),$$

lo que se comprueba sin dificultad si tenemos en cuenta que

$$\mathrm{Ad}(k)([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}) = [\mathrm{Ad}(k)(X_i), \mathrm{Ad}(k)(X_j)]_{\mathfrak{p}}.$$

Esto es cierto porque $[\mathrm{Ad}(k)(X_i), \mathrm{Ad}(k)(X_j)]) = \mathrm{Ad}(k)[X_i, X_j]$, pues $\mathrm{Ad}(k)$ es un morfismo de álgebras de Lie; y por otra parte, si denotamos $\mathcal{P}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{p}$ la proyección, tenemos $\mathrm{Ad}(k) \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ \mathrm{Ad}(k)$ ya que $\mathrm{Ad}(k)$ preserva la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

Por tanto, hemos probado que

$$k \cdot (\delta\omega)(X_0 \wedge \cdots \wedge X_r) = (\delta\omega)(k \cdot X_0 \wedge \cdots \wedge X_r).$$

4.4. Homología relativa

Dado un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo V se define la *homología relativa con coeficientes en* V como la homología del complejo $\Lambda^r\mathfrak{p} \otimes_K V$, donde la diferencial en grado $r \geq 1$ viene dada por

$$\begin{aligned}
&\partial(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r \otimes v) \\
=&\sum_{i=1}^{r}(-1)^i X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_r \otimes X_i \cdot v \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}[X_i, X_j]_{\mathfrak{p}} \wedge X_1 \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_r \otimes v.
\end{aligned}$$

Si $r = 1$ se define

$$\partial(X \otimes v) = -1 \otimes X \cdot v.$$

Nota 4.11. Vamos a usar que, al hacer el tensor $U \otimes_K V$ de dos K-módulos, en V usamos la estructura de K-módulo por la izquierda, pero en U hay que usar la estructura de K-módulo por la derecha, es decir la dada por $u \cdot k = k^{-1} \cdot v$. Además $U \otimes_K V$ será un cociente de $U \otimes_{\mathbb{R}} V$ donde identificamos $(k^{-1} \cdot u) \otimes v$ con $u \otimes (k \cdot v)$. Por último, recordemos que en $U \otimes_{\mathbb{R}} V$ hay una estructura de K-módulo dada por $k \cdot (u \otimes v) = (k \cdot u) \otimes (k \cdot v)$. Entonces llamando $w = k \cdot v$ la identificación puede escribirse como

$$k^{-1}(u \otimes w) = (k^{-1}u \otimes k^{-1}k \cdot v) = (k^{-1}u \otimes v) = (u \otimes kv) = u \otimes w. \tag{4.4.1}$$

En principio, la diferencial está definida como $\partial\colon \Lambda^r\mathfrak{p} \otimes V \to \Lambda^{r-1}\mathfrak{p} \otimes V$ (tensor como espacios vectoriales) y hay que probar usando (4.4.1) que pasa a los cocientes $\partial\colon \Lambda^r\mathfrak{p} \otimes_K V \to \Lambda^{r-1}\mathfrak{p} \otimes_K V$ (tensor como K-módulos). Por tanto, lo que hay que probar es que ∂ conmuta con la acción de K. Tenemos que

$$\partial(k \cdot (X_1 \wedge \cdots \wedge X_r \otimes v))$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial(k \cdot X_1 \wedge \cdots \wedge X_r \otimes k \cdot v) \\
&= \partial(\mathrm{Ad}(k)(X_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{Ad}(k)(X_r) \otimes k \cdot v) \\
&= \sum_i (-1)^i \mathrm{Ad}(k)(X_1) \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{Ad}(k)(X_i)} \wedge \\
&\qquad \cdots \wedge \mathrm{Ad}(k)(X_r) \otimes \mathrm{Ad}(k)(X_i) \cdot k \cdot v \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [\mathrm{Ad}(k)(X_i), \mathrm{Ad}(k)(X_j)]_{\mathfrak{p}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{Ad}(k)(X_i)} \wedge \\
&\qquad \cdots \wedge \widehat{\mathrm{Ad}(k)(X_j)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{Ad}(k)(X_r) \otimes k \cdot v \\
&= \sum_i (-1)^i k \cdot X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_r \otimes \mathrm{Ad}(k)(X_i) \cdot k \cdot v \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \mathrm{Ad}(k)([X_i, X_j]_{\mathfrak{p}}) \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{Ad}(k)(X_i)} \wedge \\
&\qquad \cdots \wedge \widehat{\mathrm{Ad}(k)(X_j)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{Ad}(k)(X_r) \otimes k \cdot v \\
&= \sum_i (-1)^i k \cdot X_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_r \otimes k \cdot X_i \cdot v \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} k \cdot [X_i, X_j]_{\mathfrak{p}} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_r \otimes k \cdot v \\
&= k \cdot \partial(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r \otimes v).
\end{aligned}
$$

En grado $r = 1$, como la acción de K sobre $\mathfrak{p}$ es mediante $\mathrm{Ad}(k)$, es

$$
\begin{aligned}
&\partial(k \cdot (X \otimes v)) \\
&= \partial(\mathrm{Ad}(k)(X) \otimes k \cdot v) \\
&= -1 \otimes \mathrm{Ad}(k)(X) \cdot k \cdot v \\
&= -1 \otimes k \cdot X \cdot v \\
&= -k \cdot (1 \otimes X \cdot v) \\
&= k \cdot \partial(X \otimes v).
\end{aligned}
$$

Denotaremos la homología de este complejo como $\mathrm{H}_r(\mathfrak{g}, K; V)$.

4.5. Dualidad de Poincaré

Llamaremos V^c al subespacio de los homomorfismos lineales de V en $\mathbb{R}$ que cumplen la segunda condición de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo de la Definición 4.3, que llamaremos K-finitos. El motivo de esta restricción es que pueden existir elementos del dual que no están contenidos en ningún subespacio irreducible invariante, lo que impide dotar a V^* de estructura de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo. Como V^c es un subespacio de V^* tendrá estructura de $\mathfrak{g}$-módulo con la acción

$$(X \cdot \varphi)(v) = -\varphi(X \cdot v) \quad \forall\, X \in \mathfrak{g}, \varphi \in V^c, v \in V.$$

Proposición 4.12. *Se tiene que V^c es un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo.*

Demostración. Dadas las representaciones $\rho\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ y $\alpha\colon K \to GL(V)$, definiremos $\rho^*\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V^c)$ y $\alpha^*\colon K \to GL(V^c)$ haciendo

$$\rho^*(X)(\varphi)(v) = (X \cdot \varphi)(v) = -\varphi(X \cdot v)$$

y

$$\alpha^*(k)(\varphi)(v) = (k \cdot \varphi)(v) = \varphi(k^{-1} \cdot v).$$

Lema 4.13. *Las acciones están bien definidas, es decir, que $X \cdot \varphi$ y $k \cdot \varphi$ están en V^c si $\varphi \in V^c$.*

Demostración. Si $\varphi \in V^c$ entonces $\varphi \in S \subset V^*$, con S subespacio K-invariante de dimensión finita. Dado $X \in \mathfrak{g}$, tenemos que probar que $K \cdot (X \cdot \varphi)$ esta contenido en un subespacio de dimensión finita. Si $k \in K$ se tiene que

$$\begin{aligned}(k \cdot (X \cdot \varphi))(v) &= (X \cdot \varphi)(k^{-1} \cdot v)\\ &= -\varphi(X \cdot k^{-1} \cdot v)\\ &= -\varphi(k^{-1} \cdot \operatorname{Ad}(k^{-1})(X) \cdot v),\end{aligned}$$

con lo que

$$k \cdot (X \cdot \varphi) = -\varphi \circ \rho(k^{-1} \cdot \operatorname{Ad}(k^{-1})(X)), \quad \forall\, X \in \mathfrak{g},\ k \in K,\ \varphi \in V^c. \tag{4.5.1}$$

Definamos ahora

$$S^* = \{\varphi \circ \rho(X)\colon \varphi \in S,\ X \in \mathfrak{g}\}.$$

Nótese que la linealidad de φ y de $\rho(X)$ garantiza que S^* sea un subespacio. Es inmediato que S^* es de dimensión finita pues lo son S y $\mathfrak{g}$. Como $X\varphi = -\varphi \circ \rho(X)$, se tiene que $X \cdot \varphi \in S^*$. Además, S^* es K-invariante pues dado $\varphi \circ \rho(X) \in S^*$, por la ecuación (4.5.1) tendremos que, dado $k \in K$,

$$\begin{aligned}k \cdot (\varphi \circ \rho(X)) &= -\varphi \circ \rho(k^{-1} \cdot \operatorname{Ad}(k^{-1})(X)) \subset S^*,\\ k \cdot (\varphi \circ \rho(X)) &= -\varphi \circ L_{k^{-1}} \circ \rho(\operatorname{Ad}(k)(X)),\end{aligned}$$

y como S es K-invariante sabemos que $-\varphi \circ L_{k^{-1}} = \psi \in S$, y así

$$k \cdot (\varphi \circ \rho(X)) = \psi \circ \rho(\operatorname{Ad}(k)(X)) \in S^*.$$

Por otra parte, que $k \cdot \varphi \in V^c$ es trivial, pues si φ está contenido en un espacio K-invariante de dimensión finita es evidente que $k \cdot \varphi$ también. $\square$

Como estamos en V^c podemos derivar la acción de K. Así, con $X \in \mathfrak{k}$, tendremos:

$$\begin{aligned}(\alpha^*)_*(X)(\varphi)(v) &= (\mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}\alpha^*(\exp tX))(\varphi)(v)\\ &= \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}\alpha^*(\exp tX)(\varphi)(v)\\ &= \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}\varphi(\alpha((\exp tX)^{-1})(v))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}\varphi(\alpha(\exp(-tX))(v)) \\
&= \varphi(\mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}\alpha(\exp(-tX))(v)) \\
&= \varphi(-\alpha_*(X)(v)) \\
&= \varphi(-X \cdot v) \\
&= (X \cdot \varphi)(v).
\end{aligned}
$$

Por tanto, para demostrar que es un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo, solamente nos queda comprobar la compatibilidad entre las acciones, es decir, que

$$k \cdot (X \cdot (k^{-1} \cdot \varphi)) = \mathrm{Ad}(k)(X) \cdot \varphi.$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
k \cdot (X \cdot (k^{-1} \cdot \varphi))(v) &= (X \cdot (k^{-1} \cdot \varphi))(k^{-1} \cdot v) \\
&= -(k^{-1}\varphi)(X \cdot (k^{-1} \cdot v)) \\
&= -\varphi(k \cdot (X \cdot (k^{-1} \cdot v))) \\
&= -\varphi(\mathrm{Ad}(k)(X) \cdot v) \\
&= (\mathrm{Ad}(k)(X) \cdot \varphi)(v).
\end{aligned}
$$

□

Proposición 4.14. *Si V y W son $(\mathfrak{g}, K)$-módulos entonces $V \otimes W$ es un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo.*

Las representaciones que darán estructura de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo a $V \otimes W$ vendrán dadas por las acciones

$$
\begin{aligned}
X \cdot (v \otimes w) &= X \cdot v \otimes w + v \otimes X \cdot w, \\
k \cdot (v \otimes w) &= k \cdot v \otimes k \cdot w,
\end{aligned}
$$

con $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$, $w \in W$ y $k \in K$, y donde aparecen las acciones de $\mathfrak{g}$ y K sobre V y W.

Demostración. Para poder derivar debemos antes comprobar que se cumple la segunda condición de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo. Por el Lema 4.5, sabemos que bastará comprobar que un elemento $v \otimes w \in V \otimes W$ está contenido en un subespacio invariante de dimensión finita. Como V y W son $(\mathfrak{g}, K)$-módulos, sabemos que existen S_1 y S_2 subespacios de dimensión finita de V y W, respectivamente, tales que $K \cdot v \subset S_1$ y $K \cdot w \subset S_2$, y por tanto, para todo $k \in K$, tendremos que $k \cdot (v \otimes w) = k \cdot v \otimes k \cdot w \in S_1 \otimes S_2$, que será un subespacio de $V \otimes W$ de dimensión finita.

Para comprobar que al derivar la acción de K se obtiene la acción de $\mathfrak{g}$, haciendo $k = \exp tX$, con $X \in \mathfrak{k}$, tendremos

$$\mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}(\exp tX \cdot v \otimes \exp tX \cdot w) = X \cdot v \otimes 1 \cdot w + 1 \cdot v \otimes X \cdot w = X \cdot (v \otimes w).$$

Comprobemos ahora la compatibilidad entre ambas acciones:

$$
\begin{aligned}
k \cdot (X \cdot (v \otimes w)) &= k \cdot (X \cdot v \otimes w + v \otimes X \cdot w) \\
&= k \cdot X \cdot v \otimes k \cdot w + k \cdot v \otimes k \cdot X \cdot w \\
&= \mathrm{Ad}(k)(X) \cdot k \cdot v \otimes k \cdot w + k \cdot v \otimes \mathrm{Ad}(k)(X) \cdot k \cdot w \\
&= \mathrm{Ad}(k)(X) \cdot (k \cdot v \otimes k \cdot w) \\
&= \mathrm{Ad}(k)(X) \cdot (k \cdot (v \otimes w)).
\end{aligned}
$$

□

Corolario 4.15. *La estructura de* $(\mathfrak{g}, K)$*-módulo en el tensor* $V \otimes (\Lambda^q \mathfrak{p})^*$ *vendrá dada por las acciones*

$$X \cdot (v \otimes \epsilon) = X \cdot v \otimes \epsilon - \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X v \otimes \epsilon$$
$$k \cdot (v \otimes \epsilon) = \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1} k \cdot v \otimes \epsilon.$$

Demostración. Considerando ϵ_0 el dual de $e_1 \wedge \cdots \wedge e_q$, con los $\{e_i\}$ formando una base de $\mathfrak{p}$, tendremos, por un lado:

$$X \cdot (v \otimes \epsilon_0) = X \cdot v \otimes \epsilon_0 + v \otimes X \cdot \epsilon_0,$$

donde

$$\begin{aligned}(X \cdot \epsilon_0)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q) &= -\epsilon_0(X \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\\ &= -\epsilon_0(\operatorname{traza} \operatorname{ad}_X e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\\ &= -\operatorname{traza} \operatorname{ad}_X \epsilon_0(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\\ &= -\operatorname{traza} \operatorname{ad}_X;\end{aligned}$$

y por otra parte,

$$k \cdot (v \otimes \epsilon_0) = k \cdot v \otimes k \cdot \epsilon_0,$$

donde

$$(k \cdot \epsilon_0)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q) = \epsilon_0(k^{-1} \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_q) = \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}.$$

Las condiciones de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo están garantizadas por la Proposición 4.12 y la Proposición 4.14. □

Aunque Knapp demuestra la dualidad de Poincaré en $(\mathfrak{g}, K)$-módulos de una forma más directa (página 399 de [24]), daremos una descripción explícita del isomorfismo de complejos:

Lema 4.16. *Los complejos* $L_K(\Lambda^r \mathfrak{p}, V^c)$ *y* $(\Lambda^r \mathfrak{p} \otimes_K V)^*$ *son isomorfos.*

Demostración. Antes de nada, es importante hacer notar que en el complejo de la derecha no es necesario añadir como condición la K-finitud, pues todos los elementos de $(\Lambda^r \mathfrak{p} \otimes_K V)^*$ son K-invariantes, ya que

$$\begin{aligned}(k \cdot \varphi)(X \otimes v) &= \varphi(k^{-1} \cdot (X \otimes v))\\ &= \varphi(k^{-1} \cdot X \otimes k^{-1} \cdot v)\\ &= \varphi(X \otimes k^{-1} k \cdot v)\\ &= \varphi(X \otimes v),\end{aligned}$$

para todo $X \in \Lambda^r \mathfrak{p}$, $k \in K, v \in V$.

En grado 0 tendremos por el Lema 4.9 que $L_K(\Lambda^0 \mathfrak{p}, V^c) \cong (V^c)^K$, es decir, los K-invariantes de los K-finitos.

Lema 4.17. $(V^c)^K \cong (\Lambda^0 \mathfrak{p} \otimes_K V)^*$.

Demostración. La estructura de $\mathbb{R}$ como K-modulo es la trivial, $x1 = 1$. En el producto tensor $\mathbb{R} \otimes_K V$ tenemos por tanto que $1 \otimes xv = 1x \otimes v = 1 \otimes v$. Entonces

$$F\colon \varphi \in (V^c)^K \mapsto (\Lambda^0\mathfrak{p} \otimes_K V)^*$$

está dado por $F(\varphi)(1 \otimes v) = \varphi(v)$ y la inversa es $F^{-1}(\xi)(v) = \xi(1 \otimes v)$. El morfismo F está bien definido pues

$$\begin{aligned} F(\varphi)(1 \otimes k \cdot v) &= \varphi(k \cdot v) \\ &= \varphi(v) \\ &= F(\varphi)(1 \otimes v) \\ &= F(\varphi)(1 \cdot k \otimes v) \end{aligned}$$

para todo $v \in V$, $k \in K$, $\varphi \in (V^c)^K$.

Por otro lado, $F^{-1}(\xi)$ es K-invariante ya que

$$\begin{aligned} F^{-1}(\xi)(k \cdot v) &= \xi(1 \otimes k \cdot v) \\ &= \xi(k \cdot 1 \otimes v) \\ &= \xi(1 \otimes v) \\ &= F^{-1}(\xi)(v). \end{aligned}$$

Además también cumple la segunda condición de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo, pues, dado $\xi \in (\Lambda^0\mathfrak{p} \otimes_K V)^*$, se tiene que $K \cdot F^{-1}(\xi) = \langle F^{-1}(\xi)\rangle_{\mathbb{R}}$, ya que

$$\begin{aligned} (k \cdot F^{-1}(\xi))(v) &= F^{-1}(\xi)(k^{-1}v) \\ &= \xi(1 \otimes k^{-1}v) \\ &= \xi(k \cdot 1 \otimes v) \\ &= \xi(1 \otimes v) \\ &= F^{-1}(\xi)(v), \end{aligned}$$

para todo $k \in K$. Por lo tanto, F^{-1} también está bien definida.

Además, son isomorfismos, ya que

$$(F \circ F^{-1})(\xi)(1 \otimes v) = F^{-1}(\xi)(v) = \xi(1 \otimes v),$$

y

$$(F^{-1} \circ F)(\varphi)(v) = F(\varphi)(1 \otimes v) = \varphi(v). \quad \square$$

En grados superiores a cero definiremos un isomorfismo

$$\widehat{\ }\colon L_K(\Lambda^r\mathfrak{p}, V^c) \cong (\Lambda^r\mathfrak{p} \otimes_K V)^*$$

haciendo, para $\zeta\colon \Lambda^r\mathfrak{p} \to V^c$,

$$\widehat{\zeta}(a \otimes v) = \zeta(a)(v).$$

De esta forma, $\widehat{\ }$ está bien definida, pues

$$\begin{aligned}\widehat{\zeta}(k^{-1}\cdot a\otimes v) &= \zeta(k^{-1}\cdot a)(v)\\ &= (k^{-1}\cdot\zeta(a))(v)\\ &= \zeta(a)(k\cdot v)\\ &= \widehat{\zeta}(a\otimes k\cdot v).\end{aligned}$$

Para comprobar que $\widehat{\ }$ es un isomorfismo bastará definir una inversa

$$\flat\colon (\Lambda^r\mathfrak{p}\otimes_K V)^* \to L_K(\Lambda^r\mathfrak{p}, V^c)$$

haciendo, para $\psi\in(\Lambda^r\mathfrak{p}\otimes_K V)^*$,

$$\psi^\flat(X)(v) = \psi(X\otimes v).$$

Que las composiciones entre $\widehat{\ }$ y $\flat$ dan la identidad es inmediato.

Por tanto, solamente faltará comprobar que $\widehat{\ }$ es de complejos.

Para ello, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} L(\Lambda^r\mathfrak{p}, V^c) \arrow[r, "\widehat{\ }"] \arrow[d, "\delta"'] & (\Lambda^r\mathfrak{p}\otimes_K V)^* \arrow[d, "\partial^*"] \\ L(\Lambda^{r+1}\mathfrak{p}, V^c) \arrow[r, "\widehat{\ }"] & (\Lambda^{r+1}\mathfrak{p}\otimes_K V)^* \end{tikzcd}$$

Hay que probar que $\partial^*\circ\widehat{\ } = \widehat{\ }\circ\delta$.

Así, para $r=0$, dado $\xi\in(V^c)^K$, tendremos que

$$(\partial^*\circ\widehat{\ })(\zeta)(X\otimes v) = \partial^*(\hat{\zeta})(X\otimes v) = (\hat{\zeta}\circ\partial)(X\otimes v) = -\zeta(X\cdot v),$$

mientras que

$$(\widehat{\ }\circ\delta)(\zeta)(X\otimes v) = \widehat{\delta\zeta}(X\otimes v) = (\delta\zeta)(X)(v) = (X\cdot\zeta)(v) = -\zeta(X\cdot v).$$

En general tendremos, por un lado, dado $\zeta\in L_K(\Lambda^r\mathfrak{p}, V^c)$, que $\partial^*(\widehat{\zeta}) = \widehat{\zeta}\circ\partial$, evaluado en un elemento $X_0\wedge\cdots\wedge X_r\otimes v$, será:

$$\begin{aligned}&\widehat{\zeta}\Bigg(\sum_{i=0}^{r}(-1)^{i+1}X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X}_i\wedge\cdots\wedge X_r\otimes X_i\cdot v\\ &\qquad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}[X_i,X_j]_{\mathfrak{p}}\wedge X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{X_j}\wedge\cdots\wedge X_r\otimes v\Bigg)\\ &= \sum_{i=0}^{r}(-1)^{i+1}\zeta(X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X_i}\wedge\cdots\wedge X_r)(X_i\cdot v)\end{aligned}$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\zeta([X_i,X_j]_{\mathfrak{p}}\wedge X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{X_j}\wedge\cdots\wedge X_r)(v).$$

Por el otro lado, tendremos que $(\widehat{\ }\circ\delta)(\zeta)=\widehat{\delta\zeta}$. Evaluando en el mismo elemento de $\Lambda^{r+1}\mathfrak{p}\otimes V$ queda

$$\begin{aligned}
&\widehat{\delta\zeta}(X_0\wedge\cdots\wedge X_r\otimes v)\\
=&(\delta\zeta)(X_0\wedge\cdots\wedge X_r)(v)\\
=&\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i\cdot\zeta(X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X_i}\wedge\cdots\wedge X_r)(v)\\
&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\zeta([X_i,X_j]_{\mathfrak{p}}\wedge X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X_i}\wedge\cdots\wedge\widehat{X_j}\wedge\cdots\wedge X_r)(v),
\end{aligned}$$

donde la operación en el primer sumando es la referida a la representación dual, sobre V^c, y por tanto

$$X_i\cdot\zeta(X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X_i}\wedge\cdots\wedge X_r)(v)=-\zeta(X_0\wedge\cdots\wedge\widehat{X_i}\wedge\cdots\wedge X_r)(X_i\cdot v).\quad\square$$

Así, tendremos probado que

Teorema 4.18. $\mathrm{H}^r(\mathfrak{g},K;V^c)\cong\mathrm{H}_r(\mathfrak{g},K;V)^*$.

4.6. Hazewinkel en $(\mathfrak{g}, K)$-módulos

Definición 4.19. Si V es un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo llamaremos módulo de Hazewinkel, V^{tw}, al espacio vectorial V con las siguientes acciones:

- $X\cdot_t v = X\cdot v - \mathrm{traza}\,\mathrm{ad}_X\, v,\quad X\in\mathfrak{g}, v\in V;$
- $k\cdot_t v=\det\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}(k\cdot v),\quad k\in K, v\in V.$

Proposición 4.20. *Las acciones $X\cdot_t$ y $k\cdot_t$ dan a V estructura de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo.*

Demostración. Por un lado, con $X\in\mathfrak{k}$, tendremos que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}(\det\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(\exp(-tX))(\exp tX\cdot v)\\
&=-\mathrm{traza}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}(X)(e\cdot v)+1\cdot(X\cdot v)\\
&=X\cdot v-\mathrm{traza}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}(X)v\\
&=X\cdot_t v.
\end{aligned}$$

Hemos usado que $\mathfrak{k}$ es unimodular y que por tanto $\mathrm{traza}\,\mathrm{ad}_X=\mathrm{traza}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}X}$. Comprobemos la compatibilidad de las acciones:

$$k\cdot_t(X\cdot_t v)=k\cdot_t(X\cdot v-\mathrm{traza}\,\mathrm{ad}_X v)$$

$$\begin{aligned} &= \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}(k \cdot X \cdot v - \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X k \cdot v) \\ &= \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}(\mathrm{Ad}(k)(X) \cdot k \cdot v - \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X k \cdot v). \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{Ad}(k)(X)) \cdot_t k \cdot_t v \\ &= \mathrm{Ad}(k)(X) \cdot k \cdot_t v - \operatorname{traza} \operatorname{ad}(\mathrm{Ad}(k)(X)) k \cdot_t v \\ &= \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}(\mathrm{Ad}(k)(X) \cdot k \cdot v - \operatorname{traza} \operatorname{ad}(\mathrm{Ad}(k)(X)) k \cdot v). \end{aligned}$$

Y como por el Lema 4.8 se tiene que $\operatorname{traza} \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}}(\mathrm{Ad}(k)(X)) = \operatorname{traza} \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}X}$, llegamos a la igualdad que buscábamos. □

Proposición 4.21. *El módulo $V \otimes_{\mathbb{R}} (\Lambda^q \mathfrak{p})^*$ es isomorfo al módulo de Hazewinkel V^{tw}.*

Demostración. Escogiendo una base $\{e_1, \dots, e_q\}$ de $\mathfrak{p}$ definiremos el isomorfismo

$$f \colon V \otimes_{\mathbb{R}} (\Lambda^q \mathfrak{p})^* \to V^{tw}$$

dado por

$$f(v \otimes \epsilon) = \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, v.$$

Para comprobar que es un isomorfismo, definiremos una inversa

$$f^{-1} \colon V^{tw} \to V \otimes_K (\Lambda^q \mathfrak{p})^*,$$

con $f^{-1}(v) = v \otimes \epsilon_0$, donde $\epsilon_0 \in (\Lambda^q \mathfrak{p})^*$ es tal que $\epsilon_0(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q) = 1$.

De esta forma tenemos que

$$(f \circ f^{-1})(v) = f(v \otimes \epsilon_0) = \epsilon_0(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, v = v,$$

y, a la inversa:

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(v \otimes \epsilon) &= f^{-1}(\epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, v) \\ &= \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, v \otimes \epsilon_0 \\ &= v \otimes \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, \epsilon_0 \\ &= v \otimes \epsilon. \end{aligned}$$

Veamos que f es compatible con la estructura de módulo. Con $X \in \mathfrak{g}$ se tiene

$$\begin{aligned} X \cdot_t (f(v \otimes \epsilon)) &= X \cdot_t (\epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, v) \\ &= \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, X \cdot_t v \\ &= f((X \cdot_t v) \otimes \epsilon) \\ &= f(X \cdot_t (v \otimes \epsilon)) \end{aligned}$$

porque $X \cdot_t \epsilon = 0$. Comprobemos esto último:

$$(X \cdot_t \epsilon)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q) = -\epsilon(X \cdot_t e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)$$

$$\begin{aligned}
&= -\epsilon(X \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_q - \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X e_1 \wedge \cdots \wedge e_q) \\
&= -\epsilon(\operatorname{traza} \operatorname{ad}_X e_1 \wedge \cdots \wedge e_q - \operatorname{traza} \operatorname{ad}_X e_1 \wedge \cdots \wedge e_q).
\end{aligned}$$

Por otro lado, f conmuta con la acción de K, pues

$$\begin{aligned}
k \cdot_t f(v \otimes \epsilon) &= \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}\, k \cdot f(v \otimes \epsilon) \\
&= \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}\, k \cdot (\epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, v) \\
&= \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}\, k \cdot v,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
f(k \cdot (v \otimes \epsilon)) &= f(k \cdot v \otimes k \cdot \epsilon) \\
&= (k \cdot \epsilon)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, k \cdot v \\
&= \epsilon(k^{-1} \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, k \cdot v \\
&= \epsilon(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}(e_1) \wedge \cdots \wedge \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}(e_q))\, k \cdot v \\
&= \epsilon(\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, k \cdot v \\
&= \epsilon(e_1 \wedge \cdots \wedge e_q)\, \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)^{-1}\, k \cdot v.
\end{aligned}$$ □

Teorema 4.22. *Se tiene que* $\mathrm{H}^r(\mathfrak{g}, K; V) \cong \mathrm{H}_{q-r}(\mathfrak{g}, K; V^{tw})$, *con* $q = \dim \mathfrak{p}$.

El resultado es consecuencia del siguiente Lema:

Lema 4.23. *Se tiene un isomorfismo de complejos* $\Lambda^r \mathfrak{p} \otimes_K V^{tw} \cong L_K(\Lambda^{q-r}\mathfrak{p}, V)$.

La demostración es completamente análoga a la del Lema 3.25 cambiando $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{p}$. Combinando el Teorema 4.22 con la Proposición 4.18 tendremos que

Teorema 4.24. *En cohomología se tiene que*

$$\mathrm{H}^r(\mathfrak{g}, K; V)^* \cong \mathrm{H}^{q-r}(\mathfrak{g}, K; (V^{tw})^c).$$

Demostración. Por el Teorema 4.22 sabemos que

$$\mathrm{H}^r(\mathfrak{g}, K; V)^* \cong \mathrm{H}_{q-r}(\mathfrak{g}, K; V^{tw})^*.$$

y aplicando entonces el Teorema 4.18 llegamos a que

$$\mathrm{H}_{q-r}(\mathfrak{g}, K; V^{tw})^* \cong \mathrm{H}^{q-r}(\mathfrak{g}, K; (V^{tw})^c). \quad \square$$

Capítulo 5
Foliaciones Riemannianas

En este capítulo estudiaremos las foliaciones para las que se puede definir, sobre la variedad, una métrica de Riemann compatible con la foliación.

5.1. Submersiones Riemannianas

Definición 5.1. Sean M y N dos variedades de Riemann. Diremos que una submersión $\phi\colon M \to N$ es Riemanniana si el isomorfismo $\phi_{*x}\colon (TF_x)^{\perp} \to TN_{\phi(x)}$ es una isometría para todo $x \in M$, donde TF_x representa el espacio tangente a la fibra de ϕ en x.

Proposición 5.2. *Dada una submersión $\phi\colon M \to N$ se tiene que para cualquier métrica en N se puede dotar a M de una métrica que hace que ϕ sea Riemanniana.*

Demostración. Tomando una métrica cualquiera g' en M, consideremos $\mathcal{H}$, el fibrado tangente a las fibras de ϕ, y sea $Q \subset TM$ un complementario de forma que $TM = \mathcal{H} \oplus Q$ y $\mathcal{H}_x \perp Q_x$ para todo $x \in M$. Así, para cada $x \in M$ podemos definir un producto escalar g_Q sobre Q_x de tal forma que $\phi_{*x}\colon Q_x \to TN_{\phi(x)}$ sea una isometría haciendo $\langle v_1, v_2\rangle_x = \langle \phi_{*x}v_1, \phi_{*x}v_2\rangle_{\phi(x)}$ para todo $v_1, v_2 \in Q_x$. Ahora, como cualquier campo de vectores Y se puede descomponer en su parte tangente y su parte transversa a las fibras, de forma que denotaremos $Y = Y_{\mathcal{H}} + Y_Q$, podemos definir una métrica g en M haciendo

$$g(Y, Z) = g'(Y_{\mathcal{H}}, Z_{\mathcal{H}}) + g_Q(Y_Q, Z_Q),$$

para la que claramente la submersión ϕ será Riemanniana. $\square$

5.2. Foliaciones Riemannianas

Definición 5.3. Sea $\mathcal{F}$ una foliación sobre una variedad M. Una métrica g en M se dice casi-fibrada para $\mathcal{F}$ si para todo abierto U de M y para todos los campos de vectores X, Y en U foliados y perpendiculares a las hojas la función $g(X, Y)$ es básica en U, es decir, constante a lo largo de las hojas de $\mathcal{F}_{|U}$.

Definición 5.4. Sea $\mathcal{F}$ una foliación sobre una variedad M. Se dice que $\mathcal{F}$ es Riemanniana si sobre M existe una métrica casi-fibrada para $\mathcal{F}$.

Ejemplo 5.5. Dada una submersión Riemanniana $\phi\colon M \to N$ se tiene que la métrica en M es casi-fibrada para la foliación definida por las componentes conexas de las fibras de ϕ. En particular, aplicando la Proposición 5.2, toda foliación definida por una submersión sobre una variedad de Riemann es Riemanniana.

5.2.1. Campos foliados y campos transversos

Sea $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión q sobre una variedad M de dimensión m.

Definición 5.6. Un abierto $U \subset M$ distinguido para $\mathcal{F}$ se dice simple si $\mathcal{F}_{|U}$ es una foliación simple, es decir, definida por una submersión de fibras conexas.

Definición 5.7. Un campo de vectores X en M se dice foliado para $\mathcal{F}$ si para cualquier campo de vectores Y tangente a $\mathcal{F}$ se tiene que $[X, Y]$ es tangente a $\mathcal{F}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ es una foliación Riemanniana orientada $\mathcal{F}$ de dimensión p y codimensión $q = m - p$. Que $\mathcal{F}$ sea Riemanniana significa que existe sobre M una métrica g casi-fibrada para $\mathcal{F}$. La métrica g nos permite descomponer el fibrado tangente en

$$TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}^{\perp}. \tag{5.2.1}$$

Proposición 5.8. *[36] Si U es un abierto distinguido simple donde $\mathcal{F}_{|U}$ viene definida por la submersión $f\colon U \to \overline{U}$ entonces cualquier campo de vectores foliado X en U se proyecta en $\overline{U}$ a un campo de vectores $\overline{X}$. Recíprocamente, todo campo de vectores $\overline{X}$ en $\overline{U}$ se levanta a un único campo de vectores X en M, foliado y ortogonal a $\mathcal{F}$.*

En [36], Molino define el álgebra de Lie de los *campos transversos*, $l(M/\mathcal{F})$, como el cociente entre el álgebra de Lie de los campos foliados y la de los campos tangentes a $\mathcal{F}$. Así, el campo transverso asociado a un campo foliado X será su clase de equivalencia en este cociente, que Molino denota $\overline{X}$. La estructura de álgebra de Lie vendrá dada por el corchete

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]},$$

con X, Y campos de vectores foliados.

Proposición 5.9. *El espacio vectorial $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$ formado por los campos de vectores foliados y ortogonales a $\mathcal{F}$ tiene estructura de álgebra de Lie con el corchete*

$$[X, Y]^* = \mathcal{H}[X, Y],$$

donde $\mathcal{H}[X, Y]$ denota la componente de $[X, Y]$ ortogonal a la foliación .

Demostración. El corchete $[\,,\,]^*$ está bien definido, pues $\mathcal{H}[X, Y]$ es obviamente normal y el corchete de dos campos foliados es foliado.

La bilinealidad y la antisimetría son evidentes. Veamos que $[\,,\,]^*$ cumple la identidad de Jacobi:

Se tiene que cumplir que

$$[X, [Y, Z]^*]^* + [Y, [Z, X]^*]^* + [Z, [X, Y]^*]^* = 0$$

para todo X, Y, Z foliados y ortogonales. Pero como el corchete usual cumple la identidad, basta con probar que $[, [,]^*]^* = [, [,]]^*$. Veamos esto último:

El corchete $[X, Y]$ se puede descomponer en una suma de su parte tangente ($\mathcal{V}$) y su parte normal ($\mathcal{H}$):

$$[X, Y] = \mathcal{V}[X, Y] + \mathcal{H}[X, Y].$$

Entonces:

$$\mathcal{H}[[X, Y], Z] = \mathcal{H}[\mathcal{V}[X, Y] + \mathcal{H}[X, Y], Z] = \mathcal{H}[\mathcal{V}[X, Y], Z] + \mathcal{H}[\mathcal{H}[X, Y], Z],$$

pero $\mathcal{H}[\mathcal{V}[X, Y], Z] = 0$ por ser Z foliado. □

Proposición 5.10. *El álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$ y el álgebra de Lie $l(M/\mathcal{F})$ son isomorfas.*

Demostración. Para cualquier campo foliado X, la clase $\overline{X}$ contiene un único representante foliado y ortogonal a $\mathcal{F}$, que será $\mathcal{H}X$. Entonces, la identificación $Y \mapsto \overline{Y}$ define una aplicación lineal entre $\mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$ y $l(M/\mathcal{F})$ claramente biyectiva. Bastará, por tanto, probar que es de álgebras de Lie, es decir, que dados X, Y foliados y ortogonales el corchete $[X, Y]^*$ se identifica con $[\overline{X}, \overline{Y}]$. Pero $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]} = \overline{\mathcal{H}[X, Y]}$, que se identifica con $\mathcal{H}[X, Y] = [X, Y]^*$. □

Definición 5.11. El isomorfismo dado en la Proposición 5.10 permite que a partir de ahora, en consonancia con la terminología de Molino, llamemos *campos transversos* a los campos foliados y ortogonales a $\mathcal{F}$.

5.2.2. Paralelismo transverso local

Sea U un abierto de trivialización de $\mathcal{F}$. Como la métrica g es casi-fibrada sabemos, por la Proposición 6.16, que la submersión $f : U \to f(U) \subset \mathbb{R}^q$ que define localmente la foliación es Riemanniana. Molino demuestra en la página 37 de [36] que, dada una submersión simple, los campos de vectores de la base son isomorfos a los campos en U transversos a la foliación definida por las fibras de f. Por tanto, la base local en el abierto $f(U)$ dada por los campos $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_q}$ se levanta por f a una referencia local en U formada por $Y_1, \dots, Y_q$ campos de vectores transversos a $\mathcal{F}$.

Definición 5.12. Llamaremos *paralelismo transverso local* a la referencia local $Y_1, \dots, Y_q$.

La base $Y_1, \dots, Y_q$ se puede ortonormalizar sin que los campos de vectores pierdan la condición de ser foliados para $\mathcal{F}$, pues el proceso de ortogonalización de Gram-Smitdt usa una combinación de los campos multiplicados por funciones que son básicas por ser la métrica casi-fibrada, y un foliado multiplicado por una función básica sigue siendo foliado.

Denotaremos por $\xi_1, \dots, \xi_p, Y_1, \dots, Y_q$ la referencia local ortonormal obtenida al completar la referencia $Y_1, \dots, Y_q$ con una referencia local ortonormal de $T\mathcal{F}$ a partir de la descomposición (5.2.1).

Esta referencia nos permitirá demostrar una muy útil caracterización de los campos de vectores foliados:

Lema 5.13. *Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$, definido localmente como*

$$X = \sum_{j=1}^{p} g_j \xi_j + \sum_{j=1}^{q} f_j Y_j,$$

es foliado para $\mathcal{F}$ si y solo si las funciones f_j son básicas, es decir, localmente constantes a lo largo de las hojas de $\mathcal{F}$, para todo $j = 1, \ldots, q$.

Demostración. Supongamos que X es foliado. Tenemos que para cualquier Z campo de vectores tangente a $\mathcal{F}$ se tiene que el siguiente campo de vectores tiene que ser tangente:

$$[X, Z] = \sum_{j=1}^{p} [g_j \xi_j, Z] + \sum_{j=1}^{q} [f_j Y_j, Z], \tag{5.2.2}$$

que por la Proposición 1.45 de [50] queda

$$\sum_{j=1}^{p} g_j [\xi_j, Z] - \sum_{j=1}^{p} (Z \cdot g_j) \cdot \xi_j + \sum_{j=1}^{q} f_j [Y_j, Z] - \sum_{j=1}^{q} (Z \cdot f_j) \cdot Y_j. \tag{5.2.3}$$

En particular, como los tres primeros sumandos son tangentes, el campo

$$\sum_{j=1}^{q} (Z \cdot f_j) \cdot Y_j$$

tiene que ser tangente, pero como es perpendicular a $\mathcal{F}$ entonces necesariamente se anula, lo que, por independencia lineal, solamente es posible si $(Z \cdot f_j) = 0$, es decir, si f_j es constante a lo largo de las hojas, para todo $j = 1, \ldots, q$.

Para demostrar el recíproco, suponiendo que las f_j son básicas, tenemos que demostrar que el campo X es foliado. Pero, por la fórmula (5.2.3), teniendo en cuenta que $Z \cdot f_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, q$, basta demostrar que $[Y_j, Z]$ es tangente, lo que sabemos que es cierto pues los Y_j son foliados. □

5.3. Métricas invariantes

En esta sección recordamos resultados bien conocidos sobre la existencia de métricas invariantes en espacios homogéneos.

Sea $N = G/K$ un espacio homogéneo. Suponemos que N es conexo, K puede ser conexo o no. Consideramos las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ de G y K respectivamente. Fijando el punto base $o = [e] \in N$ tendremos que el espacio tangente $T_o N \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$.

Definición 5.14. Llamaremos isotropía lineal a la representación

$$k \in K = G_o \mapsto \lambda(k)_{*o} \in \mathrm{GL}(T_o N).$$

Como $\mathfrak{k}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$, tenemos que $\mathrm{Ad}_G(k)\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, para $k \in \mathfrak{k}$, preserva $\mathfrak{k}$ y por tanto pasa al cociente; la denotamos $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(k)\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. Esta aplicación coincide con $\lambda(k)_{*o}$, pues pasando al cociente el automorfismo interior $I(k)$ tendremos que

$$[kgk^{-1}] = [kg] = \lambda(k)([g]).$$

Así, se tiene la representación que denotamos $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}\colon K \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$.

El siguiente Lema es bien conocido ([21], Cap. 1, Lema 11.2).

Lema 5.15. *Sea M una variedad Riemanniana y sea $\varphi\colon M \to M$ una isometría. Si existe un punto $p \in M$ tal que $\varphi(p) = p$ y $\varphi_{*p} = \mathrm{id}$ entonces $\varphi = \mathrm{id}$.*

Proposición 5.16. *Si la acción de G en N es efectiva y por isometrías entonces la representación de isotropía lineal es "fiel" (es decir, inyectiva).*

Demostración. Como $\lambda(k)$, $k \in K$, es una isometría de N, y $o \in N$ es un punto fijo, si $\lambda(k)_{*0} = \mathrm{id}$ entonces, por el Lema 5.15, se tiene que $\lambda(k) = \mathrm{id}$. Como la acción es efectiva se sigue que $k = e$. □

Lema 5.17. *([26], Prop. 3.1, pág. 200) Hay una métrica de Riemann invariante en G/K si y solo si hay un producto interior en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ invariante por los $Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(k)$, $k \in K$.*

Demostración. Dada una métrica invariante g en N, definiremos el producto interior en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ haciendo $\langle u, v\rangle = g_o(u, v)$, con $u, v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \cong T_oN$. Será $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$-invariante puesto que, como $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(k) = \lambda(k)_{*o}$ y g es invariante, se tiene

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(k)(u), \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(k)(v)\rangle = g_o(\lambda(k)_{*o}(u), \lambda(k)_{*o}(v)) = \\ &= (\lambda(k)^*g)_0(u, v) = g_o(u, v) = \langle u, v\rangle.\end{aligned}$$

Recíprocamente, dado un producto interior $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$-invariante, podemos definir la métrica haciendo

$$g_x(X_x, Y_x) = \langle \lambda(g)^{-1}_{*o} X_x, \lambda(g)^{-1}_{*o} Y_x\rangle,$$

con $x = [g] \in G/K$. □

Lema 5.18. *Sea $\langle , \rangle$ producto interior usual en $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ el grupo de transformaciones ortogonales. Todo subgrupo conjugado $\mathrm{O}' = A\mathrm{O}(n)A^{-1}$ corresponde a otro producto interior, a saber $\langle v, w\rangle' = \langle A^{-1}v, A^{-1}w\rangle$. Recíprocamente, todo producto interior en $\mathbb{R}^n$ tiene como grupo de isometrías un conjugado de $\mathrm{O}(n)$.*

Demostración. Una matriz $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ será una isometría de $\langle , \rangle'$ si y solo si se cumple que $\langle Bv, Bw\rangle' = \langle v, w\rangle'$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$, o lo que es lo mismo, si

$$\langle A^{-1}Bv, A^{-1}Bw\rangle = \langle A^{-1}v, A^{-1}w\rangle.$$

Si llamamos $V = A^{-1}v$ y $W = A^{-1}w$ tendremos que tiene que cumplirse que

$$\langle A^{-1}BAV, A^{-1}BAW\rangle = \langle V, W\rangle,$$

lo que equivale a que $A^{-1}BA \in \mathrm{O}(n)$, es decir, $B \in A\mathrm{O}(n)A^{-1}$.

En general, dado un producto interior $\langle , \rangle'$ en $\mathbb{R}^n$, si consideramos A, matriz simétrica definida positiva asociada a este producto interior, tendremos, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, que

$$\langle x, y\rangle' = x^t A y = x^t \sqrt{A}\sqrt{A} y = x^t (\sqrt{A})^t \sqrt{A} y = (\sqrt{A}x)^t \sqrt{A} y = \langle \sqrt{A}x, \sqrt{A}y\rangle,$$

donde $\sqrt{A}$ es la única matriz simétrica definida positiva, y por tanto inversible, que cumple $\sqrt{A}\sqrt{A} = A$. □

Teorema 5.19. *Hay una métrica G-invariante en G/K si y solo si la adherencia de $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(K)$ en $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ es compacta.*

Demostración. Si hay una métrica invariante entonces, por el Lema 5.17 sabemos que hay un producto interior $\langle , \rangle'$ en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ invariante por los $\mathrm{Ad}_G(k) = \lambda(k)_{*o}$. Así, los $\lambda(k)_{*o}$ son isometrías del producto interior, es decir, $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(K) \subset \mathrm{O}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, \langle , \rangle')$, y éste último es compacto pues sabemos, por el Lema 5.18, que es isomorfo a algún conjugado de $\mathrm{O}(q)$, pues $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^q$ como espacio vectorial. Por tanto, la adherencia de $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(K)$ es compacta.

Recíprocamente, si la adherencia es compacta, como es un subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$, está contenida en algún subgrupo compacto maximal, que será isomorfo a un conjugado de $\mathrm{O}(q)$ y que, por el Lema 5.18, corresponderá a un producto interior $\langle , \rangle'$. Entonces los $\lambda(k)_{*o} \in \mathrm{O}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, \langle , \rangle')$ serán isometrías y por el Lema 5.17 obtendremos la métrica invariante. □

Teorema 5.20. *Si la acción es efectiva y por isometrías entonces el par $(\mathfrak{g}, K)$ es reductivo, es decir existe un subespacio vectorial $\mathfrak{p}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ con $\mathrm{Ad}_G(k)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ para todo $k \in K$.*

Corolario 5.21. *Hay una métrica G-invariante en G/K si y solo si hay un producto interior en $\mathfrak{g}$ invariante por los $\mathrm{Ad}_G(k)$.*

Demostración. Si hay una métrica invariante en G/K tenemos una descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ sabemos, por el Lema 5.17, que existe en $\mathfrak{p}$ un producto interior $\langle , \rangle_{\mathfrak{p}}$ invariante por los $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(k)$. Por otra parte, en $\mathfrak{k}$ tenemos la restricción de la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, que sabemos definida negativa (Proposición 2.9 de [8]). Así, podemos definir un producto interior en $\mathfrak{g}$ de la siguiente forma:

1. $\langle X, Y\rangle = -B_{\mathfrak{g}}(X, Y)$ si $X, Y \in \mathfrak{k}$.
2. $\langle X, Y\rangle = \langle X, Y\rangle_{\mathfrak{p}}$ si $X, Y \in \mathfrak{p}$.
3. $\langle X, Y\rangle = 0$ si $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{p}$ o viceversa.

Este producto interior será invariante pues la forma de Killig es invariante para los automorfismos de $\mathfrak{g}$ y $\langle , \rangle_{\mathfrak{m}}$ es invariante por los $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(k)$ (nótese que en $\mathfrak{p}$ $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(k)$ y $\mathrm{Ad}_G(k)$ coinciden).

Recíprocamente, si se tiene un producto interior invariante por los $\mathrm{Ad}_G(k)$, como $\mathrm{Ad}(k)(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$, su restricción a $\mathfrak{p}$ nos dará un producto interior en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ invariante por los $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(k)$, y aplicaríamos el Lema 5.17. □

Parte II

Foliaciones transversalmente homogéneas

Capítulo 6
Estructura de las foliaciones transversalmente homogéneas

En este Capítulo introducimos las foliaciones transversalmente homogéneas, que Blumenthal definió en [2] y que son la base de este trabajo. Demostraremos el teorema de estructura sin suponer que la acción sea efectiva.

6.1. Definición

Sea $F\colon A \to B$ una aplicación diferenciable entre variedades, transversa a una distribución completamente integrable $\mathcal{D}$ en B. Entonces $F^*\mathcal{D}$ es una distribución completamente integrable en A. Las hojas de $F^*\mathcal{D}$ son las componentes conexas de las imágenes recíprocas de las hojas de $\mathcal{D}$.

Un caso particular es cuando F es una submersión y en B tenemos la foliación por puntos. Entonces la foliación $F^*\mathrm{pt}$ en A se dice *simple*.

La siguiente proposición será necesaria para demostrar el Teorema de Estructura:

Proposición 6.1. *Sea M una variedad diferenciable conexa. Sea $p\colon P \to M$ una cubierta no conexa con grupo de transformaciones G. Sea $\widetilde{M}$ una componente conexa de P. Entonces $p\colon \widetilde{M} \to M$ es una cubierta y su grupo de transformaciones es un subgrupo de G.*

Demostración. En primer lugar veamos que $p(\widetilde{M}) = M$. Como p es abierta, sabemos que $p(\widetilde{M})$ es abierto en M, pues $\widetilde{M}$ es abierto y cerrado en P.

Veamos que $p(\widetilde{M})$ también es cerrado en M. Sea $x \in M$ tal que $x \notin p(\widetilde{M})$. Existe $U \subset M$ entorno conexo de x tal que $p^{-1}(U)$ es unión disjunta de abiertos $\widetilde{U}$, que son conexos pues $p\colon \widetilde{U} \cong U$ es un difeomorfismo. Es claro entonces que $\widetilde{U} \cap \widetilde{M} = \emptyset$, pues en caso contrario $\widetilde{U}$, por conexidad, estaría completamente contenido en $\widetilde{M}$, lo que no es posible, pues sabemos que $p^{-1}(x) \cap \widetilde{M} = \emptyset$. Así, $U \cap p(\widetilde{M}) = \emptyset$, lo que nos lleva a concluir que $p(\widetilde{M})$ es cerrado en M. Así, llegamos a que $p(\widetilde{M})$ es abierto y cerrado en M, lo que, al ser M conexo, implica que $p(\widetilde{M}) = M$.

Comprobemos ahora que la restricción de p a $\widetilde{M}$ es una cubierta. Cumpliéndose la condición de trivialidad local, sea $x \in M$ y $U \subset M$ entorno conexo de x tal que $p^{-1}(U) = \bigsqcup \widetilde{U}$. Acabamos de ver que los $\widetilde{U}$ o bien no cortan a $\widetilde{M}$, o bien están completamente contenidos en $\widetilde{M}$. Eliminando las componentes que no cortan a $\widetilde{M}$ tendremos que la imagen recíproca de U por $p_{|\widetilde{M}}$ es unión disjunta de abiertos en $\widetilde{M}$, con $p\colon \widetilde{U} \cong U$.

Por tanto, hemos demostrado que $p\colon \widetilde{M} \to M$ es una cubierta.

El grupo de transformaciones vendrá dado por

$$\Gamma = \{g \in G\colon g \cdot \widetilde{M} = \widetilde{M} \text{ y } g_{|P\setminus\widetilde{M}} = \mathrm{id}\} :$$

Que $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(p_{|\widetilde{M}})$ es trivial, pues la restricción de cualquier $g \in G$ tal que $g \cdot \widetilde{M} = \widetilde{M}$ puede considerarse un automorfismo de $p_{|\widetilde{M}}$. Recíprocamente, dado $\gamma \in \mathrm{Aut}(p_{|\widetilde{M}})$ se tiene que existe $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ tal que $\tilde{x} \neq \gamma\tilde{x} \in \widetilde{M}$, con $p(\tilde{x}) = p(\gamma\tilde{x}) \in M$, lo que, por propiedades de la cubierta, significa que existe $g \in G$ tal que $\gamma\tilde{x} = g\tilde{x}$, y como la acción de G en $\widetilde{M}$ es libre entonces $\gamma = g \in G$. □

Definición 6.2 ([2]). Decimos que una foliación $\mathcal{F}$ en M es transversalmente homogénea con modelo en el G-espacio homogéneo N si está definida por una familia de submersiones $\{f_\alpha\colon M \supset U_\alpha \to N\}_{\alpha\in A}$, satisfaciendo:

1. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un recubrimiento abierto de M;
2. si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces $f_\alpha = \lambda(g_{\alpha\beta}) \circ f_\beta$, donde $\lambda(g_{\alpha\beta})\colon f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es la restricción de una traslación en N por la acción de un elemento $g_{\alpha\beta} \in G$.

Ejemplo básico: foliación definida por un subgrupo. Sea G un grupo de Lie y K un subgrupo cerrado. La proyección canónica $\pi\colon G \to G/K$ define una foliación simple en G que denotaremos por $\mathcal{F}_{G,K}$. Sus hojas son los trasladados gK_e, con $g \in G$, donde K_e denota la componente conexa del neutro de K. La misma foliación está definida por la proyección canónica $G \to G/K_e$. Algunos autores llaman a la foliación *estrictamente simple* si las fibras de la submersión son conexas.

Recordemos que la aplicación inducida $G/K_e \to G/K$ es una cubierta (Proposición 1.25).

6.2. Teorema de estructura

El siguiente teorema se debe a Blumenthal [2] (que lo enuncia solamente cuando la acción se supone efectiva).

Teorema 6.3 ([2]). *Dada una foliación transversalmente homogénea en M modelada por $N \cong G/K$ conexo, existe una cubierta regular $p\colon \widetilde{M} \to M$ tal que*

1. *su grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(p)$ es isomorfo a un subgrupo $\Gamma \subset G_\sharp = G/\operatorname{Core}_G(K)$, donde $\operatorname{Core}_G(K)$ es el core group de la acción;*
2. *la foliación levantada $\widetilde{\mathcal{F}} = p^*\mathcal{F}$ es la foliación simple $f^*\mathrm{pt}$ asociada a una submersión $f\colon \widetilde{M} \to N$, que es equivariante por el isomorfismo $h\colon \mathrm{Aut}(p) \cong \Gamma$.*

Llamaremos a f la *aplicación desarrollo* de $\mathcal{F}$. El morfismo

$$h\colon \pi_1(M) \to \pi_1(M)/\pi_1(\widetilde{M}) \cong \mathrm{Aut}(p) \cong \Gamma \subset G_\sharp$$

se llama *morfismo de holonomía*. Que f sea equivariante significa que

$$f(\alpha \cdot \widetilde{x}) = h(\alpha) \cdot f(\widetilde{x}),$$

para todo $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$, $\alpha \in \mathrm{Aut}(p)$. Como ya sabemos, $p^*\mathcal{F}$ denota la foliación en $\widetilde{M}$ cuyas hojas son las componentes conexas de la imagen inversa por p de las hojas de $\mathcal{F}$, mientras que $f^*\mathrm{pt}$ es la foliación cuyas hojas son las componentes conexas de las fibras de f.

Si la acción de G sobre N es efectiva, entonces $\mathrm{Core}_G(K)$ es trivial y, por lo tanto, $G_\sharp = G$.

Demostración del Teorema 6.3. .

Si $\mathcal{F}$ está definida por una familia de submersiones $\{f_\alpha\colon U_\alpha \to N\}_{\alpha\in A}$, llamamos

$$P = \{[\lambda(g) \circ f_\alpha]_x\colon\ g \in G,\ \alpha \in A,\ x \in U_\alpha\},$$

donde $[\lambda(g) \circ f_\alpha]_x$ denota el germen en x de $\lambda(g) \circ f_\alpha : U_\alpha \to N$.

El grupo G actúa sobre P haciendo

$$g' \cdot [\lambda(g) \circ f_\alpha]_x = [\lambda(g'g) \circ f_\alpha]_x, \quad \text{con } g' \in G.$$

Pero esta acción no es libre. Para tener una acción libre debemos hacer actuar de la misma manera el grupo $G_\sharp = G/\mathrm{Core}_G(K)$:

$$[g'] \cdot [\lambda(g) \circ f_\alpha]_x = [\lambda(g'g) \circ f_\alpha]_x.$$

Esta acción está bien definida pues para cualquier otro representante $g'k$ de la clase $[g'] \in G_\sharp$ se tiene que $\lambda(k) = \mathrm{id}$.

Lema 6.4. *La acción de $G_\sharp$ sobre P es libre.*

Demostración. Supongamos que existen $[g'] \in G_\sharp$ y $[\lambda(g)\circ f_\alpha]_x \in P$ tales que $[g']\cdot[\lambda(g)\circ f_\alpha]_x = [\lambda(g) \circ f_\alpha]_x$. Es decir, existe U entorno de x donde

$$\lambda(g'g)(f_\alpha(y)) = \lambda(g)(f_\alpha(y)) \ \ \forall y \in U.$$

Tendremos entonces que $\lambda(g') = \mathrm{id}$ en el abierto $f_\alpha(U) \subset N$. Así, como N es conexo, por el Corolario 1.16, llegamos a que $\lambda(g') = \mathrm{id}$ en todo N, con lo que $g' \in \mathrm{Core}(K)$, o, equivalentemente, $[g'] = [e]$ en $G_\sharp$. □

Así, fijados $[g] \in G_\sharp$ y $\alpha \in A$ podemos definir

$$V^\alpha_{[g]} = \{[\lambda(g) \circ f_\alpha]_x\colon x \in U_\alpha\} \subset P.$$

Esta definición es correcta pues $\lambda([g]) = \lambda(g)$ no depende del representante.

Para cada $[g] \in G_\sharp$ y cada $\alpha \in A$ es claro que la restricción $p_{|V^\alpha_{[g]}} : V^\alpha_{[g]} \to U_\alpha$ es una biyección. Podemos suponer que los U_α, $\alpha \in A$, definen un atlas en M y son conexos. Así, dotando a P de la topología generada por todos los $V^\alpha_{[g]}$ tendremos que:

Lema 6.5. *La acción de $G_\sharp$ sobre P es propiamente discontinua.*

Demostración. Sea $[\lambda(g)\circ f_\alpha]_x \in P$ y tomemos el entorno $V^\alpha_{[g]}$. Supongamos que existe $[g'] \in G_\sharp$ tal que $[g'] \cdot V^\alpha_{[g]} \cap V^\alpha_{[g]} \neq \emptyset$. Esto es, que existen $[\lambda(g) \circ f_\alpha]_y \in V^\alpha_{[g]}$ y $[\lambda(g) \circ f_\alpha]_z \in V^\alpha_{[g]}$, con $y, z \in U_\alpha$, tales que $[g'] \cdot [\lambda(g) \circ f_\alpha]_y = [\lambda(g) \circ f_\alpha]_z$. Como los elementos de P solamente pueden coincidir si tienen el mismo punto base, pues son gérmenes de aplicaciones, tenemos que necesariamente $y = z$, es decir, $[g'] \cdot [\lambda(g) \circ f_\alpha]_y = [\lambda(g) \circ f_\alpha]_y$, lo que, teniendo en cuenta que la acción de $G_\sharp$ sobre P es libre, significa que $[g'] = [e]$ en $G_\sharp$. □

Lema 6.6. *El espacio cociente de la acción de $G_\sharp$ sobre P es homeomorfo a M.*

Demostración. La aplicación p induce una relación de equivalencia que identifica los elementos de P que tengan la misma imagen. Probaremos que esta relación de equivalencia coincide con la inducida por la acción de $G_\sharp$:

Dado $[\lambda(g) \circ f_\alpha]_x$, tendremos que

$$[\lambda(g) \circ f_\alpha]_x \overset{p}{\sim} [\lambda(g') \circ f_\beta]_x \quad \forall\, g, g' \in G,\, \forall\, \alpha, \beta \in A.$$

Pero si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ existe g'' tal que $f_\beta = \lambda(g'') \circ f_\alpha$. Entonces, tendremos que

$$[\lambda(g') \circ f_\beta]_x = [\lambda(g') \circ \lambda(g'') \circ f_\alpha]_x = [g'g''g^{-1}] \cdot [\lambda(g) \circ f_\alpha]_x,$$

con lo que $[\lambda(g) \circ f_\alpha]_x \overset{G_\sharp}{\sim} [\lambda(g') \circ f_\beta]_x$. □

Corolario 6.7. *La aplicación $p\colon P \to M$ definida por $p([\lambda(g) \circ f_\alpha]_x) = x$ es una cubierta de grupo $G_\sharp$.*

Lema 6.8. *La cubierta es regular, es decir, la acción de $G_\sharp$ sobre P es transitiva en las fibras de p.*

Demostración. Dado $x \in M$, se tiene que

$$p^{-1}(x) = \{[\lambda(g) \circ f_\alpha]_x \colon [g] \in G,\ \alpha \in A\}.$$

Dados dos elementos $[\lambda(g) \circ f_\alpha]_x$ y $[\lambda(g') \circ f_\beta]_x$ de $p^{-1}(x)$, como para $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ se tiene que $f_\alpha = \lambda(g_{\alpha\beta}) \circ f_\beta$, podremos escribir

$$[\lambda(g) \circ f_\alpha]_x = [\lambda(g) \circ \lambda(g_{\alpha\beta}) \circ f_\beta] = [\lambda(gg_{\alpha\beta}) \circ f_\beta]_x = [gg_{\alpha\beta}g'^{-1}] \cdot [\lambda(g') \circ f_\beta]_x. \quad \square$$

Como $V^\alpha_{[g]} \cong U_\alpha$ y como la acción es propiamente discontinua, tenemos que

$$p^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{[g]\in G_\sharp} V^\alpha_{[g]}.$$

Así, dotando a P de la única estructura diferenciable que hace que p sea difeomorfismo local, tendremos que p es una cubierta regular con $G_\sharp$ como grupo de transformaciones.

Sea $\widetilde{M}$ una componente conexa de P. Sabemos, por la Proposición 6.1, que $p\colon \widetilde{M} \to M$ es una cubierta donde el grupo de transformaciones, que denotaremos por Γ, es un subgrupo de $G_\sharp$. Como Γ estará formado por todos los elementos de $G_\sharp$ que dejan invariante $\widetilde{M}$, es inmediato comprobar que la acción es transitiva en las fibras, puesto que dos elementos de la fibra siempre van a estar relacionados por un elemento de G, y si un elemento de G mueve un punto de $\widetilde{M}$ en otro punto de $\widetilde{M}$ entonces, por conexidad, los mueve todos, lo que significa que está en Γ. Así, p es una cubierta regular con Γ como grupo de automorfismos.

Lema 6.9. *La aplicación* $f\colon \widetilde{M} \to N$ *dada por*

$$f([\lambda(g) \circ f_\alpha]_x) = (\lambda(g) \circ f_\alpha)(x)$$

es una submersión constante a lo largo de las hojas de $p^*\mathcal{F}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que f es una submersión:

Hay que probar que para todo $\tilde{x} = [\lambda(g) \circ f_\alpha]_x \in \widetilde{M}$, la diferencial $f_{*\tilde{x}}\colon T_{\tilde{x}}\widetilde{M} \to T_{f(\tilde{x})}N$ es sobreyectiva. Pero como, dado un entorno $V^\alpha_{[g]}$ de $\tilde{x}$, se tiene que $T_{\tilde{x}}\widetilde{M} \cong T_{\tilde{x}}V^\alpha_{[g]}$, y como $f_{|V^\alpha_{[g]}} = \lambda(g) \circ f_\alpha \circ p_{|V^\alpha_{[g]}}$, y p, f_α y $\lambda(g)$ son submersiones, es claro que f es una submersión.

