

ÁNGEL MÉNDEZ VÁZQUEZ

**MÉTODOS ALGEBRAICOS Y  
COMBINATORIOS EN LA  
ROBÓTICA TOPOLÓGICA**

**160b  
2025**

**Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología**

---

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

ÁNGEL MÉNDEZ VÁZQUEZ

**MÉTODOS ALGEBRAICOS Y  
COMBINATORIOS EN LA ROBÓTICA  
TOPOLÓGICA**

**160b**  
**2025**

**Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología**

---

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2025



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

# Métodos algebraicos y combinatorios en la robótica topológica

Ángel Méndez Vázquez

Julio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Índice

<b>Resumen/Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Invariantes homotópicos clásicos</b>	<b>13</b>
1.1. Homotopía y fibraciones . . . . .	13
1.2. Categoría de Lusternik-Schnirelmann . . . . .	15
1.3. Complejidad topológica . . . . .	18
<b>2. Distancia homotópica</b>	<b>21</b>
2.1. Distancia homotópica . . . . .	21
2.2. Relación con otros invariantes . . . . .	22
2.3. Desigualdades . . . . .	24
2.4. Invarianza homotópica . . . . .	26
2.5. Espacios normales . . . . .	27
2.6. Productos . . . . .	28
2.7. $H$ -espacios . . . . .	29
2.8. CW-complejos . . . . .	30
<b>3. Métodos algebraicos</b>	<b>37</b>
3.1. Distancia homotópica débil . . . . .	37
3.2. (Co)homología singular . . . . .	39
3.3. Distancia cohomológica . . . . .	41
3.4. Propiedades . . . . .	43
3.5. Producto cup . . . . .	46
3.6. Longitud cup . . . . .	48
3.7. Distancia homológica . . . . .	52
<b>4. Métodos combinatorios</b>	<b>55</b>
4.1. Complejos simpliciales . . . . .	56
4.2. Aplicaciones simpliciales . . . . .	58
4.3. Distancia simplicial . . . . .	59
4.4. Colapsos fuertes . . . . .	61

---

4.5. Propiedades . . . . .	63
4.6. (Co)homología simplicial . . . . .	64
4.7. Distancia cohomológica simplicial . . . . .	67
4.8. Subdivisión y aproximación simplicial . . . . .	67
4.9. Realizaciones geométricas . . . . .	70
4.10. Cálculos computacionales . . . . .	75
<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>

## Resumen

En este trabajo desarrollamos métodos algebraicos y combinatorios en la robótica topológica. Más en concreto, estudiamos invariantes homotópicos relacionados con el problema de planificación de movimientos, como la categoría de Lusternik-Schnirelmann o la complejidad topológica, a partir de una noción que los unifica: la distancia homotópica. Las técnicas que utilizamos combinan tanto herramientas clásicas de topología algebraica, como los grupos de homotopía o la (co)homología, así como recursos de topología combinatoria y computacional, gracias a los complejos simpliciales. Esto nos permite definir nuevos invariantes originales que mejoran estrictamente cotas y resultados existentes en la literatura, a la vez que diseñar algoritmos que, mediante la implementación de programas computacionales de cálculo simbólico, hallan estos invariantes para cualquier espacio triangulable.

## Abstract

In this dissertation, we develop algebraic and combinatorial methods within the framework of topological robotics. More specifically, we study homotopy invariants related to the motion planning problem, such as the Lusternik-Schnirelmann category and topological complexity, through a unifying notion: homotopic distance. The techniques we use combine classical tools from algebraic topology, such as homotopy groups and (co)homology, with ideas from combinatorial and computational topology via simplicial complexes. This allows us to define new original invariants that strictly improve existing bounds and results in the literature, as well as to design algorithms which, through the implementation of symbolic computation programs, calculate these invariants for any triangulable space.





# Introducción

En este trabajo desarrollamos métodos algebraicos y combinatorios en la robótica topológica, un campo de investigación de aparición reciente [10]. Más en concreto, estudiamos invariantes homotópicos relacionados con el problema de planificación de movimientos. Este incluye, principalmente, la categoría de Lusternik-Schnirelmann (categoría LS) y la complejidad topológica.

El mayor desafío asociado a estos invariantes radica en su dificultad de cálculo. Por ejemplo, una de las cuestiones más importantes en la lista de problemas de la teoría de invariantes homotópicos numéricos de Ganea [17] es calcular la categoría LS de algunas familias de espacios topológicos clásicos: variedades de Stiefel, grupos de Lie, espacios homogéneos, etc. Sorprendentemente, una pregunta tan fundamental planteada hace ya más de 50 años, sigue sin una respuesta en su totalidad. Para intentar solventar este inconveniente se suele recurrir a aproximaciones y cotas, algunas de ellas puramente abstractas [6, 8, 11]. No obstante, en los últimos años se ha observado un notable estancamiento en el desarrollo de estos métodos. En paralelo, también se han explorado enfoques más directos mediante cálculos explícitos, muchas veces laboriosos y técnicamente complejos, como los desarrollados en [5].

Como consecuencia, han aparecido multitud de generalizaciones y versiones alternativas de estos invariantes, adaptadas a distintos contextos. Entre ellas, destaca una que ha surgido hace tan solo un par de años: la distancia homotópica [28, 29]. Este concepto unifica y generaliza tanto la categoría LS como la complejidad topológica, proporcionando un marco más flexible y robusto para abordar problemas relacionados con la planificación de movimientos. Además, este nuevo invariante representa un cambio de paradigma en este campo de estudio, al poner el foco en las aplicaciones entre espacios y no en los espacios en sí mismos. Esta perspectiva está en consonancia con la filosofía de la teoría de categorías, donde las flechas son consideradas más importantes que los propios objetos.

## La categoría de Lusternik-Schnirelmann: un problema en el espacio exterior

Nos remontamos al año 1969, a la misión Apolo 10 de la NASA. En esta, se efectuaron por primera vez maniobras en un módulo en órbita lunar [20, Sección 2.3]. Tras concluir estas operaciones, la nave debía regresar al módulo principal, manteniendo su parte superior orientada directamente hacia él. Si se desviaba de la trayectoria adecuada, el sistema de

navegación automático intervenía para restablecer la posición de retorno. Sin embargo, en un momento crítico de la aproximación, la nave perdió el rumbo y comenzó a girar sobre sí misma de forma caótica. Los monitores de control y el giroscopio mostraban valores anómalos. Los tripulantes, desconcertados, no entendían qué estaba sucediendo. Se había producido el gimbal-lock: la pérdida de un grado de libertad de rotación en un sistema de suspensiones cardán. Afortunadamente, la nave contaba con un modo de navegación manual, lo cual permitió a los astronautas reencauzar el rumbo y completar la misión con éxito. Pero, ¿por qué había ocurrido este fallo técnico?



