

DIEGO GONZÁLEZ DEL RÍO

# EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

**160<sup>a</sup>  
2025**

**Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología**

---

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

DIEGO GONZÁLEZ DEL RÍO

# EL PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

**160<sup>a</sup>**  
**2025**

**Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología**

---

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2025



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

# El problema isoperimétrico

Diego González del Río

Julio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>6</b>
<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Preliminares y motivación</b>	<b>13</b>
1.1. Geometría de hipersuperficies . . . . .	14
1.2. Área, volumen y regiones isoperimétricas . . . . .	17
1.3. Generalidades sobre el problema isoperimétrico . . . . .	18
<b>2. El problema isoperimétrico en el espacio euclídeo</b>	<b>23</b>
2.1. Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	24
2.2. El Teorema de Alexandrov en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	27
2.2.1. Curvatura media de un grafo y resultados de EDPs elípticas . . . . .	28
2.2.2. El teorema de Alexandrov . . . . .	33
2.3. Fórmulas y propiedades variacionales . . . . .	36
2.3.1. Fórmula de la primera variación . . . . .	37
2.3.2. Variaciones que conservan el volumen . . . . .	43
2.3.3. El problema isoperimétrico en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	50
<b>3. La constante isoperimétrica de Cheeger</b>	<b>51</b>
3.1. Preliminares sobre grupos de Lie . . . . .	53
3.2. Resultados relevantes sobre grupos de Lie . . . . .	55
3.3. La constante isoperimétrica de Cheeger de una variedad riemanniana . . . . .	60
3.4. Cheeger en grupos de Lie resolubles y simplemente conexos . . . . .	64
3.5. Un ejemplo importante: espacios simétricos . . . . .	72
3.5.1. Tipos de espacios simétricos . . . . .	75
3.5.2. Espacios simétricos de tipo no compacto: espacios de raíz y descomposición de Iwasawa . . . . .	76
3.5.3. Cheeger en un espacio simétrico de tipo no compacto . . . . .	79
<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>



## Resumen

El presente trabajo aborda el estudio del problema isoperimétrico desde sus raíces más clásicas hasta su formulación en contextos geométricos más avanzados. Dicho problema aspira a comprender qué regiones de un espacio ambiente dado minimizan el área de su frontera bajo una restricción de volumen fijo. En su formulación clásica en el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$ , se demuestra rigurosamente que entre todas las curvas de Jordan la que encierra mayor área es la circunferencia, hecho que se formaliza mediante la desigualdad isoperimétrica en el plano. Además, se generaliza el problema isoperimétrico a dimensión superior, mostrando que en  $\mathbb{R}^n$  la esfera es la única hipersuperficie compacta y conexa que minimiza el área para un volumen fijado. Esto se llevará a cabo probando el teorema de Alexandrov y las propiedades variacionales de las hipersuperficies de curvatura media constante.

Este trabajo extiende el análisis del problema isoperimétrico al marco de las variedades riemannianas, donde la resolución del problema isoperimétrico resulta ser de gran dificultad. En este contexto, se introduce la constante isoperimétrica de Cheeger, definida como el ínfimo de los cocientes entre área de frontera y volumen de dominios regulares. Esta constante posee además propiedades analíticas profundas, ya que proporciona una cota inferior para el primer autovalor del operador de Laplace-Beltrami con condiciones de Dirichlet. Además, el presente trabajo estudia en detalle el cálculo explícito de la constante isoperimétrica de Cheeger en cierta familia de espacios geométricos de gran importancia, como es el caso de los grupos de Lie resolubles y simplemente conexos con métrica invariante a la izquierda, donde dicha constante puede expresarse en términos de la traza de la representación adjunta del álgebra de Lie.

Finalmente, se analiza un caso particularmente interesante: los espacios simétricos de tipo no compacto. Cada uno de estos espacios resulta ser isométrico a un grupo de Lie resoluble y simplemente conexo con métrica invariante a la izquierda, permitiendo calcular en ellos la constante de Cheeger mediante herramientas estructurales como la descomposición en espacios de raíces y la descomposición de Iwasawa. Además, se explicitará el cálculo de la constante de Cheeger en el caso concreto de los espacios hiperbólicos real y complejo.



## Abstract

The present work addresses the study of the isoperimetric problem, tracing its development from its most classical roots to its formulation in more advanced geometric contexts. This problem seeks to understand which regions within a given ambient space minimize the area of their boundary under a fixed volume constraint. In its classical formulation in the Euclidean plane  $\mathbb{R}^2$ , it is rigorously shown that among all Jordan curves, the one that encloses the greatest area is the circle—a fact formalized through the isoperimetric inequality in the plane. Moreover, the isoperimetric problem is generalized to higher dimensions, showing that in  $\mathbb{R}^n$ , the sphere is the unique compact and connected hypersurface that minimizes surface area for a given volume. This will be demonstrated by proving Alexandrov’s theorem and exploring the variational properties of hypersurfaces with constant mean curvature.

This work further extends the study of the isoperimetric problem to the setting of Riemannian manifolds, where solving the isoperimetric problem proves to be significantly more challenging. In this context, the Cheeger isoperimetric constant is introduced, defined as the infimum of the ratios between boundary area and volume of regular domains. This constant also possesses deep analytical properties, as it provides a lower bound for the first eigenvalue of the Laplace–Beltrami operator with Dirichlet boundary conditions. Furthermore, the present work provides a detailed study of the explicit computation of the Cheeger isoperimetric constant in a certain family of geometrically significant spaces, such as solvable, simply connected Lie groups equipped with a left-invariant metric, where the constant can be expressed in terms of the trace of the adjoint representation of the Lie algebra.

Finally, a particularly interesting case is analyzed: symmetric spaces of non-compact type. Each of these spaces turns out to be isometric to a solvable, simply connected Lie group endowed with a left-invariant metric, allowing for the computation of the Cheeger constant using structural tools such as the root space decomposition and the Iwasawa decomposition. Additionally, the explicit calculation of the Cheeger constant is presented for the specific cases of real and complex hyperbolic spaces.

# Introducción

El problema isoperimétrico es uno de los más antiguos y fundamentales en la historia de las matemáticas, con raíces que se remontan a la antigüedad. En un principio, se pretendía averiguar cuál de entre todas las figuras planas de un perímetro dado encerraba la mayor cantidad de área. La respuesta, intuitivamente evidente, es el círculo. Sin embargo, la demostración rigurosa de este hecho ha sido objeto de estudio a través de los siglos, involucrando a matemáticos como Jakob Steiner o Leonhard Euler entre otros [23], [54]. El caso del plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  se corresponde con el problema isoperimétrico clásico y su demostración se atribuye al matemático Erhard Schmidt (1939), véanse [14, Section 3], [48]. Para abordar este resultado es necesario conocer la noción de curva cerrada, diferenciable y simple del plano euclídeo, lo que se conoce como curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ . De esta forma, este teorema nos dice que para toda curva de Jordan en el plano, de longitud  $l$ , se verifica que  $l^2 \geq 4\pi A$ , siendo  $A$  el área encerrada por dicha curva, pues sabemos, precisamente por el teorema de la curva de Jordan, que en el plano  $\mathbb{R}^2$  cada curva de Jordan divide al plano en dos componentes conexas, una de ellas interior y la otra exterior a la curva. Por otro lado, la igualdad en este resultado se da si y solo si la curva que consideramos es una circunferencia. Daremos una demostración de este resultado en la Sección 2.1 del presente trabajo.

El desarrollo del *cálculo de variaciones* y la *geometría diferencial* a lo largo de la historia ha permitido que el problema isoperimétrico se generalice a dimensión superior y a espacios más complejos y generales como las variedades riemannianas. En este contexto, se busca determinar entre todas las regiones de una variedad con un volumen fijo, aquellas cuyas fronteras tienen el área mínima. Este estudio ha revelado profundas conexiones entre la geometría, el análisis y la topología de los espacios considerados. En el caso del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , el problema isoperimétrico tiene una respuesta bastante intuitiva, pues se sabe que las hipersuperficies conexas y compactas que minimizan su área para un volumen encerrado fijo son las esferas. Para probar este hecho en  $\mathbb{R}^n$  se puede apelar al teorema de Alexandrov, que nos dice que las hipersuperficies embebidas, conexas, compactas y de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^n$  son precisamente las esferas. Ahora bien, en un contexto más general, como es el de las variedades riemannianas, podemos centrarnos en las hipersuperficies compactas, conexas y embebidas de una tal variedad que dividan a la variedad ambiente en dos regiones conexas, al menos una de ellas acotada, cuyo volumen llamamos volumen encerrado. Como comentaremos en las sucesivas secciones del presente trabajo, estas hipótesis sobre hipersuperficies pueden cambiar dependiendo del contexto y

la naturaleza del problema. En este caso, podemos poner el foco en las variaciones, que consisten en perturbaciones realizadas a nuestra hipersuperficie a lo largo de la dirección de un campo diferenciable y, en concreto, en las que preservan el volumen, es decir, aquellas variaciones cuyas hipersuperficies encierran un volumen constante. La utilidad de esto consiste en que las hipersuperficies de curvatura media constante se pueden caracterizar como los puntos críticos de la función área, para cualquier variación que preserve el volumen. Combinando este hecho con el teorema de Alexandrov, se puede dar respuesta al problema isoperimétrico clásico en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Es decir, obtendremos que, para un volumen dado, la hipersuperficie compacta y conexa que tiene menor área encerrando dicho volumen es la  $(n - 1)$ -esfera. La discusión y demostración de estos resultados son el objeto del Capítulo 2.

Siguiendo esta línea y, de forma análoga a como ocurría en  $\mathbb{R}^2$ , se puede considerar la desigualdad isoperimétrica generalizada en  $\mathbb{R}^n$ . De esta forma, si consideramos una región  $\Omega$  del espacio  $\mathbb{R}^n$  se cumple que

$$\text{área}(\partial\Omega)^n \geq n^n \cdot \text{volumen}(\mathbb{B}^n) \cdot \text{volumen}(\Omega)^{n-1},$$

donde  $\mathbb{B}^n$  es la bola euclídea en  $\mathbb{R}^n$  de radio 1. Además, una región  $\Omega$  cumple la igualdad anterior si y solo si es una bola abierta. Esto constituye la desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{R}^n$ . Se puede dar una demostración de la desigualdad isoperimétrica por medio de la desigualdad de Brunn-Minkowski [45].

Desde un punto de vista riemanniano, después de analizar el problema y la desigualdad isoperimétrica en el espacio euclídeo, lo natural es preguntarse qué sucede en los espacios de curvatura constante, ya que a menudo ciertos fenómenos matemáticos en el mundo euclídeo admiten generalización a los espacios esféricos e hiperbólicos. La desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{R}^n$  puede reescribirse así, véase [11, pág. 2]:

$$\frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}} \geq \frac{A(\mathbb{S}^{n-1})}{V(\mathbb{B}^n)^{1-\frac{1}{n}}},$$

donde  $V$  denota el volumen de una región y  $A$  el volumen (o área) de una hipersuperficie. A pesar de que esta desigualdad no admite una extensión inmediata a los espacios de curvatura constante no nula, sigue siendo cierto que todos los dominios considerados con un cierto volumen tienen el área de sus fronteras minimizada por bolas. Por ejemplo, en el caso del plano hiperbólico real  $\mathbb{R}H^2$  de curvatura seccional  $-1$ , la desigualdad isoperimétrica establece que para cada curva simple cerrada y diferenciable a trozos con longitud  $l$ , se tiene que

$$l^2 \geq 4\pi A + A^2,$$

donde  $A > 0$  es el área encerrada por dicha curva. Por otro lado, la igualdad se da si y solo si la curva es una circunferencia en  $\mathbb{R}H^2$  de radio  $\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{A(4\pi+A)}}{2\pi}\right)$ ; véase [31] para más información.

Por otro lado, Schmidt [47] ya resolvió el problema isoperimétrico en los espacios modelo de curvatura constante. El trabajo de Schmidt resultó ser bastante complicado, por lo

que se han dado demostraciones alternativas. En el contexto de la geometría de Riemann, ha sido particularmente importante (y muy influyente) el método de reflexión de planos móviles empleado por Alexandrov [1], [2] para el caso del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , que también puede utilizarse en el caso del espacio hiperbólico real  $\mathbb{R}H^n$  y de la semiesfera (superior) o casquete esférico  $\mathbb{S}_+^n$ . Dicho método consiste en reflejar una hipersuperficie dada con respecto a hiperplanos paralelos “móviles” (o hipersuperficies totalmente geodésicas), hasta detectar que la hipersuperficie reflejada toca la hipersuperficie de partida desde el interior. En ese caso, si la hipersuperficie de partida tiene curvatura media constante, satisface cierta ecuación en derivadas parciales elíptica, que también es satisfecha por la hipersuperficie reflejada. Las propiedades de unicidad de solución de dichas ecuaciones (dadas a través de principios del máximo) permiten derivar que la hipersuperficie y su reflejada coinciden, por lo que dicha hipersuperficie goza de una simetría. Como esto es válido para cualquier familia de hiperplanos paralelos, se deduce que la hipersuperficie es simétrica respecto de hiperplanos en todas las direcciones, lo que permite concluir que es una esfera. A efectos de generalizar este método a variedades riemannianas más generales, el hecho crucial es que, para que un espacio admita reflexiones respecto a una hipersuperficie, dicha hipersuperficie (al ser conformada por puntos fijos de una isometría ambiental) debe ser totalmente geodésica. Los espacios modelo gozan de hipersuperficies totalmente geodésicas en todas las direcciones, por lo que el método de Alexandrov se puede aplicar en estos casos de modo similar al caso euclídeo (con la restricción de considerar la semiesfera en vez de la esfera, pues en caso contrario el teorema de Alexandrov es falso).

En un contexto más general, nos va a interesar trasladar el estudio del problema isoperimétrico del espacio euclídeo a variedades riemannianas más generales con geometría acotada. De esta forma, nos saltamos varios niveles intermedios de generalización, como pueden ser la esfera, el espacio hiperbólico, los espacios homogéneos 3-dimensionales, o los espacios simétricos; véase la Sección 1.3 para una breve revisión del problema isoperimétrico en diferentes contextos riemannianos. En este contexto, también es razonable cambiar nuestro punto de vista con respecto a las preguntas que planteamos. En una variedad riemanniana general, las posibilidades de encontrar el dominio (o los dominios) de área de frontera mínima, dando de antemano el volumen de dicho dominio, son prácticamente nulas, a excepción de algunos casos muy especiales. Además, diferentes elecciones del volumen prescrito pueden cambiar por completo el carácter del problema. En vista de estas dificultades, surgen las llamadas constantes isoperimétricas. En este trabajo nos centraremos en la constante isoperimétrica de Cheeger, que tiene por expresión

$$h(M) := \inf_{\Omega} \frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)},$$

donde  $\Omega$  recorre todos los abiertos de la variedad riemanniana  $M$  con clausura compacta y cuya frontera es una hipersuperficie diferenciable.

Con esta definición, es fácil comprobar que la constante isoperimétrica de Cheeger del plano  $\mathbb{R}^2$  es cero. En este caso, la constante isoperimétrica de Cheeger no es más que el ínfimo de todos los cocientes de la longitud de una curva de Jordan por el área que encierra dicha curva. De esta forma, tomando bolas abiertas con centro el origen  $B((0,0), r)$ , con

radio  $r > 0$ , tendremos que

$$\frac{\text{long}(\partial B((0, 0), r))}{A(B((0, 0), r))} = \frac{2}{r}$$

y esto es siempre mayor o igual que la constante de Cheeger para el plano  $\mathbb{R}^2$ . Así, como el radio  $r > 0$  es arbitrario, si lo tomamos cuando  $r \rightarrow \infty$ , se tiene que la constante isoperimétrica de Cheeger del plano es cero.

La constante isoperimétrica de Cheeger surge como una forma de cuantificar el problema isoperimétrico en contextos donde no tienen por qué existir soluciones óptimas (es decir, conjuntos que minimicen el área de la frontera bajo una restricción de volumen). En relación con el problema isoperimétrico clásico, la constante isoperimétrica de Cheeger nos dice cuál es el menor cociente área/volumen que existe en nuestra variedad. Por otro lado, a pesar de que la constante isoperimétrica de Cheeger sea, en ocasiones, difícil de calcular, siempre está bien definida. Además, la constante de Cheeger goza de una propiedad analítica muy interesante, ya que establece una cota inferior para el primer valor propio no trivial del operador de Laplace-Beltrami con condición de Dirichlet sobre regiones relativamente compactas de la variedad que estemos considerando.

Existen ciertos espacios en los que se ha estudiado la constante isoperimétrica de Cheeger y en los cuales se conoce bastante información sobre ella. Por ejemplo, del mismo modo que para el plano euclídeo, en los espacios euclídeos  $\mathbb{R}^n$  se tiene que  $h(\mathbb{R}^n) = 0$ . Toda variedad compacta tiene constante de Cheeger (definida como anteriormente) nula, si bien se puede modificar la definición vista para dar lugar a una teoría de interés en el caso compacto (véase [11, Section VI.2]). Ahora bien, centrándonos en el caso no compacto, y de nuevo desde un punto de vista riemanniano, el primer contexto donde abordar el estudio de dicha constante es el de los espacios homogéneos. Dentro de ellos, los grupos de Lie con métrica invariante a la izquierda constituyen una amplia familia de espacios homogéneos. En particular, los grupos de Lie resolubles y simplemente conexos son difeomorfos a espacios euclídeos (por lo tanto, no compactos), y dotados de métricas invariantes a la izquierda, su constante de Cheeger se puede calcular de forma explícita, en términos de la traza de la representación adjunta del álgebra de Lie [41]. Los grupos de Lie resolubles con métrica invariante a la izquierda constituyen variedades riemannianas de gran interés. Por ejemplo, incluyen familias muy importantes de solitones de Ricci (en concreto, aquellos solitones de Ricci homogéneos de tipo expansivo) y de variedades Einstein homogéneas [7], [32], dentro de las cuales destacan la familia de los espacios simétricos de tipo no compacto. En la parte final de este trabajo (Capítulo 3), basándonos en el artículo de Peyerimhoff y Samiou [41], presentamos y demostramos la fórmula explícita de la constante de Cheeger de los grupos de Lie resolubles simplemente conexos con métrica invariante a la izquierda. Además, después de una breve introducción a los espacios simétricos y a su estructura algebraica subyacente, aplicamos dicha fórmula a los espacios simétricos de tipo no compacto y, en particular, a los espacios hiperbólicos reales y complejos.

En cuanto a la estructura del trabajo, en el Capítulo 1 se introducen los conceptos básicos necesarios de geometría riemanniana y, en concreto, de geometría de hipersuperficies. Se abordan temas como las métricas riemannianas, la geometría de las hipersuperficies de

una variedad riemanniana y se define el concepto de hipersuperficie de curvatura media constante (CMC). En la segunda sección de este capítulo se aborda el concepto de volumen en una variedad riemanniana orientable de dimensión  $n$ . Esto nos llevará a poder introducir el concepto de región diferenciable de una variedad riemanniana y de volumen ligado a esa región. Finalmente, definiremos el concepto de área (volumen) de una hipersuperficie y el de región isoperimétrica, que consiste en una región de un cierto volumen que minimiza el área de su frontera entre todas las regiones de la variedad ambiente con dicho volumen. Por otro lado, en la última sección, hablaremos sobre generalidades del problema isoperimétrico, discutiendo, de forma breve, algunos contextos y formulaciones más generales donde se puede tratar dicho problema.

En el capítulo dos se analiza el problema isoperimétrico en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Se estudian las soluciones óptimas al problema isoperimétrico, que serán las esferas de dicho espacio y, además, se exploran técnicas utilizadas para abordar este problema en el caso euclídeo, como el método de reflexión de planos móviles de Alexandrov. Además, en este mismo capítulo estudiaremos las propiedades variacionales de las hipersuperficies embebidas de una variedad riemanniana haciendo especial hincapié en la fórmula de la primera variación. Posteriormente, daremos una caracterización de las hipersuperficies embebidas de curvatura media constante en términos de las variaciones que preservan el volumen. Esto, combinado con el teorema de Alexandrov, nos dará una demostración del problema isoperimétrico en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ .

En el tercer capítulo se introducen, en primer lugar, preliminares relativos a los grupos de Lie, donde se presentan las definiciones básicas en la teoría de grupos y álgebras de Lie. Realizaremos todo este proceso con el objetivo de calcular la constante isoperimétrica de Cheeger para un grupo de Lie resoluble y simplemente conexo con métrica invariante a la izquierda. En esta línea, se detallarán resultados que conectan la constante de Cheeger con la estructura algebraica de estos grupos, permitiendo obtener descripciones explícitas en términos de la traza de la representación adjunta a nivel de álgebras de Lie y comprender mejor el fenómeno isoperimétrico en estos contextos. Después de calcular la constante de Cheeger de un grupo de Lie resoluble y simplemente conexo, trasladaremos este cálculo a un ejemplo importante, los espacios simétricos riemannianos. En este contexto, daremos las propiedades y definiciones más básicas acerca de estos espacios, para posteriormente hablar de los tipos de espacios simétricos centrándonos en los de tipo no compacto. Además, introduciremos las nociones de raíz, espacio de raíz, sistema de raíces y descomposición de Iwasawa. Esta última descomposición nos permitirá modelar el espacio simétrico como un grupo de Lie resoluble y simplemente conexo con métrica invariante a la izquierda. Finalmente, explicitaremos el cálculo de la constante isoperimétrica de Cheeger para un espacio simétrico de tipo no compacto, en términos de las raíces positivas de su sistema de raíces asociado y de sus multiplicidades. Finalmente, particularizaremos esta descripción para el caso de los espacios hiperbólicos real y complejo.



# Capítulo 1

## Preliminares y motivación

El objetivo de este primer capítulo es introducir una serie de definiciones básicas que serán utilizadas en el transcurso de la memoria, así como proporcionar un contexto y motivación apropiados para el estudio del problema isoperimétrico desde el punto de vista de la geometría de Riemann. Así, en la primera sección, incluiremos las nociones relativas a geometría riemanniana de hipersuperficies. Las hipersuperficies son subvariedades de codimensión uno en una variedad riemanniana ambiente. Su estudio surge de modo natural al abordar el problema isoperimétrico, ya que la frontera de un dominio (o región) diferenciable es una hipersuperficie. Por medio de la descomposición del espacio tangente de una subvariedad en sus partes tangente y normal, podremos definir operadores fundamentales en geometría de subvariedades como la segunda forma fundamental o el operador de forma, recordando algunas propiedades básicas de los mismos. Un concepto clave para abordar el problema isoperimétrico es el de *curvatura media* de una hipersuperficie. Al final de la primera sección de este capítulo, recordaremos dicho concepto, lo que nos conducirá a la noción de *hipersuperficie de curvatura media constante (CMC)*. Para concluir, introduciremos, a modo de recordatorio, las nociones de punto umbílico, subvariedad totalmente umbílica y subvariedad totalmente geodésica. Finalmente, incluiremos algunos ejemplos ilustrativos de estos conceptos.

En la segunda sección de este capítulo, recordaremos las definiciones más básicas y necesarias relativas al cálculo de volúmenes en variedades riemannianas. Para ello introduciremos la noción de forma de volumen en una variedad riemanniana, lo que nos llevará a la definición de *región* de una variedad riemanniana y de volumen de la misma pasando por la noción de *región isoperimétrica*, que será un concepto clave para el posterior planteamiento y resolución del problema isoperimétrico.

Finalmente, incluimos una tercera sección de generalidades sobre el problema isoperimétrico, donde presentamos algunos de los resultados más importantes en el estudio de este problema, definiendo el marco histórico y matemático donde se enmarcará el estudio que realizaremos en los siguientes capítulos.



## 1.1. Geometría de hipersuperficies

Como se ha comentado, a lo largo de esta memoria vamos a utilizar algunos resultados y definiciones de geometría riemanniana de hipersuperficies que vamos a recordar a continuación. En esta parte del trabajo, hemos seguido principalmente la referencia [33, Chapters 2, 4, 5, 8].

En primer lugar, fijemos algo de notación. Cuando hablemos de  $M$  y, salvo que se especifique lo contrario, representará una variedad riemanniana de dimensión  $n \geq 2$ . Denotaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  al conjunto de los campos de vectores diferenciables de la variedad  $M$ , donde por diferenciable se entiende de clase  $\mathcal{C}^\infty(M)$ . Utilizaremos  $\nabla$  para denotar la conexión de Levi-Civita de la variedad riemanniana  $M$ . Además, utilizaremos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o  $g$  para referirnos a la métrica riemanniana de nuestra variedad  $M$ . Por otro lado, dado un campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  se suele denotar por  $|X|$  a la norma de dicho campo en la métrica de  $M$ . Dado un punto  $p$  de la variedad  $M$  denotamos por  $T_p M$  al espacio tangente a  $M$  en el punto  $p$  y por  $TM$  al fibrado tangente de dicha variedad. Además, dado un punto  $p \in M$  denotaremos por  $T_p^* M$  al espacio cotangente a la variedad en el punto  $p$ , con lo que

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \{(p, \omega) : p \in M, \omega \in T_p^*M\}.$$

Denotaremos por  $\wedge^k(M)$  al espacio vectorial de las  $k$ -formas diferenciales de una variedad riemanniana  $M$ .

A continuación, pasamos a las definiciones y resultados más relevantes de geometría de hipersuperficies que nos harán falta en los sucesivos capítulos de esta memoria.

Sean  $(M^m, g)$  y  $(\bar{M}^n, g')$  dos variedades riemannianas y sea  $f: M \rightarrow \bar{M}$  una inmersión, es decir, una aplicación diferenciable tal que  $f_{*p}$  es inyectiva para cada  $p \in M$ . Se dice que  $f$  es una *inmersión isométrica* si  $g(u, v) = g'(f_{*p}u, f_{*p}v)$  para cada  $u, v \in T_p M$  y para cada  $p \in M$ . Además, si  $f: M \rightarrow \bar{M}$  es una inmersión, podemos dotar a  $M$  de la métrica  $f^*g$  inducida por  $f$  dada por  $f^*g(u, v) = g(f_{*u}, f_{*v})$ . Con esta métrica tenemos que  $(M, f^*g)$  es una variedad de Riemann y, además,  $f: (M, f^*g) \rightarrow (\bar{M}, g)$  es una inmersión isométrica. Por otro lado, atendiendo a las propiedades de la función  $f$  diremos que:

- (I) En el caso de que  $f$  sea una inmersión,  $M$  se dice que es *subvariedad inmersa* de  $\bar{M}$ .
- (II) Si además esa  $f$  es inyectiva,  $f(M)$  se dice *subvariedad inmersa inyectivamente* en  $\bar{M}$ .
- (III) Si  $f$  es un embebimiento, diremos que  $f(M)$  es una *subvariedad embebida* de  $\bar{M}$ .

Toda inmersión es localmente un embebimiento. Es decir, en el contexto establecido arriba, para cada  $p \in M$  existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  en  $M$  de forma que  $f|_U: U \rightarrow \bar{M}$  es un embebimiento, es decir, una inmersión inyectiva y homeomorfismo sobre  $f(U)$ . De esta forma, cuando efectuemos argumentos locales supondremos que, si tenemos una subvariedad  $M$  de una variedad riemanniana  $\bar{M}$ ,  $M$  es una subvariedad embebida en  $\bar{M}$ . Directamente, hablaremos de subvariedad de  $\bar{M}$ .

En lo referente al espacio tangente de una subvariedad  $M$  de una variedad riemanniana  $\bar{M}$ , para cada  $p \in M$  tenemos la descomposición  $T_p \bar{M} = T_p M \oplus T_p^\perp M$  en suma directa ortogonal. De esta forma, denotamos por  $T_p^\perp M$  al *espacio normal* a  $M$  en  $p$ , que también suele denotarse por  $\nu_p M$ . Definimos el *fibrado normal* de  $M$  como  $T^\perp M = \nu M = \{(p, v) \in T\bar{M} : p \in M, v \in T_p^\perp M\} \equiv \sqcup_{p \in M} T_p^\perp M$ . Es una variedad diferenciable de dimensión  $\dim \bar{M}$  y fibrado vectorial sobre  $M$  donde la proyección  $\pi: T^\perp M \rightarrow M$  está definida por  $(p, v) \mapsto p$ , con fibras  $\pi^{-1}(p) = T_p^\perp M$ . En estas condiciones, denotamos por  $\mathfrak{X}^\perp(M) = \Gamma(T^\perp M)$  al conjunto de campos de vectores diferenciables a lo largo de toda la subvariedad  $M$  y normales a  $M$  en todo punto. Así, un  $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$  se dice *campo normal* a  $M$ . Recordemos brevemente que, si tenemos una subvariedad  $M$  de una variedad riemanniana  $\bar{M}$ , si tomamos un  $v \in T_p \bar{M}$ , con  $p \in M$ , tenemos que  $v$  se puede descomponer en su parte tangente a  $M$ , que se denota por  $v^\top$ , y su parte ortogonal a  $M$ , que se denota por  $v^\perp$ . Recordemos además que esta definición de componente ortogonal viene determinada por la métrica de la variedad ambiente  $\bar{M}$ . Por otro lado, dada una subvariedad  $M$  de una variedad riemanniana  $\bar{M}$  denotaremos por  $\Gamma(T\bar{M}|_M)$  al conjunto de los campos vectoriales a lo largo de  $M$ , pero no necesariamente tangentes a  $M$ . Es decir, son las secciones del fibrado vectorial dado por la restricción a  $M$  del fibrado tangente a  $\bar{M}$ .

En lo que sigue consideraremos una subvariedad  $M$  de una variedad de Riemann  $\bar{M}$  y denotaremos por  $\nabla$  y  $\bar{\nabla}$  a las conexiones de Levi-Civita de  $M$  y  $\bar{M}$  respectivamente. Se puede probar que dados campos de vectores  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , se verifica que  $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top$ .

En el ámbito de las subvariedades de una variedad riemanniana, tenemos dos operadores fundamentales que vamos a definir a continuación. Por un lado, dada una subvariedad  $M$  de una variedad riemanniana  $\bar{M}$  se define la *segunda forma fundamental* de  $M$  como la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} II: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}^\perp(M) \\ (X, Y) &\longmapsto II(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp. \end{aligned} \tag{1.1}$$

En las condiciones de esta definición, se puede probar que la segunda forma fundamental es  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilineal y simétrica. Por otro lado, se define el *operador forma* o *de Weingarten* de  $M$  con respecto a un  $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$  como  $S_\eta X = -(\bar{\nabla}_X \eta)^\top$  para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Además, dada una subvariedad  $M$  de una variedad riemanniana  $\bar{M}$  y dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ , se cumple que  $\langle II(X, Y), \eta \rangle = \langle S_\eta X, Y \rangle$ . En esta línea, sabemos que el operador forma  $S_\eta$  es  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal. Además, se verifica que  $S_\eta$  es autoadjunto respecto de la métrica riemanniana de la variedad y dado un  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $(S_\eta X)_p$ , con  $p$  un punto de  $M$ , solo depende de  $\eta_p$  y de  $X_p$ .

Si tomamos  $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ , las *curvaturas principales* de  $M$  con respecto a  $\eta$  son los autovalores de  $S_\eta$ . Notemos en esta definición que, para tener una aplicación lineal, es necesario fijar el punto  $p$ , considerando así,  $S_\eta^p: T_p M \rightarrow T_p M$ . Si no fijamos el  $p$  los autovalores son funciones que no necesariamente son diferenciables, pero sí continuas. Por otro lado, los autoespacios del operador forma se llaman *espacios de curvatura principal* y los autovectores son las *direcciones principales*.

Hasta ahora  $M$  denotaba una subvariedad de una variedad riemanniana  $\bar{M}$  de dimensión

$n$ . De ahora en adelante, salvo que se indique lo contrario,  $M$  será una hipersuperficie, es decir, una subvariedad de codimensión 1.

Sea  $M$  una hipersuperficie de una variedad riemanniana  $\bar{M}$  de dimensión  $n$ . Dado  $\eta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$  unitario (lo cual, al menos localmente, es decir, restringiendo a un abierto de  $M$ , siempre lo podemos suponer) se define la *curvatura media* de  $M$  con respecto a  $\eta$ , como la función  $H: M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H(p) = \text{tr}(S_\eta^p) = \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i(p) \quad (1.2)$$

para cada  $p \in M$ , donde  $\text{tr}$  denota la traza de un endomorfismo. Diremos que  $M$  es una hipersuperficie de *curvatura media constante* si su curvatura media, respecto a un campo normal unitario a  $M$ , es constante a lo largo de  $M$ . Además, dado un punto  $p \in M$  y dada una referencia ortonormal  $e_1, \dots, e_{n-1}$  para  $TM$  en torno a  $p$ , se define el *vector curvatura media* de  $M$  en  $p$  como

$$\vec{H}(p) = \sum_{i=1}^{n-1} (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^\perp, \quad (1.3)$$

donde recordemos que  $\bar{\nabla}$  denota la conexión de Levi-Civita de la variedad ambiente  $\bar{M}$ .