Veamos ahora que f es constante a lo largo de las hojas de $p^*\mathcal{F}$:

En primer lugar, como p es transversa a $\mathcal{F}$, tenemos que $\widetilde{\mathcal{F}} = p^*\mathcal{F}$ es una distribución completamente integrable, y por tanto una foliación bien definida en $\widetilde{M}$. Hay que probar por tanto que dado X campo de vectores tangente a $p^*\mathcal{F}$ se tiene que $f_{*\tilde{x}}X_{\tilde{x}} = 0$ para todo $\tilde{x} \in \widetilde{M}$. Escojamos un punto $\tilde{x} = [\lambda(g) \circ f_\alpha]_x \in \widetilde{M}$, con $p(\tilde{x}) = x$. Se tiene que $X \in T_{\tilde{x}}p^*\mathcal{F}$ si y solo si $p_{*\tilde{x}}X_{\tilde{x}} \in T\mathcal{F}$ para todo $\tilde{x} \in \widetilde{M}$. Entonces

$$f_{*\tilde{x}}(X_{\tilde{x}}) = \lambda(g)_{*f_\alpha(p(\tilde{x}))}((f_\alpha)_{*p(\tilde{x})}(p_{*\tilde{x}}X_{\tilde{x}})) = 0,$$

pues f_α define la foliación $\mathcal{F}$ y por tanto $(f_\alpha)_{*p(\tilde{x})}(p_{*\tilde{x}}X_{\tilde{x}}) = 0$. □

Como $p\colon \widetilde{M} \to M$ es una cubierta regular sabemos que el grupo de automorfismos es isomorfo a $\pi_1(M)/\pi_1(\widetilde{M})$. Así, podemos definir

$$h\colon \pi_1(M) \to \pi_1(M)/\pi_1(\widetilde{M}) \cong \mathrm{Aut}(p) = \Gamma \subset G_\sharp.$$

De esta forma p es la cubierta asociada al núcleo de h, que estará formado por los elementos de $\pi_1(M)$ que se levantan por p a lazos en $\widetilde{M}$.

Para terminar, f es h-equivariante pues, dado $\alpha \in \pi_1(M)$, llamando $h(\alpha) = [\xi] \in \Gamma \subset G_\sharp$, se tiene que:

$$\begin{aligned} f([\xi] \cdot [\lambda(\gamma) \circ f_\alpha]_x) &= f([\lambda(\xi\gamma) \circ f_\alpha]_x) \\ &= (\lambda(\xi) \circ \lambda(\gamma) \circ f_\alpha)(x) \\ &= \lambda(\xi)(f([\lambda(\gamma) \circ f_\alpha]_x)) \\ &= (\lambda(\xi) \circ f)([\lambda(\gamma) \circ f_\alpha]_x) \\ &= [\xi] \cdot f([\lambda(\gamma) \circ f_\alpha]_x). \end{aligned}$$ □

La siguiente Proposición nos permitirá subir a la cubierta universal de M cuando sea necesario:

Proposición 6.10. *Sea $\widehat{M} \to M$ la cubierta universal de M. Entonces existe una cubierta $\widehat{p}\colon \widehat{M} \to \widetilde{M}$. La composición $f \circ \hat{p}\colon \widehat{M} \to N$ es h-equivariante para el morfismo $h\colon \pi_1(M) \to \mathrm{Aut}(p) \cong \Gamma$. Recíprocamente, si existe un morfismo $h\colon \pi_1(M) \to G_\sharp$ y existe $\hat{f}\colon \hat{M} \to N$ submersión h-equivariante, tendremos que asociada al núcleo de h existirá una cubierta $p\colon \widetilde{M} \to M$ y una submersión $f\colon \widetilde{M} \to N$ h-equivariante inducida por $\hat{f}$.*

Demostración. Si $f\colon \widetilde{M} \to N$ es h-equivariante, entonces, dado $\alpha \in \pi_1(M)$, tendremos:

$$(f \circ \hat{p})(\alpha\hat{x}) = f(\hat{p}(\alpha\hat{x})) = f(\alpha\hat{p}(\hat{x})) = h(\alpha) \cdot f(\hat{p}(\hat{x})) = h(\alpha) \cdot (f \circ \hat{p})(\hat{x}).$$

Recíprocamente, como las cubiertas son regulares y $\hat{M}$ es simplemente conexo tendremos que $\ker h = \pi_1(\widetilde{M})$. Dado $\tilde{x} \in \widetilde{M}$, definiremos $f(\tilde{x}) = \hat{f}(\hat{y})$, con $\hat{y}$ cualquier elemento de $\hat{p}^{-1}(\tilde{x})$, que estará bien definida pues $\hat{f}(\alpha\hat{y}) = \hat{f}(\hat{y})$ para todo $\alpha \in \pi_1(\widetilde{M})$. Será equivariante porque si $\gamma \in \mathrm{Aut}(p)$ entonces $f(\gamma\tilde{x}) = \hat{f}(\gamma\hat{y})$, con $\hat{y}$ tal que $\hat{p}(\hat{y}) = \tilde{x}$, ya que $\hat{p}(\gamma\hat{y}) = \gamma\hat{p}(\hat{y}) = \gamma\tilde{x}$, y por tanto

$$f(\gamma\tilde{x}) = \hat{f}(\gamma\hat{y}) = h(\gamma) \cdot \hat{f}(\hat{y}) = h(\gamma) \cdot f(\tilde{x}). \quad \square$$

La conexidad de las fibras en el desarrollo jugará un importante papel en nuestros resultados:

Proposición 6.11. *Sea $\mathcal{F}$ una N-foliación transversalmente homogénea sobre una variedad M. Supongamos que $\mathcal{F}$ puede definirse mediante un desarrollo $f'\colon M' \to N$ con fibras conexas y morfismo de holonomía $h\colon \mathrm{Aut}(p') \to G_\sharp$, con $p'\colon M' \to M$ cubierta regular. Entonces el desarrollo $f\colon \widetilde{M} \to N$, donde $p\colon \widetilde{M} \to M$ es la cubierta asociada al núcleo de h, tiene fibras conexas.*

Demostración. Considerando la cubierta $p''\colon M' \to \widetilde{M}$, tendremos que $f' = f \circ p''$. Demostraremos que si f tiene fibras no conexas, entonces f' también.

Supongamos entonces que $f\colon \widetilde{M} \to N$ tiene fibra no conexa F. Así, llamándole F' a la fibra de $f'\colon M' \to N$, como toda cubierta es sobreyectiva, tendremos que $F' = (p')^{-1}(F)$, que no puede ser conexo, pues si lo fuera su imagen por p' tendría que ser conexa. $\square$

Proposición 6.12. *Sea $\mathcal{F}$ una $N = G/K$-foliación transversalmente homogénea sobre una variedad M. Sea $f\colon \widetilde{M} \to N$ la submersión desarrollo, con $p\colon \widetilde{M} \to M$ cubierta regular, y sea $\Gamma \subset G_\sharp$ el grupo de holonomía. Entonces, si las fibras de f son conexas, dada una hoja $L \in \mathcal{F}$ se tiene:*

$$p^{-1}(L) = f^{-1}(\Gamma \cdot \hat{n}),$$

donde $\hat{n} = f(L') \in N$, con L' cualquier hoja en $\widetilde{M}$ que se proyecta a L.

Demostración. Que $p^{-1}(L) \subset f^{-1}(\Gamma\hat{n})$ es trivial, pues

$$p^{-1}(L) = \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Aut}(p)} \gamma L'$$

y por tanto dado $\tilde{x} \in p^{-1}(L)$ tenemos que $\tilde{x} = \gamma\tilde{y}$ para algún $\tilde{y} \in L'$ y algún $\gamma \in \operatorname{Aut} p$. Así

$$f(\tilde{x}) = f(\gamma\tilde{y}) = h(\gamma)f(\tilde{y}) = h(\gamma)\hat{n} \in \Gamma\hat{n}.$$

Recíprocamente, dado $\tilde{x} \in f^{-1}(\Gamma\hat{n})$, deberemos probar que $p(\tilde{x}) \in L$. Considerando que $f(\tilde{x}) \in \Gamma\hat{n}$ y teniendo en cuenta que $\Gamma = \operatorname{im} h'$, tendremos que existe $\gamma \in \operatorname{Aut}(p')$ de forma que se cumple que, dado cualquier $\tilde{y} \in L'$,

$$f(\tilde{x}) = h'(\gamma) \cdot \hat{n} = h'(\gamma) \cdot f(\tilde{y}) = f(\gamma\tilde{y}),$$

y por tanto, como las fibras de f son conexas, llegamos a que $\tilde{x} \in \gamma L'$ y así

$$p(\tilde{x}) \in p(\gamma L') = p(L') = L. \quad \square$$

Con esto terminamos la prueba detallada del teorema de estructura en el caso en que la acción no es necesariamente efectiva. Ahora veremos que el teorema de estructura caracteriza completamente las foliaciones transversalmente homogéneas:

Recíproco del Teorema de estructura De nuevo M es una variedad conexa pero no necesariamente compacta; G es un grupo de Lie no necesariamente conexo, y N es un G-espacio homogéneo, con isotropía $K \subset G$.

Proposición 6.13. *Sea una foliación $\mathcal{F}$ en M verificando:*

1. *Existe una cubierta regular $p\colon \widetilde{M} \to M$ y un isomorfismo $h\colon \operatorname{Aut}(p) \to \Gamma \subset G_\sharp$;*

2. *la foliación $p^*\mathcal{F}$ es la foliación simple asociada a una submersión $f\colon \widetilde{M} \to N$ y f es h-equivariante.*

Entonces $\mathcal{F}$ es una foliación N-transversalmente homogénea.

Demostración. Sea $\Gamma = \operatorname{im} h$, subgrupo de $G_\sharp$ que, por hipótesis, será isomorfo al grupo de automorfismos de la cubierta. Sea $x \in M$ y sea U_α un entorno de trivialidad en x tal que $p^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup \widetilde{U}_\alpha$, de forma que $p_\alpha = p_{|\widetilde{U}_\alpha}\colon \widetilde{U}_\alpha \to U_\alpha$ es un difeomorfismo. Así, $f_\alpha = (f \circ p_\alpha^{-1})\colon U_\alpha \to N$ es una submersión. Haciendo esto para cada abierto de trivialidad en M tendremos una familia de abiertos y submersiones $f_\alpha\colon U_\alpha \to N$ satisfaciendo:

1. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un recubrimiento abierto de M.

2. Sean U_α y U_β entornos en M tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y sean $\widetilde{U}_\alpha$ y $\widetilde{U}_\beta$ tales que $p_{|\widetilde{U}_\alpha}\colon \widetilde{U}_\alpha \to U_\alpha$ y $p_{|\widetilde{U}_\beta}\colon \widetilde{U}_\beta \to U_\beta$ son difeomorfismos. Como p es regular sabemos que existe $\gamma \in \operatorname{Aut}(p)$ tal que $\widetilde{U}_\alpha \cap \gamma\widetilde{U}_\beta \neq \emptyset$. Así, para todo $z \in U_\alpha \cap U_\beta$ se tiene que $p_\alpha^{-1}(z) = \gamma(p_\beta^{-1}(z))$. Nótese que este γ es el mismo para todo $z \in U_\alpha \cap U_\beta$ pues $p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ es una unión disjunta de abiertos relacionados por un único elemento de $\operatorname{Aut}(p)$. Y como

$$f_\alpha(z) = (f \circ p_\alpha^{-1})(z) = f(p_\alpha^{-1}(z))$$

y análogamente $f_\beta(z) = f(p_\beta^{-1}(z))$, llegamos a que

$$f_\alpha(z) = (f \circ p_\alpha^{-1})(z) = f(p_\alpha^{-1}(z)) = f(\gamma p_\beta^{-1}(z)) = h(\gamma) \cdot f(p_\beta^{-1}(z)),$$

luego $f_\alpha = \lambda(h(\gamma)) \circ f_\beta$. □

Nota 6.14. La acción de $G_\sharp$ sobre N es efectiva, con isotropía $K_\sharp$. Por tanto $N \cong G_\sharp/K_\sharp$ y en la definición de foliación transversalmente homogénea puede suponerse que la acción del grupo es efectiva, como hace Blumenthal. Sin embargo esto complica algunas construcciones.

Como aplicación directa del Teorema de Estructura, necesitaremos para nuestros cálculos posteriores el siguiente lema:

Lema 6.15. *Existe un cociclo $\{f_\alpha : U_\alpha \to N\}_{\alpha \in A}$ que define $\mathcal{F}$ para el que se cumple:*

1. *Cada función de transición $\lambda(g_{\alpha\beta}) : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es la restricción de la traslación en N por un elemento de Γ.*

2. *Recíprocamente, dado $\gamma \in \Gamma$ y para todo $p \in f(\widetilde{M})$, existen elementos del cociclo $f_\alpha : U_\alpha \to N$ y $f_\beta : U_\beta \to N$, con $p \in f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, tales que $f_\alpha = \lambda(\gamma) \circ f_\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta$.*

Demostración. Siguiendo el Teorema de Estructura, a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & N \\ M & \end{tikzcd}$$

podemos definir un cociclo $\{f_\alpha : U_\alpha \to N\}_{\alpha\in A}$ haciendo $f_\alpha = f \circ p_\alpha^{-1}$, con $p_\alpha = p_{|\widetilde{U}_\alpha} : \widetilde{U}_\alpha \cong U_\alpha$ difeomorfismo sobre un abierto de trivialidad de la cubierta p. Dadas entonces $f_\alpha : U_\alpha \to N$ y $f_\beta : U_\beta \to N$ submersiones del cociclo con $p \in f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, ya comprobamos en la demostración del recíproco de Teorema de Estructura que existe $\gamma \in \operatorname{Aut} p$ tal que $f_\beta = \lambda(\gamma) \circ f_\alpha$ en $U_\alpha \cap U_\beta$.

Recíprocamente, partiendo de $p \in f(\widetilde{M})$, tomamos un elemento cualquiera $\gamma \in \Gamma$. Denotaremos $p' = \lambda(\gamma)(p) \in N$. Así, si escogemos un elemento $\tilde{x} \in f^{-1}(p)$ tendremos que $f(h^{-1}(\gamma)\tilde{x}) = \lambda(\gamma)(f(\tilde{x})) = p'$, con lo que $p' \in f(\widetilde{M})$. Ahora, llamando $x = p(\tilde{x})$, podemos tomar $U \subset M$ entorno de trivialidad de x tal que su imagen recíproca contendrá dos abiertos disjuntos $\widetilde{U}_\alpha$ y $\widetilde{U}_\beta$ difeomorfos a U tales que $\tilde{x} \in \widetilde{U}_\alpha$ y $h^{-1}(\gamma)\tilde{x} \in \widetilde{U}_\beta$, de forma que $\widetilde{U}_\beta = h^{-1}(\gamma)\widetilde{U}_\alpha$. Así, tomando $p_\alpha : \widetilde{U}_\alpha \cong U$ y $p_\beta : \widetilde{U}_\beta \cong U$ tendremos dos submersiones del cociclo $f_\alpha = f \circ p_\alpha^{-1}$ y $f_\beta = f \circ p_\beta^{-1}$ tales que se cumple que $f_\alpha = \lambda(\gamma) \circ f_\beta$. Nótese que p y p' coinciden si $\gamma \in iso(p)$, pero el razonamiento también soporta esa posibilidad. □

6.3. Foliaciones transversalmente homogéneas Riemannianas

Consideremos ahora $\mathcal{F}$ una N-foliación transversalmente homogénea sobre una variedad M, con N conexo. El Teorema de Estructura nos permite contar con el diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \\ M & \end{tikzcd}$$

donde $f\colon \widetilde{M} \to N$ es la submersión desarrollo y $\widetilde{\mathcal{F}} = p^{-1}(\mathcal{F})$ es la foliación en $\widetilde{M}$ definida por las componentes conexas de las fibras de f.

Si se puede dotar a M de una métrica casi-fibrada para $\mathcal{F}$ diremos que $\mathcal{F}$ es una foliación transversalmente homogénea Riemanniana, o, más concisamente, una N-foliación Riemanniana.

Aunque para cada métrica en N obtengamos una métrica casi-fibrada en M, no necesariamente toda métrica casi-fibrada en M se corresponde con una métrica en N. Eso solamente estará garantizado si las fibras de ϕ son conexas.

Proposición 6.16. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación definida por una submersión de fibras conexas $f\colon \widetilde{M} \to N$. Para cada métrica en $\widetilde{M}$ casi-fibrada para $\mathcal{F}$ existe una métrica en $f(\widetilde{M})$ para la que f es una submersión Riemanniana.*

Demostración. Denotaremos por $\tilde{g}$ la métrica casi fibrada para $\mathcal{F}$. Para definir una métrica en $f(\widetilde{M})$ partiremos de un punto $p \in f(M)$ y escogeremos $x \in M$ de forma que $f(x) = p$. Dado $U \subset M$ un abierto distinguido simple tal que $x \in U$ consideramos la submersión $f_{|U}\colon U \to f(U) \subset N$. Vamos a definir una métrica en $f(U)$. Dados dos campos de vectores $\overline{X}, \overline{Y}$ en $f(U)$, existirán dos únicos campos X e Y transversos en U tales que se proyectan por $f_{|U}$ en $\overline{X}$ e $\overline{Y}$, respectivamente, de forma que

$$f_{*y}X_y = \overline{X}_{f(y)} \text{ para todo } y \in U, \text{ y} \tag{6.3.1}$$

$$f_{*z}Y_z = \overline{Y}_{f(z)} \text{ para todo } z \in U. \tag{6.3.2}$$

Así, podemos definir una métrica en $f(U)$ haciendo

$$g(\overline{X}, \overline{Y})_p = \tilde{g}(X, Y)_x,$$

que estará bien definida en $f(U)$ precisamente porque $\tilde{g}$ es casi-fibrada y, por lo tanto, $\tilde{g}(X, Y)$ es constante en las fibras de f. Haciendo esto para cada elemento de $f(M)$ habremos definido una métrica g en $f(M)$.

Comprobar que la métrica g en $f(M)$ hará que f sea una submersión Riemanniana es trivial a partir de las ecuaciones (6.3.1) y (6.3.2). □

Proposición 6.17. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación Riemanniana sobre una variedad M y sea $p\colon \widetilde{M} \to M$ una cubierta, siendo $\widetilde{\mathcal{F}} = p^{-1}(\mathcal{F})$ la foliación levantada. Entonces $\mathcal{F}$ es Riemanniana si y solo si $\widetilde{\mathcal{F}}$ es Riemanniana y existe una métrica en $\widetilde{M}$ casi-fibrada para $\widetilde{\mathcal{F}}$ tal que* $\operatorname{Aut} p$ *actúa por isometrías.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que la métrica $\tilde{g}$ es casi-fibrada para $\mathcal{F}$ y que $\operatorname{Aut} p$ actúa por isometrías en $\widetilde{M}$. Deberemos comprobar que para cualquier abierto U de M se tiene que, dados X e Y campos de vectores transversos, la función $g(X, Y)$ es básica en U, donde g es la métrica que hace que p sea Riemanniana. Bastará comprobarlo suponiendo que U es un abierto distinguido para $\mathcal{F}$ y de trivialidad para p. Así, como p es localmente un difeomorfismo, podemos tomar un abierto $\widetilde{U}$, de coordenadas $(\tilde{x}^1, \cdots, \tilde{x}^{m-q}, \tilde{y}^1, \cdots \tilde{y}^q)$, que se proyectará por p al abierto U, que escribiremos en coordenadas como $(x^1, \cdots, x^{m-q}, y^1, \cdots, y^q)$, donde los $\tilde{y}^i$ y los y^i corresponderán a la parte transversa a $\widetilde{\mathcal{F}}$ y a $\mathcal{F}$, respectivamente. Recordemos que en la Proposición 6.16 demostramos que la definición de la métrica g no depende de la elección de $\widetilde{U}$. De esta forma, es inmediato que cualquier campo de vectores $\widetilde{X}$ transverso en $\widetilde{U}$ se proyecta por p a un campo de vectores X transverso en U.

Así, dados X e Y campos de vectores transversos en U tendremos que, para todo $x \in U$,

$$g(X, Y)_x = g(p_{*\tilde{x}}\widetilde{X}_{\tilde{x}}, p_{*\tilde{x}}\widetilde{Y}_{\tilde{x}}) = \tilde{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})_{\tilde{x}},$$

con $\tilde{x} \in \widetilde{U}$ tal que $p(\tilde{x}) = x$. Y como las hojas de $\widetilde{\mathcal{F}}$ se proyectan en hojas de $\mathcal{F}$ es evidente que $g(X, Y)$ es básica en U.

Recíprocamente, utilizando también abiertos distinguidos, es inmediato comprobar que la métrica levantada de una métrica en M casi-fibrada para $\mathcal{F}$ es casi-fibrada para $\widetilde{\mathcal{F}}$. □

Proposición 6.18. *Si existe en N una métrica tal que Γ, el grupo de holonomía de $\mathcal{F}$, actúa por isometrías en la imagen de f entonces $\mathcal{F}$ es Riemanniana y la submersión f será Riemanniana si en N se considera la métrica invariante por Γ y en $\widetilde{M}$ la métrica correspondiente a una métrica en M casi-fibrada para $\mathcal{F}$.*

Demostración. Por el Lema 6.15 sabemos que existe un cociclo definiendo $\mathcal{F}$ tal que las funciones de transición son traslaciones en N por elementos de Γ, lo que implica que $\mathcal{F}$ es Riemanniana.

Sin embargo, para demostrar la segunda parte de la Proposición, daremos una prueba alternativa, demostrando que f será Riemanniana para una métrica en $\widetilde{M}$ casi-fibrada para $\widetilde{\mathcal{F}}$ tal que $\operatorname{Aut} p$ actuará en $\widetilde{M}$ por isometrías para esa métrica, que por la Proposición 6.17 baja a una métrica en M casi fibrada para $\mathcal{F}$. Que la submersión desarrollo f sea Riemanniana significa que para todo $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ se tiene que $f_{*\tilde{x}} \colon \widetilde{Q}_{\tilde{x}} \to T_{f(\tilde{x})}N$ es una isometría. Como $f \circ \gamma = \lambda(h(\gamma)) \circ f$ para todo $\gamma \in \operatorname{Aut} p$ tendremos que

$$f_{*\gamma(\tilde{x})} \circ \gamma_{*\tilde{x}} = (f \circ \gamma)_{*\tilde{x}} = (\lambda(h(\gamma)) \circ f)_{*\tilde{x}} = \lambda(h(\gamma))_{*f(\tilde{x})} \circ f_{*\tilde{x}}. \tag{6.3.3}$$

Así, si en N se considera la métrica para la que las traslaciones por elementos de Γ son isometrías, es inmediato que, para la métrica en $\widetilde{M}$ que hace que f sea Riemanniana las traslaciones por elementos de $\operatorname{Aut} p$ deben ser isometrías. □

El recíproco de la Proposición 6.18 solamente estará garantizado si la submersión desarrollo es de fibras conexas. En ese caso, tendremos el siguiente resultado:

Teorema 6.19. *Sea $\mathcal{F}$ una N-foliación transversalmente homogénea sobre una variedad M, con N conexo, tal que las fibras de la submersión desarrollo $f\colon \widetilde{M} \to N$ son conexas. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La foliación $\mathcal{F}$ es Riemanniana.*
2. *Existe en $f(\widetilde{M})$ una métrica para la que Γ, el grupo de holonomía de $\mathcal{F}$, actúa por isometrías.*
3. *La submersión desarrollo es Riemanniana para una métrica en N invariante por Γ y una métrica en $\widetilde{M}$ invariante por los automorfismos de la cubierta y casi-fibrada para $\widetilde{\mathcal{F}}$.*

Demostración. Que 2) implica que $\mathcal{F}$ es Riemanniana lo hemos demostrado en la Proposición 6.18. Que 1) implica 2) es inmediato a partir de la Proposición 6.16 y de la ecuación (6.3.3). La equivalencia entre 2) y 3) es inmediata a partir de la Proposición 6.18 $\square$

Capítulo 7
Foliaciones de Lie

Un caso particular de foliaciones transversalmente homogéneas aparece cuando $K = \{e\}$. En este caso, las submersiones que definen la foliación estarán definidas sobre un grupo de Lie, en lugar de sobre un espacio homogéneo. Diremos entonces que $\mathcal{F}$ es una *G-foliación de Lie*.

Nótese que en ese caso la acción es siempre efectiva, y que se puede levantar la submersión desarrollo a la cubierta universal de G, con lo que podemos considerar el grupo de Lie simplemente conexo.

Nota 7.1. En este caso las traslaciones por la izquierda son isometrías para una métrica invariante, y la foliación es Riemanniana. En el caso general de las foliaciones transversalmente homogéneas no siempre existe una métrica G-invariante en el espacio homogéneo $N \cong G/K$.

Hemos visto que el carácter Riemanniano de la foliación implica que ésta puede definirse mediante una aplicación desarrollo que es una submersión Riemanniana. Por tanto, si además la variedad M es completa, lo que permite dotar a $\widetilde{M}$ de una métrica completa, sabemos, siguiendo los resultados de Hermann en [22], que la submersión desarrollo es un fibrado localmente trivial, de fibras conexas si el grupo de Lie G es simplemente conexo.

Ejemplo 7.2. Si la variedad no es completa, aunque la submersión desarrollo sea Riemanniana, no será necesariamente un fibrado localmente trivial. Como ejemplo basta coger la submersión $F\colon \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = x$, que tomando en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ las métricas usuales será una submersión Riemanniana, pero no será un fibrado pues para ello, al ser $\mathbb{R}$ simplemente conexo, la fibra tendría que ser conexa en todos los puntos y $F^{-1}(0)$ está formada por dos semirrectas disjuntas.

7.1. Definiciones

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo de dimensión n.

Definición 7.3. Una foliación de Lie $\mathcal{F}$ sobre M es una foliación definida por una familia de submersiones $f_\alpha\colon U_\alpha \to G$, satisfaciendo:

1. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es un recubrimiento abierto de M;

2. si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces $f_\alpha = \lambda_{\alpha\beta} \circ f_\beta$, donde $\lambda_{\alpha\beta}\colon f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, con $\lambda_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}x$, es la restricción de una traslación por la izquierda en G.

Definición 7.4. De manera equivalente, una foliación de Lie sobre M está definida por el núcleo de una 1-forma α con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ (álgebra asociada al grupo de Lie G) y que cumple:

1. $\alpha_x \colon T_xM \to \mathcal{G}$ es sobreyectiva, para todo $x \in M$, es decir la forma es no singular.
2. α verifica la condición de Maurer-Cartan, es decir, $\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$. Esto significa que, si las componentes de la forma con relación a una base de $\mathfrak{g}$ son $\alpha, \ldots, \alpha_q$, entonces $d\alpha_k = -\sum_{i<j} c_{ij}^k \alpha_i \wedge \alpha_j$, donde c_{ij}^k son las constantes de estructura respecto de esa base.

Daremos ahora una tercera definición, equivalente a las anteriores cuando la variedad M es compacta y el grupo de Lie es simplemente conexo:

Definición 7.5. Sea $\mathcal{F}$ una foliación sobre una variedad compacta M, $p \colon \widehat{M} \to M$ la cubierta universal de M y G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo. Se dice que $\mathcal{F}$ es una G-foliación de Lie si:

1. Existe un fibrado localmente trivial $D \colon \widehat{M} \to G$ y un morfismo de grupos $h \colon \pi_1(M) \to G$ tal que $D(\gamma\hat{x}) = h(\gamma) \cdot D(\hat{x})$ para todo $\gamma \in \pi_1(M)$, $\hat{x} \in \widehat{M}$.
2. La foliación $\widehat{\mathcal{F}} = p^*\mathcal{F}$ es la dada por las fibras de D.

Por último, adaptando el Teorema de Estructura (Teorema 6.3) y su recíproco (Proposición 6.13) al caso en que $K = \{e\}$, podremos definir las foliaciones de Lie como un caso particular de las foliaciones transversalmente homogéneas:

Definición 7.6. Sea $\mathcal{F}$ una foliación sobre una variedad compacta M. Diremos que $\mathcal{F}$ es una G-foliación de Lie, con G conexo pero no necesariamente simplemente conexo, si tiene estructura de G-foliación transversalmente homogénea. Es decir, si existe una cubierta regular $p \colon \widetilde{M} \to M$, un isomorfismo $h \colon \operatorname{Aut}(p) \cong \Gamma \subset G$ y una submersión h-equivariante $f \colon \widetilde{M} \to G$ tal que la foliación $\widetilde{\mathcal{F}} = p^*\mathcal{F}$ está definida por las fibras de f.

Proposición 7.7. *Para una foliación $\mathcal{F}$ sobre una variedad compacta M las definiciones 7.5 y 7.6 son equivalentes.*

Demostración. Que la Definición 7.5 implica la Definición 7.6 es trivial. Veamos entonces el recíproco:

Supongamos que $\mathcal{F}$ es una G-foliación transversalmente homogénea sobre una variedad compacta M. Considerando $\pi \colon \widehat{G} \to G$ cubierta universal de G y $\tilde{p} \colon \widehat{M} \to \widetilde{M}$ cubierta universal de $\widetilde{M}$ tendremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \widehat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & \widehat{G} \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & G \\ M & \end{tikzcd}$$

Nótese que como G es un grupo de Lie y que $\widetilde{M}$, al ser M compacta, es completa para la métrica que hace a f submersión Riemanniana, sabemos que $f\colon \widetilde{M} \to G$ y $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{G}$ son fibrados localmente triviales (ver Proposición 16.5). Así, la sucesión exacta

$$\cdots \to \pi_2(\widehat{G}) \to \pi_1(F) \to \pi_1(\widehat{M}) \to \pi_1(\widehat{G}) \to \pi_0(F) \to \pi_0(\widehat{M}) \to \cdots$$

donde F denota la fibra de $\hat{f}$, nos permite deducir que $\pi_1(F) = \pi_0(F) = 0$, es decir, que las fibras son conexas y simplemente conexas.

Como $G = \widehat{G}/\pi_1(G)$, haciendo $K = \pi_1(G) = \pi^{-1}(\{e\})$ tendremos que $\operatorname{Core}(K) = K = \pi_1(G)$, pues $\widehat{G}/\operatorname{Core}(K) = G$, con lo que es fácil comprobar que $G_\sharp = (\widehat{G}/\operatorname{Core}(K_e) \times K/K_e)/i(\operatorname{Core}(K)) = \widehat{G}$. Así el desarrollo $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{G}$, que será invariante para un morfismo $h\colon \pi_1(M) \to \widehat{G}$, dotará a $\mathcal{F}$ de estructura de $\widehat{G}$-foliación acorde con la Definición 7.5. $\square$

7.2. Estructura

El siguiente teorema de estructura se debe a Fédida [14] y Molino [36]. La primera parte es un caso particular del teorema de estructura de Blumenthal (Teorema 6.3).

Teorema 7.8. *Sea $\mathcal{F}$ una G-foliación de Lie sobre M. Entonces existe una cubierta regular $p\colon \widetilde{M} \to M$, tal que:*

1. *la foliación $\widetilde{\mathcal{F}} = p^*\mathcal{F}$ viene dada por las fibras de una submersión sobreyectiva $D\colon \widetilde{M} \to G$;*

2. *el grupo $\operatorname{Aut}(p)$ de automorfismos de la cubierta es isomorfo a un subgrupo Γ de G. Denotaremos por $h\colon \pi_1(M) \to G$ el morfismo de grupos que es la composición $\pi_1(M) \to \pi_1(M)/\pi_1(\tilde{M}) \cong \operatorname{Aut}(p) \cong \Gamma \subset G$;*

3. *la submersión es equivariante, es decir, $D(\gamma\tilde{x}) = h(\gamma) \cdot D(\tilde{x})$ para todo $\gamma \in \pi_1(M)$, $\tilde{x} \in M$;*

4. *las adherencias de las hojas de $\mathcal{F}$ son las fibras de una fibración $\varphi\colon M \to W = \overline{\Gamma}\backslash G$, donde $\overline{\Gamma}$ es la adherencia de $\Gamma = \operatorname{im} h$;*

5. *la foliación inducida por $\mathcal{F}$ en cada una de las fibras de φ es una $\overline{\Gamma}_e$-foliación de Lie con hojas densas, donde $\overline{\Gamma}_e$ es la componente conexa del neutro de $\overline{\Gamma}$.*

Llamaremos aplicación desarrollo a D, aplicación de holonomía a h y grupo de holonomía de $\mathcal{F}$ a Γ.

Definición 7.9. Llamaremos *variedad básica* a la variedad $W = \overline{\Gamma}\backslash G$.

Corolario 7.10. *Las hojas de $\mathcal{F}$ son densas si y solamente si el grupo de holonomía Γ es denso en G.*

7.3. Foliación asociada

Cada foliación de Lie $\mathcal{F}$ de grupo G en una variedad M induce, para cualquier K subgrupo cerrado de G, una foliación transversalmente homogénea modelada por G/K. Si la aplicación desarrollo de $\mathcal{F}$ es $f\colon \widetilde{M} \to G$ y la holonomía es $h\colon \pi_1(M) \to G$, entonces la nueva foliación tendrá aplicación de desarrollo $\widetilde{M} \to G \to G/K$ y holonomía $\pi_1(M) \to G_\sharp = G/\operatorname{Core}_G(K)$. Denotaremos esta foliación asociada por $\mathcal{F}^K$. Nótese que la codimensión de $\mathcal{F}$ es $n = \dim G$, mientras que la de $\mathcal{F}^K$ es $n-k$, con $k = \dim K$.

Proposición 7.11. *Sea $\mathcal{F}^K$ la foliación G/K-transversalmente homogénea asociada a la G-foliación de Lie $\mathcal{F}$, definida sobre la variedad completa M. Entonces $\mathcal{F}$ induce en cada hoja de $\mathcal{F}^K$ una foliación de Lie de grupo K_e, cuyo grupo de holonomía será la intersección de un conjugado de K_e con Γ, el grupo de holonomía de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Sea $\widetilde{L} \subset \widetilde{M}$ una hoja de $\widetilde{\mathcal{F}}^K$ que se proyecta por p a una hoja L de $\mathcal{F}^K$. Como $\widetilde{L} = f^{-1}(gK_e)$, con $g \in G$, porque f es una fibración de fibras conexas (M es completa y G es simplemente conexo), podemos construir el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{L} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & gK_e \arrow[r, "\lambda(g^{-1})"] & K_e \\ L & & \end{tikzcd} \tag{7.3.1}$$

donde $\lambda(g^{-1})$ denota la traslación por la izquierda en G que a cada $x \in G$ le hace corresponder $g^{-1}x$.

Lema 7.12. *La aplicación $p_{|\widetilde{L}}\colon \widetilde{L} \to L$ es una cubierta regular cuyo grupo de automorfismos es isomorfo a $\Gamma \cap (gK_eg^{-1})$.*

Demostración. Demostraremos que el grupo $\Gamma \cap (gK_eg^{-1})$ actúa en $\widetilde{L}$ de forma libre y propiamente discontinua y que L es el espacio de órbitas de la acción.

Sea $\tilde{x} \in \widetilde{L} = f^{-1}(gK_e)$ y sea $\gamma \in \Gamma \cap (gK_eg^{-1})$. Tomando $\alpha \in \pi_1(M)$ tal que $h(\alpha) = \gamma$, con $h\colon \pi_1(M) \to G$ morfismo de holonomía de $\mathcal{F}$, tendremos que $\gamma\tilde{x} \in \widetilde{L}$, pues

$$f(\gamma\tilde{x}) = f(\alpha\tilde{x}) = h(\alpha)\cdot f(\tilde{x}) = \gamma \cdot f(\tilde{x}),$$

y como $f(\tilde{x}) \in gK_e$ y $\gamma \in gK_eg^{-1}$ tendremos que

$$f(\gamma\tilde{x}) = \gamma \cdot f(\tilde{x}) \in gK_e \Leftrightarrow \gamma\tilde{x} \in f^{-1}(gK_e) = \widetilde{L}.$$

Por tanto, la acción sobre $\widetilde{L}$ está bien definida y además es libre y propiamente discontinua por serlo la acción de $\pi_1(M)$ sobre $\widetilde{M}$. Por otra parte, es evidente que

$$p_{|\widetilde{L}}(\gamma\tilde{x}) = p(\gamma\tilde{x}) = p(\tilde{x}) \in L,$$

con lo que el espacio de órbitas de la acción es L. Así, $p_{|\widetilde{L}}\colon \widetilde{L} \to L$ es una cubierta. Además, será una cubierta regular por serlo p y teniendo en cuenta que

$$(p_{|\widetilde{L}})^{-1}(\tilde{x}) = (\bigcup_{\alpha\in\pi_1(M)} \alpha\tilde{x}) \cap \widetilde{L} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma\cap(gK_eg^{-1})} \gamma\tilde{x},$$

pues

$$\begin{aligned}\alpha\tilde{x} \in \widetilde{L} &\Leftrightarrow f(\alpha\tilde{x}) \in gK_e\\ &\Leftrightarrow h(\alpha)\cdot f(\tilde{x}) \in gK_e\\ &\Leftrightarrow h(\alpha) \in gK_eg^{-1},\end{aligned}$$

con lo que todos los elementos de la fibra estarán relacionados por un elemento de $\Gamma\cap(gK_eg^{-1})$. □

Así, el Diagrama (7.3.1) dota a L de una foliación de Lie de grupo K_e donde las fibras son las hojas de $\mathcal{F}$. La aplicación desarrollo será $f^K = (\lambda(g^{-1})\circ f)$ y la aplicación holonomía $h^K\colon \pi_1(L) \to K_e$ será de la forma $h^K(\gamma) = g^{-1}h(\gamma)g$, con $h\colon \pi_1(M) \to G$ aplicación holonomía de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^K$, estando bien definida pues, por el Lema 7.12, sabemos que si $\gamma \in \pi_1(L)$ entonces $h(\gamma) \in gK_eg^{-1}$, con lo que $h^K(\gamma) = g^{-1}h(\gamma)g \in K_e$. Así, f^K será h^K-equivariante, puesto que

$$f^K(\gamma\tilde{x}) = (\lambda(g^{-1})\circ f)(\gamma\tilde{x}) = g^{-1}f(\gamma\tilde{x}) = g^{-1}h(\gamma)f(\tilde{x}),$$

lo que, como $h(\gamma) = gh^K(\gamma)g^{-1}$, garantiza la equivarianza, pues

$$f^K(\gamma\tilde{x}) = g^{-1}gh^K(\gamma)g^{-1}f(\tilde{x}) = h^K(\gamma)f^K(\tilde{x}).$$

Dado $\gamma\in\pi_1(L)$ y dado $\tilde{x}\in\widetilde{L}$, se tiene que $\gamma\tilde{x}\in\widetilde{L}$, puesto que el levantamiento por p de cualquier lazo en L^K no puede cortar a ninguna otra hoja de $\widetilde{\mathcal{F}}^K$. Además, $\ker h^K = \mathrm{Ker}\ h_{|\pi_1(L)}$, con lo que $p_{|\widetilde{L}}\colon \widetilde{L}\to L$ es una cubierta regular (por serlo p) asociada al núcleo de h^K.

Trivialmente, el grupo de holonomía será $\mathrm{im}\ h^K \cong \Gamma\cap K_e$. □

Capítulo 8
El Fibrado de Blumenthal

Asociado a una foliación transversalmente homogénea, Blumenthal define en [2] un fibrado principal, que él usa para demostrar una caracterización con formas diferenciales. Daremos ahora una descripción detallada de ese fibrado, pues será de gran importancia en nuestro trabajo. Le llamaremos *fibrado de Blumenthal.*

8.1. El fibrado principal $\Gamma\backslash f^*G_\sharp \to M$

Sea $\mathcal{F}$ una N-foliación transversalmente homogénea, con $N = G/K$.

Para simplificar notaciones, haremos $G_\sharp = G/\operatorname{Core}(K)$ y $K_\sharp = K/\operatorname{Core}(K)$, de forma que la acción de $G_\sharp$ en $N = G_\sharp/K_\sharp$ es efectiva (Proposición 1.7). Como vimos en la Sección 1.4, podemos considerar que el grupo de Lie G es simplemente conexo.

Sea $\pi_\sharp\colon G_\sharp \to N$ la proyección canónica y sea

$$f^*G_\sharp = \{(\tilde{x}, g) \in \widetilde{M} \times G_\sharp \colon f(\tilde{x}) = \pi_\sharp(g)\}$$

el pull-back de $\pi_\sharp$ por la aplicación desarrollo f. Tenemos entonces un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} f^*G_\sharp \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\rho"'] & G_\sharp \arrow[d, "\pi_\sharp"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

donde ρ y $\bar{f}$ son las proyecciones de $f^*G_\sharp$ sobre $\widetilde{M}$ y sobre $G_\sharp$, respectivamente. Se cumple que $\pi_\sharp \circ \bar{f} = f \circ \rho$.

Proposición 8.1. *La acción de $K_\sharp$ por la derecha sobre $f^*G_\sharp$ definida por*

$$(\tilde{x}, g) \cdot k = (\tilde{x}, gk)$$

da a $\rho\colon f^*G_\sharp \to \widetilde{M}$ estructura de fibrado principal de grupo $K_\sharp$.

Demostración. Que la acción es libre es trivial. Veamos que la fibra es difeomorfa a $K_\sharp$. Dado $\tilde{x} \in \widetilde{M}$, se tiene que

$$\rho^{-1}(\tilde{x}) = \{(\tilde{x}, g) \in f^*G_\sharp \colon f(\tilde{x}) = \pi_\sharp(g),\ g \in G_\sharp\}.$$

Tomando $\varphi \in G_\sharp$ representante de la clase de $f(\tilde{x}) \in G_\sharp/K_\sharp$, tendremos que

$$\begin{aligned}(\tilde{x}, g) \in \rho^{-1}(\tilde{x}) &\Leftrightarrow [g] = [\varphi] \\ &\Leftrightarrow \exists k \in K \text{ tal que } g = \varphi k \\ &\Leftrightarrow g^{-1}\varphi \in K,\end{aligned}$$

con lo que tendremos un difeomorfismo $\rho^{-1}(\tilde{x}) \cong K$ que identifica $(\tilde{x}, g)$ con $g^{-1}\varphi$.

Hay que comprobar también que $f^*G_\sharp/K_\sharp \cong \widetilde{M}$. Para ello definiremos un difeomorfismo $\psi\colon f^*G_\sharp/K_\sharp \cong \widetilde{M}$ haciendo $\psi([(\tilde{x}, g)]) = \tilde{x}$, que estará bien definido porque la acción de K en $f^*G_\sharp$ solo afecta a la segunda componente. Veamos que es una biyección:

Será inyectiva pues, si consideramos $[(\tilde{x}, g)]$ y $[(\tilde{x}', g')]$ tales que $\psi([(\tilde{x}, g)]) = \psi([(\tilde{x}', g')])$ tendremos que $\tilde{x} = \tilde{x}'$ y que $\pi_\sharp(g) = \pi_\sharp(g')$, con lo que $g' = gk$ para algún $k \in K_\sharp$ y por tanto $[(\tilde{x}, g)] = [(\tilde{x}', g')]$.

Será sobreyectiva pues dado $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ es trivial que existe $g \in G_\sharp$ tal que $\pi_\sharp(g) = f(\tilde{x})$ y por tanto $\psi([(\tilde{x}, g)]) = \tilde{x}$.

Queda entonces probar que tanto ψ como su inversa son diferenciables. Que ψ es diferenciable es trivial, pues la composición $f^*G_\sharp \to f^*G_\sharp/K_\sharp \xrightarrow{\psi} \widetilde{M}$ es la proyección sobre la primera componente, y por tanto diferenciable. Para ver que la inversa es diferenciable tendremos en cuenta que $\dim f^*G_\sharp = m + k$, con $m = \dim \widetilde{M} = \dim M$ y $k = \dim K_\sharp$, y por tanto $\dim f^*G_\sharp/K_\sharp = \dim \widetilde{M}$. Considerando

$$T_{(\tilde{x},g)} f^*G_\sharp = \{(u, v) \in T_{\tilde{x}}\widetilde{M} \times T_g G\colon f_{*\tilde{x}}(u) = \pi_{*g}(v)\},$$

se tiene que $T_{(\tilde{x},g)} f^*G_\sharp \to T_{\tilde{x}}\widetilde{M}$ es una aplicación sobreyectiva cuyo núcleo es $T_{(\tilde{x},g)}\rho^{-1}(\tilde{x})$ y por tanto, como

$$T_{[(\tilde{x},g)]} f^*G_\sharp/K_\sharp = T_{(\tilde{x},g)} f^*G_\sharp / T_{(\tilde{x},g)}\rho^{-1}(\tilde{x}),$$

tendremos que

$$\psi_{*[(\tilde{x},g)]}\colon T_{[(\tilde{x},g)]} f^*G_\sharp/K_\sharp \to T_{\tilde{x}}\widetilde{M}$$

es una biyección, lo que, en virtud del Teorema de la función inversa, significa que ψ^{-1} es diferenciable. □

Proposición 8.2. *La acción de* $\operatorname{Aut} p \overset{h}{\cong} \Gamma$ *por la izquierda sobre* $f^*G_\sharp$ *definida por* $\gamma(\tilde{y}, g) = (\gamma\tilde{y}, h(\gamma)g)$ *hace que* ρ *sea equivariante.*

Demostración. La acción estará bien definida, puesto que $(\tilde{y}, g) \in f^*G_\sharp$ significa que $f(\tilde{y}) = \pi_\sharp(g)$, y entonces tendremos que

$$f(\gamma\tilde{y}) = h(\gamma) \cdot f(\tilde{y}) = h(\gamma) \cdot \pi_\sharp(g) = [h(\gamma)g] = \pi_\sharp(h(\gamma)g),$$

con lo que $(\gamma\tilde{y}, h(\gamma)g) \in f^*G_\sharp$. Además, cumple las condiciones para ser acción por la izquierda, pues

$$(\gamma\delta)(\tilde{y}, g) = (\gamma\delta\tilde{y}, h(\gamma\delta)g) = \gamma(\delta\tilde{y}, h(\delta)g)$$

para todo $\gamma, \delta \in \Gamma$ (la acción de $\operatorname{Aut} p \cong \Gamma$ sobre $\widetilde{M}$ es por la izquierda), y, trivialmente, $e \cdot (\tilde{y}, g) = (\tilde{y}, g)$.

La acción hace que ρ sea equivariante, pues $\rho(\gamma\tilde{x}, h(\gamma)g) = \gamma\tilde{x} = \gamma\rho(\tilde{x}, g)$. □

Proposición 8.3. *La acción de Γ sobre $f^*G_\sharp$ es libre, propiamente discontinua y transitiva en las fibras. Por tanto la proyección $\tau\colon f^*G_\sharp \to \Gamma\backslash f^*G_\sharp$ en el espacio de órbitas es una cubierta regular con Γ como grupo de transformaciones.*

Demostración. Comprobemos que la acción es propiamente discontinua. Tomemos $(\tilde{x}_0, \varphi) \in f^*G_\sharp$. Como la acción de $\operatorname{Aut} p \cong \Gamma$ sobre $\widetilde{M}$ es propiamente discontinua sabemos que existe $U \subset \widetilde{M}$ entorno abierto de $\tilde{x}_0$ tal que $\gamma U \cap U = \emptyset$ para todo $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq e$. Para este U podremos considerar $\rho^{-1}(U)$, entorno abierto de $(\tilde{x}_0, \varphi)$. Si se cumpliera que $\gamma\rho^{-1}(U) \cap \rho^{-1}(U) \neq \emptyset$ para algún $\gamma \in \Gamma$ entonces existiría $(\tilde{y}, \psi) \in \rho^{-1}(U)$ tal que para algún $(\tilde{y}', \psi') \in \rho^{-1}(U)$ se tendría que $(\gamma\tilde{y}', \gamma\psi') = (\tilde{y}, \psi)$. Pero eso significaría que existirían $\tilde{y}$ e $\tilde{y}'$ en U tales que $\tilde{y} = \gamma\tilde{y}'$, con lo que $\gamma = e$.

Por otro lado, la acción de Γ sobre $f^*G_\sharp$ es libre pues lo son las acciones sobre $\widetilde{M}$ y sobre $G_\sharp$; por tanto, si $\gamma(\tilde{x}, g) = (\tilde{x}, g)$, entonces $\gamma = e$.

Tenemos por tanto que τ es una cubierta regular con Γ como grupo de transformaciones. □

Así pues, la aplicación $\rho\colon f^*G_\sharp \to \widetilde{M}$ induce una aplicación sobreyectiva $\bar{\rho}\colon \Gamma\backslash f^*G_\sharp \to M$ tal que $\bar{\rho} \circ \tau = p \circ \rho$.

Lema 8.4. *La acción de $K_\sharp$ por la derecha sobre $\Gamma\backslash f^*G_\sharp$ dada por*

$$[(\tilde{x}, g)] \cdot k = [(\tilde{x}, gk)]$$

da a $\bar{\rho}\colon \Gamma\backslash f^*G_\sharp \to M$ estructura de fibrado principal de grupo $K_\sharp$.

Demostración. La acción de $K_\sharp$ por la derecha sobre $f^*G_\sharp$ conmuta con la acción por la izquierda de Γ, de tal forma que $\gamma((\tilde{x}, g)k) = (\gamma(\tilde{x}, g))k$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y para todo $k \in K_\sharp$. Podemos entonces definir una acción libre de $K_\sharp$ por la derecha sobre $\Gamma\backslash f^*G_\sharp$ haciendo $[(\tilde{x}, g)] \cdot k = [(\tilde{x}, gk)]$, con $k \in K_\sharp$ y donde $[(\tilde{x}, g)]$ denota la clase del elemento $(\tilde{x}, g) \in f^*G_\sharp$ en $\Gamma\backslash f^*G_\sharp$.

Como $\bar{\rho}\circ\tau = p\circ\rho$ tendremos que $\bar{\rho}([\tilde{x}, g]) = p(\tilde{x})$, con $[\tilde{x}, g] \in \Gamma\backslash f^*G_\sharp$. Estará bien definida porque para cualquier otro representante $\gamma(\tilde{x}, g)$ se tiene que $p(\gamma\tilde{x}) = p(\tilde{x})$. Veamos que la fibra es difeomorfa a $K_\sharp$:

Dados $x \in M$ y $[(\tilde{x}, g)] \in \bar{\rho}^{-1}(x)$ fijaremos un elemento $\tilde{x}_0 \in \widetilde{M}$ tal que $p(\tilde{x}_0) = x$ y un $\varphi_0 \in G_\sharp$ tal que $f(\tilde{x}_0) = [\varphi_0]$, de forma que $[(\tilde{x}_0, \varphi_0)] \in \bar{\rho}^{-1}(x)$. Como también $p(\tilde{x}) = x$ se tiene que existe $\gamma \in \operatorname{Aut} p$ tal que $\tilde{x} = \gamma\tilde{x}_0$. Así, como $(\tilde{x}, g) \in f^*G_\sharp$ tendremos que

$$[g] = \pi_\sharp(g) = f(\tilde{x}) = f(\gamma\tilde{x}_0) = h(\gamma) \cdot f(\tilde{x}_0) = h(\gamma) \cdot [\varphi_0] = [h(\gamma)\varphi_0],$$

con lo que $g^{-1}h(\gamma)\varphi_0 \in K_\sharp$. Así, podemos definir un difeomorfismo $\xi\colon \bar{\rho}^{-1}(x) \to K_\sharp$ haciendo $\xi([\tilde{x}, g)]) = g^{-1}h(\gamma)\varphi_0 \in K_\sharp$.

Para ver que está bien definido, cogiendo $\mu \in \operatorname{Aut} p$, como $\mu\tilde{x} = \mu\gamma\tilde{x}_0$, tendremos que

$$\xi([\mu(\tilde{x}, g)]) = \xi([(\mu\tilde{x}, h(\mu)g)])$$

$$\begin{aligned}&= (h(\mu)g)^{-1}h(\mu\gamma)\varphi_0\\&= g^{-1}h(\mu)^{-1}h(\mu)h(\gamma)\varphi_0\\&= g^{-1}h(\gamma)\varphi_0.\end{aligned}$$

Veamos que ξ es inyectivo:

Tomando $[(\tilde{x}, g)]$ y $[(\tilde{x}', g')]$ en $\bar{\rho}^{-1}(x)$ tales que $\xi([(\tilde{x}, g)]) = \xi([(\tilde{x}', g')])$, fijado $[(\tilde{x}_0, \varphi_0)] \in \bar{\rho}^{-1}(x)$, tendremos que $\tilde{x} = \gamma\tilde{x}_0$ y $\tilde{x}' = \mu\tilde{x}_0$ y por tanto:

1. $\tilde{x}' = \mu\gamma^{-1}\tilde{x}$, y
2. $g^{-1}h(\gamma)\varphi_0 = (g')^{-1}h(\mu)\varphi_0 \Leftrightarrow g'g^{-1} = h(\mu)h(\gamma)^{-1} \Leftrightarrow g' = h(\mu\gamma^{-1})g$.

Así,

$$\begin{aligned}[(\tilde{x}', g')] &= [(\mu\gamma^{-1}\tilde{x}, h(\mu\gamma^{-1})g)\\&= [\mu\gamma^{-1}\cdot(\tilde{x}, g)]\\&= [(\tilde{x}, g)].\end{aligned}$$

Para ver que ξ es sobre nótese, en primer lugar, que $\xi([\tilde{x}_0, g)]) = g^{-1}\varphi_0$, pues en ese caso $\gamma = e$. Así, dado $k \in K_\sharp$, cogiendo $g = \varphi_0 k^{-1}$ tendremos que $\xi([\tilde{x}_0, g)]) = (\varphi_0 k^{-1})^{-1}\varphi_0 = k$.

Faltará entonces únicamente comprobar que el cociente de $\Gamma\backslash f^*G_\sharp$ por la acción de $K_\sharp$ es difeomorfo a M. Nos referiremos por $\overline{[(\tilde{x}, g)]}$ a la clase del elemento $[(\tilde{x}, g)] \in \Gamma\backslash f^*G_\sharp$ en el cociente por la acción de $K_\sharp$. El difeomorfismo vendrá dado por la aplicación $\psi\colon (\Gamma\backslash f^*G_\sharp)/K_\sharp \to M$ definida como $\psi(\overline{[(\tilde{x}, g)]}) = p(\tilde{x})$.

Que ψ está bien definida es trivial, pues $p(\tilde{x}) = p(\gamma\tilde{x})$ para todo $\gamma \in \operatorname{Aut} p$. Igualmente es inmediato que ψ es sobreyectiva, por serlo p, y porque dado $x \in M$, fijando $\tilde{x}_0 \in \widetilde{M}$ tal que $p(\tilde{x}_0) = x$, existe siempre, al ser $\pi_\sharp$ sobreyectiva, un elemento $\varphi_0 \in G_\sharp$ tal que $\pi_\sharp(\varphi_0) = f(\tilde{x}_0)$, con lo que $\psi(\overline{[(\tilde{x}_0, \varphi_0)]}) = x$. Veamos entonces que también es inyectiva:

Sean $\overline{[(\tilde{x}, g)]}, \overline{[(\tilde{x}', g')]} \in (\Gamma\backslash f^*G_\sharp)/K_\sharp$ tales que $p(\tilde{x}) = p(\tilde{x}')$. Tendremos, por tanto, que existe $\gamma \in \operatorname{Aut} p$ tal que $\tilde{x}' = \gamma\tilde{x}$, y, por otro lado, que

$$[g'] = \pi_\sharp(g') = f(\tilde{x}') = f(\gamma\tilde{x}) = h(\gamma)\cdot f(\tilde{x}) = h(\gamma)\cdot\pi_\sharp(g) = [h(\gamma)g],$$

con lo que existe $k \in K_\sharp$ tal que $g' = h(\gamma)gk$, y así:

$$\begin{aligned}\overline{[(\tilde{x}', g')]} &= \overline{[(\gamma\tilde{x}, g')]}\\&= \overline{[(\gamma\tilde{x}, h(\gamma)gk)]}\\&= \overline{[\gamma(\tilde{x}, gk)]}\\&= \overline{[(\tilde{x}, gk)]}\\&= \overline{[(\tilde{x}, g)\cdot k]}\\&= \overline{[(\tilde{x}, g)]}.\end{aligned}$$

Por último, la diferenciabilidad de ψ se deduce, con argumentos análogos a los utilizados en la demostración de la Proposición 8.1, a partir de la composición

$$f^*G_\sharp \to (\Gamma\backslash f^*G_\sharp)/K_\sharp \xrightarrow{\psi} M,$$

que será diferenciable por ser igual a la composición $p \circ \rho$. □

Definición 8.5. Llamaremos a $\bar{\rho}\colon \Gamma\backslash f^*G_\sharp \to M$ *fibrado de Blumenthal* de la foliación transversalmente homogénea.

De esta forma, tendremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & K_\sharp \arrow[d] & K_\sharp \arrow[d] \\
K_\sharp \arrow[d] & f^*G_\sharp \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dl, "\tau"'] & G_\sharp \arrow[d, "\pi_\sharp"'] \\
\Gamma\backslash f^*G_\sharp \arrow[d, "\bar{\rho}"'] & \widetilde{M} \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "p"'] & N \cong G_\sharp/K_\sharp \\
M & &
\end{tikzcd} \tag{8.1.1}$$

8.2. La foliación de Lie $\mathcal{F}^+$

Veamos que, si $K_\sharp$ es conexo, el espacio total del fibrado de Blumenthal estará dotado de una foliación de Lie.

Lema 8.6. *$\bar{f}\colon f^*G_\sharp \to G_\sharp$ es una submersión.*

Demostración. Partimos del diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^*G_\sharp \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\rho"'] & G_\sharp \arrow[d, "\pi_\sharp"] \\
\widetilde{M} \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

Hay que probar que para todo $(\tilde{x}, g) \in f^*G_\sharp$ la diferencial $\bar{f}_{*(\tilde{x},g)}\colon T_{(\tilde{x},g)}f^*G_\sharp \to T_gG_\sharp$ es sobreyectiva. Se tiene

$$T_{(\tilde{x},g)}f^*G_\sharp = \{(u,v)\colon u \in T_{\tilde{x}}\widetilde{M},\ v \in T_gG_\sharp,\ f_{*\tilde{x}}(u) = \pi_{\sharp*g}(v)\}.$$

Sea $v \in T_gG_\sharp$. Sabemos que existe $u \in T_{\tilde{x}}\widetilde{M}$ tal que $f_{*\tilde{x}}(u) = \pi_{\sharp*g}(v)$ porque f es una submersión. Así $\bar{f}_{*(\tilde{x},g)}(u,v) = v$. □

Lema 8.7. *Si $K_\sharp$ es conexo, entonces $\Gamma\backslash f^*G_\sharp$ es conexo.*

Demostración. Partiendo del fibrado de Blumenthal $\bar{\rho}\colon \Gamma\backslash f^*G_\sharp \to M$, tendremos una sucesión exacta (de conjuntos punteados, pues los tres últimos no son grupos)

$$\cdots \pi_1(\Gamma\backslash f^*G_\sharp) \to \pi_1(M) \to \pi_0(K_\sharp) \to \pi_0(\Gamma\backslash f^*G_\sharp) \to \pi_0(M),$$

de forma que el resultado es inmediato pues si $K_\sharp$ es conexo, como M es conexo, tendremos que $\pi_0(K_\sharp) = 0$ y que $\pi_0(M) = 0$.

Nótese que el recíproco solamente estaría garantizado si M fuera simplemente conexa. □

Teorema 8.8. *Si $K_\sharp$ es conexo, la submersión $\bar{f}$ induce una foliación de Lie $\mathcal{F}^+$ en $\Gamma\backslash f^*G_\sharp$, con holonomía Γ.*

Demostración. Del Diagrama 8.1.1 quedémonos únicamente con la aplicación $\bar{f}$ y la cubierta τ:

$$\begin{tikzcd} f^*G_\sharp \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\tau"'] & G_\sharp \\ \Gamma\backslash f^*G_\sharp & \end{tikzcd}$$

En la Proposición 8.3 vimos que τ es una cubierta regular con grupo de automorfismos Γ. Es decir, podemos definir un isomorfismo $j\colon \operatorname{Aut}\tau \cong \Gamma$, que, unido al ya conocido isomorfismo $h\colon \operatorname{Aut}p \cong \Gamma$ dado por $\mathcal{F}$ nos permitirá explicitar la acción de $\operatorname{Aut}\tau$ en $f^*G_\sharp$ de forma que, dado $\xi \in \operatorname{Aut}\tau$,

$$\xi \cdot (\tilde{x}, g) = j(\xi) \cdot (\tilde{x}, g) = (h^{-1}(j(\xi))x, j(\xi)g)$$

para $(\tilde{x}, g) \in f^*G_\sharp$. Así, tendremos que $\bar{f}$ es j-equivariante, puesto que

$$\bar{f}(\xi \cdot (\tilde{x}, g)) = \bar{f}(h^{-1}(j(\xi))\tilde{x}, j(\xi)g) = j(\xi)g = j(\xi)\bar{f}(\tilde{x}, g)$$

para todo $(\tilde{x}, g) \in f^*G_\sharp$ y para todo $\xi \in \operatorname{Aut}\tau$. □

Ejemplo 8.9. En el caso de una foliación de Lie, cuando $K = \{e\}$ se tiene que $\Gamma\backslash f^*G_\sharp \cong M$ y el fibrado de Blumenthal es un difeomorfismo.

8.3. Relación entre $\mathcal{F}^+$ y $\mathcal{F}$

En esta sección demostraremos que la foliación $\mathcal{F}^+$ es invariante por la acción de $K_\sharp$ y que se proyecta por $\bar{\rho}$ a $\mathcal{F}$.

Lema 8.10. *Las hojas de $\mathcal{F}^+$ y las hojas de $\mathcal{F}$ tienen la misma dimensión.*

Demostración. Recordemos que estamos llamando $m = \dim M$, $n = \dim G_\sharp$ y $k = \dim K_\sharp$. Resulta clarificador exponer el Diagrama 8.1.1 representando únicamente las dimensiones:

$$\begin{tikzcd}
 & k \arrow[d] & k \arrow[d] \\
k \arrow[d] & m+k \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[d, "\rho"'] & n \arrow[d, "\pi_\sharp"'] \\
m+k \arrow[d, "\bar{\rho}"'] & m \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "p"'] & n-k \\
m & &
\end{tikzcd}$$

Así, es evidente que las fibras de $f\colon \widetilde{M} \to N$ y las fibras de $\bar{f}\colon f^*G_\sharp \to G_\sharp$ tienen la misma dimensión: $m-n+k$. Por lo tanto, las hojas de $\widetilde{\mathcal{F}}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}^+$, las componentes conexas de estas fibras, también. Y el resultado ya está demostrado pues $\dim(\widetilde{\mathcal{F}}) = \dim(\mathcal{F})$ y $\dim(\widetilde{\mathcal{F}}^+) = \dim(\mathcal{F}^+)$. □

Proposición 8.11. *La foliación de Lie $\mathcal{F}^+$ es invariante por la acción de $K_\sharp$.*

Demostración. Demostraremos que la acción de $K_\sharp$ en $f^*G_\sharp$ lleva hojas de $\widetilde{\mathcal{F}}^+$ en hojas de $\widetilde{\mathcal{F}}^+$. Sea L una hoja de $\widetilde{\mathcal{F}}^+$. Cualquier elemento $(\tilde{x}, g) \in f^*G_\sharp$ que esté en L cumple que $\bar{f}(\tilde{x}, g) = g$ y que $\bar{f}((\tilde{x}, g)\cdot k) = \bar{f}(\tilde{x}, gk) = gk$. Entonces, si llamamos $L \cdot k$ a la imagen de L por la aplicación que a cada $(\tilde{x}, g)$ lo lleva en $(\tilde{x}, gk)$, tendremos que $L \cdot k \subset \bar{f}^{-1}(gk)$. Por continuidad, como L es conexa, su imagen $L \cdot k$ tiene que ser una componente conexa de $\bar{f}^{-1}(gk)$, es decir, una hoja de $\widetilde{\mathcal{F}}^+$. □

Proposición 8.12. *Supongamos $K_\sharp$ conexo. Sea $\bar{\rho}\colon \Gamma\backslash f^*G_\sharp \to M$ el fibrado de Blumenthal. La foliación de Lie $\mathcal{F}^+$ sobre $\Gamma\backslash f^*G_\sharp$ se proyecta en $\mathcal{F}$.*

Demostración. Veamos que la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}^+ = \bar{f}^*\mathrm{pt}$ en la cubierta $f^*G_\sharp$ se proyecta en la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\widetilde{M}$:

Si denotamos $\mathfrak{X}T\widetilde{\mathcal{F}}^+$ a los campos de vectores en $f^*G_\sharp$ tangentes a $\mathcal{F}^+$ tendremos que

$$X \in \mathfrak{X}T\widetilde{\mathcal{F}}^+ \Leftrightarrow \bar{f}_{*(\tilde{x},g)}(X_{(\tilde{x},g)}) = 0 \quad \forall\, (\tilde{x}, g) \in f^*G_\sharp,$$

con lo que $\pi_{*g}(\bar{f}_{*(\tilde{x},g)}(X_{(\tilde{x},g)})) = 0$ para todo $(\tilde{x}, g) \in f^*G_\sharp$. Pero

$$\begin{aligned}
\pi_{*g}(\bar{f}_{*(\tilde{x},g)}(X_{(\tilde{x},g)})) &= (\pi \circ \bar{f})_{*(\tilde{x},g)}(X_{(\tilde{x},g)}) \\
&= (f \circ \rho)_{*(\tilde{x},g)}(X_{(\tilde{x},g)}) \\
&= f_{*\tilde{x}}(\rho_{*(\tilde{x},g)}(X_{(\tilde{x},g)})) = 0
\end{aligned}$$

significa que $\rho_{*(\tilde{x},g)}(X_{(\tilde{x},g)}) \in \ker f_{*\tilde{x}} = T_{\tilde{x}}\widetilde{\mathcal{F}}$.