Figura 1: Tripulación del Apolo 10. Imagen cortesía de la NASA. Dominio público

La situación del Apolo 10 ilustra un problema clásico: cómo regresar con seguridad a una posición de referencia desde cualquier configuración posible en un espacio. En términos más abstractos, los sistemas de navegación automáticos deben ser capaces de calcular una trayectoria de vuelta, es decir, un camino de regreso desde cualquier posición a un estado base predeterminado. Sin embargo, como muestra el gimbal-lock, no siempre es posible hacerlo de forma estable.

Este tipo de dificultades no son solo mecánicas, sino profundamente matemáticas. Podemos entenderlas mejor si modelamos el conjunto de configuraciones posibles como un espacio topológico  $X$  conexo por caminos, y la posición de referencia como un punto  $x_0 \in X$ . La pregunta entonces es la siguiente: ¿podemos construir un algoritmo estable que nos diga cómo regresar desde cualquier punto de  $X$  a  $x_0$ ?

Consideremos el espacio de caminos en  $X$  con punto inicial  $x_0$  fijado,

$$P_0X = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow X \text{ tales que } \gamma(0) = x_0\},$$

con la topología compacto-abierta (ver Ejemplo 1.2), y la aplicación que lleva cada camino a su extremo final

$$\begin{aligned} \pi_0: P_0X &\longrightarrow X \\ \gamma &\longmapsto \gamma(1). \end{aligned}$$

Ahora el problema se traduce en encontrar una sección de  $\pi_0$ , esto es, una aplicación  $s: X \rightarrow P_0X$  tal que  $\pi_0 \circ s = \text{id}_X$ . Además, imponemos que la sección sea continua, ya que esto nos permite asegurar la estabilidad del algoritmo. Más en general, para un abierto  $U \subseteq X$ , una sección local de  $\pi_0$  en  $U$  es una aplicación continua  $s: U \rightarrow P_0X$  tal que  $\pi_0 \circ s$  es la inclusión  $i: U \hookrightarrow X$ . ¿Bajo qué condiciones un abierto admite una sección local?

**Teorema 0.1.** *Existe una sección local  $s: U \rightarrow P_0X$  de  $\pi_0: P_0X \rightarrow X$  si y solo si se puede contraer  $U$  a un punto dentro de  $X$ .*

*Idea de demostración.* Que  $U$  se pueda contraer a un punto significa que la inclusión  $U \hookrightarrow X$  es nulhomótopa, es decir, que existe una homotopía  $H: U \times [0, 1] \rightarrow X$  entre la inclusión  $H|_{U \times \{0\}} = i: U \hookrightarrow X$  y una aplicación constante  $H|_{U \times \{1\}} = \text{cte}: U \rightarrow X$ . Como  $X$  es conexo por caminos, podemos suponer que esta aplicación constante toma el valor  $x_0$ . Definimos entonces la aplicación  $s: U \rightarrow P_0X$  como el camino  $s(x): [0, 1] \rightarrow X$  dado por  $s(x)(t) = H(x, 1 - t)$  (ver Figura 2). Así,  $s$  es una sección de  $\pi_0$ .

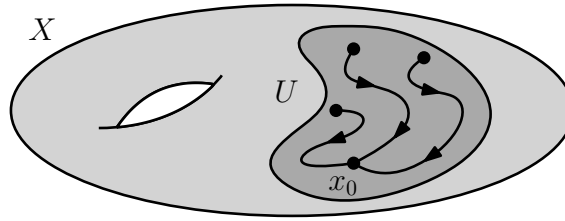


Figura 2: La homotopía  $H: i \simeq \text{cte}$  define un camino desde cada punto de  $U$  hasta  $x_0$

Recíprocamente, si para un subconjunto  $U \subseteq X$  existe una sección  $s: U \rightarrow P_0X$ , entonces la aplicación  $H: U \times [0, 1] \rightarrow X$  dada por  $H(x, t) = s(x)(1 - t)$  es una homotopía  $H: i \simeq \text{cte}$  que contrae  $U$  a  $x_0$ . Por lo tanto, la inclusión  $i: U \hookrightarrow X$  es nulhomótopa.  $\square$

En particular, existe un algoritmo estable definido en todo  $X$  si y solo si el espacio es deformable a un punto. En el caso de la misión Apolo 10, el espacio  $X$  es  $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ , que se corresponde con todas las orientaciones tridimensionales de la nave. Este no es contráctil (ver Ejemplo 4.68), por lo que tal algoritmo no existe. El gimbal-lock es la manifestación física de este hecho: cuando la nave alcanza ciertas configuraciones críticas, el sistema de control pierde la capacidad de determinar un giro para corregir la posición, desencadenando el giro caótico observado.

En el caso más general, nos preguntamos cuántos algoritmos son necesarios para abarcar todo el espacio. La respuesta está en contar el número mínimo de abiertos de  $X$ , cada uno contráctil dentro del propio  $X$ , que se necesitan para recubrirlo por completo. Este número es un invariante homotópico, conocido como la categoría de Lusternik-Schnirelmann. Es decir, la categoría LS es el invariante que modela este problema.

Pese a tener numerosas aplicaciones prácticas, su origen data de los años 30 y es puramente teórico [27]. Surgió en el contexto del cálculo variacional y del análisis de ecuaciones diferenciales, relacionando las posibles soluciones de una ecuación con la topología de la

variedad subyacente. Además de permitir demostrar resultados importantes, como la existencia de tres geodésicas cerradas en la esfera [25, 26], también proporciona una cota inferior para el número de puntos críticos de una función definida sobre una variedad, estableciendo conexiones fundamentales entre la geometría diferencial y la topología algebraica.

Su carácter integrador, al tender puentes entre álgebra, geometría y topología, la posicionó como una herramienta sumamente poderosa. Con el tiempo, adquirió un papel central dentro de la topología algebraica, consolidándose como un tema de investigación con identidad propia [6]. Asimismo, ha ganado mucha popularidad con el surgimiento de la robótica topológica, debido a su estrecha relación con otro invariante: la complejidad topológica [9].

## La complejidad topológica de M. Farber: brazos robóticos y navegación GPS

A diferencia del problema planteado en la misión Apolo 10, donde se busca regresar a una posición inicial de referencia, muchos sistemas robóticos se enfrentan a un desafío más general: moverse entre dos configuraciones cualesquiera sin un estado base predeterminado. Por ejemplo, un brazo robótico ensamblando piezas en una fábrica debe planificar trayectorias desde cualquier posición inicial hasta cualquier posición final, adaptándose en tiempo real a las necesidades que puedan surgir.