**Observación 1.1.** El vector curvatura media puede definirse para cualquier subvariedad de una variedad riemanniana ambiente, no solo para el caso de hipersuperficies, simplemente tomando la definición previa y sumando respecto a una referencia ortonormal  $e_1, \dots, e_n$  para  $TM$ .

Para el caso de hipersuperficies se verifica que  $\vec{H} = H \cdot \eta$ , donde  $\eta$  es un campo normal unitario sobre  $M$  y  $H$  es la función curvatura media respecto del campo  $\eta$ .

Notemos que por el teorema de diagonalización de endomorfismos autoadjuntos, si llamamos  $\kappa_1(p) \leq \dots \leq \kappa_{n-1}(p)$  a las curvaturas principales en  $p \in M$ , entonces existe una base ortonormal  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  de  $T_p M$  que está formada por direcciones principales, es decir,  $S_\eta^p v_j = \kappa_j(p) v_j$ .

Dado  $p \in M$  diremos que es un punto *umbílico* de  $M$  si las curvaturas principales en  $p$  coinciden, es decir, si  $\kappa_1(p) = \dots = \kappa_{n-1}(p)$ . Diremos además que  $M$  es *totalmente umbílica* si todos sus puntos son umbílicos. Por otro lado, si  $\kappa_1(p) = \dots = \kappa_{n-1}(p) = 0$  para cada  $p \in M$ , se dice que  $M$  es *totalmente geodésica*. Esta última definición puede extenderse a subvariedades de codimensión arbitraria, es decir, podemos considerar una *subvariedad totalmente geodésica* como aquella verificando que  $II = 0$ . Nótese que la definición de subvariedad totalmente umbílica es equivalente a que se cumpla  $S_\eta^p v = H(p)v$  para cada  $v \in T_p M$ , donde  $H$  es la curvatura media respecto de un campo normal unitario  $\eta$ .

Veamos algún ejemplo para ilustrar estas definiciones.

**Ejemplo 1.2.** Consideremos como variedad ambiente el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  y fijemos un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ . Sabemos que la esfera de radio  $R > 0$  y centro  $p \in \mathbb{R}^n$  es el conjunto  $\mathbb{S}_R^{n-1}(p) = \{q \in \mathbb{R}^n : |q - p| = R\}$ . En ese caso, el vector normal unitario en un punto  $q$  de la esfera apuntando hacia fuera es de la forma  $\eta_q = \frac{q-p}{R}$ . Así, para cada  $v \in T_q \mathbb{S}_R^{n-1}(p)$  se

tiene que  $S_\eta^q v = -\frac{v}{R}$ . Se obtiene así que  $\kappa_j(q) = -\frac{1}{R}$  para cada  $j = 1, \dots, n-1$ . Esto prueba que la esfera de centro  $p$  y radio  $R$  en  $\mathbb{R}^n$  es totalmente umbílica y de curvatura media constante  $\frac{1-n}{R}$ .

**Ejemplo 1.3.** Un ejemplo de hipersuperficie totalmente geodésica es un hiperplano  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^n$ . En efecto, fijemos un vector normal unitario a dicho hiperplano  $\eta$ . Dado un punto  $p \in \Sigma$ , como ese  $\eta$  es constante, entonces  $S_\eta^p = 0$  y  $|II_p|^2 = 0$ , de donde se deduce que  $\kappa_1(p) = \dots = \kappa_{n-1}(p) = 0$ , por lo que  $\Sigma$  es totalmente geodésica. Un resultado clásico nos asegura que las hipersuperficies totalmente umbílicas de un espacio euclídeo son precisamente (los subconjuntos abiertos de) las esferas y los hiperplanos. En particular, las hipersuperficies totalmente geodésicas de  $\mathbb{R}^n$  son los subconjuntos abiertos de los hiperplanos de  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.2. Área, volumen y regiones isoperimétricas

Comenzamos definiendo los conceptos clave de volumen, región y área, para a continuación definir la noción de región isoperimétrica.

En primer lugar, sabemos que, dada una variedad riemanniana  $(M, g)$  de dimensión  $n$  orientable, existe una única  $n$ -forma de volumen en  $M$  que denotamos por  $\omega_M$ , llamada la *forma riemanniana de volumen*, que podemos caracterizar de las siguientes tres formas equivalentes:

(I) Si  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  es una referencia local y ortonormal orientada para  $T^*M$ , entonces

$$\omega_M = \varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n.$$

(II) Si  $(E_1, \dots, E_n)$  es una referencia ortonormal orientada para  $TM$ , entonces

$$\omega_M(E_1, \dots, E_n) = 1.$$

(III) Si  $(x_1, \dots, x_n)$  son coordenadas locales y  $g_{ij}$  son los coeficientes de la métrica riemanniana en dichas coordenadas, entonces

$$\omega_M = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Por medio de estas definiciones, podemos definir el concepto de volumen de una variedad riemanniana compacta  $M$  de dimensión  $n$ . Llamaremos *volumen* de  $M$  a la integral

$$\int_M \omega_M,$$

donde  $\omega_M$  es la  $n$ -forma de volumen asociada a  $M$ . Notemos que en el caso de que la variedad  $M$  no fuese compacta, esta integral puede ser infinito.

Dada una variedad riemanniana  $M$ , diremos que un subconjunto  $\Omega \subseteq M$  es una *región diferenciable* de  $M$  si es un abierto, relativamente compacto y su frontera, que denotamos por  $\partial\Omega$ , es una hipersuperficie diferenciable (es decir, una subvariedad de dimensión  $n-1$ ) embebida, compacta y conexa.

**Observación 1.4.** Es también habitual definir una región de una variedad riemanniana como un abierto relativamente compacto cuya frontera tiene estructura de variedad diferenciable a trozos y cuya codimensión es 1. Esto es una noción intermedia entre la definición de región diferenciable que acabamos de dar y la noción más general de conjuntos de perímetro finito, cuyas fronteras son corrientes rectificables, véanse [8, Section 3] y [35, Sections 3.14, 3.15]. Ahora bien, nosotros nos centraremos en este trabajo en las regiones cuya frontera es una hipersuperficie diferenciable de la variedad riemanniana ambiente. A pesar de esto, merece la pena comentar que el problema isoperimétrico, en general, se plantea para regiones no necesariamente diferenciables. Se puede probar (aunque es un teorema nada trivial) que las regiones isoperimétricas tienen frontera diferenciable salvo por un subconjunto cerrado de codimensión a lo sumo seis; véase el Teorema 1.7 de la siguiente sección para un enunciado preciso.

**Observación 1.5.** Salvo en lo que queda de capítulo, a lo largo del cual será interesante precisar el tipo de región que estamos considerando debido a sus propiedades geométricas, en el resto del trabajo hablaremos directamente de regiones para referirnos a las regiones diferenciables definidas en el párrafo anterior.

Dada una región  $\Omega$  de una variedad riemanniana  $M$ , si fijamos coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$ , llamaremos *volumen* de la región  $\Omega$ , y lo denotaremos por  $V(\Omega)$ , a la integral extendida a la región  $\Omega$  de la  $n$ -forma de volumen  $\omega_M = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Con el término extendida nos referimos a que si la región  $\Omega$  no está contenida íntegramente en un entorno coordenado, definimos su volumen de forma análoga tomando varios entornos coordenados y empleando particiones diferenciables de la unidad. En el caso de que  $\Omega$  sea una región diferenciable, dado que  $\partial\Omega$  es una hipersuperficie, es habitual llamar *área* a su volumen y se denota como  $A(\partial\Omega)$ .

**Observación 1.6.** En caso de que nuestra variedad  $M$  tenga dimensión  $m = 2$ , se suele llamar al volumen de una región  $\Omega$  en  $M$  el área de  $\Omega$  y se denota por  $A(\Omega)$ . Análogamente, al área de  $\partial\Omega$  se le llama *longitud* de  $\partial\Omega$  y se escribe como  $l(\partial\Omega)$ .

Dado que la cuestión isoperimétrica más sencilla consiste en analizar las regiones  $\Omega$  de una cierta variedad riemanniana  $M$  que, dado un volumen fijado, minimicen el área de su frontera, es pertinente considerar la siguiente definición.

Sea  $M$  una variedad riemanniana. Dada una región diferenciable  $\Omega$  de  $M$  diremos que es una *región isoperimétrica* de volumen  $v \in (0, V(M))$  si  $V(\Omega) = v$  y se cumple la desigualdad  $A(\partial\Omega) \leq A(\partial\Omega')$  para cada región  $\Omega'$  en  $M$  cumpliendo que  $V(\Omega') = v$ . Esta definición es equivalente a que se satisfaga la igualdad

$$A(\partial\Omega) = \inf \{A(\partial\Omega') : \Omega' \subseteq M \text{ región y } V(\Omega') = v\}.$$

### 1.3. Generalidades sobre el problema isoperimétrico

En esta sección, exponemos de modo menos técnico que en el resto del trabajo y sin voluntad de ser exhaustivos, distintos aspectos alrededor del problema isoperimétrico, co-

menzando por su planteamiento en el espacio euclídeo hasta algunos resultados conocidos de variedades de Riemann más generales. Para más detalles pueden consultarse, por ejemplo, [8, Section 3], [11, Sections I, II], [12, pág. 247-248], [35, Sections 3.14, 3.15], [38] y [45, Tema 3]. Para una perspectiva histórica del problema, puede consultarse [6].

En primer lugar, comencemos recordando que el problema isoperimétrico clásico surge de la problemática de tratar de encerrar la mayor cantidad posible de área con el menor perímetro. Esto en el caso del plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  tiene una solución intuitiva clara, dada por cualquier circunferencia. Nótese que, para tratar el caso del plano euclídeo, es natural hablar del concepto de curva de Jordan, pues es la noción de curva que nos garantiza que se encierre un área acotada, gracias al teorema de la curva de Jordan. Así, la desigualdad isoperimétrica en el plano establece que dada una curva de Jordan de longitud  $l$ , se tiene que  $l^2 \geq 4\pi A$ , siendo  $A$  el área de la región encerrada por dicha curva en  $\mathbb{R}^2$ . Además, la igualdad se obtiene si y solo si la curva es una circunferencia. Probaremos este resultado en la Sección 2.1 del presente trabajo. Este resultado tiene su generalización a dimensión superior, es decir, al caso del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , donde puede considerarse, de manera análoga, la desigualdad

$$A(\partial\Omega)^n \geq n^n V(\mathbb{B}^n) V(\Omega)^{n-1},$$

donde  $\Omega$  es una región en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{B}^n = B(0, 1)$  es la bola abierta de radio 1. Además, la igualdad se tiene si y solo si la región  $\Omega$  es una bola abierta. La demostración de este resultado, que puede verse en [45, pág. 21], emplea técnicas de geometría diferencial y la desigualdad de Brunn-Minkowski, la cual afirma que

$$V(A + B)^{\frac{1}{n}} \geq V(A)^{\frac{1}{n}} + V(B)^{\frac{1}{n}},$$

donde  $A$  y  $B$  son dos subconjuntos compactos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$  y, además, se tiene que  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$  es su suma de Minkowski. Véase [45, Tema 3, Sección 4] para una demostración de este resultado.

El problema isoperimétrico clásico en  $\mathbb{R}^n$  se plantea averiguar, para un volumen dado, cuál de entre todas las hipersuperficies compactas y conexas encerrando ese volumen tiene menor área. La desigualdad isoperimétrica para  $\mathbb{R}^n$  nos garantiza que las esferas son las únicas soluciones a dicho problema. Sin embargo, es posible deducir este resultado sin echar mano de la desigualdad isoperimétrica (y, en última instancia de la desigualdad de Brunn-Minkowski). Una demostración geométrico-analítica de gran interés viene de la mano del teorema de Alexandrov [1], [9, pág. 9-13]. Este resultado asegura que toda hipersuperficie embebida, compacta y conexa de  $\mathbb{R}^n$  con curvatura media constante es una esfera; véase Corolario 2.22. Su demostración utiliza la propiedad de unicidad de ecuaciones en derivadas parciales elípticas junto con el influyente método de los planos móviles desarrollado por Alexandrov. En la Sección 2.2.2, incluimos la prueba de este resultado. Así, se puede resolver el problema isoperimétrico en  $\mathbb{R}^n$  combinando el teorema de Alexandrov con las propiedades variacionales de las hipersuperficies de curvatura media constante (que nos proporcionan una caracterización de las mismas como puntos críticos del funcional área para cualquier variación que preserve el volumen). Véanse las Secciones 2.2 y 2.3 para más

detalles y demostraciones. Cabe mencionar que en todo este proceso estamos considerando hipersuperficies con suficiente regularidad, es decir, de clase  $\mathcal{C}^2$  o superior.

En un contexto más general, y desde un punto de vista riemanniano, podemos expandir el problema isoperimétrico a los denominados espacios modelo o espacios forma simplemente conexos, es decir, las variedades riemannianas completas y simplemente conexas con curvatura seccional constante, que no son más que las esferas redondas y los espacios hiperbólicos (reales), además de los espacios euclídeos. Para ilustrar el problema en este contexto más general, consideremos de nuevo el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 2$ . En este contexto, la desigualdad isoperimétrica se puede reescribir como

$$\frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}} \geq \frac{A(\mathbb{S}^{n-1})}{V(\mathbb{B}^n)^{1-\frac{1}{n}}}, \quad (1.4)$$

donde  $\Omega$  es cualquier dominio acotado y  $\mathbb{B}^n$  es la bola unitaria en  $\mathbb{R}^n$ ,  $A(\mathbb{S}^{n-1})$  es el área (volumen) de la esfera unidad en  $\mathbb{R}^n$  y  $V(\mathbb{B}^n)$  el volumen encerrado por la bola unidad. Con este planteamiento, se puede comprobar, véase [11, pág. 4], que en un espacio de curvatura constante no nula (esfera o espacio hiperbólico), la formulación (1.4) de la desigualdad isoperimétrica no es válida. A pesar de esto, sigue ocurriendo que las esferas geodésicas son las regiones isoperimétricas. En el caso de dimensión 2 se puede probar una desigualdad isoperimétrica que generaliza la dada para el plano euclídeo. Así, si  $M = \mathbb{M}_\kappa^2$ , el espacio modelo de curvatura constante  $\kappa$ , entonces la desigualdad isoperimétrica es, véase [11, pág. 4]:

$$l^2 \geq 4\pi A - \kappa A^2,$$

donde se obtiene la igualdad si y solo si el dominio es una bola geodésica, y siendo  $l$  la longitud de arco de una curva simple, cerrada y diferenciable a trozos y  $A$  el área encerrada por dicha curva. Así, por ejemplo, en el caso del plano hiperbólico real  $\mathbb{R}H^2$  de curvatura seccional constante igual a  $-1$ , se puede probar, véase [31], que para cada curva simple cerrada y diferenciable a trozos con longitud  $l$ , se verifica que

$$l^2 \geq 4\pi A + A^2,$$

donde la igualdad se tiene si y solo si la curva es una circunferencia en  $\mathbb{R}H^2$  de radio  $\sinh\left(\frac{\sqrt{A(4\pi+A)}}{2\pi}\right)$ .

En lo referente a la solución del problema isoperimétrico en los espacios modelo de curvatura seccional constante (espacio euclídeo, esfera y espacio hiperbólico), la primera solución fue dada por E. Schmidt [47]. Sin embargo, se han dado demostraciones alternativas. En el espacio hiperbólico real  $\mathbb{R}H^n$  y la semiesfera o casquete esférico  $\mathbb{S}_+^n$  se puede emplear el método de los planos móviles de Alexandrov, reflejando con respecto a hipersuperficies totalmente geodésicas en  $\mathbb{R}H^n$  y  $\mathbb{S}_+^n$  [1]. Cabe mencionar que para poder emplear este método (y probar así el teorema de Alexandrov) es necesario restringirse a la semiesfera. Si no, el teorema de Alexandrov es falso (por ejemplo, el toro de Clifford en  $\mathbb{S}^3$  tiene curvatura media constante cero). A pesar de esto, el problema isoperimétrico sigue

teniendo las bolas geodésicas como solución, si bien para demostrar esto hay que remitirse a otras pruebas (como la noción de estabilidad), que comentamos más abajo.

Más allá de los espacios de curvatura constante, la solución al problema isoperimétrico es conocida en muy pocos espacios ambiente. Citamos a continuación algunos trabajos que corresponden principalmente a espacios homogéneos y de dimensión 3. En concreto, una solución detallada en el espacio  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , con la métrica producto estándar, puede verse en [40]. Para otras variedades homogéneas, como  $\mathbb{R}H^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}H^2 \times \mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ , se pueden consultar [29], [40] y [39], respectivamente. El caso de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^n$  también se encuentra resuelto en [40] y, además, se muestra que cuando  $n \geq 9$ , los onduloides son minimizadores en lugar de los cilindros para ciertos volúmenes. Una idea clave empleada en los resultados citados consiste en explotar la simetría del problema para reducirlo al análisis de una ecuación diferencial ordinaria. Por otro lado, el caso del espacio  $T^2 \times \mathbb{R}$ , donde  $T^2$  es el toro plano, no está resuelto de manera completa; sin embargo, se pueden encontrar aportaciones al respecto en [26], [?] y [?]. En variedades riemannianas compactas arbitrarias, es conocido que las fronteras de las regiones isoperimétricas pequeñas están cerca de las esferas redondas, véanse [36], [?].

Siguiendo con las propiedades variacionales, en el presente trabajo, se prueba (Teorema 2.44), en esencia, que ser frontera de una región conexa diferenciable isoperimétrica implica tener curvatura media constante, al constituir un punto crítico del funcional área para volumen constante. Ahora bien, hay variedades riemannianas donde el conocimiento de las hipersuperficies compactas con curvatura media constante no permite determinar las regiones isoperimétricas. Para resolver esta dificultad la idea es considerar regiones que cumplan una condición más restrictiva: que su frontera sea una hipersuperficie no solamente de curvatura media constante, sino también estable. La condición de estabilidad requiere, además de que la hipersuperficie sea un punto crítico para el funcional área (para volumen encerrado constante), que la derivada segunda de dicho funcional sea no negativa (lo cuál es más que la bien conocida condición necesaria de mínimo local para una función); véase [45, Tema 3, Sección 3]. Así, si en un espacio clasificamos las hipersuperficies estables de curvatura media constante, estas serán las candidatas a frontera de región isoperimétrica. Este es el caso de los espacios modelo de curvatura constante, donde las únicas hipersuperficies compactas CMC estables son las esferas geodésicas [4], resultado que permite resolver el problema isoperimétrico en dichos espacios. En un contexto más general, pero aún en el ámbito de curvatura constante, podemos considerar los espacios lente  $L(p, q)$ , donde  $p \in \mathbb{Z}^+$  y  $\gcd(p, q) = 1$ . Estos constituyen un tipo especial de variedad tridimensional que se obtiene como cociente de una esfera  $\mathbb{S}^3$  bajo una acción libre y diferenciable de un grupo cíclico finito. Pues bien, existe un resultado que nos dice que las únicas hipersuperficies estables en  $L(3, 1)$  y en  $L(3, 2)$  son esferas geodésicas o cocientes de toros de Clifford; véase [?, pág. 477] para más información al respecto. En espacios de curvatura no constante, al igual que sucede con los teoremas de tipo Alexandrov, la determinación de las hipersuperficies CMC estables se considera un problema muy complejo.

El problema isoperimétrico en una variedad riemanniana  $M$  arbitraria puede reformularse en términos del llamado perfil isoperimétrico. Este concepto surge en vista de la dificultad de determinar las regiones isoperimétricas en variedades riemannianas más com-



plicadas que las mencionadas arriba. El perfil isoperimétrico de una variedad riemanniana  $M$ , véase [12, pág. 247], es la aplicación  $I_M: (0, V(M)) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$I_M(\nu) = \inf \{A(\partial\Omega) : V(\Omega) = \nu, \Omega \subset M\},$$

donde  $\Omega$  recorre todos los subconjuntos abiertos relativamente compactos de  $M$  con frontera diferenciable, es decir, todas las regiones diferenciables de  $M$  (en particular pueden tener un número finito de componentes). Naturalmente, buscamos de forma explícita la función  $I_M$ , lo cual rara vez es posible, en cuyo caso el foco se centra en derivar propiedades analíticas de dicha función. Debido a la dificultad de calcular  $I_M$ , se puede considerar una solución más débil del problema tratando de proporcionar una cota inferior  $\phi(\nu)$  para  $I_M(\nu)$ , esto es, una desigualdad isoperimétrica de la forma

$$A(\partial\Omega) \geq \phi(V(\Omega)),$$

donde  $\Omega$  es una región diferenciable y relativamente compacta. Además, se pretende saber si, dado un valor  $\nu$ , existe una región  $\Omega$  de tal manera que  $V(\Omega) = \nu$  y  $A(\partial\Omega) = I_M(\nu)$ , es decir, si para dicho volumen  $\nu$  existe una región isoperimétrica (también llamada minimizador)  $\Omega$  con volumen  $V(\Omega) = \nu$ . Es más, uno se plantea conocer si la frontera de nuestra región isoperimétrica es diferenciable y, por otro lado, en caso de que la solución exista, determinar si es única. En lo relativo a la unicidad de las soluciones, se puede probar que si  $\Omega$  es una región isoperimétrica en una variedad  $M$  y  $\varphi: M \rightarrow M$  es una isometría, entonces  $\varphi(\Omega)$  es una región isoperimétrica en  $M$  (que podría coincidir o no con  $\Omega$ ). De esta forma, es importante plantear la cuestión de la unicidad salvo isometrías. Así, cuantas más isometrías posea una variedad, más difícil será que haya unicidad, en el sentido estricto de la palabra [45, pág. 6]. En una situación más general tenemos el siguiente teorema de existencia y regularidad. Véase [12, pág. 248-249] para más detalles del teorema.

**Teorema 1.7.** *Si  $M$  es una variedad riemanniana de dimensión  $n$  y es compacta o recubre a un compacto, entonces para cada  $\nu \in (0, V(M))$ , existe una región  $\Omega_\nu \subset M$  cuya frontera minimiza el área entre todas las regiones diferenciables de volumen  $\nu$ , es decir,  $I_M(\nu) = A(\partial\Omega_\nu)$ . Es más, salvo por un conjunto singular de dimensión de Hausdorff  $n - 8$ , la frontera  $\partial\Omega_\nu$  de cualquier minimizador es una hipersuperficie embebida diferenciable con curvatura media constante.*

Es pertinente hacer varias observaciones. Por un lado, en lo relativo a la regularidad de las regiones isoperimétricas (y la constancia de la curvatura media de las correspondientes fronteras) no se requiere la hipótesis de compacidad: se tiene para cualquier variedad riemanniana completa. En relación a la existencia, la hipótesis de la compacidad de  $M$  en el teorema de existencia de regiones isoperimétricas se puede relajar a que  $V(M) < \infty$  [45, pág. 6]. También es sabido que existen regiones isoperimétricas en cualquier variedad homogénea. Es conveniente enfatizar que en dimensión  $n \geq 8$ , la existencia de soluciones al problema isoperimétrico se consigue en una categoría de regiones que pueden contener singularidades en su frontera. A pesar de esto, la cuestión de la existencia no es nada trivial y existen variedades donde no existen soluciones al problema isoperimétrico; véase por ejemplo el reciente artículo [3]. Para más información y referencias sobre estas y otras cuestiones relacionadas pueden consultarse [?], [45].

## Capítulo 2

# El problema isoperimétrico en el espacio euclídeo

En este capítulo, estudiaremos el problema isoperimétrico en cualquier espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  donde  $n \geq 2$ . A modo de motivación y, dado que el problema isoperimétrico más clásico surge al tratar de considerar cuál es la región del plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  que encierra una mayor área con menor longitud de su frontera, en la primera sección de este capítulo vamos a ofrecer una demostración de la desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{R}^2$ , donde además de probar dicha desigualdad veremos que el disco es la región del plano que maximiza su área minimizando la longitud de su frontera. La demostración de la desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{R}^2$  se atribuye al matemático E. Schmidt en 1939 [48] (véase [17, pág. 34] para una versión traducida). Para la demostración de este resultado, definiremos lo que se entiende por curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ , para a continuación enunciar y demostrar la desigualdad isoperimétrica en el plano. Este teorema nos dice que toda curva de Jordan de longitud  $l$  verifica que  $l^2 \geq 4\pi A$ , donde  $A$  es el área que encierra dicha curva. Además, tendremos que la igualdad se da si y solo si dicha curva es una circunferencia.

En la segunda sección, vamos a demostrar el *teorema de Alexandrov* en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  debido a A. Alexandrov [1]. Este teorema es una pieza fundamental para el estudio de las hipersuperficies en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , pues establece que las hipersuperficies embebidas, conexas, compactas y de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^n$  son las esferas. Para probar este resultado, emplearemos el método de *reflexión de planos móviles*. Este método se utiliza para demostrar que las hipersuperficies del espacio euclídeo embebidas, conexas, compactas y de curvatura media constante poseen un plano de simetría en cualquier dirección. Por otro lado, si tenemos una hipersuperficie del espacio euclídeo en estas condiciones, se puede deducir que es una esfera, por lo que estos argumentos son suficientes para probar el teorema de Alexandrov. No obstante, para demostrar este teorema necesitaremos algunos resultados para concluir cuándo dos hipersuperficies en  $\mathbb{R}^n$  que pueden escribirse como el grafo de una función son iguales, al menos localmente. Aquí entrarán en juego una serie de conceptos y resultados del estudio de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) elípticas, extraídos de [9] y [22].

En la tercera sección de este capítulo, abordaremos las propiedades variacionales de las

hipersuperficies embebidas compactas de una variedad riemanniana, para posteriormente aplicar estas fórmulas y resultados en el contexto del problema isoperimétrico en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Esta sección se centra en dos conceptos clave: por un lado, las variaciones de hipersuperficies compactas y embebidas en una variedad riemanniana y, por otro lado, las fórmulas de variación asociadas al área y al volumen de dichas hipersuperficies. La idea detrás de esto es que una variación de una hipersuperficie  $M$  es una deformación diferenciable que genera una familia de hipersuperficies  $M_t$ , para  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , con  $M_0 = M$ . Esta deformación se realiza en la dirección de un campo vectorial  $X$  que recibirá el nombre de campo variacional. Con estas y otras definiciones, podremos obtener la fórmula de la primera variación para el área de una hipersuperficie. Esta nos dice que el vector curvatura media  $\vec{H}$  determina la dirección de máxima disminución del área bajo deformaciones. Siguiendo con las propiedades variacionales, nos preguntaremos por la existencia de variaciones que conservan el volumen. Estas son aquellas que dejan fijo el volumen encerrado por una hipersuperficie compacta y conexa para un cierto rango del parámetro de deformación  $t$ . De esta forma, estaremos en condiciones de dar una caracterización para las hipersuperficies de curvatura media constante de una variedad riemanniana, pues estas serán aquellas que son puntos críticos del funcional área para todas las variaciones que conservan el volumen. Este resultado es fundamental para demostrar que las esferas son las únicas hipersuperficies embebidas, compactas y conexas de  $\mathbb{R}^n$  que minimizan el área fijado un volumen encerrado. En esta parte seguiremos la referencia [49].

En la parte final de este capítulo, emplearemos el estudio desarrollado previamente para dar respuesta al problema isoperimétrico clásico en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Este nos dirá que entre todas las hipersuperficies compactas y conexas encerrando un volumen dado, la de menor área es la esfera. Esto será una consecuencia, prácticamente inmediata, del teorema de Alexandrov y la caracterización variacional de las hipersuperficies de curvatura media constante.

## 2.1. Desigualdad isoperimétrica en $\mathbb{R}^2$

Como se ha comentado en la introducción de este capítulo, en esta primera sección vamos a abordar la desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{R}^2$ . Para ello vamos a comenzar recordando algunas definiciones necesarias antes de pasar a la prueba del teorema central de esta sección.

**Definición 2.1.** Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$ , una parametrización de una curva en  $\mathbb{R}^2$ , donde  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$  (que puede ser  $\mathbb{R}$ , un intervalo de la forma  $[a, b]$  o cualquier otro intervalo). Diremos que:

- (I)  $\alpha$  es *regular* si es diferenciable y  $\alpha'(t) \neq 0$ , para cada  $t \in I$ .
- (II)  $\alpha$  es *cerrada* si se cumple una de las siguientes condiciones:

a)  $I = \mathbb{R}$  y existe un  $T > 0$  tal que  $\alpha(t + T) = \alpha(t)$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

- b)  $I = [a, b]$  y se verifica que  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . Si además  $\alpha$  es diferenciable, se requiere que sus derivadas de orden  $k$  en  $a$  y en  $b$  coincidan para todo  $k$ .
- c) Además, diremos que  $\alpha$  es *cerrada simple* si  $\alpha$  cumple la condición a) y es inyectiva en  $[0, T)$ , o si  $\alpha$  cumple la condición b) y es inyectiva en  $[a, b)$ .

**Definición 2.2.** Dada una curva parametrizada por  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , diremos que es una *curva de Jordan* si es una curva cerrada y simple.

**Definición 2.3.** Sea una curva regular contenida en  $\mathbb{R}^2$  y parametrizada por  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Dado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , se define la *longitud del arco* de curva  $\alpha([a, b])$  como la siguiente integral:

$$l(\alpha)|_{[a,b]} = \int_a^b |\alpha'(t)| dt. \quad (2.1)$$

Pasamos ahora a enunciar y demostrar la desigualdad isoperimétrica en el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$ . Además, este resultado dará respuesta al problema isoperimétrico en dimensión  $n = 2$ . La demostración de este resultado puede encontrarse en [17, pág. 34]. Pero primero enunciemos el teorema de la curva de Jordan, pues involucra varios conceptos que necesitaremos para la demostración de la desigualdad isoperimétrica en el plano  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 2.4** (Teorema de la curva de Jordan). *Sea  $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular, cerrada y simple. Entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha([0, l])$  tiene exactamente dos componentes conexas y  $\alpha([0, l])$  es su frontera común.*

**Observación 2.5.** Nótese que debido al Teorema 2.4 una curva regular, cerrada y simple divide al plano en dos componentes conexas (o regiones), una de ellas acotada que recibe el nombre de componente *interior* a la curva y la otra no acotada que recibe el nombre de componente *exterior* a la curva. Por otro lado, existe una versión más general de este teorema, la cual no exige que la curva sea regular. Una demostración de este resultado puede encontrarse en [25, pág. 169].

**Observación 2.6.** En ocasiones, nos referiremos a curva haciendo alusión a la traza de su parametrización y no a la parametrización en sí. Es decir, si tenemos una curva parametrizada por  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , también la identificaremos con su traza  $C = \alpha(I)$ .

**Teorema 2.7.** *Sea  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan, regular, de longitud  $l$  y sea  $A$  el área de la región interior  $\Omega$  encerrada por la curva  $C = \alpha(\mathbb{R})$ . Entonces, se cumple que  $l^2 \geq 4\pi A$ . Además, la igualdad se da si y solo si  $C$  es una circunferencia.*

*Demostración.* Dado que por hipótesis tenemos que la curva es una curva de Jordan, regular y diferenciable podemos tomar una parametrización por longitud de arco y asumir que está dada por  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , la cual suponemos en la forma  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  en  $\mathbb{R}^2$ , donde el intervalo  $[a, b]$  es un intervalo de longitud mínima tal que  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . Es más, como sabemos por hipótesis que la longitud de nuestra curva es  $l$ , podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $[a, b] = [0, l]$ . De esta forma, podemos obtener la siguiente fórmula para el área de la región interior  $\Omega$  encerrada por la curva, que denotamos por

$A(\Omega)$ . Además, suponemos que la curva está positivamente orientada, es decir, que se recorre en el sentido contrario a las agujas del reloj.

$$A(\Omega) = \int \int_{\Omega} 1 dx dy = \int_0^l \langle (-y(t), 0), (x'(t), y'(t)) \rangle dt, \quad (2.2)$$

donde la segunda igualdad se ha obtenido empleando el Teorema de Green en el plano. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^l x(t)y'(t) dt &= \int_0^l (x(t)y(t))' dt - \int_0^l x'(t)y(t) dt \\ &= [x(l)y(l) - x(0)y(0)] - \int_0^l x'(s)y(s) ds \\ &= - \int_0^l x'(s)y(s) ds. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Combinado la fórmula (2.3) con la fórmula (2.2) obtenemos que

$$A(\Omega) = \int_0^l x(t)y'(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^l (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt. \quad (2.4)$$

Consideremos dos rectas paralelas  $E, E'$  que no son tangentes a la curva  $C = \alpha([0, l])$ . En ese caso, podemos desplazarlas hasta que ambas sean tangentes a la curva  $C$ . Así, obtendríamos dos rectas paralelas  $L$  y  $L'$  tangentes a la curva  $C$ , por lo que la curva estaría contenida en la región comprendida por las rectas  $L$  y  $L'$ . Tomemos  $S_r^1$  un circunferencia de radio  $r$  que sea tangente a las rectas  $L$  y  $L'$ , pero que no corte a la curva  $C$ . Sea  $O$  el centro de dicha circunferencia y tomemos un sistema de coordenadas centrado en  $O$  y cuyo eje  $x$  sea perpendicular a las rectas  $L$  y  $L'$ . Supongamos que la parametrización que tenemos de nuestra curva, a saber,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , tiene puntos de tangencia con  $L$  y  $L'$  en los valores del parámetro  $s = 0$  y  $s = s_1$  respectivamente.