De esta forma tenemos que $\rho_{*\tilde{x}}(T_{(\tilde{x},g)}\widetilde{\mathcal{F}}^+) \subset T_{\tilde{x}}\widetilde{\mathcal{F}}$, lo que significa que la proyección por ρ de cualquier hoja $\widetilde{L}^+ \in \widetilde{\mathcal{F}}^+$ está dentro de una hoja de $\widetilde{\mathcal{F}}$. A partir de ahí, el resultado es inmediato por el Lema 8.10. □

Parte III

Cohomología en foliaciones

Capítulo 9
Cohomología básica de una foliación

En este Capítulo estudiamos la relación entre la cohomología básica de la foliación $\mathcal{F}$, la del espacio homogéneo N y las de los grupos de Lie G y K y sus álgebras de Lie. Estudiaremos la cohomología de una foliación de Lie en base a la cohomología del álgebra de Lie con coeficientes en un módulo, con un argumento que después nos permitirá generalizar a las foliaciones transversalmente homogéneas resultados clásicos para las foliaciones de Lie.

9.1. Cohomología básica

Sea M una variedad diferenciable dotada de una foliación $\mathcal{F}$.

Definición 9.1. Sea $\Omega^\bullet(M)$ el complejo de las formas diferenciales de M. Una forma α se dice básica para la foliación $\mathcal{F}$ si para cualquier campo de vectores X tangente a la foliación se tiene que $i_X\alpha = 0$ y $i_X \mathrm{d}\alpha = 0$.

Por ejemplo, una 0-forma básica es una función básica, esto es, una función constante a lo largo de las hojas de $\mathcal{F}$.

Si $\alpha \in \Omega^r(M)$ es básica para la foliación $\mathcal{F}$ entonces $\mathrm{d}\alpha \in \Omega^{r+1}(M)$ también es básica para $\mathcal{F}$, pues $i_X\mathrm{d}\alpha = 0$ y $i_X\mathrm{d}^2\alpha = 0$ ya que $\mathrm{d}^2 = 0$. Así, las formas básicas de $\mathcal{F}$ forman un subcomplejo de $\Omega^\bullet(M)$, que denotaremos por $\Omega^\bullet(M/\mathcal{F})$.

Definición 9.2. Llamaremos cohomología básica de la foliación $\mathcal{F}$ a la cohomología del complejo $(\Omega^\bullet(M/\mathcal{F}), \mathrm{d})$. Nos referiremos a ella como $\mathrm{H}^\bullet(M/\mathcal{F})$.

Lema 9.3 (pág. 330 de [49])**.** *Sean M y W dos variedades diferenciables. Sea $\pi\colon M \to W$ una submersión sobreyectiva. Entonces $\pi^*\colon \Omega(W) \to \Omega(M)$ es inyectiva.*

Lema 9.4. *Sea $\mathcal{F}$ la foliación simple en M determinada por una submersión sobreyectiva $\pi\colon M \to W$, con fibras conexas. Se tiene entonces que la cohomología básica de la foliación $\mathcal{F}$ es la cohomología de la variedad W.*

Demostración. Probaremos que la aplicación $\pi^*\colon \Omega(W) \to \Omega(M/\mathcal{F}) \subset \Omega(M)$, inducida por π, es un isomorfismo.

En primer lugar, deberemos comprobar que está bien definida. Sea $\omega \in \Omega(W)$. Los campos de vectores tangentes a $\mathcal{F}$ serán los campos X en M tales que $\pi_{*p}X_p = 0$ para todo $p \in M$. Entonces, si ω es una r-forma y X es un campo de vectores tangente a la foliación, tendremos que

$$i_X\pi^*\omega(X_1, \ldots, X_r)(p) = (\pi^*\omega)(X, X_1, \ldots, X_r)(p)$$

$$= \omega_{\pi(p)}(\pi_{*p}X_p, \pi_{*p}X_{1p}, \dots, \pi_{*p}X_{rp})$$
$$= \omega_{\pi(p)}(0, \pi_{*p}X_{1p}, \dots, \pi_{*p}X_{rp}) = 0.$$

Análogamente, como la diferencial exterior conmuta con π^*, tendremos entonces que $i_X \mathrm{d}\pi^* = 0$. Así, se tiene que $\pi^*\omega$ es básica para $\mathcal{F}$.

Como π es una submersión sobreyectiva, sabemos, por el Lema 9.3, que π^* es inyectiva. Veamos que también es sobreyectiva:

Dada $\alpha \in \Omega(M/\mathcal{F})$ definiremos en W una forma ω tal que $\pi^*\omega = \alpha$.

Dados $Y_1, \dots, Y_r$ campos de vectores en W, sabemos (ver Sección 2.2 de [36]) que existen $X_1, \dots, X_r$ campos de vectores foliados en M de forma que para todo $p \in M$ se tiene que $\pi_{*p}(X_{ip}) = Y_{i\pi(p)}$. Así, podemos definir

$$\omega(Y_1, \dots, Y_r)(x) = \omega_x(\pi_{*p}X_{1p}, \dots, \pi_{*p}X_{rp}) \colon = \alpha_p(X_{1p}, \dots, X_{rp}),$$

donde p es cualquier elemento de M tal que $\pi(p) = x$. Veamos que ω está bien definida, es decir, que no depende del elemento $p \in M$ ni de los campos foliados escogidos. Probaremos que $\alpha(X_1, \dots, X_r)$ es una función básica para $\mathcal{F}$.

Dado entonces $X_0 \in \mathcal{F}$ cualquiera, debemos probar que

$$X_0\alpha(X_1, \dots, X_r) = 0. \tag{9.1.1}$$

Por hipótesis, α es básica, lo que significa que $i_{X_0}\alpha = 0$ y que $i_{X_0}\mathrm{d}\alpha = 0$. Pero si desarrollamos esta última igualdad tendremos que

$$\begin{aligned} 0 = i_{X_0}\mathrm{d}\alpha(X_1, \dots, X_r) = \mathrm{d}\alpha(X_0 \dots, X_r) &= \sum_{0 \le i \le r} X_i\alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r). \end{aligned}$$

Pero como α es básica y los X_i, $i = 1, \dots, r$ son foliados, es decir, tales que para todo X tangente a $\mathcal{F}$ se tiene que $[X, X_i]$ es tangente, con $i = 1, \dots, r$, del segundo sumatorio se anularán todos los términos. Y del primero, teniendo en cuenta que $i_{X_0}\alpha = 0$, solamente quedará $X_0 \cdot \alpha(X_1, \dots .X_r)$.

Así, $\alpha(X_1, \dots, X_r)$ es una función constante a lo largo de las hojas de $\mathcal{F}$, que coinciden con las fibras conexas de π, con lo que $\alpha_p = \alpha_{p'}$ para todo $p, p' \in M$ tales que $\pi(p) = \pi(p')$.

Además, ω es diferenciable, pues $\alpha(X_1, \dots .X_r)$ es una función diferenciable.

Hemos probado que π^* es una biyección, y como además es un morfismo de complejos, pues

$$\mathrm{d}\pi^*\omega = \pi^*\mathrm{d}\omega,$$

entonces es un isomorfismo.

De esta forma tendremos inducido un isomorfismo en cohomología $\mathrm{H}(M/\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}(W)$. $\square$

Lema 9.5. *La cubierta p induce un isomorfismo $p^*\colon \Omega^\bullet(M/\mathcal{F}) \to \Omega^\bullet_{\text{inv}}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})$ entre las formas básicas de $(M, \mathcal{F})$ y las formas básicas para $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{F}})$ que son invariantes por la acción de* $\operatorname{Aut}(p)$.

Demostración. Comprobaremos en primer lugar que p^* está bien definida, es decir, que la imagen de una forma básica $\omega \in \Omega^\bullet(M/\mathcal{F})$ es una forma en $\widetilde{M}$ básica para $\widetilde{\mathcal{F}}$ e invariante por los automorfismos de la cubierta. Recordemos que dado $\widetilde{X}$ campo de vectores en $\widetilde{M}$ se tiene que $\widetilde{X}$ es tangente a $\widetilde{\mathcal{F}} = p^*\mathcal{F}$ si y solo si $p_{*\tilde{x}}\widetilde{X}_{\tilde{x}} \in T\mathcal{F}_{p(\tilde{x})}$ para todo $\tilde{x} \in \widetilde{M}$. Así, tenemos que $i_{\widetilde{X}}p^*w = 0$ y que $i_{\widetilde{X}}\mathrm{d}p^*w = i_{\widetilde{X}}p^*\mathrm{d}w = 0$, pues $i_{p_{*\tilde{x}}\widetilde{X}_{\tilde{x}}}w_{p(\tilde{x})} = i_{p_{*\tilde{x}}\widetilde{X}_{\tilde{x}}}\mathrm{d}w_{p(\tilde{x})} = 0$ para todo $\tilde{x} \in M$, con lo que p^*w es básica para la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Por otra parte, $p^*\omega$ es una forma en $\widetilde{M}$ que es invariante para la cubierta pues, para todo $\gamma \in \operatorname{Aut}(p)$ se tiene que

$$\gamma^*p^*w = (p \circ \gamma)^*w = p^*w.$$

Hemos comprobado que p^* está bien definida. Veamos ahora que es sobreyectiva. Demostraremos que toda forma básica para $\widetilde{\mathcal{F}}$ en $\widetilde{M}$ invariante para la cubierta es el levantamiento por p de una forma básica en M:

Dada $\tilde{\alpha} \in \Omega^r_{\text{inv}}(\widetilde{M})$ definimos $\alpha \in \Omega^r(M)$ de la siguiente forma:

$$\alpha_x(X_1, \ldots, X_r) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r),$$

donde $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ es tal que $p(\tilde{x}) = x$ y $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r$ son tales que $p_{*\tilde{x}}\widetilde{X}_{i\tilde{x}} = X_{ip(\tilde{x})}$ para todo $\tilde{x} \in \widetilde{M}$. Esta definición no depende del $\tilde{x}$ escogido, pues p es una cubierta regular y $\tilde{\alpha}$ es invariante por la acción de $\operatorname{Aut}(p)$.

Tenemos entonces que $p^*\alpha = \tilde{\alpha}$, pues $p_{*\tilde{x}}\colon T_{\tilde{x}}\widetilde{M} \to T_xM$ es un isomorfismo, y por tanto

$$(p^*\alpha)_{\tilde{x}}(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r) = \alpha_x(p_{*\tilde{x}}\widetilde{X}_{1\tilde{x}}, \ldots, p_{*\tilde{x}}X_{r\tilde{x}}) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r).$$

Además, α es básica para $\mathcal{F}$ pues para todo X campo de vectores en M se tiene que $i_X\alpha = i_{\widetilde{X}}\tilde{\alpha}$ y $i_X\mathrm{d}\alpha = i_{\widetilde{X}}\mathrm{d}\tilde{\alpha}$, con $\widetilde{X}$ campo de vectores en $\widetilde{M}$ tal que $X_{p(\tilde{x})} = p_{\tilde{x}*}\widetilde{X}_{\tilde{x}}$ para todo $\tilde{x} \in \widetilde{M}$. Así, si X es tangente a $\mathcal{F}$ entonces $i_X\alpha = i_X\mathrm{d}\alpha = 0$ pues $\widetilde{X}$ será tangente a $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Para finalizar, como p es una submersión sobre, sabemos, por el Lema 9.3, que p^* es inyectiva. $\square$

Teorema 9.6. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación N-transversalmente homogénea sobre M. Si la submersión desarrollo es sobreyectiva y sus fibras son conexas se tiene que la cohomología básica* $\mathrm{H}(M/\mathcal{F})$ *es isomorfa a* $\mathrm{H}_\Gamma(N)$, *la cohomología del complejo $\Omega^\bullet_\Gamma(N)$ de las formas en N que son invariantes por la acción por la izquierda de* $\Gamma \subset G_\sharp = G/\operatorname{Core}_G(K)$.

Demostración. Consideremos el diagrama de estructura de las foliaciones transversalmente homogéneas: y sea el isomorfismo $h\colon \operatorname{Aut}(p) \cong \Gamma \subset G_\sharp$.

Es suficiente probar que podemos definir un isomorfismo $\Psi\colon \Omega^r_\Gamma(N) \to \Omega^r_{\text{inv}}(\widetilde{M}/\widetilde{F})$, que será de la forma

$$\Psi(\alpha) = f^*\alpha \in \Omega^r_{\text{inv}}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}).$$

Veamos que Ψ está bien definida, es decir, que $f^*\alpha$ es una forma invariante y básica:

En primer lugar, $f^*\alpha$ es Γ-invariante, puesto que se tiene

$$\gamma^* f^* \alpha = (f \circ \gamma)^* \alpha = (L_\gamma \circ f)^* \alpha = f^* L_\gamma^* \alpha = f^* \alpha \ \forall \gamma \in \Gamma,$$

pues f es h-equivariante. Y, por el Teorema de estructura (6.3) y el Lema 9.4, sabemos que $f^*\alpha$ es básica para $\widetilde{\mathcal{F}}$ pues $\widetilde{\mathcal{F}} = f^* pt$.

Comprobemos ahora que Ψ es un isomorfismo. Veamos en primer lugar que es sobreyectiva:

Sea $w \in \Omega^r_{\text{inv}}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})$. Entonces w es una r-forma en $\widetilde{M}$ invariante por las transformaciones de la cubierta. Como por hipótesis f es una submersión de fibras conexas sabemos, por el Lema 9.4, que existe $\alpha \in \Omega^r(N)$ tal que $w = f^*\alpha$. Veamos que α es Γ-invariante:

Como w es invariante por los automorfismos de la cubierta, tenemos que

$$f^*\alpha = w = \gamma^* w = \gamma^* f^* \alpha = f^* L_\gamma^* \alpha.$$

Dados entonces $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_r$ campos de vectores en $\widetilde{M}$ y dado $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ tal que $f(\tilde{x}) = p \in N$, tenemos que

$$\begin{aligned}(L_\gamma^*\alpha)_p((f_*\widetilde{X}_1)_p, \ldots, (f_*\widetilde{X}_r)_p) &= (f^* L_\gamma^* \alpha)_{\tilde{x}}((\widetilde{X}_1)_{\tilde{x}}, \ldots, (\widetilde{X}_r)_{\tilde{x}}) \\ &= (f^*\alpha)_{\tilde{x}}((\widetilde{X}_1)_{\tilde{x}}, \ldots, (\widetilde{X}_r)_{\tilde{x}}) \\ &= \alpha_p((f_*\widetilde{X}_1)_p, \ldots, (f_*\widetilde{X}_r)_p).\end{aligned}$$

Y como f es una submersión, y por tanto f_* es sobreyectiva, tenemos que α y $L_\gamma^*\alpha$ coinciden para todo $p \in N$, y así llegamos a que $\alpha = L_\gamma^*\alpha$ para todo $\gamma \in \Gamma$; es decir, α es Γ-invariante.

Queda entonces únicamente por comprobar que Ψ es inyectiva:

Sea $\alpha \in \Omega^r_\Gamma(N)$ tal que $f^*\alpha = 0$. Es decir, existe $w \in \Omega^{r-1}_{\text{inv}}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})$ tal que $\mathrm{d}w = f^*\alpha$. Como acabamos de comprobar que Ψ es sobre, sabemos que existe $\alpha' \in \Omega^{r-1}_\Gamma$ tal que $w = f^*\alpha'$. Entonces

$$f^*\alpha = \mathrm{d}w = \mathrm{d}f^*\alpha' = f^*\mathrm{d}\alpha',$$

con lo que $\alpha = 0$. □

Proposición 9.7. *Si $\overline{\Gamma}$ es la adherencia de Γ en $G_\sharp$ se tiene que* $\mathrm{H}^*_\Gamma(N) = \mathrm{H}^*_{\overline{\Gamma}}(N)$.

Demostración. La acción de Γ por la izquierda sobre N induce una acción por la derecha de Γ sobre $\Omega(N)$ dada por $\omega \cdot \gamma = \lambda(\gamma)^*\omega$, donde en $\Omega(N)$ existe una topología tal que si $\{\gamma_n\} \to \gamma$ entonces $\{\lambda(\gamma_n)^*\omega\} \to \lambda(\gamma)^*\omega$ (ver Sección 9.2 de [32]).

Sea $\omega \in \Omega_\Gamma(N)$, es decir, $\lambda(\gamma)^*\omega = \omega$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y sea $\bar{\gamma} \in \overline{\Gamma}$. Se tiene que $\bar{\gamma} = \text{lím}_{n\to\infty} \gamma_n$, con $\gamma_n \in \Gamma$, de donde

$$\lambda(\bar{\gamma})^*\omega = \lim_{n\to\infty} \lambda(\gamma_n)^*\omega = \lim_{n\to\infty} \omega = \omega.$$

Se tiene entonces que $\Omega_\Gamma(N) \subset \Omega_{\overline{\Gamma}}(N)$. El otro contenido es trivial. □

Ejemplo 9.8. Para la foliación $\mathcal{F}_{G,K_e}$ inducida por el subgrupo K_e, se tiene que el morfismo de holonomía es trivial. Por tanto, la cohomología básica de la foliación es isomorfa a la cohomología de la variedad homogénea $N = G/K_e$.

Ejemplo 9.9. Si las fibras no son conexas el Lema 9.4 no es cierto. Como ejemplo, tomemos la proyección $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, que será una cubierta, y por tanto una submersión con fibras discretas. Así, π^*pt induce sobre $\mathbb{R}^2$ la foliación por puntos, cuya cohomología básica coincidirá con la de $\mathbb{R}^2$, diferente a la de $\mathbb{T}^2$, pues es bien sabido que $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2) = 0$, mientras que $\mathrm{H}^1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}$.

9.2. Cohomología de las foliaciones de Lie

Si α es básica para $\mathcal{F}$ se tiene que $\mathrm{d}\alpha$ también, con lo que el espacio de formas básicas es un subcomplejo de $\Omega^\bullet(M)$ que denotaremos por $\Omega^\bullet(M/\mathcal{F})$. La cohomología $\mathrm{H}^\bullet(M/\mathcal{F})$ de este complejo será la *cohomología básica de la foliación*.

Proposición 9.10. $\mathrm{H}^*(M/\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}^*_{\overline{\Gamma}}(G)$.

Demostración. Es un caso particular del Teorema 9.6 considerando el subgrupo $K = \{e\}$. En efecto, en este caso, las fibras de la aplicación desarrollo $D\colon \widetilde{M} \to G$ son conexas, pues, como M es compacta, sabemos que D es una fibración localmente trivial (Proposición 7.7), y por tanto, considerando la serie exacta

$$\cdots \to \pi_1(F) \to \pi_1(\widetilde{M}) \to \pi_1(G) \to \pi_0(F) \to \pi_0(\widetilde{M}) \to \pi_0(G) \to 0,$$

donde F representa la fibra de D, tendremos, al ser G simplemente conexo y $\widetilde{M}$ conexo, es decir, $\pi_1(G) = 0$ y $\pi_0(\widetilde{M}) = 0$, que $\pi_0(F) = 0$. $\square$

Teorema 9.11. *[12] Sea $\mathcal{F}$ una foliación Riemanniana sobre una variedad compacta M. Se tiene que la cohomología básica* $\mathrm{H}^\bullet(M/\mathcal{F})$ *es de dimensión finita. En particular, para la codimensión n se tiene que* $\mathrm{H}^n(M/\mathcal{F})$ *es isomorfa a* 0 *o a* $\mathbb{R}$.

Teorema 9.12. *[10] Sea $\mathcal{F}$ una foliación Riemanniana de codimensión n sobre una variedad compacta M. Se tiene que* $\mathrm{H}^\bullet(M/\mathcal{F})$ *verifica la dualidad de Poincaré si y solamente si $\mathcal{F}$ es unimodular.*

El siguiente resultado caracteriza completamente las foliaciones de Lie que son unimodulares.

Teorema 9.13. *Sea $\mathcal{F}$ una G-foliación de Lie sobre una variedad compacta M, con $\overline{\Gamma}$ la adherencia del grupo de holonomía. Entonces, $\mathcal{F}$ es unimodular si y solo si G y $\overline{\Gamma}$ son unimodulares.*

Es una consecuencia inmediata de estos otros tres Teoremas, de Llabrés y Reventós los dos primeros, y de El Kacimi Alaoui y Nicolau el tercero:

Teorema 9.14. *[28] Sea $\mathcal{F}$ una G-foliación de Lie unimodular sobre una variedad compacta M. Entonces G es unimodular.*

Teorema 9.15. *[28] Sea $\mathcal{F}$ una G-foliación de Lie unimodular. Entonces, para todo $r \leq n$, con $n = \dim G$, el morfismo $i_r^*\colon \mathrm{H}^r(G) \to \mathrm{H}^r(M/\mathcal{F})$, inducido por la inclusión canónica $i_r\colon \Omega_G^r(G) \to \Omega_\Gamma^r(G)$, es inyectivo.*

Teorema 9.16. *[11] Sea G un grupo de Lie conexo de dimensión n y sea K un subgrupo cerrado tal que $K\backslash G$ es compacto. Entonces $\mathrm{H}_K^n(G) \neq 0$ si y solamente si los grupos de Lie G y K son unimodulares.*

En las secciones siguientes veremos que la cohomología invariante puede expresarse en términos de las álgebras de Lie.

9.3. Cohomología con coeficientes

Sea G un grupo de Lie conexo de dimensión $n = \dim G$ y sea H un subgrupo cerrado. Nos interesará el caso en que $H = \overline{\Gamma}$, la adherencia del grupo de holonomía.

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Veamos cómo asociar a cada campo invariante en G un campo invariante en $H\backslash G$ a partir de la proyección canónica $\pi\colon G \to H\backslash G$. Para $X \in \mathfrak{g}$ campo de vectores en G invariante por la izquierda, definimos el campo $\widetilde{X}$ en $H\backslash G$ como $\widetilde{X}_{[g]} = \pi_{*g}(X_g)$. Está bien definido, pues si consideramos hg otro representante de la clase $[g]$ en $H\backslash G$, como $\pi \circ L_h = \pi$ para todo $h \in H$ y X es invariante por la izquierda tendremos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_{[hg]} &= \pi_{*hg} X_{hg} \\
&= \pi_{*L_h(g)}((L_h)_{*g} X_g) \\
&= (\pi \circ L_h)_{*g} X_g \\
&= \pi_{*g} X_g \\
&= \widetilde{X}_{[g]}.
\end{aligned}$$

Definición 9.17. Llamaremos *campos fundamentales* a los campos $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(H\backslash G)$ definidos de esta forma. Al conjunto de todos los campos fundamentales le llamaremos $\mathcal{X}^*(H\backslash G)$.

El conjunto $\mathcal{X}^*(H\backslash G)$ es una subálgebra de $\mathcal{X}(H\backslash G)$ pues, al estar X y $\widetilde{X}$ π-relacionados, se tiene que $\widetilde{[X, Y]} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Sea $\mathcal{C}^\infty(W)$ el espacio de funciones reales en el espacio homogéneo $W = H\backslash G$, dotado de la estructura de $\mathfrak{g}$-módulo dada por $X \cdot f = \widetilde{X} f$.

Lema 9.18. *Se tiene que $(\widetilde{X} f) \circ \pi = X(f \circ \pi)$.*

Demostración.

$$((\widetilde{X} f) \circ \pi)(g) = (\widetilde{X} f)([g])$$

$$
\begin{aligned}
&= f_{*[g]}(\widetilde{X}_{[g]}) \\
&= f_{*[g]}(\pi_{*g} X_g) \\
&= (f \circ \pi)_{*g} X_g \\
&= X(f \circ \pi)(g)
\end{aligned}
\qquad \square
$$

Sea $(\Lambda(\mathfrak{g}; \mathcal{C}^\infty(W)), \delta)$ el complejo de las aplicaciones multilineales alternadas del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con valores en $\mathcal{C}^\infty(W)$, dotado de la diferencial

$$
\begin{aligned}
\delta\omega^\sharp(X_0, \dots, X_r) = &\sum_i (-1)^i X_i \cdot \omega^\sharp(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_r) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega^\sharp([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \cdots, X_r).
\end{aligned}
$$

El siguiente Teorema es un caso particular de un resultado de Masa en [34].

Sea $\Omega_H(G)$ el complejo de formas diferenciales en G invariantes por la acción de H por la izquierda.

Teorema 9.19. *El complejo* $(\Omega_H(G), \mathrm{d})$ *es isomorfo al complejo* $(\Lambda(\mathfrak{g}; \mathcal{C}^\infty(W)), \delta)$. *Por tanto, en cohomología tenemos* $\mathrm{H}_H(G) \cong \mathrm{H}(\mathfrak{g}; C^\infty(W))$*, donde* $W = H\backslash G$.

Demostración. En primer lugar, consideramos el morfismo

$$
\begin{array}{ccc}
\Omega^r_H(G) & \xrightarrow{\sharp} & \Lambda^r(\mathfrak{g}; \mathcal{C}^\infty(W)) \\
\omega & \longmapsto & \omega^\sharp
\end{array}
$$

donde $\omega^\sharp \colon \mathfrak{g} \times \overset{r}{\cdots} \times \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(W)$ es la forma r-lineal alternada que para $X_1, \cdots, X_r$ campos de vectores invariantes por la izquierda en G está dada por

$$
\omega^\sharp(X_1, \cdots, X_r)([g]) = (L_g^*\omega)(X_1, \cdots, X_r)(e).
$$

Está bien definida como función en $\mathcal{C}^\infty(H\backslash G)$ pues ω es H-invariante, y si escogemos hg otro representante de la clase de g en $H\backslash G$ tendremos que $L_{hg}^*\omega = L_g^* L_h^* \omega = L_g^*\omega$.

Recíprocamente, definimos

$$
\begin{array}{ccc}
\Lambda^r(\mathfrak{g}; \mathcal{C}^\infty(W)) & \xrightarrow{\flat} & \Omega^r_H(G) \\
\psi & \longmapsto & \psi^\flat
\end{array}
$$

donde para definir $\psi^\flat$ bastará determinar su valor para $X_1, \cdots, X_r$ campos de vectores invariantes por la izquierda en G. Definimos, por tanto,

$$
\psi^\flat(X_1, \cdots, X_r) = \psi(X_1, \cdots, X_r) \circ \pi \in C^\infty(G),
$$

es decir, que para $g \in G$ tenemos

$$
\psi^\flat_g((X_1)_g, \cdots, (X_r)_g) = \psi(X_1, \cdots, X_r)([g]).
$$

De esta manera tenemos que $\psi^\flat$ es H-invariante, pues si $h \in H$,

$$\begin{aligned}(L_h^*\psi^\flat)(X_1,\cdots,X_r)(g) &= \psi^\flat_{hg}((L_{h*})_g(X_1)_g,\cdots,(L_{h*})_g(X_r))\\ &= \psi^\flat_{hg}((X_1)_{hg},\cdots,(X_r)_{hg})\\ &= \psi(X_1,\cdots,X_r)([hg])\\ &= (\psi(X_1,\cdots,X_r)\circ\pi)(g)\\ &= (\psi^\flat)(X_1,\cdots,X_r)(g).\end{aligned}$$

Veamos que $\flat$ y $\sharp$ son inversas. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}(w^\sharp)^\flat(X_1,\ldots,X_r)(g) &= (w^\sharp(X_1,\ldots,X_r)\circ\pi)(g)\\ &= w^\sharp(X_1,\ldots,X_r)([g])\\ &= (L_g^*w)(X_1,\ldots,X_r)(e)\\ &= w_g((L_{g*})_e(X_1)_e,\ldots,(L_{g*})_e(X_r)_e)\\ &= w(X_1,\ldots,X_r)(g),\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}(\psi^\flat)^\sharp(X_1,\ldots,X_r)([g]) &= (L_g^*\psi^\flat)(X_1,\ldots,X_r)(e)\\ &= \psi^\flat_g((L_{g*})_e(X_1)_e,\ldots,(L_{g*})_e(X_r)_e)\\ &= \psi(X_1,\ldots,X_r)(g).\end{aligned}$$

Falta por tanto únicamente probar que $\sharp$ y $\flat$ son morfismos de complejos. En primer lugar, sobre las 0-formas, es decir, sobre las funciones, es claro que ambas diferenciales coinciden, pues

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\varphi)^\sharp(X)([g]) &= (L_g^*\mathrm{d}\varphi)(X)(e)\\ &= \mathrm{d}\varphi(X)(g)\\ &= (X\varphi)(g)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi^\sharp(X)([g]) &= (X\cdot\varphi^\sharp)([g])\\ &= (\widetilde{X}\varphi^\sharp)([g]),\end{aligned} \tag{9.3.1}$$

y por el Lema 9.18

$$\begin{aligned}\text{(9.3.1)} &= X(\varphi^\sharp\circ\pi)(g)\\ &= (X\varphi)(g).\end{aligned}$$

Por otra parte, para las r- formas, tendríamos:

$$(\mathrm{d}\omega)^\sharp(X_0,\ldots,X_r)([g])$$

$$
\begin{aligned}
&= (L_g^*\mathrm{d}\omega)(X_0,\dots,X_r)(e)\\
&= (\mathrm{d}\omega)(X_0,\dots,X_r)(g)\\
&= \sum_i (-1)^i X_i\omega(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_r)(g)\\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_r)(g)\\
&= \sum_i (-1)^i \widetilde{X}_i\omega^\sharp(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_r)([g])\\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\omega^\sharp([X_i,X_j],X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_r)([g])\\
&= \mathrm{d}\omega^\sharp(X_0,\dots,X_r)([g]).
\end{aligned}
$$

Como $\flat$ y $\sharp$ son inversas, que $\sharp$ sea un morfismo de complejos implica ya que $\flat$ es también de complejos. □

9.4. Cohomología invariante

Denotamos por $\Omega_H(G)$ el complejo de formas invariantes por la acción por la izquierda del subgrupo $H \subset G$, y por $\mathrm{H}_H^\bullet(G)$ la cohomología de este complejo.

Aziz El Kacimi Alaoui y Marcel Nicolau prueban en [11] el siguiente resultado:

Teorema 9.20. *Sea G un grupo de Lie conexo y H un subgrupo cerrado tal que el espacio homogéneo $W = H\backslash G$ es compacto. Si G, H son unimodulares, entonces $\mathrm{H}_H^n(G) \neq 0$, donde $n = \dim G$.*

La demostración original utiliza un resultado de [11] sobre variedades promediables. Daremos a continuación una demostración diferente utilizando el Teorema 2.15.

Lema 9.21. *Sea $q = \dim H\backslash G$. Dada $\mu \in \Omega^q(H\backslash G)$ se tiene que $\rho(g)^*\mu = \mu$ para todo $g \in G$ si y solamente si $\operatorname{div}\widetilde{X} = 0$ para todo $\widetilde{X} \in \mathcal{X}^*(H\backslash G)$, donde $\rho(g)\colon H\backslash G \to H\backslash G$ es la traslación por la derecha definida en la Sección 2.4.2.*

Demostración. Se tiene que $\operatorname{div}\widetilde{X}\cdot\mu = L_{\widetilde{X}}\mu$. Por otro lado, se sabe que $L_{\widetilde{X}}\mu = 0$ si y sólo si $\widetilde{X}_t^*\mu = \mu$ para todo $t \in \mathbf{R}$, siendo $\widetilde{X}_t$ el flujo de $\widetilde{X}$. Tendremos entonces que $\operatorname{div}\widetilde{X} = 0$ si y solamente si $\widetilde{X}_t^*\mu = \mu$ para todo $t \in \mathbf{R}$.

Sea entonces $X \in \mathfrak{g}$ el campo de vectores asociado a $\widetilde{X}$, donde $\mathfrak{g}$ denota el álgebra de Lie de G. Como X es un campo de vectores invariante en G se tiene que $X_t = R_{\exp tX}$, es decir, la línea uniparamétrica que pasa por $g \in G$ es $g\cdot\exp tX$. Por tanto, bajando al cociente, tendremos que $\widetilde{X}_t = \rho(\exp tX)$.

Para comprobar esto último, dado $[g] \in H\backslash G$, consideremos la curva

$$\phi(t) = [g\cdot\exp tX] = \pi(g\cdot\exp tX).$$

Se tiene que

$$\phi'(0) = \pi_{*g} X_g = \widetilde{X}_{[g]}.$$

Como $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ es un difeomorfismo en un entorno del neutro, que podemos suponer simétrico, $U = U^{-1} \subset G$, tenemos que, para todo $g \in U$, podemos tomar $X \in \mathcal{X}(G)$ tal que $g = \exp X$. De esta manera

$$\rho(g)^*\mu = \rho(\exp X)^*\mu = \widetilde{X}_1^*\mu = \mu.$$

Dado ahora $g_0 \in G$, como G es conexo, sabemos que $g_0 = g_1 \cdots g_s$, donde $g_i \in U$ para todo i. Así llegamos finalmente a que

$$\rho(g_0)^*\mu = \rho(g_1 \cdots g_s)^*\mu = (\rho(g_s) \circ \cdots \circ \rho(g_1))^*\mu = \rho(g_1)^* \circ \cdots \circ \rho(g_s)^*\mu = \mu.$$

Por tanto, hemos probado que si $\widetilde{X}_t^*\mu = \mu$ para todo $\widetilde{X} \in \mathcal{X}^*(H\backslash G)$, entonces μ es invariante por la acción.

La otra implicación es trivial, pues si μ es invariante por la derecha, es decir, si $\rho(g)^*\mu = \mu$ para todo $g \in G$, entonces, para todo $\widetilde{X}$, se tiene:

$$\widetilde{X}_t^*\mu = \rho(\exp tX)^*\mu = \mu. \quad \square$$

Teorema 9.22. *Dado un espacio homogéneo $H\backslash G$ compacto, si existe una forma de volumen μ invariante por la derecha entonces se tiene que el morfismo*

$$\mathrm{H}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{H}_H(G),$$

inducido por la inclusión $i\colon \Omega_G(G) \to \Omega_H(G)$, es inyectivo.

Demostración. En primer lugar, es necesario hacer notar que al ser μ una forma de volumen, $W = H\backslash G$ será orientable.

Para facilitar los cálculos, consideraremos la forma diferencial μ de tal manera que el volumen total de la variedad sea uno; es decir:

$$\int_W \mu = 1.$$

Lema 9.23. *Dado un campo de vectores $\widetilde{X} \in \mathcal{X}^*(W)$ y dada $f \in \mathcal{C}^\infty(W)$ se tiene que* $\operatorname{div} f\widetilde{X} = \widetilde{X}f$.

Demostración. Sabemos (Lema 9.21) que $\operatorname{div}\widetilde{X} = 0$ para todo $\widetilde{X} \in \mathcal{X}^*(H\backslash G)$.

Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(W)$, vamos a calcular la divergencia del campo de vectores $f\widetilde{X}$:

$$L_{f\widetilde{X}}\mu = \mathrm{d}(f i_{\widetilde{X}}\mu) = \mathrm{d}f \wedge i_{\widetilde{X}}\mu + f \wedge \mathrm{d}i_{\widetilde{X}}\mu = \mathrm{d}f \wedge i_{\widetilde{X}}\mu + f L_{\widetilde{X}}\mu.$$

Por otro lado,

$$0 = i_{\widetilde{X}}(\mathrm{d}f \wedge \mu) = i_{\widetilde{X}}\mathrm{d}f \wedge \mu - \mathrm{d}f \wedge i_{\widetilde{X}}\mu,$$

con lo que

$$\mathrm{d}f \wedge i_{\widetilde{X}}\mu = i_{\widetilde{X}}\mathrm{d}f \wedge \mu = \widetilde{X}f \cdot \mu.$$

Entonces:

$$\operatorname{div} f\widetilde{X} \cdot \mu = \widetilde{X}f \cdot \mu + f \cdot \operatorname{div}\widetilde{X} \cdot \mu = \widetilde{X}f \cdot \mu. \quad \square$$

Corolario 9.24. *Se tiene que*

$$\int_W \widetilde{X} f \cdot \mu = 0.$$

Demostración. Como, por el Teorema de Stokes, $\int_W \operatorname{div} X \cdot \mu = 0$ para W compacta, el resultado es inmediato a partir del Lema 9.23. □

Podemos entonces definir el siguiente morfismo de complejos:

$$\Omega_G(G) \cong \Lambda \mathfrak{g}^* \underset{\xleftarrow[\Phi]{}}{\xrightarrow{i}} \Lambda(\mathfrak{g}, \mathcal{C}^\infty(H \backslash G)) = \Omega_H(G),$$

donde Φ viene dado por:

$$(\Phi\omega)(X_1, \dots, X_r) = \int_W \omega(X_1, \dots, X_r) \cdot \mu.$$

Veamos que Φ es de complejos:

$$\begin{aligned}
&\delta(\Phi\omega)(X_0, \dots, X_r) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (\Phi\omega)([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r) \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \int_W \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \cdots, \widehat{X}_j, \dots, X_r) \cdot \mu.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Phi(\mathrm{d}\omega)(X_1, \dots, X_r) \\
&= \int_W \mathrm{d}\omega(X_1, \dots, X_r) \\
&= \int_W \Bigg(\sum_i (-1)^i X_i \omega(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots X_r) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_r) \Bigg) \cdot \mu \\
&= \sum_i (-1)^i \int_W X_i \omega(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_r) \cdot \mu \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \int_W \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_r) \cdot \mu.
\end{aligned}$$

Entonces, aplicando el Corolario 9.24, tenemos que el primer sumando se anula, con lo que llegamos a que $\delta(\Phi\omega) = \Phi(\mathrm{d}\omega)$.

Además tenemos que $\Phi \circ i = \mathrm{id}$, ya que si α es G-invariante, entonces

$$\begin{aligned}(\Phi \circ i)\alpha(X_1, \cdots, X_r) &= \int_W \alpha(X_1, \cdots, X_r) \cdot \mu \\ &= \alpha(X_1, \cdots X_r),\end{aligned}$$

pues $\alpha(X_1, \cdots, X_r)$ es constante.

Por tanto, $\Phi^* i^* = \mathrm{id}$ y el morfismo $i^* \colon \mathrm{H}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{H}_H(G)$ es inyectivo. □

Corolario 9.25. *Dado un espacio homogéneo compacto $H\backslash G$, se tiene que si*

$$\det \mathrm{Ad}_H(h) = \det \mathrm{Ad}_G(h) \;\; \forall\, h \in H,$$

entonces el morfismo $\mathrm{H}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{H}_H(G)$ es inyectivo.

Demostración. A partir del Teorema 2.15 deducimos que existe una forma de volumen invariante, con lo que, por el Teorema 9.22, el resultado es inmediato. □

Corolario 9.26. *(Teorema 9.20) Sea G un grupo de Lie conexo y H un subgrupo cerrado tal que el espacio homogéneo $W = H\backslash G$ es compacto. Si G y H son unimodulares, entonces $\mathrm{H}^n_H(G) \neq 0$, donde $n = \dim G$.*

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $\dim H \geq 1$. Que G sea unimodular quiere decir que $\det \mathrm{Ad}_G(g) = 1$ para todo $g \in G$, pues G es conexo. Sin embargo, como H no tiene por qué ser conexo, la unimodularidad solamente garantiza que $|\det \mathrm{Ad}_H(h)| = 1$ para todo $h \in H$. Supongamos, en primer lugar, que $\det \mathrm{Ad}_H(h) = 1$ para todo $h \in H$, así tendremos que $\det \mathrm{Ad}_H(h) = \det \mathrm{Ad}_G(h) = 1$ para todo $h \in H$, con lo que, por el Corolario 9.25, el morfismo $\mathrm{H}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{H}_H(G)$ es inyectivo. Y como G es unimodular y, por tanto, $\mathrm{H}^n(\mathfrak{g}) \neq 0$, tenemos ya que $\mathrm{H}^n_H(G) \neq 0$.

Si $\det \mathrm{Ad}_H(h) = -1$ para algún $h \in H$, siguiendo [30] o [33], hacemos

$$H_2 = \{h \in H \colon \det \mathrm{Ad}_H(h) > 0\}$$

y $W_2 = H_2\backslash G$. Así, W_2 es compacta, y $\det \mathrm{Ad}_{H_2}(h) = \det \mathrm{Ad}_G(h) = 1$ para todo $h \in H_2$. Por tanto, por el Corolario 9.25, tenemos que el morfismo $\mathrm{H}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{H}_{H_2}(G)$ es inyectivo. Considerando entonces la composición

$$\Omega_G(G) \to \Omega_H(G) \to \Omega_{H_2}(G)$$

tendremos que $\mathrm{H}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{H}_H(G)$ es el primer morfismo de una composición inyectiva y, por tanto, será también inyectivo.

Y una vez más. como G es unimodular, tendremos que $\mathrm{H}^n_H(G) \neq 0$.

Supongamos ahora que H es discreto. Como G es unimodular sabemos, por la Proposición 2.13, que G admite una forma de volumen biinvariante ω. Por otro lado, como $p \colon G \to H\backslash G$ es una cubierta, con un razonamiento análogo al del Lema 9.5, tenemos que p^* es un isomorfismo entre las formas en $H\backslash G$ y las formas en G invariantes por los automorfismos de la cubierta.

Como $H \subset G$, es obvio que ω es invariante por los automorfismos de la cubierta, con lo que existe $\bar{\omega}$ forma en $H\backslash G$ tal que $p^*\bar{\omega} = \omega$. Veamos que $\bar{\omega}$ es invariante por la acción por la derecha de G en $H\backslash G$:

Como $\omega = p^*\bar{\omega}$ es invariante, tenemos que:

$$\begin{aligned} p^*\bar{\omega} &= R_g^* p^*\bar{\omega} \\ &= (p \circ R_g)^*\bar{\omega} \\ &= (r_g \circ p) * \bar{\omega} \\ &= p^* r_g^* \bar{\omega}, \end{aligned}$$

donde r_g representa el automorfismo en $H\backslash G$ que lleva $[k] \mapsto [kg]$ para todo $k \in G$. Con lo que, como p^* es un isomorfismo, llegamos ya a que $r_g^*\bar{\omega} = \bar{\omega}$.

Por otra parte, es inmediato que $\bar{\omega}$ es no nula en todo punto, y por tanto una forma de volumen invariante por la derecha en $H\backslash G$, con lo que podemos aplicar el Teorema 9.22 y proceder como en el caso no discreto. $\square$

Corolario 9.27. *Sea $\mathcal{F}$ una G-foliación de Lie en una variedad compacta M. Sea $H = \overline{\Gamma}$ la adherencia del grupo de holonomía. Si G, H son unimodulares entonces la foliación es unimodular.*

Demostración. Como M es compacta entonces $W = H\backslash G$, la variedad básica de la foliación, también es compacta. Estamos entonces ante las hipótesis del Teorema 9.20 y por tanto, $\mathrm{H}^n_H(G) \cong \mathrm{H}^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$, lo que significa que $\mathcal{F}$ es unimodular. $\square$

Capítulo 10
Ejemplo

Agradecemos a Jesús Álvarez el mostrarnos el ejemplo que desarrollaremos a continuación. Es un interesante ejemplo de foliación transversalmente homogénea no Riemanniana, del que calcularemos su desarrollo, su holonomía y sus cohomologías, evidenciando que si las fibras de la submersión desarrollo no son siempre conexas no existe relación entre las cohomologías de la variedad homogénea y la cohomología básica de la foliación.

10.1. El espacio homogéneo N

Sea el grupo afín real

$$G = GA^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \, a, b \in \mathbb{R}, \, b > 0 \right\}.$$

Este grupo representa las transformaciones $t \mapsto bt + a$. Así, podemos representar los elementos de $GA^+(\mathbb{R})$ como pares de elementos (b, a), con $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, entre los que podemos definir un producto semidirecto haciendo

$$(b, a) \cdot (b', a') = (bb', a + ba').$$

El grupo de Lie $GA^+(\mathbb{R})$ es conexo y simplemente conexo por ser difeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Sea el subgrupo

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \, b \in \mathbb{R}, \, b > 0 \right\},$$

que podemos considerar el subgrupo de “homotecias". K es conexo, no compacto, y no es normal en G.

Proposición 10.1. *El grupo de Lie $G = GA^+(\mathbb{R})$ actúa transitiva y efectivamente sobre la variedad $N = \mathbb{R}$.*

Demostración. El grupo $GA^+(\mathbb{R})$ actúa sobre $N = \mathbb{R}$ por la acción afín $(b, a) \cdot t = bt + a$. Esta acción es transitiva y la isotropía de $t = 0$ es $\{(b, 0) \colon b > 0\} = K$. Podemos entonces definir una proyección $\pi \colon GA^+(\mathbb{R}) \to N = \mathbb{R}$ haciendo $\pi(b, a) = a$. Por tanto, $G/K \cong N$ como G-espacios.

La isotropía de otro $t_0 \in N$, serán los elementos que cumplan

$$bt_0 + a = t_0 \Leftrightarrow a = (1 - b)t_0.$$

Entonces, si $t_0 = 0$ se tiene que $a = 0$, y si $t_0 \neq 0$, para que $a = 0$ es necesario que $b = 1$. Por tanto, el único elemento que está en todas las isotropías es el neutro, y la acción es efectiva. $\square$

10.2. La cubierta $p\colon \widetilde{M} \to M$

Sea $M = T^2$ el toro y sea $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, que se puede expresar en coordenadas cartesianas o en polares. Fijemos una homotecia $\lambda > 1$ cualquiera y la acción de $\mathbb{Z}$ sobre $\widetilde{M}$ dada por

$$n \cdot (x, y) = (\lambda^n x, \lambda^n y),$$

o, en coordenadas polares,

$$n \cdot (\rho, \theta) = (\lambda^n \rho, \theta).$$

Entonces $p\colon \widetilde{M} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1 \to M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una cubierta con $\operatorname{Aut}(p) = \mathbb{Z}$. Como dominio fundamental podemos pensar en la corona $1 \leq \rho \leq \lambda$ con los bordes identificados por la homotecia.

10.3. La submersión desarrollo

Tomemos la submersión

$$\begin{aligned} f\colon \quad \widetilde{M} = \mathbb{R}^2 - \{0\} \quad &\longrightarrow \quad N = \mathbb{R} \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad x \end{aligned}$$

Todas las fibras son conexas excepto $f^{-1}(0)$; por tanto, f no es una fibración, pues de serlo todas las fibras deberían tener el mismo tipo de homotopía.

Sabemos que $N \cong G/K$ y tenemos el morfismo

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Aut}(p) & \overset{h}{\cong} & \Gamma \subset G \\ n \in \mathbb{Z} & \mapsto & (\lambda^n, 0) \end{array}$$

donde

$$\Gamma = \operatorname{im} h = \{(\lambda^n, 0) \in G \colon n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

es el subgrupo de G generado por la matriz $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. De esta forma, tendremos que el grupo de holonomía de la foliación será un subgrupo discreto y por tanto $\overline{\Gamma} = \Gamma$.

Se tiene que f es h-equivariante:

$$f(\lambda^n x, \lambda^n y) = \lambda^n x = (\lambda^n, 0) \cdot x = h(n) \cdot x.$$

10.4. La foliación

Tendremos entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 - \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \\ T^2 & \end{tikzcd}$$

que al proyectar por p las fibras de f definirá una foliación transversalmente homogénea en $M = T^2$.

Las dos componentes de $f^{-1}(0)$ nos dan dos hojas compactas (difeomorfas a $\mathbb{S}^1$) con holonomía $\Gamma_L \cong \mathbb{Z}$. Las otras son no compactas (difeomorfas a $\mathbb{R}$) sin holonomía y se acumulan en las otras dos.

Esta foliación no es Riemanniana ya que la acción de $\mathbb{Z} \cong \operatorname{Aut} p$ en $R^2 - \{0\}$ no es por isometrías.

10.5. El fibrado de Blumenthal

Siguiendo la construcción llevada a cabo en el Capítulo 8 tendremos que

$$f^*G = \{((x,y),(b,a)) \in (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times GA^+(\mathbb{R})\colon f(x,y) = \pi(b,a)\},$$

con lo que el par $((x,y),(b,a)) \in f^*G$ si y solo si $x = a$.

Consideramos el difeomorfismo $\varphi\colon f^*G \cong (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times K$ dado por

$$\varphi((x,y),(b,x)) = (x,y,b).$$

Tendremos que la proyección de f^*G sobre $GA^+(\mathbb{R})$ es la submersión

$$\begin{array}{rccc} \bar{f}\colon & (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times K & \longrightarrow & GA^+(\mathbb{R}) \\ & (x,y,b) & \mapsto & (b,x) \end{array}$$

Esta submersión será equivariante para $h\colon \mathbb{Z} \to G$, puesto que

$$\begin{aligned} \bar{f}(n \cdot (x,y,b)) &= \bar{f}(\lambda^n x, \lambda^n y, \lambda^n b) \\ &= (\lambda^n b, \lambda^n x) \\ &= (\lambda^n, 0) \cdot (b,x) \\ &= h(n) \cdot (b,x) \\ &= h(n) \cdot \bar{f}(x,y,b). \end{aligned}$$

Nótese que $\bar{f}$ no tiene todas las fibras conexas, pues la fibra de un elemento $(b,0)$ serán dos semirrectas.

El diagrama

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times K \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & GA^+(\mathbb{R}) \arrow[d, "\pi"] \\ R^2 - \{0\} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

será conmutativo, pues

$$(f \circ \mathrm{pr}_1)(x,y,b) = f(x,y) = x$$

y

$$(\pi \circ \bar{f})(x,y,b) = \pi(b,x) = x.$$

De esta forma, el fibrado de Blumenthal $\bar{\rho}$ sería un fibrado principal de grupo $K \cong \mathbb{R}$,

$$K \longrightarrow \Gamma \backslash f^*G \xrightarrow{\bar{\rho}} T^2$$

dado por

$$\bar{\rho}([(x, y, b)]) = ([(x, y)]),$$

con $(x, y) \neq (0, 0)$ y $b > 0$. Así, el fibrado de Blumenthal no será trivial en este caso y $\Gamma \backslash f^*G$ será una variedad tridimensional conexa pero no compacta, sobre la que tendremos definida la foliación de Lie $\mathcal{F}^+$, que tendrá a $\bar{f}$ como submersión desarrollo, con holonomía Γ, y cuyas hojas serán curvas unidimensionales.

10.6. Estudio de las métricas

Comprobaremos que en $N = \mathbb{R}$ no se puede definir una métrica invariante por la acción de G, pues de lo contrario $\mathcal{F}$ sería Riemanniana. Recordemos que la traslación en $N = \mathbb{R}$ por un elemento $(b, a) \in G$ vendrá dada por $\lambda(b, a)(t) = bt + a$. La diferencial de esta aplicación en un punto $t \in \mathbb{R}$ será

$$\begin{array}{ccc} T_t\mathbb{R} = \mathbb{R} & \overset{\lambda(b,a)_{*t}}{\longrightarrow} & T_{\lambda(b,a)(t)}\mathbb{R} = \mathbb{R} \\ \partial x & \longmapsto & b\partial x \end{array}$$

$$\lambda(b, a)_{*t}\partial t = b\partial t.$$

Entonces, para que pudiera existir una métrica invariante por la acción de G tendría que cumplirse que

$$|b\partial t| = |\partial t|,$$

lo que solamente puede ser si $b = 1$. Así, no existe una métrica invariante para todos los elementos de G, ni tampoco para los elementos de $\Gamma \subset G$, lo que implica que la foliación $\mathcal{F}$ no es Riemanniana.

La submersión f es Riemanniana si en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ se consideran las métricas usuales, pero entonces la acción de $\mathbb{Z}$ en $R^2 - \{0\}$ dada por $n \cdot (x, y) = (\lambda^n x, \lambda^n y)$ no es por isometrías y entonces la métrica no puede bajar por la cubierta a T^2.

Nótese que aunque f sea Riemanniana para las métricas usuales no es un fibrado localmente trivial, lo que es posible pues $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ no es completa con la métrica usual.

10.7. Cálculo de las Cohomologías

- Cohomología de $G = GA^+(\mathbb{R})$.

  Dado $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$ se tiene que $g^{-1} = \begin{bmatrix} 1/b & -a/b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces, la forma de Maurer-Cartan de $GA^+(\mathbb{R})$ vendrá dada por

$$\Omega = g^{-1}\mathrm{d}g = \begin{bmatrix} 1/b & -a/b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}b & \mathrm{d}a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{b}\mathrm{d}b & \frac{1}{b}\mathrm{d}a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como esta forma cumple que $\mathrm{d}\Omega = -\Omega \wedge \Omega$ tendremos que

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}\alpha & \mathrm{d}\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & \alpha \wedge \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto $\mathrm{d}\alpha = 0$ y $\mathrm{d}\beta = -\alpha \wedge \beta$.

A partir de las constantes de estructura, tendremos que una base del álgebra de Lie de $GA^+(\mathbb{R})$ es $\{(e_1, e_2)\}$ con $[e_1, e_2] = e_2$. Así, para calcular la cohomología partiremos del complejo

$$\Lambda^0\mathfrak{g}^* = \mathbb{R} \overset{\mathrm{d}=0}{\longrightarrow} \Lambda^1\mathfrak{g}^* = \langle \alpha, \beta \rangle \overset{\mathrm{d}\neq 0}{\longrightarrow} \Lambda^2\mathfrak{g}^* = \langle \alpha \wedge \beta \rangle,$$

llegando entonces a que

1. $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}$.
2. $\mathrm{H}^1(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}$, pues $\mathrm{d}\alpha = 0$ y $\mathrm{d}\beta \neq 0$ y por lo tanto $\ker \mathrm{d} = \langle \alpha \rangle$.
3. $\mathrm{H}^2(\mathfrak{g}) = 0$ pues $\mathrm{d}\beta = -\alpha \wedge \beta$ y por tanto d es sobre.

Estamos, por tanto, ante un álgebra de Lie no unimodular.

- Cohomología de $N = \mathbb{R}$.

  Es una variedad unidimensional cuya cohomología viene determinada por el complejo

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0 = C^\infty(\mathbb{R}) & \overset{\mathrm{d}}{\longrightarrow} & \Omega^1 = C^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{d}t \\ f & \mapsto & \mathrm{d}f = f'\mathrm{d}t \end{array}$$

  Así, tenemos que

  1. $\mathrm{H}^0 = \mathbb{R}$, pues el núcleo de d son las funciones constantes.
  2. $\mathrm{H}^1 = 0$, pues toda función $g = g(t)$ es derivada de $\int_0^t g(t)\mathrm{d}t$.

- Cohomologías invariantes.

Lema 10.2. *Una función continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Γ-invariante si y sólo si es constante.*

Demostración. Si f es Γ-invariante entonces $f(t) = f(\lambda^n t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, y por tanto $f(t) = f\left(\frac{1}{\lambda^n}t\right)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Así, por continuidad, tenemos que

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\lambda^n}t\right) = f(0) \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

y f es constante. El recíproco es inmediato. $\square$

Tendremos entonces
$$\Omega^0_\Gamma(N) = \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{d}=0} \Omega^1_\Gamma(N) = \mathbb{R},$$
con lo que

1. $\mathrm{H}^0_\Gamma(N) = \mathbb{R}$,
2. $\mathrm{H}^1_\Gamma(N) = \mathbb{R}$.

De la misma forma se tiene
$$\Omega^0_G(N) = \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{d}=0} \Omega^1_G(N) = \mathbb{R},$$
con lo que

1. $\mathrm{H}^0_G(N) = \mathbb{R}$,
2. $\mathrm{H}^1_G(N) = \mathbb{R}$.

- Cohomología básica de $\widetilde{\mathcal{F}}$.

  Calculemos, en primer lugar, la cohomología básica de la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ en $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Para ello estudiaremos cómo son las formas básicas en $\widetilde{M}$:

  Las 0-formas serán las funciones básicas en $\widetilde{M}$, es decir, las funciones constantes a lo largo de las hojas de $\widetilde{\mathcal{F}}$, y por tanto constantes a lo largo de las fibras de la submersión $f\colon \widetilde{M} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = x$. Así, las funciones básicas serán aquellas que no dependan de la variable y, con lo que podemos concluir:
$$\Omega^0_b(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}) = \{F \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{M},\mathbb{R})\colon \frac{\partial}{\partial y}F = 0\},$$
  de forma que, para toda $F \in \Omega^0_b(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})$ podemos escribir $F = F(x)$.

  Las 1-formas en $\widetilde{M}$ serán de la forma $\omega = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y$, con $a, b \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{M})$. De éstas, serán básicas aquellas que cumplan que $i_X\omega = 0$ y que $i_X\mathrm{d}\omega = 0$ para todo X campo de vectores tangente a las hojas, que será necesariamente un múltiplo de $\partial/\partial y$. Así, para que una forma $\omega = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y$ sea básica para $\widetilde{\mathcal{F}}$ ha de cumplirse que
$$(a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y)(\partial/\partial y) = 0 \Rightarrow b = 0,$$
  y por lo tanto podemos escribir $\omega = a\mathrm{d}x$.

  Además también debe cumplirse que $i_X\mathrm{d}\omega = 0$ para X tangente a $\widetilde{\mathcal{F}}$, lo que significa que
$$\mathrm{d}(a\mathrm{d}x)(\partial/\partial y, \partial/\partial x) = 0.$$
  Y como
$$\mathrm{d}(a\mathrm{d}x) = \frac{\partial a}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x,$$

llegamos a que tiene que ser

$$\frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

con lo que a solamente depende de x y podemos escribir que

$$\Omega^1(\widetilde{M}/\widetilde{F}) = \{a(x)\mathrm{d}x\colon a \in C^\infty(\widetilde{M})\}\}.$$

Por último, para que una 2-forma en $\widetilde{M}$, que será de la forma $G\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, sea básica para $\widetilde{\mathcal{F}}$ deberá cumplirse que

$$(G\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)(\partial/\partial y, \partial/\partial x) = G = 0,$$

con lo que $\Omega^2(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}) = 0$, lo que ha de ser así pues $\operatorname{codim} \mathcal{F} = 1$.

Por tanto, para calcular la cohomología básica de $\widetilde{\mathcal{F}}$ partiremos de

$$\Omega^0(\widetilde{M}/\widetilde{F}) = \{F(x)\} \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}) = \{a(x)\mathrm{d}x\}.$$

Como $\mathrm{d}F(x) = F'(x) = 0$ implica que F es constante entonces $\mathrm{H}^0(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}) = \ker \mathrm{d} = \mathbb{R}$. Por otra parte, d es sobre, pues cualquier 1-forma $a(x)\mathrm{d}x$ es la diferencial de la función $F(x) = \int_0^x a(t)\mathrm{d}t$, y así $\mathrm{H}^1(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}) = 0$.

- Cohomología básica de $\mathcal{F}$.

  Para terminar, sabemos que $\mathrm{H}(M/\mathcal{F}) = \mathrm{H}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})$, es decir, la cohomología básica de $\widetilde{\mathcal{F}}$ invariante por la acción de $\Gamma \cong \mathbb{Z}$. Calculémosla:

  Sea $F\colon \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$ básica para $\widetilde{F}$, es decir, $F = F(x)$, con $x \in \mathbb{R}$. Para que sea invariante por la acción de $\Gamma \cong \mathbb{Z}$ tiene que cumplirse que $F(\lambda x) = F(x)$, con lo que, por el Lema 10.2, sabemos que es constante. Así,

$$\Omega^0(M/\mathcal{F}) = \Omega_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}) = \mathbb{R}.$$

  Para que una 1-forma $\omega = a(x)\mathrm{d}x \in \Omega^1(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})$ sea invariante tiene que cumplirse que

$$\begin{aligned} a(x) &= \omega_{(x,y)}(\partial/\partial x) \\ &= (L_\gamma^*\omega)_{(x,y)}(\partial/\partial x) \\ &= \omega_{(\lambda x,\lambda y)}(\lambda\partial/\partial x) \\ &= \lambda a(\lambda x), \end{aligned} \tag{10.7.1}$$

  con lo que, para que $\omega \in \Omega^1_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})$ ha de cumplirse que $a(x) = \lambda a(\lambda x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, para cualquier $x \in \mathbb{R}$ tendremos

$$\begin{aligned} a\left(\frac{x}{\lambda}\right) &= \lambda a(x), \text{ con lo que} \\ a\left(\frac{x}{\lambda^2}\right) &= \lambda a\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \lambda^2 a(x), \end{aligned}$$

y sucesivamente llegamos a que

$$a\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\lambda^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\lambda^n a(x)\Leftrightarrow a(0)=\lambda^{\lim_{n\to\infty} n}a(x),$$

por lo tanto $a(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Así, $\Omega_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})=0$ y entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^0(M/\mathcal{F})&=\mathrm{H}^0_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})=\mathbb{R},\ \text{y}\\ \mathrm{H}^1(M/\mathcal{F})&=\mathrm{H}^1_{\mathbb{Z}}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})=0,\end{aligned}$$

lo que significa que $\mathcal{F}$ no es unimodular.

Parte IV

Resultados en foliaciones no Riemannianas

Capítulo 11
La construcción auxiliar

Para poder demostrar, como haremos en el Capítulo 13, que, dada una N-foliación transversalmente homogénea, podemos hacer que modele sobre $\widehat{N}$, la cubierta universal de N, debemos encontrar un grupo de Lie que actúe efectivamente en $\widehat{N}$ y para el que se cumpla la necesaria equivarianza. En este capítulo construiremos y estudiaremos a fondo ese grupo.

11.1. El grupo extendido G

Partiremos de una variedad N sobre la que actúa transitivamente un grupo de Lie conexo G_0, con isotropía K_0. Si $p\colon \widehat{G_0} \to G_0$ es la cubierta universal de G_0 tendremos que

$$N \cong \widehat{G_0}/p^{-1}(K_0).$$

Para simplificar la notación denotaremos $\widehat{K_0} = p^{-1}(K_0)$, aunque este grupo no tiene por qué ser la cubierta universal de K_0. Así, siguiendo la Sección 1.3.1 sabemos que

$$(\widehat{G_0})_\sharp = \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0}) \cong G_0/\operatorname{Core}(K_0) = (G_0)_\sharp;$$
$$(\widehat{K_0})_\sharp = \widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0}) \cong K_0/\operatorname{Core}(K_0) = (K_0)_\sharp.$$

La variedad $N = \widehat{G_0}/\widehat{K_0}$ tiene como cubierta universal $\widehat{N} = \widehat{G_0}/(\widehat{K_0})_e$ y el grupo de transformaciones de la cubierta $\pi\colon \widehat{N} \to N$ es $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$. El grupo que actúa efectivamente sobre $\widehat{N}$ es $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$.

11.1.1. Acción de G en $\widehat{N}$

Consideraremos el menor grupo que contiene a $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$ y a $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ y que actúa transitivamente en $\widehat{N}$. Después veremos cómo hacer para que la acción sea efectiva.

Proposición 11.1. *El grupo de Lie*

$$G\colon = \widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e) \times \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e,$$

que llamaremos grupo extendido*, actúa transitivamente por la izquierda en* $\widehat{N} = \widehat{G_0}/(\widehat{K_0})_e$.