Esta necesidad de navegación flexible también resulta crucial en sistemas de posicionamiento global. Un navegador GPS debe ser capaz de calcular rutas entre cualquier par de ubicaciones dentro de un mapa. El espacio de configuraciones en este caso es la red vial, y el algoritmo debe garantizar que pequeños cambios en el origen o en el destino produzcan variaciones sutiles en la ruta sugerida. De este modo, se evitan saltos bruscos que pueden desorientar al conductor o afectar negativamente al sistema de control.

Estos escenarios pueden describirse de forma unificada: ¿existe un algoritmo estable que nos diga cómo conectar dos puntos cualesquiera del espacio de configuraciones? Para responder a esta pregunta, consideremos el espacio de caminos en  $X$ ,

$$PX = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow X\},$$

con la topología compacto-abierta, y la aplicación que lleva cada camino a sus extremos

$$\begin{aligned} \pi: PX &\longrightarrow X \times X \\ \gamma &\longmapsto (\gamma(0), \gamma(1)). \end{aligned}$$

Ahora el problema se trata de encontrar una sección global de  $\pi$ , esto es, una aplicación continua  $s: X \times X \rightarrow PX$  tal que  $\pi \circ s = \text{id}_{X \times X}$ . ¿Cuándo existe dicha sección?

**Teorema 0.2.** *Existe una sección global  $s: X \times X \rightarrow PX$  de  $\pi: PX \rightarrow X \times X$  si y solo si podemos contraer  $X$  a un punto.*

*Idea de demostración.* Supongamos que  $X$  se puede contraer a un punto. Es decir, existe una homotopía  $H: \text{id}_X \simeq \text{cte}$  entre la identidad y una aplicación constante, que toma el

valor  $x_0 \in X$ . En particular, para cada  $x \in X$ ,  $H_t(x)$  es un camino entre  $x$  y  $x_0$ . Podemos definir entonces un camino entre dos puntos  $x_1, x_2 \in X$  como la concatenación de recorrer  $H_t(x_1)$  y después recorrer  $H_t(x_2)$  en el sentido inverso (ver Figura 3) y así definir una sección global continua:

$$\begin{aligned} s: X \times X &\longrightarrow PX \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \gamma: [0, 1] \longrightarrow X \\ t &\longmapsto \gamma(t) = \begin{cases} H(x_1, 2t), & t \leq 1/2, \\ H(x_2, 2-2t), & t \geq 1/2. \end{cases} \end{aligned}$$

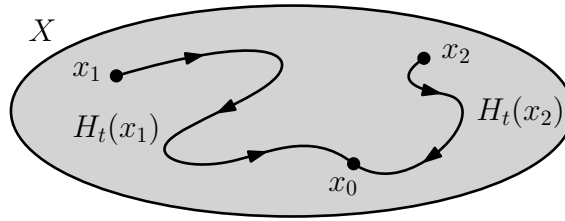


Figura 3: La homotopía  $H: \text{id}_X \simeq \text{cte}$  define un camino desde cada punto de  $X$  hasta  $x_0$

Recíprocamente, supongamos que existe una sección global continua  $s: X \times X \rightarrow PX$  de  $\pi: PX \rightarrow X \times X$ . Entonces, si escogemos un punto  $x_0 \in X$  cualquiera, podemos construir una homotopía  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  entre la identidad  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  y la aplicación constante  $\text{cte}: X \rightarrow X$  que toma el valor  $x_0$  mediante la expresión  $H(x, t) = s(x, x_0)(t)$   $\square$

En el caso de un brazo robótico, podemos modelar el espacio de configuraciones como

$$X = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \times \cdots \times \mathbb{S}^2,$$

donde  $n \geq 0$  y  $m \geq 0$  denotan el número de articulaciones que permiten rotación plana y espacial, respectivamente (ver Figura 4). Este espacio no es contráctil siempre que al menos uno de los valores  $n$  o  $m$  sea estrictamente mayor que cero (ver Ejemplos 4.65, 4.67, 4.71 y 4.72). En consecuencia, no existe un algoritmo estable global para los brazos robóticos.

Nuevamente, de manera más general, es pertinente preguntarse cuántos algoritmos se requieren para abarcar todo el espacio de configuraciones. Es decir, determinar el número mínimo de abiertos necesarios para recubrir  $X \times X$  que admiten una sección local de  $\pi: PX \rightarrow X \times X$ . Este número se conoce como la complejidad topológica de  $X$ , y, en este caso, es el invariante que modela el problema. Este apareció por primera vez hace apenas dos décadas [9], y desde entonces ha impulsado un notable auge en el campo de los invariantes homotópicos relacionados con la planificación de movimientos. Al igual que ocurre con la categoría LS, su cálculo resulta sumamente complicado.

El estancamiento de las técnicas puramente abstractas para aproximar los invariantes homotópicos, así como su utilidad práctica y aplicaciones, motivan a desarrollar métodos algebraicos y combinatorios con un enfoque computacional.

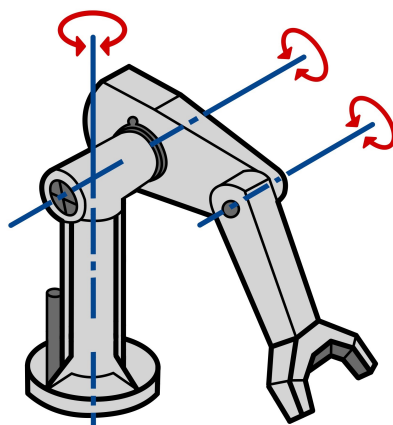


Figura 4: Brazo robótico con tres articulaciones de rotación plana

## Organización del trabajo

Comenzamos en el Capítulo 1 exponiendo algunas nociones básicas de homotopía. Esto nos permite establecer el marco teórico necesario para definir formalmente los invariantes que acabamos de ver en la Introducción.

En el Capítulo 2 presentamos una generalización reciente de estos invariantes: la distancia homotópica. Justificamos en qué sentido engloba a la categoría LS y a la complejidad topológica, estudiamos su relación con ellos y analizamos sus propiedades fundamentales.

A continuación, en el Capítulo 3, abordamos el estudio de los invariantes homotópicos mediante métodos algebraicos. Gracias a los grupos de homotopía y la (co)homología, introducimos dos nuevos invariantes originales que acotan inferiormente la distancia homotópica: la distancia homotópica débil y la distancia cohomológica, este último motivado por la categoría homológica de Fox [15], ya introducida en [33]. Estudiamos sus propiedades más importantes y mostramos su comportamiento mediante numerosos ejemplos representativos. Además, presentamos resultados originales relacionados con la longitud cup y demostramos que nuestro invariante cohomológico mejora las cotas previamente establecidas en la literatura.