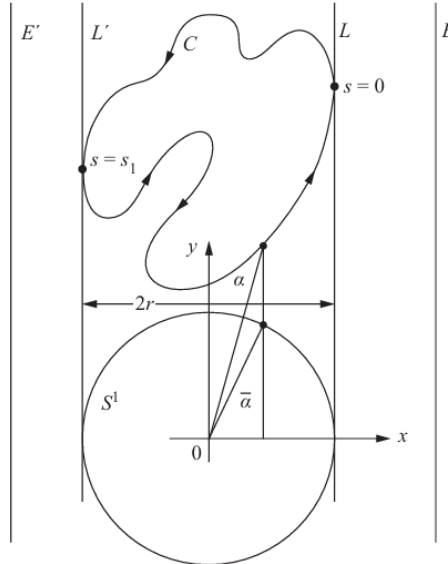


Figura 2.1: Idea de la demostración desigualdad isoperimétrica en el plano. Imagen extraída de [17].

Como se muestra en la Figura 2.1, definimos la parametrización de  $\mathbb{S}_r^1$  mediante  $\bar{\alpha}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (x(t), \bar{y}(t))$  con  $t \in [0, l]$ . De la definición de  $\mathbb{S}_r^1$  se sigue que la distancia entre las rectas  $L$  y  $L'$  es  $2r$ , por lo que aplicando la fórmula (2.4) y llamando  $\bar{A}$  al área interior encerrada por la circunferencia  $\mathbb{S}_r^1$ , tenemos que  $A = A(\Omega) = \int_0^l x(t)y'(t)dt$  y  $\pi r^2 = \bar{A} = -\int_0^l x'(t)\bar{y}(t)dt$ . De esta forma, podemos deducir que:

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^l (x(t)y'(t) - \bar{y}(t)x'(t)) dt \leq \int_0^l \sqrt{(x(t)y'(t) - \bar{y}(t)x'(t))^2} dt \\ &\leq \int_0^l \sqrt{(x^2(t) + \bar{y}^2(t))((x'(t))^2 + (y'(t))^2)} dt \\ &= \int_0^l \sqrt{\bar{x}^2(t) + \bar{y}^2(t)} dt = lr \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nótese que en la desigualdad anterior hemos utilizado que  $|\langle v_1, v_2 \rangle|^2 \leq |v_1|^2 |v_2|^2$ , donde la igualdad se da si y solo si  $v_1$  y  $v_2$  son múltiplos el uno del otro. De esta forma, hemos obtenido que  $A + \pi r^2 \leq lr$ , pero por otro lado, utilizando la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética, obtenemos que

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}lr. \quad (2.6)$$

Entonces  $4\pi A r^2 \leq l^2 r^2$  y, por lo tanto,  $4\pi A \leq l^2$ , lo que concluye la prueba para la primera parte del enunciado.

Para la segunda parte del enunciado, supongamos que  $4\pi A = l^2$ . Por (2.6), dado que tenemos la igualdad entre la primera y la tercera desigualdad, deducimos que  $A = \pi r^2$ , por lo tanto,  $l = 2\pi r$  y en consecuencia ese  $r$  no depende de la elección de la dirección de  $L$ . Además, por la igualdad en la expresión (2.5) obtenemos que  $(x, \bar{y}) = \lambda(y', -x')$  y entonces  $\lambda = \frac{x}{y'} = -\frac{\bar{y}}{x'} = \frac{\sqrt{x^2 + \bar{y}^2}}{\sqrt{(y')^2 + (x')^2}} = \pm r$ , por lo que  $x = \pm r y'$ , siempre que  $y' \neq 0$ . Si  $y' = 0$  entonces dado que nuestra curva es regular, se tiene que cumplir que  $x' \neq 0$  y, por lo tanto, el argumento que hemos empleado sigue siendo válido, pues tendríamos que  $(0, \bar{y}) = \lambda(0, -x')$ , de donde obtendríamos que  $\bar{y} = -\lambda x'$  y podríamos obtener análogamente el valor del parámetro  $\lambda$ . Ahora bien, al no depender  $r$  de la dirección de la elección de  $L$  podemos intercambiar  $x$  e  $y$  en la última relación, por lo que  $y = \pm r x'$ . Así,  $x^2(s) + y^2(s) = r^2((x'(s))^2 + (y'(s))^2) = r^2$ . Esto nos dice que nuestra curva  $C$  es una circunferencia y que por lo tanto la región interior  $\Omega$  contenida por dicha curva es un círculo.  $\square$

## 2.2. El Teorema de Alexandrov en $\mathbb{R}^n$

En esta sección vamos a demostrar el teorema de Alexandrov en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Para ello, como ya se comentó, emplearemos el método de reflexión de planos móviles, debido precisamente a Alexandrov en su artículo seminal [2]. Para aplicar dicho método, se necesitará una serie de definiciones y resultados del estudio de las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) elípticas que introduciremos en la primera subsección de esta parte de la memoria.

### 2.2.1. Curvatura media de un grafo y resultados de EDPs elípticas

En esta subsección vamos a exponer los resultados más relevantes de EDPs elípticas que necesitamos para demostrar el teorema de Alexandrov. Además, necesitaremos algunos cálculos sobre hipersuperficies escritas como el grafo de una función de clase  $\mathcal{C}^2$  que realizaremos a continuación.

**Observación 2.8.** Tomemos un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f$  una función real en  $\mathcal{C}^2(U)$ . El grafo de  $f$  nos da una hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{n+1}$  definida por

$$T = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) : (x_1, \dots, x_n) \in U\}.$$

Por un lado, es claro que  $T$  es un conjunto de nivel para la aplicación  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto x_{n+1} - f(x_1, \dots, x_n)$ ; de hecho, es el conjunto de nivel del cero. Por otro, el campo de vectores normal unitario a  $T$  apuntando hacia abajo tiene la expresión

$$\nu(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f(x_1, \dots, x_n)|^2}} (\nabla f(x_1, \dots, x_n), -1). \quad (2.7)$$

Es decir, para cada  $(x_1, \dots, x_n) \in U$  el vector  $\nu(x_1, \dots, x_n)$  puede verse como un punto en la semiesfera unitaria inferior abierta  $\mathbb{S}_-^n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , la cual puede parametrizarse como

$$(y_1, \dots, y_n, -\sqrt{1 - |(y_1, \dots, y_n)|^2})$$

con  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $|(y_1, \dots, y_n)| < 1$ .

En lo que sigue consideraremos en  $T$  las coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  y en  $\mathbb{S}_-^n$  las coordenadas  $(y_1, \dots, y_n)$ . En estas coordenadas, la aplicación de Gauss para  $T$  viene dada por la expresión  $G: T \rightarrow \mathbb{S}_-^n$ ,  $x \mapsto G(x) = \frac{\nabla f(x)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}}$ .

Sabemos que las curvaturas principales de la hipersuperficie  $T$  en un punto  $p$  de la misma son los autovalores del operador  $S_{\nu(p)}^p$ . Estos autovalores vendrán dados por los autovalores de la matriz jacobiana de la aplicación de Gauss que hemos calculado en el párrafo anterior, pero cambiada de signo. De esta forma, nos bastará con calcular los autovalores de dicha matriz jacobiana para obtener las curvaturas principales en el punto  $p$  y calcular así la curvatura media en cada punto de la hipersuperficie.

En primer lugar, nuestra aplicación de Gauss en coordenadas tiene la siguiente expresión

$$(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f(x_1, \dots, x_n)|^2}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}}{2 \sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) \\ &= \frac{1}{(1 + |\nabla f|^2)^{3/2}} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (1 + |\nabla f|^2) - \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

De esta forma, obtenemos que para cada  $p \in T$

$$S_{\nu(p)}^p = - \left( \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (1 + |\nabla f|^2) - \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}}{(1 + |\nabla f|^2)^{3/2}} \right)_{i,j}, \quad (2.8)$$

donde dicha expresión matricial está tomada respecto de la base de vectores coordinados de la parametrización de  $T$  que estamos considerando. Así, podemos calcular la curvatura media en un punto  $p$  de nuestra hipersuperficie  $T$  como

$$\begin{aligned} H(p) &= \text{tr}(S_{\nu(p)}^p) = \left( \sum_{i=1}^n - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f(p)|^2}} \right) \right) \\ &= - \left( \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f(p)|^2}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(p) - \frac{1}{(1 + |\nabla f(p)|^2)^{3/2}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \right) \\ &= - \left( \frac{\Delta f(p)}{\sqrt{1 + |\nabla f(p)|^2}} - \frac{\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial x_k}(p)}{(1 + |\nabla f(p)|^2)^{3/2}} \right) \\ &= - \left( \frac{\Delta f(p)}{\sqrt{1 + |\nabla f(p)|^2}} - \frac{D^2 f(p)(\nabla f(p), \nabla f(p))}{(1 + |\nabla f(p)|^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Nótese que  $D^2 f(p)$  representa la matriz hessiana de  $f$  en el punto  $p$  y además la estamos considerando como una aplicación bilineal. Ahora bien, definamos

$$\bar{a}_{ij}(y) := - \left( \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{1 + |y|^2}} - \frac{y_i y_j}{(1 + |y|^2)^{3/2}} \right) \quad \text{para cada } (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.9)$$

De esta forma, obtenemos que la curvatura media en un punto  $p$  de nuestra hipersuperficie tiene la expresión

$$H(p) = \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij}(p)(\nabla f(p)) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p). \quad (2.10)$$

Nos centramos ahora en establecer las definiciones y resultados sobre EDPs elípticas necesarios para probar el teorema de Alexandrov en  $\mathbb{R}^n$ . Para ello vamos a comenzar con el *principio fuerte del máximo* y el *lema de Hopf*.

Introducimos a continuación el concepto de EDP SMP-admisible, donde SMP son las siglas de *strong maximun principle* (principio fuerte del máximo). Esta definición nos será de gran utilidad en lo que sigue.

**Definición 2.9.** Dado  $U$  abierto de  $\mathbb{R}^n$  diremos que una EDP con incógnita  $\omega \in \mathcal{C}^2(U)$  es *SMP – admisible* si es de la forma

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{k=1}^n b_k(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \text{para cada } x \in U \quad (2.11)$$

y cumpliendo las siguientes condiciones:



1. Las funciones  $a_{ij}, b_k: U \longrightarrow \mathbb{R}$  son acotadas.
2. Para cada  $x \in U$  la matriz  $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$  es simétrica y uniformemente elíptica. El concepto *uniformemente elíptica* se refiere a que existe una constante  $\lambda > 0$  de forma que para cada  $x \in U$  el menor autovalor de  $A(x)$  es al menos  $\lambda$ . Esto es equivalente a que la función matricial  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ , donde hacemos variar el punto  $x$ , es uniformemente elíptica. Es decir, si vemos  $A(x)$  como una forma bilineal simétrica, esto es equivalente a que  $A(x)(\xi, \xi) \geq \lambda|\xi|^2$  para cada  $x \in U$  y para cada  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , siendo  $\lambda > 0$  una constante independiente de  $x$  y de  $\xi$ .

El concepto de EDP elíptica SMP-admisible ha sido extraído de [9]. Por otro lado, nótese que una EDP SMP-admisible no es más que una EDP lineal homogénea elíptica de orden dos que no posee término de orden cero. Es decir, no tiene un término de la forma  $c(x)\omega(x)$ . Por otro lado, dado un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  y dado  $x \in U$ , nos va a interesar considerar la aplicación bilineal cuya matriz asociada es

$$\bar{A}(x) = (-\bar{a}_{ij}(x))_{i,j=1}^n, \quad (2.12)$$

donde  $\bar{a}_{ij}$  viene dada por la ecuación (2.9), pues es la que nos aparecerá en los resultados previos a la demostración del teorema de Alexandrov.

**Teorema 2.10** (Principio fuerte del máximo). *Sea  $U$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  abierto, conexo y acotado. Supongamos que  $\omega \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\bar{U})$  es una solución de una EDP que sea SMP-admisible. Si  $\omega$  alcanza su máximo sobre  $\bar{U}$  en un punto interior, entonces  $\omega$  es constante en  $U$ .*

**Teorema 2.11** (Lema de Hopf). *Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\omega \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\bar{U})$  una solución de una EDP SMP-admisible. Supongamos que existe un punto  $y \in \partial U$  de forma que  $\omega(y) > \omega(x)$  para cada  $x \in U$  y supongamos que existe una bola abierta  $B$  contenida estrictamente en  $U$  con  $y \in \partial B$ . Entonces,  $\frac{\partial \omega}{\partial \nu}(y) > 0$  donde ese  $\nu$  es el vector normal unitario exterior a  $B$  en el punto  $y$ .*

La demostración tanto del Teorema 2.10, como del Teorema 2.11, pueden verse en [22, Section 6.4].

**Observación 2.12.** En el Teorema 2.11, la hipótesis de la existencia de la bola abierta  $B$  se cumple, por ejemplo, si la frontera  $\partial U$  del abierto  $U$  es diferenciable de clase  $\mathcal{C}^2$ .

A continuación, vamos a enunciar unos resultados que nos darán condiciones suficientes para determinar cuándo dos hipersuperficies que pueden escribirse, al menos localmente, como el grafo de una función son la misma.

**Lema 2.13.** *Sea  $V$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  acotado. Consideremos la matriz  $\bar{A}(\cdot) = (-\bar{a}_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^n$  como aplicación bilineal (dada en la ecuación (2.12)). Entonces existe  $\lambda > 0$  de forma que  $\bar{A}(x)(\xi, \xi) \geq \lambda|\xi|^2$  para cada  $x \in V$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Si tomamos un  $x \in V$  arbitrario y consideramos los coeficientes  $-\bar{a}_{ij}(x)$  dados en la Observación 2.8 (ecuación (2.9)) obtenemos que

$$\bar{A}(x) = (-\bar{a}_{ij}(x))_{i,j=1}^n = \left( \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{1+|x|^2}} - \frac{x_i \cdot x_j}{(1+|x|^2)^{3/2}} \right)_{i,j=1}^n.$$

De esta forma, si tomamos  $\xi \in \mathbb{R}^n$  arbitrario y le aplicamos  $\bar{A}(x)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{A}(x)(\xi, \xi) &= - \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij}(x) \xi_i \cdot \xi_j = \sum_{i,j=1}^n -\bar{a}_{ij}(x) \xi_i \cdot \xi_j \\ &= \left( \frac{|\xi|^2}{\sqrt{1+|x|^2}} - \frac{\langle x, \xi \rangle^2}{(1+|x|^2)^{3/2}} \right) \\ &\geq \frac{|\xi|^2}{\sqrt{1+|x|^2}} - \frac{|x|^2 \cdot |\xi|^2}{(1+|x|^2)^{3/2}} \\ &\geq |\xi|^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1+M^2}} - \frac{M^2}{(1+M^2)^{3/2}} \right) = |\xi|^2 \frac{1}{(1+M^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

La primera desigualdad se obtiene aplicando Cauchy-Schwarz, pues obtenemos que  $\langle x, \xi \rangle^2 \leq |x|^2 \cdot |\xi|^2$ . Ahora bien, como  $V$  es acotado, existe  $M > 0$  tal que  $|x| \leq M$  para cada  $x \in V$ , por lo que se tiene la última desigualdad. Además, si tomamos  $\lambda = \frac{1}{(1+M^2)^{3/2}}$  tenemos el resultado.  $\square$

**Lema 2.14.** *Sea  $U$  un abierto conexo y acotado de  $\mathbb{R}^n$  y sean  $u, v \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\bar{U})$  tales que  $\nabla u, \nabla v, D^2u, D^2v$  son acotadas en  $U$ . Supongamos que las hipersuperficies de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que definen los grafos de  $u$  y  $v$  son de curvatura media constante y tienen la misma curvatura media (en ambos casos respecto de un campo normal unitario que apunta hacia abajo). Entonces,  $\omega := u - v$  es solución de una EDP SMP-admisible.*

*Demostración.* Por la Observación 2.8 tenemos que la curvatura media de la hipersuperficie dada por el grafo de  $u$  es  $H = \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ , mientras que para la hipersuperficie definida por  $v$  tenemos  $H = \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij}(\nabla v) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$ . Nótese que aunque en principio la definición de  $H$  depende del punto de nuestra hipersuperficie, en este caso, al ser hipersuperficies de curvatura media constante podemos obviar dicho punto.

Ahora bien, por hipótesis ambas curvaturas coinciden, por lo que podemos restar ambas expresiones obteniendo

$$0 = \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij}(\nabla v) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \bar{a}_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.13)$$

Tomemos  $\omega = u - v$ . Si sumamos y restamos el término  $\bar{a}_{ij}(\nabla v) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$  en el interior del sumatorio de la expresión anterior obtenemos que

$$0 = \sum_{i,j=1}^n -\bar{a}_{ij}(\nabla v) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} + (-\bar{a}_{ij}(\nabla u) + \bar{a}_{ij}(\nabla v)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.14)$$

Podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo para obtener

$$\bar{a}_{ij}(\nabla v) - \bar{a}_{ij}(\nabla u) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \bar{a}_{ij}(t\nabla v + (1-t)\nabla u) dt. \quad (2.15)$$

Utilizando la regla de la cadena para derivar la expresión de dentro de la integral en (2.15) obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{a}_{ij}((1-t)\nabla u + t\nabla v) &= \langle \nabla \bar{a}_{ij}((1-t)\nabla u + t\nabla v), \nabla u - \nabla v \rangle \\ &= \langle \nabla \bar{a}_{ij}((1-t)\nabla u + t\nabla v), \nabla \omega \rangle. \end{aligned}$$

Es decir, hemos obtenido que

$$\bar{a}_{ij}(\nabla v) - \bar{a}_{ij}(\nabla u) = \left\langle \int_0^1 \nabla \bar{a}_{ij}((1-t)\nabla u + t\nabla v) dt, \nabla \omega \right\rangle. \quad (2.16)$$

Para ver que verifica una EDP SMP-admisible, tomemos un  $p \in U$  y sean

$$a_{ij}(p) := -\bar{a}_{ij}(\nabla u(p)),$$

$$b_k(p) := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(p) \int_0^1 \frac{\bar{a}_{ij}}{\partial x_k}((1-t)\nabla u + t\nabla v) dt.$$

Por lo que por (2.13) se puede reescribir (2.16) como

$$0 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(p) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j}(p) + \sum_{k=1}^n b_k(p) \frac{\partial \omega}{\partial x_k}(p) \quad \text{para cada } p \in U. \quad (2.17)$$

Nos faltaría comprobar en primer lugar, que las funciones  $a_{ij}$  y las  $b_k$  son acotadas. Esto es claro por la hipótesis de acotación de  $\nabla u, \nabla v, D^2 u$  y  $D^2 v$ . Por lo tanto, para concluir la demostración, tan solo falta ver que la matriz  $\bar{A}(p) := (-\bar{a}_{ij}(p))_{i,j=1}^n$  es simétrica y uniformemente elíptica. La simetría es clara por la Observación 2.8 pues ya calculamos en ella los  $\bar{a}_{ij}(p)$ .

Por otro lado, dado que por hipótesis  $U$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^n$ , estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.13, obteniendo así que  $\bar{A}(p)$  es uniformemente elíptica al tener por coeficientes los  $a_{ij}(p) := -\bar{a}_{ij}(p)$ , calculados en la Observación 2.8. Como la elección de  $p$  era arbitraria, obtenemos el resultado.  $\square$

Con estos resultados, estamos en condiciones de presentar dos lemas que nos proporcionarán condiciones suficientes para concluir cuándo dos hipersuperficies de curvatura media constante son la misma.

**Lema 2.15.** *Sea  $U = \{p \in \mathbb{R}^n : |p| < r\}$ , es decir,  $U$  es la bola abierta de radio  $r$  centrada en el origen de  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que tenemos dos funciones  $u, v \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\bar{U})$  que determinan el grafo de dos hipersuperficies de curvatura media constante con la misma curvatura media, tales que  $\nabla u, \nabla v, D^2 u, D^2 v$  son acotadas en  $U$ . Si  $u \leq v$  en  $U$  y  $u(0) = v(0)$ , entonces  $u = v$  en  $U$ .*

*Demostración.* Tomemos  $\omega = u - v$ . Por hipótesis sabemos que  $u \leq v$  en  $U$ , por lo que  $\omega \leq 0$  en  $U$  y como  $u(0) = v(0)$ , entonces  $\omega$  alcanza un máximo en el punto 0. Ahora bien, por el Lema 2.14  $\omega$  es solución de una EDP SMP-admisible, por lo tanto, podemos aplicar el principio fuerte del máximo (Teorema 2.10) a  $\omega$ . De esta forma,  $\omega$  ha de ser constante en  $U$ , pero como  $\omega(0) = u(0) - v(0) = 0$ , entonces  $\omega \equiv 0$ , por lo que  $u = v$  en  $U$ .  $\square$

**Lema 2.16.** Sea  $U = \{p \in \mathbb{R}^n : |p| < r, p_n > 0\}$ , es decir,  $U$  es la mitad superior de la bola abierta de radio  $r$  centrada en el origen de  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que tenemos  $u, v \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\bar{U})$  dos funciones que determinan el grafo de dos hipersuperficies de curvatura media constante con la misma curvatura media, tales que  $\nabla u, \nabla v, D^2u, D^2v$  son acotadas en  $U$ . Si  $u \leq v$  en  $U$ ,  $u(0) = v(0)$  y  $\frac{\partial u}{\partial x_n}(0) = \frac{\partial v}{\partial x_n}(0)$ , entonces  $u = v$  en  $U$ .

*Demostración.* Tomemos  $\omega = u - v$ . Por hipótesis sabemos que  $u \leq v$  en  $U$  por lo que  $\omega \leq 0$  en  $U$  y que  $\omega$  alcanza un máximo en 0, pues  $\omega(0) = 0$ . Ahora bien, por el Lema 2.15 podemos aplicar el Lema de Hopf (Lema 2.11) en el punto 0. Como  $\frac{\partial \omega}{\partial x_n}(0) = 0$  obtenemos que  $\omega$  ha de ser constante en  $U$ , pero como  $\omega(0) = u(0) - v(0) = 0$ , entonces  $\omega \equiv 0$  en  $U$ . Así, obtenemos que  $u = v$  en  $U$ .  $\square$

### 2.2.2. El teorema de Alexandrov

A continuación, vamos a demostrar el teorema de Alexandrov en  $\mathbb{R}^n$ . Como ya comentamos en la introducción de este capítulo, este resultado constituirá una pieza fundamental en la resolución del problema isoperimétrico en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . En su demostración se emplea una técnica conocida como el *método de reflexión* o de los *planos móviles de Alexandrov*. Esta técnica fue creada por Alexandrov en [1], para probar que en  $\mathbb{R}^n$  cualquier hipersuperficie compacta, conexa y de curvatura media constante debe tener un plano de simetría en cualquier dirección. Una vez probado esto, veremos un resultado que nos dice que una hipersuperficie en estas condiciones ha de ser una esfera, lo que nos permitirá probar el resultado central de esta sección y concluir que cualquier hipersuperficie compacta, conexa y de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^n$  es una esfera.

En lo que queda de sección, vamos a suponer que  $M$  es una hipersuperficie embebida, conexa y compacta de  $\mathbb{R}^n$ . En las siguientes líneas probaremos que si  $M$  tiene un hiperplano de simetría en cualquier dirección entonces  $M$  es una esfera. Para demostrar este resultado, nos será de gran utilidad conocer el concepto de *centro de masa* para una hipersuperficie de  $\mathbb{R}^n$ . Veamos su definición.

**Definición 2.17.** Dada una hipersuperficie compacta  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  y dado  $\vec{r}$  el vector posición en cada punto de  $M$ , se define el *centro de masa*  $\mathbf{R}$  de  $M$  como la única solución de la expresión

$$\mathbf{R} = \frac{1}{V(M)} \int_M \vec{r} dV,$$

donde  $dV$  denota a la  $n$ -forma de volumen en  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 2.18.** Sea  $M$  una hipersuperficie compacta y conexa de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $M$  tiene un plano de simetría en cualquier dirección, entonces es una esfera.

*Demostración.* Por medio de una traslación, si fuese necesario, podemos ubicar  $M$  de forma que su centro de masa (Definición 2.17) ocupe el origen de coordenadas. De esta forma, es claro que ahora cada plano de simetría de  $M$  contiene al origen, pues cada uno de sus planos de simetría pasa por su centro de masa. Por hipótesis,  $M$  posee un plano de simetría en cada dirección, por lo que cada plano conteniendo al origen es un plano de simetría para  $M$ .

Considérese el grupo  $O(n)$  de isometrías lineales de  $\mathbb{R}^n$ . Sabemos que cada elemento de este grupo puede escribirse como una composición finita de reflexiones respecto de hiperplanos que contienen al origen, véase [30, Sections 0.3, 0.4] y [21, Section 2.3]. Ahora bien, como  $M$  es invariante bajo esa reflexión,  $M$  es invariante bajo cada transformación ortogonal. Así, como  $M$  es conexa y cerrada,  $M$  ha de ser una esfera.  $\square$

En virtud del lema anterior, el teorema de Alexandrov se seguirá de probar que toda hipersuperficie conexa y compacta de  $\mathbb{R}^n$  con curvatura media constante tiene un hiperplano de simetría en cualquier dirección. Esto será el objetivo del siguiente resultado, que constituye el núcleo central de la prueba del teorema de Alexandrov mediante el método de los planos móviles. Pero antes recordemos el teorema de separación de Jordan-Brouwer. Este resultado nos dice que cualquier hipersuperficie compacta y conexa de  $\mathbb{R}^n$  divide al espacio euclídeo en dos regiones conexas.

**Teorema 2.19** (Teorema de separación de Jordan-Brouwer). *Sea  $M$  una hipersuperficie compacta y conexa del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $M$  divide a  $\mathbb{R}^n$  en dos regiones conexas, una de ellas exterior, que denotamos por  $D_0$  y una interior, que denotamos por  $D_1$ . Además,  $\overline{D_1}$  es una variedad compacta con borde  $\partial D_1 = M$ .*

Una demostración del Teorema 2.19 puede verse en [24, pág. 89].

**Proposición 2.20.** *Sea  $M$  una hipersuperficie de  $\mathbb{R}^{n+1}$  compacta, conexa y de curvatura media constante. En estas condiciones,  $M$  posee un plano de simetría en cualquier dirección.*

*Demostración.* Supongamos que  $M$  es una hipersuperficie embebida de  $\mathbb{R}^{n+1}$  compacta, conexa y de curvatura media constante. Sea  $\xi \in \mathbb{S}^n$ , donde  $\mathbb{S}^n$  es la esfera unitaria de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y ese  $\xi$  lo mantenemos fijo. Consideremos  $P = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, \xi \rangle = 0\}$  y  $P_t = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, \xi \rangle = t\} = P + t\xi$  de forma que  $t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, es claro que  $P$  es un hiperplano de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasa por el origen y es ortogonal a  $\xi$  y, por otro lado,  $P_t$  se obtiene a partir de  $P$  trasladándolo una distancia  $t$  en la dirección de  $\xi$ . Ahora bien, para cada  $t \in \mathbb{R}$  se tiene que  $P_t$  divide a  $M$  en dos partes; por un lado, la región  $M_t^+ := M \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, \xi \rangle \geq t\}$  y, por otro,  $M_t^- := M \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, \xi \rangle \leq t\}$ . De esta forma, nótese que  $M_t^+$  y  $M_t^-$  son hipersuperficies con borde  $\partial M_t^+ = \partial M_t^- = M \cap P_t$ .

Como  $M$  es compacta por hipótesis, sabemos por el Teorema 2.19 que es la frontera de una región  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  acotada y cerrada. Definamos ahora  $\bar{M}_t^-$  como la reflexión respecto de  $P_t$  de  $M_t^-$ . Entonces dado  $t \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeño, negativo si fuese necesario,  $M_t^- = \emptyset$  pues el hiperplano  $P_t$  quedaría por debajo de  $M$ . Así, si vamos aumentando el valor del  $t$ , existirá un  $t \in \mathbb{R}$  para el cual  $\bar{M}_t^- \cap \Omega \neq \emptyset$ .

Definamos  $t_0 := \inf \{t \in \mathbb{R} : \bar{M}_t^- \not\subset \Omega\}$  y nótese que  $t_0 < \infty$  al ser  $M$  compacta. Fijemos  $t = t_0$ . En ese caso para ese valor del parámetro  $t$  ocurren al menos una de las dos siguientes situaciones:

**Caso 1:** La intersección  $\text{int}(M_t^+) \cap \text{int}(\bar{M}_t^-) \neq \emptyset$ , es decir,  $M_t^+$  y  $\bar{M}_t^-$  tienen un punto interior en común.

**Caso 2:** Existe un punto  $y \in M \cap P_t$  de forma que  $T_y M_t^+ = T_y \bar{M}_t^-$ .

Para el primer caso, por el carácter minimal de  $t = t_0$  podemos escribir  $\bar{M}_t^-$  como un grafo sobre el hiperplano  $P_t$ . Ahora queremos ver que si tomamos un punto  $y \in \text{int}(M_t^+) \cap \text{int}(\bar{M}_t^-)$  existe un entorno abierto de  $y$  en el cual las dos hipersuperficies  $M_t^+$  y  $\bar{M}_t^-$  coinciden. En efecto, sea pues un punto  $y$  de esta forma y tomemos un sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  con las siguientes propiedades:

1. El origen es el punto  $y$ .
2.  $\text{span} \{\partial x_1, \dots, \partial x_n\}$  es el espacio tangente a  $M$  en ese punto  $y$ .
3. El vector  $\partial x_{n+1}$  se corresponde con la dirección  $\xi$ .

Tomando estas coordenadas y aplicando el teorema de la función implícita, existe una función  $u$  y un entorno  $U$  del 0 de  $\mathbb{R}^n$ , de forma que, en este entorno,  $\bar{M}_t^-$  viene dada por la ecuación  $x_{n+1} = u(x_1, \dots, x_n)$ . Nótese además que  $u(0) = 0$ , pues se corresponde al punto  $y$ . Ahora bien, como  $y \in \text{int}(\bar{M}_t^-)$  y el segundo caso no puede darse para valores de  $t$  menores que  $t_0$  debido a su carácter minimal, sabemos que el vector normal a  $\bar{M}_t^-$  en  $y$  no es paralelo a  $P_t$ . Por otro lado, debido a la minimalidad de  $t = t_0$ ,  $M_t^-$  queda por debajo de  $M_t^+$ , luego  $\bar{M}_t^-$  y  $M_t^+$  tienen el mismo plano tangente en  $y$ . De aquí deducimos que el vector normal a  $M_t^+$  en  $y$  no es paralelo a  $P_t$ , por lo que restringiendo el entorno  $U$  del origen de nuestras coordenadas si fuese necesario, se tiene que:

- Existe una función diferenciable  $v: U \rightarrow \mathbb{R}$  con  $v(0) = 0$  cumpliendo que  $M_t^+$  puede escribirse como  $(x_1, \dots, x_n, v(x_1, \dots, x_n))$ .
- Se verifica que  $\nabla u, \nabla v, D^2 u, D^2 v$  están acotadas en  $U$ .

Así, como  $\bar{M}_t^-$  queda por debajo de  $M_t^+$ ,  $u \leq v$  en  $U$ , además  $u(y) = v(y)$ . Luego aplicando Lema 2.15 obtenemos que  $u = v$  en  $U$ .