Demostración. Dados $([g]_\sharp, [k]) \in \widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e) \times K/(\widehat{K_0})_e$ y $\hat{n} = [h] \in \widehat{N} = \widehat{G_0}/(\widehat{K_0})_e$, con $h \in \widehat{G_0}$, $k \in \widehat{K_0}$, y donde $[g]_\sharp$ denota la clase del elemento $g \in \widehat{G_0}$ en $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$, la acción se definirá como

$$([g]_\sharp, [k]) \cdot [h] = [ghk^{-1}] \in \widehat{N}.$$

Estará bien definida por ser $(\widehat{K_0})_e$ normal en $\widehat{K_0}$, pues aunque escojamos otro representante kk_e de la clase $[k] \in \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$, con $k_e \in (\widehat{K_0})_e$, tendremos que

$$[ghk_e^{-1}k^{-1}] = [ghk^{-1}k_e'] = [ghk^{-1}] \in \widehat{N}.$$

De la misma forma, si escogemos gk_e, con $k_e \in \operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$, otro representante de la clase $[g]_\sharp \in \widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$, como $\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e) \subset (\widehat{K_0})_e$ tendremos también por normalidad de $\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$ en $\widehat{G_0}$ que

$$[gk_ehk^{-1}] = [ghk^{-1}].$$

Veamos que se cumple la condición de acción por la izquierda:

$$\begin{aligned}
(([g]_\sharp, [k]) \cdot ([g']_\sharp, [k'])) \cdot [h] &= ([gg']_\sharp, [kk']) \cdot [h] \\
&= [gg'h(kk')^{-1}] \\
&= [gg'hk'^{-1}k^{-1}] \\
&= ([g]_\sharp, [k]) \cdot [g'hk'^{-1}] \\
&= ([g]_\sharp, [k]) \cdot (([g']_\sharp, [k']) \cdot [h]).
\end{aligned}$$

Por otro lado, es trivial que $([e]_\sharp, [e]) \cdot [h] = [h]$ para todo $h \in \widehat{G_0}$. Que la acción es transitiva es evidente también por serlo la acción de $\widehat{G_0}$. □

Proposición 11.2. *La isotropía de la acción de G, tomando como punto base* $[e] \in \widehat{N} = \widehat{G_0}/(\widehat{K_0})_e$*, será el subgrupo*

$$i(\widehat{K_0}) = \{([k]_\sharp, [k]) \colon k \in \widehat{K_0}\},$$

donde $i \colon \widehat{K_0} \to G$ *es el morfismo que a cada* $k \in \widehat{K_0}$ *lo lleva en* $i(k) = ([k]_\sharp, [k]) \in G$.

Este subgrupo de Lie es isomorfo a $\widehat{K_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$.

Demostración. Los elementos de la isotropía en $[e] \in \widehat{N} = \widehat{G_0}/(\widehat{K_0})_e$ serán los elementos de G que cumplan

$$\begin{aligned}
([g]_\sharp, [k]) \cdot [e] = [e] &\Leftrightarrow [gk^{-1}] = [e] \\
&\Leftrightarrow gk^{-1} \in (\widehat{K_0})_e \\
&\Leftrightarrow g \in (\widehat{K_0})_e k = k(\widehat{K_0})_e \\
&\Leftrightarrow [g] = [k],
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$([g]_\sharp, [k]) = ([k]_\sharp, [k]) \in i(\widehat{K_0}).$$

Recíprocamente, si $([k]_\sharp, [k]) \in i(\widehat{K_0})$ tendremos que

$$([k]_\sharp, [k]) \cdot [e] = [kek^{-1}] = [e] \in \widehat{N}.$$

Veamos que $i(\widehat{K_0})$ es isomorfo a $\widehat{K_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$. Basta comprobar que el núcleo del morfismo $\widehat{K_0} \to i(\widehat{K_0})$ que a cada $k \in \widehat{K_0}$ le hace corresponder $([k]_\sharp, [k]) \in i(\widehat{K_0})$ es $\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$. Sea entonces $k \in \widehat{K_0}$ tal que

$$i(k) = ([k]_\sharp, [k]) = ([e]_\sharp, [e]).$$

Igualando las primeras componentes tendremos que $[k]_\sharp = [e]_\sharp$, lo que se cumple si y solamente si $k \in \operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$. Por otro lado, si igualamos las segundas componentes llegaremos a la misma conclusión, pues $[k] = [e] \in \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ si y solo si $k \in (\widehat{K_0})_e$, y por tanto $k \in \operatorname{Core}(\widehat{K_0}) \cap (\widehat{K_0})_e = \operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$, por la Proposición 1.9. □

11.1.2. Cálculo del core group de $i(\widehat{K_0})$ en G

La acción de G sobre $\widehat{N} = \widehat{G_0}/(\widehat{K_0})_e$ no tiene por qué ser efectiva. Para conseguir una acción efectiva será necesario cocientar por el core group de $i(\widehat{K_0})$ en G.

Proposición 11.3. *El core group de $i(\widehat{K_0})$ en G será*

$$\operatorname{Core}(i(\widehat{K_0})) = i(\operatorname{Core}(\widehat{K_0})) = \{([k]_\sharp, [k])\colon k \in \operatorname{Core}(\widehat{K_0})\}.$$

Este subgrupo es isomorfo al grupo abeliano $\operatorname{Core}(\widehat{K_0})/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$.

Demostración. Para calcular el core group de $i(\widehat{K_0})$ en G, dado $([k]_\sharp, [k]) \in i(\widehat{K_0})$, deberemos, siguiendo el apartado 3 de la Proposición 1.5, ver cuándo se cumple que

$$([g]_\sharp, [k'])([k]_\sharp, [k])([g]_\sharp, [k'])^{-1} = ([gkg^{-1}]_\sharp, [k'kk'^{-1}]) \in i(\widehat{K_0})$$

para todo $([g]_\sharp, [k']) \in G$. Tendremos, por un lado, que $gkg^{-1} \in \widehat{K_0}$ para todo $g \in \widehat{G_0}$, con lo que $k \in \operatorname{Core}(\widehat{K_0})$. Y por otro lado, que $[gkg^{-1}] = [k'kk'^{-1}]$, lo que se cumple si y solamente si

$$[k'^{-1}gkg^{-1}k'] = [(k'^{-1}g)k(k'^{-1}g)^{-1}] = [k]$$

para todo $g \in \widehat{G_0}$, $k' \in \widehat{K_0}$. Lo que, como $k \in \operatorname{Core}(\widehat{K_0})$, sabemos que es cierto pues el Lema 1.8 asegura que k está en la misma componente conexa de $\widehat{K_0}$ que todos sus conjugados, es decir, que $[k] = [gkg^{-1}] \in \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ para todo $g \in \widehat{G_0}$.

Recíprocamente, si $k \in \operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ entonces, por la Proposición 1.5, $gkg^{-1} \in \widehat{K_0}$ para todo $g \in \widehat{G_0}$ y $[gkg^{-1}] = [k'kk'^{-1}]$ para todo $g \in \widehat{G_0}$, $k' \in \widehat{K_0}$ por el Lema 1.8. Resumiendo, hemos probado que

$$([k]_\sharp, [k]) \in \operatorname{Core}(i(\widehat{K_0})) \Leftrightarrow k \in \operatorname{Core}(\widehat{K_0}),$$

y por tanto

$$\operatorname{Core}(i(\widehat{K_0})) = i(\operatorname{Core}(\widehat{K_0})).$$

Para ver que es isomorfo a $\operatorname{Core}(\widehat{K_0})/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$ comprobaremos que el núcleo del morfismo

$$i_{|\operatorname{Core}(\widehat{K_0})}\colon \operatorname{Core}(\widehat{K_0}) \to i(\operatorname{Core}(\widehat{K_0}))$$

es $\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$. En efecto, si $i(k) = ([k]_\sharp, [k]) = ([e]_\sharp, [e])$ entonces tendremos que $[k]_\sharp = [e]_\sharp$, es decir, $k \in \operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$. Y si $k \in \operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e) \subset (\widehat{K_0})_e$ entonces, trivialmente, $i(k) = ([e]_\sharp, [e])$. Por lo tanto, $k \in \operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ estará en el núcleo si y solo si $k \in \operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$.

Que $\operatorname{Core}(\widehat{K_0})/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$ es abeliano lo probamos en la Proposición 1.13. □

11.2. El grupo $G_\sharp = G/i(\operatorname{Core}(\widehat{K_0}))$

Vimos en la Proposición 11.1 que el grupo de Lie

$$G = \widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e) \times \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$$

actúa transitivamente por la izquierda en $\widehat{N}$. Por tanto, cocientando por el core group tendremos que el grupo $G_\sharp = G/i(\operatorname{Core}(\widehat{K_0}))$ actúa transitiva y efectivamente por la izquierda en $\widehat{N}$.

La acción de $G_\sharp$ en $\widehat{N}$ vendrá dada por

$$[([g]_\sharp, [k])] \cdot [h] = [ghk^{-1}] \in \widehat{N},$$

donde $[([g]_\sharp, [k])] \in G_\sharp$ y $[h] \in \widehat{N} = \widehat{G_0}/(\widehat{K_0})_e$.

Por las Proposiciones 11.2 y 11.3 la isotropía de la acción de $G_\sharp$ en $\widehat{N}$ será isomorfa a $\widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$. Para nuestros cálculos posteriores será necesario dar una expresión explícita:

Corolario 11.4. *La isotropía de la acción de $G_\sharp$, en el punto base $[e] \in \widehat{N}$, será el subgrupo*

$$i_\sharp(\widehat{K_0}) = \{[([k]_\sharp, [k])] \in G_\sharp\colon k \in \widehat{K_0}\},$$

donde $i_\sharp\colon \widehat{K_0} \to G_\sharp$ es el morfismo que a cada $k \in \widehat{K_0}$ lo lleva en $i_\sharp(k) = ([k]_\sharp, [k]) \in G_\sharp$.

Este subgrupo de Lie es isomorfo a $\widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$.

11.2.1. Extensión de $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ por $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$.

Teorema 11.5. *El grupo $G_\sharp = G/i(\operatorname{Core}(\widehat{K_0}))$ es una extensión (no abeliana) de $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ por $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$.*

Demostración. Consideramos el morfismo

$$j\colon \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e \to G_\sharp = G/i(\operatorname{Core}(\widehat{K_0}))$$

dado por

$$j([k]) = [([e]_\sharp, [k])].$$

Este morfismo es inyectivo pues, si $[([e]_\sharp, [k])] = [([e]_\sharp, [e])]$, entonces $([e]_\sharp, [k]) \in i(\mathrm{Core}(\widehat{K_0}))$, y por tanto $[k] = [e] \in \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$.

Por otro lado, consideramos el morfismo

$$\pi\colon G_\sharp = G/i(\mathrm{Core}(\widehat{K_0})) \to \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$$

dado por

$$\pi([([g]_\sharp, [k])]) = p([g]_\sharp) = [g]^\sharp,$$

donde $[g]^\sharp$ denota la clase del elemento $g \in \widehat{G_0}$ en $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$.

Está bien definido pues si consideramos $([gk']_\sharp, [kk'])$, con $k' \in \mathrm{Core}(\widehat{K_0})$, otro representante de la clase de $([g]_\sharp, [k])$ en $G_\sharp$, tendremos que $p([gk']_\sharp) = p([g]_\sharp) = [g]^\sharp$. Que π es sobreyectivo es trivial. La serie

$$\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e \xrightarrow{j} G_\sharp \xrightarrow{\pi} \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$$

es exacta, pues $\ker \pi = \operatorname{im} j$. Veámoslo:

Comprobemos en primer lugar que $\ker \pi \subset \operatorname{im} j$:

$$[([g]_\sharp, [k])] \in \ker \pi \Leftrightarrow [g]^\sharp = [e]^\sharp \Leftrightarrow g \in \mathrm{Core}(\widehat{K_0}).$$

Por lo tanto $[g]_\sharp \in \mathrm{Core}(\widehat{K_0})/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$ y

$$[([g]_\sharp, [k])] = [([e]_\sharp, [kg^{-1}]) \cdot ([g]_\sharp, [g])] = j([kg^{-1}]),$$

pues $([g]_\sharp, [g]) \in i(\mathrm{Core}(\widehat{K_0}))$.

Recíprocamente, veamos que $\operatorname{im} j \subset \ker \pi$:

$$\pi j([k]) = \pi([([e]_\sharp, [k])]) = [e]^\sharp. \quad \square$$

11.2.2. Conexidad de $G_\sharp$

Nótese que en general $G_\sharp$ no es conexo, pues aunque $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ es conexo, $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ no lo es salvo que $\widehat{K_0}$ sea conexo.

Proposición 11.6. *Los grupos de Lie $G_\sharp$ y $\widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ tienen el mismo número de componentes conexas. En particular, $G_\sharp$ es conexo si y sólo si $\widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ es conexo.*

Demostración. Consideramos la proyección $G_\sharp \to \widehat{N} = G_\sharp/(\widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0}))$. Tenemos una serie exacta

$$\cdots \to \pi_1(G_\sharp) \to \pi_1(\widehat{N}) \to \pi_0(\widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})) \to \pi_0(G_\sharp) \to \pi_0(\widehat{N}).$$

Como $\widehat{N}$ es conexo y simplemente conexo tenemos $\pi_0(\widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})) \cong \pi_0(G_\sharp)$. $\square$

Proposición 11.7. *La componente conexa del neutro del grupo de Lie $G_\sharp$ es $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$.*

Demostración. Por la Proposición 1.3 sabemos que, dado un grupo de Lie X y un subgrupo cerrado H, se cumple que

$$(X/H)_e = X_e/(H \cap X_e).$$

En nuestro caso, recordemos que

$$G_\sharp = G/i(\mathrm{Core}(\widehat{K_0}))$$

con

$$G = \widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e) \times \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$$

y

$$i(\mathrm{Core}(\widehat{K_0})) = \{([k]_\sharp, [k]) \colon k \in \mathrm{Core}(\widehat{K_0})\}.$$

Tendremos entonces que

$$(G_\sharp)_e = G_e/(i(\mathrm{Core}(\widehat{K_0})) \cap G_e).$$

En primer lugar, que

$$G_e = \widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e) \times \{[e]\} \cong \widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$$

es trivial. Con este dato es inmediato que si $([k]_\sharp, [k]) \in i(\mathrm{Core}(\widehat{K_0})) \cap G_e$, entonces $[k] = [e] \in \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$, y por tanto $k \in (\widehat{K_0})_e$. Y como $k \in \mathrm{Core}(\widehat{K_0})$, tendremos que $k \in \mathrm{Core}(\widehat{K_0}) \cap (\widehat{K_0})_e = \mathrm{Core}((\widehat{K_0})_e)$ (Proposición 1.9), con lo que $[k]_\sharp = [e]_\sharp$ y $i(\mathrm{Core}(\widehat{K_0})) \cap G_e = ([e]_\sharp, [e])$. Así, llegamos a que

$$\begin{aligned} G_{\sharp e} &= (\widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e) \times \{[e]\})/\{([e]_\sharp, [e])\} \\ &= \widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e) \times \{[e]\} \\ &\cong \widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e). \end{aligned}$$

□

Proposición 11.8. *Se tiene que*

$$\pi_0(G_\sharp) = \widehat{K_0}/((\widehat{K_0})_e \cdot \mathrm{Core}(\widehat{K_0})).$$

Demostración. Por la Proposición 11.6 sabemos que

$$\pi_0(G_\sharp) = \pi_0(\widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})).$$

A partir de ahí, el resultado se obtiene directamente aplicando la Proposición 1.14. □

11.3. La acción de $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ en $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$.

La proyección $\pi \colon G_\sharp \to \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ como un fibrado principal de grupo $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$. Podemos definir una acción de $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ en $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ a partir de una sección $S \colon \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0}) \to G_\sharp$. La acción será por conjugación. Para construir la sección S utilizaremos una sección de la cubierta

$$p \colon \widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e) \to \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0}),$$

que simplificará mucho los cálculos.

Proposición 11.9. *La proyección* $p\colon \widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e) \to \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ *dada por* $p([g]_\sharp) = [g]^\sharp$ *es una cubierta de grupos de Lie cuyo grupo de automorfismos es isomorfo al grupo de Lie* $\operatorname{Core}(\widehat{K_0})/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$.

Demostración. Que p es homomorfismo de grupos es trivial, pues

$$p([gg']_\sharp) = [gg']^\sharp = [g]^\sharp[g']^\sharp = p([g]_\sharp)\cdot p([g']_\sharp).$$

Ahora, p es un homomorfismo de grupos sobreyectivo con núcleo

$$\operatorname{Core}(\widehat{K_0})/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e),$$

que es discreto, pues es un subgrupo de $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ (Proposición 1.12), lo que implica que p es una cubierta. □

Consideremos entonces una sección $s\colon \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0}) \to \widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$, que podemos considerar tal que $s([e]^\sharp) = [e]_\sharp$. Esta sección no tiene por qué ser de grupos, pero como p es un homomorfismo, tendremos que

$$\begin{aligned} p(s([g_1]^\sharp)\cdot s([g_2]^\sharp)) &= p(s([g_1]^\sharp)\cdot p(s([g_2]^\sharp)) \\ &= [g_1]^\sharp \cdot [g_2]^\sharp \\ &= p(s([g_1g_2]^\sharp) \end{aligned}$$

y por tanto

$$s([g_1]^\sharp)\cdot s([g_2]^\sharp) = c([g_1]^\sharp, [g_2]^\sharp)\cdot s([g_1g_2]^\sharp), \tag{11.3.1}$$

donde

$$c\colon \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0}) \times \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0}) \to \operatorname{Core}(\widehat{K_0})/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$$

viene dada por $c([g]^\sharp, [g']^\sharp) = s([g]^\sharp)\cdot s([g']^\sharp)\cdot s([gg']^\sharp)^{-1}$.

Proposición 11.10. *La aplicación c cumple la condición de cociclo dada por*

$$c(g,g') + c(gg',g'') = c(g',g'') + c(g,g'g''),$$

con $g, g', g'' \in \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$.

Demostración. El resultado es inmediato teniendo en cuenta la asociatividad del producto en $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$,

$$(s([g]^\sharp)\cdot s([g']^\sharp))\cdot s([g'']^\sharp) = s([g]^\sharp)\cdot (s([g']^\sharp)\cdot s([g'']^\sharp))$$

y la ecuación (11.3.1).

La condición se expresa con sumandos pues $\operatorname{Core}(\widehat{K_0})/\operatorname{Core}((\widehat{K_0})_e)$ es abeliano (Proposición 1.13). □

La sección s nos permitirá definir una sección S para la proyección $\pi\colon G_\sharp \to \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ haciendo $S([g]^\sharp) = [(s([g]^\sharp), [e])]$.

Proposición 11.11. *La acción de* $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ *sobre* $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ *inducida por la extensión* $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e \xrightarrow{j} G_\sharp \xrightarrow{\pi} \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ *es trivial.*

Demostración. Dados $[g]^\sharp \in \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ y $[k] \in \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ tendremos que la acción viene dada por la conjugación a través de la sección,

$$\begin{aligned}
[g]^\sharp \cdot [k] &= S([g]^\sharp) \cdot j([k]) \cdot S([g]^\sharp)^{-1} \\
&= [(s([g]^\sharp), [e])] \cdot [([e]_\sharp, [k])] \cdot [(s([g]^\sharp)^{-1}, [e])] \\
&= [([e]_\sharp, [k])] \\
&= j([k]).
\end{aligned}$$

□

Capítulo 12

Ejemplo de Roussarie

Como ejemplo recrearemos ahora la construcción auxiliar para los grupos que intervienen en la definición de un conocido ejemplo de foliación transversalmente homogénea dado por Roussarie (página 62 de [3]).

Consideremos el grupo de Lie conexo no compacto de matrices reales 2×2 con determinante 1

$$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} : \; x, y, z, t \in \mathbb{R}, \; xt - zy = 1 \right\}$$

y el subgrupo cerrado

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \colon \; a, b \in \mathbb{R}, \; a \neq 0 \right\},$$

que tendrá dos componentes conexas y no será compacto. La componente conexa del neutro de K será:

$$K_e = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \colon \; a, b \in \mathbb{R}, \; a > 0 \right\}.$$

12.1. El espacio homogéneo

Proposición 12.1. *El cociente $N = G/K$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^1$.*

Demostración. Es fácil comprobar que dado un elemento $g = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ se tiene que un elemento

$$g' = \begin{bmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{bmatrix} \in gK \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

si se cumple que, o bien

1. $z = z' = 0$ y entonces $g, g' \in K$,

   o bien

2. $x'/z' = x/z$, con $z, z' \neq 0$.

Así, considerando $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ podemos definir una acción de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ en $\mathbb{S}^1$ haciendo:

Si $\omega \neq \infty$, $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \omega = \begin{cases} \dfrac{x\omega + y}{z\omega + t} & \text{si } z\omega + t \neq 0, \\ \infty & \text{si } z\omega + t = 0. \end{cases}$

Si $\omega = \infty$, $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \infty = \begin{cases} \dfrac{x}{z} & \text{si } z \neq 0, \\ \infty & \text{si } z = 0. \end{cases}$

Demostraremos que la isotropía de un punto de $\mathbb{S}^1$ por esta acción es K, y así tendremos definido un difeomorfismo

$$\begin{array}{ccc} G/K & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ \left[\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\right] & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{z} & \text{si } z \neq 0, \\ \infty & \text{si } z = 0. \end{cases} \end{array}$$

Veamos en primer lugar que se cumplen las condiciones de acción:

En primer lugar, hay que probar que para todo $g, g' \in G$ y para todo $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se tiene que cumplir que $(gg') \cdot \omega = g \cdot (g' \cdot \omega)$.

• Si $\omega \neq \infty$:

$$g \cdot (g' \cdot \omega) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{bmatrix} \cdot \omega \right) = \begin{cases} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \dfrac{x'\omega + y'}{z'\omega + t'} & \text{si } z'\omega + t' \neq 0, \\ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \infty & \text{si } z'\omega + t' = 0. \end{cases} \tag{12.1.1}$$

Así, si $z'\omega + t' \neq 0$ tendremos que

$$g \cdot (g' \cdot \omega) = \begin{cases} \dfrac{x(x'\omega + y') + y(z'\omega + t')}{z(x'\omega + y') + t(z'\omega + t')} & \text{si } z(x'\omega + y') + t(z'\omega + t') \neq 0, \\ \infty & \text{si } z(x'\omega + y') + t(z'\omega + t') = 0. \end{cases}$$

Entonces, en este caso ya tendremos la igualdad que buscábamos pues

$$\begin{aligned} (gg') \cdot \omega &= \left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{bmatrix} \right) \cdot \omega \\ &= \begin{bmatrix} xx' + yz' & xy' + yt' \\ zx' + tz' & xy' + tt' \end{bmatrix} \cdot \omega \\ &= \frac{(xx' + yz')\omega + xy' + yt'}{(zx' + tz')\omega + zy' + tt'} \\ &= \frac{x(x'\omega + y') + y(z'\omega + t')}{z(x'\omega + y') + t(z'\omega + t')} \end{aligned} \tag{12.1.2}$$

si $z(x'\omega + y') + t(z'\omega + t')$ no se anula. Si se anula se tiene que $(12.1.2) = \infty = (12.1.1)$.

Y si $z\omega' + t' = 0$ tendremos

$$(12.1.1) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \infty = \begin{cases} \dfrac{x}{z} & \text{si } z \neq 0, \\ \infty & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Y como

$$\frac{x(x'\omega + y') + y(z'\omega + t')}{z(x'\omega + y') + t(z'\omega + t')} = \frac{x}{z}\left(\frac{z'\omega + y'}{x'\omega + y'}\right) = \frac{x}{z}$$

es claro también en este caso que (12.1.2) = (12.1.1).

• Si $\omega = \infty$:

$$g \cdot (g' \cdot \omega) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{bmatrix} \cdot \infty \right) = \begin{cases} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \dfrac{x'}{z'} & \text{si } z' \neq 0, \\ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \infty & \text{si } z' = 0. \end{cases} \tag{12.1.3}$$

$$(gg') \cdot \omega = \left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{bmatrix} \right) \cdot \infty = \begin{cases} \dfrac{xx' + yz'}{zx' + tz'} & \text{si } zx' + tz' \neq 0, \\ \infty & \text{si } zx' + tz' = 0. \end{cases} \tag{12.1.4}$$

Así, si $z' \neq 0$ tendremos

$$(12.1.3) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \frac{x'}{z'} = \begin{cases} \dfrac{x\frac{x'}{z'} + y}{z\frac{x'}{z'} + t} = \dfrac{xx' + yz'}{zx' + tz'} & \text{si } zx' + tz' \neq 0, \\ \infty & \text{si } zx' + tz' = 0 \end{cases} = (12.1.4).$$

Si $z' = 0$ entonces

$$(12.1.3) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \infty = \begin{cases} \dfrac{x}{z} & \text{si } z \neq 0, \\ \infty & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Y como

$$\frac{xx' + yz'}{zx' + tz'} = \frac{xx'}{zx'} = \frac{x}{z}$$

es claro que (12.1.4) = (12.1.3).

Para demostrar que la acción es transitiva bastará comprobar que la órbita del elemento $\{\infty\}$ cubre todo $\mathbb{S}^1$. Pero, para cualquier $\omega \in \mathbb{R}$ se tiene que el elemento $\begin{bmatrix} \omega & \omega - 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in G$ es tal que $\begin{bmatrix} \omega & \omega - 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \infty = \omega$, y por lo tanto es claro que $orb(\infty) = \mathbb{S}^1$.

La isotropía de la acción para ∞ será:

$$iso(\infty) = \{g \in G\colon g \cdot \infty = \infty\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in G\colon z = 0 \right\} = K. \quad \square$$

12.2. La efectividad de la acción

Proposición 12.2. *La acción de G sobre $G/K \cong \mathbb{S}^1$ no es efectiva, y* $\mathrm{Core}(K) = \{+I, -I\}$.

Demostración. Sea
$$k = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \in K.$$
Para que este elemento fuera del core tendría que ser que todos sus conjugados por elementos de G estuvieran en K. Sea entonces
$$g = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in G,$$
haciendo cálculos tendríamos:
$$\begin{aligned} gkg^{-1} &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & -y \\ -z & x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} xta - xzb - yz/a & -xya + x^2bxy/a \\ zta - z^2b - zt/a & -yza + xzb + tb/a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
Entonces se tiene que, si $k \in \mathrm{Core}(K)$, tiene que cumplirse que
$$zta - z^2b - zt/a = 0 \quad \forall\, g = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in G.$$
Tomando entonces $g = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}$, con $t \in \mathbb{R}$, tendremos que
$$ta - b - t/a = 0 \Leftrightarrow b = ta - t/a = t\left(a - \frac{1}{a}\right) \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$
lo que obviamente sólo se cumple si $b = 0$ y $a = \pm 1$, es decir, si $k = \pm I$.

El recíproco es inmediato pues cualquier conjugado de I y de $-I$ es I ó $-I$, respectivamente. □

Corolario 12.3. *Se tiene que* $\mathrm{Core}(K_e) = I$ *y la acción de G en $G/K_e \cong \mathbb{S}^1$ es efectiva.*

12.3. El grupo que actúa efectivamente

Siguiendo la Proposición 1.7 sabemos que sobre $G/K \cong \mathbb{S}^1$ actúa efectivamente el grupo de Lie
$$G/\,\mathrm{Core}(K) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm I\} = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}).$$

Lema 12.4. *Se tiene que $K = K_e \times \{\pm I\}$ como grupos.*

Demostración. Comenzaremos por definir una aplicación $\sigma(a) = a/|a|$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, de forma que $\sigma(aa') = \sigma(a)\sigma(a')$. Entonces podemos definir una proyección

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\pi} & \{\pm I\} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} & \longmapsto & \sigma(a) \end{array}$$

sobreyectiva, de grupos, y tal que, trivialmente, $\ker \pi = K_e$. Como $s\colon \{\pm I\} \to K$ definida por $s(I) = I$ y $s(-I) = -I$ es una sección global de π, se tiene que el fibrado $K_e \to K \to \{\pm I\}$ es trivial, con lo que $K = K_e \times \{\pm I\}$. □

Proposición 12.5. *La isotropía de la acción de* $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ *en* $\mathbb{S}^1$ *es* $K/\operatorname{Core}(K) \cong K_e$.

Demostración. Se deduce directamente de la Proposición 1.7 y del Lema 12.4. □

12.4. La cubierta universal $\widehat{G} = \widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})}$

Sea $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{im}(z) > 0\}$. Podemos definir una acción de G en $\mathbb{H}^2$ haciendo

$$g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ con } g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G, z \in \mathbb{H}^2.$$

Para ver que es transitiva basta considerar que

$$K \cdot i = \{a^2 i + ab\colon a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\} = \mathbb{H}^2.$$

La isotropía de esta acción en el elemento i estará formada por las matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$ con $\dfrac{ai+b}{ci+d} = i$, es decir, $ai + b = di - c$, lo que equivale a que $c = -b$ y $d = a$. Por tanto:

$$\operatorname{iso}(i) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in G \right\} \cong \mathbb{S}^1.$$

Así, tendremos un fibrado localmente trivial $\mathbb{S}^1 \to G \to \mathbb{H}^2$, y como $\mathbb{H}^2$ es contráctil (Corolario 4.1.5 de [6]), el fibrado es trivial y G es difeomorfo a $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Los grupos $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ y $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ comparten cubierta universal, que podemos definir haciendo (pág. 417 de [20]):

$$\widehat{G} = \left\{ (g, \beta_g)\colon g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \right.$$
$$\left. \beta_g \in \mathcal{C}(\mathbb{H}^2, \mathbb{R}) \text{ tal que } e^{i\beta_g(z)} = \frac{cz+d}{|cz+d|} \right\},$$

donde el producto de dos elementos estará dado por

$$(g,\beta_g)(g',\beta_{g'}) = (gg',\beta_{gg'}),\ \text{con}\ \beta_{gg'}(z) = \beta_g(g'z) + \beta_{g'}(z).$$

Definiendo $\beta_g^k(z) = \arg(cz+d) + 2k\pi$, donde $\arg(cz+d)$ representa la rama principal del logaritmo, es decir, el valor cuya parte imaginaria cae en el intervalo $(-\pi,\pi]$, obtendremos otra caracterización de $\widehat{G}$:

$$\widehat{G} = \left\{ (g,\beta_g^k) \colon g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

de forma que el producto vendría dado por

$$(g,\beta_g^k)\cdot(g',\beta_{g'}^{k'}) = (gg',\beta_{gg'}^{k+k'}),$$

puesto que

$$\begin{aligned}
&\beta_g^k(g'z) + \beta_{g'}^{k'}(z)\\
&= \arg\left(c\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d \right) + 2k\pi + \arg(c'z+d') + 2k'\pi\\
&= \arg\left(\frac{c(a'z+b')+d(c'z+d')}{c'z+d'} \right) + \arg(c'z+d') + 2(k+k')\pi\\
&= \arg(ca'z+cb'+dc'z+dd') + 2(k+k')\pi\\
&= \arg((ca'+dc')z+cb'+dd') + 2(k+k')\pi\\
&= \beta_{gg'}^{k+k'}(z).
\end{aligned}$$

Así, podemos definir un difeomorfismo

$$\begin{array}{rccc}
\Phi\colon & \widehat{G} = \widetilde{\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})} & \longrightarrow & \mathbb{H}^2\times\mathbb{R}\\
& (g,\beta_g^k) & \longmapsto & (gi,\beta_g^k(i))
\end{array}$$

donde

$$\beta_g^k(i) = \begin{cases} \arctan(c/d) + 2k\pi \text{ si } c \neq 0,\\ 2k\pi \text{ si } c = 0, d > 0,\\ \pi + 2k\pi \text{ si } c = 0, d < 0. \end{cases}$$

Para $k = 0$ tendremos el difeomorfismo $\Phi_0\colon \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}^2\times\mathbb{S}^1$. De esta forma se puede definir de forma inmediata una cubierta

$$\begin{array}{rccc}
p\colon & \widehat{G} & \longrightarrow & G\\
& (g,\beta_g^k) & \longmapsto & g
\end{array}$$

que tendrá a $\mathbb{Z}$ como grupo de automorfismos, siendo

$$\pi_1(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})) = \pi_1(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$$

(página 68 de [31]).

12.5. El subgrupo $p^{-1}(K)$

A la vista de la definición de la cubierta p es evidente que

$$p^{-1}(K) = \{(g, \beta_g^k) \in \widehat{G} \colon g \in K, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Nótese que β_g^k es constante para todos los elementos $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \in K$. De hecho

$$\beta_g^k = \arg(1/a) + 2k\pi = \begin{cases} 2k\pi & \text{si } a > 0, \\ (2k+1)\pi & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Así, se deduce que

$$p^{-1}(K_e) = \{(g, \beta_g^k) \colon g \in K_e, k \in \mathbb{Z}\} \cong K_e \times \mathbb{Z}.$$

Topológicamente, dado $g \in K$ se tiene que $\Phi_0(g) = (g \cdot i, \beta_g^0(i))$. Y como

$$g \cdot i = \frac{ai + b}{1/a} = a^2 i + ab$$

y

$$\beta_g^0(i) = \arg(1/a) = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 0 \\ \pi \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

tenemos que $\Phi_0(K) = \mathbb{H}^2 \times \{\pm 1\}$. Así, es evidente que, topológicamente, $p^{-1}(K) \cong \mathbb{H}^2 \times \{k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$, con lo que $p^{-1}(K)_e = \mathbb{H}^2 \times \{0\}$.

De la misma manera se prueba que $p^{-1}(K_e) \cong \mathbb{H}^2 \times \{2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposición 12.6. *El core group* $\mathrm{Core}(p^{-1}(K)) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. Inmediato teniendo en cuenta que $\mathrm{Core}(K) = \{\pm I\}$ y que por el Lema 1.23 sabemos que $\mathrm{Core}(p^{-1}(K)) = p^{-1}(\mathrm{Core}(K))$. Topológicamente, es fácil ver que $\mathrm{Core}(p^{-1}(K)) = \{i\} \times \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$. □

Corolario 12.7. *El core group* $\mathrm{Core}(p^{-1}(K_e)) \cong \mathbb{Z}$.

Corolario 12.8. *El core group* $\mathrm{Core}(p^{-1}(K)_e)) = e \in \widehat{G}$.

Demostración. Inmediato, pues por la Proposición 1.9 sabemos que

$$\mathrm{Core}(p^{-1}(K)_e)) = \mathrm{Core}(p^{-1}(K)) \cap p^{-1}(K)_e.$$

□

12.6. El grupo de Lie $G_\sharp$

Finalizaremos ahora la construcción auxiliar para los grupos que intervienen en la foliación de Roussarie, calculando el grupo de Lie que actúa transitiva y efectivamente en $\widehat{N}$.

Lema 12.9. *Se tiene que* $i(\operatorname{Core}(p^{-1}(K))) \cong \mathbb{Z}$*, donde* i *representa la inclusión de* $p^{-1}(K)$ *en el grupo extendido (Proposición 11.1).*

Demostración.

$$i(\operatorname{Core}(p^{-1}(K))) \cong \operatorname{Core}(p^{-1}(K))/\operatorname{Core}(p^{-1}(K)_e)) = \operatorname{Core}(p^{-1}(K)) \cong \mathbb{Z}. \quad \square$$

Tendremos entonces una cubierta

$$\pi\colon \widehat{G}/p^{-1}(K)_e \cong \mathbb{R} \to \widehat{G}/p^{-1}(K) \cong G/K \cong \mathbb{S}^1,$$

donde en $N = \mathbb{S}^1$ actúa efectivamente el grupo $\widehat{G}/\operatorname{Core}(p^{-1}(K)) \cong \operatorname{PSL}(2,\mathbb{R})$. En $\widehat{N} = \mathbb{R}$ actuará efectivamente el grupo

$$\begin{aligned} G_\sharp &= \left(\widehat{G}/\operatorname{Core}((p^{-1}(K)_e)) \times \operatorname{Aut}\pi\right)/i(\operatorname{Core}(K)) \\ &= \left(\widehat{G} \times \mathbb{Z}\right)/\mathbb{Z} \\ &= \widehat{G}. \end{aligned}$$

Capítulo 13
La foliación $\mathcal{F}$ como $\widehat{N}$-foliación

Sea $\mathcal{F}$ una foliación transversalmente homogénea sobre una variedad M, modelando sobre un espacio homogéneo N. En este capítulo demostraremos que se puede dotar a $\mathcal{F}$ de estructura de $\widehat{N}$-foliación transversalmente homogénea, donde $\widehat{N}$ es la cubierta universal de N.

13.1. Levantamiento del desarrollo a $\widehat{N}$

Sea $\mathcal{F}$ una foliación transversalmente homogénea modelando sobre una variedad homogénea $N = \widehat{G_0}/\widehat{K_0}$, con grupo de holonomía $\Gamma_0 \subset \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$. La cubierta universal de N será

$$\pi\colon \widehat{N} = \widehat{G_0}/(\widehat{K_0})_e \to N = \widehat{G_0}/\widehat{K_0},$$

con grupo de automorfismos $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$. Éste actúa sobre $\widehat{N}$ por la izquierda de forma que $[k]\cdot[g] = [kg^{-1}]$, donde $[k] \in \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ y $[g] \in \widehat{G_0}/\widehat{K_0}$.

La acción de $\widehat{G_0}$ sobre $\widehat{N}$ dada por $\hat{\lambda}(g)\colon \widehat{N} \to \widehat{N}$, con $\hat{\lambda}(g)([x]) = [gx]$, hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \widehat{N} \arrow[r, "\hat{\lambda}(g)"] \arrow[d, "\pi"'] & \widehat{N} \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "\lambda(g)"'] & N \end{tikzcd}$$

con lo que $\pi \circ \hat{\lambda}(g) = \lambda(g) \circ \pi$.

A lo largo de este capítulo, una vez más, utilizaremos la notación $[\ ]^\sharp$ para los elementos de $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$ y $[\ ]_\sharp$ para los elementos de $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e$.

Si consideramos la aplicación desarrollo $f\colon \widetilde{M} \to N$ y la cubierta universal $\tilde{p}\colon \widehat{M} \to \widetilde{M}$, tendremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \widehat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & \widehat{N} \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \\ M & \end{tikzcd} \tag{13.1.1}$$

donde la existencia de $\hat{f}$ está garantizada por la propiedad de levantamiento de la cubierta π (Teorema 5 de la página 76 de [43]), ya que $\widehat{M}$ y $\widehat{N}$ son simplemente conexos. De esta forma $\hat{f}$ es una submersión cuyas fibras definen en $\widehat{M}$ la foliación $\widehat{\mathcal{F}} = \tilde{p}^*(\widetilde{\mathcal{F}}) = (p \circ \tilde{p})^*(\mathcal{F})$.

13.2. La foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ como $\widehat{N}$-foliación

En esta sección comprobaremos que la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ se puede dotar de estructura de $\widehat{N}$-foliación transversalmente homogénea cuando sobre $\widehat{N}$ se hace actuar el grupo de Lie $G_\sharp$, que, como demostramos en la Sección 11.2, actúa transitiva y efectivamente por la izquierda sobre $\widehat{N}$. Recordemos su expresión:

$$G_\sharp = (\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e \times \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e)/i(\operatorname{Core}\widehat{K_0}).$$

Para demostrar que se puede dotar a $\widetilde{\mathcal{F}}$ de una estructura de $\widehat{N}$-foliación transversalmente homogénea daremos una construcción explícita de la aplicación desarrollo de $\widetilde{\mathcal{F}}$ como $\widehat{N}$-foliación, así como de su morfismo de holonomía. Partiremos del diagrama

$$\begin{tikzcd} \widehat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & \widehat{N} \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Aunque $\widehat{N}$ es un $\widehat{G_0}$-espacio homogéneo, no es posible encontrar una holonomía sobre $\widehat{G_0}$ que haga a $\hat{f}$ equivariante. Encontraremos, sin embargo, un morfismo

$$\tilde{h}\colon \pi_1(\widetilde{M}) \to \operatorname{Aut}(\pi) \cong \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e \subset G_\sharp$$

de tal forma que $\hat{f}$ será $\tilde{h}$-equivariante:

Proposición 13.1. *La foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ en $\widetilde{M}$ tiene estructura de $\widehat{N}$-foliación transversalmente homogénea cuando sobre $\widehat{N}$ actúa el grupo de Lie $G_\sharp$. En este caso el grupo de holonomía de la foliación será un subgrupo $\widetilde{\Gamma}_0 \subset \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e \subset G_\sharp$.*

Demostración. Sea $\gamma \in \operatorname{Aut}(\tilde{p}) \cong \pi_1(\widetilde{M})$ y sea $\hat{x} \in \widehat{M}$. Tenemos que

$$\pi(\hat{f}(\gamma\hat{x})) = (f \circ \tilde{p})(\gamma\hat{x}) = f(\tilde{p}(\gamma\hat{x})) = f(\tilde{p}(\hat{x})) = \pi(\hat{f}(\hat{x})).$$

Por tanto, $\hat{f}(\gamma\tilde{x})$ y $\hat{f}(\hat{x})$ se relacionan por un automorfismo de la cubierta π, es decir, $\hat{f}(\gamma\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x}) \cdot \xi$, con $\xi = \xi(\gamma, \tilde{x}) \in \operatorname{Aut}(\pi)$.

Como $\operatorname{Aut}(\pi) \cong \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ es un grupo discreto, entonces $\xi(\gamma, \hat{x})$ no depende del elemento $\hat{x} \in \widehat{M}$, puesto que $\xi(\gamma, -)$ es una aplicación continua (Lema 13.2) de una variedad conexa en un espacio discreto, y por lo tanto constante. Si llamamos $\tilde{h}(\gamma) = \xi(\gamma, \hat{x})$ tendremos un morfismo $\tilde{h}\colon \pi_1(\widetilde{M}) \to \operatorname{Aut}(\pi)$ que hace a $\hat{f}$ $\tilde{h}$-equivariante. Veamos que $\tilde{h}$ es un morfismo de grupos. Dados $\gamma_1, \gamma_2 \in \operatorname{Aut}(\tilde{p})$ tendremos

$$\hat{f}(\gamma_1\gamma_2\hat{x}) = \tilde{h}(\gamma_1\gamma_2) \cdot \hat{f}(\hat{x})$$

y

$$\hat{f}(\gamma_1\gamma_2\hat{x}) = \tilde{h}(\gamma_1) \cdot \hat{f}(\gamma_2\hat{x}) = \tilde{h}(\gamma_1)\tilde{h}(\gamma_2) \cdot \hat{f}(\hat{x})$$

para todo $\hat{x} \in \widehat{M}$. Y como la acción de $\mathrm{Aut}(\pi)$ en $\widehat{N}$ es libre entonces $\tilde{h}(\gamma_1\gamma_2) = \tilde{h}(\gamma_1)\tilde{h}(\gamma_2)$.

Vimos en la Proposición 11.5 que la inclusión $j\colon \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e \to G_\sharp$ es inyectiva, con lo que, haciendo $\widetilde{\Gamma}_0 = \operatorname{im}\tilde{h} \subset \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e \subset G_\sharp$ tendremos el grupo de holonomía de $\widetilde{\mathcal{F}}$ como $\widehat{N}$-foliación dentro de un grupo de Lie que actúa de forma transitiva y efectiva en $\widehat{N}$. □

Lema 13.2. *La aplicación $\xi(\gamma, -)\colon \widehat{M} \to \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ que a cada $\hat{x} \in \widehat{M}$ lo lleva a $\xi(\gamma, \hat{x}) \in \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ es continua.*

Demostración. Para facilitar la lectura, haremos $\xi = \xi(\gamma, -)$. Supongamos entonces que existe $\hat{x} \in \widehat{M}$ tal que ξ no es continua en $\hat{x}$. Como la acción de $\widehat{K}_0/(\widehat{K}_0)_e$ sobre $\widehat{N}$ es libre y propiamente discontinua podemos coger un entorno abierto $V \subset \widehat{N}$ de $f(\hat{x})$ tal que

$$V \cap kV = \emptyset \tag{13.2.1}$$

para todo $k \in \widehat{K}_0/(\widehat{K}_0)_e$, $k \neq e$.

Llamemos $U = (f^{-1}(V))_{\hat{x}} \subset \widehat{M}$ a la componente conexa de $f^{-1}(V)$ que contiene a $\hat{x}$. Por continuidad de f, U es abierto en $\widehat{M}$. Así, $f(U) \subset V$ será un entorno abierto (f es abierta por ser una submersión) de $f(\hat{x})$ que, por 13.2.1, cumplirá que

$$f(U) \cap kf(U) = \emptyset \tag{13.2.2}$$

para todo $k \in \widehat{K}_0/(\widehat{K}_0)_e$, $k \neq e$.

Como suponemos que ξ no es continua en $\hat{x}$ entonces existe $k \in \widehat{K}_0/(\widehat{K}_0)_e$, $k \neq e$, tal que $k \in \xi(U)$. Para simplificar la notación, podemos suponer que $\xi(U) = \{e, k\}$, lo que, por la equivarianza de $\hat{f}$, significaría que $\hat{f}(\gamma U) \subset f(U) \cup kf(U)$, con $\hat{f}(\gamma U) \cap f(U) \neq \emptyset$ y $\hat{f}(\gamma U) \cap kf(U) \neq \emptyset$, lo que no puede ser pues, por continuidad de $\hat{f}$ tenemos que $\hat{f}(\gamma U)$ es conexo y no puede estar contenido en dos abiertos disjuntos. □

Nota 13.3. El morfismo $\tilde{h}\colon \pi_1(\widetilde{M}) \to \mathrm{Aut}(\pi)$ queda totalmente determinado por la ecuación $f(\gamma\tilde{x}) = \tilde{h}(\gamma) \cdot f(\tilde{x})$, pues la acción de $\mathrm{Aut}(\pi)$ en $\widehat{N}$ es libre. Daremos a continuación una descripción explícita de cuál es ese morfismo, lo que nos permitirá contar con una definición manejable del grupo de holonomía de $\widetilde{\mathcal{F}}$, de gran protagonismo en cálculos posteriores.

Proposición 13.4. *Se tiene que la submersión $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ es equivariante para el morfismo $\pi_1(f)\colon \pi_1(\widetilde{M}) \to \pi_1(N)$.*

Demostración. Sean $\gamma \in \mathrm{Aut}(p) = \pi_1(\widetilde{M})$ y $\hat{x} \in \widehat{M}$. Llamemos $\tilde{x} = p(\hat{x}) \in \widetilde{M}$. El elemento γ es un lazo en $\widetilde{M}$ que, si lo aplicamos en $\tilde{x}$ y lo levantamos a $\widehat{M}$ nos dará un camino $\hat{\gamma}$, único salvo homotopía, que, con punto inicial $\hat{x}$ nos llevará hasta $\gamma \cdot \hat{x} \colon = \hat{\gamma}(1)$. Recordemos ahora cómo se calculan $\hat{f}(\hat{x})$ y $\hat{f}(\gamma\hat{x})$:

Tomando como punto inicial un punto fijo $\hat{o} \in \widehat{M}$ y un camino cualquiera $\hat{\delta}$ que una $\hat{o}$ con $\hat{x}$, aplicando $(f \circ p)$ tendremos un camino α en N que unirá $(f \circ p)(\hat{o})$ con $(f \circ p)(\hat{x})$. Levantando ese camino a $\widehat{N}$ tendremos un camino $\hat{\alpha}$ con punto inicial $\hat{f}(\hat{o})$ (fijado previamente) y con punto final $\hat{f}(\hat{x}) \colon = \hat{\alpha}(1)$.

Procederemos de la misma forma para calcular $\hat{f}(\gamma\hat{x})$. Para ello, podemos tomar en $\widehat{M}$ el camino $\hat{\delta} * \hat{\gamma}$, que unirá $\hat{o}$ con $\gamma\hat{x}$. Proyectando a N a través de $f \circ p$ obtendremos un camino $\beta = (f \circ p) \circ (\hat{\delta} * \hat{\gamma}) = \alpha * \pi_1(f)(\gamma)$. Levantando β a $\widehat{N}$ tendremos un camino $\hat{\beta} = \hat{\alpha} * \widehat{\pi_1(f)(\gamma)}$. Así,

$$\hat{f}(\gamma\hat{x}) = \hat{\beta}(1) = \widehat{\pi_1(f)(\gamma)}(1) = \pi_1(f)(\gamma) \cdot \hat{f}(\hat{x}). \quad \square$$

Si componemos entonces $\pi_1(f)$ con el isomorfismo entre $\pi_1(N)$ y $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ obtendremos el morfismo $\tilde{h}\colon \pi_1(\widetilde{M}) \to \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e \subset G_\sharp$ de la Proposición 13.1. Así, obviando este homeomorfismo para simplificar notaciones, podemos considerar a partir de ahora:

Corolario 13.5. *El grupo de holonomía de $\widetilde{\mathcal{F}}$ es $\widetilde{\Gamma}_0 = \operatorname{im} \pi_1(f) \subset \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e \subset G_\sharp$.*

13.3. La foliación $\mathcal{F}$ como $\widehat{N}$-foliación

Explicaremos ahora de qué forma se puede dotar a la foliación $\mathcal{F}$ de estructura de $\widehat{N}$-foliación.

Proposición 13.6. *La foliación $\mathcal{F}$ tiene estructura de $\widehat{N}$-foliación transversalmente homogénea cuando sobre $\widehat{N}$ actúa el grupo de Lie $G_\sharp$.*

Para demostrarlo, partiremos del diagrama

$$\begin{tikzcd} \widehat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & \widehat{N} \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \\ M & \end{tikzcd} \tag{13.3.1}$$

donde la composición $\hat{p} = p \circ \tilde{p}$ es la cubierta universal de M y donde sabemos que existe $h\colon \pi_1(M) \to \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$, morfismo de holonomía de $\mathcal{F}$ cuando modela sobre N, de forma que f es h-equivariante.

Estudiaremos en primer lugar cómo hacen variar $\hat{f}$ los automorfismos de la cubierta $\hat{p}$, para poder encontrar un morfismo $\hat{h}\colon \pi_1(M) \to G_\sharp$ que haga que $\hat{f}$ sea $\hat{h}$-equivariante:

Siguiendo el diagrama (13.3.1), dados $\gamma \in \pi_1(M) = \operatorname{Aut}(\tilde{p} \circ p)$ y $\hat{x} \in \widehat{M}$ (denotaremos $\tilde{x} = \tilde{p}(\hat{x})$ y $x = \hat{p}(\hat{x}) = p(\tilde{x})$) tendremos que

$$\begin{aligned} \pi(\hat{f}(\gamma\hat{x})) &= f(\tilde{p}(\gamma\hat{x})) \\ &= f(\gamma\tilde{x}) \\ &= h(\gamma) \cdot f(\tilde{x}) \\ &= h(\gamma) \cdot f(\tilde{p}(\hat{x})) \\ &= h(\gamma) \cdot \pi(\hat{f}(\hat{x})). \end{aligned} \tag{13.3.2}$$

Como $h(\gamma) \in \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$ no actúa directamente sobre $\widehat{N}$ deberemos hacer uso de la sección $s\colon \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0} \to \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e$, dada en la Sección 11.3. Necesitaremos el siguiente Lema:

Lema 13.7. *Dados $\hat{n} \in \widehat{N}$ y $[g]^\sharp \in \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$ se tiene que*

$$[g]^\sharp \cdot \pi(\hat{n}) = \pi(s([g]^\sharp) \cdot \hat{n}).$$

Demostración. El diagrama

$$\begin{tikzcd} \widehat{N} \arrow[r, "\hat{\lambda}([g]_\sharp)"] \arrow[d, "\pi"'] & \widehat{N} \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "\lambda([g]^\sharp)"'] & N \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Como $[g]^\sharp = p([g]_\sharp)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \pi(s([g]^\sharp) \cdot \hat{n}) &= (\pi \circ \hat{\lambda}(s([g]^\sharp)))(\hat{n}) \\ &= (\lambda(p(s([g]_\sharp))) \circ \pi)(\hat{n}) \\ &= (\lambda([g]^\sharp) \circ \pi)(\hat{n}) \\ &= [g]^\sharp \cdot \pi(\hat{n}). \end{aligned}$$

□

Por tanto, por el Lema 13.7, en (13.3.2) tendremos que

$$\pi(\hat{f}(\gamma\hat{x})) = h(\gamma) \cdot \pi(\hat{f}(\hat{x})) = \pi(s(h(\gamma)) \cdot \hat{f}(\hat{x})),$$

lo que significa que existe $\xi(\gamma, \hat{x}) \in \operatorname{Aut}(\pi) \cong \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ tal que

$$\hat{f}(\gamma\hat{x}) = \xi(\gamma, \hat{x}) \cdot s(h(\gamma)) \cdot \hat{f}(\hat{x}). \tag{13.3.3}$$

Con un razonamiento similar al efectuado en la demostración de la Proposición 13.1 se comprueba que $\xi(\gamma, \hat{x})$ no depende del elemento $\hat{x} \in \widehat{M}$, y por tanto tenemos una aplicación $\xi\colon \pi_1(M) \to \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$.

Esta aplicación no es de grupos:

Proposición 13.8. *Dados $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(M)$, se tiene que*

$$\xi(\gamma_1\gamma_2) = \xi(\gamma_1) \cdot \xi(\gamma_2) \cdot c_{12}, \tag{13.3.4}$$

donde $c_{12} = s(h(\gamma_1)) \cdot s(h(\gamma_2)) \cdot s(h(\gamma_1\gamma_2))^{-1} \in \operatorname{Core}\widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e$.

Demostración. Sean $\hat{x} \in \widehat{M}$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(M)$. Tendremos:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\gamma_1\gamma_2\hat{x}) &= \xi(\gamma_1\gamma_2) \cdot s(h(\gamma_1\gamma_2)) \cdot \hat{f}(\hat{x}) \\ &= \xi(\gamma_1\gamma_2) \cdot s(h(\gamma_1) \cdot h(\gamma_2)) \cdot \hat{f}(\hat{x}) \\ &= \xi(\gamma_1\gamma_2) \cdot c_{12}^{-1} \cdot s(h(\gamma_1)) \cdot s(h(\gamma_2)) \cdot \hat{f}(\hat{x}). \end{aligned} \tag{13.3.5}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{f}(\gamma_1\gamma_2\hat{x}) &= \bar{f}(\gamma_1(\gamma_x\tilde{x}))\\ &= \xi(\gamma_1)\cdot s(h(\gamma_1))\cdot \hat{f}(\gamma_2\hat{x})\\ &= \xi(\gamma_1)\cdot s(h(\gamma_1))\cdot \xi(\gamma_2)\cdot s(h(\gamma_2))\cdot \hat{f}(\hat{x}) \end{aligned}\tag{13.3.6}$$

para todo $\hat{x}\in\widehat{M}$.

Entonces, como las aplicaciones ξ y $(s\circ h)$ conmutan (Lema 13.9), tendremos que

$$\bar{f}(\gamma_1(\gamma_x\tilde{x})) = \xi(\gamma_1)\cdot\xi(\gamma_2)\cdot s(h(\gamma_1))\cdot s(h(\gamma_2))\cdot\hat{f}(\hat{x}),\quad \forall\,\hat{x}\in\widehat{M}.\tag{13.3.7}$$

Así, si igualamos (13.3.5) y (13.3.7), teniendo en cuenta que $\operatorname{Core}\widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e$ es un subgrupo de $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ y que la acción de $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ en $\widehat{N}$ es libre, llegaremos al resultado. □

Lema 13.9. *Las aplicaciones ξ y $(s\circ h)$ conmutan. Es decir:*

$$s(h(\gamma_1))\cdot\xi(\gamma_2)\cdot\hat{n} = \xi(\gamma_2)\cdot s(h(\gamma_1))\cdot\hat{n}\quad \forall\,\hat{n}\in\widehat{N}.$$

Demostración. Considerando $\hat{n}=[g]\in\widehat{N}$, $s(h(\gamma_1))=[\gamma]_\sharp\in\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e$ y $\xi(\gamma_2)=[k]\in\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$, tendremos que

$$s(h(\gamma_1))\cdot\xi(\gamma_2)\cdot\hat{n} = [\gamma]_\sharp\cdot[k]\cdot[g] = [\gamma g k^{-1}] = \xi(\gamma_2)\cdot s(h(\gamma_1))\cdot\hat{n}.\quad \square$$

Estamos ya en condiciones de definir el morfismo de holonomía de $\mathcal{F}$ cuando modela sobre $\widehat{N}$:

Definición 13.10. Llamaremos $\hat{h}$ a la aplicación $\hat{h}\colon\pi_1(M)\to G_\sharp$ dada por

$$\hat{h}(\gamma) = [(s(h(\gamma)),\xi(\gamma))]\in G_\sharp,$$

para la que $\hat{f}$ será $\hat{h}$-equivariante.

Proposición 13.11. *La aplicación $\hat{h}$ es de grupos.*

Demostración. Dados $\gamma_1,\gamma_2\in\pi_1(M)$, tendremos que

$$\begin{aligned}\hat{h}(\gamma_1\gamma_2) &= [(s(h(\gamma_1\gamma_2)),\xi(\gamma_1\gamma_2))]\\ &= [(s(h(\gamma_1)h(\gamma_2)),\xi(\gamma_1\gamma_2))]\\ &= [(s(h(\gamma_1))\cdot s(h(\gamma_2))\cdot c_{12},\xi(\gamma_1)\cdot\xi(\gamma_2)\cdot c_{12})]\\ &= [(s(h(\gamma_1))\cdot s(h(\gamma_2)),\xi(\gamma_1)\cdot\xi(\gamma_2))],\end{aligned}$$

donde, recordemos,

$$c_{12} = s(h(\gamma_1))\cdot s(h(\gamma_2))\cdot s(h(\gamma_1\gamma_2))^{-1}\in\operatorname{Core}\widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e.$$

□

Por tanto, tendremos $\hat{h}\colon\pi_1(M)\to G_\sharp$ homomorfismo de grupos que hace a $\hat{f}$ $\hat{h}$-equivariante, lo que dota a $\mathcal{F}$ de estructura de $\widehat{N}$-foliación transversalmente homogénea, finalizando la demostración de la Proposición 13.6.

Definición 13.12. Llamaremos $\Gamma=\operatorname{im}\hat{h}\subset G_\sharp$ al grupo de holonomía de $\mathcal{F}$ cuando modela sobre $\widehat{N}$.

13.4. Relación entre las holonomías

Recordemos que $G_\sharp = (\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e \times \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e)/i(\operatorname{Core}\widehat{K_0})$. Tenemos la extensión

$$0 \longrightarrow \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e \xrightarrow{j} G_\sharp \xrightarrow{\pi} \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0} \longrightarrow 0, \tag{13.4.1}$$

donde

$$j([k]) = [([e]_\sharp, [k])]$$

y

$$\pi([([g]_\sharp, [k])]) = p([g]_\sharp) = [g]^\sharp.$$

Por otro lado, tenemos:

1. El grupo de holonomía de $\mathcal{F}$ como N-foliación, $\Gamma_0 = \operatorname{im} h$, con
$$h\colon \pi_1(M) \to \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}.$$

2. El grupo de holonomía de $\widetilde{\mathcal{F}}$ como $\widehat{N}$-foliación, $\widetilde{\Gamma}_0 = \operatorname{im}\tilde{h}$, con
$$\tilde{h}\colon \pi_1(\widetilde{M}) \to \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e.$$

3. El grupo de holonomía de $\mathcal{F}$ como $\widehat{N}$-foliación, $\Gamma = \operatorname{im}\hat{h}$, con
$$\hat{h}\colon \pi_1(M) \to G_\sharp,$$
donde
$$\hat{h}(\gamma) = [(s(h(\gamma)), \xi(\gamma))] \in G_\sharp,$$
siendo s una sección de la cubierta
$$p\colon \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e \to \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$$
y ξ una aplicación de $\pi_1(M)$ en $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ que no es de grupos. Además $\xi_{|\pi_1(\widetilde{M})} = \tilde{h}$. Así,
$$\Gamma = \{[(s(h(\gamma)), \xi(\gamma))] \colon \gamma \in \pi_1(M)\} \subset G_\sharp.$$

Ahora probaremos que la restricción de la extensión (13.4.1) a los grupos de holonomía es una extensión:

Teorema 13.13. *El grupo de holonomía de $\mathcal{F}$ como $\widehat{N}$ -foliación, $\Gamma \subset G_\sharp$, es una extensión de $\Gamma_0 \subset \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$ por $\widetilde{\Gamma}_0 \subset \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$.*

Demostración. Partiendo de la extensión (13.4.1) demostraremos que

$$0 \longrightarrow \widetilde{\Gamma}_0 \xrightarrow{j_{|\widetilde{\Gamma}_0}} \Gamma \xrightarrow{\pi_{|\Gamma}} \Gamma_0 \longrightarrow 0$$

es una extensión. Por simplificar la notación, llamaremos directamente j y π a las restricciones.

Consideremos la inclusión $\widetilde{\Gamma}_0 \xrightarrow{j} \Gamma$, que vendrá dada por

$$j(\tilde{\gamma}) = [([e]_\sharp, \tilde{\gamma})],$$

con $\tilde{\gamma} \in \pi_1(\widetilde{M})$. En primer lugar es necesario comprobar que $j(\widetilde{\Gamma}_0) \subset \Gamma$. Veámoslo:

Dado $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}_0 = \operatorname{im} \tilde{h}$, tendremos que existe $\gamma \in \pi_1(\widetilde{M})$ tal que $\tilde{\gamma} = \tilde{h}(\gamma)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\gamma) &= [(s(h(\gamma)), \xi(\gamma))] \\
&= [(s([e]^\sharp), \xi(\gamma))], \text{ pues } \gamma \in \pi_1(\widetilde{M}) = \ker h \\
&= [(s([e]^\sharp), \tilde{h}(\gamma))], \text{ pues } \xi_{|\pi_1(\widetilde{M})} = \tilde{h} \\
&= [([e]_\sharp, \tilde{\gamma})] = j(\tilde{\gamma}) \in \Gamma = \operatorname{im} \hat{h}.
\end{aligned}$$

La inclusión j es inyectiva por ser restricción de una inyectiva.

Tomemos ahora la restricción $\pi \colon \Gamma \to \Gamma_0$ dada por

$$\pi([(s(h(\gamma)), \xi(\gamma))]) = p(s(h(\gamma))) = h(\gamma) \in \Gamma_0 \quad \forall \gamma \in \pi_1(M).$$

Está bien definida, pues si escogemos otro representante $(s(h(\gamma)) \cdot k, \xi(\gamma) \cdot k)$, donde $k \in \operatorname{Core} \widehat{K_0} / \operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e$, se tiene que $p(s(h(\gamma)) \cdot k) = h(\gamma)$. Además, es claramente sobreyectiva.

Comprobemos que $\ker \pi = \operatorname{im} j$. Veamos en primer lugar que $\ker \pi \subset \operatorname{im} j$:

Sea $\sigma = [(s(h(\gamma)), \xi(\gamma))] \in \ker \pi$. Esto es:

$$\pi(\sigma) = \pi([(s(h(\gamma)), \xi(\gamma))]) = h(\gamma) = [e]^\sharp,$$

lo que equivale a que $\gamma \in \ker h = \pi_1(\widetilde{M})$, con lo que concluimos que

$$\sigma = [([e]_\sharp, \tilde{h}(\gamma))] = j(\tilde{h}(\gamma)).$$

Para terminar, veamos que $\operatorname{im} j \subset \ker \pi$:

Dado $\tilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}_0$, tendremos $j(\tilde{\gamma}) = [([e]_\sharp, \tilde{\gamma})] \in \operatorname{im} j$. Entonces

$$\pi(j(\tilde{\gamma})) = \pi([([e]_\sharp, \tilde{\gamma})]) = [e]^\sharp \Leftrightarrow j(\tilde{\gamma}) \in \ker \pi. \quad \square$$

Corolario 13.14. *Dados los grupos de holonomía $\Gamma_0 \subset \widehat{G_0} / \operatorname{Core} \widehat{K_0}$, $\widetilde{\Gamma}_0 \subset G_\sharp$ y $\Gamma \subset G_\sharp$ de las foliaciones $\mathcal{F}$, $\widetilde{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{F}$ cuando modela sobre $\widehat{N}$, tendremos que*

$$\Gamma_0 = \Gamma / \widetilde{\Gamma}_0.$$

Capítulo 14

Unimodularidad en foliaciones no Riemannianas

En este Capítulo daremos un primer teorema sobre la unimodularidad de las foliaciones transversalmente homogéneas, dando condiciones que la garantizan para las foliaciones no Riemannianas y que, como veremos más adelante, podrán concretarse mucho más en caso de que la foliación sea Riemanniana.