Por último, en el Capítulo 4, desarrollamos un enfoque combinatorio que permite reformular las ideas de los capítulos anteriores en el marco de los complejos simpliciales. Estudiamos una versión discreta de la distancia homotópica: la distancia simplicial. Adaptamos nuestro invariante cohomológico del capítulo anterior al contexto simplicial y diseñamos un algoritmo que permite, gracias a un programa propio de cálculo simbólico desarrollado en SageMath, recuperar el invariante original para cualquier espacio triangulable. Destacamos que, gracias a este método, obtenemos de forma explícita los recubrimientos asociados a los invariantes, lo cual resulta especialmente útil a la hora de implementar soluciones en problemas prácticos reales.

# Capítulo 1

## Invariantes homotópicos clásicos

En este primer capítulo exponemos formalmente la categoría de Lusternik-Schnirelmann y la complejidad topológica. Para ello, primero recordamos brevemente algunos conceptos básicos de la teoría de homotopía que usamos repetidamente a lo largo del trabajo. Introducimos las fibraciones, que juegan un papel muy importante a la hora de relacionar los distintos invariantes homotópicos, gracias al género de Švarc. Para agilizar la exposición, omitimos algunas demostraciones. Todas ellas pueden consultarse en [21, 30, 38], que seguimos como referencias principales. Para la categoría LS, basamos la exposición en [6], mientras que para la complejidad topológica lo hacemos en [9].

### 1.1. Homotopía y fibraciones

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y  $f, g: X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas. Una homotopía entre  $f$  y  $g$  es una aplicación continua  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $H_0(x) = H(x, 0) = f(x)$  y  $H_1(x) = H(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . Si existe una homotopía entre  $f$  y  $g$ , decimos que son homótopas y lo denotamos por  $f \simeq g$  o  $H: f \simeq g$ . Si  $f$  es homótopa a una aplicación constante, entonces decimos que es nulhomótopa.

La relación “ser homótopas” es una relación de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos. Además, las composiciones de aplicaciones homótopas son homótopas. Una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  es una equivalencia de homotopía si existe una aplicación  $g: Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  y  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ . En tal caso, decimos que  $X$  e  $Y$  tienen el mismo tipo de homotopía o que son homotópicamente equivalentes y lo denotamos por  $X \simeq Y$  o  $f: X \simeq Y$ . Si  $X$  tiene el mismo tipo de homotopía que un punto decimos que es contráctil. En particular,  $X$  es contráctil si y solo si la identidad  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  es nulhomótopa.

Una aplicación continua  $p: E \rightarrow B$  satisface la propiedad de levantamiento de homotopías respecto al espacio  $X$  si, dada una homotopía  $H_t: X \rightarrow B$  y una aplicación  $f: X \rightarrow E$  tal que  $p \circ f = H_0$ , existe una homotopía  $\tilde{H}_t: X \rightarrow E$  haciendo conmutativo el siguiente



diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\
 X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

**Definición 1.1.** Una aplicación continua  $p: E \rightarrow B$  es una fibración si satisface la propiedad de levantamiento de homotopías respecto a cualquier espacio  $X$ . Decimos que  $B$  es el espacio base y que  $E$  es el espacio total. La fibra sobre  $b \in B$  es el subespacio  $p^{-1}(b) \subseteq E$ .

Si  $p: E \rightarrow B$  es una fibración y  $B$  es conexo por caminos, entonces las fibras sobre dos puntos cualesquiera de  $B$  son homotópicamente equivalentes. En este caso, definimos la fibra  $F$  de  $p: E \rightarrow B$  como la fibra sobre cualquier punto  $b \in B$ .

**Ejemplo 1.2.** 1. Una proyección  $p: B \times F \rightarrow B$  es una fibración.

2. Cualquier aplicación de revestimiento [38, p. 62] es una fibración.

3. Sea  $(E, B, F, p)$  un fibrado localmente trivial. Si  $B$  es Hausdorff y paracompacto, entonces  $p: E \rightarrow B$  es una fibración [38, p. 96].

4. Sea  $PX$  el espacio de caminos en  $X$  con la topología compacto-abierto. Es decir, la topología generada por los subconjuntos

$$(K, U) = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow X \text{ tales que } \gamma(K) \subseteq U\},$$

con  $K \subseteq [0, 1]$  compacto y  $U \subseteq X$  abierto. La aplicación  $\pi: PX \rightarrow X \times X$  que a cada camino  $\gamma \in PX$  le asigna sus extremos  $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$  es una fibración, que llamamos la fibración de caminos.

**Proposición 1.3.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración y  $f: A \rightarrow B$  una aplicación continua. Entonces el pullback de  $p$  por  $f$ , dado por

$$f^*(E) = \{(a, e) \in A \times E \text{ tales que } f(a) = p(e)\},$$

define la fibración  $q: f^*(E) \rightarrow A$ . En particular, al componer homotopías  $H_t: X \rightarrow A$  con  $f$  y aplicar la construcción del pullback, se producen levantamientos  $\tilde{H}_t: X \rightarrow f^*(E)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 f^*(E) & \xrightarrow{\quad} & E \\
 \downarrow q & \lrcorner & \downarrow p \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

**Ejemplo 1.4.** 1. Sea  $x_0$  un punto de  $X$  y consideremos la aplicación  $i_0: X \rightarrow X \times X$  dada por  $i_0(x) = (x_0, x)$ . El pullback por  $i_0$  de la fibración de caminos  $\pi: PX \rightarrow X \times X$  es  $\pi_0: P_0X \rightarrow X$ , donde  $P_0X$  denota el subespacio de  $PX$  formado por todos los caminos  $\gamma \in PX$  tales que  $\gamma(0) = x_0$ . La fibración  $\pi_0: P_0X \rightarrow X$  asigna a cada camino  $\gamma \in P_0X$  su extremo final  $\pi_0(\gamma) = \gamma(1)$ . Esta aplicación recibe el nombre de fibración de caminos con punto inicial  $x_0 \in X$  fijado. Si  $X$  es conexo por caminos, la fibra de  $\pi_0$  es el espacio de lazos

$$\Omega X = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow X \text{ tales que } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}.$$