Como consecuencia de la argumentación previa deducimos que  $\text{int}(M_t^+) \cap \text{int}(\bar{M}_t^-)$  es un subconjunto abierto de  $\bar{M}_t^-$ , ya que para cada punto  $y \in \text{int}(M_t^+) \cap \text{int}(\bar{M}_t^-)$ , podemos encontrar un abierto  $U$  conteniendo a  $y$  donde  $M_t^+$  y  $\bar{M}_t^-$  coinciden. La intersección de estos grafos en un entorno abierto es también un conjunto abierto, ya que las funciones que los definen son continuas y diferenciables. Además, dicho subconjunto es también cerrado en  $M_t^-$ , pues  $M_t^+ \cap \bar{M}_t^-$  es cerrado en  $\bar{M}_t^-$ . Esto se debe a que gracias al carácter minimal de  $t_0$ , cualquier punto límite de  $\text{int}(M_t^+) \cap \text{int}(\bar{M}_t^-)$  que sea punto de  $\bar{M}_t^-$  ha de pertenecer a  $M_t^+$ , de lo contrario podríamos encontrar un valor menor para  $t$  de forma que  $\bar{M}_t^-$  no corte a  $M_t^+$ , lo que contradice la elección de  $t_0$ . Así, si  $y \in \text{int}(M_t^+) \cap \text{int}(\bar{M}_t^-)$  las dos hipersuperficies,  $\bar{M}_t^-$  y  $M_t^+$ , coinciden en la componente conexa de  $\text{int}(\bar{M}_t^-)$  que contiene a

$y$ . Es decir, la clausura de la componente conexa en  $\mathbb{R}^{n+1}$  de  $\text{int}(\bar{M}_t^-)$  que contiene al punto  $y$  y su reflexión están contenidas en  $M$ . De esta forma, si juntamos  $M_t^+$  y  $M_t^-$  forman una hipersuperficie cerrada, conexa y contenida en  $M$ , luego han de ser toda la hipersuperficie  $M$ . Por lo tanto, hemos probado que  $P_t$  con  $t = t_0$  es un plano de simetría de  $M$ .

Finalmente, para el segundo caso supongamos un punto  $y \in M \cap P_t$  tal que  $T_y M_t^+ = T_y \bar{M}_t^-$ , donde recordemos que habíamos fijado  $t = t_0$ . En ese caso el espacio tangente a  $M$  en  $y$  contiene a la dirección  $\xi$ . De forma análoga al caso anterior tomemos un sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  con las siguientes propiedades:

1. El origen es  $y$ .
2.  $\text{span}\{\partial x_1, \dots, \partial x_n\}$  es el espacio tangente a  $M$  en  $y$ .
3. La coordenada  $x_n$  corresponde a la dirección  $\xi$ .
4. La coordenada  $x_{n+1}$  corresponde a la dirección normal apuntando hacia afuera de  $M$  en el punto  $y$ .

En estas coordenadas  $y$ , de forma análoga al caso anterior,  $M_t^+$  y  $\bar{M}_t^-$  pueden escribirse localmente como el grafo de una función. Es decir, aplicando el teorema de la función implícita,  $\bar{M}_t^-$  está dada por  $x_{n+1} = u(x_1, \dots, x_n)$  y  $M_t^+$  está dada por  $x_{n+1} = v(x_1, \dots, x_n)$  para ciertas  $u, v: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $U = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 < r, x_n > 0\}$  para algún  $r > 0$  suficientemente pequeño y  $u, v \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\bar{U})$ . Así, tomemos un  $r$  suficientemente pequeño de forma que  $\nabla u, \nabla v, D^2 u, D^2 v$  sean acotadas en  $U$ . Ahora bien, como  $y \in M_t^+ \cap \bar{M}_t^-$ , por las coordenadas que hemos fijado,  $u(0) = v(0)$ . Entonces como el vector normal a  $M$  en  $y$  es tangente a  $P_t$  con  $t = t_0$ , tenemos que  $\frac{\partial u}{\partial x_n}(0) = \frac{\partial v}{\partial x_n}(0)$  y, por la minimalidad de  $t_0$ ,  $u \leq v$  en  $U$ . Aplicando el Lema 2.16 obtenemos que  $u = v$  en  $U$ . Por lo tanto,  $\text{int}(M_t^+) \cap \text{int}(\bar{M}_t^-) \neq \emptyset$  y en consecuencia podemos reducirnos al primero de los casos.  $\square$

**Corolario 2.21** (Teorema de Alexandrov). *Sea  $M$  una hipersuperficie embebida de  $\mathbb{R}^{n+1}$  compacta, conexa y de curvatura media constante. Entonces  $M$  es una  $n$ -esfera.*

*Demostración.* Por la Proposición 2.20 sabemos que al ser  $M$  una hipersuperficie de  $\mathbb{R}^{n+1}$  compacta, conexa y de curvatura media constante,  $M$  posee un plano de simetría en cualquier dirección. Ahora bien, por el Lema 2.18, si esto ocurre,  $M$  es una  $n$ -esfera.  $\square$

## 2.3. Fórmulas y propiedades variacionales

Dado que uno de nuestros objetivos es determinar cuáles son las soluciones al problema isoperimétrico en  $\mathbb{R}^n$ , a lo largo de esta sección vamos a introducir el concepto de *variación* de una hipersuperficie  $M$  en una variedad riemanniana  $\bar{M}$  y la *fórmula de la primera variación*. De forma intuitiva, una *variación* de una hipersuperficie  $M$  consiste en una deformación de  $M$ , a través de una familia diferenciable  $M_t$  de hipersuperficies, con  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , de forma que  $M_0 = M$ . Dicha deformación se realiza en la dirección de vectores

que conforman un campo de vectores a lo largo de  $M$  denominado *campo de vectores variacional*.

Una vez tratadas las principales definiciones sobre variaciones y la fórmula de la primera variación, dado que pretendemos dar respuesta al problema isoperimétrico en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , nos centraremos en las *variaciones que preservan el volumen*. Es decir, si nosotros tenemos un volumen dado, el problema isoperimétrico nos hace plantearnos cuáles de entre todas las hipersuperficies que encierran ese volumen minimizan su área. Estas hipersuperficies se van a corresponder con mínimos para la función área, entre todas las hipersuperficies encerrando ese volumen y, por lo tanto, serán puntos críticos para dicha función, por lo que  $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}A(M_t) = 0$ , donde  $M_t$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , es una variación de una de estas hipersuperficies. Por otro lado, en lo referente al volumen encerrado por una hipersuperficie, ya que en una variedad riemanniana ambiente arbitraria no podemos apelar al Teorema de Jordan-Brouwer, supondremos que nuestras hipersuperficies embebidas dividen a la variedad ambiente en dos regiones, siendo al menos una de ellas acotada. Probaremos además la existencia de variaciones que preservan el volumen, dando finalmente una caracterización de las hipersuperficies con curvatura media constante de una variedad riemanniana, como aquellas que son puntos críticos del funcional área para cualquier variación que preserve el volumen. De esta forma, estaremos en condiciones de probar el problema isoperimétrico en el espacio  $\mathbb{R}^n$ , combinando esta caracterización con el Teorema de Alexandrov. Para los contenidos de esta sección hemos seguido principalmente las referencias [49], [46].

### 2.3.1. Fórmula de la primera variación

Comenzamos con las definiciones y resultados básicos sobre variaciones y algunas propiedades relevantes.

**Definición 2.22.** Sea  $M$  una hipersuperficie embebida de una variedad riemanniana  $(\bar{M}, g)$  de dimensión  $n$ . En estas condiciones, una *variación* de  $M$  consiste en una aplicación diferenciable

$$F: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \bar{M}$$

de forma que para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , la función  $F_t: M \longrightarrow \bar{M}$ , dada por  $F_t(p) := F(p, t)$  para cada  $p \in M$ , satisface las siguientes condiciones:

- (I)  $F_0$  es la inclusión.
- (II)  $F_t: M \longrightarrow \bar{M}$  es un embebimiento para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

El *campo vectorial variacional*  $X$  en un punto  $p \in M$  se define como el vector tangente en  $t = 0$  a la curva  $t \mapsto F_t(p)$ . Es decir,  $X_p = \frac{\partial F}{\partial t}(p, 0) = (dF)|_{(p,0)}(\partial_t)$ . Además, diremos que la variación  $F$  con campo variacional  $X$  es de *soporte compacto* si el campo variacional  $X$  tiene soporte compacto en  $M$ . Llamaremos *soporte* de  $F$  al soporte de  $X$  y lo denotaremos por  $\text{sop}(X)$ . Recordemos que el soporte del campo vectorial  $X$  es el menor subconjunto cerrado que contiene a todos los puntos  $p \in M$  tales que  $X_p \neq 0$ .



**Observación 2.23.** Geométricamente, una variación con campo variacional de soporte compacto, siguiendo la definición anterior, consiste en deformar la hipersuperficie en un subconjunto compacto, pero dejándola invariante fuera de ese subconjunto.

Con la Definición 2.22, una pregunta natural que surge es si dada una hipersuperficie  $M$  y un campo vectorial a lo largo de dicha hipersuperficie, existe una variación con dicho campo como campo variacional. La respuesta es afirmativa, pero antes vamos a enunciar y probar un resultado de carácter topológico que nos será de gran utilidad para probar la existencia de variaciones.

**Lema 2.24.** Sean  $M$  y  $\bar{M}$  en las condiciones de la Definición 2.22 y sea  $X$  un campo vectorial diferenciable a lo largo de  $M$  cuyo soporte es compacto. Entonces existe  $\varepsilon > 0$ , de forma que la aplicación  $F: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$  dada por  $F_t(p) = F(p, t) = \exp_p(tX_p)$  es una variación de  $M$  con campo variacional  $X$ .

*Demostración.* Recordemos en primer lugar que la aplicación  $\exp$  denota la aplicación exponencial de la variedad riemanniana  $\bar{M}$ . Tomemos

$$\varepsilon_1 = \min \left\{ r > 0 : \exp_p \text{ está definida en } B_p(|X_p|r) \text{ para } p \in \text{sop}(X) \right\}.$$

De esta forma,  $F$  está bien definida y es diferenciable en  $M \times (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ . Por otro lado, fijado  $p$  se verifica que  $F(p, t) = \exp_p(tX_p)$  es la geodésica que pasa por  $p$  con velocidad inicial  $X_p$ . Así, es claro que  $F_0$  es la inclusión y que  $X$  es el campo variacional de  $F$ . Finalmente, dado que la aplicación exponencial es un difeomorfismo local en un entorno de 0 en  $T_p\bar{M}$ , esto garantiza que escogiendo un  $\varepsilon_1 > 0$  quizá menor, la aplicación  $F_t$  tiene rango  $n - 1$ , donde  $n = \dim(\bar{M})$ , por lo que  $F_t$  es una inmersión para cada  $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ .

Por otro lado, uno de los ingredientes necesarios para ver que las  $F_t$  son embebimientos para un cierto rango del parámetro  $t$ , es ver que existe un cierto  $\varepsilon_2 > 0$ , de forma que para todo  $|t| < \varepsilon_2$  se verifique que  $F_t$  sea inyectiva. En primer lugar, definimos  $K := \text{sop}(X)$ . Si tomamos un  $p \notin K$  se tiene que  $X_p = 0$ , por lo que  $F_t(p, t) = p$ , luego fuera del compacto  $K$  la inyectividad está garantizada. Ahora bien, sabemos que la aplicación  $\exp$  es un difeomorfismo local, es decir, para cada  $p \in K$  existe un  $r_p > 0$ , de forma que la aplicación  $\exp_p: B(0, r_p) \subset T_p\bar{M} \rightarrow \bar{M}$  es inyectiva. Por continuidad del campo vectorial  $X$  y compacidad de  $K$ , existe para cada punto  $p \in K$  un  $\delta_p > 0$  tal que  $|tX_p| < r_p$ , para todo  $t \in (-\delta_p, \delta_p)$ . Tomemos la bola  $B(p, r_p)$ , para cada  $p \in K$ , lo cual nos da un recubrimiento del compacto  $K$ . Ahora bien, como  $K$  es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito, digamos  $\{B(p_j, r_{p_j})\}_{j=1}^m$ . Si tomamos  $\varepsilon_2 = \min \{\delta_{p_j} : j = 1, \dots, m\}$ , se tiene que  $F_t$  es inyectiva para cada  $t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ . Por lo tanto, tomando  $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , tenemos que  $F_t$  es una inmersión inyectiva para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Finalmente, nos falta por probar que las  $F_t$  son embebimientos. Para ello tenemos que ver que son homeomorfismos sobre su imagen. En esta línea, consideremos para un  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  la aplicación  $F_t: M \rightarrow F_t(M)$ . Sabemos que esa  $F_t$  (con codominio dado por su imagen) es biyectiva, además por ser  $F_t$  una inmersión inyectiva, se verifica que es un homeomorfismo local. De esta forma, por un resultado de topología que nos dice

que si tenemos una aplicación entre espacios topológicos biyectiva y que, además, es un homeomorfismo local, entonces es un homeomorfismo, se tiene que  $F_t$  es un homeomorfismo sobre su imagen y, por lo tanto, como teníamos probado que es una inmersión inyectiva, se tiene que  $F_t$  es un embebimiento para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .  $\square$

**Definición 2.25.** Dada una hipersuperficie  $M$  embebida en una variedad riemanniana  $\bar{M}$  de dimensión  $n$  y dada una variación  $F$  de  $M$ , diremos que  $F$  es una *variación normal* si el campo vectorial variacional  $X$  de  $F$  es ortogonal a  $T_p M$  para cada  $p \in M$ .

Nótese que al ser  $M$  una hipersuperficie embebida y conexa en  $\bar{M}$ , cada espacio normal a  $M$  tiene dimensión 1, por lo que si elegimos un vector normal unitario  $N$  en un punto de  $M$  tan solo tenemos como vectores normales unitarios  $N$  y  $-N$ . De esta forma, si  $M$  y  $\bar{M}$  están orientadas, podemos elegir ese campo vectorial normal  $N$  de manera que

$$\omega(E_1, \dots, E_{n-1}, N_p) = 1,$$

para cada  $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$  base orientada de  $T_p M$ , donde  $\omega$  es la forma de orientación de  $\bar{M}$ . De esta forma, llamaremos a este  $N$  la *función de Gauss compatible con la orientación*.

A continuación, vamos a enunciar y demostrar la *fórmula de la primera variación*. Pero antes presentaremos unos breves preliminares necesarios para abordar dicha prueba.

Sea  $(\bar{M}, g)$  una variedad riemanniana de dimensión  $n$  y sea  $M$  una hipersuperficie embebida de esa  $\bar{M}$ . Consideremos una variación

$$F: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \bar{M}, (p, t) \mapsto F(p, t) = F_t(p).$$

Definamos  $M_t := F_t(M)$ , donde  $F_0(M) \equiv M$  y sea  $\omega_t$  la forma de volumen inducida en  $M_t$ . En estas condiciones, definimos el volumen de  $M_t$  como

$$A(M_t) = \int_M F_t^* \omega_t$$

y es claro que se tiene

$$A(M) = \int_M \omega_0 = \int_M F_0^* \omega_0.$$

Por otro lado, dado  $p \in M$ , el campo variacional asociado es  $X_p = \frac{\partial F}{\partial t}(p, 0) = (dF)|_{(p,0)}(\frac{\partial}{\partial t})$ .

A continuación, vamos a definir el *operador estrella de Hodge* (véanse por ejemplo [34, pág. 438], [46]) y a enunciar y demostrar un resultado relativo a espacios vectoriales que nos será de gran utilidad.

**Definición 2.26.** Sean  $(\bar{M}, g)$  una variedad riemanniana de dimensión  $n$  y  $(U; (x^1, \dots, x^n))$  un entorno coordenado. Sea  $\omega$  la  $n$ -forma de volumen de  $\bar{M}$  expresada en esas coordenadas locales. Dada  $\alpha \in \Lambda^k(\bar{M})$ , se define el *dual de Hodge* u *operador estrella de Hodge* de  $\alpha$  y se denota por  $\star\alpha$ , como la única  $(n-k)$ -forma tal que para cada  $\beta \in \Lambda^k(\bar{M})$  se cumple que

$$\beta \wedge \star\alpha = \langle \beta, \alpha \rangle \omega.$$

**Observación 2.27.** Nótese que la expresión  $\langle \alpha, \beta \rangle$  es una función escalar, es decir, una 0-forma, que en cada punto  $p \in M$  se calcula de la forma

$$\langle \alpha, \beta \rangle := g(\alpha^\sharp, \beta^\sharp),$$

donde  $g$  representa la métrica de la variedad riemanniana ambiente y  $\alpha^\sharp$  (respectivamente  $\beta^\sharp$ ) representa el vector asociado (por el isomorfismo musical  $\sharp$ ) en  $T_p M$  a la 1-forma  $\alpha \in T_p^* M$ , de tal forma que para cada  $X \in T_p M$  se verifica que  $g(\alpha^\sharp, X) = \alpha(X)$ .

**Observación 2.28.** Nótese que con la Definición 2.26, dada una  $k$ -forma  $\alpha$  y un entorno coordenado  $(U; (x^1, \dots, x^n))$ , si escribimos

$$\alpha|_U = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

se tiene que el dual de Hodge de  $\alpha$  viene dado por

$$\star \alpha = \frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{k!(n-k)!} \delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n} a^{i_1 \dots i_k} dx^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n},$$

donde  $a^{i_1 \dots i_k} = g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} a_{j_1 \dots j_k}$ . Además, los coeficientes  $\delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n}$  son el símbolo de permutación de Levi-Civita. Es decir, si  $(i_1 \dots i_n)$  es una permutación par de  $(1 \dots n)$ , entonces se tiene que  $\delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n} = 1$ , por otro lado, se tiene que  $\delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n} = -1$  si  $(i_1 \dots i_n)$  es una permutación impar de  $(1 \dots n)$  y  $\delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n} = 0$  en otro caso. Nótese que con permutación nos referimos a cualquier reordenación de  $(1 \dots n)$ .

Por otro lado, se puede probar que la construcción de  $\star \alpha$  es independiente de las coordenadas locales que escojamos, por lo que  $\star \alpha$  está globalmente definida como  $(n-k)$ -forma. Así, el operador  $\star$  manda cada  $k$ -forma en una  $(n-k)$ -forma.

**Lema 2.29.** *Supongamos que tenemos un espacio vectorial  $n$ -dimensional con producto interior y una orientación fijada. Sea  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base positivamente orientada. Entonces se cumple que*

$$\det[v_1 | \dots | v_n] = \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle_{i,j})}.$$

*Demostración.* En efecto, sea la matriz  $A := [v_1 | \dots | v_n]$ . Esta matriz verifica que  $A_{ij} = \langle v_j, E_i \rangle$ , donde  $\{E_1, \dots, E_n\}$  es una base ortonormal positivamente orientada del espacio vectorial. Tomemos  $B = (b_{ij})_{i,j}$  tal que  $b_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ . En estas condiciones, es claro que

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle v_i, E_k \rangle \cdot \langle E_k, v_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n A_{ki} A_{kj} = (A^t A)_{i,j}, \end{aligned}$$

por lo que  $B = A^t A$ . De esta forma, se tiene que

$$\det(B) = \det(A^t A) = \det(A^t) \det(A) = \det(A)^2,$$

luego  $\det(A) = \sqrt{\det(B)}$ . □

**Lema 2.30.** *Sea  $A(t)$  una curva diferenciable contenida en el grupo general lineal  $Gl(n, \mathbb{R})$  verificando que  $A(0) = Id$ . Entonces se tiene que*

$$\frac{d}{dt}(\det A(t))|_{t=0} = \text{tr}(A'(0)).$$

*Demostración.* Consideremos en el espacio vectorial  $V$  la  $n$ -forma  $\omega$  que a cada base ordenada  $\{v_1, \dots, v_n\}$  le asigna el número real  $\omega(v_1, \dots, v_n) = \det[v_1 | \dots | v_n]$ . De esta forma, es claro que se tiene

$$\det A(t) = \omega(A(t)e_1 | \dots | A(t)e_n).$$

Denotemos por  $A'(0) = (a_{ij})_{i,j}$ . En ese caso, se tiene que  $A'(0)e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$ . Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}(\det A(t))|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \omega(e_1, \dots, A'(0)e_i, e_{i+1}, \dots, e_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(A'(0)). \quad \square$$

**Teorema 2.31** (Primera variación). *Sea  $M$  una hipersuperficie embebida de una variedad riemanniana  $(\bar{M}, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de dimensión  $n$ . Supongamos que  $M$  tiene campo curvatura media  $\vec{H}$  y sea  $F: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$  una variación de  $M$  con campo variacional  $X$ . Entonces se tiene que*

$$\frac{d}{dt}A(M_t)|_{t=0} = - \int_M \langle \vec{H}, X \rangle \omega_0, \quad (2.18)$$

donde  $\omega_0$  es la forma de volumen asociada a  $M_0 = F_0(M) = M$ .

*Demostración.* En primer lugar, llamemos  $\omega_t$  a la  $n$ -forma de volumen asociada a la hipersuperficie  $M_t$ . Observemos que dados  $p \in M$  y una referencia ortonormal  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  positivamente orientado de  $TM$  la cual extendemos a una referencia ortonormal de campos de vectores  $\{e_1, \dots, e_n\}$  para  $TM$  en un entorno de  $p \in M$ . En ese caso, el pullback de dicha  $n$ -forma por la aplicación  $F_t$  viene dado por

$$F_t^* \omega_t|_p(e_1, \dots, e_n) = \omega_t|_{F_t(p)}(dF_t(e_1), \dots, dF_t(e_n)) = \det(dF_t) \omega_t(e_1, \dots, e_n)|_{F_t(p)} = \det(dF_t).$$

Definamos  $G_{ij}(t) := \langle dF_t(e_i), dF_t(e_j) \rangle$ ,  $G(t) = \det((G_{ij}(t))_{i,j})$  y  $dF_t = [dF_t(e_1) | \dots | dF_t(e_n)]$ . Así, por el Lema 2.29 tenemos que

$$\det(dF_t) = \sqrt{\det(G(t))}.$$

Por lo tanto, obtendríamos que

$$\frac{d}{dt}A(M_t)|_{t=0} = \int_M \frac{d}{dt}|_{t=0} F_t^* \omega_t = \int_M \frac{d}{dt}|_{t=0} \det(dF_t) \omega_0 = \int_M \frac{1}{2} \left( \frac{dG(t)}{dt} \right) |_{t=0} \omega_0.$$

Nótese que en la última igualdad hemos utilizado que  $\det F_0 = 1$ .

Tomemos un punto  $p \in M$  y un entorno coordenado para  $p$  en  $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  con vectores coordenados  $\partial_i|_p = E_i|_p$   $i = 1, \dots, n-1$  y  $\partial_t$  de forma que  $E_i$  son ortonormales, tangentes a las hipersuperficies  $M_t$  en un entorno de  $p$  en  $\bar{M}$  y, de forma que  $\bar{\nabla}_{E_i} E_j|_p = 0$  para

cada  $i \neq j$ . Recordemos que dado un punto  $p \in M$  siempre podemos elegir un sistema de coordenadas alrededor de dicho punto, de forma que los vectores coordenados en tal punto sean ortonormales. Además, estos vectores pueden extenderse en un entorno del punto  $p$ , a campos  $E_i$ , por medio de transporte paralelo a través de curvas geodésicas radiales garantizando que  $\nabla_{E_i} E_j|_p = 0$ . Sea  $E_i^t := F_{t*} E_i$  y sea  $X_t|_p = \frac{dF}{dt}(p, t) = F_*(\partial_t t)$ , luego  $X_0 = X$  es el campo variacional.

Observemos que dado que  $\partial_t$  es un campo vectorial en  $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  y, por otro lado, los  $E_i$  son campos vectoriales en  $M$  que se extienden a  $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ , se verifica que los  $E_i$  no tienen direcciones en común con  $\partial_t$  y viceversa, por lo que  $[\partial_t, E_i] = 0$ . Esto se debe a que, ya que la variedad  $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  es un producto, se tiene que  $E_i$  proyecta de manera trivial sobre el segundo factor. Así, tenemos que  $[X_t, E_i^t] = [F_* \partial_t, F_* E_i] = F_* [\partial_t, E_i] = 0$  y, de esta forma,  $\bar{\nabla}_{X_t} E_i^t = \bar{\nabla}_{E_i^t} X_t$ . De aquí deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} G_{ii}(t)|_{t=0} &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} \langle E_i^t, E_i^t \rangle \right) |_{t=0} = \left( \langle \bar{\nabla}_{X_t} E_i^t, E_i^t \rangle \right) |_{t=0} = \left( \langle \bar{\nabla}_{E_i^t} X_t, E_i^t \rangle \right) |_{t=0} \\ &= \left( \langle \bar{\nabla}_{E_i^t} X_t, E_i^t \rangle + \langle X_t, \bar{\nabla}_{E_i^t} E_i^t \rangle - \langle X_t, \bar{\nabla}_{E_i^t} E_i^t \rangle \right) |_{t=0} \\ &= \left( E_i^t \langle X_t, E_i^t \rangle - \langle X_t, (\bar{\nabla}_{E_i^t} E_i^t)^\top \rangle - \langle X_t, (\bar{\nabla}_{E_i^t} E_i^t)^\perp \rangle \right) |_{t=0} \\ &= \left( E_i^t \langle X_t, E_i^t \rangle - \langle X_t, \nabla_{E_i^t}^{M_t} E_i^t \rangle - \langle X_t, II(E_i^t, E_i^t) \rangle \right) |_{t=0} \\ &= E_i \langle X, E_i \rangle - \langle X, \nabla_{E_i}^M E_i \rangle - \langle X, II(E_i, E_i) \rangle. \end{aligned}$$

Particularizando la expresión anterior en el punto  $p$ , tenemos que  $\nabla_{E_i}^M E_i = 0$ , luego obtenemos que en el punto  $p$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} G_{ii}(t)|_{t=0} = E_i \langle X, E_i \rangle - \langle X, II(E_i, E_i) \rangle.$$

Realizando la suma en  $i$  obtenemos que

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d}{dt} G_{ii}(t)|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n-1} (E_i \langle X, E_i \rangle - \langle X, II(E_i, E_i) \rangle) = -\langle X, \vec{H} \rangle + \sum_{i=1}^{n-1} E_i \langle X, E_i \rangle. \quad (2.19)$$

Así, por la expresión obtenida en (2.19) aplicando el Lema 2.30 se tiene que

$$\frac{d}{dt} \omega_t|_{t=0} = -\langle X, \vec{H} \rangle \omega_0 + \sum_{i=1}^{n-1} E_i \langle X, E_i \rangle \omega_0.$$

Para finalizar la prueba nos falta ver que la integral en  $M$  del segundo sumando de la expresión anterior es igual a cero. Para probar esto, consideremos la 1-forma dual  $X^*$  de  $X$ . Esta 1-forma es la aplicación  $X^*(\cdot) = \langle X, \cdot \rangle$ . Si tomamos  $\alpha = \star(X^*)$  la  $(n-1)$ -forma dada por el operador de Hodge, afirmamos que

$$\sum_{i=1}^{n-1} E_i \langle X, E_i \rangle \omega_0 = d\alpha.$$

En efecto, ocurre que

$$\begin{aligned} d\alpha(E_1, \dots, E_n) &= \sum_{i=1}^n E_i(\alpha(E_1, \dots, \widehat{E}_i, \dots, E_n)) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([E_i, E_j], \dots, \widehat{E}_i, \dots, \widehat{E}_j, \dots, E_n). \end{aligned}$$

Ahora bien, nótese que dado que se cumple que  $\bar{\nabla}_{E_i} E_j|_p = 0$ , entonces  $[E_i, E_j]|_p = 0$ . Por otro lado,  $X^* = \sum_{k=1}^{n-1} \langle X, E_k \rangle \theta_k$ , donde  $\{\theta_k\}_{k=1}^{n-1} \subset \Lambda^1(M)$  es la base dual de  $\{E_k\}_{k=1}^{n-1}$ . Esto implica que

$$\alpha = \star(X^*) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \langle X, E_i \rangle \theta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\theta}_k \wedge \dots \wedge \theta_n.$$

Entonces tenemos que  $\alpha(E_1, \dots, \widehat{E}_i, \dots, E_n) = (-1)^{i-1} \langle X, E_i \rangle$ . Y finalmente, si tomamos la diferencial de  $\alpha$  actuando sobre  $E_1, \dots, E_n$ , obtenemos que

$$d\alpha(E_1, \dots, E_n)|_p = \sum_{i=1}^n E_i(\langle X, E_i \rangle) \omega_0(E_1, \dots, E_n).$$

Debido al hecho de que  $\frac{\partial}{\partial t} \omega_t|_{t=0} = -\langle X, \vec{H} \rangle \omega_0 + d\alpha$ , tan solo debemos recurrir al teorema de Stokes para concluir la prueba. En efecto, por este teorema obtenemos que

$$\frac{d}{dt} A(M_t)|_{t=0} = \int_M \frac{d}{dt} \omega_t|_{t=0} = - \int_M \langle X, \vec{H} \rangle \omega_0 + \int_{\partial M} \alpha = - \int_M \langle X, \vec{H} \rangle \omega_0,$$

donde la última igualdad se da debido a que  $\partial M = \emptyset$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

### 2.3.2. Variaciones que conservan el volumen

Como ya hemos comentado, también nos interesa medir cómo el volumen encerrado por una hipersuperficie cambia por medio de una variación de la misma. Para motivar esta definición, podemos pensar en el caso de una superficie  $S$  del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ . Dicha superficie divide a  $\mathbb{R}^3$  en dos componentes conexas, una de ellas acotada. Esta es la región interior definida o delimitada por  $S$ . Esto motiva la definición de *volumen encerrado* por una hipersuperficie.

Por otro lado, introduciremos el concepto de *variación que conserva el volumen*. Estas variaciones son aquellas que, para un cierto rango  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , el volumen encerrado por la hipersuperficie  $M_t$  permanece constante. Como veremos estas serán precisamente aquellas variaciones cuyo campo variacional es de la forma  $fN$ , siendo  $f$  una función diferenciable cuya media a lo largo de la variedad  $M$ , cuando esta sea compacta, sea cero (es decir, que la integral de  $f$  a lo largo de  $M$  sea idénticamente cero), además,  $N$  es el campo vectorial unitario normal o aplicación de Gauss compatible con la orientación.

**Definición 2.32.** Sea  $M$  una hipersuperficie conexa y embebida de una variedad riemanniana  $\bar{M}$ . Supongamos que  $M$  divide a la variedad  $\bar{M}$  en dos regiones conexas, al menos una de ellas acotada, y ambas con frontera  $M$ . Si  $\Omega$  es dicha región acotada, llamaremos *volumen encerrado* por  $M$  al volumen de la región  $\Omega$ , denotándolo por  $V(\Omega)$ .

**Observación 2.33.** A menudo, en lugar de la suposición de la Definición 2.32, se pide que  $\bar{M}$  sea una variedad de Riemann orientable y que  $M$  sea una hipersuperficie orientada que divide a  $\bar{M}$  en dos regiones conexas, de modo que un campo normal unitario a  $M$  definido globalmente (que existe por las hipótesis de orientación) apunte hacia una región acotada de las dos en las que  $M$  separa a  $\bar{M}$ .

**Observación 2.34.** En el caso del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , el Teorema 2.19 garantiza la hipótesis de la definición anterior, es decir, dada una hipersuperficie conexa y compacta  $M$  de  $\mathbb{R}^n$ , esta divide al espacio en dos regiones conexas, una de ellas exterior y otra interior. Lo mismo es cierto, en el caso de una esfera, por la proyección estereográfica, pero en este caso ambas regiones son acotadas.

**Observación 2.35.** Para el caso de hipersuperficies en  $\mathbb{R}^n$ , si  $F$  es una variación de una hipersuperficie  $M$  compacta y conexa, podemos suponer, por compacidad de  $M$ , que para un  $t$  suficientemente pequeño  $F_t: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo sobre su imagen y, así,  $F_t(M)$  es una hipersuperficie compacta, embebida y con interior bien definido cuyo volumen encerrado es  $V(F_t(M))$ . De esta forma, se puede comprobar que

$$V(F_t(M)) - V(M) = \int_{M \times [0, t]} F^* \omega,$$

donde  $\omega$  es la forma de volumen en  $\mathbb{R}^n$  y considerando la orientación en  $M$  dada por  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  verificando que  $\omega(e_1, \dots, e_{n-1}, N) = 1$ . Aquí  $N$  es el campo de vectores unitario normal a  $M$  apuntando hacia afuera de la región encerrada por  $M$  y  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  es una referencia local ortonormal diferenciable para  $TM$ .

Nótese que en una situación más general, donde por ejemplo  $M$  sea una hipersuperficie no embebida, no podemos garantizar que  $M$  encierre a un conjunto acotado, por lo que el concepto de volumen encerrado carece de sentido.

A continuación, definimos el concepto de variación que conserva el volumen.