14.1. Cohomología invariante en espacios homogéneos

Sea H un subgrupo cerrado de G. Sea ω una forma de volumen en la variedad $W = H\backslash G$ y sea $f\colon W \to \mathbb{R}$. La existencia de una ω es equivalente a que W sea orientable. La integral de f en W está bien definida por ser W compacta y se denota por $\int_W f(x)\,w(x)$. Podemos suponer que el volumen total $\int_W w(x) = 1$. Si $\rho\colon W \to W$ es un difeomorfismo que conserva la orientación, el teorema de cambio de variable dice que para $y = \rho(x)$ se tiene

$$\int_W f(y)\,\omega(y) = \int_W (f \circ \rho)(x)\,(\rho^*\omega)(x).$$

Sea ahora K otro subgrupo cerrado de G y sea el espacio homogéneo $N \cong G/K$.

Teorema 14.1. *Si en $W = H\backslash G$ compacto existe una forma de volumen w invariante por la derecha, entonces se tiene que el morfismo*

$$\mathrm{H}_G(N) \to \mathrm{H}_H(N)$$

inducido por la inclusión $i\colon \Omega_G(N) \to \Omega_H(N)$ es inyectivo.

Demostración. Construiremos un morfismo de complejos $r\colon \Omega_H(N) \to \Omega_G(N)$ tal que $r \circ i = \mathrm{id}$. Consideremos el morfismo $\lambda\colon G \to \mathrm{Diff}(N)$ dado por $\lambda(g)(p) = g \cdot p$. Sea ahora una forma α de grado s en N que sea H-invariante, $\alpha \in \Omega^s_H(N)$. La siguiente función está bien definida:

$$\phi_\alpha\colon x = [g] \in W = H\backslash G \mapsto x^*\alpha = \lambda(g)^*\alpha \in \Omega^s(N),$$

porque para $h \in H$ tenemos

$$\lambda(hg)^*\alpha = (\lambda(h) \circ \lambda(g))^*\alpha = \lambda(g)^*\lambda(h)^*\alpha = \lambda(g)^*\alpha.$$

Denotamos por $r(\alpha) = \int_W (x^*\alpha)\,\omega(x)$ la siguiente r-forma en N:

$$r(\alpha)_{[g]}(X_1([g]), \dots, X_s([g])) = \int_W (x^*\alpha)_{[g]}(X_1([g]), \dots, X_s([g]))\,\omega(x).$$

Claramente $r(\alpha) \in \Omega^s(N)$, es decir, es multilineal alternada en cada punto.

Lema 14.2. *1. $r(\alpha)$ es G-invariante*

2. Si α ya era G-invariante entonces $r(\alpha) = \alpha$.

3. $r(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}r(\alpha)$.

Demostración. 1.- Si $k \in G$ es

$$\begin{aligned}(\lambda(k)^* r(\alpha))_{[g]}(X_{[g]}) &= r(\alpha)_{[kg]}((\lambda(k))_{*[g]}(X_{[g]})) \\ &= \int_W (x^*\alpha)_{[kg]}((\lambda(k))_{*[g]}(X_{[g]}))\,\omega(x) \\ &= \int_W (\lambda(k)^*(x^*\alpha))_{[g]}(X_{[g]})\,\omega(x) \\ &= \int_W (\lambda(k)^*(\phi_\alpha(x)))_{[g]}(X_{[g]})\,\omega(x).\end{aligned}$$

Ahora bien, para $x = [g] \in W$ se tiene

$$\phi_\alpha(\rho(k)(x)) = \lambda(gk)^*\alpha = \lambda(k)^*\lambda(g)^*\alpha = \lambda(k)^*(\phi_\alpha(x))$$

para la acción ρ de G en W *por la derecha*. Como por otro lado $\rho(k)^*\omega = \omega$, pues ω es invariante por la derecha, por el teorema de cambio de variable, haciendo $y = \rho(k)(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_W ((\phi_\alpha \circ \rho(k))(x))_{[g]}(X_{[g]})\,\omega(x) &= \int_W (\phi_\alpha(y))_{[g]}(X_{[g]})\,\omega(y) \\ &= \int_W (y^*\alpha)_{[g]}(X_{[g]})\,\omega(y)\end{aligned}$$

sin más que considerar la composición $W \to \Omega(N) \to \mathbb{R}$ de $\rho(k)$ con ϕ_α y con la evaluación de cada s-forma en $X_{[g]} = (X_1([g]), \dots, X_s([g]))$.

2.- Si α es G-invariante entonces $x^*\alpha$ es una constante, pues hemos supuesto que

$$\int_W w(x) = 1.$$

3.- Tenemos por un lado que

$$r(\mathrm{d}\alpha) = \int_W (x^*\mathrm{d}\alpha)(X_0, \dots, X_s)\,\omega(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_W \mathrm{d}(x^*\alpha)(X_0, \ldots, X_{s+1})\, \omega(x) \\
&= \int_W \sum_i (-1)^i X_i(x^*\alpha)(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots . X_s)\, \omega(x) \\
&+ \int_W \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (x^*\alpha)([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_s)\, \omega(x) \\
&= \sum_i (-1)^i \int_W X_i(x^*\alpha)(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots . X_s)\, \omega(x) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \int_W (x^*\alpha)([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_s)\, \omega(x).
\end{aligned}
$$

Por otro lado, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}r(\alpha) &= \sum_i (-1)^i X_i r(\alpha)(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_s) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} r(\alpha)([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_s) \\
&= \sum_i (-1)^i X_i \int_W (x^*\alpha)(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots . X_{s+1})\, \omega(x) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \int_W (x^*\alpha)([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_s)\, \omega(x),
\end{aligned}
$$

con lo que, ya que los segundos sumandos coinciden, sólo faltaría comprobar que

$$
\begin{aligned}
&\int_W X_i(x^*\alpha)(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots . X_{s+1})\, \omega(x) \\
&= X_i \int_W (x^*\alpha)(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots . X_{s+1})\, \omega(x),
\end{aligned}
$$

lo cual es cierto por el Teorema 14.4. □

Como consecuencia, $r\colon \Omega_H(N) \to \Omega_G(N)$ es un morfismo de complejos tal que $r \circ i = \mathrm{id}$, con $i\colon \Omega_G(N) \subset \Omega_H(N)$ la inclusión de complejos, lo que significa que el morfismo inducido en cohomología $\mathrm{H}_G(N) \to \mathrm{H}_H(N)$ es inyectivo porque $r^* \circ i^* = \mathrm{id}$. □

Corolario 14.3. *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado tal que el espacio homogéneo $W = H\backslash G$ es compacto. Sea $N \cong G/K$ un espacio homogéneo, con K subgrupo cerrado de G. Si G es fuertemente unimodular, H es unimodular y $\mathrm{H}^n_G(N) \neq 0$, entonces $\mathrm{H}^n_H(N) \neq 0$, donde $n = \dim N$.*

Demostración. Estudiemos en primer lugar el caso en que $\dim H \geq 1$:

Que G sea fuertemente unimodular implica que $\det \mathrm{Ad}_G(h) = 1$ para todo $h \in H$. Sin embargo, como H no es necesariamente conexo, aún siendo unimodular, puede suceder que $\det \mathrm{Ad}_H(h) = -1$ para algún h.

Si $\det \mathrm{Ad}_H(h) = \det \mathrm{Ad}_G(h) = 1$ para todo $h \in H$, por el Teorema 2.15 sabemos que en $W = H\backslash G$ existe una forma de volumen invariante, lo que implica, por el Teorema 14.1, que el morfismo $\mathrm{H}_G(N) \to \mathrm{H}_H(N)$ es inyectivo. Y como $\mathrm{H}^n_G(N) \neq 0$, tenemos ya que $\mathrm{H}^n_H(N) \neq 0$.

En caso de que $\det \mathrm{Ad}_H(h) = -1$ para algún h, siguiendo [30] o [33], hacemos $H_2 = \{h \in H\colon \det \mathrm{Ad}_H(h) > 0\}$ y $W_2 = H_2\backslash G$. Así, W_2 es compacta y $\det \mathrm{Ad}_{H_2}(h) = \det \mathrm{Ad}_G(h) = 1$ para todo $h \in H_2$. Por tanto, por el Teorema 14.1, tenemos que el morfismo $\mathrm{H}_G(N) \to \mathrm{H}_{H_2}(N)$ es inyectivo. Considerando entonces la composición

$$\Omega_G(N) \to \Omega_H(N) \to \Omega_{H_2}(N)$$

tendremos que $\mathrm{H}_G(N) \to \mathrm{H}_H(N)$ es el primer morfismo de una composición inyectiva, y por tanto, será también inyectivo.

Y una vez más, como $\mathrm{H}^n_G(N) \neq 0$, tendremos que $\mathrm{H}^n_H(N) \neq 0$.

El caso en que H es discreto se demuestra de manera análoga a como se hizo en la demostración del Corolario 9.26. □

14.2. Derivación bajo el signo integral en variedades

Si X es un campo de vectores en la variedad N y $f\colon N \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, denotamos por $(Xf)(p) = f_{*p}(X_p)$, como es usual, la derivada de f en la dirección de X en el punto $p \in N$.

Sea W otra variedad, compacta orientable, $f\colon W \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, y ω una forma de volumen en W. La integral de f en W se denota por $\int_W f(x) \cdot \omega(x)$. Podemos suponer que el volumen total es $\int_W \omega(x) = 1$.

Sea una función diferenciable $g\colon W \times N \to \mathbb{R}$. Para cada $p \in N$ tenemos la función $x \in W \mapsto g(x,p) \in \mathbb{R}$ y tiene sentido integrarla, obteniendo $\int_W g(x,p) \cdot \omega(x)$. Así tenemos la función

$$p \in N \mapsto \int_W g(x,p) \cdot \omega(x).$$

Teorema 14.4. *Sean W y N dos variedades diferenciables, W compacta orientable. Dada una función diferenciable $g\colon W \times N \to \mathbb{R}$ y un campo de vectores X en N, tenemos que*

$$\int_W Xg(x,p) \cdot \omega(x) = X \int_W g(x,p) \cdot \omega(x).$$

donde la derivación X es relativa a la variable p.

Demostración. Dado un campo de vectores X en N y una función $f\colon N \to \mathbb{R}$ se tiene que, para todo $p \in N$,

$$(Xf)(p) = f_{*p}(X_p) = \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}(f \circ \alpha)(t),$$

con $\alpha\colon \mathbb{R} \to N$ curva integral de X tal que $\alpha(0) = p$.

Por tanto, tendremos, por un lado, que

$$X \int_W g(x,p) \cdot \omega(x) = \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0} \int_W g(x,\alpha(t)) \cdot \omega(x),$$

y por otro lado, que

$$Xg(x,p) = \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}g(x,\alpha(t))$$

para todo $p \in N$.

Así, si definimos $G\colon W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(x,t) = g(x,\alpha(t))$ bastará probar que

$$\mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0} \int_W G(x,t)\cdot\omega(x) = \int_W \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}G(x,t)\omega(x).$$

Es decir, basta probar que

$$F(t)\colon = \int_W G(x,t)\cdot\omega(x)$$

es una primitiva de

$$f(t)\colon = \int_W \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}G(x,t)\omega(x).$$

Pero una primitiva de $f(t)$ es

$$\int_0^t f(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \left(\int_W \mathrm{d}/\mathrm{d}s_{|s=0}G(x,s)\omega(x)\right)\mathrm{d}s, \tag{14.2.1}$$

que, por el Teorema de Fubini en variedades ([44]), quedará

$$\begin{aligned}(14.2.1) &= \int_{W\times[0,t]} \mathrm{d}/\mathrm{d}s_{|s=0}G(x,s)\mathrm{d}s \wedge \omega(x)\\ &= \int_{[0,t]\times W} \mathrm{d}/\mathrm{d}s_{|s=0}G(x,s)\omega(x)\wedge \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

y aplicando otra vez Frobenius:

$$\begin{aligned}(14.2.1) &= \int_W \left(\int_0^t \mathrm{d}/\mathrm{d}s_{|s=0}G(x,s)\mathrm{d}s\right)\omega(x)\\ &= \int_W G(x,t)\omega(x),\end{aligned}$$

pues

$$\int_0^t \mathrm{d}/\mathrm{d}s_{|s=0}G(x,s)\mathrm{d}s = G(x,t)$$

por el Teorema Fundamental del Cálculo ([44]). □

14.3. Primer Teorema de Unimodularidad

Para poder estudiar la cohomología de una N-foliación transversalmente homogénea a partir del Teorema 9.6 es necesario que las fibras de la submersión desarrollo sean conexas. En las foliaciones Riemannianas, aquellas en las que, escogiendo bien las métricas, el desarrollo es una submersión Riemanniana, haciendo modelar la foliación sobre $\widehat{N}$, la cubierta universal de N, tendremos garantizada la conexidad de las fibras, siempre y cuando la variedad foliada sea compacta. Sin embargo, eso no será posible para las foliaciones no Riemannianas, con lo que, para estudiar su unimodularidad, podremos a lo sumo llegar a una combinación de los Teorema 9.6 y del Corolario 14.3 para obtener el siguiente resultado, que más adelante utilizaremos para demostrar el Teorema 15.10:

Teorema 14.5. *Sea $\mathcal{F}$ una N-foliación sobre una variedad M, con $N = G/K$ conexo. Supongamos que el desarrollo $f\colon \widetilde{M} \to N$ es sobreyectivo y tiene fibras conexas, y que la variedad $W = \overline{\Gamma}\backslash G_\sharp$ es compacta, con $\Gamma = \operatorname{im} h \subset G_\sharp = G/\operatorname{Core}(K)$ grupo de holonomía de $\mathcal{F}$. Entonces, si $G_\sharp$ es fuertemente unimodular, $\overline{\Gamma}$ es unimodular y $\mathrm{H}^q_{G_\sharp}(N) \neq 0$, con $q = \dim N$, se cumple que la foliación $\mathcal{F}$ es unimodular.*

Demostración. El Teorema 9.6, junto con la Proposición 9.7, aseguran, como en nuestro caso la submersión desarrollo de $\mathcal{F}$ es sobreyectiva y tiene las fibras conexas, que $\mathrm{H}(M/\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}_{\overline{\Gamma}}(N)$. Así, el Corolario 14.3 nos permite concluir ya que $\mathcal{F}$ es unimodular, pues, por hipótesis, $W = \overline{\Gamma}\backslash G_\sharp$ es compacta y $G_\sharp$ es fuertemente unimodular, $\overline{\Gamma}$ es unimodular y $\mathrm{H}^q_{G_\sharp}(N) \neq 0$ y, por lo tanto, $\mathrm{H}^q_{\overline{\Gamma}}(N) \neq 0$, con $q = \dim N = \operatorname{codim} \mathcal{F}$. □

Parte V

Resultados en el caso Riemanniano

Capítulo 15
Desarrollos con fibras conexas

Dividiremos el análisis de la unimodularidad en foliaciones Riemannianas en dos casos diferentes. En primer lugar, en este Capítulo, estudiaremos las foliaciones en las que las fibras de la submersión desarrollo son conexas, dando condiciones bajo las cuales podremos afirmar que la foliación es unimodular. Posteriormente, en el Capítulo 16, utilizaremos los resultados obtenidos ahora para estudiar el caso en que las fibras no sean conexas.

15.1. Cohomología de espacios homogéneos

Sea G un grupo de Lie, K un subgrupo cerrado no necesariamente conexo y $N = G/K$ el correspondiente espacio homogéneo. Llamaremos $n = \dim G$ y $q = \dim N$, por tanto $\dim K = n - q$. Sean $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, las álgebras de Lie de G, K respectivamente.

Fijemos un punto base $o = [e] \in G/K$ y sea el tangente $T = T_oG/K$, que es isomorfo a $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. Si derivamos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "I(k)"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/K \arrow[r, "\lambda(k)"'] & G/K \end{tikzcd}$$

tendremos que $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(k) = \lambda(k)_{*o} \colon T \to T$, para todo $k \in K$.

El siguiente resultado es bien conocido (página 458 de [18]).

Teorema 15.1. *Si el par $(\mathfrak{g}, K)$ es reductivo entonces la cohomología $\mathrm{H}_G(N)$ del complejo $\Omega_G(G/K)$ de formas invariantes por la izquierda es isomorfa a la cohomología relativa $\mathrm{H}(\mathfrak{g}, K; \mathbb{R})$.*

Cuando K es conexo se obtiene la cohomología relativa $\mathrm{H}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ de Koszul, pero daremos una demostración del caso general utilizando nuestras notaciones para que quede clara la relación con lo estudiado en los Capítulos 3 y 4.

La cohomología relativa del par $(\mathfrak{g}, K)$ con coeficientes constantes $\mathbb{R}$ corresponde a lo estudiado en el Capítulo 4 tomando como módulo $V = \mathbb{R}$, lo que nos deja con las acciones triviales $X \cdot t = 0$ y $k \cdot t = t$.

Entonces tendremos:

Proposición 15.2. *Los complejos $\Omega_G(G/K)$ y $(\Lambda^r T)^*_K$ son isomorfos, donde el complejo de la derecha está formado por las formas multilineales alternadas $T^r \to \mathbb{R}$ que además son $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(K)$-invariantes.*

Demostración. Definiremos el isomorfismo haciendo

$$\varphi\colon \omega \in \Omega^r_G(G/K) \mapsto \omega_o \in (\Lambda^r T)^*_K.$$

Estará bien definido pues si ω es G-invariante entonces ω_o será $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(K)$-invariante:

Dados $v_1, \ldots, v_r \in T$ tomamos $X_i \in \mathfrak{g}$ tales que $v_i = \pi_{*e}(X_i(e))$. Así:

$$\begin{aligned}
&\omega_o(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(v_1), \cdots, \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(v_r))\\
&= \omega_o(\lambda(k)_{*o}(v_1),\ \ldots, \lambda(k)_{*o}(v_r))\\
&= \omega_{\pi(e)}(\lambda(k)_{*\pi(e)}(\pi_{*e}(X_1(e)), \ldots, \lambda(k)_{*\pi(e)}(\pi_{*e}(X_r(e)))\\
&= \omega_{\pi(e)}((\lambda(k)\circ\pi)_{*e}(X_1(e)), \ldots, (\lambda(k)\circ\pi)_{*e}(X_r(e)))\\
&= \pi^*(\lambda(k)^*\omega)_e(X_1(e), \ldots, X_r(e))\\
&= (\pi^*\omega)_e(X_1(e), \ldots, X_r(e))\\
&= \omega_{\pi(e)}(\pi_{*e}(X_1(e)), \ldots, \pi_{*e}(X_1(e)))\\
&= \omega_o(v_1, \ldots, v_r)
\end{aligned}$$

para todo $(v_1, \ldots, v_r) \in T^r$.

Recíprocamente, podemos definir una inversa φ^{-1} donde, dada $\omega_o \in (\Lambda^r T)^*_K$, tomamos $\omega = \varphi^{-1}(\omega_o)$ como la forma determinada a partir de la siguiente fórmula:

$$\omega_{[g]}(w_1, \ldots, w_r) = \omega_o(\lambda(g)^{-1}_{*o}(w_1), \ldots, \lambda(g)^{-1}_{*o}(w_r)), \tag{15.1.1}$$

con $w_i \in T_{[g]}N$. De esta forma φ^{-1} estará bien definida pues si consideramos gk, con $k \in K$, otro representante de la clase de g en N, tendremos que

$$\begin{aligned}
&\omega_{[gk]}(w_1, \ldots, w_r)\\
&= \omega_o(\lambda(gk)^{-1}_{*o}w_1, \ldots, \lambda(gk)^{-1}_{*o}w_r)\\
&= \omega_o((\lambda(k)^{-1}_{*o}\circ\lambda(g)^{-1}_{*o})w_1, \ldots, (\lambda(k)^{-1}_{*o}\circ\lambda(g)^{-1}_{*o})w_r)\\
&= (\lambda(k^{-1})^*\omega_o)(\lambda(g)^{-1}_{*o}w_1, \ldots, \lambda(g)^{-1}_{*o}w_r)\\
&= \omega_o(\lambda(g)^{-1}_{*o}w_1, \ldots, \lambda(g)^{-1}_{*o}w_r)\\
&= \omega_{[g]}(w_1, \ldots, w_r).
\end{aligned}$$

Además, $\omega = \varphi^{-1}(\omega_o)$ es G-invariante, pues, con $w_1, \ldots, w_r \in T_{[x]}N$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&(\lambda(g)^*\omega)_{[x]}(w_1, \ldots, w_r)\\
&= \omega_{[gx]}(\lambda(g)_{*[x]}w_1, \ldots, \lambda(g)_{*[x]}w_r)\\
&= \omega_o(\lambda(gx)^{-1}_{*o}\lambda(g)_{*[x]}w_1, \ldots, \lambda(gx)^{-1}_{*o}\lambda(g)_{*[x]}w_r)\\
&= \omega_o(\lambda(x)^{-1}_{*o}w_1, \ldots, \lambda(x)^{-1}_{*o}w_r)\\
&= \omega_{[x]}(w_1, \ldots, w_r).
\end{aligned}$$

Por otra parte, φ es de complejos.

Si $v_i \in T$ y $v_i = \pi_{*e}(X_i(e))$,

$$\begin{aligned}
&\varphi(\mathrm{d}\omega)(v_0, \ldots, v_r) \\
&= (\mathrm{d}\omega)_o(v_0, \ldots, v_r) \\
&= (\mathrm{d}\omega)_{\pi(e)}(\pi_{*e}(X_0(e)), \ldots, \pi_{*e}(X_r(e))) \\
&= (\pi^*\mathrm{d}\omega)_e(X_0(e), \ldots, X_r(e)) \\
&= (\pi^*\mathrm{d}\omega)(X_0, \ldots, X_r)(e) \\
&= (\mathrm{d}\pi^*\omega)(X_0, \ldots, X_r)(e) \\
&= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i(X_i \cdot \pi^*\omega(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_r))(e) \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\pi^*\omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_r)(e) \\
&= \sum_{i=0}^{r}(-1)^i(X_i \cdot \pi^*\omega(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_r))(e) \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega_{\pi(e)}(\pi_{*e}[X_i, X_j](e), \pi_{*e}X_0(e), \ldots, \widehat{\pi_{*e}X_i}, \\
&\qquad \ldots, \widehat{\pi_{*e}X_j}, \ldots, \pi_{*e}X_r(e))
\end{aligned}$$

Cada función

$$f = \pi^*\omega(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_r)$$

está dada por

$$f(x) = \omega_{[x]}(\pi_{*x}X_0(x), \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \pi_{*x}X_r(x)).$$

Pero

$$\pi_{*x}X_i(x) = \pi_{*x}(L_x)_{*e}(X_i(e)) = \lambda(x)_{*\pi(e)}\pi_{*e}(X_i(e)) = \lambda(x)_{*o}(v_i),$$

luego

$$\begin{aligned}
f(x) &= \omega_{[x]}(\lambda(x)_{*o}(v_0), \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, \lambda(x)_{*o}(v_r)) \\
&= (\lambda(x)^*\omega)_o(v_0, , \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_r).
\end{aligned}$$

Ahora bien, $\lambda(x)^*\omega = \omega$ porque ω es G-invariante, con lo que la función f es constante y $X_i \cdot f = 0$.

En resumen, si $v_i = \pi_{*e}(X_i(e)) \in T$ y $[v_i, v_j]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$ representa la proyección del corchete en $\mathfrak{g}$, es decir,

$$[v_i, v_j]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}} = \pi_{*e}([X_i, X_j](e)),$$

tenemos

$$\begin{aligned}
&\varphi(\mathrm{d}\omega)(v_0, \ldots, v_r) \\
&= \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega_o([v_i, v_j]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}, v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, \widehat{v_j}, \ldots, v_r),
\end{aligned}$$

que es por definición
$$\delta\omega_o(v_0,\dots,v_r).$$
Por tanto, hemos probado que $\varphi \mathrm{d} = \delta\varphi$. □

Nota 15.3. Como $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ no es un álgebra de Lie, el corchete $[v_i, v_j]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}$ no está bien definido, puesto que el campo de vectores $X_i + Y_i$, con $Y_i(e) \in \mathfrak{k}$, también se proyecta por π_{*e} en v_i. Sin embargo, $\delta\omega_o$ sí está bien definida, pues ω_o es $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(K)$-invariante.

Supongamos ahora que el par $(\mathfrak{g}, K)$ es reductivo, es decir, que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ y $\mathrm{Ad}(k)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$. Así, $(\Lambda^r T)^* = (\Lambda^r \mathfrak{p})^*$. Además, como la acción de K sobre $\mathfrak{p}$ es a través de $\mathrm{Ad}_G(k)$, la condición $\omega_o(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(k)(X)) = \omega_o(X)$ significa que $\omega_o(k \cdot X) = \omega_o(X)$ para todo $k \in K$, $X \in \Lambda^r\mathfrak{p}$. Y como la acción de K sobre $\mathbb{R}$ es la trivial y $\omega_o(X) \in \mathbb{R}$, tenemos que
$$\omega_o(k \cdot X) = \omega_o(X) = k \cdot \omega_o(X) \quad \forall\, k \in K, X \in \Lambda^r\mathfrak{p}.$$
Por tanto, tenemos que $(\Lambda^r T)^*_K = L_K(\Lambda^r\mathfrak{p}, \mathbb{R})$, donde la diferencial se define como vimos en la sección 4.3, con lo que llegamos al siguiente Corolario, que pone fin a la demostración del Teorema 15.1.

Corolario 15.4. *El complejo $\Omega^\bullet_G(G/K)$ de formas G-invariantes en $N = G/K$ es isomorfo al complejo $L_K(\Lambda^\bullet\mathfrak{p}, \mathbb{R})$.*

15.2. Cálculo de H^0

Proposición 15.5. *Dado un $(\mathfrak{g}, K)$-módulo W, se tiene que $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}, K; W) = W^{K,\mathfrak{p}}$, es decir, el submódulo formado por los elementos de W que son invariantes por la acción de K y por la acción de $\mathfrak{p}$.*

Demostración. La cohomología $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}, K; W)$ será el núcleo de la diferencial
$$\delta\colon L_K(\Lambda^0\mathfrak{p}, W) \to L_K(\Lambda^1\mathfrak{p}, W).$$
Por el Lema 4.9 sabemos que $L_K(\Lambda^0\mathfrak{p}, W) = W^K$, los elementos de W que son invariantes por la acción de K, es decir, los $w \in W$ que cumplen que $k \cdot w = w$ para todo $k \in K$. Por tanto, el núcleo de la diferencial serán los elementos $w \in W^K$ que cumplan
$$(\delta w)(X) = X \cdot w = 0 \quad \forall\, X \in \mathfrak{p}. \quad \square$$

Consideremos ahora $W = (\mathbb{R}^{tw})^*$, donde tw denota el módulo de Hazewinkel, que vimos en la Sección 3.6.

Definición 15.6. Diremos que un grupo de Lie K es *fuertemente unimodular* si $\det \mathrm{Ad}_K(k) = 1$ para todo $k \in K$.

Proposición 15.7. *Si G y K son fuertemente unimodulares entonces*

$$\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}, K; (\mathbb{R}^{tw})^*) \neq 0,$$

de hecho, $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}, K; (\mathbb{R}^{tw})^*) = \mathbb{R}$. *Recíprocamente, si G es conexo, que* $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}, K; (\mathbb{R}^{tw})^*) \neq 0$ *implica que G y K son fuertemente unimodulares.*

Demostración. Por la Proposición 15.5, los elementos de $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}, K; (\mathbb{R}^{tw})^*)$ serán los $\varphi \in (\mathbb{R}^{tw})^*$ que son invariantes por la acción de K y por la acción de $\mathfrak{p}$. Veamos qué significa esto:

1. En $\mathfrak{p}$ consideramos la estructura dual de la de Hazewinkel. Es decir:

$$\begin{aligned}(X \cdot_t \varphi)(v) &= -\varphi(X \cdot_t v) \\ &= -\varphi(X \cdot v - \operatorname{traza}\operatorname{ad}(X)v) \\ &= -\varphi(X \cdot v) + \operatorname{traza}\operatorname{ad}(X)\varphi(v).\end{aligned}$$

   Que φ sea invariante por la acción de $\mathfrak{p}$ significa que $X \cdot_t \varphi = 0$ para todo $X \in \mathfrak{p}$, con lo que φ es invariante por la acción de $\mathfrak{p}$ si se cumple que

$$\varphi(X \cdot v) = \operatorname{traza}\operatorname{ad}(X)\varphi(v) \quad \forall\, X \in \mathfrak{p},\ v \in \mathbb{R}.$$

   Pero como la acción de $\mathfrak{p}$ sobre $\mathbb{R}$ es trivial se tiene que $\varphi(X \cdot v) = \varphi(0) = 0$, con lo que para que un elemento $\varphi \neq 0$ sea invariante es necesario y suficiente que $\operatorname{traza}\operatorname{ad}(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{p}$. En ese caso, todos los elementos de $(\mathbb{R}^{tw})^*$ serán invariantes por la acción de $\mathfrak{p}$.

2. Que φ sea invariante por la acción de K significa que $k \cdot_t \varphi = \varphi$ para todo $k \in K$. Es decir:

$$\begin{aligned}(k \cdot_t \varphi)(v) &= \varphi(k^{-1} \cdot_t v) \\ &= \varphi(\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)(k^{-1} \cdot v)) \\ &= \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)\varphi(k^{-1} \cdot v).\end{aligned}$$

   Pero como la acción de K en $\mathbb{R}$ es trivial entonces $\varphi(k^{-1} \cdot v) = \varphi(v)$, con lo que $\varphi \neq 0$ solo podrá ser invariante si y solamente si $\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k) = 1$ para todo $k \in K$. En ese caso todos los elementos de $(\mathbb{R}^{tw})^*$ serán invariantes por la acción de K.

Resumiendo, o bien $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}, K; (\mathbb{R}^{tw})^*) = 0$ o bien $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}, K; (\mathbb{R}^{tw})^*) = \mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}$, lo que sucederá si y solamente si $\operatorname{traza}\operatorname{ad}(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{p}$ y $\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k) = 1$ para todo $k \in K$, lo que estará garantizado bajo nuestras hipótesis, como se demuestra en el Lema 15.8. □

Lema 15.8. *Si G y K son fuertemente unimodulares entonces* $\operatorname{traza}\operatorname{ad}(X) = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{p}$ *y* $\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}}(k) = 1$ *para todo* $k \in K$. *El recíproco se cumple si G es conexo.*

Demostración. Como G es unimodular, su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ también, con lo que $\operatorname{traza}\operatorname{ad}(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{p}$.

Por otro lado, la condición $\operatorname{Ad}_G(k)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ significa que la matriz asociada a $\operatorname{Ad}_G(k)$ será de la forma $\begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$, con lo que

$$\det \operatorname{Ad}_G(k) = \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{k}}(k) \cdot \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k) \quad \forall\, k \in K, \tag{15.2.1}$$

y como $\det \operatorname{Ad}_G(k) = 1$ para todo $k \in K$ por ser G unimodular y $\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{k}}(k) = 1$ para todo $k \in K$ por ser K unimodular, tenemos ya que $\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k) = 1$.

Supongamos ahora que G es conexo. Sea $\operatorname{traza}\operatorname{ad}(X) = 0$ y $\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k) = 1$ para todo $X \in \mathfrak{p}$ y para todo $k \in K$. Sea $Y \in \mathfrak{g}$. Como el par $(\mathfrak{g}, K)$ es reductivo, sabemos que Y se puede descomponer de la forma $Y = Y_{\mathfrak{k}} + Y_{\mathfrak{p}}$, con $Y_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{k}$ e $Y_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}$. Así, cualquier producto corchete se podrá escribir de la forma $[Y, -] = [Y_{\mathfrak{k}}, -] + [Y_{\mathfrak{p}}, -]$, es decir, $\operatorname{ad}(Y) = \operatorname{ad}(Y_{\mathfrak{k}}) + \operatorname{ad}(Y_{\mathfrak{p}})$, lo que significa que

$$\operatorname{traza}\operatorname{ad}(Y) = \operatorname{traza}\operatorname{ad}(Y_{\mathfrak{k}}) + \operatorname{traza}\operatorname{ad}(Y_{\mathfrak{p}}).$$

Pero, por ser $\mathfrak{k}$ subálgebra y cumplirse que $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$ se tiene que

$$\operatorname{ad}(Y_{\mathfrak{k}}) = \begin{bmatrix} \operatorname{ad}_{\mathfrak{k}}(Y_{\mathfrak{k}}) & 0 \\ 0 & \operatorname{ad}_{\mathfrak{p}}(Y_{\mathfrak{k}}) \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$\operatorname{traza}\operatorname{ad}(Y_{\mathfrak{k}}) = \operatorname{traza}\operatorname{ad}_{\mathfrak{k}}(Y_{\mathfrak{k}}) + \operatorname{traza}\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}}(Y_{\mathfrak{k}}) = \operatorname{traza}\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}}(Y_{\mathfrak{k}}),$$

pues $\mathfrak{k}$ es unimodular. Ahora, derivando la condición $\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k) = 1$ para todo $k \in K$ obtendremos que $\operatorname{traza}\operatorname{ad}_{\mathfrak{p}}(Y_{\mathfrak{k}}) = 0$ para todo $Y_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{k}$, y por tanto

$$\operatorname{traza}\operatorname{ad}(Y) = \operatorname{traza}\operatorname{ad}(Y_{\mathfrak{p}}) = 0.$$

Y como esto se cumple para todo $Y \in \mathfrak{g}$ se tiene que $\mathfrak{g}$ es unimodular (recuérdese que estamos considerando G conexo).

Una vez demostrado que G es unimodular (fuertemente unimodular por ser conexo), como, por hipótesis, $\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k) = 1$ para todo $X \in \mathfrak{p}$, se deduce que K es fuertemente unimodular directamente de la ecuación 15.2.1. □

Corolario 15.9. *Sea $q = \dim G/K$. Si los grupos de Lie G y K son fuertemente unimodulares entonces $\mathrm{H}^q_G(G/K) \neq 0$, de hecho, $\mathrm{H}^q_G(G/K) = \mathbb{R}$. Recíprocamente, si G es conexo, entonces la condición $\mathrm{H}^q_G(G/K) \neq 0$ implica que G y K son unimodulares.*

Demostración. Por el Teorema 4.22 y la Proposición 4.18 sabemos que

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{g}, K; \mathbb{R})^* = \mathrm{H}^0(\mathfrak{g}, K; (\mathbb{R}^{tw})^*)$$

con lo que el resultado se deduce inmediatamente de la Proposición 15.7. □

15.3. Segundo Teorema de Unimodularidad

A partir del Corolario 15.9 obtendremos una caracterización de la unimodularidad de ciertas foliaciones transversalmente homogéneas que nos será útil para demostrar el Teorema 16.30. Pese a que en el Capítulo 18 daremos una ecuación explícita para calcular $\mathrm{H}_{\overline{\Gamma}}(N)$ a partir de G, K y W, no resulta posible dar en general condiciones para que $\mathrm{H}^q_{\overline{\Gamma}}(N) \neq 0$, con $q = \dim N$, por lo que lo haremos de una forma indirecta demostrando que, bajo ciertas hipótesis, se cumple que $\mathrm{H}^q_{G_\sharp}(N) \neq 0$, y aplicando el Teorema 14.5.

Teorema 15.10. *Sea $\mathcal{F}$ una N-foliación sobre una variedad compacta M, con $N = G/K$ conexo. Suponemos que el desarrollo $f\colon \widetilde{M} \to N$ tiene las fibras conexas. Sea $h\colon \pi_1(M) \to G_\sharp$ el morfismo de holonomía, con $\Gamma = \operatorname{im} h \subset G_\sharp = G/\operatorname{Core}(K)$ grupo de holonomía. Si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Existe sobre N una métrica G-invariante,*
2. *la variedad $W = \overline{\Gamma}\backslash G_\sharp$ es compacta,*
3. *los grupos de Lie $G_\sharp$ y $K_\sharp$ son fuertemente unimodulares y*
4. *el grupo de Lie $\overline{\Gamma}$ es unimodular,*

entonces la foliación $\mathcal{F}$ es unimodular.

Demostración. En primer lugar, nótese que la métrica G-invariante en N será también una métrica $G_\sharp$-invariante (pues $\lambda([g]) = \lambda(g)$ para todo $g \in G$) y por lo tanto será también Γ-invariante. Entonces, por la Proposición 16.5 sabemos que f es un fibrado localmente trivial, lo que garantiza que es sobreyectiva. Estamos entonces, como f es de fibras conexas, en las condiciones necesarias para aplicar el Teorema 9.6, que, combinado con la Proposición 9.7, nos permite asegurar que

$$\mathrm{H}(M/\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}_{\overline{\Gamma}}(N).$$

Comprobemos que que, bajo nuestras hipótesis, se cumple que $\mathrm{H}^q_{G_\sharp}(N) \neq 0$:

Como en N existe una métrica $G_\sharp$-invariante y como la acción de $G_\sharp$ en N es efectiva podemos aplicar el Teorema 5.20, lo que nos asegura que el par $(\mathfrak{g}^\sharp, K_\sharp)$ es reductivo, donde $\mathfrak{g}^\sharp$ denota el álgebra de Lie de $G_\sharp$. Así, como por hipótesis $G_\sharp$ y $K_\sharp$ son fuertemente unimodulares, por el Corolario 15.9 tenemos ya que $\mathrm{H}^q_{G_\sharp}(N) \neq 0$.

Como W es compacta podemos aplicar el Teorema 14.5, pues por hipótesis tenemos que $G_\sharp$ es fuertemente unimodular, $\overline{\Gamma}$ es unimodular y ya hemos demostrado que $\mathrm{H}^q_{G_\sharp}(N) \neq 0$. Como consecuencia tenemos que $\mathrm{H}^q_{\overline{\Gamma}}(N) \neq 0$. □

15.4. Ejemplo

Consideremos la acción transitiva de $G_0 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ en el semiplano complejo ([23])

$$N = \mathbb{H}^2 = \{a + bi\colon b > 0\},$$

dada por

$$g \cdot w = \frac{aw+b}{cw+d}, \text{ con } g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G_0, w \in \mathbb{H}^2.$$

La isotropía de $w = i$ es el subgrupo compacto y conexo $K_0 = \mathrm{SO}(2)$.

El único subgrupo normal de $\mathrm{SL}(2, R)$ es $\{\pm I\} \subset \mathrm{SO}(2)$, con lo que la acción de G_0 en $\mathbb{H}^2$ no es efectiva, y tendremos que el core group de la acción es $\mathrm{Core}(K_0) = \{\pm I\}$. Así haremos:

$$\begin{aligned} G &= G_0/\operatorname{Core}(K_0) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm I\} = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \quad \text{y} \\ K &= K_0/\operatorname{Core}(K_0) = \mathrm{PSO}(2), \end{aligned}$$

que es compacto y conexo. Tendremos así que $N = G_0/K_0 \cong \mathbb{H}^2$ y que G actúa efectivamente en N.

Consideremos $\Gamma \subset G$ un subgrupo discreto y uniforme de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Así, el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Gamma"'] & N = \mathbb{H}^2 \\ M = \Gamma\backslash G & \end{tikzcd}$$

definirá en M una foliación $\mathcal{F}$ que puede dotarse de estructura de $\mathbb{H}^2$-foliación transversalmente homogénea.

Si $K \cap \Gamma = \{I\}$ entonces la variedad M es el fibrado tangente unitario sobre $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ y la foliación está definida como un fibrado. Si $K \cap \Gamma \neq \{I\}$ entonces las hojas tienen holonomía y la foliación está definida como un fibrado sobre una variedad de Satake [36, pág. 89].

Estaremos ante una foliación unimodular, pues se cumple:

1. El desarrollo $f\colon G \to N$ es de fibras conexas, pues la fibra es K, que es conexo.

2. Existe sobre N una métrica G-invariante, pues la isotropía de la acción es $K = \mathrm{PSO}(2)$, que es compacto.

3. La variedad $M = \Gamma\backslash G$ es compacta ya que, por hipótesis, Γ es uniforme.

4. El subgrupo $K_0/\operatorname{Core}(K_0) = \mathrm{PSO}(2)$ es fuertemente unimodular, pues es el cociente por un subgrupo discreto de un grupo fuertemente unimodular ($\mathrm{SO}(2)$ es unimodular y conexo).

5. El grupo de Lie $G_0/\operatorname{Core}(K_0) = G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ es fuertemente unimodular (por ser cociente por un discreto de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, que es unimodular, y por ser conexo) y el subgrupo $\Gamma \subset G$ es discreto, y por tanto unimodular.

Se dan entonces las condiciones para aplicar el Teorema 15.10 y deducir que $\mathcal{F}$ es unimodular.

Capítulo 16
Unimodularidad en fibras no conexas

Completaremos ahora el estudio de la unimodularidad, analizando el caso en que las fibras de la submersión desarrollo no sean conexas. Valiéndonos de la construcción auxiliar detallada en el Capítulo 11 y de los resultados del Capítulo 15, enunciaremos nuestro teorema más general al respecto.

16.1. La métrica en $\widehat{N}$

Sea g una métrica de Riemann en N y sea $\pi\colon \widehat{N} \to N$ la cubierta universal de N. Recordemos que la *métrica levantada* $\hat{g}$ en $\widehat{N}$ se define haciendo $\hat{g} = \pi^* g$, es decir:

$$\hat{g}_{\hat{n}}(X_{\hat{n}}, Y_{\hat{n}}) = g_{\pi(\hat{n})}(\pi_{*\hat{n}} X_{\hat{n}}, \pi_{*\hat{n}} Y_{\hat{n}}),$$

con $X_{\hat{n}}, Y_{\hat{n}} \in T_{\hat{n}}\widehat{N}$. Continuando con la notación de los capítulos anteriores usaremos λ y $\hat{\lambda}$ para referirnos a las traslaciones por la izquierda en N y en $\widehat{N}$, respectivamente, y ρ y $\hat{\rho}$ para las correspondientes por la derecha.

Proposición 16.1. *Si la métrica en N es invariante para la traslación por la izquierda $\lambda(x)$, con $x \in \widehat{G_0}$, entonces la métrica levantada en $\widehat{N}$ es invariante para $\hat{\lambda}(x)$.*

Demostración. Dado $x \in \widehat{G_0}$, hay que probar que $\hat{\lambda}(x)^*\hat{g} = \hat{g}$. Veámoslo:

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}(x)^*\hat{g} &= \hat{\lambda}(x)^*\pi^* g \\
&= (\pi \circ \hat{\lambda}(x))^* g \\
&= (\lambda(x) \circ \pi)^* g \\
&= \pi^* \lambda(x)^* g \\
&= \pi^* g = \hat{g},
\end{aligned}$$

pues $\lambda(x)^* g = g$. □

Corolario 16.2. *Si la métrica en N es $\widehat{G_0}$-invariante entonces la métrica levantada en $\widehat{N}$ es $G_\sharp$-invariante.*

Demostración. Basta probar que $\hat{g}$ es invariante para $\hat{\lambda}(x)$ y para $\rho([k])$, con $[k] \in \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$. Lo primero ya lo hemos probado en la Proposición 16.1, y lo segundo, teniendo en cuenta que los $\rho([k])$ son los automorfismos de la cubierta $\pi\colon \widehat{N} \to N$, será consecuencia inmediata de la propia definición de $\hat{g}$, pues

$$\rho([k])^*\hat{g} = \rho([k])^*\pi^* g = (\pi \circ \rho([k]))^* g = \pi^* g = \hat{g}. \quad \square$$

Corolario 16.3. *Si la métrica en N es $\widehat{G_0}$-invariante entonces el grupo de Lie $G_\sharp$ se inyecta en* $\operatorname{Iso}\widehat{N}$*, el grupo completo de las isometrías de $\widehat{N}$. Además, $G_\sharp$ es el menor subgrupo de* $\operatorname{Iso}\widehat{N}$ *que contiene a las traslaciones por la izquierda por elementos de $\widehat{G_0}$ y a las traslaciones por la derecha por elementos de $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$.*

Demostración. Por la Proposición 16.2 sabemos que los $\lambda^{G_\sharp}([([g]_\sharp,[k])])$ serán isometrías para todo $[([g]_\sharp,[k])] \in G_\sharp$. Por tanto, podemos considerar la inclusión

$$\begin{array}{rccc} i\colon & G_\sharp & \longrightarrow & \operatorname{Iso}\widehat{N} \\ & [([g]_\sharp,[k])] & \mapsto & \lambda^{G_\sharp}([([g]_\sharp,[k])]) \end{array}$$

que es inyectiva pues $G_\sharp$ actúa de manera efectiva en $\widehat{N}$.

Que $G_\sharp$ es el menor subgrupo de $\operatorname{Iso}\widehat{N}$ que contiene a las traslaciones por la izquierda por elementos de $\widehat{G_0}$ y a las traslaciones por la derecha por elementos de $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ es inmediato teniendo en cuenta que el núcleo de la inclusión $\widehat{G_0} \to \operatorname{Iso}\widehat{N}$ es $\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e$ y que el núcleo de la inclusión $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e \times \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e \to \operatorname{Iso}\widehat{N}$ es $i(\operatorname{Core}\widehat{K_0})$, con lo que cualquier subgrupo de $\operatorname{Iso}\widehat{N}$ que contenga a las traslaciones de $\widehat{G_0}$ y de $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ tiene necesariamente que incluir a todos los elementos de $(\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e \times \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e)/i(\operatorname{Core}\widehat{K_0}) = G_\sharp$ □

16.2. Estructuras Riemannianas en el levantamiento

Recordemos que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \widehat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & \widehat{N} \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & N \\ M & \end{tikzcd} \tag{16.2.1}$$

Hermann, en [22], enuncia el siguiente resultado para submersiones Riemannianas:

Teorema 16.4. *Sea $\phi\colon X \to B$ una submersión Riemanniana, con X variedad Riemanniana completa. Entonces B es una variedad Riemanniana completa y ϕ es un fibrado localmente trivial.*

Al aplicar este Teorema a $\hat{f}$ tendremos garantizada la conexidad de las fibras, al ser $\widehat{N}$ simplemente conexo. Sin embargo, para garantizar que $\hat{f}$ sea una submersión Riemanniana, no es suficiente con pedirle a $\mathcal{F}$ que sea Riemanniana. Pediremos entonces a $\mathcal{F}$ una condición algo más fuerte. Pediremos que en N exista una métrica tal que Γ_0, el grupo de holonomía de $\mathcal{F}$, actúe por isometrías, pues, como vimos en la Proposición 6.18, eso implica que $\mathcal{F}$ es Riemanniana y que la submersión desarrollo es Riemanniana.

Proposición 16.5. *Sea $\mathcal{F}$ una N-foliación Riemanniana sobre una variedad M compacta tal que en N existe una métrica invariante por Γ_0, el grupo de holonomía de $\mathcal{F}$. Entonces el desarrollo $f\colon \widetilde{M} \to N$ y su levantamiento $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ son fibrados localmente triviales.*

Demostración. Por la Proposición 6.18 sabemos que $f\colon \widetilde{M} \to N$ es Riemanniana. Además, del Corolario 16.2 se deduce fácilmente que si Γ_0 actúa por isometrías en N entonces Γ actúa por isometrías en $\widehat{N}$, lo que, también por la Proposición 6.18, implica que $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ es una submersión Riemanniana.

Por otra parte, si M es compacta la métrica casi-fibrada para $\mathcal{F}$ será completa y cualquier cubierta de M compatible con la métrica será una variedad completa (Teorema 4.6 de [25]). Estaremos entonces, tanto para f como para $\hat{f}$, en situación de aplicar el Teorema 16.4, lo que nos asegurará que f y $\hat{f}$ son fibrados localmente triviales. $\square$

Corolario 16.6. *Si M es compacta y Γ_0 actúa por isometrías en N entonces las fibras de $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ son conexas.*

Demostración. Considerando la sucesión exacta larga asociada a la fibración $\hat{f}$

$$\cdots \pi_1(\widehat{M}) \to \pi_1(\widehat{N}) \to \pi_0(F) \to \pi_0(\widehat{M}) \to \cdots ,$$

donde F representa una fibra genérica de $\hat{f}$, tendremos, como $\widehat{N}$ es simplemente conexo y $\widehat{M}$ es conexo, es decir, $\pi_1(\widehat{N}) = 0$ y $\pi_0(\widehat{M}) = 0$, que necesariamente $\pi_0(F) = 0$, lo cual significa que F es conexa. $\square$

De aquí al final del capítulo consideraremos una N-foliación $\mathcal{F}$ transversalmente homogénea sobre una variedad compacta M tal que en N existe una métrica para la que las traslaciones por elementos de Γ_0 son isometrías.

Consideremos ahora $\widehat{N}$ como un $G_\sharp$-espacio homogéneo. Sabemos que entonces la foliación $\mathcal{F}$ sobre la variedad compacta M es una $\widehat{N}$-foliación donde las fibras de la submersión desarrollo son conexas.

Lema 16.7. *Sea $\mathcal{F}$ una $\widehat{N}$-foliación en la variedad compacta M, donde las fibras de la submersión desarrollo son conexas. Entonces, la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ en $\widetilde{M}$ tiene estructura de $\widehat{N}$-foliación transversalmente homogénea Riemanniana modelando sobre el $G_\sharp$-espacio homogéneo $\widehat{N}$, donde el desarrollo es una fibración de fibras conexas.*

Demostración. Como M es compacta sabemos que el desarrollo $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$ es una fibración de fibras conexas. Además $\widetilde{\mathcal{F}}$ será Riemanniana, pues vimos en la Sección 13.2 que las funciones de transición de $\widetilde{\mathcal{F}}$ corresponden a transformaciones de la cubierta $\pi\colon \widehat{N} \to N$, que demostramos en el Corolario 16.2 que son isometrías por construcción de la métrica en $\widehat{N}$. $\square$

Proposición 16.8. *La foliación $\mathcal{F}$ tiene estructura de $\widehat{N}$-foliación transversalmente homogénea Riemanniana modelando sobre el $G_\sharp$-espacio homogéneo $\widehat{N}$ y el desarrollo es una fibración de fibras conexas.*

Demostración. La foliación $\mathcal{F}$ es Riemanniana y comparte con la foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ el desarrollo $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$, que es una fibración de fibras conexas. $\square$

Daremos ahora una caracterización de la sobreyectividad de $\tilde{h}$, el morfismo de holonomía de $\widetilde{\mathcal{F}}$, cuando la submersión $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$, el desarrollo de $\mathcal{F}$ cuando modela sobre $\widehat{N}$, tiene fibras conexas.

Proposición 16.9. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación transversalmente homogénea Riemanniana tal que la submersión $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ tiene las fibras conexas. Entonces el morfismo $\tilde{h}\colon \pi_1(\widetilde{M}) \to \mathrm{Aut}(\pi) \cong \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ es sobreyectivo si y solamente si la submersión desarrollo de $\mathcal{F}$, $f\colon \widetilde{M} \to N$, tiene las fibras conexas.*

Demostración. Partimos del diagrama

$$\begin{tikzcd} \widehat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & \widehat{N} \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{M} \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Supongamos que f tiene las fibras conexas. Sea $[k] \in \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$, $[k] \neq [e]$, y escojamos $\hat{n} \in \widehat{N}$. Llamemos $n = \pi(\hat{n})$. Como las fibras de $\hat{f}$ son conexas tendremos que $\widehat{L} = \hat{f}^{-1}(\hat{n})$ y $\widehat{L}' = \hat{f}^{-1}([k] \cdot \hat{n})$ son dos hojas distintas de $\widehat{\mathcal{F}}$ en $\widehat{M}$, donde $\widehat{\mathcal{F}}$ representa la foliación levantada $\widehat{\mathcal{F}} = \tilde{p}^*\widetilde{\mathcal{F}}$. Sean entonces $\widetilde{L} = \tilde{p}(\widehat{L})$ y $\widetilde{L}' = \tilde{p}(\widehat{L}')$. Se tiene que

$$(\pi \circ \hat{f})(\widehat{L}) = (\pi \circ \hat{f})(\widehat{L}') = n = (f \circ \tilde{p})(\widehat{L}) = (f \circ \tilde{p})(\widehat{L}') = f(\tilde{L}) = f(\tilde{L}').$$

Pero como f tiene las fibras conexas eso implica necesariamente que $\widetilde{L} = \widetilde{L}'$ y por tanto existe $\gamma \in \mathrm{Aut}(p')$ tal que $\widehat{L}' = \gamma\widehat{L}$, con lo que

$$[k] \cdot \hat{n} = f(\widehat{L}') = f(\gamma\widehat{L}) = \tilde{h}(\gamma) \cdot f(\widehat{L}) = \tilde{h}(\gamma) \cdot n,$$

y entonces $\tilde{h}(\gamma) = [k]$.

Recíprocamente, supongamos que $\tilde{h}$ es sobre. Sea $n \in N$ y supongamos que $f^{-1}(n)$ tiene dos fibras $\widetilde{L}$ y $\widetilde{L}'$. Sean $\widehat{L}$ y $\widehat{L}'$ dos hojas de $\widehat{\mathcal{F}}$ tales que $p'(\widehat{L}) = \widetilde{L}$ y $p'(\widehat{L}') = L'$. Entonces

$$(f \circ \tilde{p})(\widehat{L}) = (f \circ \tilde{p})(\widehat{L}') = n = (\pi \circ \hat{f})(\widehat{L}) = (\pi \circ \hat{f})(\widehat{L}').$$

Así, existe $[k] \in \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ tal que $\hat{f}(\widehat{L}) = [k] \cdot \hat{f}(\widehat{L}')$. Pero como $\tilde{h}$ es sobre sabemos que existe $\gamma \in \mathrm{Aut}(p')$ tal que $\tilde{h}(\gamma) = [k]$. Entonces

$$\hat{f}(\gamma\widehat{L}') = [k] \cdot \hat{f}(\widehat{L}') = \hat{f}(\widehat{L}).$$

Pero como las fibras de $\hat{f}$ son conexas llegamos a que $\gamma\widehat{L}' = \widehat{L}$ y por tanto

$$\widetilde{L} = \tilde{p}(\widehat{L}) = \tilde{p}(\gamma\widehat{L}') = \tilde{p}(\widehat{L}') = \widetilde{L}'. \quad \square$$

Proposición 16.10. *Si $\tilde{h}$ es sobreyectiva entonces Γ, el grupo de holonomía de $\mathcal{F}$ cuando modela sobre $\widehat{N}$, es isomorfo al producto directo $\Gamma_0 \times \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$.*

Demostración. Inmediato teniendo en cuenta la descripción de Γ dada en la Sección 13.4. $\square$

Nota 16.11. De esta forma, si las fibras del desarrollo de $\mathcal{F}$ como N-foliación y las fibras del desarrollo de $\mathcal{F}$ como $\widehat{N}$-foliación son conexas, estaremos en ambos casos en disposición de aplicar el Teorema 9.6, que nos permitirá calcular la cohomología básica. Entonces, por un lado, tendremos que

$$\mathrm{H}(M/\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}_{\Gamma_0}(N),$$

y por otro,

$$\mathrm{H}(M/\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}_{\Gamma}(\widehat{N}).$$

Nótese que esto es congruente con nuestros cálculos pues la Proposición 16.10 nos permite concluir que

$$\mathrm{H}_{\Gamma}(\widehat{N}) = \mathrm{H}_{\Gamma_0 \times \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e}(\widehat{N}) = \mathrm{H}_{\Gamma_0}(N),$$

pues $\pi_1(N) = \pi_1(\widehat{G_0}/\widehat{K_0}) = \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$.

Corolario 16.12. *Si el desarrollo $f\colon \widetilde{M} \to N$ es una fibración, entonces*

$$(\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e)/\widetilde{\Gamma}_0 \cong \pi_0(F),$$

donde F representa la fibra de f.

Demostración. Tomando la serie exacta de f:

$$\cdots \to \pi_2(N) \to \pi_1(F) \xrightarrow{\alpha} \pi_1(\widetilde{M}) \xrightarrow{f_\sharp} \pi_1(N) \xrightarrow{\beta} \pi_0(F) \to 0 \tag{16.2.2}$$

es claro que

$$\pi_0(F) = \operatorname{im}\beta = \pi_1(N)/\ker\beta = \pi_1(N)/\operatorname{im} f_\sharp \cong (\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e)/\widetilde{\Gamma}_0,$$

pues $\pi_1(N) \cong \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ y $\operatorname{im} f_\sharp = \widetilde{\Gamma}_0$. $\square$

Consideremos ahora la cubierta $\pi_{G_\sharp}\colon G_\sharp \to \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$, definida de la forma

$$\pi_{G_\sharp}([([g]_\sharp, [k])]) = [g]^\sharp.$$

Sabemos que $\pi_{G_\sharp}(\Gamma) = \Gamma_0$ (ver Teorema 13.13).

Lema 16.13. *Se tiene que*

$$\pi_{G_\sharp}^{-1}(\Gamma_0) = \Gamma \cdot \ker \pi_{G_\sharp}.$$

Demostración. Si $\hat{g} \in \Gamma \cdot \ker \pi_{G_\sharp}$ entonces existen $\sigma \in \Gamma$ y $k \in \ker \pi_{G_\sharp}$ tales que $\hat{g} = \sigma \cdot k$, con lo que $\pi_{G_\sharp}(\hat{g}) = \pi_{G_\sharp}(\sigma \cdot k) = \pi_{G_\sharp}(\sigma) \in \Gamma_0$.

Recíprocamente, sea $\hat{g} \in \pi_{G_\sharp}^{-1}(\Gamma_0)$. Así, $\pi_{G_\sharp}(\hat{g}) = h(\gamma) \in \Gamma_0$. Dado el elemento $\hat{h}(\gamma) = [(s(h(\gamma)), \xi(\gamma))] \in \Gamma$ es trivial que $\pi_{G_\sharp}(\hat{h}(\gamma)) = h(\gamma)$, con lo que $\pi_{G_\sharp}(\hat{g}) = \pi_{G_\sharp}(\hat{h}(\gamma))$ y por lo tanto $\hat{g} = \hat{h}(\gamma) \cdot k \in \Gamma \cdot \ker \pi_{G_\sharp}$. $\square$

Proposición 16.14. *Se tiene que*

$$\ker \pi_{G_\sharp}/\widetilde{\Gamma}_0 \cong \pi_{G_\sharp}^{-1}(\Gamma_0)/\Gamma.$$

Demostración. Como la cubierta $\Gamma \to \Gamma_0$, de núcleo $\widetilde{\Gamma}_0$, es una restricción de la cubierta $\pi_{G_\sharp}\colon G_\sharp \to \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$, es claro que $\widetilde{\Gamma}_0 = \ker \pi_{G_\sharp} \cap \Gamma$. Así, utilizando el primer Teorema de Isomorfía y el Lema 16.13 tendremos que

$$\ker \pi_{G_\sharp}/\widetilde{\Gamma}_0 = \ker \pi/(\ker \pi_{G_\sharp} \cap \Gamma) = \Gamma \cdot \ker \pi_{G_\sharp}/\Gamma = \pi_{G_\sharp}^{-1}(\Gamma_0)/\Gamma. \quad \square$$

Lema 16.15. *Sean $A \subset B \subset C$ tres subgrupos de un grupo de Lie tales que A y C son cerrados y C/A es finito. Entonces, B es cerrado.*

Demostración. Escogiendo un representante de cada clase en el cociente tendremos $k_1, \dots, k_N$ elementos de C de forma que podemos escribir $C/A = \{[k_i]\}_{i=1,\dots,N}$.

Sea una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de B convergente a $x \in C$. Necesariamente, dado $n \in \mathbb{N}$ tendremos que para algún $k_n \in \{k_1, \dots, k_n\}$ se tiene que $[x_n] = [k_n] \in C/A$ y por lo tanto existe $y_n \in A$ tal que $x_n = k_n \cdot y_n$. Nótese que $k_n = x_n \cdot y_n^{-1} \in B$. Pero como solamente existirán un número finito de k_n diferentes, necesariamente existirá al menos un $k \in \{k_1, \dots, k_N\}$, $k \in B$, tal que la subsucesión dada por los elementos $\{k_n \cdot y_n \colon k_n = k\}$ convergerá a x. Tendremos entonces una subsucesión $\{k \cdot y_{n_k}\}$ tal que

$$x = \lim_{k\to\infty} k \cdot y_{n_k} = k \cdot \lim_{k\to\infty} y_{n_k},$$

y como A es cerrado y por lo tanto $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} \in A \subset B$, tenemos ya que $x \in B$. $\square$

Proposición 16.16. *Si $\pi_{G_\sharp}^{-1}(\overline{\Gamma}_0)/\overline{\Gamma}$ es finito entonces $\pi_{G_\sharp}(\overline{\Gamma}) = \overline{\Gamma}_0$.*

Demostración. Considerando $H = \pi_{G_\sharp}^{-1}(\pi_{G_\sharp}(\overline{\Gamma}))$, el saturado de $\overline{\Gamma}$ por $\pi_{G_\sharp}$, tendremos que $\overline{\Gamma} \subset H \subset \pi_{G_\sharp}^{-1}(\overline{\Gamma}_0)$, con $\pi_{G_\sharp}^{-1}(\overline{\Gamma}_0)/\overline{\Gamma}$ finito, con lo que, por el Lema 16.15, tenemos que H, el saturado de $\overline{\Gamma}$, es cerrado, lo que equivale a que $\pi_{G_\sharp}(\overline{\Gamma})$ sea cerrado. $\square$

Lema 16.17. *Sea $\widehat{G_0}$ un grupo de Lie y sean A un subgrupo algebraico de $\widehat{G_0}$ y $B \subset A$ un subgrupo tal que A/B es finito. Entonces $\overline{A}/\overline{B}$ es finito.*

Demostración. Sea $x \in \overline{A}$. Entonces $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, con $x_n \in A$.

Escogiendo un representante de cada clase en el cociente tendremos $k_1, \dots, k_N$ elementos de A de forma que podemos escribir $A/B = \{[k_i]\}_{i=1,\dots,N}$. Así, necesariamente, dado $n \in \mathbb{N}$ tendremos que para alguno de los k_i existe $y_n \in B$ tal que $x_n = k_i \cdot y_n$. Así, la sucesión $\{x_n\}$ se puede escribir como $\{k_{i_n} \cdot y_n\}$. Pero como solamente existirán un número finito de k_{i_n} diferentes, necesariamente existirá al menos un $k \in \{1, \dots, N\}$ tal que la subsucesión dada por los elementos $\{k_{i_n} \cdot y_n \colon k_{i_n} = k\}$ convergerá a x. Abusando de la notación tendremos entonces una subsucesión $\{k \cdot y_{n_k}\}$ tal que

$$x = \lim_{k\to\infty} k \cdot y_{n_k} = k \cdot \lim_{k\to\infty} y_{n_k},$$

con $y_{n_k} \in B$, con lo que $k^{-1}x \in \overline{B}$ y por lo tanto $x \in k \cdot \overline{B}$. Y como esto puede hacerse para cualquier elemento $x \in \overline{A}$ de forma que el elemento k variará únicamente entre los del conjunto finito $k_1, \ldots, k_n$, tenemos que $\overline{A}/\overline{B}$ es finito. $\square$

Proposición 16.18. *Si las fibras de la fibración desarrollo $f\colon \widetilde{M} \to N$ tienen un número finito de componentes conexas, entonces $\pi_{G_\sharp}(\overline{\Gamma}) = \overline{\Gamma}_0$ y $\pi_{G_\sharp}((\overline{\Gamma})_e) = (\overline{\Gamma}_0)_e$.*

Demostración. Llamando F a la fibra de f y combinando el Corolario 16.12 y la Proposición 16.14 tendremos que

$$\pi_0(F) \cong (\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e)/\widetilde{\Gamma}_0 \cong \ker \pi_{G_\sharp}/\widetilde{\Gamma}_0 \cong \pi_{G_\sharp}^{-1}(\Gamma_0)/\Gamma.$$

Y si $\pi_{G_\sharp}^{-1}(\Gamma_0)/\Gamma$ es finito sabemos, por el Lema 16.17, que

$$\overline{\pi_{G_\sharp}^{-1}(\Gamma_0)}/\overline{\Gamma} \cong \pi_{G_\sharp}^{-1}(\overline{\Gamma}_0)/\overline{\Gamma}$$

tambien es finito, lo que implica, por la Proposición 16.16, que $\pi_{G_\sharp}(\overline{\Gamma}) = \overline{\Gamma}_0$.