2. Las aplicaciones  $\pi', \pi'': PX \rightarrow X$  que a cada camino  $\gamma$  le asignan su punto inicial  $\pi'(\gamma) = \gamma(0)$  y su punto final  $\pi''(\gamma) = \gamma(1)$  son fibraciones, ya que se tratan de composiciones de fibraciones.
3. Toda aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  es, salvo homotopía, una fibración. Consideremos la fibración  $\pi': PY \rightarrow Y$  que asigna a cada camino  $\gamma \in PY$  su punto inicial  $\pi'(\gamma) = \gamma(0)$ . Basta entonces con tomar el pullback  $f^*(PY)$  por  $f: X \rightarrow Y$  de  $\pi'$ . Así, la aplicación  $p: f^*(PY) \rightarrow Y$  dada por  $p(x, \gamma) = \gamma(1)$  es una fibración. La aplicación  $s: X \rightarrow f^*(PY)$  que lleva cada punto  $x \in X$  al camino constante igual a  $f(x)$  es una equivalencia de homotopía, cuya inversa homotópica es la proyección  $q(x, \gamma) = x$ . En efecto, dado un elemento  $(x, \gamma) \in f^*(PY)$ , podemos contraer  $\gamma$  al camino constante igual a  $f(x)$  gracias a la homotopía  $H_t(x) = \gamma(tx)$ . Así,  $p \simeq f \circ q$ ,  $f = p \circ s$  y tenemos el siguiente diagrama conmutativo salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccc} f^*(PY) & \xrightarrow{\quad} & PY \\ \uparrow s & \searrow p & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \end{array}$$

## 1.2. Categoría de Lusternik-Schnirelmann

Sea  $X$  un espacio topológico conexo por caminos.

**Definición 1.5.** Decimos que un subconjunto  $U \subseteq X$  es categórico si la inclusión  $i: U \hookrightarrow X$  es nulhomótota, esto es, si es homótota a una aplicación constante cte:  $U \rightarrow X$ .

Un subconjunto categórico  $U \subseteq X$  puede tener varias componentes conexas, siempre que estas sean contráctiles a un punto y luego puedan ser llevadas a través de un camino a un punto común de  $X$ . Es decir, para ser categórico,  $U$  no tiene que ser necesariamente contráctil, tan solo contráctil en  $X$ . Este matiz puede apreciarse en el Ejemplo 1.6.

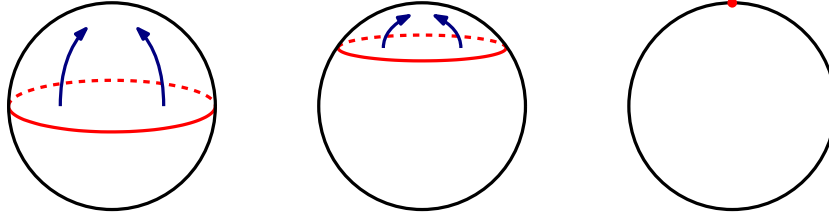


Figura 1.1: El ecuador es contráctil dentro de  $\mathbb{S}^2$

**Ejemplo 1.6.** Consideremos la esfera  $\mathbb{S}^2$  y su ecuador, que es homeomorfo a la circunferencia  $\mathbb{S}^1$ . Este no es contráctil: su grupo fundamental es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Sin embargo, sí puede ser contraído a un punto dentro de la esfera (por ejemplo, al polo norte), como puede verse en la Figura 1.1.

**Definición 1.7.** La categoría de Lusternik-Schnirelmann (categoría LS) de  $X$ ,  $\text{cat}(X)$ , es el menor entero  $n \geq 0$  tal que existe un recubrimiento  $\{U_0, \dots, U_n\}$  de  $X$  por  $n+1$  abiertos categóricos. Si tal  $n$  no existe, escribimos  $\text{cat}(X) = \infty$ .

**Ejemplo 1.8.** Si  $X$  es contráctil, entonces es un recubrimiento abierto categórico de sí mismo, por lo que  $\text{cat}(X) = 0$ . Recíprocamente, si  $\text{cat}(X) = 0$ , entonces  $X$  es contráctil.

*Observación 1.9.* En algunas referencias se le suma 1 a la categoría LS, de modo que  $\text{cat}(X) = n$  si  $n \geq 1$  es el menor entero tal que existe un recubrimiento  $\{U_1, \dots, U_n\}$  de  $X$  por  $n$  abiertos categóricos. Con esta notación, los espacios contráctiles tienen categoría 1.

**Ejemplo 1.10.** La esfera  $\mathbb{S}^n$  no es contráctil, por lo que  $\text{cat}(\mathbb{S}^n) > 0$ . Además, puede ser cubierta por dos abiertos contráctiles:  $\mathbb{S}^n$  menos el polo norte y  $\mathbb{S}^n$  menos el polo sur. En particular, son abiertos categóricos. Así,  $\text{cat}(\mathbb{S}^n) \leq 1$  y podemos concluir que  $\text{cat}(\mathbb{S}^n) = 1$ .

**Teorema 1.11.** La categoría de Lusternik-Schnirelmann es un invariante del tipo de homotopía. Es decir, si  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes, entonces se cumple que  $\text{cat}(X) = \text{cat}(Y)$ .

*Demostración.* Ver Sección 2.4. □

A continuación, presentamos dos generalizaciones de la categoría LS.

**Definición 1.12.** La categoría de una aplicación  $f: X \rightarrow Y$ ,  $\text{cat}(f)$ , es el menor entero  $n \geq 0$  tal que existe un recubrimiento  $\{U_0, \dots, U_n\}$  de  $X$  por  $n+1$  abiertos tal que  $f|_{U_j}$  es nulhomótopa para todo  $j = 0, \dots, n$ . Si tal  $n$  no existe, escribimos  $\text{cat}(f) = \infty$ .

*Observación 1.13.* Se cumple que  $\text{cat}(\text{id}_X) = \text{cat}(X)$ .

Nosotros estamos más interesados en la siguiente generalización, ya que relaciona la categoría LS con las fibraciones.

**Definición 1.14.** El género de Švarc de una fibración  $p: E \rightarrow B$ ,  $\text{secat}(p)$ , es el menor entero  $n \geq 0$  tal que existe un recubrimiento  $\{U_0, \dots, U_n\}$  de  $B$  por  $n + 1$  abiertos tal que  $p$  admite una sección local continua  $s_j: U_j \rightarrow E$  para cada  $U_j$ , esto es,  $p \circ s_j = i: U_j \hookrightarrow B$ . Si tal  $n$  no existe, escribimos  $\text{secat}(p) = \infty$ .

**Proposición 1.15.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración con  $B$  conexo por caminos. Si  $U \subseteq B$  es un subconjunto categórico, entonces admite una sección local continua  $s: U \rightarrow E$  de  $p$ . En particular, se cumple que  $\text{secat}(p) \leq \text{cat}(B)$ .