**Definición 2.36** (Variación que conserva el volumen). Sea  $M$  una hipersuperficie conexa de una variedad riemanniana  $(\bar{M}, g)$  y supongamos que  $M$  determina una región acotada  $\Omega$  de  $\bar{M}$ . Sea  $X \in \Gamma(TM|_M)$  un campo vectorial a lo largo de  $M$  (pero no necesariamente tangente a  $M$ ) y sea  $F: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$  la variación de soporte compacto asociada a ese campo  $X$ . Diremos que  $F$  *conserva el volumen* de  $\Omega$  si para cada  $|t| < \varepsilon$  se verifica que

$$V(\Omega_t) = V(\Omega).$$

Es decir, el funcional de volumen  $V(\Omega_t)$  permanece constante para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

**Proposición 2.37.** Sea  $M$  una hipersuperficie conexa, embebida y orientable de una variedad riemanniana  $(\bar{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  orientable. Dada una variación  $F: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$  de soporte compacto, si definimos  $\Omega_t$  como la región interior encerrada por  $F_t(M) = M_t$ , donde la región encerrada por  $M_0$  la denotamos como  $\Omega$ , entonces se verifica que la aplicación

$$v_{F,D}(\Omega_t) = \int_{D \times [0, t]} F^* \omega,$$

donde  $D$  es cualquier dominio relativamente compacto conteniendo el soporte de  $F$ , es diferenciable en  $t = 0$  y, además, se tiene que

$$\frac{d}{dt}v_{F,D}(\Omega_t)|_{t=0} = \int_M \langle X, N \rangle, \quad (2.20)$$

donde  $N$  es el campo unitario normal a  $M$  compatible con las orientaciones.

**Observación 2.38.** Puesto que pretendemos estudiar las variaciones que conservan el volumen de una hipersuperficie, es fundamental comprender cómo se calcula y define el cambio del volumen encerrado por una hipersuperficie. Es por ello que la Proposición 2.37 establece una fórmula para la derivada del funcional  $v_{F,D}(\Omega_t)$ . Sin embargo, es importante destacar que  $v_{F,D}(\Omega_t)$  no se define simplemente como el volumen de  $\Omega_t$  en el sentido tradicional, sino como la integral de la forma de volumen  $\omega$  en  $D \times [0, t]$  bajo la acción de la variación  $F$  y donde  $D$  es cualquier dominio relativamente compacto conteniendo el soporte de  $F$ . Esta definición es clave, pues permite capturar el cambio en el volumen debido a la variación, sin necesidad de restar explícitamente  $V(\Omega_0)$ . Esto se complementa con la Observación 2.35 al señalar que, para una variación que conserva el volumen, dado que será un punto crítico para el funcional volumen para  $t = 0$ , se cumple:

$$0 = \frac{d}{dt}v_{F,D}(\Omega_t)|_{t=0} = \int_M \langle X, N \rangle,$$

donde recordemos que  $X$  es el campo variacional y  $N$  es el campo unitario normal compatible con las orientaciones. Esto enfatiza la importancia de escoger campos variacionales adecuados para garantizar que el volumen se mantenga constante.

**Observación 2.39.** A pesar de que la hipersuperficie  $M$  pueda no ser compacta, la integral en la ecuación (2.20) está bien definida, debido a que la función  $p \mapsto \langle X_p, N_p \rangle$  tiene soporte compacto. Es más, la ecuación (2.20) asegura que  $v'_{F,D}(\Omega_0)$  no depende de la elección del dominio  $D$  ni de la variación particular  $F$ . Solo depende del campo vectorial variacional  $X$  y, de forma más precisa, de la componente normal del campo variacional  $X$ .

*Demostración de la Proposición 2.37.* Sea un punto  $p \in M$  y sea  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  una base ortonormal orientada para  $T_p M$ . Entonces, por el teorema de Fubini sabemos que

$$v_{F,D}(\Omega_t) = \int_0^t \int_D (F^* \omega)_t,$$

donde  $\omega$  denota la  $n$ -forma de volumen en  $\bar{M}$ . Por otro lado, se verifica que

$$\begin{aligned} (F^* \omega)_{t=0}(p) &= \omega(dF_{(p,0)}(e_1), \dots, dF_{(p,0)}(e_{n-1}), dF_{(p,0)}(\partial t)) \\ &= \omega(d(F_0)_p(e_1), \dots, d(F_0)_p(e_{n-1}), X) = \langle X, N \rangle \omega_M \wedge dt, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $\omega_M$  denota la  $n$ -forma de volumen restringida a la hipersuperficie  $M$ . Por otro lado,  $N$  es el vector normal unitario a  $M$  apuntando hacia afuera de la región  $\Omega$  encerrada por la hipersuperficie  $M$ , por lo que  $\{d(F_0)_p(e_1), \dots, d(F_0)_p(e_{n-1}), N_p\}$  es una referencia orientada positivamente en  $M$ . Además, la última igualdad en la ecuación (2.21)



se obtiene debido a que al evaluar  $\omega(d(F_0)_p(e_1), \dots, d(F_0)_p(e_{n-1}), X)$  estamos calculando el volumen del paralelepípedo determinado por  $d(F_0)_p(e_1), \dots, d(F_0)_p(e_{n-1}), X$ . Así, se tiene que  $d(F_0)_p(e_1), \dots, d(F_0)_p(e_{n-1}) \in T_p M$  y, de esta forma,  $\langle X, N \rangle$  representa la componente normal de  $X$ , nótese que esta componente normal del campo vectorial  $X$  es la que aporta algo de volumen al volumen total del paralelepípedo determinado por  $d(F_0)_p(e_1), \dots, d(F_0)_p(e_{n-1}), X$ . Por otro lado, para obtener una  $n$ -forma de volumen, necesitamos completar con la dirección restante, de ahí que aparezca la  $dt$  al final de la expresión (2.21).

Ahora bien, por la expresión que hemos obtenido para  $(F^*\omega)_{t=0}(p)$  en un punto  $p \in M$  arbitrario, es claro que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_{F,D}(\Omega_t)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left( \int_0^t \int_M \langle X, N \rangle \omega_M \wedge dt \right) |_{t=0} \\ &= \int_M \langle X, N \rangle \omega_M = \int_M \langle X, N \rangle. \end{aligned}$$

Esto se debe a que como el soporte de la variación  $y$ , por definición el del campo variacional  $X$ , está contenido en  $D$ , que es un dominio relativamente compacto, se puede extender la integral a toda la hipersuperficie  $M$ .  $\square$

**Observación 2.40.** Observemos que se emplean dos notaciones diferentes para funciones que están relacionadas con el volumen en el contexto de variaciones de hipersuperficies:  $V(\Omega_t)$  y  $v_{F,D}(\Omega_t)$ . A pesar de que ambas están ligadas al volumen de la región encerrada por una hipersuperficie  $M_t$ , hay diferencias conceptuales entre ellas. En primer lugar, tenemos  $V(\Omega_t)$ , que representa directamente el volumen, en el sentido clásico, de la región  $\Omega_t$  encerrada por la hipersuperficie  $M_t$ . Es la integral de la  $n$ -forma de volumen  $\omega$  de la variedad riemanniana ambiente  $\bar{M}$ , es decir,

$$V(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \omega.$$

Por otro lado,  $v_{F,D}(\Omega_t)$  es el funcional que modela el cambio del volumen bajo una variación  $F$  en un dominio relativamente compacto de  $M$  que contenga al soporte de la variación. Esta función está definida como

$$v_{F,D}(\Omega_t) = \int_{D \times [0,t]} F^* \omega.$$

Es decir, no representa el volumen de una región directamente, sino la acumulación de cambio de volumen a lo largo de la deformación de la hipersuperficie cuando hacemos variar el parámetro  $t$ . Esta forma resulta especialmente útil para calcular derivadas de volumen respecto a  $t$ , en especial, en el contexto del cálculo variacional, pues evita tener que restar volúmenes directamente como  $V(\Omega_t) - V(\Omega_0)$ .

**Observación 2.41.** Notemos que si una variación de una hipersuperficie  $M$  conserva el volumen de la región  $\Omega$  encerrada por dicha hipersuperficie, se verifica que

$$\frac{d}{dt} v_{F,D}(\Omega_t)|_{t=0} = \int_M \langle X, N \rangle = 0.$$

Por lo tanto, en virtud de la Proposición 2.37 si una variación conserva el volumen automáticamente se cumple que  $\int_M \langle X, N \rangle = 0$ , siendo  $X$  el campo variacional asociado a dicha variación. Por otro lado, nótese que ese  $N$  es el vector normal unitario o aplicación de Gauss compatible con la orientación.

De nuevo, al igual que ocurría con la definición de variación, resulta natural hacerse la pregunta de si existirán variaciones de una hipersuperficie que conserven el volumen. En este sentido, el siguiente resultado nos garantiza la existencia de este tipo de variaciones bajo algunas condiciones.

**Lema 2.42** (Existencia de variaciones normales que preservan el volumen). *Tomemos  $M$  una hipersuperficie conexa, embebida y orientable de una variedad riemanniana  $\bar{M}$  orientable. Sea  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable con soporte compacto y de media 0 en  $M$ , es decir,*

$$\int_M f = 0.$$

*Entonces existe una variación normal  $F: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$  que preserva el volumen, cuyo campo variacional es  $X = fN$ , donde  $N$  es la aplicación de Gauss de  $M$  compatible con la orientación.*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$  definido como en la demostración del Lema 2.24 y consideremos  $g: D \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, donde  $D \subseteq M$  es un dominio relativamente compacto. Definamos además la variación

$$F: D \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, (p, t) \mapsto F(p, t) = F_t(p) = \exp_p g(p, t) N_p.$$

De esta forma,  $F$  es una variación normal con campo variacional  $X = \frac{\partial F}{\partial t}(p, 0) = \frac{\partial g}{\partial t}(p, 0)N$ . A continuación, probaremos que  $g$  puede escogerse de tal manera que  $X$  satisfaga las condiciones del enunciado.

Nótese que  $F = e \circ \psi$ , donde

$$\begin{aligned} \psi: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow M \times \mathbb{R}, (p, t) \mapsto (p, g(p, t)) \quad y \\ e: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow \bar{M}, (p, t) \mapsto \exp_p(tN_p). \end{aligned}$$

De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} v_{F,D}(\Omega_t) &= \int_{D \times [0,t]} F^* \omega = \int_{D \times [0,t]} \psi^*(e^* \omega) = \int_{D \times [0,t]} \psi^*(E(p, t) \omega_M \wedge dt) \\ &= \int_{D \times [0,t]} E(p, g(p, t)) \psi^*(\omega_M \wedge dt) = \int_{D \times [0,t]} E(p, g(p, t)) \frac{dg}{dt} \omega_M \wedge dt \\ &= \int_0^t \int_D E(p, g(p, t)) \frac{dg}{dt}, \end{aligned}$$

donde  $E(p, t)$  es el determinante de  $de_{(p,t)}$ . Notemos que  $E(p, t) \neq 0$  para un  $t$  suficientemente pequeño, pues  $e(p, t) = \exp_p(tN_p)$  es un difeomorfismo local. Por otro lado,  $\omega_M$

es la forma de volumen riemanniana de  $M$  y hemos empleado el teorema de Fubini para obtener la última igualdad.

Consideremos, dado  $p \in M$ , la aplicación  $g(p, t)$  como solución al siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dg}{dt} = \frac{f(p)}{E(p, g(p, t))}, \quad g(p, 0) = 0.$$

Ahora bien, por la expresión que hemos calculado para  $v_{F,D}(\Omega_t)$  y el hecho de que  $\int_M f = 0$ , se tiene que  $v_{F,D}(\Omega_t) = 0$  para todo  $t$ . Además, es claro que  $\frac{dg}{dt}(p, 0) = f(p)$ , pues  $E(p, g(p, 0)) = E(p, 0) = 1$ . Así,  $F$  es una variación normal que preserva el volumen con campo variacional  $fN$ .  $\square$

**Observación 2.43.** A partir de ahora, una variación normal que conserve el volumen de una hipersuperficie embebida, conexa y orientable  $M$  de una variedad riemanniana orientable  $\bar{M}$  será para nosotros una variación cuyo campo variacional es de la forma  $fN$  con  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable verificando que  $\int_M f = 0$  y  $N$  la aplicación de Gauss de  $M$ .

Como hemos visto, el Teorema 2.31 y la Proposición 2.37 muestran que tan solo la componente normal de los campos vectoriales variacionales afecta a las variaciones del área y el volumen. Además, la dirección de máxima disminución de área es la dada por el vector curvatura media.

A continuación, veremos un resultado que nos caracteriza las hipersuperficies de curvatura media constante de una variedad riemanniana  $\bar{M}$ .

**Teorema 2.44** (Caracterización de hipersuperficies CMC). *Sea  $M$  una hipersuperficie orientada, conexa y embebida de una variedad riemanniana orientable  $(\bar{M}, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Entonces:*

- (I)  *$M$  es minimal, es decir, tiene curvatura media constante igual a cero, si y solo si es un punto crítico de la función área para cada variación de  $M$  de soporte compacto.*
- (II)  *$M$  tiene curvatura media constante si y solo si para toda variación de  $M$  que preserve el volumen la derivada del área en  $t = 0$  es cero.*

**Observación 2.45.** La segunda de las afirmaciones quiere decir que son equivalentes que una hipersuperficie  $M$  sea CMC y que sea un punto crítico del funcional área para cada variación de soporte compacto cuyo campo variacional sea de la forma  $X = fN$ , donde  $f \in C^\infty(M)$  satisface que  $\int_M f = 0$  y  $N$  es un campo vectorial normal unitario a  $M$ .

*Demostración.* Probemos la primera afirmación. En primer lugar, es claro que si la curvatura media de  $M$  es cero entonces por el Teorema 2.31, es un punto crítico para el funcional de área para variaciones con soporte compacto. Recíprocamente, supongamos que  $M$  satisface dicha condición. En ese caso, sea  $f \in C^\infty(M)$  con soporte compacto y sea  $F$  una variación con campo variacional  $\xi = f\vec{H}$ . Entonces por el Teorema 2.31 (primera variación del área) se verifica que

$$\int_M f |\vec{H}|^2 \omega_0 = 0, \tag{2.22}$$

donde recordemos que  $\omega_0$  es la forma de volumen asociada a  $M_0 = F_0(M)$ . La igualdad en (2.22) se debe a que suponemos que  $M$  es un punto crítico. Finalmente,  $\vec{H} = 0$  debido a que la igualdad (2.22) se tiene para cada  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  con soporte compacto y, por lo tanto,  $M$  es minimal.

Veamos ahora la demostración de la segunda afirmación. En este caso, si  $M$  tiene curvatura media constante  $H_0$ , por (2.20) y el Teorema 2.31 obtenemos que

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}A(M_t) = - \int_M \langle \vec{H}, X \rangle \omega_0 = -H_0 \frac{d}{dt}|_{t=0}v_{F,D}(\Omega_t) = -H_0 v'_{F,D}(\Omega_0),$$

donde  $D$  es cualquier dominio relativamente compacto conteniendo al soporte de la variación  $F$ . Por lo tanto,  $M$  es un punto crítico para el área de cualquier variación que conserve el volumen. Nótese que en la anterior igualdad hemos utilizado que  $\vec{H} = H_0 N$ .

Recíprocamente, sea  $D$  una región acotada en  $M$  y sea  $H_0 = \frac{1}{A(D)} \int_D H$ . Supongamos por contradicción, que existe  $p \in D$ , de forma que  $H_p - H_0 \neq 0$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $H_p - H_0 > 0$ . Así, definamos

$$D^+ = \{q \in D : H_q - H_0 > 0\},$$

$$D^- = \{q \in D : H_q - H_0 < 0\}.$$

Sean  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}^+$  dos funciones diferenciables no negativas de forma que se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $p \in \text{sop}(f) \subseteq D^+$ ,
2.  $\text{sop}(g) \subseteq D^-$ ,
3.  $\int_M (f + g)(H - H_0) = 0$ .

Dado que  $\int_D (H - H_0) = 0$  esta elección es siempre posible. En efecto, pues nótese que  $\int_M f(H - H_0) > 0$  y  $\int_M g(H - H_0) < 0$ , por lo que existe una constante  $\lambda > 0$  tal que  $\int_M (f + \lambda g)(H - H_0) = 0$ . De esta forma, basta con tomar  $\lambda = 1$ .

Definamos ahora la función  $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\psi(p) = (f(p) + g(p))(H_p - H_0)$ . Entonces  $\psi$  es una función con soporte compacto y de media cero. Sea  $F$  la variación que preserva el volumen asociada a  $\psi$  (ver Lema 2.42). Ahora bien, por hipótesis y empleando la ecuación (2.31) obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{d}{dt}|_{t=0}A(M_t) = \int_M \langle \vec{H}, X \rangle = \int_M \psi \langle \vec{H}, N \rangle \\ &= \int_M \psi H |N|^2 = \int_M \psi H = \int_M \psi H - H_0 \int_M \psi \\ &= \int_M (H - H_0) \psi = \int_M (f + g)(H - H_0)^2 > 0. \end{aligned}$$

Nótese que la expresión anterior es mayor que cero, debido a que  $(H - H_0)^2 > 0$  y  $f, g > 0$  y recordemos que  $\int_M \psi = 0$ . Ahora bien, tenemos una contradicción. De esta forma, debe ocurrir que  $H = H_0$  en  $D$ . Como esto ocurre para todo  $D \subseteq M$ , obtenemos que  $M$  tiene curvatura media constante.  $\square$

### 2.3.3. El problema isoperimétrico en $\mathbb{R}^n$

Como hemos visto, el Teorema 2.44 nos caracteriza las hipersuperficies de curvatura media constante por medio de las variaciones que preservan el volumen. Ahora bien, sabemos gracias al Corolario 2.21 que las hipersuperficies en  $\mathbb{R}^{n+1}$  compactas, conexas y de curvatura media constante son justamente las esferas. De esta forma combinando ambos resultados podemos dar una demostración del problema isoperimétrico clásico. Recordemos que este problema se plantea averiguar cuáles de entre todas las hipersuperficies encerrando un volumen dado tienen área mínima. Enunciemos esto de forma más precisa.

**Corolario 2.46** (Problema isoperimétrico clásico). *En el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , para un volumen dado, de entre todas las hipersuperficies compactas y conexas encerrando ese volumen, la de menor área es la esfera.*

*Demostración.* En primer lugar, tomemos un volumen  $v_0$  y una hipersuperficie embebida  $M$  compacta y conexa de  $\mathbb{R}^n$  encerrando ese volumen. Es decir, por el Teorema 2.19, sabemos que esta hipersuperficie divide al espacio  $\mathbb{R}^n$  en dos regiones conexas, una de ellas interior que llamamos  $\Omega$ , cuyo volumen será  $V(\Omega) = v_0$ . Ahora bien, si suponemos que nuestra hipersuperficie tiene área mínima entre todas las hipersuperficies que encierran dicho volumen, se cumple que para toda variación  $F$  de  $M$  que preserve el volumen, al ser un punto crítico para el funcional de área, su derivada en  $t = 0$  es igual a cero, por lo que por el Teorema 2.44,  $M$  tiene curvatura media constante. Finalmente, por el teorema de Alexandrov (Corolario 2.21), toda hipersuperficie compacta, conexa y de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^n$  ha de ser una esfera.  $\square$

## Capítulo 3

# La constante isoperimétrica de Cheeger

En los capítulos anteriores hemos introducido el problema isoperimétrico desde un punto de vista clásico. En el primer capítulo se establecieron los conocimientos previos necesarios sobre geometría riemanniana y teoría de subvariedades, haciendo hincapié en las hipersuperficies de curvatura media constante (CMC), cuya relevancia se hace evidente al estudiar regiones que minimizan el área de su frontera bajo restricciones de volumen. Posteriormente, en el Capítulo 2, abordamos de manera sistemática el problema isoperimétrico en el espacio euclídeo, demostrando, entre otros, el teorema de Alexandrov y su relación con las propiedades variacionales del área y el volumen. En particular, se caracterizó a las esferas como las únicas soluciones del problema isoperimétrico en  $\mathbb{R}^n$  para regiones diferenciables compactas y conexas.

El presente capítulo amplía el enfoque anterior introduciendo una herramienta clave en la comprensión del problema isoperimétrico en espacios más generales: la *constante isoperimétrica de Cheeger*. A diferencia de lo visto hasta ahora, aquí no partimos necesariamente de la existencia de soluciones óptimas (o minimizadores) al problema isoperimétrico, sino que nos centramos en un cociente geométrico que mide cómo de “estrecho” puede ser un subconjunto de la variedad, en relación con su volumen. Esta constante, introducida por Jeff Cheeger [13] en el contexto del análisis espectral, resulta fundamental no solo desde el punto de vista geométrico, sino también por su conexión directa con el operador de Laplace-Beltrami, a través de la desigualdad de Cheeger. Formalmente, la constante isoperimétrica de Cheeger de una variedad riemanniana  $M$  se define como

$$h(M) = \inf_{\Omega} \frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)},$$

donde  $\Omega$  recorre todos los abiertos de la variedad riemanniana  $M$  con clausura compacta y cuya frontera es una hipersuperficie diferenciable.

Respecto a la estructura del capítulo, en la Sección 3.1 introduciremos conceptos preliminares sobre grupos de Lie, dado que estos constituyen el contexto principal donde se

explorará la constante isoperimétrica de Cheeger en este capítulo. En particular, definiremos los grupos de Lie y sus álgebras de Lie asociadas.

En la Sección 3.2, se presentan una serie de resultados relevantes sobre grupos de Lie, incluyendo propiedades estructurales relevantes, así como el papel de las medidas de Haar. Además, se estudia cómo estas medidas se pueden construir a partir de formas de volumen invariantes y se examina la regularidad y unicidad de las mismas, que constituyen herramientas esenciales para definir el concepto como el área y el volumen en este nuevo contexto.

En la Sección 3.3, se formaliza la noción de la constante isoperimétrica de Cheeger en el contexto de una variedad riemanniana general, es decir, no necesariamente compacta ni de curvatura constante. Se justifica su interés, tanto desde el punto de vista geométrico, pues proporciona una cota inferior para el área de la frontera de cualquier región de volumen finito, como desde el punto de vista analítico, debido a su vínculo con el espectro del operador laplaciano. En ese sentido, se presenta precisamente un resultado que relaciona el primer autovalor del operador laplaciano con la constante isoperimétrica de Cheeger asociada a un dominio normal de una variedad riemanniana  $M$  de dimensión  $n \geq 2$  no compacta.

En lo relativo a la Sección 3.4, el foco se restringe a un caso particularmente interesante, los *grupos de Lie resolubles y simplemente conexos con métrica invariante a la izquierda*, pues en ellos se puede calcular de forma explícita la constante isoperimétrica de Cheeger en términos de la representación adjunta del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  del grupo de Lie  $G$  bajo consideración. De esta forma, se presentan resultados que construyen la medida de Haar en el caso particular de un grupo de Lie  $G = G_0 \rtimes \mathbb{R}$ , dando posteriormente una acotación para  $h(G)$  y mostrando que  $h(G) = \text{tr}(\text{ad}(H_0))$ , donde  $H_0$  es un vector de norma uno en el subálgebra de Lie  $\mathbb{R}$  de  $G_0 \rtimes \mathbb{R}$  para la métrica invariante por la izquierda del grupo  $G$ , siempre que se tenga que  $h(G_0) = 0$ . Finalmente, se relaciona todo esto con los grupos de Lie resolubles y simplemente conexos calculando la constante isoperimétrica de Cheeger en este caso más general. En esta línea llegaremos al resultado central de este capítulo (Corolario 3.29), que nos dice que la constante isoperimétrica de Cheeger de un grupo de Lie resoluble y simplemente conexo  $G$  con métrica invariante a la izquierda tiene la expresión

$$h(G) = \max_{H \in \mathfrak{g}, \|H\|=1} \text{tr}(\text{ad}(H)).$$

Para concluir este capítulo, pondremos el foco en un caso concreto de grupos de Lie resolubles con métrica invariante a la izquierda. Así, introduciremos la noción de espacio simétrico poniendo el foco en los de tipo no compacto, donde podremos definir la descomposición en espacios de raíces y la descomposición de Iwasawa asociadas al álgebra de Lie del correspondiente grupo de isometrías. Esto nos permitirá calcular la constante isoperimétrica de Cheeger de un espacio simétrico de tipo no compacto, aplicando el Corolario 3.29. Esto se debe a que se tiene que cada espacio simétrico de tipo no compacto es isométrico a un grupo de Lie resoluble y simplemente conexo con métrica invariante a la izquierda. Finalmente, incluiremos de manera breve el cálculo de la constante isoperimétrica de Cheeger en un par de familias de espacios simétricos de tipo no compacto muy

concretos: los espacios hiperbólicos reales y complejos.

### 3.1. Preliminares sobre grupos de Lie

A lo largo de este capítulo vamos a utilizar algunas nociones generales sobre grupos de Lie que vamos a recordar a continuación [30].

Un *grupo de Lie*  $G$  es una variedad diferenciable que también es un grupo, de forma que las aplicaciones

$$p: G \times G \longrightarrow G, \quad (g, h) \mapsto gh,$$

$$i: G \longrightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1},$$

son diferenciables. Denotaremos por  $e$  al *elemento neutro* de un grupo de Lie  $G$ .

**Ejemplo 3.1.** Son ejemplos de grupos de Lie:

- (I)  $(\mathbb{R}^n, +)$ ,  $(\mathbb{C}^n, +)$ ,  $(\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}), +)$ . En general, cualquier espacio vectorial de dimensión finita con la suma.
- (II) Dados  $G, H$  grupos de Lie, entonces  $G \times H$  es también un grupo de Lie.
- (III)  $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ ,  $GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) : \det(A) \neq 0\}$ .
- (IV)  $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ .
- (V)  $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : A^T A = \text{Id}\}$ , el grupo de las matrices que preservan el producto escalar de  $\mathbb{R}^n$ .
- (VI)  $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$ .

Dado un grupo de Lie  $G$ , se define la *traslación por la izquierda* como  $L_g: G \longrightarrow G$ , dada por  $h \mapsto L_g(h) := gh$ , para cada  $g \in G$ . Por otro lado, se define la *traslación por la derecha* como  $R_g: G \longrightarrow G$  dada por  $h \mapsto R_g(h) := hg$ , para cada  $g \in G$ . Además, es sencillo ver que las aplicaciones  $L_g, R_g$  y la inversión  $i$  son difeomorfismos, con inversas  $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ ,  $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$  e  $i^{-1} = i$ .

Con estas nociones básicas acerca de grupos de Lie, pasamos a definir el concepto de álgebra de Lie.

Un *álgebra de Lie* (sobre  $\mathbb{R}$ ) es un espacio vectorial real  $\mathfrak{g}$  junto con un operador bilineal llamado *corchete de Lie*  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  tal que:

- (a)  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
- (b)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  (identidad de Jacobi),



para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

Por otro lado, dado  $G$  un grupo de Lie, se dice que  $X \in \mathfrak{X}(G)$  es *invariante por la izquierda* si  $L_{g*}h = X_{L_g(h)}$ , para todos  $g, h \in G$ . Ahora bien, denotemos por  $\mathfrak{g}$  al espacio de campos de vectores invariantes por la izquierda del grupo de Lie  $G$ . Si definimos la aplicación  $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ , dada por  $X \mapsto X_e$ , resulta que  $\alpha$  es un isomorfismo de espacios vectoriales, cuya inversa es  $x \in T_e G \mapsto X \in \mathfrak{g}$ , donde  $X_g = L_{g*}x$ . Se puede ver que todo campo invariante por la izquierda es diferenciable. Además, si tenemos que  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , por definición,  $X$  está  $L_g$ -relacionado con  $X$  e  $Y$  está  $L_g$ -relacionado con  $Y$  y, por lo tanto,  $[X, Y]$  está  $L_g$ -relacionado con  $[X, Y]$ , es decir, se tiene que  $L_{g*}h[X, Y]_h = [X, Y]_{L_g(h)}$ , por lo que obtenemos que  $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ . Esto convierte a  $\mathfrak{g}$  en un álgebra de Lie. Además, observemos que  $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(G)$ . Así, dado un grupo de Lie  $G$ , se define el *álgebra de Lie de  $G$*  como aquella construída a partir del corchete de Lie de campos invariantes a la izquierda. Además, este álgebra de Lie es isomorfa al espacio tangente en el neutro dotado del corchete de Lie inducido por los campos de vectores invariantes a la izquierda.

Recordemos ahora que, si tenemos un  $X \in \mathfrak{g}$ , una curva  $\alpha: I \rightarrow G$  es una curva integral para el campo vectorial  $X$  por el neutro  $e \in G$  si verifica que  $\alpha(0) = e$  y  $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)} = L_{\alpha(t)*}X_e$ . Así, se define la aplicación *exponencial*  $\text{Exp}: \mathfrak{g} \rightarrow G$ , dada por  $X \mapsto \text{Exp}(X) = \alpha(1)$ .

Dados dos grupos de Lie  $G$  y  $H$ , se dice que una aplicación  $\varphi: G \rightarrow H$  es un *homomorfismo de grupos de Lie* si es un homomorfismo de grupos y si además es diferenciable como aplicación entre variedades. Análogamente, un *isomorfismo de grupos de Lie* es un isomorfismo de grupos que además es un difeomorfismo. Por otro lado, un *automorfismo* de un grupo de Lie  $G$  es un isomorfismo de grupos de Lie de  $G$  en  $G$ .

De forma análoga, para álgebras de Lie se tiene que una aplicación  $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ , donde  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  son álgebras de Lie, es un *homomorfismo de álgebras de Lie* si  $\psi$  es lineal y si  $\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)]$ , para cada  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Además, un *isomorfismo de álgebras de Lie* es un homomorfismo de álgebras de Lie biyectivo, y un *automorfismo de álgebras de Lie* es un isomorfismo de una álgebra de Lie en sí misma.

En lo relativo a resultados de homomorfismos de grupo de Lie, destacamos el siguiente.

**Proposición 3.2.** *Sea  $\varphi: G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos de Lie y sean  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  sus álgebras de Lie correspondientes. Entonces su diferencial  $\varphi_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un homomorfismo de álgebras de Lie que satisface la condición de conmutatividad siguiente:  $\varphi \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ \varphi_*$ .*

Dado un grupo de Lie  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se define la *conjugación* por  $g$  como la aplicación  $I_g: G \rightarrow G$ , dada por  $h \mapsto ghg^{-1}$ . A su diferencial  $\text{Ad}(g) = I_{g*}$  se le llama *aplicación adjunta* a nivel de grupos de Lie. Por otro lado, al homomorfismo de grupos de Lie  $\text{Ad}: G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$  se le llama *representación adjunta* del grupo de Lie  $G$ . Con estas definiciones se cumple que  $I_g \circ \text{Exp} = \text{Exp} \circ \text{Ad}(g)$ , para todo  $g \in G$ .

A nivel de álgebras de Lie se define la *representación adjunta* del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  como el homomorfismo de álgebras de Lie  $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  dado por  $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$ . De esta forma, se tiene que  $\text{Ad}(\text{Exp}(X)) = e^{\text{ad}(X)}$ , para todo  $X \in \mathfrak{g}$ , donde la aplicación exponencial  $e$  de  $GL(\mathfrak{g})$  se entiende como la aplicación exponencial habitual de un endomorfismo lineal.

Dada una álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , diremos que  $\mathfrak{h}$  es una *subálgebra de Lie* de  $\mathfrak{g}$  si  $\mathfrak{h}$  es un subespacio vectorial de  $\mathfrak{g}$  tal que  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ , para todos  $X, Y \in \mathfrak{h}$ . Por otro lado, diremos que una subálgebra  $\mathfrak{h}$  del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es un *ideal* si  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ , para cada  $X \in \mathfrak{h}$ ,  $Y \in \mathfrak{g}$ . Por otro lado, una álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se dice *abeliana* si  $[X, Y] = 0$ , para cada  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

## 3.2. Resultados relevantes sobre grupos de Lie

Pasamos ahora a definir y presentar algunos resultados básicos relativos a grupos de Lie y que serán necesarios, en posteriores secciones, para calcular la constante isoperimétrica de un grupo de Lie resoluble y simplemente conexo con métrica invariante a la izquierda. Estas definiciones pasarán por recordar la definición de una  $k$ -forma invariante por la izquierda (respectivamente, por la derecha), para llegar a la noción de medida de Haar en un grupo de Lie  $G$ . Además, en lo relativo a las álgebras de Lie, definiremos las álgebras de Lie simples, semisimples, nilpotentes y resolubles. Finalizaremos con el Teorema de Levi, que asegura que toda álgebra de Lie se puede descomponer como suma semidirecta de una álgebra de Lie semisimple y un álgebra de Lie resoluble. A lo largo de esta sección hemos seguido principalmente la referencia [30, Chapter VIII]

En primer lugar, sea  $G$  un grupo de Lie, con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Sabemos que para cada  $g \in G$  podemos definir  $L_g: G \rightarrow G$ , dada por  $h \mapsto gh$  y  $R_g: G \rightarrow G$ , dada por  $h \mapsto hg$ , como las traslaciones por la izquierda y por la derecha respectivamente.

**Definición 3.3.** Diremos que una  $k$ -forma  $\omega \in \Lambda^k(G)$  es *invariante por la izquierda* si  $L_g^* \omega = \omega$ , para cada  $g \in G$ . Análogamente, diremos que es *invariante por la derecha* si  $R_g^* \omega = \omega$ , para cada  $g \in G$ .