Veamos ahora que $\pi_{G_\sharp}((\overline{\Gamma})_e) = (\overline{\Gamma}_0)_e$.

Como $\pi_{G_\sharp}(\overline{\Gamma}) = \overline{\Gamma}_0$ y $\pi_{G_\sharp}((\overline{\Gamma})_e)$ es conexo necesariamente $\pi_{G_\sharp}((\overline{\Gamma})_e) \subset (\overline{\Gamma}_0)_e$. Comprobemos el recíproco:

Demostraremos que $\pi_{G_\sharp}((\overline{\Gamma})_e)$ es abierto y cerrado en $(\overline{\Gamma}_0)_e$. Para ello, tomemos $x \in (\overline{\Gamma}_0)_e$ y U un entorno conexo de trivialidad de la cubierta, con $x \in U$, tal que

$$\pi_{G_\sharp}^{-1}(U) = \sqcup_{\alpha \in A} \widetilde{U}_\alpha,$$

con U_α conexo para todo $\alpha \in A$. Por conexidad, o bien U_α está completamente contenido en $(\overline{\Gamma})_e$ o bien $(\overline{\Gamma})_e \cap U_\alpha = \emptyset$. Si $x \in \pi_{G_\sharp}((\overline{\Gamma})_e)$ entonces existe $U_\alpha \subset (\overline{\Gamma})_e$ tal que $\pi_{G_\sharp}(U_\alpha) = U$ y por lo tanto $U \subset \pi_{G_\sharp}((\overline{\Gamma})_e)$. Con eso se prueba que $\pi_{G_\sharp}((\overline{\Gamma})_e)$ es abierto en $(\overline{\Gamma}_0)_e$. Si suponemos que $x \notin \pi_{G_\sharp}((\overline{\Gamma})_e)$ tendremos que $(\overline{\Gamma})_e \cap U_\alpha = \emptyset$ para todo $\alpha \in A$ y por tanto $\pi_{G_\sharp}((\overline{\Gamma})_e) \cap U = \emptyset$, lo que prueba que $\pi_{G_\sharp}((\overline{\Gamma})_e)$ es cerrado en $(\overline{\Gamma}_0)_e$. Así, $\pi_{G_\sharp}((\overline{\Gamma})_e)$ es abierto y cerrado en $(\overline{\Gamma}_0)_e$, con lo que se tiene la igualdad. $\square$

Corolario 16.19. *Si las fibras de la fibración desarrollo $f\colon \widetilde{M} \to N$ tienen un número finito de componentes conexas, entonces el grupo de Lie $\overline{\Gamma}$ es unimodular si y solamente si $\overline{\Gamma}_0$ es unimodular. Análogamente, $\overline{\Gamma}_e$ es unimodular si y solamente si $(\overline{\Gamma}_0)_e$ es unimodular.*

Demostración. De la Proposición 16.18 se deduce que las proyecciones $\overline{\Gamma} \to \overline{\Gamma}_0$ y $(\overline{\Gamma})_e \to (\overline{\Gamma}_0)_e$ son cubiertas, con lo que, por el Corolario 2.6 tenemos que

$$\det \mathrm{Ad}_{\overline{\Gamma}}(x) = \det \mathrm{Ad}_{\overline{\Gamma}_0}(\pi_{G_\sharp}(x))$$

y que

$$\det \mathrm{Ad}_{(\overline{\Gamma})_e}(x) = \det \mathrm{Ad}_{(\overline{\Gamma}_0)_e}(\pi_{G_\sharp}(x))$$

para todo $x \in \overline{\Gamma}$ y $x \in (\overline{\Gamma})_e$, respectivamente. $\square$

16.3. Cuando en N existe una métrica $\widehat{G_0}$-invariante

Blumenthal, en [2], estudia las foliaciones Riemannianas transversalmente homogéneas, pero únicamente en el caso en que existe sobre $N = \widehat{G_0}/\widehat{K_0}$ una métrica $\widehat{G_0}$-invariante y más concretamente, cuando $\widehat{K_0}$ es compacto. Demostraremos, como también se deduce de los cálculos de Blumenthal, que las foliaciones $\mathcal{F}$ y $\widetilde{\mathcal{F}}$ tienen estructura de $\widehat{N}$-foliación transversalmente homogénea cuando sobre $\widehat{N}$ actúa $\operatorname{Iso}\widehat{N}$, el grupo completo de las isometrías de $\widehat{N}$.

Lema 16.20. *Si en N existe una métrica $\widehat{G_0}$-invariante entonces el grupo de Lie* $\operatorname{Iso}\widehat{N}$ *actúa transitiva y efectivamente en $\widehat{N}$.*

Demostración. Si en N existe una métrica $\widehat{G_0}$-invariante, es decir, si las traslaciones por la izquierda en $\lambda(a)\colon N \to N$ son isometrías para todo $a \in \widehat{G_0}$, la Proposición 16.1 nos garantiza que $\hat{\lambda}(a) \in \operatorname{Iso}\widehat{N}$ para todo $a \in \widehat{G_0}$. Y como $\widehat{G_0}$ actúa transitivamente en $\widehat{N} = \widehat{G_0}/(\widehat{K_0})_e$ es claro que $\operatorname{Iso}\widehat{N}$ también lo hace. Además la acción es efectiva pues si $\varphi \in \operatorname{Iso}\widehat{N}$ es tal que $\varphi(\hat{n}) = \hat{n}$ para todo $\hat{n} \in \widehat{N}$, entonces trivialmente $\varphi = \mathrm{id}$. □

Nota 16.21. Nótese que si $\widehat{G_0}$ no actúa de forma efectiva sobre $\widehat{N}$ entonces no puede realizarse como subgrupo de $\operatorname{Iso}\widehat{N}$, pues la inclusión natural $\widehat{G_0} \to \operatorname{Iso}\widehat{N}$ que a cada $g \in \widehat{G_0}$ lo lleva en $\lambda(g) \in \operatorname{Iso}\widehat{N}$ no es inyectiva. Además, incluso siendo la acción efectiva o tomando para ello el grupo $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$, aunque sí tendríamos un subgrupo de $\operatorname{Iso}\widehat{N}$, no estaría garantizado que éste fuera cerrado.

Supongamos entonces que existe una métrica $\widehat{G_0}$-invariante en N y consideremos $\widehat{N}$ como un $\operatorname{Iso}\widehat{N}$-espacio homogéneo. Entonces tendremos:

Proposición 16.22. *La foliación $\mathcal{F}$ y la foliación levantada $\widetilde{\mathcal{F}}$ tienen estructura de $\widehat{N}$-foliación homogénea Riemanniana modelando sobre el* $\operatorname{Iso}\widehat{N}$*-espacio homogéneo $\widehat{N}$.*

Demostración. Sabemos por las Proposiciones 13.1 y 13.6 que los grupos de holonomía de $\widetilde{F}$ y de $\mathcal{F}$ cuando modelan sobre $\widehat{N}$ son $\widetilde{\Gamma}_0 \subset G_\sharp$ y $\Gamma \subset G_\sharp$, respectivamente. Pero el Corolario 16.3 nos asegura que el grupo de Lie $G_\sharp$ se inyecta en el grupo de Lie $\operatorname{Iso}\widehat{N}$. Basta entonces considerar el Lema 16.20. □

Proposición 16.23. *El grupo de holonomía de $\mathcal{F}$ cuando modela como $\widehat{N}$-foliación Riemanniana, Γ, es el menor subgrupo de* $\operatorname{Iso}\widehat{N}$ *que contiene las traslaciones por la izquierda por los $g_{\alpha\beta}$ y las traslaciones por la derecha por elementos de $\widetilde{\Gamma}_0 \subset \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$.*

16.4. Función modular de $G_\sharp$

Recordemos que $G_\sharp = (\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})_e \times \widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e)/i(\operatorname{Core}\widehat{K_0})$ (Sección 11.2).

Corolario 16.24. *Para $G_\sharp$ se tiene que*

$$\det \operatorname{Ad}_{G_\sharp}([([g]_\sharp, [k])]) = \det \operatorname{Ad}_{\widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}}([g]^\sharp).$$

Demostración. Es inmediato a partir del Corolario 2.7 teniendo en cuenta que $G_\sharp$ es una extensión de $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$ y del grupo discreto $\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e$ y así $(\widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}) = G_\sharp/(\widehat{K_0}/(\widehat{K_0})_e)$. □

Nota 16.25. Del Corolario 16.24 y de la conexidad de $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$, que implica que

$$\det \operatorname{Ad}_{\widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}}([g]^\sharp) > 0, \quad \forall\, [g] \in \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0},$$

se deduce que $\det \operatorname{Ad}_{G_\sharp}([([g]_\sharp, [k])]) > 0$ para todo $[([g]_\sharp, [k])] \in G_\sharp$.

Corolario 16.26. *El grupo de Lie $G_\sharp$ es fuertemente unimodular si y solamente si $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}$ es unimodular.*

Proposición 16.27. *El grupo de Lie $G_\sharp$ es unimodular si y solamente si se cumple que*

$$\det \operatorname{Ad}_{\widehat{G_0}}(g) = \det \operatorname{Ad}_{\widehat{G_0}}(g)_{|\operatorname{Core}(\mathfrak{k})} \quad \forall\, g \in G_\sharp,$$

donde por $\operatorname{Core}(\mathfrak{k})$ *nos referimos al álgebra de Lie de* $\operatorname{Core}\widehat{K_0}$.

Demostración. Por el Corolario 16.24 sabemos que

$$\det \operatorname{Ad}_{G_\sharp}([([g]_\sharp, [k])]) = \det \operatorname{Ad}_{\widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}}([g]^\sharp).$$

Por otra parte, aplicando la Proposición 2.6 tendremos que

$$\det \operatorname{Ad}_{\widehat{G_0}}(x) = \det \operatorname{Ad}_{\widehat{G_0}}(x)_{|\operatorname{Core}(\mathfrak{k})} \cdot \det \operatorname{Ad}_{\widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0}}([x]).$$

Así:

$$\det \operatorname{Ad}_{G_\sharp}([([g]_\sharp, [k])]) = \frac{\det \operatorname{Ad}_{\widehat{G_0}(g)}}{\det \operatorname{Ad}_{\widehat{G_0}}(g)_{|\operatorname{Core}(\mathfrak{k})}}.$$

Por tanto, como $G_\sharp$ es unimodular si y solamente si $\det \operatorname{Ad}_{G_\sharp}([([g]_\sharp, [k])]) = 1$ el resultado se deduce de forma inmediata. □

16.5. Teorema de unimodularidad para fibras no conexas

Lema 16.28. *Sea $\pi\colon E \to B$ un fibrado localmente trivial de fibra F. Si F es compacta entonces π es una aplicación propia.*

Demostración. Sea $C \subset B$ compacto. Deberemos probar que $\pi^{-1}(C)$ es compacto. Para ello, tomemos una sucesión cualquiera $\{x_n\} \subset \pi^{-1}(C)$. Deberemos encontrar una subsucesión convergente. Pero cogiendo $\{\pi(x_n)\}$ tendremos una sucesión convergente en el compacto C, por lo que sabemos que existe una subsucesión $\{\pi(x_{n_k})\}$ convergente a $b \in B$. Como π es un fibrado, existe U entorno abierto de b tal que

$$\Phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$$

es un difeomorfismo. Podemos suponer que la sucesión $\{\pi(x_{n_k})\}$ está completamente contenida en U. Así, considerando la proyección $pr_2 \colon U \times F \to F$ tendremos una sucesión $\{(pr_2 \circ \Phi)(x_{n_k})\}$ en el compacto F, y por tanto existirá una subsucesión $\{(pr_2 \circ \Phi)(x_{n_{k_j}})\}$ convergente. De esta forma la sucesión $\{\Phi(x_{n_{k_j}})\}$ será convergente en $U \times F$, y por tanto $\{x_{n_{k_j}}\}$ será convergente en $\pi^{-1}(U)$. $\square$

Proposición 16.29. *Sea $\mathcal{F}$ una $N = G/K$-foliación transversalmente homogénea sobre una variedad compacta M. Si el cociente $K/\operatorname{Core}(K)$ es compacto, entonces $W = \overline{\Gamma}\backslash G_\sharp$, donde $G_\sharp = G/\operatorname{Core}(K)$ es una variedad compacta.*

Demostración. Supongamos M y $K/\operatorname{Core}(K)$ compactos. Entonces, por el Lema 16.28 el fibrado de Blumental $\bar{\rho} \colon \Gamma\backslash f^*(G_\sharp) \to M$, de fibra $K/\operatorname{Core}(K)$, es una aplicación propia, con lo que la compacidad de M implica la compacidad del espacio total $\Gamma\backslash f^*(G_\sharp)$. Completando el diagrama ya conocido con la proyección $\pi \colon G_\sharp \to \overline{\Gamma}\backslash G_\sharp$ tendremos:

$$\begin{tikzcd} f^*(G_\sharp) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\tau"'] & G_\sharp \arrow[r, "\pi"] & \overline{\Gamma}\backslash G_\sharp \\ \Gamma\backslash f^*(G_\sharp) & & \end{tikzcd}$$

donde τ es una cubierta regular de grupo Γ.

Nótese que, como estamos considerando $K/\operatorname{Core}(K)$ compacto, sabemos que existe en N una métrica invariante, lo que, por la Proposición 16.5, implica que el desarrollo $f \colon \widetilde{M} \to N$ es una fibración y por la tanto es sobre. Eso garantiza, por construcción, la sobreyectividad de $\bar{f}$.

Definimos entonces una aplicación

$$\varphi \colon \Gamma\backslash f^*(G_\sharp) \to \overline{\Gamma}\backslash G_\sharp$$

haciendo, dado $x \in \Gamma\backslash f^*(G_\sharp)$, $\varphi(x) = (\pi \circ \bar{f})(\tilde{x})$, con $\tilde{x} \in f^*(G_\sharp)$ tal que $\tau(\tilde{x}) = x$. Se tiene que φ esta bien definida, pues si escogemos $\gamma\tilde{x} \in f^*(G_\sharp)$ tal que $\tau(\gamma\tilde{x}) = x$, como tenemos demostrado que $\bar{f}$ es equivariante, tendremos que $\bar{f}(\gamma\tilde{x}) = \gamma \cdot \bar{f}(\tilde{x})$, con $\gamma \in \Gamma$, y por tanto $\pi(\bar{f}(\gamma\tilde{x})) = \pi(\gamma \cdot \bar{f}(\tilde{x})) = \pi(\bar{f}(\tilde{x}))$. Además, φ es continua por ser localmente composición de continuas. Y como $\bar{f}$ es sobre, llegamos a que $\overline{\Gamma}\backslash G_\sharp$ es compacto por ser imagen continua de un compacto. $\square$

Estamos ya en condiciones de enunciar el siguiente Teorema, que generalizará el Teorema 15.10, que necesitaba de fibras conexas en el desarrollo, al caso en el que las fibras de la submersión desarrollo tienen un número finito de componentes conexas:

Teorema 16.30. *Sea $\mathcal{F}$ una N-foliación sobre una variedad compacta M, donde $N = G_0/K_0$, con G_0 conexo y $K_0/\operatorname{Core}(K_0)$ compacto. Supongamos que la foliación está definida por un desarrollo cuyas fibras tienen un número finito de componentes conexas. Si $G_0/\operatorname{Core}(K_0)$ y $\overline{\Gamma}_0$ son unimodulares y $K_0/\operatorname{Core}(K_0)$ es fuertemente unimodular, entonces $\mathcal{F}$ es unimodular.*

Demostración. Considerando la cubierta universal $p\colon \widehat{G_0} \to G_0$ haremos $\widehat{K_0} = p^{-1}(K_0)$. Por las Proposiciones 1.23 y 1.24 sabemos que

$$(G_0)_\sharp = \widehat{G_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0} = G_0/\operatorname{Core}(K_0)$$

y que

$$(K_0)_\sharp = \widehat{K_0}/\operatorname{Core}\widehat{K_0} = K_0/\operatorname{Core}(K_0).$$

Como $(K_0)_\sharp$ es compacto sabemos que en N existe una métrica $(G_0)_\sharp$-invariante, lo que, por la Proposición 16.5, implica que tanto el desarrollo $f\colon \widetilde{M} \to N$ como su levantamiento $\hat{f}$ a la cubierta universal $\widehat{N}$ son fibrados localmente triviales. De esta forma, siguiendo la construcción realizada en el Capítulo 11, podremos considerar que la foliación $\mathcal{F}$ modela sobre $\widehat{N} = G_\sharp/K_\sharp$, con $G_\sharp \cong (G_0)_\sharp$ y $K_\sharp \cong (K_0)_\sharp$, y donde el desarrollo $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ tiene fibras conexas, siendo $\Gamma \subset G_\sharp$ el grupo de holonomía. Con las hipótesis que proponemos se cumplirán entonces todas las condiciones necesarias para aplicar el Teorema 15.10, puesto que:

1. *En $\widehat{N}$ existe una métrica $G_\sharp$-invariante*, pues la isotropía de la acción de $G_\sharp$ en $\widehat{N}$ es difeomorfa a $(K_0)_\sharp$, que es compacto.

2. *La variedad $\widehat{W} = \overline{\Gamma}\backslash G_\sharp$ es compacta*. Como $K_\sharp \cong (K_0)_\sharp$, la isotropía de la acción (efectiva) de $G_\sharp$ sobre $\widehat{N}$, es compacta y como M es compacta, la Proposición 16.29 garantiza la compacidad de $\widehat{W}$.

3. *El grupo de Lie $K_\sharp \cong (K_0)_\sharp$ es fuertemente unimodular*, por hipótesis.

4. *Los grupos de Lie $G_\sharp$ y $\overline{\Gamma}$ son unimodulares*.

   En primer lugar, como $(G_0)_\sharp$ es, por hipótesis, unimodular, el Corolario 16.24 nos permite asegurar que $G_\sharp$ también es unimodular.

   Por otra parte, Por el Corolario 16.19, como $\overline{\Gamma}_0$ es unimodular, sabemos ya que $\overline{\Gamma}$ es unimodular.

Entonces, aplicando el Teorema 15.10, tenemos ya que $\mathcal{F}$ es unimodular. □

16.6. Ejemplo

Dado $G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$, el grupo de las matrices de orden 3 y determinante 1, consideramos el subgrupo compacto no conexo

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})\colon \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

de forma que tendremos el espacio homogéneo $N = G/K$.

Sea $\Gamma \subset G$ un subgrupo discreto uniforme. La foliación en G cuyas hojas son las fibras de la proyección $\pi\colon G \to G/K$ induce en $M = \Gamma\backslash \mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ una N-foliación transversalmente homogénea, determinada por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G = \mathrm{SL}(3,\mathbb{R}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p"'] & N = G/K \\ M = \Gamma\backslash G & \end{tikzcd}$$

donde $p\colon G \to M$ es una cubierta regular de grupo Γ.

Nótese que $K \subset \mathrm{O}(3)$, que no tiene subgrupos normales propios (ver [46], pág. 33), con lo que necesariamente $\mathrm{Core}\, K = \{e\}$ y, por lo tanto, la acción de G en N será efectiva.

Así, como M es compacta, K compacto y fuertemente unimodular (fácilmente comprobable) y como las fibras de π, difeomorfas a K, tienen dos componentes conexas, entonces $\mathcal{F}$ es unimodular.

Capítulo 17
Aplicaciones del Teorema de Tischler

El caso más sencillo de foliación de Lie es cuando el álgebra de Lie es $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$, es decir, la foliación está definida por una forma cerrada. Según que el grupo de holonomía sea discreto o no, tendremos que las hojas son cerradas o no, siendo en el primer caso la foliación, por el teorema de estructura, una fibración sobre $\mathbb{S}^1$. El siguiente teorema garantiza que con una pequeña deformación esto siempre puede conseguirse.

Teorema 17.1. *[48] Sea M una variedad diferenciable compacta. Si M admite una 1-forma cerrada no nula en ningún punto entonces M fibra sobre* $\mathbb{S}^1$.

Utilizando este teorema demostraremos en este capítulo el principal resultado de nuestro trabajo, que, dada una foliación transversalmente homogénea no unimodular sobre una variedad compacta M, garantiza que, bajo ciertas hipótesis, o bien M, o bien las adherencias de las hojas, o bien el espacio total del fibrado de Blumenthal, fibran sobre $\mathbb{S}^1$.

17.1. La adherencia de las hojas

Sea $\mathcal{F}$ una N-foliación transversalmente homogénea Riemanniana sobre una variedad compacta M, donde $N = G_0/K_0$, con G_0 conexo. Sabemos que podemos considerar $\mathcal{F}$ modelando como $\widehat{N}$-foliación transversalmente homogénea, también Riemanniana, con lo que el grupo de holonomía será $\Gamma \subset G_\sharp$ (Sección 13.3).

Así, tenemos la cubierta universal $p\colon \widehat{M} \to M$, la fibración desarrollo $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ (de fibras conexas) y el morfismo de holonomía $h\colon \operatorname{Aut}(p) \to \Gamma$.

Dado $\hat{n} \in \widehat{N}$, llamaremos $\Gamma\hat{n}$ a su órbita por la acción de Γ en $\widehat{N}$, es decir:

$$\Gamma\hat{n} = \{\gamma \cdot \hat{n} \colon \gamma \in \Gamma \subset G_\sharp\} \subset \widehat{N}.$$

17.1.1. Existencia de una métrica invariante

Exigiremos como hipótesis que sobre N exista una métrica invariante, ya que así estará garantizado que $G_\sharp$ se puede inyectar como subgrupo en Iso, el grupo completo de las isometrías de $\widehat{N}$ (Corolario 16.3). Así tendremos $\overline{\Gamma} \subset \overline{G_\sharp}$, donde consideramos la adherencia en Iso (nótese que aún siendo $G_\sharp$ un subgrupo de Iso, no está garantizado que sea cerrado).

Para poder realizar nuestro estudio necesitaremos el siguiente Teorema, que viene demostrado en la página 167 de [21]:

Teorema 17.2. *[21] Sea M una variedad Riemanniana y sea $\{\gamma_n\}$ una sucesión de isometrías en M. Supongamos que existe un punto $o \in M$ tal que la sucesión $\{\gamma_n \cdot o\}$ es convergente. Entonces existe una isometría γ y una subsucesión $\{\gamma_{nk}\}$ de $\{\gamma_n\}$ que converge a γ en la topología compacto abierto.*

Con esta herramienta estaremos en condiciones de probar el siguiente Lema:

Lema 17.3. *Para todo $\hat{n} \in \widehat{N}$ se tiene que $\overline{\Gamma \hat{n}} = \overline{\Gamma}\hat{n}$.*

Demostración. Comenzaremos probando que $\overline{\Gamma}\hat{n} \subset \overline{\Gamma \hat{n}}$. Dado un elemento $\gamma\hat{n} \in \overline{\Gamma}\hat{n}$ podemos encontrar una sucesión $\{\gamma_n\}$ de elementos de Γ que converge a γ. Así

$$\gamma\hat{n} = (\lim \gamma_n)\hat{n} = \lim(\gamma_n\hat{n}) \in \overline{\Gamma \hat{n}}.$$

Veamos el recíproco:

Sea $x \in \overline{\Gamma \hat{n}}$. esto implica que existe una sucesión $\{\gamma_n\hat{n}\}$, con $\gamma_n \in \Gamma$, tal que $\lim \gamma_n\hat{n} = x$, Por el Teorema 17.2 sabemos que existe una subsucesión $\{\gamma_{nk}\}$ que converge a $\gamma \in \overline{\Gamma}$. Necesariamente se tiene entonces que

$$x = \lim_{n\to\infty} \gamma_n\hat{n} = \lim_{k\to\infty} \gamma_{n_k}\hat{n} = \gamma\hat{n} \in \overline{\Gamma}\hat{n}. \quad \square$$

Asimismo, Helgason también demuestra en [21], como parte de su Teorema 2.5, el siguiente resultado:

Lema 17.4. *Sea $\hat{n} \in \widehat{N}$ y sea $\widetilde{K}(\hat{n})$ el subgrupo formado por las isometrías de* $\operatorname{Iso}\widehat{N}$ *que dejan $\hat{n}$ fijo. Entonces $\widetilde{K}(\hat{n})$ es compacto.*

Proposición 17.5. *La adherencia $\overline{\Gamma}$ del grupo de holonomía de $\mathcal{F}$ cuando modela como $\widehat{N}$-foliación actúa transitivamente sobre $\overline{\Gamma}\hat{n}$, con grupo de isotropía compacto.*

Demostración. Que $\overline{\Gamma}$ actúa transitivamente en $\overline{\Gamma}\hat{n}$ es trivial. Para probar la compacidad de la isotropía, llamándole $\Gamma_{\hat{n}}$ a la isotropía en el punto $\hat{n}$, tendremos que

$$\Gamma_{\hat{n}} = \{\gamma \in \overline{\Gamma} \colon \gamma \cdot \hat{n} = \hat{n}\} = \widetilde{K}(\hat{n}) \cap \overline{\Gamma},$$

con lo que $\Gamma_{\hat{n}}$ es un cerrado en el compacto $\widetilde{K}(\hat{n})$, y por lo tanto, compacto. $\square$

Corolario 17.6. *La órbita de cualquier elemento $\hat{n} \in \widehat{N}$ tiene estructura de espacio homogéneo haciendo*

$$\overline{\Gamma}\hat{n} \cong \overline{\Gamma}/\Gamma_{\hat{n}}.$$

17.1.2. La foliación inducida

Sea $L \in \mathcal{F}$ una hoja en M. Dado el diagrama

$$\begin{tikzcd} \widehat{M} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "p"'] & \widehat{N} \\ M & \end{tikzcd}$$

escogeremos $\widehat{L} \in \widehat{\mathcal{F}} = p^*\mathcal{F}$ tal que $p(\widehat{L}) = L$. Sea $\hat{n} = f(\hat{x}) \in \widehat{N}$, con $\hat{x} \in \widehat{L}$ (Nótese que $\hat{f}$ es constante a lo largo de $\widehat{L}$).

Para poder demostrar la Proposición 17.8 necesitaremos la siguiente propiedad:

Lema 17.7. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y abierta. Sea $A \subset Y$. Entonces*

$$f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}.$$

Demostración. Que $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$ es trivial, pues $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\overline{A})$ y $f^{-1}(\overline{A})$ es cerrado en X por ser imagen recíproca de un cerrado en Y.

Vemos que $f^{-1}(\overline{A}) \subset \overline{f^{-1}(A)}$:

Sea $x \in X$ tal que $x \notin \overline{f^{-1}(A)}$. Entonces existe $U_x \subset X$ entorno abierto de x tal que $U_x \cap f^{-1}(A) = \emptyset$. Así, $f(U_x) \cap A = \emptyset$, y como $f(U_x)$ es abierto por ser f abierta, $f(x) \notin \overline{A}$, con lo que $x \notin f^{-1}(\overline{A})$. □

Como en nuestro caso podemos contar con una métrica invariante en $\widehat{N}$ estamos en condiciones de aplicar el Lema 17.3, lo que unido al Lema 17.7 nos permitirá demostrar la siguiente Proposición:

Proposición 17.8. *Sea $\overline{L}$ la adherencia de L. Entonces*

$$p^{-1}(\overline{L}) = \hat{f}^{-1}(\overline{\Gamma}\hat{n}),$$

y $\overline{L}$ es una subvariedad embebida de M.

Demostración. Como $\hat{f}$ es una fibración de fibras conexas la Proposición 6.12 asegura que $p^{-1}(L) = \hat{f}^{-1}(\Gamma\hat{n})$. Y como $\hat{f}$ y p son aplicaciones abiertas, con la ayuda del Lema 17.7 podemos concluir que

$$p^{-1}(\overline{L}) = \overline{p^{-1}(L)} = \overline{\hat{f}^{-1}(\Gamma\hat{n})} = \hat{f}^{-1}(\overline{\Gamma\hat{n}}) = \hat{f}^{-1}(\overline{\Gamma}\hat{n}),$$

donde el Lema 17.3 garantiza la última igualdad.

Así, restringiendo el dominio de las aplicaciones tendremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\overline{L}) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{p}"'] & \overline{\Gamma}\hat{n} \\ \overline{L} & \end{tikzcd} \tag{17.1.1}$$

donde $\bar{p} = p_{|p^{-1}(\overline{L})}$ y $\bar{f} = \hat{f}_{|p^{-1}(\overline{L})}$.

Ahora, como la órbita en cualquier punto por la acción de un grupo de Lie en una variedad diferenciable es una subvariedad inmersa ([17], Teorema 1.2, pág 106) tenemos que $\overline{\Gamma}\hat{n}$ es una subvariedad de $\widehat{N}$. Además, como la imagen recíproca de una subvariedad por una submersión es una subvariedad (Sección 4.7 de [16]) sabemos también que $p^{-1}(\overline{L}) = \hat{f}^{-1}(\overline{\Gamma}\hat{n})$ es una subvariedad de M. Y como p es una cubierta, y por tanto localmente un difeomorfismo, llegamos a que $\overline{L}$ es una subvariedad inmersa de M, y como estamos considerando M compacta, entonces $\overline{L}$ es compacta y por lo tanto una subvariedad embebida en M. □

Para poder demostrar el Teorema 17.11, que caracteriza la foliación inducida por $\mathcal{F}$ en las adherencias de las hojas, necesitaremos estudiar las aplicaciones que aparecen en el Diagrama 17.1.1. Nótese que, como en cualquier foliación la adherencia de un conjunto saturado es saturada ([36], Proposición 1.3, pág. 18), $\overline{L}$ es una unión de hojas de $\mathcal{F}$ y por tanto $p^{-1}(\overline{L})$ será una unión de hojas de $\widehat{\mathcal{F}}$.

Lema 17.9. *La restricción $\bar{f}\colon p^{-1}(\overline{L}) \to \overline{\Gamma}\hat{n}$ es un fibrado localmente trivial con fibras conexas.*

Demostración. Como la foliación es Riemanniana sabemos que $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ es un fibrado localmente trivial. Y como $p^{-1}(\overline{L}) = \hat{f}^{-1}(\overline{\Gamma}\hat{n})$ entonces $\bar{f}$ es una restricción de un fibrado localmente trivial a la imagen recíproca de una subvariedad, y por tanto, un fibrado localmente trivial.

Como $\overline{L}$ es una unión de hojas de $\mathcal{F}$ entonces $p^{-1}(\overline{L})$ es una unión de hojas de $\widehat{\mathcal{F}}$ en $\widehat{M}$. Así, las fibras de $\bar{f}$ serán hojas completamente contenidas en $p^{-1}(\overline{L})$, y por tanto, conexas. Que $\bar{f}$ es sobreyectiva se deduce de manera inmediata teniendo en cuenta que $\hat{f}$ es sobre y que $\hat{f}^{-1}(\overline{\Gamma}\hat{n}) = p^{-1}(\overline{L})$. □

Lema 17.10. *La restricción $\bar{p}\colon p^{-1}(\overline{L}) \to \overline{L}$ de $p\colon \widehat{M} \to M$ es una cubierta regular, no necesariamente conexa.*

Demostración. Es inmediato comprobar que $\bar{p}$ es una cubierta regular donde los abiertos distinguidos serán intersecciones de los abiertos distinguidos de p con $\overline{L}$.

Nótese que, como $p^{-1}(\overline{L})$ no es necesariamente conexo, en $p^{-1}(\overline{L})$ habrá muchos otros automorfismos además de las restricciones de los automorfismos de $\widehat{M}$, pues pueden actuar de forma distinta en cada componente conexa. □

Teorema 17.11. *[2] La foliación inducida por $\mathcal{F}$ en $\overline{L}$ es una foliación transversalmente homogénea.*

Demostración. A partir de la sucesión exacta de los grupos de homotopía, es inmediato comprobar que $p^{-1}(\overline{L})$ y $\overline{\Gamma}\hat{n}$ tienen el mismo número de componentes conexas, pues $\bar{f}$ tiene las fibras conexas. Sea $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ el conjunto de componentes conexas de $p^{-1}(\overline{L})$. Como la acción de $\mathrm{Aut}(\bar{p})$ es libre en cada C_α, tenemos que un automorfismo $\tau \in \mathrm{Aut}(\bar{p})$ cumplirá que $\tau_{|C_\alpha} = \gamma_{|C_\alpha} : \;= \gamma_\alpha$ para algún $\gamma \in \mathrm{Aut}\, p$. Así, teniendo en cuenta que $\bar{f}$ lleva componentes conexas en componentes conexas, como comprobaremos en la Proposición 17.13, podemos definir un morfismo

$\bar{h}\colon \operatorname{Aut}(\bar{p}) \to \operatorname{Diff}(\overline{\Gamma}\hat{n})$ dado por $\bar{h}(\tau)(\hat{n}) = h(\gamma_\alpha)\cdot\hat{n}$ si $\bar{f}^{-1}(\hat{n}) \subset C_\alpha$, para el cual $\bar{f}$ es $\bar{h}$-equivariante, pues dado $x \in C_\alpha$ se tiene que

$$\bar{f}(\tau\hat{x}) = \bar{f}(\gamma_\alpha\hat{x}) = h(\gamma_\alpha)\cdot\bar{f}(\hat{x}) = \bar{h}(\tau)(\bar{f}(\hat{x}))\cdot\bar{f}(\hat{x}),$$

pues $\bar{f}$ es h equivariante por serlo $\hat{f}$.

De este modo, con un razonamiento similar al efectuado para demostrar el Teorema 6.13, encontraremos un cociclo $\{(U_\alpha, f_\alpha, g_{\alpha\beta})\}$ donde las $g_{\alpha\beta}$ son traslaciones por la izquierda de elementos de Γ. □

17.1.3. La restricción a las componentes conexas

Para poder contar con una submersión desarrollo de la foliación inducida en las adherencias de las hojas a la que poder aplicar nuestros resultados, donde los espacios sean conexos, deberemos restringir el diagrama 17.1.1 a las componentes conexas. De esta forma podremos dotar a la foliación inducida por $\mathcal{F}$ en $\overline{L}$ de estructura de foliación transversalmente homogénea sobre un espacio homogéneo conexo.

Para ello, partiendo del diagrama 17.1.1, escogemos $x \in p^{-1}(\overline{L})$ tal que $\hat{f}(x) = \hat{n}$. Llamaremos P a la componente conexa de $p^{-1}(\overline{L})$ que contiene a x. De la Proposición 6.1 podemos deducir directamente la siguiente proposición:

Proposición 17.12. *La restricción $p' = \bar{p}_{|P}\colon P \to \overline{L}$ es una cubierta regular con grupo de automorfismos dado por*

$$\operatorname{Aut} p' = \{\gamma \in \operatorname{Aut} p\colon \gamma\cdot P = P\}.$$

La Proposición 1.3 nos permite asegurar que la componente conexa de $\overline{\Gamma}\hat{n}$ que contiene al elemento $\hat{n} = \hat{f}(x)$ es $\overline{\Gamma}_e\hat{n}$.

Proposición 17.13. *Se tiene que $\bar{f}(P) = \overline{\Gamma}_e\hat{n}$.*

Demostración. Como $\bar{f}(P)$ es conexo, por ser imagen continua de un conexo, es inmediato que $\bar{f}(P) \subset \overline{\Gamma}_e\hat{n}$. Por otro lado, como P es abierto en $p^{-1}(\overline{L})$ y $\bar{f}$ es abierta, entonces $\bar{f}(P)$ es abierto en $\overline{\Gamma}_e\hat{n}$. Si probamos que también es cerrado ya tendremos la igualdad que buscamos. Para ello, supongamos que existe $\epsilon\hat{n} \in \overline{\Gamma}_e\hat{n}$ tal que $\epsilon\hat{n} \notin \bar{f}(P)$ (si no existiera ya tendríamos la igualdad). Entonces $\bar{f}^{-1}(\epsilon\hat{n})$ es una hoja contenida en una componente conexa de $p^{-1}(\overline{L})$ distinta de P, que llamaremos P'. Como P' es un abierto en $p^{-1}(\overline{L})$ y como $\bar{f}$ tiene fibras conexas tendremos que $\bar{f}(P')$ será un entorno abierto de $\epsilon\hat{n}$ tal que $\bar{f}(P') \cap \bar{f}(P) = \emptyset$, con lo que se prueba que $\bar{f}(P)$ es también cerrado. □

Corolario 17.14. *La restricción $f = \bar{f}_{|P}\colon P \to \overline{\Gamma}_e\hat{n}$ es un fibrado localmente trivial de fibras conexas.*

Teorema 17.15. *La foliación inducida por $\mathcal{F}$ en $\overline{L}$ es una foliación transversalmente homogénea modelando sobre $\overline{\Gamma}_e\hat{n}$, de forma que la submersión desarrollo tiene fibras conexas, y donde sobre $\overline{\Gamma}_e\hat{n}$ actúa transitiva y efectivamente, con isotropía compacta K_L, un grupo de Lie $\overline{\Sigma} \subset G_\sharp$ tal que $\overline{\Gamma}_e \subset \overline{\Sigma} \subset \overline{\Gamma}$.*

Demostración. Considerando las restricciones $p' = \bar{p}_{|P}$ y $f' = \bar{f}_{|P}$ tendremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & \overline{\Gamma}_e\hat{n} \\ \overline{L} & \end{tikzcd} \tag{17.1.2}$$

que dotará a $\mathcal{F}_{|\overline{L}}$ de estructura de $\overline{\Gamma}_e\hat{n}$-foliación transversalmente homogénea. Para demostrarlo deberemos probar que f' es equivariante para algún morfismo h' de $\pi_1(\overline{L})$ en algún grupo de Lie que actúe transitiva y efectivamente en $\overline{\Gamma}_e\hat{n}$. Pero, dado $\gamma \in \mathrm{Aut}(p') \cong \pi_1(\overline{L})/\pi_1(P)$, podemos definir $h'(\gamma) = h(\gamma) \in \Gamma \subset \overline{\Gamma}$, con $h\colon \mathrm{Aut}(p) \to \Gamma$ morfismo de holonomía de $\mathcal{F}$ cuando modela sobre $\widehat{N}$. Y como $\hat{f}$ es equivariante para h entonces también lo será f' para h'.

Así, haciendo $\Sigma = \mathrm{im}\,\mathrm{Aut}(p')$ tendremos que el diagrama 17.1.2 dota a la foliación inducida en $\overline{L}$ de estructura de foliación transversalmente homogénea, con grupo de holonomía $\Sigma \subset \overline{\Sigma}$. Este último actúa transitiva y efectivamente en $(\overline{\Gamma}n)_n$, puesto que, como $\Gamma \cap \overline{\Gamma}_e \subset \Sigma \subset \Gamma$, tendremos que $\overline{\Gamma}_e \subset \overline{\Sigma} \subset \overline{\Gamma}$, y así $\overline{\Sigma}$ actuará transitivamente en $(\overline{\Gamma}n)_n$ pues la acción de $\overline{\Gamma}_e$ ya es transitiva, y efectivamente por estar contenido en $\overline{\Gamma}$, cuya acción es efectiva pues $\overline{\Gamma} \subset G_\sharp$.

Como P es una unión de fibras de $\hat{f}$, es claro que la restricción f' sigue teniendo las fibras conexas. Que la isotropía es compacta se demuestra de forma análoga a como se hizo en la Proposición 17.5. □

17.2. Cohomología en Variedades

Presentamos a continuación algunos resultados bien conocidos sobre la relación entre grupos de homotopía, cohomología singular y cohomología de De Rham.

Definición 17.16. Sean C un grupo abeliano. Una resolución libre $F_\bullet$ de C es una sucesión exacta

$$\cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to C \to 0,$$

donde los F_i son grupos abelianos libres para todo $i \geq 0$.

Sean C y A grupos abelianos y $F_\bullet$ una resolución libre de C

$$\cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to C \to 0.$$

Si dualizamos la serie obtendremos un complejo de la forma

$$0 \to \mathrm{Hom}(F_0, A) \to \mathrm{Hom}(F_1, A) \to \mathrm{Hom}(F_2, A) \to \cdots$$

Definición 17.17. Llamaremos $\mathrm{Ext}^i(C, A)$ al i-ésimo grupo de cohomología de este complejo. Este grupo no depende de la resolución escogida.

Sea X un espacio topológico. Veamos la relación entre homología y cohomología.

Teorema 17.18. (Teorema del Coeficiente Universal) *[43]. Sea A un grupo abeliano. Entonces*

$$\mathrm{H}^k(X;A) = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_k(X),A) \oplus \mathrm{Ext}^1(\mathrm{H}_{k-1}(X),A),$$

donde denotamos por $\mathrm{H}(X) = \mathrm{H}(X;\mathbb{Z})$ la homología singular con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

Corolario 17.19. *Dado un espacio topológico conexo X se tiene que*

$$\mathrm{H}^1(X;\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1(X),\mathbb{R}).$$

Demostración. El Teorema del Coeficiente Universal, para $k=1$, asegura que

$$\mathrm{H}^1(X;\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1(X),\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Ext}^1(\mathrm{H}_0(X),\mathbb{R}). \tag{17.2.1}$$

Como por hipótesis suponemos X conexo, sabemos que $\mathrm{H}_0(X) = \mathbb{Z}$. Calculemos entonces $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, que será nulo porque $\mathbb{Z}$ es libre: escojamos como representación libre de $\mathbb{Z}$ la que se obtiene tomando $F_0 = \mathbb{Z}$, que por exactitud quedará de la forma

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \to 0.$$

Dualizando

$$0 \to \mathrm{Hom}(F_0,\mathbb{R}) \to 0.$$

Por tanto, la cohomología de este complejo será $\mathrm{H}^0 = \mathrm{Ext}^0(\mathbb{Z},\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ y $\mathrm{H}^i = \mathrm{Ext}^i((\mathbb{Z},\mathbb{R}) = 0$ para $i > 0$. Así, $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z},\mathbb{R}) = 0$ y sustituyendo en (17.2.1) ya tenemos que

$$\mathrm{H}^1(X;\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1(X),\mathbb{R}). \quad \square$$

Y ahora veamos la relación entre homología y grupo fundamental:

Teorema 17.20. (Hurewicz) *[4]. Sea X un espacio conexo por caminos. Entonces el abelianizado del grupo fundamental de X es isomorfo al primer grupo de homología:*

$$\mathrm{H}_1(X) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X),\pi_1(X)].$$

Lema 17.21. *Se tiene que*

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(X),\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(X)/\pi_1(X)',\mathbb{R}),$$

donde $\pi_1(X)' = [\pi_1(X),\pi_1(X)]$ es el subgrupo conmutador.

Ahora consideramos la cohomología de una variedad.

Teorema 17.22. (De Rham) *[50]. Sea M una variedad diferenciable. Entonces el morfismo*

$$I\colon \mathrm{H}^q_{DR}(M) \to \mathrm{H}^q(M;\mathbb{R})$$

definido de forma que para $[\omega] \in \mathrm{H}^q_{DR}(M)$ se obtiene el elemento

$$I(\omega) \in \mathrm{H}_q(M;\mathbb{R})^* \cong \mathrm{H}^q(M;\mathbb{R})$$

dado por

$$I(\omega)([\alpha]) = \int_\alpha \omega \quad \forall\, [\alpha] \in \mathrm{H}_q(M)$$

es un isomorfismo entre la cohomología de de Rham y la cohomología singular.

17.3. Foliaciones no unimodulares

Lema 17.23. *El único subgrupo conexo no trivial del grupo multiplicativo de los números reales positivos* $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ *es el propio* $\mathbb{R}^+$*. Asimismo, el único subgrupo conexo no trivial del grupo aditivo de los números reales* $(\mathbb{R}, +)$ *es el propio* $\mathbb{R}$*.*

Demostración. Empecemos, en primer lugar, con el grupo $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Sea $H \neq \{1\}$ un subgrupo conexo. Escojamos entonces un elemento $h \in H$, $h > 1$ (siempre existe, pues dado cualquier elemento menor que 1 su inverso será mayor que 1, y viceversa). Como H es un subgrupo, $h^n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Y como $\lim_{n\to\infty} h^n = +\infty$ si $h > 1$ entonces concluimos que H no está acotado superiormente. Por el otro lado, cogiendo el elemento $h^{-1} = 1/h$ tendremos que $\lim_{n\to\infty}(h^{-1})^n = 0$, lo que implica que $\inf H = 0$. Así, por conexidad, tendremos que necesariamente $H = \mathbb{R}^+$.

La segunda parte de la proposición es inmediata, pues la aplicación logarítmica y la aplicación exponencial definen un difeomorfismo entre $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +)$. Veamos una demostración directa:

Consideremos el grupo $(\mathbb{R}, +)$ y supongamos $H \neq \{1\}$ subgrupo conexo. Dado entonces un elemento $h \neq 1$ (supongamos, por ejemplo, que $h > 1$), sabemos, por ser H subgrupo, que $nh \in H$ y $-nh \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, como $\lim_{n\to\infty} nh = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} -nh = -\infty$, llegamos a que H no está acotado ni inferior ni superiormente, lo que, por conexidad, implica que necesariamente $H = \mathbb{R}$. □

Lema 17.24. *El único subgrupo acotado de* $\mathbb{R}^+$ *es el trivial.*

Demostración. Sea S un subgrupo de $\mathbb{R}$ que suponemos no trivial. Esto es, existe $a \in S$ tal que $a \neq 1$. Podemos suponer que $a > 1$, pues si no lo es basta coger su inverso. Así,

$$A = \{a^n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset S,$$

y por tanto, como A no es acotado, S tampoco. □

Proposición 17.25. *Sea* $N = G/K$*. Si* K *es compacto entonces existe sobre* N *una métrica* G*-invariante.*

Demostración. Es inmediato a partir del Teorema 5.19, pues $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}(K)$ es compacto. □

La existencia de una métrica G-invariante para $N = G/K$ implica que el grupo de isometrías en N para esa métrica, $\mathrm{Iso}\, N$, actúa transitivamente en N. La compacidad de K permitirá utilizar el siguiente resultado:

Proposición 17.26. *Sea* $N = G/K$ *un espacio homogéneo con* K *compacto. Entonces* G *se inyecta en* $\mathrm{Iso}(N)$ *como un subgrupo cerrado.*

Demostración. Por la Proposición 17.25 sabemos que sobre N existe una métrica G-invariante, de forma que las traslaciones en N por elementos de G son isometrías, y por tanto G se puede considerar un subgrupo de $\mathrm{Iso}(N)$. La compacidad de K garantizará además que G es un subgrupo cerrado. Veámoslo:

Sea $\{\lambda(g_n)\}$ una sucesión de elementos de $G \subset \mathrm{Iso}(N)$ convergente a $\gamma \in \mathrm{Iso}(N)$. Hay que probar que γ es una traslación por un elemento de G. Pero si K es compacto entonces, por el Lema 16.28, la proyección $\pi\colon G \to G/K \cong N$ es una aplicación propia. Tomando $o = [e] \in N$ tendremos que el difeomorfismo $G/K \cong N$ lleva $[g]$ en $\lambda(g)(o)$. Así, $\{\lambda(g_n)(z)\} \to \gamma(z)$. Cogiendo un entorno compacto C de $\gamma(z)$ en N podemos suponer que $\lambda(g_n)(z) \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $\pi^{-1}(C)$ es compacto y la sucesión $\{g_n\} \subset \pi^{-1}(C)$, con lo que tiene una subsucesión $\{g_{n_k}\}$ convergente a $g \in \pi^{-1}(C) \subset G$. Por tanto, necesariamente

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} \lambda(g_{n_k}) = \lambda(\lim_{k\to\infty} g_{n_k}) = \lambda(g). \quad \square$$

Proposición 17.27. *Si $K_\sharp$ es conexo, entonces tanto $f^*(G_\sharp)$ como $\Gamma\backslash f^*G_\sharp$, el espacio total del fibrado de Blumenthal, son conexos.*

Demostración. Si $K_\sharp$ es conexo entonces $\rho\colon f^*(G_\sharp) \to \widetilde{M}$ y $\bar{\rho}\colon \Gamma\backslash f^*G_\sharp \to M$ son fibrados de fibra conexa. La conexidad de $f^*(G_\sharp)$ y de $\Gamma\backslash f^*G_\sharp$ se deduce inmediatamente de la sucesión exacta de los grupos de homotopía. $\square$

Teorema 17.28. *Sea $N = G_0/K_0$ un espacio homogéneo, con $K_{0\sharp} = K_0/K_0^\sharp$ compacto y fuertemente unimodular y G_0 conexo. Sea $\mathcal{F}$ una N-foliación transversalmente homogénea sobre una variedad compacta M definida por un desarrollo donde las fibras tienen un número finito de componentes conexas. Si $\mathcal{F}$ no es unimodular, entonces se tiene que o bien M, o bien las adherencias de las hojas, o bien el espacio total del fibrado de Blumenthal, fibran sobre $\mathbb{S}^1$.*

Demostración. Sea la cubierta universal $p\colon \widehat{G_0} \to G_0$. Haremos $\widehat{K_0} = p^{-1}(K_0)$, y así $N = \widehat{G_0}/\widehat{K_0}$. Sabemos que $\widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0}) \cong G_0/\operatorname{Core}(K_0)$ y que $\widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0}) \cong K_0/\operatorname{Core}(K_0)$. Por simplificar la notación haremos $G_{0\sharp} = \widehat{G_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$ y $K_{0\sharp} = \widehat{K_0}/\operatorname{Core}(\widehat{K_0})$. Así, tendremos el diagrama de estructura

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{f} & N = G_{0\sharp}/K_{0\sharp} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p} & & \\ M & & \end{array}$$

donde el grupo de holonomía de $\mathcal{F}$ cuando modela sobre N será $\operatorname{im} h = \Gamma_0 \subset G_{0\sharp}$, con $h\colon \pi_1(M) \to G_{0\sharp}$.

Como $K_{0\sharp}$ es compacto, sabemos que en N existe una métrica $G_{0\sharp}$-invariante, lo que, por la Proposición 16.5, implica que tanto el desarrollo $f\colon \widetilde{M} \to N$, como su levantamiento $\hat{f}$ a la cubierta universal $\widehat{N}$ son fibrados localmente triviales. De esta forma, siguiendo nuestra construcción, podremos considerar la foliación $\mathcal{F}$ sobre la variedad compacta M modelando sobre $\widehat{N} = G_\sharp/K_\sharp$, con $K_\sharp \cong K_{0\sharp}$, y donde el desarrollo $\hat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ tiene fibras conexas, siendo $\Gamma \subset G_\sharp$ el grupo de holonomía.

Como $K_{0\sharp}$ es fuertemente unimodular y como $W = \overline{\Gamma_0}\backslash G_{0\sharp}$ es compacto por ser $K_{0\sharp}$ compacto , el Teorema 16.30 garantiza que si $\mathcal{F}$ no es unimodular, entonces o bien $G_{0\sharp}$ o bien $\overline{\Gamma_0}$ no son unimodulares. Según suceda una cosa u otra obtendremos diferentes fibraciones. Estudiaremos entonces cada caso por separado:

Proposición 17.29. *Si $G_{0\sharp}$ no es unimodular entonces M y el espacio total del fibrado de Blumenthal, $\Gamma_0\backslash f^*G_{0\sharp}$, fibran sobre $\mathbb{S}^1$.*

Demostración. Consideremos la función modular $m_{G_{0\sharp}}\colon G_{0\sharp} \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$ dada por

$$m_{G_{0\sharp}}(g) = |\det \mathrm{Ad}_{G_{0\sharp}}(g)|,$$

donde, por simplificar la notación, consideramos $g = [g] \in G_{0\sharp}$. Como $G_{0\sharp}$ es no unimodular necesariamente existe $g \in G_{0\sharp}$ tal que $m_{G_{0\sharp}}(g) \neq 1$. Como $m_{G_{0\sharp}}$ es de grupos y $G_{0\sharp}$ es conexo, el Lema 17.23 garantiza la sobreyectividad de $m_{G_{0\sharp}}$. Además, como $K_{0\sharp}$ es compacto, su imagen debe ser un subgrupo compacto de $\mathbb{R}^+$, con lo que, por el Lema 17.24, necesariamente $m_{G_{0\sharp}}(k) = 1$ para todo $k \in K_{0\sharp}$.

Por tanto, $m_{G_{0\sharp}}$ pasa al cociente y podemos definir

$$m_{G_{0\sharp}/K_{0\sharp}}\colon G_{0\sharp}/K_{0\sharp} \to (\mathbb{R}^+, \cdot)$$

de forma que

$$m_{G_{0\sharp}/K_{0\sharp}}([g]) = m_{G_{0\sharp}}(g).$$

Así, haciendo $\bar{f} = \ln m_{G_{0\sharp}/K_{0\sharp}} \circ f$ y $\bar{h} = \ln m_{G_{0\sharp}} \circ h$ tendremos

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{p}"] & (\mathbb{R}, +) \\ M & \end{tikzcd} \tag{17.3.1}$$

y $\bar{h}\colon \pi_1(M) \to (\mathbb{R}, +)$. Para ver que $\bar{f}$ es $\bar{h}$-equivariante necesitaremos del siguiente Lema:

Lema 17.30. *Para todo $\gamma \in \Gamma$ y para todo $[g] \in G_{0\sharp}/K_{0\sharp}$ se cumple que*

$$m_{G_{0\sharp}/K_{0\sharp}}(\gamma \cdot [g]) = m_{G_{0\sharp}}(\gamma) \cdot m_{G_{0\sharp}/K_{0\sharp}}([g]).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} m_{G_{0\sharp}/K_{0\sharp}}(\gamma \cdot [g]) &= m_{G_{0\sharp}/K_{0\sharp}}([\gamma g]) \\ &= m_{G_{0\sharp}}(\gamma g) \\ &= m_{G_{0\sharp}}(\gamma) \cdot m_{G_{0\sharp}}(g) \\ &= m_{G_{0\sharp}}(\gamma) \cdot m_{G_{0\sharp}/K_{0\sharp}}([g]). \end{aligned}$$ □

Así, dados $x \in \widetilde{M}$ y $\gamma \in \pi_1(M)$ tendremos

$$\begin{aligned} \bar{f}(\gamma x) &= \ln m_{G_{0\sharp}/K_{0\sharp}}(f(\gamma x)) \\ &= \ln m_{G_{0\sharp}/K_{0\sharp}}(h(\gamma) \cdot f(x)) \\ &= \ln(m_{G_{0\sharp}}(h(\gamma)) \cdot m_{G_{0\sharp}/K_{0\sharp}}(f(x)) \\ &= \ln m_{G_{0\sharp}}(h(\gamma)) + \ln m_{G_{0\sharp}/K_{0\sharp}}(f(x)) \end{aligned}$$

$$= \bar{h}(\gamma) + \bar{f}(x).$$

Por tanto, $\bar{f}$ es $\bar{h}$-equivariante y el diagrama 17.3.1 define en M una foliación de Lie sobre $\mathbb{R}$, con lo que, aplicando el Teorema de Tischler, tendremos que M fibra sobre $\mathbb{S}^1$.

Además, un razonamiento similar nos permitirá concluir que $\Gamma_0\backslash f^*(G_{0\sharp})$ fibra también sobre $\mathbb{S}^1$. Siguiendo el Teorema 8.8 sabemos que sobre $\Gamma_0\backslash f^*(G_{0\sharp})$ se puede definir una $G_{0\sharp}$-foliación de Lie con grupo de holonomía Γ_0, representada en este diagrama:

$$\begin{tikzcd} f^*(G_{0\sharp}) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\tau"'] & G_{0\sharp} \\ \Gamma_0\backslash f^*(G_{0\sharp}) & \end{tikzcd}$$

donde $\bar{f}$ será equivariante para $\bar{h}\colon \operatorname{Aut}(\tau) \to G_{0\sharp}$, morfismo de holonomía, siendo $\Gamma_0 = \operatorname{im}\bar{h}$.

Si aplicamos logaritmos a la función modular $m_{G_{0\sharp}}\colon G_{0\sharp} \to \mathbb{R}^+$ tendremos la aplicación $\ln m_{G_{0\sharp}}\colon G_{0\sharp} \to \mathbb{R}$, que será sobreyectiva por el Lema 17.23. Así, considerando las composiciones $D = \ln m_{G_{0\sharp}} \circ \bar{f}$ y $h = \ln m_{G_{0\sharp}} \circ \bar{h}$ tendremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} f^*(G_{0\sharp}) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathbb{R} \\ \Gamma_0\backslash f^*(G_{0\sharp}) & \end{tikzcd}$$

que definirá sobre $\Gamma_0\backslash f^*(G_{0\sharp})$ una $\mathbb{R}$-foliación de Lie, pues D será h-equivariante, ya que, dado $(\tilde{x}, g) \in f^*(G_{0\sharp})$, para todo $\gamma \in \operatorname{Aut}(\tau)$ se cumple que

$$\begin{aligned} D(\gamma(\tilde{x}, g)) &= (\ln m_G \circ \bar{f})(\gamma(\tilde{x}, g)) \\ &= \ln m_{G_{0\sharp}}(\bar{f}(\gamma(\tilde{x}, g))) \\ &= \ln m_{G_{0\sharp}}(\bar{h}(\gamma)\bar{f}(\tilde{x}, g)) \\ &= \ln(m_{G_{0\sharp}}(\bar{h}(\gamma) \cdot m_G(\bar{f}(\tilde{x}, g))) \\ &= \ln(m_{G_{0\sharp}}(\bar{h}(\gamma))) + \ln(m_G(\bar{f}(\tilde{x}, g))) \\ &= (\ln m_{G_{0\sharp}} \circ \bar{h})(\gamma) + (\ln m_G \circ \bar{f})(\tilde{x}, g) \\ &= h(\gamma) + D(\tilde{x}, g). \end{aligned}$$

Y como en nuestro caso el fibrado de Blumenthal, $\Gamma_0\backslash f^*(G_{0\sharp})$, será compacto (Proposición 16.29), estamos en condiciones de aplicar el teorema de Tischler y afirmar que $\Gamma_0\backslash f^*(G_{0\sharp})$ fibra sobre $\mathbb{S}^1$. $\square$

Supongamos ahora que $\overline{\Gamma}_0$ no es unimodular. Nótese que, por tanto, $\dim(\overline{\Gamma}_0) \geq 1$. Por el Corolario 16.19 sabemos que la unimodularidad de $\overline{\Gamma}$ y la de $(\overline{\Gamma})_e$ equivalen a la unimodularidad de $\overline{\Gamma}_0$ y de $(\overline{\Gamma}_0)_e$, respectivamente. Por tanto, $\overline{\Gamma}$ es no unimodular. Puede suceder que $(\overline{\Gamma})_e$ sea unimodular o no. Estudiaremos ambos casos por separado. Si $(\overline{\Gamma})_e$ no es unimodular, dada una hoja L de $\mathcal{F}$, demostraremos que la foliación $\mathcal{F}_{|\overline{L}}$ inducida por $\mathcal{F}$ en la adherencia $\overline{L}$ (ver Teorema 17.15) tiene estructura de $\mathbb{R}$-foliación de Lie, lo que nos permitirá definir una fibración sobre $\mathbb{S}^1$.

El Teorema 17.15 asegura que la foliación inducida por $\mathcal{F}$ en $\overline{L}$ tiene estructura de foliación transversalmente homogénea modelando sobre el espacio homogéneo conexo $\overline{\Sigma}/K_L$, con K_L compacto. Así, tendremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \overline{\Sigma}/K_L \\ \overline{L} & \end{tikzcd}$$

donde p es una cubierta regular de $\overline{L}$ y f es la submersión desarrollo, una fibración en nuestro caso, que será equivariante para $h\colon \pi_1(\overline{L}) \to \Sigma$. Nótese que aunque el Teorema 17.15 se refiera a las adherencias de Γ y de Σ como subgrupo de $\mathrm{Iso}(\widehat{N})$, en nuestro caso, como por la Proposición 17.26 sabemos que $G_\sharp$ es un subgrupo cerrado de $\mathrm{Iso}(\widehat{\mathrm{N}})$, podremos referirnos, como hemos venido haciendo hasta ahora, a la adherencias en $G_\sharp$.

Proposición 17.31. *Si* $(\overline{\Gamma})_e$ *no es unimodular, entonces las adherencias de las hojas de* $\mathcal{F}$ *fibran sobre* $\mathbb{S}^1$.

Demostración. Como $(\overline{\Gamma})_e$ no es unimodular, la función modular

$$m_{\overline{\Sigma}}\colon \overline{\Sigma} \to (\mathbb{R}^+, .)$$

es no trivial, pues $(\overline{\Gamma})_e = (\overline{\Sigma})_e$. Como $(\overline{\Sigma})_e$ es conexo entonces, por el Lema 17.23, $m_{\overline{\Sigma}}$ es sobreyectiva. Y como K_L es compacto el Lema 17.24 garantiza que $m_{\overline{\Sigma}}(k) = 1$ para todo $k \in K_L$, con lo que la aplicación baja al cociente y podemos definir

$$m_{\overline{\Sigma}/K_L}\colon \overline{\Sigma}/K_L \to \mathbb{R}^+.$$

Así, de manera análoga a como se hizo en el caso en que $G_{0\sharp}$ es no unimodular, considerando las composiciones $\ln m_{\overline{\Sigma}/K_L} \circ f$ y $\ln m_{\overline{\Sigma}/K_L} \circ h$ tendremos definida sobre $\overline{L}$ una foliación de Lie de codimensión 1, y de nuevo, aplicando el teorema de Tischler, llegaremos a que $\overline{L}$ fibra sobre $\mathbb{S}^1$. □

Proposición 17.32. *Si* $(\overline{\Gamma})_e$ *es unimodular pero* $\overline{\Gamma}$ *no, el espacio total del fibrado de Blumenthal,* $\Gamma_0\backslash f^*(G_{0\sharp})$*, fibra sobre* $\mathbb{S}^1$.

Demostración. Consideremos la cubierta universal $\pi_0\colon \widehat{G_{0\sharp}} \to G_{0\sharp}$. Hagamos $H = \pi_0^{-1}(\overline{\Gamma_0}) \subset \widehat{G_{0\sharp}}$. Por el Corolario 16.24 sabemos que H no es unimodular. De la misma forma, concluimos que $\pi_0^{-1}((\overline{\Gamma_0})_e)$ sí es unimodular, y por tanto $H_e = (\pi_0^{-1}(\overline{\Gamma_0}))_e \subset \pi_0^{-1}((\overline{\Gamma_0})_e)$ es unimodular. Sabemos también que la variedad $W = H\backslash\widehat{G_{0\sharp}} = \overline{\Gamma_0}\backslash G_{0\sharp}$ es compacta.

Como H no es unimodular, la función modular $m_H\colon H \to \mathbb{R}$ es un homomorfismo de grupos no trivial. Extenderemos este morfismo a una aplicación $m\colon \widehat{G_{0\sharp}} \to \mathbf{R}^+$ cumpliendo:

1. $m_{|H} = m_H$;

2. $m(h \cdot y) = m(h) \cdot m(y)$ para todo $h \in H$, $y \in \widehat{G_{0\sharp}}$.

Para ello, consideremos la variedad $W = H \backslash \widehat{G_{0\sharp}}$. Por la Proposición 1.25 sabemos que su cubierta universal es $\widetilde{W} = H_e \backslash \widehat{G_{0\sharp}}$ y $\pi_1(W) = H_e \backslash H$.