*Demostración.* Sea  $U$  un subconjunto categórico y  $H: \text{cte} \simeq i$  una homotopía entre una aplicación constante y la inclusión  $i: U \hookrightarrow B$ . Es decir,  $H(x, 0) = x_0$  y  $H(x, 1) = x$ . Dado un punto  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \subseteq E$ , tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ U \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

donde  $\tilde{f}(x, 0) = \tilde{x}_0$ . Por ser  $p: E \rightarrow B$  una fibración, existe un levantamiento  $\tilde{H}: U \times [0, 1] \rightarrow E$  de  $H$  tal que  $\tilde{H}(x, 0) = \tilde{x}_0$  y  $p \circ \tilde{H} = H$ . En particular,  $\tilde{H}(x, 1)$  es una sección continua de  $p$  en  $U$ , pues  $p \circ \tilde{H}(x, 1) = H(x, 1) = i(x)$ .

Si  $\text{cat}(B) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  es un recubrimiento de  $B$  por  $n + 1$  abiertos categóricos, entonces existe una sección  $s_j: U_j \rightarrow E$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Por tanto,  $\text{secat}(p) \leq n = \text{cat}(B)$ .  $\square$

**Proposición 1.16.** Sea  $\pi_0: P_0X \rightarrow X$  la fibración de caminos con punto inicial  $x_0 \in X$  fijado, que asigna a cada camino  $\gamma \in P_0X$  su extremo final  $\pi_0(\gamma) = \gamma(1)$ . Entonces se cumple que  $\text{cat}(X) = \text{secat}(\pi_0)$ .

*Demostración.* En el Teorema 0.1 de la Introducción vimos que los subconjuntos  $U \subseteq X$  categóricos son precisamente aquellos para los que existe una sección local  $s: U \rightarrow P_0X$  de la fibración de caminos con punto inicial fijado  $\pi_0: P_0X \rightarrow X$ . Por tanto,  $\text{cat}(X) = \text{secat}(\pi_0)$ .  $\square$

**Proposición 1.17.** Sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración y  $q: f^*(E) \rightarrow A$  la fibración inducida por el pullback de  $p$  por una aplicación  $f: A \rightarrow B$ . Entonces se cumple que  $\text{secat}(q) \leq \text{secat}(p)$ .

$$\begin{array}{ccc} f^*(E) & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow q & \lrcorner & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

*Demostración.* Sea  $\text{secat}(p) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $B$  por  $n+1$  abiertos tal que  $p$  admite una sección local continua  $s_j$  para cada  $U_j$ . Sea  $V_j := f^{-1}(U_j)$ . Entonces  $\{V_0, \dots, V_n\}$  es un recubrimiento de  $A$  por  $n+1$  abiertos tal que  $q$  admite una sección local continua  $r_j$  para cada  $V_j$ . En efecto, como el pullback viene dado por

$$f^*(E) = \{(a, e) \in A \times E \text{ tales que } f(a) = p(e)\},$$

basta definir  $r_j: V_j \rightarrow f^*(E)$  como  $r_j(a) = (a, (s_j \circ f)(a))$  y así se tiene que  $q \circ r_j(a) = a$ . Por tanto, concluimos que  $\text{secat}(q) \leq n = \text{secat}(p)$ .  $\square$

### 1.3. Complejidad topológica

Sea  $X$  un espacio topológico conexo por caminos y  $\pi: PX \rightarrow X \times X$  la fibración de caminos.

**Definición 1.18.** Decimos que  $U \subseteq X \times X$  es un subconjunto de Farber si admite una sección local continua  $s: U \rightarrow PX$  de  $\pi$ , es decir, si  $\pi \circ s = i: U \hookrightarrow X \times X$ .

**Definición 1.19.** La complejidad topológica de  $X$ ,  $\text{TC}(X)$ , es el menor entero  $n \geq 0$  tal que existe un recubrimiento  $\{U_0, \dots, U_n\}$  de  $X \times X$  por  $n+1$  abiertos de Farber. Si tal  $n$  no existe, escribimos  $\text{TC}(X) = \infty$ .

*Observación 1.20.* Se cumple que  $\text{TC}(X) = \text{secat}(\pi)$ .

**Proposición 1.21.** Si  $U \subseteq X \times X$  es un abierto categórico, entonces es un abierto de Farber.

*Demostración.* El resultado es consecuencia de aplicar la Proposición 1.15 a la fibración de caminos  $\pi: PX \rightarrow X \times X$ .  $\square$

**Teorema 1.22.** La complejidad topológica es un invariante del tipo de homotopía. Es decir, si  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes, entonces se cumple que  $\text{TC}(X) = \text{TC}(Y)$ .

*Demostración.* Ver Sección 2.4.  $\square$

**Ejemplo 1.23.** Sea  $\mathbb{S}^n$  la esfera con  $n$  impar. Como no es contráctil, se tiene que  $\text{TC}(\mathbb{S}^n) > 0$ . Por otra parte, consideremos los siguientes abiertos de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$ :

$$\begin{aligned} U_0 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \text{ tales que } z_1 \neq -z_2\}, \\ U_1 &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \text{ tales que } z_1 \neq z_2\}. \end{aligned}$$

Sea  $s_0: U_0 \rightarrow PX$  la aplicación que asigna a cada par de puntos  $(z_1, z_2)$  el arco esférico más corto que conecta  $z_1$  con  $z_2$  recorrido a velocidad constante, que está bien definido pues  $z_1$  y  $z_2$  no son puntos antipodales. Por otra parte, fijemos un campo vectorial  $v: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  continuo, unitario y tangente a la esfera. Sea  $s_1: U_1 \rightarrow PX$  la aplicación que asigna a

cada par de puntos  $(z_1, z_2)$  el arco esférico más corto que conecta  $z_1$  con  $-z_2$  recorrido a velocidad constante, concatenado con el arco esférico dado por

$$\sin(t) \cdot v(z_2) - \cos(t) \cdot z_2, \quad t \in [0, \pi],$$

que conecta  $-z_2$  con  $z_2$ . Así,  $U_0$  y  $U_1$ , junto con  $s_0$  y  $s_1$  forman un recubrimiento de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$  por abiertos de Farber. En consecuencia,  $\text{TC}(\mathbb{S}^n) = 1$  si  $n$  es impar.



# Capítulo 2

## Distancia homotópica

En este capítulo presentamos una generalización reciente de los invariantes homotópicos vistos en el Capítulo 1: la distancia homotópica. Para ello, seguimos las ideas desarrolladas en [28, 29]. Analizamos algunas de las propiedades fundamentales de la distancia homotópica, estableciendo diversas desigualdades que dependen de los dominios y codominios de las aplicaciones consideradas. Después, mostramos en qué sentido este concepto define un invariante homotópico. Para espacios normales, demostramos que induce una verdadera distancia en el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas definidas entre dos espacios. También incluimos resultados relativos a productos y a  $H$ -espacios. Por último, dedicamos una sección a exponer resultados originales en el caso en que los espacios involucrados son CW-complejos finitos.