Recordemos que  $\mathfrak{g}$  se identifica con el espacio tangente en el neutro  $e \in G$  por medio de la aplicación  $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ , dada por  $X \mapsto X_e$ . De esta forma, consideremos  $X_1, \dots, X_m$  base de  $\mathfrak{g}$ , donde  $m$  es la dimensión de  $G$ . Podemos definir 1-formas diferenciables  $\omega_1, \dots, \omega_m$  en  $G$  tales que  $(\omega_i)_g((X_j)_g) = \delta_{ij}$ , para cada  $g \in G$ . Por otro lado, definiendo  $\omega := \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m \in \Lambda^m(G)$  tenemos que no se anula  $\omega$  en  $G$  y, dado que el pullback conmuta con la operación  $\wedge$ , se tiene que  $\omega$  es invariante por la izquierda. Además, podemos orientar  $G$  de forma que  $\omega$  sea definida positiva [30, Proposition 8.9].

En un contexto más general, encontramos la siguiente definición y proposición relativas a la integración de funciones continuas de soporte compacto en una variedad diferenciable orientable.

**Definición 3.4.** Sean  $M, N$  dos variedades diferenciables orientadas de dimensión  $m$  y  $\phi: M \rightarrow N$  un difeomorfismo. Diremos que  $\phi$  *preserva la orientación* si para cada carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  de  $M$ , la carta  $(\phi(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ \phi^{-1})$  es positiva relativa al atlas de  $N$ . En este caso, el atlas de cartas de la variedad  $N$  se puede tomar como  $(\phi(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ \phi^{-1})$ .

En las condiciones de la definición anterior, la fórmula del cambio de variable para integrales múltiples se puede expresar utilizando los pullbacks como en el siguiente resultado.

**Proposición 3.5.** Sean  $M, N$  dos variedades diferenciables de dimensión  $m$  orientables y sea  $\phi: M \rightarrow N$  un difeomorfismo que preserva la orientación. Entonces si  $\omega$  es una  $m$ -forma diferenciable en  $N$ , se tiene que

$$\int_N f\omega = \int_M (f \circ \phi)\phi^*\omega,$$

para cada  $f \in \mathcal{C}_0(N)$ , donde  $\mathcal{C}_0(N)$  denota las funciones continuas de soporte compacto en  $N$ .

Una demostración de la Proposición 3.5 puede verse en [30, Proposition 8.19].

Antes de enunciar el siguiente resultado, recordemos que si  $G$  es un grupo de Lie y, por lo tanto, una variedad diferenciable, los *conjuntos de Borel* son los elementos de la  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos abiertos de  $G$ . Así, una *medida de Borel* es una medida definida sobre esta  $\sigma$ -álgebra. En particular, una medida de Borel está completamente determinada por su acción sobre funciones continuas con soporte compacto, gracias al teorema de representación de Riesz. En este contexto, veremos que emplearemos una  $m$ -forma invariante por la izquierda para construir la medida sobre  $G$ . Además, recordemos que una medida  $\mu$  es *regular* si para todo conjunto  $A \subset G$  de Borel, se tiene que:

- (a)  $\mu(A) = \inf \{\mu(U) : U \subset A, U \text{ abierto}\}$  (regularidad exterior).
- (b)  $\mu(A) = \sup \{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$  (regularidad interior).

**Teorema 3.6.** Si  $G$  es un grupo de Lie de dimensión  $m$ , entonces  $G$  admite una  $m$ -forma invariante por la izquierda que no se anula. Además,  $G$  puede orientarse de forma que  $\omega$  sea positiva y  $\omega$  defina una medida de Borel no nula  $d\mu_1$  en  $G$  que es invariante por la izquierda, es decir,  $d\mu_1(L_g E) = d\mu_1(E)$ , para cualquiera  $g \in G$  y cualquier conjunto  $E$  de Borel en  $G$ .

*Demostración.* En primer lugar, por lo comentado en los párrafos anteriores, esa  $m$ -forma  $\omega$  existe y, además, se puede orientar  $G$  de forma que  $\omega$  sea positiva. Consideremos como  $d\mu_1$  la medida asociada a  $\omega$ , es decir,  $\int_G f\omega = \int_G f(x)d\mu_1(x)$ , para cada  $f \in \mathcal{C}_0(G)$ . Por la Proposición 3.5 y la igualdad  $L_g^*\omega = \omega$ , tenemos que

$$\int_G f(gx)d\mu_1(x) = \int_G f(x)d\mu_1(x), \quad (3.1)$$

para cada  $f \in \mathcal{C}_0(G)$ . Ahora bien, si tomamos  $K$  un compacto de  $G$ , aplicando la igualdad (3.1) a cada función continua de soporte compacto  $f \geq \mathcal{X}_K$ , donde  $\mathcal{X}_K$  es la función característica sobre el compacto  $K$  y tomando el ínfimo de esas integrales, se obtiene que  $d\mu_1(L_{g^{-1}}K) = d\mu_1(K)$ . Así, como  $G$  posee una base numerable, la medida definida por  $d\mu_1$  es automáticamente regular y, así, se tiene que  $d\mu_1(L_{g^{-1}}E) = d\mu_1(E)$  para cada conjunto de Borel  $E$ .  $\square$

Con el Teorema 3.6 podemos definir el concepto de medida de Haar en un grupo de Lie  $G$ .

**Definición 3.7.** Dado un grupo de Lie  $G$ , una medida de Borel no nula invariante por traslaciones a la izquierda recibe el nombre de *medida de Haar por la izquierda*. De forma análoga, una *medida de Haar invariante por la derecha* en  $G$  es una medida de Borel no nula invariante por traslaciones a la derecha.

**Observación 3.8.** Nótese que el Teorema 3.6 nos garantiza la existencia de las medidas de Haar invariantes por la izquierda.

**Definición 3.9.** Un grupo de Lie  $G$  se dice *unimodular* si cada medida de Haar invariante por la izquierda lo es por la derecha (y viceversa). En este caso, hablaremos de *medida de Haar* sobre  $G$ .

La existencia de medidas de Haar invariantes por la izquierda en un grupo de Lie  $G$  motiva el siguiente resultado.

**Teorema 3.10.** *Dado un grupo de Lie  $G$ , entonces dos medidas de Haar por la izquierda en  $G$  son proporcionales.*

*Demostración.* Sean  $d\mu_1$  y  $d\mu_2$  dos medidas de Haar por la izquierda sobre  $G$ . Consideremos la medida  $d\mu = d\mu_1 + d\mu_2$ , que es una medida de Haar invariante por la izquierda. Entonces  $d\mu(E) = 0$  implica que  $d\mu_1(E) = 0$ . Ahora bien, por el teorema de Radon-Nikodym existe un  $h_1 \geq 0$ , una función definida sobre  $G$  continua y que toma valores reales no negativos, de forma que  $d\mu_1 = h_1 d\mu$ . Fijemos  $g \in G$ . Por la invarianza por la izquierda de  $d\mu_1$  y  $d\mu$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_G f(x) h_1(g^{-1}x) d\mu(x) &= \int_G f(gx) h_1(x) d\mu(x) = \int_G f(gx) d\mu_1(x) \\ &= \int_G f(x) d\mu_1(x) = \int_G f(x) h_1(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

para cada función de Borel  $f \geq 0$ . De esta forma, las medidas  $h_1(g^{-1}x)d\mu(x)$  y  $h_1(x)d\mu(x)$  son iguales y  $h_1(g^{-1}x) = h_1(x)$  para casi todo  $x \in G$  respecto a la medida  $d\mu$ . Ahora bien, podemos tomar  $h_1(g^{-1}x)$  y  $h_1(x)$  como funciones de  $(g, x) \in G \times G$  y estas serán funciones de Borel debido a que las operaciones de grupo son continuas. Además, para cada  $g \in G$  ambas funciones coinciden para casi todo punto  $x \in G$ . Por el Teorema de Fubini tendremos que ambas funciones coinciden para casi todo par  $(g, x)$  con respecto a la medida producto y, por lo tanto, para cada  $x$  coinciden para casi todo  $g$ .

Fijemos ahora un punto  $x_0 \in G$  de referencia. En ese caso, como vimos que  $h_1(g^{-1}x) = h_1(x)$  para casi todo punto  $x$  (fijado  $g$ ), se cumple que  $h_1(g^{-1}x_0) = h_1(x_0)$  para casi todo  $g \in G$ . Así, tomando  $g = x_0 x^{-1}$  se obtiene que  $h_1(x) = h_1(x_0)$  para casi todo  $x \in G$ , luego  $d\mu_1 = h_1(x_0)d\mu$ . Por lo tanto, lo que tenemos es que  $d\mu_1$  es múltiplo de  $d\mu$  y, de manera análoga, ocurre lo mismo con  $d\mu_2$ . De esta forma, se sigue que ambas medidas son proporcionales.  $\square$

**Observación 3.11.** En virtud del Teorema 3.10 se tiene que dos medidas de Haar por la izquierda son proporcionales. Análogamente se tiene el resultado para medidas de Haar

invariantes por la derecha, por lo que salvo proporcionalidad, dado un grupo de Lie  $G$ , definiremos la medida de Haar por la izquierda, que denotaremos por  $d_l$  y la medida de Haar por la derecha,  $d_r$ .

**Definición 3.12.** Dado un grupo de Lie  $G$ , se define la *función modular*  $\Delta: G \rightarrow \mathbb{R}^+$  de  $G$  dada por (el factor de proporcionalidad)

$$d_l(\cdot t) = \Delta(t)^{-1} d_l(\cdot), \quad \text{para cada } t \in G.$$

En relación con la función modular que acabamos de definir, el siguiente resultado nos proporciona su expresión en términos de la aplicación adjunta a nivel de grupos de Lie.

**Proposición 3.13.** Dado un grupo de Lie  $G$ , la función modular de  $G$  viene dada por  $\Delta(t) = |\det \text{Ad}(t)|$ .

*Demostración.* Sea  $X \in \mathfrak{g}$  y sean  $g, t \in G$ ,  $h \in C^\infty(G)$ . De esta forma se tiene que:

$$\begin{aligned} R_{t^{-1}*g}(X_g)h &= X_g(h \circ R_{t^{-1}}) = \frac{d}{dr} h \circ R_{t^{-1}}(g \text{Exp}(rX))|_{r=0} \\ &= \frac{d}{dr} h(g \text{Exp}(rX)t^{-1})|_{r=0} \\ &= \frac{d}{dr} h(gt^{-1}I_t(\text{Exp}(rX)))|_{r=0} \\ &= \frac{d}{dr} h(gt^{-1}\text{Exp} \circ \text{Ad}(t)(rX))|_{r=0} \\ &= \frac{d}{dr} h(gt^{-1}\text{Exp}(r\text{Ad}(t)X))|_{r=0} \\ &= (\text{Ad}(t)X)_{gt^{-1}}h. \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que

$$R_{t^{-1}*g}(X_g) = (\text{Ad}(t)X)_{gt^{-1}}. \quad (3.2)$$

Con la expresión obtenida en (3.2), si tomamos una  $m$ -forma  $\omega$  invariante por la izquierda, podemos realizar el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} (R_{t^{-1}}^*\omega)_g((X_1)_g, \dots, (X_m)_g) &= \omega_{gt^{-1}}(R_{t^{-1}*g}(X_1)_g, \dots, R_{t^{-1}*g}(X_m)_g) \\ &= \omega_{gt^{-1}}((\text{Ad}(t)X_1)_{gt^{-1}}, \dots, (\text{Ad}(t)X_m)_{gt^{-1}}) \\ &= \det(\text{Ad}(t))\omega_{gt^{-1}}((X_1)_{gt^{-1}}, \dots, (X_m)_{gt^{-1}}), \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$R_{t^{-1}}^*\omega = \det(\text{Ad}(t))\omega. \quad (3.3)$$

Ahora bien, si suponemos que  $\omega$  es positiva, obtenemos que o bien  $R_{t^{-1}}^*\omega$ , o bien  $-R_{t^{-1}}^*\omega$  son positivas acorde al signo de  $\det(\text{Ad}(t))$ . Por lo tanto, cuando el signo de  $\det(\text{Ad}(t))$  es

positivo, combinando la Proposición 3.5 y (3.3) se obtiene

$$\begin{aligned} (\det(\text{Ad}(t))) \int_G f(x) d_l(x) &= (\det(\text{Ad}(t))) \int_G f \omega = \int_G f R_{t^{-1}}^* \omega \\ &= \int_G (f \circ R_t) \omega = \int_G f(xt) d_l(x) \\ &= \int_G f(x) d_l(xt^{-1}) = \Delta(t) \int_G f(x) d_l(x), \end{aligned}$$

donde  $d_l$  es la medida de Haar invariante por la izquierda construida como en el Teorema 3.6. Así, se tiene que  $\det(\text{Ad}(t)) = \Delta(t)$ . De esta forma, cuando  $\det(\text{Ad}(t))$  es negativo, cada uno de los pasos que acabamos de realizar se puede repetir a excepción de la primera igualdad en la segunda línea del cálculo anterior. Ahora bien, como  $-R_{t^{-1}}^* \omega$  es definida positiva, la Proposición 3.5 requiere de un signo menos en su fórmula, para poder tomar  $\phi = R_{t^{-1}}$ . Por lo tanto,  $-\det(\text{Ad}(t)) = \Delta(t)$ . Finalmente, concluimos que  $\Delta(t) = |\det(\text{Ad}(t))|$ .  $\square$

Para concluir este apartado, vamos a introducir algunos conceptos relativos a los diferentes tipos de álgebras de Lie que existen, atendiendo a la cantidad de ideales que contienen y su comportamiento con respecto a la operación corchete de Lie, para posteriormente concluir con el Teorema de Levi.

**Definición 3.14.** Dado un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , se dice que es *simple* si no es abeliana y no contiene ideales propios distintos de cero. Por otro lado, una álgebra de Lie se dice *semisimple* si es suma directa de álgebras de Lie simples.

**Definición 3.15.** Dada una álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , podemos construir las siguientes sucesiones:

- (a)  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \dots \supset \mathfrak{g}_{j+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j] \supset \dots$
- (b)  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \dots \supset \mathfrak{g}^{j+1} = [\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j] \supset \dots$

Diremos que  $\mathfrak{g}$  es *nilpotente* si existe un  $k$  tal que  $\mathfrak{g}_k = 0$ . Por otro lado, diremos que  $\mathfrak{g}$  es *resoluble* si existe un  $k$  de forma que  $\mathfrak{g}^k = 0$ .

**Definición 3.16.** Dado un grupo de Lie  $G$ , se dice que *nilpotente, resoluble, simple o semisimple* si su álgebra de Lie es respectivamente, nilpotente, resoluble, simple o semisimple.

**Definición 3.17** (Suma semidirecta de álgebras de Lie). Sean  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  álgebras de Lie y supongamos que existe una aplicación

$$\varphi: \mathfrak{h} \longrightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}),$$

donde  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  denota el conjunto de las derivaciones de  $\mathfrak{g}$  (es decir, transformaciones lineales  $D: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  que satisfacen la regla de Leibniz  $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$ ). Entonces el espacio vectorial  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  se convierte en un álgebra de Lie con corchete definido por:

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] := ([x_1, x_2] + \varphi(y_1)(x_2) - \varphi(y_2)(x_1), [y_1, y_2]),$$

para todos  $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$  e  $y_1, y_2 \in \mathfrak{h}$ . Esta nueva álgebra de Lie se llama *suma semidirecta* de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  y se denota por:

$$\mathfrak{g} \rtimes_{\varphi} \mathfrak{h}.$$

En relación con las definiciones anteriores, tenemos el siguiente teorema que asegura que toda álgebra de Lie se escribe como suma semidirecta de un álgebra de Lie semisimple y una resoluble.

**Teorema 3.18** (Teorema de Levi). *Dada una álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , entonces existen una álgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{s}$  y un álgebra de Lie resoluble  $\mathfrak{r}$ , tales que  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \rtimes \mathfrak{r}$  (suma semidirecta).*

**Observación 3.19.** Al álgebra de Lie  $\mathfrak{r}$  del teorema anterior se le denota por  $\text{rad}(\mathfrak{g})$ , se denomina radical de  $\mathfrak{g}$  y se define como el mayor ideal resoluble de  $\mathfrak{g}$ .

### 3.3. La constante isoperimétrica de Cheeger de una variedad riemanniana

A continuación, vamos a definir la constante isoperimétrica de Cheeger para una variedad riemanniana no compacta de dimensión  $n \geq 2$ . Como ya hemos comentado, este concepto está estrechamente relacionado con la geometría de la variedad y el espectro del operador de Laplace-Beltrami. De esta forma, en este contexto y salvo que se indique lo contrario,  $M$  denotará una variedad riemanniana de dimensión  $n \geq 2$  no compacta. Como veremos, esta constante proporciona una cota inferior para el valor del primer autovalor no nulo del operador laplaciano. Tanto la definición de la constante isoperimétrica de Cheeger como algunas propiedades interesantes se pueden consultar en [10, pág. 95-96].

El motivo de introducir las constantes isoperimétricas se debe a que nos va a interesar trasladar el estudio del problema isoperimétrico del espacio euclídeo a variedades riemannianas más generales con geometría acotada, véase [11, pág. 127]. En este contexto, tenemos que cambiar nuestro punto de vista con respecto a las preguntas que nos planteamos. Es decir, en una variedad riemanniana general, las posibilidades de encontrar el dominio de área de frontera mínima, dando de antemano el volumen de dicho dominio, son prácticamente nulas, a excepción de algunos casos muy especiales. Además, diferentes elecciones del volumen prescrito pueden cambiar por completo el carácter del problema [11, pág. 117]. Así, desde una perspectiva analítica, podemos no ser capaces de calcular de forma precisa el ínfimo del problema

$$\Omega \mapsto \frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}}, \quad (3.4)$$

donde  $n$  es la dimensión de la variedad y  $\Omega$  denota un dominio acotado, relativamente compacto y cuya frontera es una hipersuperficie diferenciable. De esta forma, más bien nos plantearemos el siguiente problema: encontrar  $\nu \in [1, \infty)$ , de forma que el funcional isoperimétrico (3.4), cambiando  $n$  por  $\nu$ , esté acotado por una constante positiva. Observemos que para  $\nu = 1$  el funcional se convierte en  $\Omega \mapsto A(\partial\Omega)$  y para  $\nu = \infty$  se tiene  $\Omega \mapsto \frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)}$ .

Con objeto de estudiar los funcionales anteriores surgen las llamadas constantes isoperimétricas para una variedad riemanniana  $M$  de dimensión  $n \geq 2$ . Así, la  $\nu$ -constante isoperimétrica se define como

$$\mathcal{J}_\nu(M) = \inf_{\Omega} \frac{A(\partial\Omega)}{V(\Omega)^{1-\frac{1}{\nu}}},$$

donde  $\Omega$  recorre todas las subvariedades abiertas de  $M$  con clausura compacta y cuya frontera es una hipersuperficie diferenciable. En concreto, nos vamos a centrar en la constante isoperimétrica de Cheeger, que viene dada por:

$$h(M) := \mathcal{J}_\infty(M).$$

Merece la pena comentar por qué estudiamos la constante de Cheeger en una variedad no compacta. Esto se debe a que si la variedad  $M$  fuese compacta, considerando  $\Omega = M \setminus B(x, \varepsilon)$ , para un  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, y donde  $B(x, \varepsilon)$  denota la bola geodésica en  $M$  de centro  $x$  y radio  $\varepsilon$ , se puede probar que  $\mathcal{J}_\nu(M) = 0$ , para cada  $\nu$ . Por esta razón, restringiremos nuestro estudio de la constante de Cheeger al caso de las variedades no compactas. Por otro lado, se puede adaptar la definición de constante isoperimétrica para el caso de variedades compactas y obtener resultados interesantes (ver comentarios en [11, Chapter VI.2]).

Así pues, tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.20.** Se define la *constante isoperimétrica de Cheeger* de  $M$  como

$$h(M) := \inf_{\Omega} \frac{A(\Omega)}{V(\Omega)}, \quad (3.5)$$

donde  $\Omega$  recorre todos los abiertos de  $M$  con clausura compacta en  $M$  y cuya frontera es una hipersuperficie diferenciable. Cabe mencionar que algunos autores denotan a esta constante como  $Ch(M)$ .

**Definición 3.21.** Dada una variedad riemanniana  $M$  no compacta de dimensión  $n \geq 2$ , diremos que un abierto  $\Omega$  de  $M$  es un *dominio normal* si es conexo, tiene clausura compacta dentro de  $M$  y su frontera es diferenciable a trozos, es decir, que  $\partial\Omega$  es una unión finita de hipersuperficies diferenciables con borde que se intersecan en puntos o aristas (por ejemplo un cubo).

Con la definición de dominio normal de una variedad, podemos introducir el problema de autovalores para el operador laplaciano con condiciones de Dirichlet y con ello la noción del primer autovalor del operador laplaciano. Veamos esto en detalle.

**Definición 3.22.** Consideremos una variedad riemanniana  $M$  bajo las hipótesis de la Definición 3.21 y un dominio normal  $\Omega$  de dicha variedad. En estas condiciones podemos plantear el siguiente problema con condiciones de contorno tipo Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.6)$$



donde  $u$  es una función de al menos clase  $\mathcal{C}^2(\Omega)$  y continua en  $\bar{\Omega}$ , y  $\lambda$  es un número real que depende de  $u$ . Si una función  $u$  no idénticamente nula es solución del problema anterior para un cierto  $\lambda$ , diremos que  $\lambda$  es un autovalor del laplaciano en  $\Omega$  con autovector o autofunción  $u$ . Por otro lado, si consideramos los autovalores del operador laplaciano  $\Delta$ , se puede probar que son de la forma  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ , donde la multiplicidad de  $\lambda_1$  es uno [10, pág. 8]. De esta forma, denotamos  $\lambda(\Omega) := \lambda_1$  y lo llamamos *primer autovalor del laplaciano* con condición de Dirichlet para el dominio  $\Omega$ .

Con la Definición 3.22 tiene sentido considerar el Teorema 3.23 que enunciamos más abajo y que acota dicho autovalor, para un dominio normal, en función de la constante isoperimétrica de Cheeger. Pero antes recordemos brevemente la fórmula de la co-área, que nos será de gran utilidad para demostrar el Teorema 3.23.

Consideremos una función  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , con  $\nabla f \neq 0$  en casi todo punto de  $M$ , es decir, el conjunto de los puntos donde  $\nabla f = 0$  tiene medida nula en  $M$ . De esta forma, para cualquier función integrable  $f$  se cumple que en cualquier dominio normal  $\Omega$  de  $M$ , se verifica que

$$\int_{\Omega} \|\nabla f\| dV = \int_0^\infty A(t) dt,$$

donde  $A(t)$  representa el área de  $\{p \in \Omega : f(p) = t\}$ , es decir, el conjunto de nivel para la constante  $t$ . Una demostración detallada de esto puede verse en [10, pág. 86]. Nótese además que  $dV$  hace referencia a la medida de volumen de la variedad riemanniana (orientable)  $M$ .

**Teorema 3.23.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana orientable de dimensión  $n \geq 2$  no compacta. Entonces para cualquier dominio normal  $\Omega$  de  $M$  se tiene que*

$$\lambda(\Omega) \geq \frac{h^2(\Omega)}{4}. \quad (3.7)$$

*Demostración.* Consideremos  $u$  la autofunción asociada al autovalor  $\lambda(\Omega)$ , es decir, tenemos la siguiente situación

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda(\Omega)u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Por otro lado, dada  $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$  sabemos que  $\nabla u$  es el campo vectorial que verifica  $\langle \nabla u, X \rangle = X(u)$ , para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Además, por la regla de la cadena, se tiene que

$$\langle \nabla u^2, X \rangle = X(u^2) = 2uX(u) = 2u\langle \nabla u, X \rangle = \langle 2u\nabla u, X \rangle.$$

Como esta igualdad se tiene para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , obtenemos que  $\nabla u^2 = 2u\nabla u$ .

Denotemos, para el resto de la demostración, por  $\|\cdot\|$  a la norma en el espacio de funciones  $L^2(\Omega)$  y recordemos la primera fórmula de Rayleigh [10, pág. 16-17]. Esta nos

dice que para un dominio normal se tiene que el primer autovalor del operador laplaciano tiene la siguiente expresión:

$$\lambda(\Omega) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dV}{\int_{\Omega} v^2 dV}, \quad (3.8)$$

donde, recordemos, que el espacio de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  consiste en las funciones integrables en  $\Omega$  cuya primera derivada débil es integrable en  $\Omega$  y con traza igual a cero sobre  $\partial\Omega$ . Además, dicho ínfimo se alcanza en cualquier autofunción asociada al primer autovalor del laplaciano. Ahora bien, como hemos supuesto que  $u$  es la autofunción para  $\lambda(\Omega)$ , se tiene por la expresión dada en (3.8) que  $\lambda(\Omega) \geq \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2}$ , pues en la autofunción  $u$  se alcanza el mínimo. Por otro lado, por la expresión que habíamos obtenido para  $\nabla u^2$ , es decir,  $\nabla u^2 = 2u\nabla u$ , se tiene por la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u^2| dV &= \int_{\Omega} |2u\nabla u| dV \leq \left( \int_{\Omega} (2u)^2 dV \right)^{1/2} \cdot \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV \right)^{1/2} \\ &= 2\|u\| \cdot \|\nabla u\|. \end{aligned}$$

Combinando esto con (3.8) se tiene que

$$\lambda(\Omega) \geq \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2} \geq \frac{1}{4} \left( \frac{\int_{\Omega} |\nabla u^2| dV}{\int_{\Omega} u^2 dV} \right)^2. \quad (3.9)$$

Aplicando la fórmula de la co-área particularizando en el caso de la función  $u^2$ , se tiene que  $\int_{\Omega} \|\nabla u^2\| dV = \int_0^{\infty} A(t) dt$ , donde  $A(t)$  es el área de la superficie de nivel  $u^2 = t$ . Además, nótese que la integral se toma únicamente en  $[0, \infty)$ , debido a que se integra  $u^2 \geq 0$ . Así, si denotamos por  $V(t)$  al volumen de la región  $\{u^2 \geq t\} := \{p \in \Omega : u^2(p) \geq t\}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\nabla u^2\| dV &= \int_0^{\infty} A(t) dt \\ &\geq h(\Omega) \int_0^{\infty} V(t) dt \\ &= -h(\Omega) \int_0^{\infty} tV'(t) dt \\ &= h(\Omega) \int_{\Omega} u^2 dV, \end{aligned}$$

donde para pasar de la segunda a la tercera línea se ha empleado la integración por partes. En efecto, aplicando la integración por partes se tiene

$$\int_0^{\infty} V(t) dt = [tV(t)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} tV'(t) dt.$$

Veamos que el primer sumando es igual a cero. En efecto, tenemos  $[tV(t)]_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} tV(t)$ . Ahora bien, sabemos que  $u^2$  es acotada, por lo que existe un  $t_{max}$ , de forma que  $V(t) = 0$  para cada  $t > t_{max}$ , debido a que para cada  $t > t_{max}$  se verifica que  $\{u^2 \geq t\} = \emptyset$ , por lo

que  $\lim_{t \rightarrow \infty} tV(t) = 0$ . Así, se tiene el paso de la segunda a la tercera línea. Finalmente, para la última igualdad, empleando de nuevo la integración por partes y el teorema de Fubini, se obtiene

$$\begin{aligned}
 -h(\Omega) \int_0^\infty tV'(t)dt &= -h(\Omega) \left( [tV(t)]_0^\infty - \int_0^\infty V(t)dt \right) \\
 &= h(\Omega) \int_0^\infty V(t)dt \\
 &= h(\Omega) \int_0^\infty \left( \int_{\{p \in \Omega: u^2(p) \geq t\}} 1 dV \right) dt \\
 &= h(\Omega) \int_\Omega \left( \int_0^{u^2} 1 dt \right) dV \\
 &= h(\Omega) \int_\Omega u^2 dV,
 \end{aligned}$$

donde recordemos que el término  $[tV(t)]_0^\infty = 0$ . Así, se concluye que  $\lambda(\Omega) \geq \frac{h^2(\Omega)}{4}$ , lo que prueba el teorema.  $\square$

### 3.4. La constante isoperimétrica de Cheeger de un grupo de Lie resoluble y simplemente conexo

A lo largo de esta sección, vamos a introducir una serie de resultados que nos permitirán calcular, de forma explícita, la constante isoperimétrica de Cheeger en el caso de un grupo de Lie  $G$  simplemente conexo y resoluble (es decir, con álgebra de Lie resoluble) con métrica invariante a la izquierda. Como ya comentamos en la introducción de este capítulo, esto nos permitirá aplicar estos cálculos en el contexto de los espacios simétricos de tipo no compacto, pues se sabe que cada espacio de este tipo es isométrico a un grupo de Lie resoluble simplemente conexo con métrica invariante a la izquierda. En esta sección se ha seguido el artículo original de Peyerimhoff y Samiou [41].

Comenzaremos considerando una clase particular de grupos de Lie, de la forma  $G_0 \rtimes \mathbb{R}$ . Más adelante, veremos que el trabajo que realizaremos para esta clase de grupos nos permitirá abordar el caso general. De esta forma, tomemos un grupo de Lie  $G$  de la forma  $G = G_0 \rtimes \mathbb{R}$ , donde estamos considerando  $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$  como grupo de Lie, con álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \rtimes \mathbb{R}$ , la suma semidirecta de las dos álgebras de Lie, donde recordemos que  $\mathbb{R}$  es la parte abeliana con corchete  $[\cdot, \cdot] = 0$ . Además, equipemos a  $G$  con una métrica invariante a la izquierda, de forma que  $\mathfrak{g}_0 \perp \mathbb{R}$ . Por otro lado, si denotamos a  $H_0$  como uno de los vectores unitarios del álgebra de Lie  $\mathbb{R}$ , según la métrica considerada, obtenemos el difeomorfismo  $\phi: G_0 \times \mathbb{R} \rightarrow G$ , dado por  $(g_0, t) \mapsto g_0 \text{Exp}_{\mathbb{R}}(tH_0)$ . Aquí,  $\text{Exp}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  denota la aplicación exponencial del grupo de Lie  $(\mathbb{R}, +)$ , que se puede identificar con la aplicación identidad de  $\mathbb{R}$ .

A continuación, vamos a ver un resultado que establece la expresión explícita, en términos de la representación adjunta a nivel de álgebras de Lie, de la medida de Haar por la izquierda de un grupo de Lie  $G$  como el descrito anteriormente.

**Lema 3.24.** Sea  $G = G_0 \rtimes \mathbb{R}$  un grupo de Lie como el descrito arriba. La medida de Haar invariante por la izquierda  $d\mu$  en  $G$  está dada por la expresión

$$d\mu(g_0, t) = \det(e^{\text{ad}(-tH_0)})d\nu(g_0)dt = e^{-t\text{tr}(\text{ad}(H_0))}d\nu(g_0)dt, \quad (3.10)$$

donde  $d\nu$  es la medida de Haar izquierda en  $G_0 \equiv G_0 \times \{0\}$ .

**Observación 3.25.** Nótese que aquí  $e$  denota la aplicación exponencial de  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  y, por lo tanto, se puede identificar con la exponencial de matrices habitual.

*Demostración.* En primer lugar,  $d\nu dt$  es invariante por la izquierda para  $G_0$ , pues dados  $h_0, g_0 \in G_0$ , y  $t \in \mathbb{R}$ , si  $h_0$  actúa por la izquierda sobre un elemento  $(g_0, t)$ , se tiene que  $h_0 \cdot (g_0, t) = (h_0 g_0, t)$ . Por otro lado, dado que la medida  $d\nu$  es invariante por la izquierda por definición y la medida  $dt$  no se ve afectada al no actuar  $h_0$  sobre la componente de  $\mathbb{R}$ , si tomamos  $f \in \mathcal{C}_0(G_0 \times \mathbb{R})$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{G_0 \times \mathbb{R}} f(h_0 g_0, t) d\nu(g_0) dt &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{G_0} f(h_0 g_0, t) d\nu(g_0) \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{G_0} f(\tilde{g}_0, t) d\nu(\tilde{g}_0) \right) dt \\ &= \int_{G_0 \times \mathbb{R}} f(g_0, t) d\nu(g_0) dt. \end{aligned}$$

Nótese que hemos realizado en cambio de variable  $\tilde{g}_0 = h_0 g_0$ . Así, hemos obtenido que  $d\nu dt$  es invariante por la izquierda bajo  $G_0$ .

Por otro lado, consideremos la acción por la derecha de un elemento  $s \in \mathbb{R}$ , es decir,  $s \cdot (g_0, t) = (g_0, t + s)$ . Como  $dt$  es invariante por traslaciones (medida de Lebesgue) y  $d\nu$  en  $G_0$  no se ve afectada, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{G_0 \times \mathbb{R}} f(g_0, t + s) d\nu(g_0) dt &= \int_{G_0} \left( \int_{\mathbb{R}} f(g_0, t + s) dt \right) d\nu(g_0) \\ &= \int_{G_0} \left( \int_{\mathbb{R}} f(g_0, \tilde{t}) d\tilde{t} \right) d\nu(g_0) \\ &= \int_{G_0 \times \mathbb{R}} f(g_0, t) d\nu(g_0) dt, \end{aligned}$$

donde hemos empleado el cambio de variable  $\tilde{t} = t + s$ .