Como H y H_e tienen el mismo álgebra de Lie es claro que la función modular de H_e es la restricción de m_H a H_e. Y como H_e es unimodular, entonces $m_H(\gamma) = m_{H_e}(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in H_e$. Así, el morfismo

$$\overline{m}_H \colon H_e \backslash H \to \mathbf{R}^+,$$

dado por $\overline{m}_H([\gamma]) = m_H(\gamma)$, estará bien definido, pues para cualquier otro representante $\gamma_e \gamma$ de $[\gamma]$ se tiene que $m_H(\gamma_e \gamma) = m_H(\gamma_e) \cdot m_H(\gamma) = m_H(\gamma)$. Entonces, aplicando logaritmos, tendremos el morfismo

$$\ln \overline{m}_H \colon H_e \backslash H = \pi_1(W) \to \mathbf{R}.$$

Entonces, como por el Teorema 17.20 de Hurewicz sabemos que

$$\mathrm{H}_1(W) \cong \pi_1(W)/[\pi_1(W), \pi_1(W)],$$

aplicando el Lema 17.21, el Teorema 17.18 del Coeficiente Universal, concretamente el Corolario 17.2.1, y después el Teorema 17.22 de de Rham, tendremos que

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(W), \mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_1(W), \mathbb{R}) \cong \mathrm{H}^1(W; \mathbb{R}) \cong \mathrm{H}^1_{DR}(W).$$

Por tanto, como $\ln \overline{m}_H \in \mathrm{Hom}(\pi_1(W), \mathbf{R})$, se puede identificar con una clase de cohomología $[\omega] \in \mathrm{H}^1_{DR}(W)$ tal que

$$\ln \overline{m}_H([\alpha]) = \int_\alpha \omega \;\text{ para todo } [\alpha] \in \pi_1(W), \tag{17.3.2}$$

donde $[\alpha]$ denota la clase de homotopía de un lazo α en W con punto base $[e]$.

Sea ahora $\pi \colon \widehat{G_{0\sharp}} \to W = H \backslash \widehat{G_{0\sharp}}$ la proyección natural. Se tiene que $\pi^*\omega$ es una 1-forma en $\widehat{G_{0\sharp}}$ cerrada, pues ω es cerrada en W. Como $\widehat{G_{0\sharp}}$ es simplemente conexo se tiene de forma inmediata por el Teorema de Hurewicz que $\mathrm{H}_1(\widehat{G_{0\sharp}}) = 0$, lo que, aplicando el Teorema del Coeficiente Universal y el Teorema de de Rham, nos permite concluir que $\mathrm{H}^1_{DR}(\widehat{G_{0\sharp}}) = 0$. Así, $\pi^*\omega$ es exacta, es decir, existe $f \colon \widehat{G_{0\sharp}} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{d}f = \pi^*\omega$. Como las traslaciones por una constante no afectan a la diferencial, podemos considerar $f(e) = 0$. Con esta condición, tendremos que f cumple las siguientes propiedades:

1. $f(\gamma x) = f(\gamma) + f(x)$ para todo $\gamma \in H$, $x \in \widehat{G_{0\sharp}}$:

   Consideremos la composición $f \circ L_\gamma \colon \widehat{G_{0\sharp}} \to \mathbb{R}$, donde L_γ denota la traslación por la izquierda $L_\gamma(x) = \gamma x$. Se tiene que $\pi \circ L_\gamma = \pi$, pues

   $$(\pi \circ L_\gamma)(g) = [\gamma g] = [g] \in H \backslash \widehat{G_{0\sharp}}.$$

Entonces, para $v \in T_x\widehat{G_{0\sharp}}$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(f \circ L_\gamma)_x(v) \\
&= (f \circ L_\gamma)_{*x}(v) = f_{*\gamma x}((L_\gamma)_{*x}(v)) \\
&= (\mathrm{d}f)_{\gamma x}((L_\gamma)_{*x}(v)) \\
&= (\pi^*\omega)_{\gamma x}((L_\gamma)_{*x}(v)) \\
&= \omega_{[\gamma x]}(\pi_{*\gamma x}((L_\gamma)_{*x}(v)) \\
&= \omega_{[x]}((\pi \circ L_\gamma)_{*x}(v)) \\
&= \omega_{[x]}(\pi_{*x}(v)) \\
&= (\pi^*\omega)_x(v) \\
&= (\mathrm{d}f)_x(v).
\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathrm{d}(f \circ L_\gamma) = \mathrm{d}f$ para todo $\gamma \in H$. Así, como $\widehat{G_{0\sharp}}$ es conexo, tendremos que $f \circ L_\gamma = f + c(\gamma)$. Aplicando esta expresión en el neutro, como partimos de que $f(e) = 0$, obtendremos que $c(\gamma) = f(\gamma)$. Aplicándola entonces para cualquier $x \in \widehat{G_{0\sharp}}$ obtendremos que $f(\gamma x) = f(\gamma) + f(x)$.

2. $f_{|H} = \ln m_H$:

   Sea β un camino en $\widehat{G_{0\sharp}}$ que une el neutro con un punto $\gamma \in H$. Si proyectamos este camino a través de π obtendremos un lazo $\alpha = \pi \circ \beta$ en $W = H \backslash \widehat{G_{0\sharp}}$. Así, por (17.3.2), tendremos que
   $$\ln \overline{m}_H([\pi\beta]) = \int_{\pi\beta} \omega.$$
   Ahora, si consideramos el isomorfismo dado en el Lema 1.26 tendremos la composición
   $$\pi_1(W) \cong H_e \backslash H \overset{\overline{m}_H}{\to} \mathbb{R},$$
   con lo que es claro que
   $$\overline{m}_H([\pi\beta]) = m_H(\beta(1)) = m_H(\gamma).$$
   Por otra parte, tenemos:
   $$\begin{aligned}
   \int_{\pi\beta} \omega &= \int_{[0,1]} (\pi\beta)^*\omega \\
   &= \int_{[0,1]} \beta^*\pi^*\omega \\
   &= \int_{[0,1]} \beta^*(\mathrm{d}f) \\
   &= \int_{[0,1]} \mathrm{d}(\beta^* f)
   \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[0,1]} \mathrm{d}(f \circ \beta) \\
&= (f\beta)(1) - (f\beta)(0) \\
&= f(\gamma) - f(e) = f(\gamma).
\end{aligned}
$$

Así tenemos ya que $f(\gamma) = \ln m_H(\gamma)$ para todo $\gamma \in H$.

Haciendo entonces para finalizar $m = e^f : \widehat{G_{0\sharp}} \to \mathbb{R}^+$ tendremos la aplicación que buscábamos, puesto que:

1. $m(\gamma) = e^{f(\gamma)} = e^{\ln m_H(\gamma)} = m_H(\gamma) \quad \forall\, \gamma \in H$;
2. $m(\gamma y) = e^{f(\gamma y)} = e^{f(\gamma)+f(y)} = e^{f(\gamma)} \cdot e^{f(y)} = m(\gamma) \cdot m(y) \quad \forall\, \gamma \in H, y \in \widehat{G_{0\sharp}}$.

Por el Corolario 2.7, considerando la restricción $H = \pi^{-1}(\overline{\Gamma_0}) \to \overline{\Gamma_0}$ de la cubierta universal $\pi \colon \widehat{G_{0\sharp}} \to G_{0\sharp}$, sabemos que

$$
m(k) = m_H(k) = \det \mathrm{Ad}_{\overline{\Gamma_0}}(e) = 1
$$

para todo $k \in \ker \pi$.

De esta forma tendremos que la aplicación m baja al cociente por la cubierta π, con lo que tendremos definida una aplicación $m' \colon G_{0\sharp} \to \mathbb{R}$ cumpliendo que

$$
m'(\gamma \cdot y) = m(h \cdot \hat{y}) = m(h) \cdot m(\hat{y}) = m'(\gamma) \cdot m'(y) \tag{17.3.3}
$$

para todo $\gamma \in \overline{\Gamma_0}$ y todo $y \in G_{0\sharp}$, siendo $h \in H$ tal que $\pi_H(h) = \gamma$ y $\hat{y} \in \widehat{G_{0\sharp}}$ tal que $\pi(\hat{y}) = y$. Así, aplicando logaritmos, tendremos la aplicación $\ln m' \colon G_{0\sharp} \to \mathbb{R}$, que será sobreyectiva pues no es acotada y $G_{0\sharp}$ es conexo.

Ahora, considerando el diagrama que define el fibrado de Blumenthal:

$$
\begin{tikzcd}
f^*(G_{0\sharp}) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\tau"'] & G_{0\sharp} \\
\Gamma_0 \backslash f^*(G_{0\sharp})
\end{tikzcd} \tag{17.3.4}
$$

tendremos que las composiciones $D = \ln m' \circ \bar{f}$ y $h' = \ln m' \circ h$ son el desarrollo y la representación de holonomía de una foliación transversalmente homogénea en $\Gamma_0 \backslash f^*(G_{0\sharp})$ de codimensión 1, puesto que la condición 17.3.3 garantiza la equivarianza, ya que para todo $x \in f^*(G_{0\sharp})$ y todo $\gamma \in \operatorname{Aut} \tau \overset{h}{\cong} \Gamma$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
D(\gamma \hat{x}) &= \ln m'(\bar{f}(\gamma \hat{x})) \\
&= \ln m'(h(\gamma) \bar{f}(\hat{x})) \\
&= \ln(m'(h(\gamma)) \cdot m'(\bar{f}(\hat{x}))) \\
&= \ln(m'(h(\gamma))) + \ln(m'(\bar{f}(\hat{x})))
\end{aligned}
$$

$$= h'(\gamma) + D(\hat{x}),$$

pues $h(\gamma) \in \overline{\Gamma_0}$. De esta forma, el Diagrama 17.3.4 garantiza la existencia de una forma cerrada no nula en $\Gamma_0 \backslash f^*(G_{0\sharp})$, pues dada una forma no nula invariante por la izquierda $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$, se tiene que la forma $D^*\omega$ baja al cociente ya que es invariante por la acción por la izquierda de los elementos de Γ:

$$\begin{aligned} L_\gamma^* D^* \omega &= (D \circ L_\gamma)^* \omega \\ &= (L_{h'(\gamma)} \circ D)^* \omega \\ &= D^* L_{h'(\gamma)}^* \omega \\ &= D^* \omega. \end{aligned}$$

Por otra parte, como ω es cerrada, pues es de dimensión máxima, es inmediato comprobar, teniendo en cuenta que la diferencial conmuta con D^*, que la 1-forma en $\Gamma_0 \backslash f^*(G_{0\sharp})$ es cerrada. Así, el teorema de Tischler nos permite asegurar que $\Gamma_0 \backslash f^*(G_{0\sharp})$ fibra sobre $\mathbb{S}^1$. □

De esta forma, concluimos la demostración del Teorema 17.28 □

El Teorema 17.28 generaliza el Teorema 1.1. de [30], de forma que tendremos:

Teorema 17.33. *Sea $\mathcal{F}$ una G-foliación de Lie sobre una variedad compacta M, con G simplemente conexo. Si $\mathcal{F}$ no es unimodular entonces o bien M o bien la adherencia de cada hoja de $\mathcal{F}$ fibra sobre $\mathbb{S}^1$.*

Demostración. Inmediato a partir del Teorema 17.28, teniendo en cuenta que en una foliación de Lie el fibrado de Blumenthal es la propia variedad M (Ejemplo 8.9). □

Capítulo 18
Cálculo directo de $\Omega^r_H(G/K)$

Consideraremos G grupo de Lie conexo y K y $H = \overline{\Gamma}$ subgrupos de G no necesariamente conexos. En este capítulo daremos una ecuación explícita para calcular $\mathrm{H}_{\overline{\Gamma}}(N)$ a partir de G, K y $W = \overline{\Gamma}\backslash G$. Este resultado podría servir como base para generalizar los resultados de los capítulos anteriores, perfilando las hipótesis que imponemos. Sin embargo, su complejidad impide su aplicación más allá del caso particular que ya hemos detallado. No obastante, queda, sin duda, como vía de trabajo abierta para el futuro.

18.1. La estructura de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo en $C^\infty(G)$

Proposición 18.1. *El espacio $C^\infty(G)$ de las funciones diferenciables de G en $\mathbb{R}$ tiene estructura de $\mathfrak{g}$-módulo con la representación*

$$X \cdot f = Xf,$$

donde $X \in \mathfrak{g}$, y

$$(Xf)(g) = f_{*g}X_g = f_{*g}L_{g*e}X_e = (f \circ L_g)_{*e}X_e.$$

En $C^\infty(G)$ hay también una representación de K por traslaciones por la derecha, pero para tener una estructura de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo es necesario que los elementos sean K-finitos, con lo que definiremos

$$C^\infty_K(G) = \{f \in C^\infty(G) \colon \dim\langle f \circ R_k; k \in K\rangle < \infty\}.$$

Proposición 18.2. *El espacio $C^\infty_K(G)$ de las funciones diferenciables y K-finitas de G en $\mathbb{R}$ tiene estructura de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo con las representaciones*

$$\rho(X)(f) = X \cdot f = Xf$$

y

$$k \cdot f = f \circ R_k.$$

Demostración. En C^∞_K hay, además de la estructura de $\mathfrak{g}$-módulo descrita en la Proposición 18.1, hay una estructura de K-módulo dada por la acción

$$\alpha(g)(f) = f \circ R_g.$$

Así, bastará probar únicamente que al derivar esta acción obtenemos la representación ρ de $\mathfrak{g}$, pues eso garantiza automáticamente la compatibilidad con la representación de $K \subset G$. Veámoslo:

Sea entonces $X \in \mathfrak{g}$, $f \in C^\infty_K(G)$ y $g \in G$. Tendremos:

$$\begin{aligned}
\alpha_*(X)(f)(g) &= \left(\mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}\alpha(\exp tX_e)\right)(f)(g) \\
&= \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}(\alpha(\exp tX_e)(f))(g) \\
&= \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}(f \circ R_{\exp tX_e})(g) \\
&= \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}f(g \exp tX_e) \\
&= \mathrm{d}/\mathrm{d}t_{|t=0}f(L_g(\exp tX_e)) \\
&= f_{*g}L_{g*e}(X_e) \\
&= f_{*g}(X_g) \\
&= (Xf)(g).
\end{aligned}$$

□

Proposición 18.3. *El complejo $\Omega^r(G)$ de formas diferenciales en G es isomorfo al complejo $L(\Lambda^r\mathfrak{g}, C^\infty(G))$ de aplicaciones lineales de $\Lambda^r\mathfrak{g}$ en $C^\infty(G)$.*

Denotaremos indistintamente por X^g, X_g o $X(g)$ el valor de un campo X en $g \in G$.

Demostración. Todo campo de vectores en G se puede escribir como combinación lineal con coeficientes $f_i \in C^\infty(G)$ de campos de vectores invariantes por la izquierda, con lo que será suficiente efectuar los cálculos considerando únicamente estos últimos.

Podemos definir

$$F\colon L(\Lambda^r\mathfrak{g}, C^\infty(G)) \to \Omega^r(G),$$

que a cada aplicación $\mathbb{R}$-lineal $\phi\colon \Lambda^r\mathfrak{g} \to C^\infty(G)$ le hará corresponder una forma $F\phi$ dada por

$$(F\phi)(X_1, \ldots, X_r)(g) = \phi(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r)(g), \tag{18.1.1}$$

que estará bien definida pues cualquier forma diferencial en $\Omega^r(G)$ queda completamente determinada por sus valores en los campos invariantes.

Que F es inyectiva es trivial, pues si $F\phi = 0$ entonces de la ecuación (18.1.1) se deduce inmediatamente que $\phi(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r) = 0$ para todo $X_i \in \mathfrak{g}$.

Para probar que F es sobreyectiva deberemos, dada una forma $\omega \in \Omega^r(G)$, encontrar $\phi \in L(\Lambda^r\mathfrak{g}, C^\infty(G))$ tal que $F\phi = \omega$. Bastará con definir ϕ para los elementos de una base de $\Lambda^r\mathfrak{g}$. Una base de $\mathfrak{g}$ formada por los vectores $X_1, \ldots, X_r$ determina de forma única una base de $\Lambda^r\mathfrak{g}$, formada por los elementos $X_{i_1} \wedge \cdots \wedge X_{i_r}$, con $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$. Así, podemos definir

$$\phi(X_{i_1} \wedge \cdots \wedge X_{i_r})(g) = \omega(X_{i_1}, \ldots, X_{i_r})(g)$$

para todo $g \in G$, de forma que claramente $F\phi = \omega$.

Ahora debemos probar que F es de complejos. Partiendo del diagrama

$$\begin{tikzcd}
L(\Lambda^r\mathfrak{g}, C^\infty(G)) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\delta"] & \Omega^r(G) \arrow[d, "\mathrm{d}"'] \\
L(\Lambda^{r+1}\mathfrak{g}, C^\infty(G)) \arrow[r, "F"] & \Omega^{r+1}(G)
\end{tikzcd}$$

deberemos demostrar que $\mathrm{d}F = F\delta$. Veámoslo:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(F\phi)(X_0, \ldots, X_r) \\
&= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i X_i F\phi(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_r) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} F\phi([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_r) \\
&= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i X_i \cdot F\phi(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_r) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} F\phi([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_r) \\
&= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i X_i \cdot \phi(X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge X_r) \\
&\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \phi([X_i \wedge X_j] \wedge X_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{X_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{X_j} \wedge \cdots \wedge X_r) \\
&= (\delta\phi)(X_0 \wedge \cdots \wedge X_r) \\
&= F(\delta\phi)(X_0, \ldots, X_r). \qquad \square
\end{aligned}$$

Corolario 18.4. *La aplicación $J\colon \Omega^r(G) \to L(\Lambda^r\mathfrak{g}, C^\infty(G))$ dada por*

$$J(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r) = \omega(X_1, \ldots, X_r)$$

es inversa de $F\colon L(\Lambda^r\mathfrak{g}, C^\infty(G)) \to \Omega^r(G)$.

Demostración. Es claro que F y J son inversas pues

$$J(F\phi)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r) = (F\phi)(X_1, \ldots, X_r) = \phi(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r)$$

y

$$F(J\omega)(X_1, \ldots, X_r) = (J\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r) = \omega(X_1, \ldots, X_r).$$

Que J está bien definida se deduce de la unicidad de la función inversa. $\square$

Ahora estudiaremos $\Omega^r(G/K)$, el complejo de las formas diferenciales en la variedad homogénea G/K. Supondremos que el par $(\mathfrak{g}, K)$ es reductivo.

La proyección canónica $\pi\colon G \to G/K$ es una submersión sobreyectiva, con lo que, por el Lema 9.3, sabemos que $\pi^*\colon \Omega^r(G/K) \to \Omega^r(G)$ es un morfismo inyectivo. Así, podremos considerar $\Omega^r(G/K)$ como un subespacio de $\Omega^r(G) = L(\Lambda^r\mathfrak{g}, C^\infty(G))$ identificando $\Omega^r(G/K) \cong \pi^*\Omega^r(G/K)$, de forma que podamos usar la aplicación F definida en la Proposición 18.3.

Lema 18.5. *Una forma $\omega \in \Omega^r(G)$ está en $\pi^*\Omega^r(G/K)$ si y solamente si se cumplen las dos siguientes condiciones:*

1. $i_X\omega = 0$ *si* $X_g \in \ker \pi_{*g}$*, para todo* $g \in G$.

2. $R^*_k\omega = \omega$*, para todo* $k \in K$.

Demostración. Sea $\omega \in \pi^*\Omega^r(G/K)$. Esto es, $\omega = \pi^*\alpha$, con $\alpha \in \Omega^r(G/K)$. Así, $i_X\omega = i_X\pi^*\alpha = 0$ si $X_g \in \ker \pi_{*g}$ para todo $g \in G$, pues

$$(i_X\pi^*\alpha)(X_1, \dots, X_r)(g) = \alpha_{[g]}(\pi_{*g}X_g, \pi_{*g}X^g_1, \dots, \pi_{*g}X^g_r) = 0,$$

ya que $\pi_{*g}X_g = 0$. Además, se cumple también la segunda condición pues

$$R^*_k\omega = R^*_k\pi^*\alpha = (\pi \circ R_k)^*\alpha = \pi^*\alpha = \omega \quad \forall\, k \in K,$$

ya que $\pi \circ R_k = \pi$.

Recíprocamente, sea $\omega \in \Omega^r(G)$ verificando 1 y 2. Como π es una submersión, dados $X_1, \dots, X_r$ campos de vectores en G/K, existen campos de vectores Y_i en G, que podemos escoger invariantes por las traslaciones por la derecha por elementos de G, tales que $\pi_{*g}(Y^g_i) = X^{[g]}_i$ para todo $g \in G$. Así, podemos definir una forma diferencial α en G/K haciendo

$$\alpha(X_1, \dots, X_r)([g]) = \omega_g(Y_1, \dots, Y_r)(g).$$

Como $\omega(Y_1, \dots, Y_r)$ es una función diferenciable entonces la función que lleva a cada $g \in G$ en $\alpha(Y_1, \dots, Y_r)([g])$ es diferenciable, y como una función en G/K es diferenciable si y solo si al componerla con la proyección $\pi\colon G \to G/K$ es diferenciable, entonces la función que a cada $[g]$ lo lleva en $\alpha(Y_1, \dots, Y_r)([g])$ es diferenciable, lo que implica que α es diferenciable. Comprobemos que está bien definida:

En primer lugar, supongamos que, dado $g \in G$, existe otro vector $Z^g_i \in T_gG$ tal que $\pi_{*g}(Z^g_i) = X^{[g]}_i = \pi_{*g}(Y^g_i)$ para todo $g \in G$. Entonces $Y^g_i - Z^g_i \in \ker \pi_{*g}$, y como ω verifica la propiedad 1, llegamos a que

$$\omega_g(Y^g_1, \dots, Y^g_i - Z^g_i, \dots, Y^g_r) = 0,$$

con lo que, por linealidad,

$$\omega_g(Y^g_1, \dots, Y^g_i, \dots, Y^g_r) = \omega_g(Y^g_1, \dots, Z^g_i, \dots, Y^g_r).$$

Por otro lado, gracias a la segunda condición, α no depende del representante de $[g]$ escogido, pues si consideramos otro representante gk podemos tomar los vectores $Y^{gk}_i = R_{k*g}(Y^g_i)$ que cumplen

$$\pi_{*gk}R_{k*g}Y^g_i = (\pi \circ R_k)_{*g}(Y^g_i) = \pi_{*g}Y^g_i = X^{[g]}_i,$$

y tendremos que

$$\begin{aligned}
\omega_{gk}(Y^{gk}_1, \dots, Y^{gk}_r) &= \omega_{gk}(R_{k*g}(Y^g_1), \dots, R_{k*g}(Y^g_r)) \\
&= (R^*_k\omega)_g(Y^g_1, \dots, Y^g_r) \\
&= \omega_g(Y^g_1, \dots, Y^g_r).
\end{aligned}$$

□

Lema 18.6. *Que $R_k^*\omega = \omega$ para todo $k \in K$ es equivalente a que*

$$\omega(\mathrm{Ad}(k)(X_1), \dots, \mathrm{Ad}(k)(X_r)) = \omega(X_1, \dots, X_r) \circ R_k$$

para todo $k \in K$ y para todo $X_i \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Por un lado tendremos que

$$\begin{aligned}
&\omega(\mathrm{Ad}(k)(X_1), \dots, \mathrm{Ad}(k)(X_r))(g) \\
&= \omega_g(\mathrm{Ad}(k)(X_1)_g, \dots, \mathrm{Ad}(k)(X_r)_g) \\
&= \omega_g(L_{g*e}(\mathrm{Ad}(k)(X_1)_e), \dots, L_{g*e}(\mathrm{Ad}(k)(X_r)_e)) \\
&= (L_g^*\omega)_e(\mathrm{Ad}(k)(X_1)_e, \dots, \mathrm{Ad}(k)(X_r)_e) \\
&= (L_g^*\omega)_e((R_k^{-1} \circ L_k)_{*e}(X_1^e), \dots, (R_k^{-1} \circ L_k)_{*e}(X_r^e)) \\
&= (L_g^*\omega)_e((R_k^{-1})_{*k} L_{k*e}(X_1^e), \dots, (R_k^{-1})_{*k} L_{k*e}(X_r^e)) \\
&= (R_k^{-1*} L_g^*\omega)_k(X_1^k, \dots, X_r^k) \\
&= ((L_g \circ R_{k^{-1}})^*\omega)_k(X_1^k, \dots, X_r^k) \\
&= ((R_k^{-1} \circ L_g)^*\omega)_k(X_1^k, \dots, X_r^k) \\
&= (L_g^* R_{k^{-1}}^*\omega)_k(X_1^k, \dots, X_r^k)
\end{aligned} \tag{18.1.2}$$

y, por otra parte:

$$\begin{aligned}
(\omega(X_1, \dots, X_r) \circ R_k)(g) &= \omega(X_1, \dots, X_r)(gk) \\
&= \omega_{gk}(X_1^{gk}, \dots, X_r^{gk}) \\
&= (L_g^*\omega)_k(X_1^k, \dots, X_r^k).
\end{aligned} \tag{18.1.3}$$

Es trivial, teniendo en cuenta que los campos de vectores $X_1, \dots, X_r$ son linealmente independientes, que (18.1.2)=(18.1.3) si y solamente si $R_k^*\omega = \omega$ para todo $k \in K$. $\square$

Proposición 18.7. *Se tiene que $\Omega^r(G/K) = L_K(\Lambda^r\mathfrak{p}, C_K^\infty(G))$, el complejo de las aplicaciones de K-módulos entre $\Lambda^r\mathfrak{p}$ y $C_K^\infty(G)$, donde $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ es tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.*

Demostración. Consideremos la aplicación $J\colon \Omega^r(G) \to L(\Lambda^r\mathfrak{g}, C^\infty(G))$ de la Proposición 18.3. Si $\omega \in \pi^*\Omega^r(G/K) \subset \Omega^r(G)$, podemos aplicar J para obtener $J(\omega)\colon \Lambda^r\mathfrak{g} \to C^\infty(G)$. Esta forma cumple que

$$J(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r) = \omega(X_1, \dots, X_r) = 0$$

si $X_i \in \mathfrak{k}$ para algún $i \in \{1, \dots, r\}$, puesto que si $X \in \mathfrak{k}$, entonces

$$\pi_{*g}(X)_g = \pi_{*g} L_{g*e}(X_e) = (\pi \circ L_g)_{*e}(X_e) = \lambda(g)_{*e}\pi_{*e}(X_e) = 0,$$

ya que $\mathfrak{k} = T_eK = \ker \pi_{*e}$. De esta forma, J pasa al cociente y tendremos definida $J(\omega)\colon \Lambda^r\mathfrak{p} \to C^\infty(G)$.

Ahora debemos comprobar que, dada $\omega \in \pi^*\Omega^r(G/K)$ y $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{p}$, se tiene que $J(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r) = \omega(X_1, \ldots, X_r) \in C^\infty_K(G)$, es decir, es una función K-finita, que cumple que el subespacio

$$\langle \omega(X_1, \ldots, X_r) \circ R_k \colon k \in K \rangle$$

es de dimensión finita:

Sea $\Psi \colon \mathfrak{g}^n \to C^\infty(G)$ la aplicación dada por $\Psi(X_1, \ldots, X_r) = \omega(X_1, \ldots, X_r)$ y sea

$$S = \{\omega(Y_1, \ldots, Y_r) \colon Y_i \in \mathfrak{p}\} = \Psi(\mathfrak{p}) \subset C^\infty(G).$$

Como $\omega \in \pi^*\Omega^r(G/K)$ entonces $R_k^*\omega = \omega$ para todo $k \in K$, con lo que, por el Lema 18.6, sabemos que

$$\omega(X_1, \ldots, X_r) \circ R_k = \omega(\mathrm{Ad}(k)(X_1), \ldots, \mathrm{Ad}(k)(X_r))$$

para todo $k \in K$ y para todo $X_i \in \mathfrak{g}$. Y como el par $(\mathfrak{g}, K)$ es reductivo, y por lo tanto $\mathrm{Ad}(k)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$, es claro que

$$\langle \omega(X_1, \ldots, X_r) \circ R_k \colon k \in K \rangle \subset S,$$

de dimensión finita, con lo que la función $\omega(X_1, \ldots, X_r) \in C^\infty_K(G)$. Por tanto, tendremos $J(\omega) \colon \Lambda^r\mathfrak{p} \to C^\infty_K(G)$.

Comprobemos ahora que $J(\omega)$ es de K-módulos:

$$\begin{aligned} J(\omega)(k \cdot X_1 \wedge \cdots \wedge X_r) &= J(\omega)(\mathrm{Ad}(k)(X_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{Ad}(k)(X_r)) \\ &= \omega(\mathrm{Ad}(k)(X_1), \ldots, \mathrm{Ad}(k)(X_r)), \end{aligned} \tag{18.1.4}$$

con lo que, por el Lema 18.6, tenemos que

$$\begin{aligned} J(\omega)(k \cdot X_1 \wedge \cdots \wedge X_r) &= \omega(X_1, \ldots, X_r) \circ R_k \\ &= J(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r) \circ R_k \\ &= k \cdot J(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r). \end{aligned} \tag{18.1.5}$$

Ahora hay que probar, recíprocamente, que, dada $\omega \in \Omega^r(G)$, si $J(\omega)$ pasa al cociente, es decir, si está definida en $\Lambda^r\mathfrak{p}$, y además es de K-módulos, entonces se tiene que $\omega \in \pi^*\Omega^r(G/K)$. Hay que comprobar que ω cumple las dos condiciones del Lema 18.5:

1. Veamos que $i_X\omega = 0$ si $X_g \in \ker \pi_{*g} X_g$ para todo $g \in G$. Por hipótesis, sabemos que

$$J(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r) = \omega(X_1, \ldots, X_r) = 0 \tag{18.1.6}$$

si $X_i \in \mathfrak{k}$ para algún $i \in \{1, \ldots, r\}$. Tomamos una base $X_1 \ldots, X_{n-q}, \ldots, X_n$ de $\mathfrak{g}$ que completa la base $X_1, \ldots, X_{n-q}$ de $\mathfrak{k}$. Escribimos $X = \sum_{i=1}^n f_i X_i$. Entonces

$$\begin{aligned} i_X\omega(Y_1, \ldots, Y_r) &= \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{r-1}) \\ &= \sum_i f_i\, \omega(X_i, Y_1, \ldots, Y_{r-1}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i>n-q} f_i\, \omega(X_i, Y_1, \ldots, Y_{r-1})$$

porque $\omega(X_i, Y_1, \ldots, Y_{r-1}) = 0$ si $i \le n-q$.

Ahora,

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_{*g}(X_g) \\ &= \pi_{*g}(\sum_i f_i(g) X_i(g)) \\ &= \sum_i f_i(g)\pi_{*g}(X_i(g)) \\ &= \sum_{i>n-q} f_i(g)\pi_{*g}(X_i(g)), \end{aligned}$$

porque

$$\pi_{*g}(X_i(g)) = 0$$

si $i \le n-q$, ya que $\ker \pi_{*e} = \mathfrak{k}$ y los X_i son invariantes.

Pero $T_eG = \mathfrak{k} \oplus V$ y π_{*e} es un isomorfismo entre V y $T_{[e]}(G/K)$. Análogamente, para $g \in G$, si $v_i = \pi_{*g}(X_i(g))$, los v_i, con $i > n-q$, forman una base de $T_{[g]}G/K$. Entonces, como tenemos $\sum_{i>n-q} f_i(g) v_i = 0$, por independencia lineal se sigue que $f_i(g) = 0$ si $i > n-q$.

2. Debemos, por último, comprobar que $R_k^*\omega = \omega$ para todo $k \in K$. Por las ecuaciones (18.1.4) y (18.1.5) sabemos que si $J(\omega)$ es de K-módulos entonces se cumple que

$$\omega(\mathrm{Ad}(k)(X_1), \ldots, \mathrm{Ad}(k)(X_r)) = \omega(X_1, \ldots, X_r) \circ R_k,$$

lo que, por el Lema 18.6, implica que $R_k^*\omega = \omega$ para todo $k \in K$. □

Consideremos ahora la variedad homogénea $H\backslash G$, con $\pi\colon G \to H\backslash G$ la proyección canónica. Las funciones $\bar{f}\colon H\backslash G \to \mathbb{R}$ se corresponden con funciones $f = \bar{f} \circ \pi\colon G \to \mathbb{R}$, de forma que podemos considerar $C_K^\infty(H\backslash G)$ como el submódulo de $C_K^\infty(G)$ formado por las funciones en G invariantes por los elementos de K. Tendremos entonces en $C_K^\infty(H\backslash G)$ las mismas representaciones que en $C_K^\infty(G)$.

Proposición 18.8. *Se tiene que* $\Omega_H^r(G/K) \cong L_K(\Lambda^r\mathfrak{p}, C_K^\infty(H\backslash G))$.

Demostración. Sabemos, por la Proposición 18.7, que

$$\Omega^r(G/K) \cong L_K(\Lambda^r\mathfrak{p}, C_K^\infty(G)).$$

Por tanto, bastará probar que si tenemos una forma H-invariante ω entonces

$$f = J(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r)\colon G \to \mathbb{R}$$

pasa al cociente, es decir, define una función en $H\backslash G$, lo que se cumplirá si y solamente si f es invariante por la izquierda para todos los elementos de H. Resumiendo, hay que probar que $f \circ L_h = f$ para todo $h \in H$. Veámoslo:

$$\begin{aligned}(f \circ L_h)(g) &= J(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r)(hg) \\ &= \omega_{hg}(X_1(hg), \ldots, X_r(hg)) \\ &= \omega_{hg}(L_{h*g}(X_1^g), \ldots, L_{h*}(X_r^g)) \\ &= (L_h^*\omega)_g(X_1^g, \ldots, X_r^g) \\ &= \omega_g(X_1^g, \ldots, X_r^g) \\ &= J(\omega)(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r)(g) \\ &= f(g).\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $\Phi \in L_K(\Lambda^r\mathfrak{p}, C^\infty(G))$ es a valores en funciones que bajan al cociente, es decir, que $\Phi(X_1 \wedge \cdots \wedge X_r)$ es invariante por la izquierda para todos los elementos de H, para todo $X_1 \wedge \cdots \wedge X_r \in \Lambda^r\mathfrak{p}$. Hay que comprobar que $J^{-1}(\Phi) = F\Phi$ es una forma invariante por H:

$$\begin{aligned}L_h^*(F\Phi)(X_1, \ldots, X_r)(g) &= (F\Phi)_{hg}(L_{h*g}X_1^g, \ldots, L_{h*g}X_r^g) \\ &= (F\Phi)_{hg}(X_1^{hg}, \ldots, X_r^{hg}) \\ &= \Phi_{hg}(X_1^{hg} \wedge \cdots \wedge X_r^{hg}) \\ &= \Phi(X_1^g \wedge \cdots \wedge X_r^g) \\ &= (F\Phi)(X_1, \ldots, X_r)(g).\end{aligned}$$

□

18.2. Cálculo directo de $\mathrm{H}_H(G/K)$

Por la Proposición 18.8 sabemos que $\Omega^r_H(G/K) \cong L_K(\Lambda^r\mathfrak{p}, C^\infty(H\backslash G))$ y, por consiguiente, $\mathrm{H}^q_H(G/K) \cong \mathrm{H}^q(\mathfrak{g}, K; C^\infty_K(H\backslash G))$. Recordemos que si $H = \overline{\Gamma}$, con Γ grupo de holonomía de una foliación transversalmente homogénea con un desarrollo de fibras conexas, esta cohomología será la cohomología básica de la foliación. Para poder estudiar esta cohomología debemos hacer uso de la dualidad de Poincaré:

Proposición 18.9. $\mathrm{H}^q_H(G/K) \neq 0$ *si existe* $\varphi \in (C^\infty_K(H\backslash G)^{tw})^c$ *tal que*

1. $\varphi(X \cdot f) = \operatorname{traza}\operatorname{ad}(X)\varphi(f)$ *para todo* $X \in \mathfrak{p}$, $f \in C^\infty_K(H\backslash G)$.
2. $\varphi(f) = \det \mathrm{Ad}_\mathfrak{p}(k)\varphi(f \circ R_{k^{-1}})$ *para todo* $k \in K$, $f \in C^\infty_K(H\backslash G)$.

Demostración. Por la Proposición 4.18 sabemos que $\mathrm{H}^r(\mathfrak{g}, K; V^c) \cong \mathrm{H}_r(\mathfrak{g}, K; V)^*$, donde V^c denota el $(\mathfrak{g}; K)$-módulo formado por las funciones lineales de V en $\mathbb{R}$ que cumplen la condición de K-finitud. Por la Proposición 4.22 sabemos que $\mathrm{H}^r(\mathfrak{g}, K; V) \cong \mathrm{H}_{n-r}(\mathfrak{g}, K; V^{tw})$, donde por V^{tw} denotamos la estructura de $(\mathfrak{g}; K)$-módulo de Hazewinkel en V. Utilizando las dos Proposiciones tendremos, para el caso que nos interesa:

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{g}, K; C^\infty_K(H\backslash G))^* \cong \mathrm{H}_0(\mathfrak{g}, K; C^\infty(H\backslash G)^{tw})^* = \mathrm{H}^0(\mathfrak{g}; K; (C^\infty_K(H\backslash G)^{tw})^c).$$

Por la Proposición 15.5 sabemos que los elementos de $\mathrm{H}^0(\mathfrak{g}; K; (C_K^\infty(H\backslash G)^{tw})^c)$ serán los elementos de $(C_K^\infty(H\backslash G)^{tw})^c$ invariantes por las acciones de K y de $\mathfrak{p}$.

La acción de $\mathfrak{p}$ vendrá dada por la estructura dual de la de Hazewinkel. Así, dado $X \in \mathfrak{p}$ y dada una función K-finita $\varphi\colon C_K^\infty(H\backslash G)^{tw} \to \mathbb{R}$ tendremos que

$$\begin{aligned}(X \cdot_t \varphi)(f) &= -\varphi(X \cdot_t f)\\ &= -\varphi(X \cdot f - \operatorname{traza}\operatorname{ad}(X)f)\\ &= -\varphi(X \cdot f) + \operatorname{traza}\operatorname{ad}(X)\varphi(f),\end{aligned}$$

donde f será una función de G en $\mathbb{R}$ invariante para los elementos de H.

Siguiendo también la estructura del módulo de Hazewinkel, la acción de K estará definida de esta manera:

$$\begin{aligned}(k \cdot_t \varphi)(f) &= \varphi(k^{-1} \cdot_t f)\\ &= \varphi(\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)(k^{-1} \cdot f))\\ &= \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)\varphi(k^{-1} \cdot f)\\ &= \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)\varphi(f \circ R_{k^{-1}}),\end{aligned}$$

con $k \in K$ y $f \in C_K^\infty(G)$ invariante para los elementos de H.

Entonces, para que un elemento $\varphi \in (C_K^\infty(H\backslash G)^{tw})^c$ sea invariante por la acción de K y por la acción de $\mathfrak{p}$, deberá cumplirse:

1. $\varphi(X \cdot f) = \operatorname{traza}\operatorname{ad}(X)\varphi(f)$ para todo $X \in \mathfrak{p}$, $f \in C_K^\infty(H\backslash G)$.

   En el caso que tenemos estudiado (Proposición 15.7) $H = G$ y, por lo tanto, f es constante, con lo que $Xf = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ y $\operatorname{traza}\operatorname{ad}(X)\varphi(f) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{p}$ y todo $f \in C_K^\infty(H\backslash G)$. Como $\varphi \neq 0$ entonces existe $f \in C_K^\infty(G)$ con $\varphi(f) \neq 0$, con lo que se tiene que, en ese caso, φ será invariante por la acción de $\mathfrak{p}$ si y solamente si $\operatorname{traza}\operatorname{ad}(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{p}$.

2. $\varphi(f) = \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)\varphi(f \circ R_{k^{-1}})$ para todo $k \in K$, $f \in C_K^\infty(H\backslash G)$.

   En el caso conocido, f es constante y $f \circ R_{k^{-1}} = f$, con lo que $\varphi(f) = \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k)\varphi(f)$ y, por tanto, φ será invariante si y solamente si $\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{p}}(k) = 1$ para todo $k \in K$.

Queda como un problema abierto el estudio de estas condiciones considerando un subgrupo propio $H \subsetneq G$, que podría ayudar a perfilar las condiciones de unimodularidad de una foliación transversalmente homogénea Riemanniana. $\square$

Parte VI

La clase de Álvarez

Capítulo 19
Forma de curvatura media

En este capítulo estudiaremos la forma de curvatura media y su relación con la mimimalidad de las foliaciones Riemannianas, que para foliaciones transversalmente orientadas es equivalente a la unimodularidad.

19.1. Derivada covariante

Sea (M, g) una variedad Riemanniana orientada de dimensión m.

Definición 19.1. Una *conexión* en TM es una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal $\nabla\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que para cualesquiera X, Y campos de vectores en M y toda $f \in C^\infty(M)$ se cumple que

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y,$$
$$\nabla_X(fY) = (X \cdot f)Y + f\nabla_X Y.$$

Teorema 19.2 (pág. 70 de [15]). *En cualquier variedad Riemanniana (M, g) existe una única conexión que cumple que*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$
$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 19.3. Llamaremos *conexión de Levi-Civita* a la conexión que cumple las propiedades referidas en el Teorema 19.2. Nos referiremos a $\nabla_X Y$ como *derivada covariante* de X con respecto de Y.

Lema 19.4. *Si X, Y son campos de vectores en M, se tiene que el valor de $\nabla_X Y$ en el punto $x \in M$ solamente depende del vector X_x.*

Demostración. Sea Z otro campo de vectores en M tal que $Z_x = X_x$. Tenemos que probar que

$$(\nabla_Z Y)_x = (\nabla_X Y)_x\,.$$

Tomando un entorno abierto U de x y $\xi_1, \ldots, \xi_m$ campos de vectores en U, con $m = \dim M$, tales que en cada punto $y \in U$ forman una base del espacio vectorial T_yM, podemos escribir localmente el campo de vectores $Z - X$ como

$$(Z - X)_{|U} = \sum_{i=i}^{m} f_i\xi_i,$$

con f_i funciones reales en M. Así, es claro que

$$0 = Z_x - X_x = (Z - X)_x = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\xi_{ix},$$

lo que, por la independencia lineal de los ξ_{ix}, implica que $f_i(x) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z Y)_x - (\nabla_X Y)_x &= (\nabla_Z Y - \nabla_X Y)_x \\
&= (\nabla_{Z-X} Y)_x \\
&= \left(\nabla_{\sum f_i \xi_i} Y\right)_x \\
&= \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \left(\nabla_{\xi_i} X\right)_x = 0.
\end{aligned}$$

□

Lema 19.5. *Dada $E_1, \ldots, E_m$ referencia local ortonormal en $U \subset M$, se tiene que para cada campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(U)$ se cumple que*

$$g([X, E_i], E_i) = -g(\nabla_{E_i} X, E_i)$$

para todo $i = 1, \ldots, m$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
g([X, E_i], E_i) &= g(\nabla_X E_i - \nabla_{E_i} X, E_i) \\
&= g(\nabla_X E_i, E_i) - g(\nabla_{E_i} X, E_i) \\
&= -g(\nabla_{E_i} X, E_i)
\end{aligned}$$

pues $g(\nabla_X E_i, E_i) = 0$. En efecto, $g(E_i, E_i) = 1$ y por tanto:

$$0 = Xg(E_i, E_i) = g(\nabla_X E_i, E_i) + g(E_i, \nabla_X E_i) = 2g(\nabla_X E_i, E_i).$$

□

19.2. Forma de volumen y divergencia

Definición 19.6 (Pág. 7 de [39])**.** Definimos la forma de volumen como la m-forma vol en M dada por

$$\mathrm{vol}(X_1, \ldots, X_m) = \det(g(X_i, E_j)),$$

donde $E_1, \ldots, E_m$ es una referencia local ortonormal con orientación positiva. En particular

$$\mathrm{vol}(E_1, \ldots, \overset{i)}{Y}, \ldots, E_m) = g(Y, E_i).$$

Definición 19.7. Dado X campo de vectores en M se define la *divergencia* de X como la función $\operatorname{div} X$ que mide cómo la forma de volumen varía a lo largo del flujo del campo de vectores X:

$$L_X \operatorname{vol} = \operatorname{div} X \cdot \operatorname{vol}.$$

Proposición 19.8. *Dada $E_1, \ldots, E_m$ referencia local ortonormal orientada positivamente en $U \subset M$, se tiene que*

$$\operatorname{div} X_{|U} = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{E_i} X, E_i) = -\sum_{i=1}^{m} g([X, E_i], E_i),$$

para cualquier campo de vectores X en U.

Demostración. La segunda igualdad es inmediata a partir del Lema 19.5. Demostraremos que

$$\operatorname{div} X = -\sum_{i=1}^{m} g([X, E_i], E_i) :$$

Como $\operatorname{vol}(E_1, \ldots, E_m) = 1$ tenemos que

$$\operatorname{div} X = (L_X \operatorname{vol})(E_1, \ldots, E_m).$$

Por el apartado e) de la Proposición 2.25 de [50] sabemos que

$$\begin{aligned}(L_X \operatorname{vol})(E_1, \ldots, E_m) &= L_X(\operatorname{vol}(E_1, \ldots, E_m)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(E_1, \ldots, L_X E_i, \ldots, E_m).\end{aligned}$$

El primer sumando se anula, pues $\operatorname{vol}(E_1, \ldots, E_m)$ es una función constante, y entonces:

$$\operatorname{div} X = -\sum_{i=1}^{m} \operatorname{vol}(E_1, \ldots, L_X E_i, \ldots, E_m),$$

lo que, por definición de la forma de volumen, nos permite asegurar que

$$\operatorname{div} X = -\sum_{i=1}^{m} g(L_X E_i, E_i) = -\sum_{i=1}^{m} g([X, E_i], E_i),$$

pues $L_X E_i = [X, E_i]$ por el apartado b) de la Proposición 2.25 de [50]. □

Definición 19.9. Fijado $x \in M$ podemos definir, para X campo de vectores en M, la aplicación $W_x^X : T_x M \to T_x M$, dada por

$$W_x^X(v) = (\nabla_V X)_x ,$$

con V campo de vectores definido localmente en un entorno de x tal que $V_x = v$. Esta aplicación está bien definida en virtud del Lema 19.4.

Proposición 19.10. *Dado X campo de vectores en M se tiene que*

$$\operatorname{div} X = \operatorname{traza} W^X,$$

donde $\operatorname{traza} W^X$ *es la función que a cada $x \in M$ le hace corresponder* $\operatorname{traza} W^X_x$.

Demostración. Por definición, se tiene que

$$\operatorname{traza} W^X = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{E_i} X, E_i)$$

para cualquier referencia ortonormal definida en un entorno U de x, con lo que por la Proposición 19.8 el resultado es inmediato. □

19.3. Forma de curvatura media

Dotemos a M de una foliación Riemanniana orientada $\mathcal{F}$ de dimensión p y codimensión $q = m - p$. Que $\mathcal{F}$ sea Riemanniana significa que existe sobre M una métrica g casi-fibrada para $\mathcal{F}$. La métrica g nos permite descomponer el fibrado tangente en

$$TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}^{\perp}. \tag{19.3.1}$$

En esta sección definiremos la forma de curvatura media. Jesús Álvarez demuestra en [1] que la clase de cohomología de la componente básica de esta forma no depende de la métrica y es determinante en el estudio de la unimodularidad de la foliación.

Definición 19.11 ([37]). La *forma característica* $\chi \in \Omega^p(M)$ se define localmente como

$$\chi(X_1, \ldots, X_p) = \det(g(X_i, \xi_j)),$$

con $X_1, \ldots, X_p$ campos de vectores en M, donde $\xi_1, \ldots, \xi_p$ es una referencia local ortonormal del tangente. Está bien definida pues M se puede recubrir por abiertos de trivialidad y no depende de la base $\xi_1, \ldots, \xi_p$ escogida, pues los cambios de base en el espacio tangente en cada punto, si la base es ortonormal y orientada positivamente, tienen determinante 1.

La forma característica χ cumple que

1. Para cada hoja L de $\mathcal{F}$, $\chi_{|L}$ es una forma de volumen en L con respecto a la métrica g.

2. $i_Y \chi = 0$ para todo Y campo de vectores ortogonal a $\mathcal{F}$.

Definición 19.12. La *forma de curvatura media* para $\mathcal{F}$ se define localmente como la 1-forma κ en M dada por

$$\kappa(Y) = -i_Y \mathrm{d}\chi(\xi_1, \ldots, \xi_p) = -\mathrm{d}\chi(Y, \xi_1, \ldots, \xi_p)$$

para todo $Y \in \chi(M)$. Al igual que χ, no depende de la base $\xi_1, \ldots, \xi_p$ escogida.

Definición 19.13. Llamaremos *aplicación de Weingarten* en x, $\widehat{W}_x^X$, a la restricción de la aplicación W_x^X a los espacios tangentes a la foliación. Esto es: $\widehat{W}_x^X : T_x\mathcal{F} \to T_x\mathcal{F}$, con

$$\widehat{W}_x^X(v) = \mathcal{V}W_x^X(v),$$

donde $\mathcal{V}$ representa la proyección ortogonal sobre el tangente $T_x\mathcal{F}$, con la descomposición $T_xM = T_x\mathcal{F} \oplus T_x\mathcal{F}^\perp$ que da la métrica g.

Adaptaremos ahora a nuestras notaciones algunas definiciones del apartado 10.5 de [5]:

Definición 19.14. Una hoja L de $\mathcal{F}$ se dice que es una *subvariedad minimal* de la variedad Riemanniana (M, g) si para todo $x \in L$ y para todo Y campo de vectores ortogonal a $\mathcal{F}$ se tiene que $\operatorname{traza} \widehat{W}_x^Y = 0$.

Definición 19.15. La foliación $\mathcal{F}$ se dice *minimalizable* si existe en M una métrica g casi-fibrada para $\mathcal{F}$ tal que todas las hojas son subvariedades minimales de M.

Proposición 19.16. *Sea* $\operatorname{traza} \widehat{W}^X$ *la función que a cada* $x \in M$ *le hace corresponder* $\operatorname{traza} \widehat{W}_x^X$. *Para todo campo de vectores* X *en* M *se tiene que:*

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X &= \operatorname{traza} \widehat{W}^X + \sum_{i=1}^q g(\nabla_{Y_i} X, Y_i) \\ &= \operatorname{traza} \widehat{W}^X - \sum_{i=1}^q g([X, Y_i], Y_i]),\end{aligned}$$

con $Y_1, \ldots, Y_q$ *paralelismo transverso local ortonormal de* $\mathcal{F}$.

Demostración. Como la referencia $\xi_1, \ldots, \xi_p, Y_1, \ldots, Y_q$ es ortonormal, por la Proposición 19.8 sabemos que

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^p g(\nabla_{\xi_i} X, \xi_i) + \sum_{i=1}^q g(\nabla_{Y_i} X, Y_i).$$

El primer sumando es claramente la traza del operador de Weingarten tangente, pues el valor de $g(\nabla_{\xi_i} X, \xi_i)$ solamente depende de la parte tangente de $\nabla_{\xi_i} X$. La segunda igualdad se demuestra de la misma forma que el Lema 19.5, ya que $g(Y_i, Y_i) = 1$. □

Proposición 19.17. *Sea* Y *un campo de vectores ortogonal a* $\mathcal{F}$. *Entonces*

$$\kappa(Y) = -\operatorname{traza} \widehat{W}^Y.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\kappa(Y) &= -\mathrm{d}\chi(Y, \xi_1, \ldots, \xi_p) \\ &= -Y\chi(\xi_1, \ldots, \xi_p) \qquad (19.3.2)\end{aligned}$$

$$- \sum_{j=1}^{p} (-1)^j \xi_j \chi(Y, \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_p) \tag{19.3.3}$$

$$- \sum_{j=1}^{p} (-1)^j \chi([Y, \xi_j], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_p) \tag{19.3.4}$$

$$- \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \chi([\xi_i, \xi_j], Y, \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_p) \tag{19.3.5}$$

$$= - \sum_{j=1}^{p} (-1)^j \chi([Y, \xi_j], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_p), \tag{19.3.6}$$

pues (19.3.2) se anula ya que $\chi(\xi_1, \ldots, \xi_p) = 1$ y (19.3.3) y (19.3.5) se anulan por la propiedad 2 de la forma característica.

Como por definición de χ se tiene que

$$\begin{aligned} \chi([Y, \xi_j], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \xi_p) &= (-1)^{j-1} \chi(\xi_1, \ldots, [Y, \xi_j], \ldots, \xi_p) \\ &= (-1)^{j-1} g([Y, \xi_j], \xi_j), \end{aligned}$$

llegamos a que

$$\begin{aligned} \kappa(Y) &= \sum_{j=1}^{p} g([Y, \xi_j], \xi_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} g(\nabla_Y \xi_j - \nabla_{\xi_j} Y, \xi_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} g(\nabla_Y \xi_j, \xi_j) - \sum_{j=1}^{p} g(\nabla_{\xi_j} Y, \xi_j) \\ &= - \sum_{j=1}^{p} g(\nabla_{\xi_j} Y, \xi_j), \end{aligned}$$

pues $g(\nabla_Y \xi_j, \xi_j) = 0$. En efecto, $g(\xi_j, \xi_j) = 1$ y por tanto

$$0 = Y g(\xi_j, \xi_j) = g(\nabla_Y \xi_j, \xi_j) + g(\xi_j, \nabla_Y \xi_j) = 2 g(\nabla_Y \xi_j, \xi_j).$$

Así,

$$\kappa(Y) = - \sum_{j=1}^{p} g(\nabla_{\xi_j} Y, \xi_j) = - \operatorname{traza} \widehat{W}^Y. \quad \square$$

Corolario 19.18. *La foliación $\mathcal{F}$ es minimalizable si y solamente si existe una métrica casi-fibrada para la que $\kappa = 0$.*

Corolario 19.19. *Para todo campo de vectores Y en M ortogonal a $\mathcal{F}$ se tiene:*

$$\begin{aligned}\operatorname{div} Y &= -\kappa(Y) + \sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{Y_i} Y, Y_i) \\ &= -\kappa(Y) - \sum_{i=1}^{q} g([Y, Y_i], Y_i).\end{aligned}$$

Lema 19.20. *La 1-forma κ es básica si y solo si la función $\kappa(Y)$ es básica para todo campo de vectores foliado Y.*

Demostración. Supongamos que κ es básica. Esto significa que, para todo Z campo de vectores tangente a $\mathcal{F}$, se cumplen dos condiciones:

1. La primera, $0 = i_Z\kappa = \kappa(Z)$, lo que se cumple siempre por la definición de κ (Definición 19.12), pues $\mathrm{d}\chi$ es una $(p+1)-$forma y $p = \dim \mathcal{F}$.

2. La segunda, que $i_Z \mathrm{d}\kappa = 0$. Que $i_Z \mathrm{d}\kappa$ se anula para los tangentes es inmediato por la dimensión, pero que se anule para un campo de vectores foliado Y implica que

$$\begin{aligned}0 = i_Z \mathrm{d}\kappa(Y) &= \mathrm{d}\kappa(Z, Y) \\ &= Z \cdot \kappa(Y) - Y \cdot \kappa(Z) - \kappa([Z, Y]) \\ &= Z \cdot \kappa(Y) - \kappa([Z, Y]).\end{aligned}$$

   Pero $\kappa([Z, Y])$ se anula si Y es foliado, pues entonces $[Z, Y]$ es tangente a $\mathcal{F}$ y, por lo tanto, $Z \cdot \kappa(Y) = 0$.

Recíprocamente, suponiendo que $Z \cdot \kappa(Y) = 0$ para cualquier campo foliado Y, hay que probar que $i_Z \mathrm{d}\kappa = 0$, pues por (1) ya sabemos que $i_Z\kappa = 0$. Basta comprobarlo para los campos de vectores foliados, pues cualquier campo transverso se puede poner localmente como combinación de los campos de vectores foliados que forman el paralelismo transverso local. Pero para cualquier campo foliado Y se cumple que

$$i_Z \mathrm{d}\kappa(Y) = Z \cdot \kappa(Y) - \kappa([Z, Y]) = 0,$$

pues $\kappa([Z, Y]) = 0$ al ser $[Z, Y]$ tangente. □

Corolario 19.21. *Sea Y un campo de vectores transverso a $\mathcal{F}$. Si κ es básica, entonces* $\operatorname{traza} \widehat{W}^Y$ *es constante a lo largo de las hojas de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Inmediato si aplicamos la Proposición 19.17, pues

$$Z \cdot \operatorname{traza} \widehat{W}^Y = -Z \cdot \kappa(Y) = 0$$

para todo Z campo de vectores tangente a las hojas de $\mathcal{F}$. □

Proposición 19.22. *Sea Y un campo de vectores transverso a $\mathcal{F}$. Si κ es básica, entonces* $\operatorname{div} Y$ *es constante a lo largo de las hojas de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Para probar que $\operatorname{div} Y$ es constante a lo largo de las hojas hay que probar que

$$Z \cdot \operatorname{div} Y = 0$$

para todo Z campo de vectores tangente a las hojas de $\mathcal{F}$. Por la Proposición 19.16 sabemos que

$$Z \cdot \operatorname{div} Y = Z \cdot \operatorname{traza} \widehat{W}^Y - Z \cdot \sum_{i=1}^{q} g([Y, Y_i], Y_i]).$$

El primer sumando se anula pues, por la Proposición 19.17, $\operatorname{traza} \widehat{W}^Y = -\kappa(Y)$ y, por el Lema 19.20, sabemos que $Z \cdot \kappa(Y) = 0$ si κ es básica.

Vamos a comprobar que el segundo sumando también se anula. Deberemos tener en cuenta que como Y e Y_i son foliados entonces de la identidad de Jacobi se deduce inmediatamente que el campo $[Y, Y_i]$ es foliado, pues, dado Z campo de vectores tangente a $\mathcal{F}$, se tiene que

$$[[Y, Y_i], Z] = [Y, [Y_i, Z]] - [Y_i, [Y, Z]],$$

y los dos corchetes de la derecha son tangentes por ser Y e Y_i foliados.

Probaremos que $Z \cdot g([Y, Y_i], Y_i) = 0$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, q\}$. Tenemos que $[Y, Y_i]$ se puede escribir localmente como

$$[Y, Y_i] = \sum_{j=1}^{p} g_j \xi_j + \sum_{j=1}^{q} f_j Y_j,$$

donde sabemos por el Lema 5.13 que las f_j son funciones básicas para $\mathcal{F}$, es decir, constantes a lo largo de las hojas. Así, llegamos a que

$$\begin{aligned} Z \cdot g([Y, Y_i], Y_i) &= Z \cdot g \left(\sum_{j=1}^{p} g_j \xi_j + \sum_{j=1}^{q} f_j Y_j, Y_i \right) \\ &= Z \cdot \sum_{j=1}^{p} g_j g(\xi_j, Y_i) + Z \cdot \sum_{j=1}^{q} f_j g(Y_j, Y_i) \\ &= Z \cdot f_i g(Y_i, Y_i) \\ &= Z \cdot f_i, \end{aligned}$$

que se anula por ser f_i básica. □

Nota 19.23. De ahora en adelante prescindiremos, en la mayor parte de las ocasiones, de la hipótesis de orientabilidad, pues, aunque es necesaria en nuestros cálculos, para demostrar nuestros resultados en el caso de que la variedad no sea orientable o que la foliación no sea transversalmente orientable bastará subir a la cubierta de orientación (ver Sección 3.5. de [5]).

19.4. Campo de curvatura media

Sea $\mathcal{F}$ una foliación Riemanniana sobre una variedad M, dotada de una métrica casi-fibrada g. Siguiendo a V. Slesar en [42], definiremos el siguiente campo de vectores:

Definición 19.24. Llamaremos *campo de curvatura media* al único campo de vectores $\kappa^\sharp$ en M que cumple que

$$\kappa(X) = g(\kappa^\sharp, X)$$

para todo campo de vectores X en M.

Proposición 19.25. *Localmente se tiene que*

$$\kappa^\sharp = \mathcal{H}\sum_{j=1}^{p} \nabla_{\xi_j}\xi_j,$$

con $\xi_1, \ldots, \xi_p$ referencia local ortonormal del fibrado tangente a $\mathcal{F}$, donde $\mathcal{H}$ representa la proyección ortogonal sobre $T_x\mathcal{F}^\perp$.

Demostración. El campo $\kappa^\sharp$ tiene que ser ortogonal a $\mathcal{F}$, pues sabemos que κ se anula en los campos de vectores tangentes. Basta entonces con demostrar que para un campo de vectores Y ortogonal a $\mathcal{F}$ se cumple que

$$\kappa(Y) = g(\sum_{j=1}^{p} \nabla_{\xi_j}\xi_j, Y) :$$

Por la Proposición 19.17 sabemos que

$$\kappa(Y) = -\sum_{j=1}^{p} g(\nabla_{\xi_j}Y, \xi_j),$$

pero $g(\nabla_{\xi_j}Y, \xi_j) = -g(\nabla_{\xi_j}\xi_j, Y)$. Veámoslo:

Como Y es ortogonal a $\mathcal{F}$ entonces $g(Y, \xi_j) = 0$, y por tanto:

$$0 = \xi_j \cdot g(Y, \xi_j) = g(\nabla_{\xi_j}Y, \xi_j) + g(Y, \nabla_{\xi_j}\xi_j). \quad \square$$

Proposición 19.26. *La foliación $\mathcal{F}$ es minimalizable si y solo si existe una métrica casi-fibrada para la que el campo de vectores $\kappa^\sharp$ se anula.*

19.5. La clase de Álvarez

Jesús Álvarez demuestra en el Teorema 2.1 de [1] que dada una foliación Riemanniana $\mathcal{F}$ sobre una variedad compacta M, el complejo de de Rham de M, $A(M)$, se puede descomponer en una suma directa del complejo de formas básicas, $A_b(\mathcal{F})$, y su complementario ortogonal con el producto escalar dado por el operador de Hodge (página 285 de [47]):

$$A(M) = A_b(\mathcal{F}) \oplus A_b(\mathcal{F})^\perp.$$

Más adelante, en el Corolario 3.5, demuestra que la componente básica de la forma de curvatura media, es decir, la proyección ortogonal de κ sobre $A_b(\mathcal{F})$, que denota κ_b, es una forma cerrada y, por lo tanto, define una clase de cohomología básica $[k_b] \in \mathrm{H}^1(M/\mathcal{F})$. Además, en el Teorema 5.2, demuestra que esta clase de cohomología no depende de la métrica casi-fibrada escogida, con lo que es un invariante de la foliación.

Definición 19.27. Llamaremos *clase de Álvarez* a la clase de cohomología

$$\xi(\mathcal{F}) := [k_b] \in \mathrm{H}^1(M/\mathcal{F}).$$

Teorema 19.28 (Teorema 6.4 de [1])**.** *Una foliación Riemanniana $\mathcal{F}$ sobre una variedad compacta M es minimalizable si y solo si $\xi(\mathcal{F}) = 0$. Además, cuando $\mathcal{F}$ es transversalmente orientada, $\mathcal{F}$ es minimalizable si y solo si $\mathrm{H}^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$, con $n = \operatorname{codim} \mathcal{F}$.*

La forma de curvatura media no tiene por qué ser básica para $\mathcal{F}$, pero Demetrio Domínguez demuestra en [9] el siguiente Teorema:

Teorema 19.29. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación Riemanniana de dimensión p en una variedad compacta M dotada de una métrica casi fibrada g con forma de curvatura media κ. Entonces existe una métrica casi fibrada g' en M con forma de curvatura media $\kappa' = \kappa_b$, la componente básica de κ.*

Este Teorema nos permite considerar, de aquí en adelante, la variedad M dotada de una métrica casi-fibrada g tal que la forma de curvatura media es básica.

19.6. La adherencia de las hojas

Sea $\mathcal{F}$ una foliación Riemanniana sobre una variedad compacta (M, g), con g métrica casi-fibrada para $\mathcal{F}$.

En esta sección estudiaremos la minimalidad de la foliación dada por las adherencias de las hojas. A partir de una referencia local determinada, daremos una expresión para calcular la forma de curvatura en algunos campos de vectores. En las foliaciones de Lie, esta fórmula permitirá relacionar la forma de curvatura media con la aplicación adjunta del álgebra de lie de $\overline{\Gamma}$, la adherencia del grupo de holonomía.

Molino demuestra en [36] que si las adherencias de las hojas de $\mathcal{F}$ tienen la misma dimensión, entonces la foliación $\overline{\mathcal{F}}$, dada por las adherencias de las hojas de $\mathcal{F}$, es Riemanniana y la métrica g es casi-fibrada para $\overline{\mathcal{F}}$. Entonces, g nos permite considerar la descomposición

$$TM = T\overline{\mathcal{F}} \oplus T\overline{\mathcal{F}}^{\perp}.$$

Recordemos que, por el Teorema 19.29, podemos suponer g tal que κ, la forma de curvatura media, es básica para $\mathcal{F}$.