### 2.1. Distancia homotópica

Sean  $f, g: X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas definidas entre espacios conexos por caminos.

**Definición 2.1.** La distancia homotópica entre  $f$  y  $g$ ,  $D(f, g)$ , es el menor entero  $n \geq 0$  tal que existe un recubrimiento  $\{U_0, \dots, U_n\}$  de  $X$  por  $n + 1$  abiertos tal que  $f|_{U_j} \simeq g|_{U_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Si tal  $n$  no existe, escribimos  $D(f, g) = \infty$ .

*Observación 2.2.* 1. La distancia homotópica es simétrica, es decir,  $D(f, g) = D(g, f)$ .

2.  $D(f, g) = 0$  si y solo si  $f$  y  $g$  son homótopas.

**Ejemplo 2.3.** Si  $X$  o  $Y$  es contráctil, entonces  $[X, Y]$  tiene un solo elemento: todas las aplicaciones  $X \rightarrow Y$  son homótopas. En este caso,  $D(f, g) = 0$ . El recíproco no es cierto. Por ejemplo,  $D(f, g) = 0$  para cualesquiera dos aplicaciones  $f, g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Sin embargo,  $\mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{S}^2$  no son contráctiles.

**Proposición 2.4.** La distancia homotópica es constante sobre las clases de homotopía. Es decir, si  $f \simeq f'$  y  $g \simeq g'$ , entonces se cumple que  $D(f, g) = D(f', g')$ .



*Demostración.* Sea  $D(f, g) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $X$  por  $n + 1$  abiertos tal que  $f|_{U_j} \simeq g|_{U_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Entonces  $f'|_{U_j} \simeq f|_{U_j} \simeq g|_{U_j} \simeq g'|_{U_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Por tanto,  $D(f', g') \leq n = D(f, g)$ . La otra desigualdad es análoga.  $\square$

**Ejemplo 2.5.** Sean  $\text{id}_{\mathbb{S}^n}, -\text{id}_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  la identidad y la aplicación que lleva cada punto de la esfera a su antipodal. Por un Teorema de Hopf [21, Corolario 4.25],  $\text{id}_{\mathbb{S}^n}$  y  $-\text{id}_{\mathbb{S}^n}$  son homótopas si y solo si tienen el mismo grado. La identidad  $\text{id}_{\mathbb{S}^n}$  tiene grado 1, mientras que  $-\text{id}_{\mathbb{S}^n}$  tiene grado  $(-1)^{n+1}$ , pues es la composición de  $n + 1$  reflexiones, cada una cambiando el signo de una coordenada en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Por otra parte, como vimos en el Ejemplo 1.10, podemos recubrir la esfera por dos abiertos contráctiles, en los que  $\text{id}_{\mathbb{S}^n}$  y  $-\text{id}_{\mathbb{S}^n}$  son trivialmente homótopas. Por tanto  $D(\text{id}_{\mathbb{S}^n}, -\text{id}_{\mathbb{S}^n}) \leq 1$ . Entonces, se tiene que

$$D(\text{id}_{\mathbb{S}^n}, -\text{id}_{\mathbb{S}^n}) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

## 2.2. Relación con otros invariantes

En esta sección relacionamos la distancia homotópica con los invariantes homotópicos introducidos en el Capítulo 1. Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas definidas entre espacios conexos por caminos.

**Teorema 2.6.** Sea  $p : P \rightarrow X$  el pullback de la fibración de caminos  $\pi : PY \rightarrow Y \times Y$  por la aplicación  $(f, g) : X \rightarrow Y \times Y$ . Entonces se cumple que  $D(f, g) = \text{secat}(p)$ .

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad} & PY \\ \downarrow p & \lrcorner & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{(f, g)} & Y \times Y \end{array}$$

*Demostración.* Por definición, el pullback de  $\pi$  por  $(f, g)$  es

$$P = \{(x, \gamma) \in X \times PY \text{ tales que } \gamma(0) = f(x) \text{ y } \gamma(1) = g(x)\},$$

mientras que  $p$  es la proyección en el primer factor.

Si  $U \subseteq X$  es un abierto tal que  $H : f|_U \simeq g|_U$ , entonces la aplicación  $s : U \rightarrow P$  dada por  $s(x) = (x, H(x, \cdot))$  es una sección local de  $p$  definida en  $U$ .

Recíprocamente, si  $U \subseteq X$  admite una sección local  $s : U \rightarrow P$  de  $p$ , entonces  $s(x)$  es de la forma  $(x, \gamma_x)$  para algún camino  $\gamma_x \in PY$  con  $\gamma(0) = f(x)$  y  $\gamma(1) = g(x)$ . De esta manera, tenemos una homotopía  $H : f|_U \simeq g|_U$ , dada por  $H(x, t) = \gamma_x(t)$ .  $\square$

**Corolario 2.7.** Sea  $\text{cte}: X \rightarrow X$  una aplicación constante y  $\pi_0: P_0X \rightarrow X$  la fibración de caminos con punto inicial fijado. Entonces se cumple que  $D(\text{cte}, \text{id}_X) = \text{secat}(\pi_0) = \text{cat}(X)$ .

$$\begin{array}{ccc} P_0X & \xrightarrow{\quad} & PX \\ \pi_0 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{(\text{cte}, \text{id}_X)} & X \times X \end{array}$$

**Corolario 2.8.** Se cumple que  $D(f, \text{cte}) = \text{cat}(f)$ .

**Corolario 2.9.** Sean  $\pi_1, \pi_2: X \times X \rightarrow X$  las proyecciones y  $\pi: PX \rightarrow X \times X$  la fibración de caminos. Entonces se cumple que  $D(\pi_1, \pi_2) = \text{secat}(\pi) = \text{TC}(X)$ .

$$\begin{array}{ccc} PX & \xrightarrow{\text{id}_{PX}} & PX \\ \pi \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi \\ X \times X & \xrightarrow[\text{id}_{X \times X}]{(\pi_1, \pi_2)} & X \times X \end{array}$$

De hecho, el resultado del Teorema 2.6 es más fuerte que la igualdad  $D(f, g) = \text{secat}(p)$ . En la propia demostración vemos que los abiertos  $U \subseteq X$  tales que  $f|_U \simeq g|_U$  son exactamente los que admiten una sección  $s: U \rightarrow P$  de  $p$ . Por ejemplo, aplicado a la complejidad topológica: los abiertos de Farber  $U \subseteq X \times X$  son precisamente aquellos en los cuales las proyecciones  $\pi_1, \pi_2: X \times X \rightarrow X$  son homótopas  $\pi_1|_U \simeq \pi_2|_U$ .