La idea ahora consiste en construir la medida de Haar invariante por la izquierda,  $d\mu$ , en  $G = G_0 \rtimes \mathbb{R}$ , de la forma  $d\mu(g_0, t) = \delta(t) d\nu(g_0) dt$ , donde  $\delta(t)$  es un factor de corrección que tenemos que determinar.

Sean  $a = \text{Exp}_{\mathbb{R}}(sH_0)$ ,  $f \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$  (es decir, función de clase infinito y soporte compacto) y  $\psi: G_0 \rightarrow G_0$ , dada por  $g_0 \mapsto ag_0a^{-1}$ . En ese caso, tomando un  $g \in G$ , podemos realizar

el cálculo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_G f(ag) d\mu(g) &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{G_0} f(ag_0 \text{Exp}_{\mathbb{R}}(tH_0)) \delta(t) d\nu(g_0) \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{G_0} f(\psi(g_0) a \text{Exp}_{\mathbb{R}}(tH_0)) \delta(t) d\nu(g_0) \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{G_0} f(\psi(g_0) \text{Exp}_{\mathbb{R}}((s+t)H_0)) \delta(t) d\nu(g_0) \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{G_0} f(g_0 \text{Exp}_{\mathbb{R}}((s+t)H_0)) |\det D\psi^{-1}(g_0)| d\nu(g_0) \right) dt.
\end{aligned}$$

Calculemos ahora el término  $|\det(D\psi^{-1}(g_0))|$ . Para ello, tomemos  $X_1, \dots, X_n$  una base ortonormal de  $\mathfrak{g}_0$  con respecto a la métrica invariante por la izquierda. Entonces consideremos los campos de vectores  $Y_j = \frac{d}{dt} g_0 \text{Exp}_{\mathbb{R}}(tX_j)|_{t=0}$ , con  $j = 1, \dots, n$ . Se tiene que  $Y_j$ , con  $j = 1, \dots, n$  es una base ortonormal para  $T_{g_0}G_0$ . En efecto, pues utilizando la invarianza por la izquierda de los campos  $X_j$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
Y_j &= \frac{d}{dt} g_0 \text{Exp}_{\mathbb{R}}(tX_j)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} L_{g_0} \text{Exp}_{\mathbb{R}}(tX_j)|_{t=0} \\
&= L_{g_0*} X_j|_e = X_j|_{g_0}.
\end{aligned}$$

Con los campos  $Y_j$ , podemos calcular el término  $|\det(D\psi^{-1}(g_0))|$ .

$$\begin{aligned}
D\psi^{-1}(g_0)(Y_j) &= \psi_{*g_0}^{-1}(Y_j) \\
&= \frac{d}{dt} \psi^{-1}(g_0 \text{Exp}_{\mathbb{R}}(tX_j))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} a^{-1} g_0 \text{Exp}_{\mathbb{R}}(tX_j) a|_{t=0} \\
&= a^{-1} g_0 \left( \frac{d}{dt} \text{Exp}_{\mathbb{R}}(tX_j)|_{t=0} \right) a \\
&= a^{-1} g_0 X_j a = L_{a^{-1}g_0 a*}(a^{-1} X_j a) \\
&= L_{a^{-1}g_0 a*}(\text{Ad}(a^{-1})(X_j)) \\
&= L_{a^{-1}g_0 a*}(e^{\text{ad}(-sH_0)} X_j).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos obtenido que  $|\det(D\psi^{-1}(g_0))| = \det(e^{\text{ad}(-sH_0)})$ . Y, de esta forma podemos calcular la expresión de  $\int_G f(ag) d\mu(g)$ :

$$\begin{aligned}
\int_G f(ag) d\mu(g) &= \int_{\mathbb{R}} (\delta(t) \det(e^{\text{ad}(-sH_0)})) \int_{G_0} f(g_0 \text{Exp}_{\mathbb{R}}((s+t)H_0)) d\nu(g_0) dt \\
&= \int_G f(g) d\mu(g) = \int_{\mathbb{R}} (\delta(s+t) \int_{G_0} f(g_0 \text{Exp}_{\mathbb{R}}((s+t)H_0)) d\nu(g_0)) dt,
\end{aligned}$$

de donde se obtiene la identidad multiplicativa

$$\delta(t) \det(e^{\text{ad}(-sH_0)}) = \delta(s+t),$$

es decir,  $\delta(t) = \det(e^{\text{ad}(-tH_0)})$ . Ahora bien, como la aplicación traza es la diferencial de la aplicación determinante, se tiene que

$$\det(e^{\text{ad}(-tH_0)}) = e^{\text{tr}(\text{ad}(-tH_0))} = e^{\text{tr}(-t\text{ad}(H_0))} = e^{-t\text{tr}(\text{ad}(H_0))}.$$

Finalmente, se obtiene que

$$\det(e^{\text{ad}(-tH_0)}) = e^{-t\text{tr}(\text{ad}(H_0))},$$

lo que completa la prueba.  $\square$

El siguiente resultado nos proporciona una cota inferior para la constante isoperimétrica de Cheeger de un grupo de Lie  $G$  como el considerado arriba.

**Teorema 3.26.** *Sea  $G$  un grupo de Lie de la forma  $G_0 \rtimes \mathbb{R}$ , con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_0 \rtimes \mathbb{R}$  (producto semidirecto de álgebras de Lie), con una métrica invariante a la izquierda, de forma que  $\mathfrak{g}_0 \perp \mathbb{R}$ . Entonces se tiene que*

$$h(G) \geq |\text{tr}(\text{ad}(H_0))|.$$

Además, si  $h(G_0) = 0$ , entonces se tiene la igualdad.

*Demostración.* Recordemos que teníamos el difeomorfismo  $\phi: G_0 \times \mathbb{R} \rightarrow G$ , dado por  $(g_0, t) \mapsto g_0 \text{Exp}_{\mathbb{R}}(tH_0)$ , por lo que podemos suponer que  $G \equiv G_0 \times \mathbb{R}$  y denotemos por  $\pi: G \rightarrow G_0$  la proyección. Además, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\text{tr}(\text{ad}(H_0)) \geq 0$  (en caso contrario basta con tomar  $-H_0$  en lugar de  $H_0$ ).

Para un subconjunto  $K \subset G$  conexo y compacto, con interior no vacío y cuya frontera  $\partial K$  sea una hipersuperficie diferenciable, definimos

$$U := \pi(K) \setminus \{\text{Puntos críticos de } \pi|_{\partial K}\}.$$

Además, definimos en  $U$  las funciones

$$\delta^+(u) := \max \{t : (u, t) \in K\}$$

y

$$\delta^-(u) := \min \{t : (u, t) \in K\}.$$

Nótese que las funciones  $\delta^+$  y  $\delta^-$  son diferenciables en  $U$ , pues el conjunto  $U$ , por el Teorema de Sard, es denso en  $\pi(K)$ . Además, la diferenciabilidad se desprende de que en el conjunto  $U$ , la restricción  $\pi|_{\partial K}$  no tiene puntos críticos, luego  $\partial K$  corta a las fibras  $\{u\} \times \mathbb{R}$  de manera transversal y, de nuevo, por el Teorema de Sard  $U$  es denso en  $\pi(K)$ .

Definimos ahora  $\partial K^+ := \{(u, \delta^+(u)) : u \in U\}$  y  $\partial K^- := \{(u, \delta^-(u)) : u \in U\}$ , es decir, las gráficas de  $\delta^+$  y  $\delta^-$ . Veamos cómo podemos estimar los volúmenes de  $K$  y  $\partial K$ . Por el

Lema 3.24, tenemos que

$$\begin{aligned}
V(K) &= \int_K d\mu(g) = \int_K d\mu(g_0, t) \\
&= \int_K e^{-t\text{tr}(\text{ad}(H_0))} d\nu(g_0) dt \\
&\leq \int_U \left( \int_{\delta^-(u)}^{\delta^+(u)} e^{-t\text{tr}(\text{ad}(H_0))} dt \right) d\nu(u) \\
&= \int_U \frac{1}{\text{tr}(\text{ad}(H_0))} (-e^{-\text{tr}(\text{ad}(H_0))\delta^+(u)} + e^{-\text{tr}(\text{ad}(H_0))\delta^-(u)}) d\nu(u) \\
&\leq \frac{1}{\text{tr}(\text{ad}(H_0))} \int_U e^{-\text{tr}(\text{ad}(H_0))\delta^+(u)} + e^{-\text{tr}(\text{ad}(H_0))\delta^-(u)} d\nu(u),
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se consigue debido a que

$$K \subset \{(u, t) \in G_0 \times \mathbb{R} : u \in U, \delta^-(u) \leq t \leq \delta^+(u)\}.$$

Ahora bien, es claro que  $A(\partial K) \geq A(\partial K^+) + A(\partial K^-)$ , por lo que si nos centramos en  $\partial K^+$ , podemos obtener que

$$A(\partial K^+) = \int_U \sqrt{\det(\langle \varphi_{*u} e_i, \varphi_{*u} e_j \rangle_{(u, \delta^+(u))})_{i,j=1}^n} d\nu(u), \quad (3.11)$$

donde  $\varphi: U \rightarrow \partial K^+$ , está dada por  $u \mapsto (u, \delta^+(u))$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base ortonormal de  $T_u G_0$ . Acotemos ahora el término de la integral (3.11).

$$\begin{aligned}
\sqrt{\det(\langle \varphi_{*u} e_i, \varphi_{*u} e_j \rangle_{(u, \delta^+(u))})_{i,j=1}^n} &= \\
&= \sqrt{\det((\langle e_i, e_j \rangle_{(u, \delta^+(u))} + e_i(\delta^+)e_j(\delta^+))_{i,j=1}^n)} \\
&\geq \sqrt{\det(\langle e_i, e_j \rangle_{(u, \delta^+(u))})_{i,j=1}^n} \\
&= e^{-\delta^+(u)\text{tr}(\text{ad}(H_0))}.
\end{aligned}$$

Nótese que la última desigualdad proviene de que si escribimos  $A := (\langle e_i, e_j \rangle_{(u, \delta^+(u))})_{i,j=1}^n$  y  $B := A + (e_i(\delta^+)e_j(\delta^+))_{i,j=1}^n$ , donde  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  es simétrica y no negativa, se obtiene que  $\det(B) \geq \det(A)$ . Por otro lado, la igualdad del final se obtiene por la medida de Haar invariante a la izquierda que habíamos calculado en el Lema 3.24 para  $G_0 \times \{0\} \equiv G_0$ , donde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es base ortonormal de  $T_u G_0$ . Además nótese que los vectores  $e_i$  de la derecha de la desigualdad se consideran como elementos en  $T_{(u, \delta^+(u))} G$ .

De manera análoga, podemos realizar la misma estimación para el caso de  $\partial K^-$  obteniendo que

$$A(\partial K^+) \geq \int_U e^{-\delta^+(u)\text{tr}(\text{ad}(H_0))} d\nu(u) \quad (3.12)$$

y

$$A(\partial K^-) \geq \int_U e^{-\delta^-(u)\text{tr}(\text{ad}(H_0))} d\nu(u). \quad (3.13)$$

Así, aplicando (3.12) y (3.13) se obtiene la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} A(\partial K) &\geq A(\partial K^+) + A(\partial K^-) \\ &\geq \int_U e^{-\delta^+(u)\text{tr}(\text{ad}(H_0))} + e^{-\delta^-(u)\text{tr}(\text{ad}(H_0))} d\nu(u). \end{aligned}$$

De esta manera, se tiene que

$$\text{tr}(\text{ad}(H_0))V(K) \leq A(\partial K^+) + A(\partial K^-) \leq A(\partial K),$$

lo que equivale a

$$\frac{A(\partial K)}{V(K)} \geq \text{tr}(\text{ad}(H_0)).$$

Finalmente, se concluye que  $h(G) \geq |\text{tr}(\text{ad}(H_0))|$ .

Pasemos ahora a probar la igualdad en el caso de que  $h(G_0) = 0$ . Consideremos ahora un conjunto  $K_0 \subset G_0$  arbitrario y sea el conjunto  $K = K_0 \times [a, b] \subset G \cong G_0 \times \mathbb{R}$ , cuya frontera será de la forma  $(K_0 \times \{a, b\}) \cup (\partial K_0 \times [a, b])$ . Calculemos  $V(K)$  empleando la medida de Haar izquierda del Lema 3.24, tenemos que

$$\begin{aligned} V(K) &= \int_a^b \left( \int_{K_0} e^{-t\text{tr}(\text{ad}(H_0))} d\nu(g_0) \right) dt \\ &= V_{G_0}(K_0) \int_a^b e^{-t\text{tr}(\text{ad}(H_0))} dt \\ &= V_{G_0}(K_0) \frac{e^{-a\text{tr}(\text{ad}(H_0))} - e^{-b\text{tr}(\text{ad}(H_0))}}{\text{tr}(\text{ad}(H_0))}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Empleando de nuevo la medida de Haar obtenida en el Lema 3.24, tenemos que

$$\begin{aligned} A(K_0 \times \{a, b\}) &= A(K_0 \times \{a\}) + A(K_0 \times \{b\}) \\ &= \int_{K_0} d\nu(g_0) (e^{-a\text{tr}(\text{ad}(H_0))} + e^{-b\text{tr}(\text{ad}(H_0))}) \\ &= V(K_0) (e^{-a\text{tr}(\text{ad}(H_0))} + e^{-b\text{tr}(\text{ad}(H_0))}). \end{aligned}$$

Ahora tomando  $b$  suficientemente pequeño, deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{A(K_0 \times \{a, b\})}{V(K)} &= \frac{V(K_0)(e^{-a\text{tr}(\text{ad}(H_0))} + e^{-b\text{tr}(\text{ad}(H_0))})}{V(K_0) \frac{e^{-a\text{tr}(\text{ad}(H_0))} - e^{-b\text{tr}(\text{ad}(H_0))}}{\text{tr}(\text{ad}(H_0))}} \\ &= \text{tr}(\text{ad}(H_0)) \frac{e^{-a\text{tr}(\text{ad}(H_0))} + e^{-b\text{tr}(\text{ad}(H_0))}}{e^{-a\text{tr}(\text{ad}(H_0))} - e^{-b\text{tr}(\text{ad}(H_0))}} \\ &= \text{tr}(\text{ad}(H_0)) + \text{tr}(\text{ad}(H_0)) \frac{2e^{-b\text{tr}(\text{ad}(H_0))}}{e^{-a\text{tr}(\text{ad}(H_0))} - e^{-b\text{tr}(\text{ad}(H_0))}} \\ &\leq \text{tr}(\text{ad}(H_0)) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nótese que estas estimaciones tienen sentido aunque  $\text{tr}(\text{ad}(H_0)) = 0$ .



Recordemos que  $n = \dim(\mathfrak{g}_0)$  y consideremos una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  de  $T_u \partial K_0 \subset \mathfrak{g}_0$  y denotemos  $A_t = e^{-t \cdot (\text{ad}(H_0))}$ . Notemos que  $\det(A_t) = e^{-t \cdot \text{tr}(\text{ad}(H_0))}$ . Por otro lado,

$$A(\partial K_0 \times [a, b]) = \int_a^b A(\partial K_0 \times \{t\}) dt,$$

pues al ser un producto, se puede descomponer el área como la integral de las áreas de las secciones horizontales. Además, dado que en  $\partial K_0 \times \{t\} \subset G \cong G_0 \times \mathbb{R}$  la medida de Haar por la izquierda es la dada por el Lema 3.24, se puede calcular  $A(\partial K_0 \times \{t\})$  de la siguiente forma:

$$A(\partial K_0 \times \{t\}) = \int_{\partial K_0} \sqrt{\det((\langle A_t e_i, A_t e_j \rangle)_{i,j=1}^{n-1})} d\text{vol}_{\partial K_0}(u), \quad (3.16)$$

donde  $d\text{vol}_{\partial K_0}$  denota la medida de Haar de  $G_0$  sobre la subvariedad  $\partial K_0$ .

Consideremos ahora  $A_t^*$  el operador adjunto respecto de la métrica invariante a la izquierda, es decir, es el operador que cumple que  $\langle A_t e_i, A_t e_j \rangle = \langle e_i, A_t^* A_t e_j \rangle$ . Ahora, tomemos  $P_V$  la proyección sobre el hiperplano  $V$  de  $\mathfrak{g}_0$ . Con esta proyección, podemos acotar superiormente el integrando de la expresión (3.16). En efecto, definiendo

$$M := \max \left\{ \sqrt{\det(P_V \circ A_t^* A_t|_V)} : t \in [a, b], V \subset \mathfrak{g}_0, V \text{ hiperplano de } \mathfrak{g}_0 \right\},$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} \sqrt{\det((\langle A_t e_i, A_t e_j \rangle)_{i,j=1}^{n-1})} &= \sqrt{\det((\langle e_i, A_t^* A_t e_j \rangle)_{i,j=1}^{n-1})} \\ &\leq M. \end{aligned}$$

Ahora acotemos la expresión

$$\frac{A(\partial K_0 \times [a, b])}{V(K)} = \frac{A(\partial K_0 \times [a, b]) \cdot \text{tr}(\text{ad}(H_0))}{(e^{-a \text{tr}(\text{ad}(H_0))} - e^{-b \text{tr}(\text{ad}(H_0))}) V(K_0)}. \quad (3.17)$$

En primer lugar, dado  $t \in [a, b]$  fijo, sabemos que

$$A(\partial K_0 \times \{t\}) \leq M \int_{\partial K_0} d\text{vol}_{\partial K_0}(u) = M \cdot A(\partial K_0) = M \cdot A(\partial K_0 \times \{t\}). \quad (3.18)$$

Ahora bien, por (3.18), si variamos  $t$  en el intervalo  $[a, b]$  se obtiene

$$A(\partial K_0 \times [a, b]) \leq M \int_a^b A(\partial K_0) dt = M \cdot A(\partial K_0)(b - a). \quad (3.19)$$

Combinando la expresión (3.19) con (3.17) y observando que, dado que  $h(G_0) = 0$ , se puede tomar  $\frac{A(\partial K_0)}{V(K_0)}$  tan pequeño como nosotros queramos, obtenemos la siguiente acotación para (3.17):

$$\begin{aligned} \frac{A(\partial K_0 \times [a, b])}{V(K)} &\leq \frac{M \cdot A(\partial K_0)(b - a) \cdot \text{tr}(\text{ad}(H_0))}{(e^{-a \text{tr}(\text{ad}(H_0))} - e^{-b \text{tr}(\text{ad}(H_0))}) V(K_0)} \\ &= \frac{M \cdot \text{tr}(\text{ad}(H_0))(b - a)}{e^{-a \text{tr}(\text{ad}(H_0))} - e^{-b \text{tr}(\text{ad}(H_0))}} \cdot \frac{A(\partial K_0)}{V(K_0)} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Finalmente, combinando las expresiones (3.15) y (3.20), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{A(\partial K)}{V(K)} &= \frac{A(K_0) \times \{a, b\}}{V(K)} + \frac{A(\partial K_0 \times [a, b])}{V(K)} \\ &\leq \text{tr}(\text{ad}(H_0)) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

para cada  $\varepsilon > 0$ . Por lo que, si hacemos tender  $\varepsilon$  a cero, obtenemos que  $\frac{A(\partial K)}{V(K)} = \text{tr}(\text{ad}(H_0))$ , luego  $h(G) = \text{tr}(\text{ad}(H_0))$ .  $\square$

El Teorema 3.26 es un pilar fundamental para calcular la constante isoperimétrica de Cheeger de un grupo de Lie resoluble y simplemente conexo, pero antes de esto vamos a enunciar un resultado que nos permite caracterizar a los grupos de Lie unimodulares en términos de su constante isoperimétrica de Cheeger. Una demostración de este resultado puede verse en [28, Corolario 3.6].

**Teorema 3.27.** *Dado un grupo de Lie  $G$  simplemente conexo y resoluble, entonces  $h(G) = 0$  si y solo si es unimodular.*

A continuación, vamos a enunciar un resultado básico relativo a las aplicaciones lineales y los máximos de las mismas, que nos será de utilidad.

**Lema 3.28.** *Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión  $n$  con producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y sea  $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$ . Entonces, si  $v_0 \in V$ , con  $\|v_0\| = 1$ , maximiza  $\alpha$  en  $\mathbb{S}_1(V)$ , entonces  $v_0 \perp \ker(\alpha)$ .*

*Demostración.* En primer lugar tenemos que  $\alpha$  es una forma lineal no nula en un espacio vectorial de dimensión  $n$ , por lo que existe  $a = (a_1, \dots, a_n)$  vector no nulo, de forma que  $\alpha(v) = \langle a, v \rangle$ . Ahora bien, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que  $\alpha(v) = \langle a, v \rangle \leq \|a\| \cdot \|v\|$ , pero si nos restringimos a la esfera  $\mathbb{S}_1(V)$ , se tiene que  $\langle a, v \rangle \leq \|a\|$  y, por lo tanto la igualdad se alcanza si y solo si  $v = \frac{a}{\|a\|}$ . Por tanto, si suponemos que el máximo en  $\mathbb{S}^1(V)$  para  $\alpha$  se alcanza en un vector  $v_0 \in \mathbb{S}^1(V)$ , se tiene que  $v_0 = \frac{a}{\|a\|}$ . Finalmente, es claro que ese  $v_0$  es ortogonal, respecto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , a  $\ker(\alpha)$ .  $\square$

**Corolario 3.29.** *Dado un grupo de Lie  $G$  simplemente conexo y resoluble con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , su constante isoperimétrica de Cheeger es*

$$h(G) = \max_{H \in \mathfrak{g}, \|H\|=1} \text{tr}(\text{ad}(H)).$$

*Demostración.* Consideremos la aplicación  $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $X \mapsto \text{tr}(\text{ad}(X))$  y sea  $\mathfrak{g}_0 := \ker(\alpha)$ . Veamos que  $\mathfrak{g}_0$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$ . Para ello tendremos que ver que  $\alpha$  es un homomorfismo de álgebras de Lie. Ahora bien, como tenemos el grupo de Lie  $\mathbb{R} \equiv (\mathbb{R}, +)$  su operación corchete es en realidad  $[\cdot, \cdot] = 0$ , por lo que bastará con ver que dados  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $\alpha([X, Y]) = \text{tr}(\text{ad}([X, Y])) = \text{tr}([[\text{ad}(X), \text{ad}(Y)], \cdot]) = 0$ . Pero esto es claro, pues nótese que la representación adjunta a nivel de álgebras de Lie es un homomorfismo de álgebras de Lie  $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ , por lo que  $\text{ad}([X, Y]) = [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)] = \text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y) -$

$\text{ad}(Y) \circ \text{ad}(X)$  y, así,  $\text{tr}(\text{ad}([X, Y])) = 0$ , ya que la traza de una composición de varios endomorfismos es invariante por permutaciones cíclicas de dicha composición. De esta forma,  $\alpha$  es homomorfismo de álgebras de Lie, por lo que  $\mathfrak{g}_0 = \ker(\alpha)$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$ . Además, es claro que  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_0$  y es un ideal de  $\mathfrak{g}_0$ .

Consideremos ahora el grupo de Lie  $G_0$  simplemente conexo y unimodular con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_0$ . Este grupo cumple que  $h(G_0) = 0$ , por el Teorema 3.27. Ahora bien, en el caso de que  $G_0 = G$  el Teorema 3.26 nos garantiza el resultado. En otro caso,  $\mathfrak{g}_0$  tiene codimensión uno. En efecto, al ser  $G$  no unimodular, la 1-forma  $\alpha$  es no nula para el vector  $H_0$  que realiza el máximo. Ahora bien, el núcleo de una 1-forma no nula es siempre un subespacio de codimensión 1.

Definamos  $H_0$  como el punto donde  $\alpha$  alcanza el máximo en esfera unitaria de  $\mathfrak{g}$ , es decir,

$$\max_{H \in \mathfrak{g}, \|H\|=1} \text{tr}(\text{ad}(H)) = \text{tr}(\text{ad}(H_0)).$$

Así, ahora tenemos que verificar que estamos en las hipótesis de Teorema 3.26, es decir, tenemos que ver que  $H_0 \perp \mathfrak{g}_0$ . Pero esto es claro, pues  $\alpha$  es una aplicación lineal y, entonces, por el Lema 3.28 se tiene que  $H_0 \perp \mathfrak{g}_0$ . De esta forma, estamos en las hipótesis de Teorema 3.26, luego obtenemos que  $h(G) = \text{tr}(\text{ad}(H_0))$ .  $\square$

### 3.5. Un ejemplo importante: espacios simétricos

En esta sección abordamos el cálculo de la constante isoperimétrica de Cheeger en un contexto particularmente interesante: los espacios simétricos de tipo no compacto. Este caso es relevante por varias razones. En primer lugar, estos espacios poseen una estructura altamente simétrica que permite obtener descomposiciones algebraico-geométricas útiles. En segundo lugar, todo espacio simétrico de tipo no compacto es isométrico a un grupo de Lie resoluble y simplemente conexo con métrica invariante a la izquierda, lo cual conecta con el enfoque desarrollado en las secciones anteriores, donde detallamos el cálculo de la constante isoperimétrica de Cheeger para un grupo de Lie de estas características.

Esta sección se divide a su vez en varias subsecciones. En primer lugar, se presentará la definición y propiedades básicas acerca de los espacios simétricos, para posteriormente, en la primera sección hablar sobre los tipos de espacios simétricos, poniendo el foco en los de tipo no compacto.

En la segunda sección, se introduce la noción de espacio raíz y un par de herramientas fundamentales del análisis geométrico en estos espacios: la descomposición en espacios de raíces y la descomposición de Iwasawa. En la primera parte, se desarrolla la noción de sistema de raíces y espacio raíz. En cuanto a la descomposición de Iwasawa, se detallan los pasos de la descomposición y cómo se utiliza para modelar el espacio simétrico como un grupo de Lie resoluble. En este contexto, la métrica invariante a la izquierda desempeña un papel esencial.

Finalmente, calcularemos la constante de Cheeger de un espacio simétrico de tipo no compacto, aplicando el Corolario 3.30 a estos espacios. En este contexto, dicha constante

puede calcularse de forma explícita a partir del peso (o multiplicidad) de las raíces positivas del sistema de raíces.

A continuación, vamos a llevar a cabo una introducción a los espacios simétricos riemannianos, poniendo el foco en los de tipo no compacto. Véase para más detalles [15, Section 3]. Referencias estándar para el estudio de los espacios simétricos y herramientas relacionadas son [27] y [30].

Comencemos con su definición y algunas propiedades fundamentales. En primer lugar, sea  $M$  una variedad riemanniana conexa. Dado  $p \in M$ , podemos considerar la bola geodésica  $B(p, r)$ , centrada en el punto  $p$  y con radio  $r > 0$  suficientemente pequeño. En dicha bola, podemos definir la aplicación diferenciable

$$\sigma_p: B(p, r) \longrightarrow B(p, r), \quad \text{dada por } q \mapsto \exp_p(-v),$$

donde  $v \in T_p M$  y  $|v| < r$ . Esta aplicación es una reflexión geodésica respecto del punto  $p$ . Además, es claro que  $\sigma_p^2 = \text{Id}$ . Con estos breves preliminares podemos definir la noción de espacio simétrico.

**Definición 3.30.** Un *espacio simétrico riemanniano* es una variedad riemanniana conexa  $M$ , de forma que para cada  $p \in M$  la reflexión geodésica  $\sigma_p$  en el punto  $p$  está definida globalmente en la variedad  $M$  y es una isometría de  $M$ .

**Observación 3.31.** Con la definición anterior, los espacios simétricos están caracterizados por la existencia de simetrías centrales alrededor de cada punto. Con esta definición, se puede ver que los espacios simétricos son completos (las geodésicas pueden extenderse aplicando reflexiones geodésicas) y homogéneos, pues tomando  $p_1, p_2 \in M$ , por completitud, existe un segmento de geodésica que une  $p_1$  y  $p_2$ , ahora bien, si tomamos  $q$  como su punto medio, es claro que  $\sigma_q(p_1) = p_2$ .

Fijemos ahora un punto  $o \in M$ , que habitualmente recibe el nombre de *origen* o *punto base* de  $M$ . La homogeneidad y la conexidad de  $M$  implican que el grupo de Lie  $G = \text{Isom}(M)^0$  (componente conexa de  $\text{Isom}(M)$  que contiene a la identidad) actúa de forma transitiva sobre  $M$ . Sea  $K = G_o = \{g \in G : g \cdot o = o\}$  el grupo de isotropía en el origen  $o$ , el cual puede verse que es un grupo de Lie compacto.

**Observación 3.32.** Como  $G = \text{Isom}(M)^0$ , considerando la acción  $\varphi: G \times M \longrightarrow M$ , dada por  $(g, p) \mapsto g \cdot p$  y  $M$  un espacio simétrico riemanniano, se puede probar que al ser  $G$  un subgrupo de Lie cerrado del grupo de isometrías de  $M$ , la acción es propia. De esta forma, sabemos que existe un difeomorfismo  $M \cong G/G_p$ , donde ese  $G_p$  denota el grupo de isotropía del punto  $p$ .

En virtud de la Observación 3.32 se tiene que el espacio simétrico riemanniano  $M$  es difeomorfo a la variedad cociente  $G/K$ .

**Observación 3.33.** Nótese que con esta identificación, es decir,  $M \cong G/K$ , el punto origen  $o$  se corresponde con la clase  $eK$ .

Dado el grupo de Lie  $G$  antes descrito, podemos definir la aplicación  $s: G \rightarrow G$ , dada por  $g \mapsto \sigma_o g \sigma_o$ , la cuál está bien definida y es involutiva como automorfismo de  $G$ . Además, satisface que  $G_s^0 \subset K \subset G_s$ , donde  $G_s = \{g \in G : s(g) = g\}$  y  $G_s^0$  es la componente conexa de  $G_s$  que contiene a la identidad.

**Definición 3.34.** La diferencial de la aplicación  $s$ , es decir,  $\theta := s_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , es un automorfismo involutivo de álgebras de Lie y es la llamada *involución de Cartan* asociada con el espacio simétrico  $M = G/K$ .

Se tiene que  $\mathfrak{k}$ , el álgebra de Lie de  $K$ , es precisamente el  $(+1)$ -autoespacio de  $\theta$ . Además, si denotamos por  $\mathfrak{p}$  al  $(-1)$ -autoespacio de  $\theta$ , entonces obtenemos que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ , lo que constituye la llamada *descomposición de Cartan* de  $\mathfrak{g}$ . Como  $\theta$  es un automorfismo de álgebras de Lie, es sencillo comprobar que  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$ ,  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$  y  $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ .

Consideremos ahora la aplicación  $\phi: G \rightarrow M$ , dada por  $g \mapsto g(o) = g \cdot o$ , cuya diferencial es  $\phi_{*e}: \mathfrak{g} \rightarrow T_o M$ . Esta diferencial induce un isomorfismo  $\mathfrak{p} \cong T_o M$ . En efecto,  $\phi_{*e}$  manda un  $X \in \mathfrak{g}$  al vector tangente en el punto  $o$  de la curva  $\text{Exp}(tX) \cdot o$ , es decir,  $\phi_{*e}(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \text{Exp}(tX) \cdot o$ . Ahora bien, como se tiene que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ , entonces si  $X \in \mathfrak{k}$  se tiene que  $\text{Exp}(tX) \cdot o = o$ , para cada  $t$ , luego  $\phi_{*e}(X) = 0$ . Ahora bien, si consideramos  $X \in \mathfrak{p}$ , la curva  $\gamma(t) = \text{Exp}(tX) \cdot o$  es una curva en  $M$  con  $\gamma(0) = o$  y, además,  $\phi_{*e}(X) = \gamma'(0) \in T_o M$ . Es decir, se tiene que  $\mathfrak{p} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{k} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}/\mathfrak{k} \cong T_o M$ .

**Definición 3.35.** Si consideramos la linealización de la acción de la isotropía  $K \times M \rightarrow M$ , dada por  $(k, p) \mapsto k \cdot p = k(p)$ , en el punto  $o$  obtenemos una acción isométrica lineal  $K \times T_o M \rightarrow T_o M$ , dada por  $k \cdot v = k_{*o} v$ . Esta aplicación recibe el nombre de *representación de isotropía* de  $M \cong G/K$  en  $o$ .

La representación de isotropía se vuelve equivalente a la representación adjunta de  $K$  en  $\mathfrak{p}$ , que es la acción  $K \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$ , dada por  $k \cdot X = \text{Ad}(k)X$ . Llamaremos también a esta acción la representación de isotropía de  $M$ .