Cogiendo $\xi_1, \ldots, \xi_p$ referencia local ortonormal del tangente podemos completarla a una referencia local ortonormal $\{\xi_1, \ldots, \xi_p, Y_1, \ldots, Y_q\}$ de $T\overline{\mathcal{F}}$. Esa referencia la podemos completar a una referencia local ortonormal

$$\{\xi_1, \ldots, \xi_p, Y_1, \ldots, Y_q, Y_{q+1}, \ldots, Y_n\}$$

de M compatible con $\mathcal{F}$ y con $\overline{\mathcal{F}}$, donde los campos $Y_{q+1}, \ldots, Y_n$ son foliados para $\overline{\mathcal{F}}$.

Proposición 19.30. *Para $k = 1, \ldots, q$ se tiene que*

$$\kappa(Y_k)_{|\overline{L}} = \sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{Y_i} Y_k, Y_i)_{|\overline{L}}.$$

Demostración. Sea L una hoja de $\mathcal{F}$. Consideramos la foliación $(\overline{L}, \mathcal{F}_{|\overline{L}})$, que es de hojas densas. Denotaremos por $\bar{\nabla}$ la derivada covariante en $\overline{L}$ y nos referiremos al campo de vectores Y_k indistintamente, estemos hablando del campo de vectores en M o de su restricción a $\overline{L}$. la notación $\bar{\nabla}$ evita cualquier posible ambigüedad.

Denotaremos por $\operatorname{div}_{\overline{L}} Y_k$ la divergencia del campo de vectores Y_k en $\overline{L}$. Comprobaremos que es igual a $\operatorname{div} Y_{k|\overline{L}}$:

$$\operatorname{div} Y_k = \sum_{i=1}^{p} g(\nabla_{\xi_i} Y_k, \xi_i) + \sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{Y_i} Y_k, Y_i) + \sum_{i=q+1}^{n} g(\nabla_{Y_i} Y_k, Y_i).$$

Pero sabemos, por la Proposición 19.5, que

$$g(\nabla_{Y_i} Y_k, Y_i) = -g([Y_k, Y_i], Y_i),$$

que se anula para $i = q+1, \ldots, n$, pues los campos $Y_{q+1}, \ldots, Y_n$ son foliados para $\overline{\mathcal{F}}$. Así:

$$\operatorname{div} Y_k = \sum_{i=1}^{p} g(\nabla_{\xi_i} Y_k, \xi_i) + \sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{Y_i} Y_k, Y_i).$$

Y como, en general, para cualquier campo de vectores X y cualquier referencia $\{E_i\}$ en $\overline{L}$, se tiene que

$$g(\bar{\nabla}_{E_i} X, E_i)_{|\overline{L}} = -g([X, E_i]_{\overline{L}}, E_i)_{|\overline{L}} = -g([X, E_i], E_i)_{|\overline{L}} = g(\nabla_{E_i} X, E_i)_{|\overline{L}},$$

llegamos a que, en $\overline{L}$,

$$\operatorname{div} Y_k = \sum_{i=1}^{p} g(\bar{\nabla}_{\xi_i} Y_k, \xi_i) + \sum_{i=1}^{q} g(\bar{\nabla}_{Y_i} Y_k, Y_i) = \operatorname{div}_{\overline{L}} Y_k.$$

Entonces, como κ es básica, por la Proposición 19.22, $\operatorname{div} Y_k$ es constante a lo largo de las hojas y, por lo tanto, constante a lo largo de las adherencias de las hojas, con lo que $\operatorname{div}_{\overline{L}} Y_k$ es constante. Y como, por ser $\overline{L}$ compacta, se tiene que

$$\int_{\overline{L}} \operatorname{div}_{\overline{L}} Y_k \, \overline{vol} = 0,$$

con $\overline{vol}$ forma de volumen en $\overline{L}$, entonces, necesariamente, $\operatorname{div}_{\overline{L}} Y_k = 0$. Así:

$$0 = \operatorname{div}_{\overline{L}} Y_k = \sum_{i=1}^{p} g(\bar{\nabla}_{\xi_i} Y_k, \xi_i)_{|\overline{L}} + \sum_{i=1}^{q} g(\bar{\nabla}_{Y_i} Y_k, Y_i)_{|\overline{L}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{p} g(\nabla_{\xi_i} Y_k, \xi_i)_{|\overline{L}} + \sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{Y_i} Y_k, Y_i)_{|\overline{L}} \\
&= -\kappa(Y_k)_{|\overline{L}} + \sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{Y_i} Y_k, Y_i)_{|\overline{L}}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Corolario 19.31. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación Riemanniana sobre una variedad compacta (M, g) tal que todas las hojas tienen la misma dimensión. Si $\mathcal{F}$ es minimalizable, entonces, dada $L \subset M$ hoja de $\mathcal{F}$, la foliación $(\overline{L}, \mathcal{F}_{|\overline{L}})$ es minimalizable.*

Demostración. Inmediato a partir de la demostración de la Proposición 19.30, pues, si llamamos $\bar{\kappa}$ a la forma de curvatura media para la foliación en $\overline{L}$, tendremos que

$$
\bar{\kappa}(Y_k) = \kappa(Y_k)_{|\overline{L}} = 0
$$

para todo $k = 1, \ldots, q$, pues κ se anula por ser $\mathcal{F}$ unimodular. $\square$

Capítulo 20
Foliaciones transversalmente homogéneas

Ahora estudiaremos la forma de curvatura media en las foliaciones transversalmente homogéneas y en las foliaciones de Lie. Demostraremos que, para una foliación de Lie con hojas densas, esta forma se corresponde con la traza de la representación adjunta del álgebra de Lie asociada.

Supongamos que la foliación $\mathcal{F}$ tiene estructura de G/K-foliación transversalmente homogénea, con G grupo de Lie conexo n-dimensional actuando efectivamente sobre la variedad homogénea G/K, de dimensión $q = n - k$. Tendremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & G/K \\ M & \end{tikzcd}$$

Sea $\Gamma \subset G$ el grupo de holonomía de $\mathcal{F}$. Recordemos que $\Gamma = \operatorname{im} h$, con $h\colon \operatorname{Aut}(p) \to G$ morfismo de holonomía, de forma que se cumple que $f(\gamma\tilde{x}) = h(\gamma)f(\tilde{x})$ para todo $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ y todo $\gamma \in \operatorname{Aut}(p)$.

Llamándole $\mathfrak{X}_\Gamma(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})$ al álgebra de los campos transversos en $\widetilde{M}$ que son invariantes por los automorfismos de p y $\mathfrak{X}_\Gamma(G/K)$ a los campos de vectores en G/K que son Γ-invariantes, tendremos que:

Proposición 20.1. *En general,*

$$\mathfrak{X}(M/\mathcal{F}) = \mathfrak{X}_\Gamma(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}).$$

Además, si la submersión desarrollo $f\colon \widetilde{M} \to G/K$ tiene fibras conexas, entonces

$$\mathfrak{X}_\Gamma(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}) = \mathfrak{X}_\Gamma(G/K).$$

Demostración. Tomemos en $\widetilde{M}$ la métrica $\tilde{g} = p^*g$, con g métrica casi fibrada en M. Como p es una cubierta con grupo de automorfismos $\Gamma = \operatorname{Aut}(p)$, es bien conocida la igualdad (isomorfismo de álgebras de Lie) entre $\mathfrak{X}_\Gamma(\widetilde{M})$ y $\mathfrak{X}(M)$. Probar entonces que

$$\mathfrak{X}(M/\mathcal{F}) = \mathfrak{X}_\Gamma(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})$$

es inmediato por las definiciones de $\widetilde{\mathcal{F}} = p^*\mathcal{F}$ y $\tilde{g} = p^*g$.

Supongamos ahora que la submersión desarrollo tiene fibras conexas. En $\widetilde{M}$ tenemos la métrica $\tilde{g} = p^*g$. Tomemos en G/K la métrica $\bar{g}$ invariante por Γ que hace que la submersión $f\colon (\widetilde{M}, \tilde{g}) \to (G/K, \bar{g})$ sea Riemanniana. Sabemos que existe esa métrica por el Teorema 6.19, que exige como hipótesis que las fibras de f sean conexas.

Como $\widetilde{\mathcal{F}}$ es la foliación simple definida por la submersión $f\colon \widetilde{M} \to G/K$, Molino demuestra en las páginas 36 y 37 de [36] la igualdad entre $\mathfrak{X}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})$ y $\mathfrak{X}(G/K)$, de forma que para cada $\bar{Y} \in \mathfrak{X}(G/K)$ existe un único campo transverso $\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})$ que está f-relacionado con $\bar{Y}$. Entonces, para demostrar que

$$\mathfrak{X}_\Gamma(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}) = \mathfrak{X}_\Gamma(G/K)$$

bastará con demostrar que dado $\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}})$ y su correspondiente $\bar{Y} \in \mathfrak{X}(G/K)$, se tiene que $\widetilde{Y}$ es invariante por los automorfismos de p si y solo si $\bar{Y}$ es Γ-invariante:

Como $\widetilde{Y}$ está f-relacionado con $\bar{Y}$, con $a = f(\tilde{x})$ tendremos que

$$\begin{aligned} f_{*\gamma\tilde{x}}\widetilde{Y}_{\gamma\tilde{x}} &= \bar{Y}_{f(\gamma\tilde{x})} \\ &= \bar{Y}_{h(\gamma)a}. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f_{*\gamma\tilde{x}}(\gamma_{*\tilde{x}}\widetilde{Y}_{\tilde{x}}) &= (f \circ \gamma)_{*\tilde{x}}\widetilde{Y}_{\tilde{x}} \\ &= (L_{h(\gamma)} \circ f)_{*\tilde{x}}\widetilde{Y}_{\tilde{x}} \\ &= L_{h(\gamma)*a}(f_{*\tilde{x}}\widetilde{Y}_{\tilde{x}}) \\ &= L_{h(\gamma)*a}\bar{Y}_a. \end{aligned}$$

Por tanto, si $\widetilde{Y}$ es invariante, es decir, si $\gamma_{*\tilde{x}}\widetilde{Y}_{\tilde{x}} = \widetilde{Y}_{\gamma\tilde{x}}$ para todo $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ y todo $\gamma \in \mathrm{Aut}(p)$, se tiene inmediatamente que $\bar{Y}$ es invariante, pues $L_{h(\gamma)*a}\bar{Y}_a = \bar{Y}_{h(\gamma)a}$. Recíprocamente, si se cumple esto último, como $f_{*\gamma\tilde{x}}$ induce un isomorfismo entre $T_{\gamma\tilde{x}}\mathcal{F}^\perp$ y $T_{h(\gamma)a}G/K$ llegamos a que

$$\widetilde{Y}_{\gamma\tilde{x}} = \gamma_{*\tilde{x}}\widetilde{Y}_{\tilde{x}},$$

es decir, a que $\widetilde{Y}$ es invariante por los automortfismos de p. □

Definición 20.2. Para referirnos a la relación entre dos cualesquiera de los campos de vectores Y, $\widetilde{Y}$ e $\bar{Y}$ referidos en la proposición anterior diremos que ambos campos están $\mathcal{F}$-relacionados.

20.1. Estudio de la forma de curvatura media

Lema 20.3. *Sea $\tilde{\kappa} \in \Omega^1(\widetilde{M})$ la forma de curvatura media para $\widetilde{\mathcal{F}}$. Sea Y un campo de vectores en M transverso a $\mathcal{F}$ y sea $\widetilde{Y}$ el campo de vectores en $\widetilde{M}$ transverso a $\widetilde{\mathcal{F}}$ que está p-relacionado con Y. Entonces:*

1. $\tilde{\kappa}(\widetilde{Y}) = \kappa(Y) \circ p$,
2. $\operatorname{div}\widetilde{Y} = \operatorname{div} Y \circ p$.

Demostración. (1) Dado $U \subset M$ abierto de trivialización de $\mathcal{F}$, escogemos $\widetilde{U} \subset \widetilde{M}$ abierto de trivialización de $\widetilde{\mathcal{F}}$ tal que $p(\widetilde{U}) = U$. Dada $\xi_1, \ldots, \xi_p$ referencia local ortonormal del tangente a $\mathcal{F}$ en U, se corresponderá con una referencia local ortonormal $\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_p$ del tangente a $\widetilde{\mathcal{F}}$ en $\widetilde{U}$, de forma que $\tilde{\xi}_i$ está p-relacionado con ξ_i para todo $i = 1 \ldots, p$.

Sabemos, por la Proposición 19.17 que

$$\tilde{\kappa}(\widetilde{Y}) = -\sum_{i=1}^{p} \tilde{g}(\nabla_{\tilde{\xi}_i} \widetilde{Y}, \tilde{\xi}_i).$$

Por el primer apartado del Lema 1 de [38] sabemos que $\tilde{g} = g \circ p$ y por el tercer apartado sabemos que el campo de vectores $\nabla_{\tilde{\xi}_i} \widetilde{Y}$ está p-relacionado con $\nabla_{\xi_i} Y$. Así, llegamos a que

$$\tilde{\kappa}(\widetilde{Y}) = -\sum_{i=1}^{p} g(\nabla_{\xi_i} Y, \xi_i) \circ p = \left(-\sum_{i=1}^{p} g(\nabla_{\xi_i} Y, \xi_i) \right) \circ p = \kappa(Y) \circ p.$$

(2) Consideramos un paralelismo transverso local ortonormal $Y_1, \ldots, Y_q$ en M, que se corresponderá con un paralelismo transverso local ortonormal $\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_q$ en $\widetilde{M}$, de forma que Y_i e $\widetilde{Y}_i$ están $\mathcal{F}$-relacionados para todo $i = 1, \ldots, n$.

Por el Corolario 19.19 aplicado a $\widetilde{M}$ sabemos que

$$\operatorname{div} \widetilde{Y}(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{q} \tilde{g}(\nabla_{\widetilde{Y}_i} \widetilde{Y}, \widetilde{Y}_i)_{\tilde{x}} - \tilde{\kappa}(\widetilde{Y})(\tilde{x}),$$

con $\widetilde{Y}$ campo de vectores ortogonal a $\widetilde{\mathcal{F}}$ p-relacionado con Y.

Por (1) tenemos que

$$\tilde{\kappa}(\widetilde{Y})(\tilde{x}) = (\kappa(Y) \circ p)(\tilde{x}) = \kappa(Y)(p(\tilde{x})) = \kappa(Y)(x).$$

Por los apartados 1 y 3 del Lema 1 de [38] sabemos que

$$\sum_{i=1}^{q} \tilde{g}(\nabla_{\widetilde{Y}_i} \widetilde{Y}, \widetilde{Y}_i)_{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{Y_i} Y, Y_i)_{p(\tilde{x})},$$

con lo que

$$\operatorname{div} \widetilde{Y}(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{Y_i} Y, Y_i)_x - \kappa(Y)(x) = \operatorname{div} Y(x). \quad \square$$

Proposición 20.4. *Para cualquier campo de vectores X en G/K, que podemos escribir localmente de la forma*

$$X = \sum_{j=1}^{q} f_j e_j,$$

con $e_1, \ldots, e_q$ referencia local ortonormal, se tiene que

$$\operatorname{div} X = \sum_{j=1}^{q} e_j \cdot f_j - \sum_{i=1}^{q} f_j \sum_{i=1}^{q} g([e_j, e_i], e_i). \tag{20.1.1}$$

Demostración. Sabemos que

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{e_i} X, e_i).$$

Tomando

$$X = \sum_{j=1}^{q} f_j e_j,$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{q} g\left(\nabla_{e_i} \textstyle\sum_{j=1}^{q} f_j e_j, e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} g(\nabla_{e_i} f_j e_j, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} g((e_i \cdot f_j)\cdot e_j + f_j \nabla_{e_i} e_j, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} ((e_i \cdot f_j) g(e_j, e_i) + f_j g(\nabla_{e_i} e_j, e_i)) \\
&= \sum_{j=1}^{q} e_j \cdot f_j + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} f_j g(\nabla_{e_i} e_j, e_i) \\
&= \sum_{j=1}^{q} e_j \cdot f_j + \sum_{j=1}^{q} f_j \sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{e_i} e_j, e_i) \\
&= \sum_{j=1}^{q} e_j \cdot f_j - \sum_{i=1}^{q} f_j \sum_{i=1}^{q} g([e_j, e_i], e_i).
\end{aligned}$$ □

Nota 20.5. Si $K = \{e\}$, los $e_1, \dots, e_n$ (en ese caso, $n = q$) se pueden tomar globalmente de forma que constituyan una base del álgebra de Lie de G y el último sumatorio de (20.1.1) corresponderá a $\operatorname{traza} \operatorname{ad}(e_j)$.

Proposición 20.6. *Supongamos que la submersión desarrollo $f \colon \widetilde{M} \to G/K$ tiene fibras conexas. Entonces, dado Y campo de vectores en M transverso a $\mathcal{F}$, para todo $x \in M$ se tiene que*

$$\operatorname{div} Y(x) = \operatorname{div} \bar{Y}(a) - \kappa(Y)(x),$$

donde $\bar{Y}$ es el campo de vectores en G/K que está $\mathcal{F}$-relacionado con Y y $a = f(\tilde{x})$ para cualquier $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ que cumpla que $p(\tilde{x}) = x$.

Demostración. Consideramos en $\widetilde{M}$ la métrica $\tilde{g} = p^* g$, con g métrica casi fibrada en M, y en G/K la métrica $\bar{g}$ invariante por Γ que hace que la submersión $f \colon (\widetilde{M}, \tilde{g}) \to (G/K, \bar{g})$ sea Riemanniana.

En virtud de la Proposición 20.1, el paralelismo transverso local ortonormal en $\widetilde{M}$ formado por los campos $\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_q$ se proyectará en una referencia local ortogonal $e_1, \ldots, e_q$ de tal forma que $\widetilde{Y}_i$ y e_i están $\mathcal{F}$-relacionados para todo $i = 1, \ldots, q$. Por el Lema 20.3 sabemos que

$$\operatorname{div} Y(x) = \sum_{i=1}^{q} \tilde{g}(\nabla_{\widetilde{Y}_i} \widetilde{Y}, \widetilde{Y}_i)_{\tilde{x}} - \kappa(Y)(x).$$

Pero, aplicando de nuevo los apartados 1 y 3 de [38], pero esta vez para la submersión f, obtendremos que

$$\sum_{i=1}^{q} \tilde{g}(\nabla_{\widetilde{Y}_i} \widetilde{Y}, \widetilde{Y}_i)_{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^{q} \bar{g}(\nabla_{e_i} \bar{Y}, e_i)_a = \operatorname{div} \bar{Y}(a),$$

esta última igualdad por la Proposición 19.8. □

Corolario 20.7. *Si además $\mathcal{F}$ es de hojas densas, entonces, para todo $k = 1, \ldots, q$, se tiene que*

$$\kappa(Y_k)(x) = \sum_{i=1}^{q} g([e_k, e_i], e_i)(a).$$

Demostración. Como $\operatorname{div} Y_k$ es constante a lo largo de las hojas densas, será constante en todo M. Y como $\int_M \operatorname{div} Y_k vol = 0$, entonces $\operatorname{div} Y_k = 0$. Así, por la Proposición 20.6 tenemos que

$$\kappa(Y_k) = \operatorname{div} e_k(a) = \sum_{i=1}^{q} g([e_k, e_i], e_i)(a),$$

donde la última igualdad se cumple por la Proposición 20.4. □

20.2. Foliaciones de Lie

A lo largo de nuestro trabajo, y en estudios anteriores, queda patente la estrecha relación entre la unimodularidad de una G-foliación de Lie y la del propio grupo de Lie G y, por lo tanto, con su función modular $m_G(g) = |\det \operatorname{Ad}_G(g)|$.

En foliaciones transversalmente orientadas la unimodularidad de la foliación y su minimalidad son equivalentes. Cabe entonces preguntarse por la relación entre la función modular de G y la clase de Álvarez, que determina la minimalidad de la foliación. En esta sección estudiaremos la forma de curvatura media en las foliaciones de Lie, dando una caracterización para las foliaciones de hojas densas que la determina totalmente a partir de la aplicación adjunta del álgebra de Lie.

Supongamos que la foliación $\mathcal{F}$ tiene estructura de G-foliación de Lie, con G grupo de Lie conexo y simplemente conexo de dimensión n. Tendremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{D} & G \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

Tomamos en $\widetilde{M}$ la métrica $\tilde{g} = p^*g$, con g métrica casi fibrada en M, y en G la métrica invariante $\bar{g}$ que hace que la submersión $D\colon (\widetilde{M}, \tilde{g}) \to (G, \bar{g})$ sea Riemanniana. La conexidad de las fibras de D está garantizada por ser G simplemente conexo.

Como la foliación es transversalmente paralelizable, aplicando la Proposición 20.1, dada una base $e_1, \dots, e_n$ de $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de G, formada por campos de vectores invariantes a la izquierda en G, obtendremos, levantando los campos por D, un paralelismo transverso global $\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_n$ formado por campos de vectores en $\widetilde{M}$ invariantes por los automorfismos de p. Además, el paralelismo $\widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_n$ se proyecta por p a un paralelismo transverso $Y_1, \dots, Y_n$ en M.

Proposición 20.8. *Para cualquier campo de vectores X en G, que podemos escribir de la forma*

$$X = \sum_{j=1}^{n} f_j e_j,$$

se tiene que

$$\operatorname{div} X = \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot f_j - \sum_{j=1}^{n} f_j \operatorname{traza} \operatorname{ad}(e_j). \tag{20.2.1}$$

Demostración. Inmediato a partir de la Proposición 20.4 si tenemos en cuenta que, al ser la referencia $e_1, \dots, e_n$ una base del álgebra de Lie, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} g([e_j, e_i], e_i) = \operatorname{traza} \operatorname{ad}(e_j). \quad \square$$

Proposición 20.9. *Para todo $i = 1, \dots, n$ se tiene que*

$$\operatorname{div} Y_i = -\operatorname{traza} \operatorname{ad}(e_i) - \kappa(Y_i).$$

Demostración. De la Proposición 20.6 se deduce que

$$\operatorname{div} Y_i = \operatorname{div} e_i - \kappa(Y_i)$$

y por la Proposición 20.8 es inmediato que

$$\operatorname{div} e_i = -\operatorname{traza} \operatorname{ad}(e_i). \quad \square$$

Corolario 20.10. *Sea $\mathcal{F}$ una G-foliación de Lie transversalmente orientada sobre una variedad compacta M. Si $\mathcal{F}$ es minimalizable entonces existe un paralelismo transverso formado por campos de vectores de divergencia nula para una métrica casi-fibrada.*

Demostración. Que $\mathcal{F}$ sea minimalizable, al ser transversalmente orientada, es equivalente a que $\mathrm{H}^n(M/\mathcal{F}) \neq 0$, lo que equivale a que $\mathfrak{g}$ sea unimodular, es decir, que $\operatorname{traza} \operatorname{ad}(X) = 0$ para $X \in \mathfrak{g}$. Por otra parte, sabemos que existe una métrica casi-fibrada para la que $\kappa = 0$, con lo que el resultado se sigue inmediatamente de la Proposición 20.9. $\square$

Corolario 20.11. *Sea $\mathcal{F}$ una G- foliación de Lie sobre una variedad compacta M, con G unimodular. Entonces $\mathcal{F}$ es minimalizable si y solo si existe un paralelismo transverso formado por campos de vectores de divergencia nula para una métrica casi-fibrada.*

Demostración. Inmediato a partir de la Proposición 20.9, pues si G es unimodular se tiene que

$$\operatorname{div} Y_i = -\kappa(Y_i). \quad \square$$

20.2.1. La adherencia de las hojas

Aplicaremos ahora la Proposición 19.30 a las foliaciones de Lie, obteniendo una fórmula que nos permitirá relacionar la forma de curvatura media con la aplicación adjunta del álgebra de Lie de $\overline{\Gamma}$, la adherencia del grupo de holonomía.

Sea L una hoja de $\mathcal{F}$. Consideremos una referencia local ortonormal

$$\{\xi_1, \ldots, \xi_p, Y_1, \ldots, Y_q, Y_{q+1}, \ldots, Y_n\}$$

como la utilizada en la Sección 19.6, compatible con $\mathcal{F}$ y con $\overline{\mathcal{F}}$. Se puede escoger esta referencia de forma que los campos de vectores en G $\mathcal{F}$-relacionados con $Y_1, \ldots, Y_q, Y_{q+1}, \ldots, Y_n$ formarán una base $e_1, \ldots, e_q, e_{q+1}, \ldots, e_n$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, y los campos $e_1, \ldots, e_q$ formarán una base del álgebra de Lie asociada a $\overline{\Gamma}$.

Proposición 20.12. *Para $k = 1, \ldots, q$ se tiene que*

$$\kappa(Y_k)_{|\overline{L}} = -\operatorname{traza} \operatorname{ad}_{\mathfrak{k}}(e_k),$$

donde $\mathfrak{k}$ representa el álgebra de Lie asociada a $\overline{\Gamma}$.

Demostración. Por la Proposición 19.30, tendremos que

$$\kappa(Y_k)_{|\overline{L}} = \sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{Y_i} Y_k, Y_i)_{|\overline{L}}.$$

Por otro lado,

$$\sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{Y_i} Y_k, Y_i) = \sum_{i=1}^{q} g(\nabla_{e_i} e_k, e_i) = -\sum_{i=1}^{q} g([e_k, e_i], e_i) = -\operatorname{traza} \operatorname{ad}(e_k). \quad \square$$

Corolario 20.13. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación de Lie sobre una variedad compacta M. Si $\mathcal{F}$ es minimalizable, entonces $\mathfrak{k}$ es unimodular.*

Proposición 20.14. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación de Lie sobre una variedad compacta M. Si $\mathcal{F}$ es minimalizable, entonces $\mathfrak{g}$ es unimodular.*

Demostración. Por la Proposición 20.9 sabemos que para todo $i = 1, \ldots, n$ se tiene que

$$\operatorname{div} Y_i = -\operatorname{traza} \operatorname{ad}(e_i) - \kappa(Y_i).$$

Entonces, como la integral de la divergencia en una variedad compacta se anula, si $\mathfrak{g}$ no fuera unimodular y, por lo tanto, $\operatorname{traza} \operatorname{ad}(e_i) \neq 0$, tendríamos que

$$\int_M \kappa(Y_i) \operatorname{vol} \neq 0,$$

con lo que $\kappa \neq 0$ y $\mathcal{F}$ no sería minimalizable. $\square$

20.2.2. Foliaciones de Lie con hojas densas

Si las hojas de $\mathcal{F}$ son densas entonces $\Gamma \subset G$ es denso en G. Entonces, dado $Y \in \mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$ tendremos que el campo de vectores $\bar{Y} \in \mathfrak{X}(G)$ que está $\mathcal{F}$-relacionado con Y es G-invariante. Esto será así porque si es Γ-invariante, es fácil probar que ha de ser $\overline{\Gamma}$-invariante, pues todo campo de vectores en G invariante por Γ se puede escribir como una combinación de campos de vectores G-invariantes donde los coeficientes son funciones invariantes por Γ.

Proposición 20.15. *Sea $\mathcal{F}$ una G-foliación de Lie de hojas densas. Para cualquier campo de vectores Y en M transverso a $\mathcal{F}$, dado el campo de vectores $\bar{Y}$ en G que está $\mathcal{F}$-relacionado con Y, se tiene que $\operatorname{div} \bar{Y}$ es una función constante en G. Exactamente:*

$$\operatorname{div} \bar{Y} = -\operatorname{traza} \operatorname{ad}(\bar{Y}).$$

Demostración. En la última parte de la demostración de la Proposición 20.6 queda claro que $\operatorname{div}(\bar{Y})$ es una función Γ-invariante, con lo que es constante en todo G ya que Γ es denso en G. Si calculamos el valor en $e \in G$ tendremos, por la Proposición 19.8, que

$$\operatorname{div} \bar{Y}(e) = -\sum_{i=1}^{n} \bar{g}([\bar{Y}, e_i], e_i)_e = -\sum_{i=1}^{n} \bar{g}(\operatorname{ad}(\bar{Y})(e), e_{ie}) = -\operatorname{traza} \operatorname{ad}(\bar{Y}). \quad \square$$

Corolario 20.16. *Sea $\mathcal{F}$ una G-foliación de Lie de hojas densas. Para cualquier campo de vectores Y en M transverso a $\mathcal{F}$ se tiene que $\operatorname{div} Y$ es una función constante. Exactamente, dado el campo de vectores $\bar{Y}$ en G que está $\mathcal{F}$-relacionado con Y,*

$$\operatorname{div} Y = -\operatorname{traza} \operatorname{ad}(\bar{Y}) - \kappa(Y).$$

Demostración. Inmediato por las Proposiciones 20.6 y 20.15. Nótese que $\kappa(Y)$ es una función constante pues, por ser κ básica, sabemos por la Proposición 19.20 que es constante a lo largo de las hojas densas de $\mathcal{F}$ y, por lo tanto, constante en todo M. $\square$

Corolario 20.17. *Sea $\mathcal{F}$ una G-foliación de Lie de hojas densas sobre una variedad compacta M. Para cualquier campo de vectores Y en M transverso a $\mathcal{F}$, dado el campo de vectores $\bar{Y}$ en G que está $\mathcal{F}$-relacionado con Y, se tiene que*

$$\kappa(Y) = -\operatorname{traza} \operatorname{ad}(\bar{Y}).$$

Demostración. Inmediato a partir del Corolario 20.16, si tenemos en cuenta que la divergencia, al ser constante, se anula, pues su integral en una variedad compacta es nula. $\square$

Proposición 20.18. *Sea $\mathcal{F}$ una G-foliación de Lie de hojas densas sobre una variedad compacta M. Se tiene que $\kappa = 0$ si y solamente si $\mathfrak{g}$ es unimodular.*

Demostración. Supongamos que $\kappa = 0$. Para probar que $\mathfrak{g}$ es unimodular hay que probar que $\operatorname{traza} \operatorname{ad}(\bar{Y}) = 0$ para todo $\bar{Y} \in \mathfrak{g} = \mathfrak{X}_G(G)$. Pero sabemos por la Proposición 20.1 que todo $\bar{Y} \in \mathfrak{X}_G(G)$ está $\mathcal{F}$-relacionado con un único $Y \in \mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$ y, por el Corolario 20.17, sabemos que $\operatorname{traza} \operatorname{ad}(\bar{Y}) = -\kappa(Y) = 0$.

Veamos el recíproco. Hay que demostrar que si $\mathfrak{g}$ es unimodular entonces $\kappa(X) = 0$ para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$. Bastará probarlo para los campos de vectores ortogonales pues, por definición, $\kappa(Z) = 0$ para todo Z campo de vectores tangente a $\mathcal{F}$. Como $\mathrm{traza}\,\mathrm{ad}(\bar{Y}) = 0$ para todo $\bar{Y} \in \mathfrak{X}_G(G)$, por el Corolario 20.17 sabemos ya que $\kappa(Y) = 0$ para cualquier $\in \mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$. Pero cualquier campo de vectores Y en M ortogonal a $\mathcal{F}$ se puede poner en función del paralelismo transverso $Y_1, \ldots, Y_n$ como

$$Y = \sum_{i=1}^{n} f_i Y_i.$$

Si Y es foliado las funciones f_i serán básicas. Pero, en cualquier caso:

$$\kappa(Y) = \sum_{i=1}^{n} \kappa(f_i Y_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i \kappa(Y_i) = 0,$$

pues $Y_i \in \mathfrak{X}(M/\mathcal{F})$ para todo $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Capítulo 21
Ejemplo de Carrière

En este capítulo utilizaremos un conocido ejemplo de Yves Carrière en [7] para visualizar en un caso concreto de foliación no minimalizable todas los resultados de los capítulos anteriores.

Sea $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ el grupo de matrices 2×2 con coeficientes enteros y determinante 1 y sea $A \in G$ una matriz tal que $\operatorname{traza} A > 2$.

Proposición 21.1. *La matriz A tiene dos autovalores distintos, λ y $1/\lambda$, ambos positivos.*

Demostración. Es fácil comprobar que

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{traza} A + 1.$$

Entonces,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\operatorname{traza} A \pm \sqrt{(\operatorname{traza} A)^2 - 4}}{2}.$$

Por tanto, como $\operatorname{traza} A > 2$ se tiene que $(\operatorname{traza} A)^2 - 4 > 0$ y la matriz A tiene dos autovalores distintos, λ y $1/\lambda$, pues el producto de ambos debe dar 1.

Que ambos autovalores son positivos es inmediato si tenemos en cuenta que $\operatorname{traza} A > \sqrt{(\operatorname{traza} A)^2 - 4}$. □

Proposición 21.2. *Los autovalores de A son irracionales.*

Demostración. Como $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ su traza será un número entero y, al ser $\operatorname{traza} A > 2$, es claro que $(\operatorname{traza} A)^2 - 4 \in \mathbb{N}$. Entonces, como es bien sabido, o bien $\sqrt{(\operatorname{traza} A)^2 - 4}$ es exacta, o bien es irracional. Para que fuera exacta tendría que existir un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\operatorname{traza} A)^2 - 4 = m^2,$$

lo que equivale a que

$$(\operatorname{traza} A - m)(\operatorname{traza} A + m) = 4,$$

ecuación que no tiene soluciones naturales con $\operatorname{traza} A \geq 3$. Así, que $\operatorname{traza} A > 2$ garantiza también que los autovalores sean irracionales. □

Consideremos ahora $v_1 = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $v_2 = (-b,a)$ autovectores asociados a λ y $1/\lambda$, respectivamente. Podemos suponer v_1 y v_2 unitarios, es decir, $a^2 + b^2 = 1$.

Proposición 21.3. *Se tiene que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.*

Demostración. Supongamos que $a = 0$. Se tendría entonces que

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'b \\ d'b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda b \end{bmatrix}.$$

De lo que se deduce que $d' = \lambda$, lo que no puede ser pues hemos demostrado que λ es irracional y $d' \in \mathbb{Z}$.

Que $b \neq 0$ se puede comprobar de una forma similar. □

Podemos definir una acción de $\mathbb{Z}^3$ sobre $\widehat{M} = \mathbb{R}^3$ haciendo actuar un elemento $(m, n, k) \in \mathbb{Z}^3$ sobre un elemento $(x, y, t) \in \widehat{M}$ de la forma

$$(m, n, k) \cdot (x, y, t) = (A^k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (m, n), t + k). \tag{21.0.1}$$

Llamaremos toro hiperbólico, T_A^3, al espacio cociente por esta acción. La acción es libre y propiamente discontinua, por lo que la proyección $p \colon \widehat{M} = \mathbb{R}^3 \to M = T_A^3$ es una cubierta regular.

Proposición 21.4. *Sea* $t \in \mathbb{R}$. *Entonces:*

$$A^t = \begin{bmatrix} a^2\lambda^t + b^2\lambda^{-t} & ab\lambda^t - ab\lambda^{-t} \\ ab\lambda^t - ab\lambda^{-t} & b^2\lambda^t + a^2\lambda^{-t} \end{bmatrix}.$$

Demostración. Si diagonalizamos la matriz, tenemos:

$$\begin{aligned} A^t &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^t & 0 \\ 0 & \lambda^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^t & 0 \\ 0 & \lambda^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a\lambda^t & -b\lambda^{-t} \\ b\lambda^t & a\lambda^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2\lambda^t + b^2\lambda^{-t} & ab\lambda^t - ab\lambda^{-t} \\ ab\lambda^t - ab\lambda^{-t} & b^2\lambda^t + a^2\lambda^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

21.1. Campos invariantes en $\mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$

Consideremos el grupo afín $\mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$, que es la componente conexa del neutro del grupo $\mathrm{GA}(\mathbb{R})$. Está formado por las traslaciones y homotecias en $\mathbb{R}$. Tomando el autovalor λ podemos representar matricialmente $\mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ de la siguiente forma:

$$\mathrm{GA}^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda^\alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Habitualmente, para simplificar notaciones, nos referiremos a los elementos de $\mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ como (α,β). De esta forma, el producto de dos elementos (α,β), $(u,v)\in \mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ vendrá dado por

$$(\alpha,\beta)\cdot(u,v)=\begin{bmatrix}\lambda^\alpha & \beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda^u & v\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^{\alpha+u} & \lambda^\alpha v+\beta\\ 0 & 1\end{bmatrix}=(\alpha+u,\lambda^\alpha v+\beta).$$

El elemento neutro de $\mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ será el $(0,0)$ y el inverso de un elemento $(\alpha,\beta)\in \mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ será $(-\alpha,-\lambda^{-\alpha}\beta)$.

Proposición 21.5. *Una base de los campos de vectores invariantes por la izquierda en* $\mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ *estará formada por los campos:*

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\\ e_2 &= \lambda^\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}. \end{aligned}$$

Demostración. Dado $g=(\alpha,\beta)\in \mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ tendremos la aplicación $L_g\colon \mathrm{GA}^+(\mathbb{R})\to \mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ dada por

$$L_g(u,v)=(\alpha+u,\lambda^\alpha v+\beta).$$

Para calcular una base de los campos de vectores invariantes por la izquierda en $\mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ partiremos de dos vectores en el neutro: $(e_1)_e=(1,0)$ y $(e_2)_e=(0,1)$ y construiremos dos campos de vectores invariantes e_1 y e_2 haciendo:

$$\begin{aligned} (e_1)_g &= (L_{g*})_e(e_1)_e,\ \text{y}\\ (e_2)_g &= (L_{g*})_e(e_2)_e. \end{aligned}$$

Entonces, como se tiene que

$$(L_{g*})_e=\begin{bmatrix}\partial L_g^1/\partial u & \partial L_g^1/\partial v\\ \partial L_g^2/\partial u & \partial L_g^2/\partial v\end{bmatrix}_e=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^\alpha\end{bmatrix}$$

tendremos que:

$$(e_1)_g=(L_{g*})_e(e_1)_e=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}_g$$

y que

$$(e_2)_g=(L_{g*})_e(e_2)_e=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda^\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \lambda^\alpha\end{bmatrix}_g. \quad \square$$

Proposición 21.6. *Se cumple que* $[e_1,e_2]=\ln\lambda\cdot e_2$.

Demostración.

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}, \lambda^\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}\right] = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\lambda^\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}\right) - \lambda^\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$$
$$= \ln\lambda\cdot\lambda^\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \lambda^\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right) - \lambda^\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$$
$$= \ln\lambda\cdot\lambda^\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}. \qquad \square$$

Corolario 21.7. *Se tiene que* $\operatorname{traza}\operatorname{ad}(e_1) = \ln\lambda$*, con lo que el grupo de Lie* $GA^+(\mathbb{R})$ *no será unimodular.*

Demostración.

$$\operatorname{traza}\operatorname{ad}(e_1) = g([e_1, e_1], e_1) + g([e_1, e_2], e_2) = 0 + \ln\lambda. \quad \square$$

Por otra parte, dado $g = (\alpha, \beta) \in GA^+(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\mathrm{I}_g(s,t) = (s, -\lambda^s\beta + \lambda^\alpha t + \beta),$$

con lo que la representación adjunta en $GA^+(\mathbb{R})$ viene dada por:

$$\operatorname{Ad}(g) = I_{g*e} = \begin{bmatrix} 1 & -\ln\lambda\beta \\ 0 & \lambda^\alpha \end{bmatrix}.$$

Así, tendremos:

Proposición 21.8. *La función modular en* $GA^+(\mathbb{R})$ *viene dada por*

$$m(\lambda^\alpha, \beta) = \lambda^\alpha.$$

21.2. Descripción de la foliación

Dados los autovalores λ y $1/\lambda$ de A , y sus autovectores asociados $v_1 = (a, b)$ y $v_2 = (-b, a)$, la submersión $\hat{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ dada por

$$\hat{f}(x,y,t) = \begin{bmatrix} \lambda^t & ax+by \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (t, ax+by)$$

inducirá en $\mathbb{R}^3$ una foliación simple donde las hojas (las fibras de $\hat{f}$) serán rectas, es decir, el flujo generado por $(v_2, 0) = (-b, a, 0)$.

Lema 21.9. *La submersión* $\hat{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ *es equivariante.*

Demostración. Probaremos que, dado $(m,n,k)\in\mathbb{Z}^3$, se cumple que

$$\hat{f}((m,n,k)\cdot(x,y,t)) = h(m,n,k)\cdot\hat{f}(x,y,t),$$

donde $h(m,n,k)=(\lambda^k, am+bn)\in \mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$, con $m,n,k\in\mathbb{Z}$ definirá la aplicación de holonomía de la foliación $h\colon \pi_1(T_A^3)\cong\mathbb{Z}^3\to\mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$. Bastará probarlo para los generadores:

$$\begin{aligned}
\hat{f}((1,0,0)\cdot(x,y,t)) &= \hat{f}((x,y)+(1,0),t+0)\\
&= \hat{f}(x+1,y,t)\\
&= (t, ax+by+a)\\
&= (1,a)\cdot(t,ax+by)\\
&= h(1,0,0)\cdot\hat{f}(x,y,t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}((0,1,0)\cdot(x,y,t)) &= \hat{f}((x,y)+(0,1),t+0)\\
&= \hat{f}(x,y+1,t)\\
&= (t, ax+by+b)\\
&= (1,b)\cdot(t,ax+by)\\
&= h(0,1,0)\cdot\hat{f}(x,y,t).
\end{aligned}$$

Para el último generador tendremos:

$$\hat{f}((0,0,1)\cdot(x,y,t)) = \hat{f}(A(x,y)+(0,0),t+1),$$

y como

$$\begin{aligned}
A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}a^2\lambda+b^2\lambda^{-1} & ab\lambda-ab\lambda^{-1}\\ ab\lambda-ab\lambda^{-1} & b^2\lambda+a^2\lambda^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}x(a^2\lambda+b^2\lambda^{-1})+y(ab\lambda-ab\lambda^{-1})\\ x(ab\lambda-ab\lambda^{-1})+y(b^2\lambda+a^2\lambda^{-1})\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&\hat{f}((0,0,1)\cdot(x,y,t))\\
&= (t+1, ax(a^2\lambda+b^2\lambda^{-1})+ay(ab\lambda-ab\lambda^{-1})\\
&+ bx(ab\lambda-ab\lambda^{-1})+by(b^2\lambda+a^2\lambda^{-1}))\\
&= (t+1, x(a^3\lambda+ab^2\lambda^{-1}+ab^2\lambda-ab^2\lambda^{-1})\\
&+ y(a^2b\lambda-a^2b\lambda^{-1}+b^3\lambda+a^2b\lambda^{-1}))\\
&= (t+1, ax\lambda(a^2+b^2)+by\lambda(a^2+b^2))\\
&= (t+1, \lambda(ax+by))\\
&= (1,0)\cdot(t,ax+by)\\
&= h(0,0,1)\cdot\hat{f}(x,y,t).
\end{aligned}$$

□

Lema 21.10. *El flujo en $\mathbb{R}^3$ dado por las fibras de $\hat{f}$ se proyectará por la cubierta $p\colon \widehat{M} \to T^3_A$ a una foliación en T^3_A donde las hojas no serán cerradas por ser λ irracional.*

Demostración. Es inmediato calcular que, dado $(\alpha,\beta) \in \mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$, la ecuación de $\hat{f}^{-1}(\alpha,\beta)$ es

$$\begin{cases} t = \alpha \\ ax + by = \beta \end{cases} \tag{21.2.1}$$

En primer lugar, hay que probar que la acción dada por la ecuación (21.0.1) lleva fibras en fibras. Pero, por las fórmulas obtenidas en el Lema 21.9, sabemos que, dado cualquier $(x,y,z) \in \hat{f}^{-1}(\alpha,\beta)$,

$$\begin{aligned} \hat{f}((1,0,0)\cdot(x,y,t)) &= (1,a)\cdot \hat{f}(x,y,t) \\ &= (1,a)\cdot(\alpha,\beta) \\ &= (\alpha+1, \lambda\beta + a). \end{aligned}$$

Análogamente, obtendremos que

$$\begin{aligned} \hat{f}((0,1,0)\cdot(x,y,t)) &= (\alpha+1, \lambda\beta + b), \\ \hat{f}((0,0,1)\cdot(x,y,t)) &= (\alpha+1, \lambda\beta). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\hat{f}((1,0,0)\cdot \hat{f}^{-1}(\alpha,\beta) = \hat{f}^{-1}(\alpha+1, \lambda\beta + a), \tag{21.2.2}$$

$$\hat{f}((0,1,0)\cdot \hat{f}^{-1}(\alpha,\beta) = \hat{f}^{-1}(\alpha+1, \lambda\beta + b), \tag{21.2.3}$$

$$\hat{f}((0,0,1)\cdot \hat{f}^{-1}(\alpha,\beta) = \hat{f}^{-1}(\alpha+1, \lambda\beta). \tag{21.2.4}$$

Únicamente resta, entonces, comprobar que de la proyección de estas rectas a T^3_A se obtiene una hoja no cerrada. De la ecuación (21.2.1) se deduce inmediatamente que las fibras se proyectan por p a un toro bidimensional, con lo que, para demostrar que las hojas no son cerradas, basta comprobar que $-\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$. Lo demostraremos por reducción al absurdo:

Supongamos que $-\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Esto es, existen $m,n \in \mathbb{Z}$ tales que $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$ y el vector (n,m) es un autovector de A tal que

$$A \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix},$$

lo que significaría, por ejemplo, que $a'n + b'm = \lambda n$, lo que no puede ser, pues $a', b', n, m \in \mathbb{Z}$ y λ irracional. □

De esta forma, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathrm{GA}^+(\mathbb{R}) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ T^3_A & & \end{array}$$

dotará a la foliación de estructura de foliación de Lie modelando sobre $\mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ y con holonomía $h\colon \mathbb{Z}^3 \to \mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ dada por $h(m,n,k) = (k, am+bn)$. El grupo de holonomía será $\Gamma = \operatorname{im} h \in \mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ y su clausura será el grupo de matrices

$$\overline{\Gamma} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda^k & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

21.3. Construcción del Paralelismo

Tenemos que la submersión $\hat{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$ viene dada por

$$\hat{f}(x,y,t) = \begin{bmatrix} \lambda^t & ax+by \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (t, ax+by).$$

Dado $p = (x,y,t) \in \mathbb{R}^3$ tendremos la diferencial $f_{*p}\colon T_p\mathbb{R}^3 \to T_{f(p)}GA^+$, que podemos expresar matricialmente como

$$f_{*p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \end{bmatrix}.$$

Así, para un campo de vectores X en $\mathbb{R}^3$,

$$X = u(\partial/\partial x) + v(\partial/\partial y) + w(\partial/\partial t),$$

tendremos que

$$\begin{aligned} f_{*p}X_p &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_p \\ &= w(p)(\partial/\partial\alpha)_{f(p)} + (au(p)+bv(p))(\partial/\partial\beta)_{f(p)}, \end{aligned}$$

donde α y β son las coordenadas canónicas en $\mathrm{GA}^+(\mathbb{R})$.

Los campos de vectores tangentes serán de la forma

$$Z = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y},$$

con $au+bv=0$. Es decir, $Z = -(u/b)Z_0$, donde

$$Z_0 = -b\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}$$

es el campo asociado al autovector v_2, que define las fibras de la submersión.

Para obtener un paralelismo transverso, calcularemos qué campos de vectores en $\mathbb{R}^3$ se proyectan por $\hat{f}_*$ a los campos de la base de los campos invariantes en GA^+. Por un lado, para e_1 tendremos

$$w(p)(\partial/\partial\alpha)_{f(p)} + (au(p)+bv(p))(\partial/\partial\beta)_{f(p)} = (e_1)_{f(p)} = (\partial/\partial\alpha)_{f(p)},$$

con lo que ha de cumplirse que $w = 1$ y que $au + bv = 0$. Por tanto, los campos de vectores que se proyectan en e_1 serán de la forma $X = Z + \partial/\partial t$, con Z tangente. De estos, el único campo ortogonal a los tangentes será $Y_1 = \partial/\partial t$.

Análogamente, para calcular los campos que se proyectan a e_2 tendremos que

$$w(\partial/\partial\alpha)_{f(p)} + (au + bv)(\partial/\partial\beta)_{f(p)} = (e_2)_{f(p)} = \lambda^t(\partial/\partial\beta)_{f(p)},$$

para lo que debe cumplirse que $w = 0$ y que $au+bv = \lambda^t$. Por tanto, los campos que se proyectan en e_2 serán de la forma

$$Y = u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\lambda^t - au}{b}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Para que sea perpendicular a Z_0 tiene que cumplirse

$$-bu + a \cdot \frac{\lambda^t - au}{b} = 0,$$

de donde

$$u = a\lambda^t,$$

ya que suponemos $a^2 + b^2 = 1$. Haciendo uso nuevamente de esta igualdad podemos tomar como ortogonal a los tangentes el campo

$$Y_2 = \lambda^t\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Por tanto, como paralelismo transverso a la foliación levantada $\widetilde{\mathcal{F}}$ podemos tomar los campos

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ Y_2 &= \lambda^t\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

21.4. Referencia local ortonormal

Como tanto Y_1 como Y_2 vienen de campos invariantes en GA^+ está garantizado que son invariantes por la cubierta, y por lo tanto bajan a T_A^3 a campos de vectores que forman un paralelismo transverso para $\mathcal{F}$. Sin embargo, el campo asociado a v_2,

$$Z_0 = -b\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y},$$

que podríamos tomar como generador de los campos tangentes, no es invariante. Tomemos entonces un campo tangente $Z = fZ_0$ y veamos qué condiciones tiene que cumplir $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ para que Z sea invariante por la cubierta:

Para que Z sea invariante tiene que cumplirse que

$$\gamma_{*p} Z_p = Z_{\gamma p},$$

con $\gamma = (m, n, k) \in \mathrm{Aut}(p)$ y $p = (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$. Como las coordenadas de Z_0 no dependen de p, podemos escribir:

$$\gamma_{*p} Z_0 = \begin{bmatrix} A^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{-k} v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda^{-k} Z_0.$$

Por tanto, tiene que cumplirse que

$$\gamma_{*p}(f(p)Z_0) = f(p)\lambda^{-k} Z_0 = (f(\gamma p))Z_0.$$

Es decir, f tiene que cumplir que

$$f(A^k(x, y) + (m, n), t + k) = \lambda^{-k} f(x, y, t),$$

con lo que podemos tomar $f(x, y, t) = \lambda^{-t}$, y así el campo de vectores

$$Z = -b\lambda^{-t} \frac{\partial}{\partial x} + a\lambda^{-t} \frac{\partial}{\partial y}$$

es un generador de los campos de vectores tangentes a $\widetilde{\mathcal{F}}$ que además es invariante por la cubierta, con lo que baja por p a un campo de vectores tangente a $\mathcal{F}$.

Considerando en GA^+ la métrica invariante que hace que los campos e_1 y e_2 sean ortonormales y levantándola por $\hat{f}$ se puede construir en $\mathbb{R}^3$ una métrica para la que estos tres campos serán ortonormales, con lo que la tripla $\{Z, Y_1, Y_2\}$ formará una referencia local ortonormal compatible con $\widetilde{\mathcal{F}}$ que se proyectará por p a una referencia local ortonormal en T_A^3 compatible con $\mathcal{F}$.

21.5. Cálculo de la forma de curvatura media

Partiremos de la referencia local ortonormal en $\mathbb{R}^3$ compatible para $\widetilde{\mathcal{F}}$ formada por los vectores

$$\begin{aligned} Z &= -b\lambda^{-t} \frac{\partial}{\partial x} + a\lambda^{-t} \frac{\partial}{\partial y} \\ Y_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ Y_2 &= \lambda^t \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Como los tres campos son invariantes por la cubierta bastará calcular la forma de curvatura media para $\widetilde{\mathcal{F}}$ en $\mathbb{R}^3$, pues los tres campos bajan a campos ortonormales en T_A^3 para los que los cálculos serán similares. Para simplificar la lectura, nos referiremos a esta forma de curvatura directamente como κ.

Como Z es tangente sabemos que, por definición, $\kappa(Z) = 0$. Para calcular $\kappa(Y_1)$ y $\kappa(Y_2)$ deberemos calcular los productos corchetes:

Proposición 21.11. *Se tiene que*

$$\begin{aligned}[Z,Y_1]&=\ln\lambda\cdot Z\\ [Z,Y_2]&=0\\ [Y_1,Y_2]&=\ln\lambda\cdot Y_2.\end{aligned}$$

Demostración. Comprobemos que $[Z,Y_1]=\ln\lambda\cdot Z$:

$$\begin{aligned}[Z,Y_1]&=\left[-b\lambda^{-t}\frac{\partial}{\partial x}+a\lambda^{-t}\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t}\right]\\ &=-b\left[\lambda^{-t}\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right]+a\left[\lambda^{t}\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t}\right].\end{aligned}$$

Y como

$$\begin{aligned}\left[\lambda^{-t}\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right]&=-\left[\frac{\partial}{\partial t},\lambda^{-t}\frac{\partial}{\partial x}\right]\\ &=\frac{\partial\lambda^{-t}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\\ &=\lambda^{-t}\ln\lambda\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned}$$

y, de la misma forma

$$\left[\lambda^{-t}\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial t}\right]=\lambda^{-t}\ln\lambda\frac{\partial}{\partial y},$$

llegamos a que

$$[Z,Y_1]=-b\lambda^{-t}\ln\lambda\frac{\partial}{\partial x}+a\lambda^{-t}\ln\lambda\frac{\partial}{\partial y}=\ln\lambda\cdot Z.$$

Que $[Z,Y_2]=0$ es inmediato. Que $[Y_1,Y_2]=\ln\lambda\cdot Y_2$ se deduce directamente de la Proposición 20.1 y la Proposición 21.6. □

Proposición 21.12. *Se tiene que*

$$\begin{aligned}\kappa(Y_1)&=-\ln\lambda,\\ \kappa(Y_2)&=0.\end{aligned}$$

Demostración. Por la Proposición 19.25 sabemos que

$$\begin{aligned}\kappa^\sharp=\mathcal{H}\nabla_Z Z&=g(\nabla_Z Z,Y_1)\cdot Y_1+g(\nabla_Z Z,Y_2)\cdot Y_2\\ &=g([Y_1,Z],Z)\cdot Y_1+g([Y_2,Z],Y_2)\cdot Y_2\\ &=-\ln\lambda\cdot Y_1.\end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}\kappa(Y_1)&=g(-\ln\lambda\cdot Y_1,Y_1)=-\ln\lambda\\ \kappa(Y_2)&=g(-\ln\lambda\cdot Y_1,Y_2)=0.\end{aligned}$$

□

Corolario 21.13. *La foliación $\mathcal{F}$ no es minimalizable.*

Proposición 21.14. *Los campos de vectores Z, Y_1 e Y_2 tienen divergencia nula.*

Demostración. Calculemos directamente la divergencia en el tangente:

$$\operatorname{div} Z = -(g([Z,Z],Z) + g([Z,Y_1],Y_1) + g([X,Y_2],Y_2)) = 0.$$

Para calcular la divergencia de los campos del paralelismo podemos usar la Proposición 20.9:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} Y_1 &= -\operatorname{traza}\operatorname{ad}(e_1) - \kappa(Y_1) = \\ &= -\ln\lambda + \ln\lambda = 0, \\ \operatorname{div} Y_2 &= -\operatorname{traza}\operatorname{ad}(e_2) - \kappa(Y_2) = 0.\end{aligned}$$ □

Proposición 21.15. *La variedad T^3_A fibra sobre $\mathbb{S}^1$.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es una foliación no unimodular sobre una variedad compacta, podemos aplicar el Teorema 17.33 y, más concretamente, la Proposición 17.29, para afirmar que la aplicación

$$(\ln m \circ \hat{f})(x,y,t) = \ln\lambda \cdot t$$

define una $\mathbb{R}$-foliación de Lie sobre T^3_A. □

Conclusiones y problemas abiertos

El problema de caracterizar cohomológicamente la minimalidad de una foliación ha sido uno de los más importantes desafíos en la teoría geométrica de foliaciones desde los años 80 del siglo pasado. Las foliaciones transversalmente homogéneas son una clase importante de foliaciones en ese sentido porque, además de tener una estructura bien conocida que permite dar ejemplos interesantes, las condiciones cohomológicas pueden traducirse en propiedades de la estructura transversa, en este caso un objeto geométricamente interesante como son los espacios homogéneos.

En esta tesis hemos resuelto este tipo de problemas exigiendo como hipótesis la compacidad de la isotropía de la acción sobre la variedad homogénea, limitando además la complejidad de la submersión que define la foliación. Un estudio más general requeriría continuar la línea abierta en el Capítulo 18, donde analizamos el complejo de formas invariantes, cuya dificultad es considerablemente mayor, pero que parece abordable en un futuro.

Los resultados obtenidos permiten también, bajo las mismas hipótesis, señalar la existencia de una fibración sobre $\mathbb{S}^1$ como condición necesaria para la no unimodularidad o, de manera equivalente, asegurar la unimodularidad en los casos en donde esas fibraciones no sean posibles.

Otro problema interesante es profundizar en nuestro estudio sobre la forma de Álvarez y su descripción en términos únicamente dependientes de la función modular del grupo de Lie transverso. En esta tesis sólo hemos dado resultados parciales, concretando únicamente el caso de las foliaciones de Lie con hojas densas. No obstante, parece un camino viable combinar nuestros resultados con los que Slesar enuncia en [42] para ampliar nuestro estudio a estructuras más complejas.

Finalmente, nuestras construcciones permiten hacer cálculos explícitos, que podrían facilitar el análisis detallado de otros ejemplos, además de los que ya incluimos en esta tesis.

Bibliografía

[1] J. A. Álvarez López. The basic component of the mean curvature of Riemannian foliations. *Ann. Global Anal. Geom.*, 10(2):179–194, 1992.

[2] R. A. Blumenthal. Transversely homogeneous foliations. *Ann. Inst. Fourier*, 29(4):143–158, 1979.

[3] R. Bott and S. Gitler. *Lectures on Algebraic and Differential Topology: Delivered at the 2. ELAM*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[4] G. E. Bredon. *Topology and geometry.*, volume 139. New York: Springer-Verlag, 1993.

[5] A. Candel and L. Conlon. *Foliations I*, volume 23. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000.

[6] A. Candel and L. Conlon. *Foliations II.*, volume 60. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2003.

[7] Y. Carrière. Flots riemanniens. In *Structure transverse des feuilletages, Toulouse, 17-19 février 1982*. 1984.

[8] S. Deng. *Homogeneous Finsler spaces.* Berlin: Springer, 2012.

[9] D. Domínguez. Finiteness and tenseness theorems for Riemannian foliations. *Am. J. Math.*, 120(6):1237–1276, 1998.

[10] A. El Kacimi-Alaoui and G. Hector. Décomposition de Hodge basique pour les feuilletages riemanniens. *Ann. Inst. Fourier*, 36(3):207–227, 1986.

[11] A. El Kacimi-Alaoui and M. Nicolau. Structures géométriques invariantes et feuilletages de Lie. (Invariant geometric structures and Lie foliations). *Indag. Math., New Ser.*, 1(3):323–333, 1990.

[12] A. El Kacimi Alaoui, V. Sergiescu, and G. Hector. La cohomologie basique dún feuilletage riemannien est de dimension finie. *Math. Z.*, 188:593–599, 1985.

[13] J. Faraut. *Analysis on Lie groups. An introduction. Transl. from the French.*, volume 110. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

[14] E. Fedida. Sur les feuilletages de Lie. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A*, 272:999–1001, 1971.

[15] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Berlin: Springer, 2004.

[16] R. Godement. *Introduction to the theory of Lie groups. Translated from the French by Urmie Ray.* Cham: Springer, 2017.

[17] V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik, and E. B. Vinberg, editors. *Foundations of Lie theory and Lie transformation groups. Transl. from the Russian by A. Kozlowski. 2nd printing of the 1st ed. 1993.* Berlin: Springer, 2nd printing of the 1st ed. 1993 edition, 1997.

[18] W. Greub, S. Halperin, and R. Vanstone. *Connections, Curvature, and Cohomology. Vol. Iii: Cohomology of Principal Bundles and Homogeneous Spaces*. Academic Press, 1976.

[19] M. Hazewinkel. A duality theorem for the cohomology of Lie algebras. *Math. USSR, Sb.*, 12:638–644, 1971.

[20] D. A. Hejhal, J. Friedman, M. C. Gutzwiller, and A. M. Odlyzko, editors. *Emerging applications of number theory. Based on the proceedings of the IMA summer program, Minneapolis, MN, USA, July 15–26, 1996.*, volume 109. New York, NY: Springer, 1999.

[21] S. Helgason. *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Pure and applied mathematics. Acad. Press, 1962.

[22] R. Hermann. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle. *Proc. Am. Math. Soc.*, 11:236–242, 1960.

[23] L. Ji. Introduction to symmetric spaces and their compactifications. In *Lie theory. Unitary representations and compactifications of symmetric spaces*, pages 1–67. Basel: Birkhäuser, 2005.

[24] A. W. Knapp. *Lie groups, Lie algebras, and cohomology.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1988.

[25] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Number v. 1 in Foundations of Differential Geometry [by] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. Interscience Publishers, 1963.

[26] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*. Number v. 2 in Interscience tracts in pure and applied mathematics. John Wiley & Sons, 1969.

[27] S. G. Krantz and H. R. Parks. *A primer of real analytic functions. 2nd ed.* Boston, MA: Birkhäuser, 2nd ed. edition, 2002.

[28] M. Llabrés and A. Reventós. Unimodular Lie foliations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. (5)*, 9(2):243–255, 1988.

[29] E. Macías-Virgós and P. L. Martín-Méndez. Non-unimodular transversely homogeneous foliations. *Annales de l'Institut Fourier*, 71(2):849–887, 2021.

[30] E. Macias-Virgós and P. Martín-Méndez. Non-unimodular Lie foliations. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 340(5):359–362, 2005.

[31] A. Marden. *Hyperbolic Manifolds*. Cambridge University Press, 2016.

[32] J. Margalef-Roig and E. Dominguez. *Differential Topology*. ISSN. Elsevier Science, 1992.

[33] P. Martín Méndez. *Subgrupos normalizadores en las foliaciones de Lie*, volume 85 of *Publ. Dep. Geom. Topología, Univ. Santiago Compostela*. Santiago de Compostela: Universidade de Santiago de Compostela, 1997.

[34] X. Masa. Cohomology of Lie foliations. Differential geometry, Proc. 5th Int. Colloq., Santiago de Compostela/Spain 1984, Res. Notes Math. 131, 211-214 (1985)., 1985.

[35] X. Masa. Duality and minimality in riemannian foliations. *Commentarii mathematici Helvetici*, 67(1):17–27, 1992.

[36] P. Molino. *Riemannian foliations. With appendices by G. Cairns, Y. Carrière, E. Ghys, E. Salem, V. Sergiescu. Transl. from the French by Grant Cairns.*, volume 73. Boston, MA etc.: Birkhäuser Verlag, transl. from the french by grant cairns edition, 1988.

[37] H. Nozawa and J. I. R. Prieto. Flots riemanniens étirés. *Ann. Inst. Fourier*, 64(4):1419–1439, 2014.

[38] B. O'Neill. The fundamental equations of a submersion. *Mich. Math. J.*, 13:459–469, 1966.

[39] P. Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171. Cham: Springer, 2016.

[40] L. A. Santaló. *Integral geometry and geometric probability.*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[41] W. Scott. *Group Theory*. Prentice-Hall, 1964.

[42] V. Slesar. A note on transverse divergence and taut Riemannian foliations. *J. Geom. Phys.*, 96:204–211, 2015.

[43] E. H. Spanier. *Algebraic topology.* Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[44] M. Spivak. *Calculus On Manifolds: A Modern Approach To Classical Theorems Of Advanced Calculus*. Avalon Publishing, 1965.

[45] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, 1970.

[46] J. Stillwell. *Naive Lie theory.* New York, NY: Springer, 2008.

[47] C. Taubes. *Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. OUP Oxford, 2011.

[48] D. Tischler. On fibering certain foliated manifolds over S^1. *Topology*, 9:153–154, 1970.

[49] L. W. Tu. *An introduction to manifolds*. Universitext. New York, NY: Springer, 2008.

[50] F. W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Glenview, Illinois-London: Scott, Foresman & Comp., 1971.