Por otro lado, el tensor curvatura en un espacio simétrico  $M$  en el punto base  $o$  admite una descripción de la forma:

$$R(X, Y)Z = -[[X, Y], Z] \quad X, Y, Z \in \mathfrak{p} \cong T_o M. \quad (3.21)$$

La fórmula (3.21) nos proporciona una caracterización simple de las subvariedades totalmente geodésicas de los espacios simétricos: estas son (salvo congruencia con  $M$ ) las de la forma  $S = \exp_o \mathfrak{s}$ , donde  $\mathfrak{s}$  es un subespacio de  $\mathfrak{p} \cong T_o M$ , de tal forma que  $[[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}], \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$ .

**Definición 3.36.** Un subespacio  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{p}$  como el descrito en el párrafo anterior recibe el nombre de *sistema triple de Lie*.

**Observación 3.37.** En el caso particular de que  $\mathfrak{s}$  sea abeliano, entonces la subvariedad totalmente geodésica correspondiente a  $\exp_o \mathfrak{s}$  es llana por (3.21), es decir, su curvatura seccional es cero. En efecto, si  $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{p}$  es abeliana, es decir,  $[X, Y] = 0$  para cada  $X, Y \in \mathfrak{s}$ , entonces  $R(X, Y)Z = 0$ , para cada  $X, Y, Z \in \mathfrak{s}$ . De esta forma, por la ecuación de Gauss de geometría de subvariedades, el tensor curvatura de la subvariedad totalmente geodésica  $S = \exp_o \mathfrak{s}$  se anula también idénticamente, por lo que  $S$  es llana.

Por otro lado, entre todos los subespacios abelianos de  $\mathfrak{p}$ , los maximales resultan ser conjugados entre sí por la acción de isotropía de  $K$ , por lo que tienen todos ellos la misma dimensión. Esto motiva la siguiente definición.

### 3.5.1. Tipos de espacios simétricos

Un espacio simétrico  $M \cong G/K$  se dice (isotrópicamente) irreducible si la restricción de su representación de isotropía a la componente conexa que contiene a la identidad de  $K$  es irreducible. Esto equivale a la propiedad de que el recubrimiento riemanniano universal  $\tilde{M}$  de  $M$  (el cual es un espacio simétrico) no sea un producto no trivial de espacios simétricos, excepto que  $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$  para algún  $n$ .

Recordemos ahora, que la forma de Killing de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es la forma bilineal simétrica  $\mathcal{B}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\mathcal{B}(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$ , donde  $\text{ad}(X) = [X, \cdot]$ .

**Observación 3.38.** Se puede ver que  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{p}$  son subespacios ortogonales con respecto a  $\mathcal{B}$ . En efecto, al ser  $\mathcal{B}$  la forma de Killing de  $\mathfrak{g}$ , esta es invariante por automorfismos de álgebras de Lie, en particular por la involución  $\theta$ . Así,  $\mathcal{B}(\theta X, \theta Y) = \mathcal{B}(X, Y)$ , para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Ahora bien, recordemos que  $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = X\}$  y que  $\mathfrak{p} = \{Y \in \mathfrak{g} : \theta Y = -Y\}$ , por lo tanto,  $\mathcal{B}(\theta X, \theta Y) = \mathcal{B}(X, Y) = \mathcal{B}(X, -Y) = -\mathcal{B}(X, Y)$  y, entonces  $\mathcal{B}(X, Y) = 0$ .

**Definición 3.39.** Un espacio simétrico  $M \cong G/K$  se dice de *tipo compacto*, de *tipo no compacto* o de *tipo euclídeo* si  $\mathcal{B}|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$  es, respectivamente, definida negativa, definida positiva o idénticamente cero.

Si  $M$  es un espacio simétrico de tipo compacto, entonces  $G$  es un grupo de Lie compacto y semisimple y  $M$  es compacta y tiene curvatura seccional no negativa. Ahora bien, si  $M$  es de tipo no compacto, entonces se tiene que  $G$  es un grupo de Lie no compacto, real semisimple (con factores no compactos); además se tiene que  $M$  es una variedad de Hadamard, es decir, es difeomorfa al espacio euclídeo y tiene curvatura seccional no positiva. Por otro lado, si  $M$  es de tipo euclídeo, su recubrimiento universal riemanniano es isométrico al espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . En general, el recubrimiento universal riemanniano de un espacio simétrico  $M$  se puede descomponer como un producto riemanniano de espacios simétricos  $\tilde{M} = M_+ \times M_- \times M_0$ , donde  $M_+$  es de tipo compacto,  $M_-$  es de tipo no compacto y  $M_0$  es un espacio euclídeo.

Existe una noción de dualidad entre la clase de espacios simétricos de tipo compacto ya la de tipo no compacto. En particular, existe una correspondencia uno a uno entre los espacios simétricos de tipo no compacto y los espacios simétricos simplemente conexos de tipo compacto. Esta dualidad se puede explicitar en términos de las álgebras de Lie y los grupos involucrados.

Por otro lado, espacios simétricos duales tienen el mismo rango y representaciones de isotropía equivalentes y, además, la dualidad preserva la irreducibilidad. En cualquier caso, es importante destacar que ambos tipos de espacios simétricos poseen propiedades topológicas y geométricas muy diferentes.

A continuación, vamos a presentar algunos ejemplos para ilustrar la noción de dualidad.

**Ejemplo 3.40.** (a) En primer lugar el espacio hiperbólico real  $\mathbb{R}H^n \cong SO_{1,n}^0/SO_n$ , donde  $SO_{1,n}^0$  es la componente conexa que contiene a la identidad del grupo  $SO_{1,n}$ . Este grupo recibe el nombre de grupo ortogonal especial de Lorentz y tiene la siguiente descripción:

$$SO_{1,n} = \left\{ A \in GL(n+1, \mathbb{R}) : A^t \eta A = \eta, \det(A) = 1 \right\},$$

siendo

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \text{Id}_n \end{pmatrix},$$

donde  $\text{Id}_n$  denota la matriz identidad  $n \times n$ . De esta forma,  $SO_{1,n}^0$  es el grupo de isometrías que preservan la orientación del espacio hiperbólico real  $\mathbb{R}H^n$ . Se tiene que  $\mathbb{R}H^n$  es un espacio simétrico de tipo no compacto que posee dos espacios simétricos duales de tipo compacto: la esfera  $\mathbb{S}^n \cong SO(n+1)/SO(n)$  y el espacio proyectivo real  $\mathbb{R}P^n \cong SO(n+1)/O(n)$ . Ambos espacios tienen rango uno.

- (b) Los otros espacios de rango uno (no llanos) y simétricos son el espacio proyectivo y los espacios hiperbólicos sobre álgebras de división normadas de los números complejos  $\mathbb{C}$ , los cuaternios  $\mathbb{H}$  y los octonios  $\mathbb{O}$ . Es decir, los espacios complejos  $\mathbb{C}P^n = SU(n+1)/S(U_1U_n)$  y  $\mathbb{C}H^n = SU_{1,n}/S(U_1U_n)$ , los espacios cuaterniónicos  $\mathbb{H}P^n = Sp_{n+1}/Sp_1Sp_n$  y  $\mathbb{H}H^n = Sp_{1,n}/Sp_1Sp_n$  y los planos de Cayley  $\mathbb{O}P^2 = F_4/Spin_9$  y  $\mathbb{O}H^2 = F_4^{-20}/Spin_9$  constituyen el resto de espacios simétricos de rango uno y tienen curvatura no constante.

Para una lista completa de los espacios simétricos irreducibles (salvo recubrimientos) véase [27, pág. 516-518].

### 3.5.2. Espacios simétricos de tipo no compacto: espacios de raíz y descomposición de Iwasawa

Los espacios simétricos de tipo no compacto constituyen una familia rica de variedades de Hadamard que generalizan los espacios hiperbólicos. Véase [5], [16], [20, Chapter 2], [27, Chapter VI] y [30, Chapter VI] para más información sobre estos espacios.

#### Espacios de raíces

Sea  $M \cong G/K$  un (no necesariamente irreducible) espacio simétrico de tipo no compacto. Sea  $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  la descomposición de Cartan del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  del grupo de Lie  $G$ , determinada por el punto base  $o$ . La forma de Killing  $\mathcal{B}$  de  $\mathfrak{g}$  hace que  $\mathfrak{k}$  y  $\mathfrak{p}$  sean ortogonales y, además, se restringe a un producto interior definido positivo en  $\mathfrak{p}$ , por definición de tipo no compacto, y resulta ser definido negativo cuando se restringe a  $\mathfrak{k}$ . De esta forma, cambiando su signo en  $\mathfrak{k}$ , obtenemos un producto interior definido positivo en  $\mathfrak{g}$ . Equivalentemente, este producto interior  $\mathcal{B}_\theta$  se puede definir como  $\mathcal{B}_\theta(X, Y) = -\mathcal{B}(\theta X, Y)$ , para cada  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , donde  $\theta$  es la involución de Cartan.

**Definición 3.41.** Sea  $\mathfrak{a}$  un subespacio abeliano maximal de  $\mathfrak{p}$ . Recordemos que  $\dim \mathfrak{a}$  coincide con el rango de  $M$ . Los endomorfismos  $\text{ad}(H) = [H, \cdot]$  de  $\mathfrak{g}$ , con  $H \in \mathfrak{a}$ , son autoadjuntos con respecto a  $\mathcal{B}_\theta$  y conmutan unos con otros (debido a que  $\text{ad}$  es un homomorfismo de álgebras de Lie y  $\mathfrak{a}$  es abeliana). De esta forma, dichos endomorfismos de  $\mathfrak{g}$  diagonalizan simultáneamente. Sus autoespacios comunes se llaman *espacios de raíces restringidos* y sus autovalores comunes no triviales (los cuales son lineales en  $H \in \mathfrak{a}$ ) se denominan *raíces restringidas* de  $\mathfrak{g}$ .

De una forma más precisa, para cada funcional lineal  $\lambda \in \mathfrak{a}^* = \text{Hom}(\mathfrak{a}, \mathbb{R})$ , consideremos el subespacio de  $\mathfrak{g}$  dado por

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \lambda(H)X, \text{ para cada } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Entonces cada  $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$  es un espacio de raíces restringido y cada  $\lambda \neq 0$  con  $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$  es una raíz restringida. Nótese que  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_0$ .

**Definición 3.42.** Denotemos ahora por

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* : \lambda \neq 0, \mathfrak{g}_\lambda \neq 0\},$$

el conjunto de las raíces restringidas de  $\mathfrak{g}$ . Así, podemos escribir la siguiente suma directa de descomposición  $\mathcal{B}_\theta$ -ortonormal

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left( \bigoplus_{\lambda \in \Sigma} \mathfrak{g}_\lambda \right).$$

Esto se conoce como la *descomposición en espacios de raíces restringidas* de  $\mathfrak{g}$ .

La multiplicidad,  $m_\lambda$ , de la raíz restringida  $\lambda$  es la dimensión de su espacio de raíces, es decir,  $m_\lambda = \dim \mathfrak{g}_\lambda$ . En lo sucesivo, se omitirá el término “restringido”.

Por otro lado, las raíces y las descomposiciones en espacios de raíces poseen algunas propiedades como las siguientes:

- (a)  $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ , para cada  $\lambda, \mu \in \Sigma \cup \{0\}$ .
- (b)  $\theta \mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_{-\lambda}$ , para cada  $\lambda \in \Sigma \cup \{0\}$ . Aquí, se tiene que  $\lambda \in \Sigma$  si y solo si  $-\lambda \in \Sigma$ .

Es más, el subconjunto finito  $\Sigma$  de  $\mathfrak{a}^*$  formado por las raíces posee varias propiedades de simetría.

**Definición 3.43.** Para cierto producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $\mathfrak{a}^*$ , se puede ver que  $\Sigma$  constituye un *sistema abstracto de raíces* en el espacio euclídeo  $(\mathfrak{a}^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Esto significa:

- (a)  $\mathfrak{a}^* = \text{span}(\Sigma)$ .
- (b) El número  $a_{\alpha\beta} = \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$  es entero, para cada  $\alpha, \beta \in \Sigma$ .



(c) Se tiene que  $\beta - a_{\alpha\beta}\alpha \in \Sigma$ , para cada  $\alpha, \beta \in \Sigma$ .

Este sistema se llama *no reducido* si existe  $\lambda \in \Sigma$  de forma que  $2\lambda \in \Sigma$ . En tal caso, diremos que  $2\lambda$  es una raíz no reducida.

Los sistemas de raíces pueden clasificarse. De hecho, esto constituye la base para la clasificación de álgebras de Lie semisimples reales y para la de los espacios simétricos.

Por otro lado, la información que proporciona un sistema de raíces puede codificarse en conjuntos de raíces más pequeños. Esto es, podemos considerar un semiespacio abierto de  $\mathfrak{a}^*$  que contenga exactamente la mitad de las raíces en  $\Sigma$ , declarando como positivas aquellas raíces que se encuentren en este semiespacio. De esta forma, denotando por  $\Sigma^+$  al conjunto de raíces positivas, obtenemos la descomposición  $\Sigma = \Sigma^+ \sqcup (-\Sigma^+)$ .

**Definición 3.44.** Entre los elementos del conjunto  $\Sigma^+$ , descrito en el párrafo anterior, existen algunos que no pueden expresarse como suma de exactamente dos raíces positivas. Estas son las llamadas *raíces simples* y denotamos por  $\Lambda$  a esta colección.

**Observación 3.45.** La colección  $\Lambda$  es una base para  $\mathfrak{a}^*$  y, así, tiene por cardinal el rango de  $M$ . De esta forma, cada raíz  $\lambda \in \Sigma$  resulta ser una combinación lineal de elementos de  $\Lambda$  con coeficientes enteros, todos ellos no negativos (si  $\lambda \in \Sigma^+$ ), o todos ellos no positivos (si  $\lambda \in -\Sigma^+$ ).

### Descomposición de Iwasawa

Debido a las propiedades de la descomposición en espacios de raíces, se tiene que la suma de los espacios de raíces positivas

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda$$

es una subálgebra de Lie nilpotente de  $\mathfrak{g}$ .

Ahora bien, como  $\mathfrak{a}$  normaliza  $\mathfrak{n}$ , es decir, para cada  $H \in \mathfrak{a}$  y  $X \in \mathfrak{n}$ ,  $[H, X] \in \mathfrak{n}$ , obtenemos que la suma directa  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  es una subálgebra de Lie resoluble de  $\mathfrak{g}$ . Además, el *teorema de descomposición de Iwasawa* para álgebras de Lie asegura que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  como suma directa de espacios vectoriales. En esta línea, denotemos por  $A$  y  $N$  a los subgrupos de Lie conexos de  $G$  con álgebras de Lie  $\mathfrak{a}$  y  $\mathfrak{n}$ , respectivamente. Entonces  $AN$  es el subgrupo conexo de  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ . Además, la descomposición de Iwasawa a nivel de grupos de Lie establece que la aplicación

$$K \times A \times N \longrightarrow G, \quad \text{dada por } (k, a, n) \mapsto kan,$$

es un difeomorfismo y los grupos de Lie  $A, N$  y  $AN$  son difeomorfos a espacios euclídeos. Por otro lado, en virtud de la descomposición de Iwasawa, la aplicación  $\phi: G \longrightarrow M$ , dada por  $g \mapsto g \cdot o$ , restringida a  $AN$ , es decir,  $\phi|_{AN}: AN \longrightarrow M$ , es un difeomorfismo.

Denotemos ahora por  $\mathbf{g}$  a la métrica riemanniana simétrica de  $M$  y consideremos la métrica pullback  $(\phi|_{AN})^*\mathbf{g}$  en  $AN$ . Denotaremos en lo que sigue a esta métrica por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Se tiene que dicha métrica es invariante por la izquierda para el grupo de Lie  $AN$ . De esta forma, lo que ocurre es que cada espacio simétrico de tipo no compacto  $M$  es isométrico a un cierto grupo de Lie  $AN$  resoluble simplemente conexo equipado con una métrica (muy concreta) invariante a la izquierda. Ahora bien, podemos equipar a  $\mathfrak{a}^*$  con el producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  inducido por esta métrica de forma que, dados  $\lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*$ ,  $\langle \lambda, \mu \rangle = \langle H_\lambda, H_\mu \rangle$ , donde  $H_\lambda \in \mathfrak{a}$  (análogamente con  $H_\mu$ ) está definido por  $\langle H_\lambda, H \rangle = \lambda(H)$ , para cada  $H \in \mathfrak{a}$ .

**Observación 3.46.** En particular, se tiene que un espacio simétrico de tipo no compacto  $M$  es difeomorfo a un espacio euclídeo. Además, por la fórmula (3.21), se puede demostrar que tal variedad  $M$  es de curvatura no positiva y, así, es una variedad de Hadamard. Esto nos permite ver cualquiera de estos espacios como una bola abierta equipada con una cierta métrica, de manera análoga al modelo de la bola del espacio hiperbólico real.

### 3.5.3. Cheeger en un espacio simétrico de tipo no compacto

A continuación, vamos a realizar el cálculo de la constante isoperimétrica de Cheeger para un espacio simétrico de tipo no compacto.

Tomemos un espacio simétrico de tipo no compacto  $M$  y calculemos  $h(M)$ . Sabemos que  $M \cong G/K$  y, por la descomposición de Iwasawa, se tiene que  $AN$ , dotado de una cierta métrica invariante a la izquierda, es isométrico a  $M$ . Si suponemos además que el rango de  $M$  es  $r$ , entonces, el álgebra de Lie de  $AN$  es  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  se verifica que  $\mathfrak{a} = (\mathbb{R}^r, [\cdot, \cdot] = 0)$  y por definición,  $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{g}_\lambda$ . De esta forma, se obtiene aplicando el Corolario 3.29 que

$$h(M) = h(AN) = \max_{X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, |X|=1} \text{tr}(\text{ad}(X)).$$

Calculemos ahora  $\text{tr}(\text{ad}(X))$  para un  $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  arbitrario. En primer lugar, tomemos un  $X \in \mathfrak{g}_\lambda$  para algún  $\lambda \in \Sigma^+$ . Entonces, si  $H \in \mathfrak{a}$ ,  $\text{ad}(X)(H) = [X, H] = -\lambda(H)X \in \mathfrak{g}_\lambda \perp \mathfrak{a}$ , por lo que no contribuye a la traza de la aplicación. Si tomamos un  $Y \in \mathfrak{g}_\mu$ , entonces  $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y] \in \mathfrak{g}_{\lambda+\mu} \perp \mathfrak{g}_\mu$ , por lo tanto, de nuevo, no contribuye a la traza. De esta forma,  $\text{tr}(\text{ad}(X)) = 0$  si  $X \in \mathfrak{g}_\lambda$ , para cada  $\lambda \in \Sigma^+$ . Ahora bien, por linealidad concluimos que  $\text{tr}(\text{ad}(X)) = 0$ , para cada  $X \in \mathfrak{n}$ .

Tomemos ahora un  $X \in \mathfrak{a}$ , en ese caso consideramos  $\text{ad}(X): \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ . Tomemos un  $H \in \mathfrak{a}$ , en ese caso,  $\text{ad}(X)(H) = [X, H] = 0$ , por lo que no contribuye a la traza. Por otro lado, si tomamos un  $Y \in \mathfrak{g}_\mu$ , entonces  $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y] = \mu(X)Y \in \mathfrak{g}_\mu$ . Con este razonamiento, podemos obtener una expresión para la traza de la aplicación  $\text{ad}(X)$ . En efecto, tendremos que  $\text{tr}(\text{ad}(X)) = \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (\dim \mathfrak{g}_\lambda) \lambda(X)$ . Ahora bien, si tomamos un  $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$  arbitrario, entonces por linealidad tendremos que

$$\text{tr}(\text{ad}(X)) = \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (\dim \mathfrak{g}_\lambda) \lambda(X_a),$$

donde  $X_a$  denota la proyección de  $X$  sobre el álgebra de Lie  $\mathfrak{a}$ .

Consideremos ahora la aplicación  $\alpha: \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \longrightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$X \mapsto \text{tr}(\text{ad}(X)) = \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (\dim \mathfrak{g}_\lambda) \lambda(X_a).$$

Ahora bien, si definimos  $\delta = \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (\dim \mathfrak{g}_\lambda) \lambda \in \mathfrak{a}^*$ , obtenemos que  $\alpha(X) = \langle H_\delta, X_\alpha \rangle$ . Así, tenemos que

$$h(M) = h(AN) = \max_{X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, |X|=1} \text{tr}(\text{ad}(X)) = \max_{X \in \mathfrak{a}, |X|=1} \langle H_\delta, X \rangle,$$

donde  $H_\delta = \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (\dim \mathfrak{g}_\lambda) H_\lambda$ .

Aplicando ahora el Lema 3.28, pero en este caso para  $\mathbb{S}_1(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$ , el máximo se alcanza en  $\frac{H_\delta}{|H_\delta|}$ . Entonces lo que se obtiene es

$$h(M) = h(AN) = \langle H_\delta, \frac{H_\delta}{|H_\delta|} \rangle = |H_\delta|. \quad (3.22)$$

**Observación 3.47.** Como acabamos de ver, para un espacio simétrico de tipo no compacto, la constante isoperimétrica de Cheeger es igual a  $|H_\delta|$ , donde ese  $H_\delta$  resulta ser el campo curvatura media de  $N$  como subvariedad de  $AN$  (que es un campo invariante a la izquierda en  $AN$ ). Esto se deduce de [18, Section 2.1].

Para concluir esta sección, vamos a presentar, de manera breve, un par de ejemplos de casos concretos de espacios simétricos de tipo no compacto, donde podemos calcular la constante isoperimétrica de Cheeger. Se trata de los espacios hiperbólicos real  $\mathbb{R}H^n$  y complejo  $\mathbb{C}H^n$ , ambos de rango uno. En ambos casos haremos uso del concepto de horosfera. Una horosfera de un espacio hiperbólico (o más generalmente de una variedad de Hadamard) es una hipersuperficie dada como conjunto de nivel de una función de Busemann; véase [20, Section 1.10] para su definición. Realmente lo que usaremos es que una horosfera en un espacio hiperbólico se puede caracterizar como una hipersuperficie congruente al subgrupo  $N$  de  $AN$ , o equivalentemente, congruente a cualquiera de las órbitas de la acción de  $N$  sobre el espacio hiperbólico  $M$  [19, Remark 5.4].

**Ejemplo 3.48.** En primer lugar, consideremos el caso del espacio hiperbólico real  $\mathbb{R}H^n$ . En este caso, lo que tenemos es que  $\Sigma^+ = \{\alpha\}$  y, además, el rango de este espacio es igual a uno. De esta forma, tenemos que  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ , donde  $\mathfrak{g}_\alpha \cong \mathbb{R}^{n-1}$ . Ahora bien, es bien sabido que en el caso del espacio hiperbólico real de curvatura seccional constante igual a  $c < 0$ , se tiene que las horosferas de  $\mathbb{R}H^n$  son hipersuperficies totalmente umbilicales con curvatura principal  $\sqrt{-c}$ . Además, en un espacio simétrico de tipo no compacto de rango uno, se tiene que  $N$ , que es el subgrupo de Lie de  $G = SO_{1,n}^0$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{n}$ , es una horosfera de  $AN$  y podemos calcular su curvatura media en términos de la del ambiente. Por lo que en este caso, aplicando (3.22), se tiene que

$$h(\mathbb{R}H^n) = (n-1)\sqrt{-c}.$$

**Ejemplo 3.49.** Consideremos ahora el espacio hiperbólico complejo  $\mathbb{C}H^n$ . En este caso,  $\Sigma^+ = \{\alpha, 2\alpha\}$  y, además, el rango de este espacio es uno. De esta forma, tenemos que  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha}$ , donde  $\mathfrak{g}_\alpha \cong \mathbb{C}^{n-1}$  y  $\mathfrak{g}_{2\alpha} \cong \mathbb{R}$ . De nuevo al ser un espacio simétrico de tipo no compacto de rango uno, tenemos que  $N$  es una horosfera de  $AN$  y, análogamente, se puede

calcular su curvatura media en términos de la del espacio ambiente. Ahora bien, en este caso  $\mathbb{C}H^n$  no tiene curvatura seccional constante, pero si posee una métrica riemanniana de curvatura seccional holomorfa constante. Además, sabemos, véase [16, pág. 767], que en el caso del espacio hiperbólico complejo las horosferas tienen dos curvaturas principales  $\lambda_1 = \frac{\sqrt{-c}}{2}$ , con multiplicidad  $2(n-1)$ , y  $\lambda_2 = \sqrt{-c}$ , con multiplicidad uno. De esta forma, por medio de la expresión (3.22) podemos calcular la constante isoperimétrica de Cheeger del espacio hiperbólico complejo con su métrica simétrica (también llamada de Bergman) como:

$$h(\mathbb{C}H^n) = 2(n-1)\frac{\sqrt{-c}}{2} + \sqrt{-c} = n\sqrt{-c}.$$



# Bibliografia

- [1] A. Alexandrov, A characteristic property of spheres, *Ann. Mat. Pura Appl.* 58 (1962) 303-315.
- [2] A. D. Alexandrov, *Investigations on maximum principle V*, Izvestia Vysshih Uchebnyh Zavedeniy, Matematika, 1960, N. 5.
- [3] G. Anotenilli, F. Glaudo, Nonexistence of isoperimetric sets in spaces of positive curvature. *J. reine angew. Math.* 812 (2024), 211-228.
- [4] J. L. Barbosa, M. Do Carmo, J. Eschenburg, Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds. *Math. Z.* 197 (1988), no. 1, 123-138.
- [5] J. Berndt, Hyperpolar homogeneous foliations on symmetric spaces of no compact type. Proceedings of the 13th International Workshop on Differential Geometry and Related Fields, vol. 13, pp. 37–57. Natl. Inst. Math. Sci. (NIMS), Taejon, 2009.
- [6] V. Blasjo, The Isoperimetric Problem. *Amer. Math. Monthly.* 112 (2005), no. 6.
- [7] C. Böhm, R. A. Lafuente, Non-compact Einstein manifolds with symmetry. *J. Amer. Math. Soc.* 36 (2023), no. 3, 591-651.
- [8] Y. D. Burago, V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*. A. B. Sossinsky, Trans. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, vol. 285, 1988.
- [9] A. Chang, Aleksandrov's theorem: Closed surfaces with constant mean curvature. University of Chicago, 2015.
- [10] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*. Academic Press Inc, 1984.
- [11] I. Chavel, *Isoperimetric inequalities*. Cambridge University Press, 2001.
- [12] I. Chavel, *Riemannian geometry: a modern introduction*. Second edition. Cambridge University Press, 2006.
- [13] J. Cheeger, A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. *Problems in analysis (Sympos. in honor of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N. J., 1969)*. (1970), 195-199.

- [14] S. S. Chern, *Curves and Surfaces in Euclidean Spaces*, Studies in Global Geometry and Analysis, MAA Studies in Mathematics, The Mathematical Association of America, 1967.
- [15] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez, T. Otero, *Homogeneous hypersurfaces in symmetric spaces*. In: Alarcón, A., Palmer, V., Rosales, C. (eds) *New Trends in Geometric Analysis*. RSME Springer Series (2023), vol 10, Springer, Cham.
- [16] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López, Isoparametric hypersurfaces in complex hyperbolic spaces. *Adv. Math.* 314 (2017), 756–805.
- [17] M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised & Updated*. Second Edition, Dover Publications, 2016.
- [18] M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López, Isoparametric hypersurfaces in symmetric spaces of non-compact type and higher rank. *Compositio Math.* 160 (2024), 451-462.
- [19] M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López, H. Tamaru, Codimension one Ricci soliton subgroups of solvable Iwasawa groups. *J. Math. Pures. Appl.* 152 (2021), no. 9, 69-93.
- [20] P. B. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*. Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996.
- [21] B. Elek, *Reflection groups. Notes for a short course at the Itaca High School Senior Math Seminar*. Cornell University, 2017.
- [22] L. C. Evans, *Partial differential equations*. Second edition, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [23] N. Fuss, Eulogy of Leonhard Euler. *MacTutor History of Mathematics*. [https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Euler\\_Fuss\\_Eulogy/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Euler_Fuss_Eulogy/) (último acceso 16/06/2025).
- [24] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*. Massachusetts Institute of Technology, Prentice Hall, Inc, 1974.
- [25] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. Disponible en: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>
- [26] L. Hauswirth, J. Pérez, P. Romon, The periodic isoperimetric problem. *Trans. Amer. Math. Soc.* 356 (2003), no. 5, 2025-2047.
- [27] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Corrected reprint of the 1978 original. Graduate Studies in Mathematics, vol. 34. American Mathematical Society, Providence, RI (2001).

- [28] H. F. Hoke, Lie groups that are closed at infinity. *Trans. Amer. Math. Soc* 313 (1989), no. 2, 733-734.
- [29] W. Hsiang, W. Hsiang, On the uniqueness of isoperimetric solutions and imbedded soap bubbles in noncompact symmetric spaces, *I. Invent. Math.* 98, (1989), 39-58.
- [30] A. W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*. Digital second edition, published by author, 2023. Disponible en: <https://www.math.stonybrook.edu/~aknapp/download/Beyond2.pdf>
- [31] G. Kumar. *Isoperimetric inequalities in the hyperbolic plane*. BS-MS Thesis, Indian Institute of Science Education and Research Pune, 2024.
- [32] J. Laurent, Einstein solvmanifolds and nilsolitons. *Contemp. Math.* 491 (2008), 1-35.
- [33] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian manifolds*. Second Edition, Springer, 2018.
- [34] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*. Second Edition, Springer, 2013.
- [35] F. Morgan, *Geometric Measure Theory: A Begginer's Guide*. 3rd edition. Academic Press, San Diego, 2000.
- [36] F. Morgan, D. Johnson, Some sharp isoperimetric theorems for Riemannian manifolds. *Indiana Univ. Math. J.* 49 (2000), no. 3, 1017-1041.
- [37] A. Nevés, New applications on Min-max Theory. *Proceedings of International Congress of Mathematics* (2014), 939-957.
- [38] R. Osserman, The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.* 84 (1978), no. 6, 1198-1208.
- [39] R. Pedrosa, The isoperimetric problem in spherical cylinders. *Ann. Glob. Anal. Geom.* 26(2004), no. 24, 333-354.
- [40] R. Pedrosa, M. Ritoré, Isoperimetric domains in the Riemannian product of a circle with a simply connected space forms and applications to free boundary problems. *Indiana Univ. J.* 48 (1999), no. 4 1357-1394.
- [41] N. Peyerimhoff, E. Samiou, The Cheeger constant of a simply connected solvable Lie group. *Proc. Amer. Math. Soc* 132 (2003), no. 5, 1525-1529.
- [42] M. Ritoré, Applications of compactness results for harmonic maps to stable constant mean curvature surfaces. *Math. Z.*, 226 (1997), no. 3 465-481.
- [43] M. Ritoré, A. Ros, Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric in three space forms. *Comment. Math. Helv.* 67 (1992), 293-305.



- [44] M. Ritoré, C. Sinestrati, The classical isoperimetric inequality in Euclidean space. In: *Mean Curvature Flow and Isoperimetric Inequalities*. Advanced Courses in Mathematics-CRM Barcelona Birkhäuser Basel, 2010.
- [45] M. C. Rosales, *El problema isoperimétrico*. Disponible en [https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/80791/problema\\_isoperimetrico.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/80791/problema_isoperimetrico.pdf?sequence=1&isAllowed=y) (último acceso 30/05/2025).
- [46] M. Ru, *Math 6397 Riemannian geometry, Hodge Theory and Riemannian Manifolds*. University of Houston. Disponible en: <https://www.math.uh.edu/~minru/Riemann08/hodgetheory.pdf> (último acceso 08/04/2025).
- [47] E. Schmidt, Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionenzahl. *Math. Z.* 49, 1-109, 1943.
- [48] E. Schmidt, Über das isoperimetrische Problem in Raum von  $n$  Dimensionen. *Math. Z.* 44, (1939) 689-788.
- [49] F. Torralbo, *Notes on stability of constant mean curvature surfaces*. Universidad de Granada, 2019. Disponible en: <http://www.ugr.es/~ftorralbo/> (último acceso 08/07/2025).
- [50] E. Tsukerman, *Isoperimetric inequalities and the Alexandrov theorem*. Undergraduated honor thesis, Stanford University, 2013.
- [51] C. Viana, The isoperimetric problem for lens spaces. *Math. Ann.* 374 (2019), 475-497.
- [52] C. Viana, *Index one minimal surfaces and the isoperimetric problem spherical space forms*. *PhD Thesis*. University College London, 2018.
- [53] J. A. Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, 6th edition. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2011.
- [54] J. Wiegert, The Sagacity of circles: a history of the isoperimetric problem- The work of Jakob Steiner. *Convergence* (July 2010).