También podemos interpretar la categoría LS de manera dual a la complejidad topológica en el siguiente sentido. Sea  $x_0$  un punto cualquiera de  $X$  y consideremos las inclusiones

$$\begin{array}{ll} i_1: X \hookrightarrow X \times X & i_2: X \hookrightarrow X \times X \\ x \mapsto (x, x_0), & x \mapsto (x_0, x). \end{array}$$

**Proposición 2.10.** Se cumple que  $D(i_1, i_2) = \text{cat}(X)$ .

*Demostración.* Sea  $U \subseteq X$  un abierto categórico y  $F: i \simeq \text{cte}$  una homotopía entre la inclusión  $i: U \hookrightarrow X$  y una aplicación constante  $\text{cte}: U \rightarrow X$ . Como  $X$  es conexo por caminos, podemos suponer que la aplicación constante toma el valor  $x_0$ . Entonces la aplicación  $H: U \times [0, 1] \rightarrow X \times X$  dada por

$$H(x, t) = \begin{cases} (F(x, 2t), x_0), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (x_0, F(x, 2 - 2t)), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

es una homotopía  $H: i_{1|U} \simeq i_{2|U}$ , ya que  $H(x, 0) = (F(x, 0), x_0) = (x, x_0)$  y  $H(x, 1) = (x_0, F(x, 0)) = (x_0, x)$ . Además,  $H(x, 1/2) = (F(x, 1/2), x_0) = (x_0, F(x, 1/2)) = (x_0, x_0)$ .

Recíprocamente, si existe una homotopía  $H: U \times [0, 1] \rightarrow X \times X$  entre  $i_{1|U}$  y  $i_{2|U}$ , entonces  $\pi_1 \circ H$  es una homotopía entre la inclusión  $i: U \hookrightarrow X$  y una aplicación constante  $\text{cte}: U \rightarrow X$ .  $\square$

### 2.3. Desigualdades

Dado un subespacio contráctil  $U \subseteq X$ , cualquier par de aplicaciones definidas en  $U$  son homótopas. Esto sugiere que la categoría LS de  $X$  puede proporcionar una cota superior para la distancia homotópica. No obstante, en la definición de la categoría LS, se requiere un recubrimiento de  $X$  por abiertos categóricos, no necesariamente contráctiles. De hecho, si se exige que los abiertos sean contráctiles, se tiene la noción de categoría LS geométrica,  $\text{gcat}(X)$ , que no es un invariante del tipo de homotopía [6, Capítulo 3, Sección 3].

A pesar de este matiz, resulta que la categoría LS de  $X$  sí es una cota superior para la distancia homotópica, un resultado no trivial. Demostramos a continuación esta y otras desigualdades que involucran los distintos invariantes.

**Corolario 2.11.** *Sean  $f, g: X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas con  $X$  e  $Y$  conexos por caminos. Entonces se cumple que  $D(f, g) \leq \text{cat}(X)$ .*

*Demostración.* Con la notación del Teorema 2.6, la distancia homotópica  $D(f, g)$  coincide con el género de Švarc  $\text{secat}(p)$  del pullback  $p: P \rightarrow X$  de la fibración de caminos  $\pi: PY \rightarrow Y \times Y$  por la aplicación  $(f, g): X \times X \rightarrow Y \times Y$ . Por la Proposición 1.15, concluimos que  $D(f, g) = \text{secat}(p) \leq \text{cat}(X)$ .  $\square$

**Corolario 2.12.** *Se cumple que  $\text{cat}(X) \leq \text{TC}(X) \leq \text{cat}(X \times X)$ .*

*Demostración.* Aplicando las Proposiciones 1.15 y 1.17 al diagrama del Corolario 2.7:

$$\begin{array}{ccc} P_0X & \xleftarrow{i} & PX \\ \pi_0 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{(\text{cte}, \text{id}_X)} & X \times X \end{array}$$

concluimos que

$$\text{cat}(X) = \text{secat}(\pi_0) \leq \text{secat}(\pi) = \text{TC}(X) \leq \text{cat}(X \times X). \quad \square$$

**Proposición 2.13.** *Sean  $f, g: X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas con  $X$  e  $Y$  conexos por caminos. Entonces se cumple que  $D(f, g) \leq \text{TC}(Y)$ .*

*Demostración.* Siguiendo nuevamente el Teorema 2.6, la distancia homotópica  $D(f, g)$  coincide con el género de Švarc  $\text{secat}(p)$  del pullback  $p: P \rightarrow X$  de la fibración de caminos  $\pi: PY \rightarrow Y \times Y$  por la identidad  $\text{id}_{X \times X}: X \times X \rightarrow X \times X$ . Aplicando la Proposición 1.17 obtenemos que

$$D(f, g) = \text{secat}(p) \leq \text{secat}(\pi) = \text{TC}(Y). \quad \square$$

Ahora presentamos varios resultados relacionados con la composición de aplicaciones.

**Proposición 2.14.** Sea  $h: Y \rightarrow Z$  una aplicación continua. Entonces se cumple que

$$D(h \circ f, h \circ g) \leq D(f, g).$$

*Demostración.* Sea  $D(f, g) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $X$  por  $n + 1$  abiertos tal que  $f|_{U_j} \simeq g|_{U_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Como

$$(h \circ f)|_{U_j} = h \circ f|_{U_j} \simeq h \circ g|_{U_j} = (h \circ g)|_{U_j},$$

se tiene que  $D(h \circ f, h \circ g) \leq n = D(f, g)$ .  $\square$

**Corolario 2.15.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua con  $X$  conexo por caminos. Entonces se cumple que  $\text{cat}(f) \leq \text{cat}(X)$ .

*Demostración.* Sea  $\text{cte}_{x_0}: X \rightarrow X$  una aplicación constante y consideremos  $\text{cte}_{f(x_0)} = f \circ \text{cte}_{x_0}$ . Entonces, por la Proposición 2.14, se tiene que

$$\text{cat}(f) = D(f, \text{cte}_{f(x_0)}) = D(f \circ \text{id}_X, f \circ \text{cte}_{x_0}) \leq D(\text{id}_X, \text{cte}_{x_0}) = \text{cat}(X). \quad \square$$

**Proposición 2.16.** Sea  $h: Z \rightarrow X$  una aplicación continua. Entonces se cumple que

$$D(f \circ h, g \circ h) \leq D(f, g).$$

*Demostración.* Sea  $D(f, g) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $X$  por  $n + 1$  abiertos tal que  $f|_{U_j} \simeq g|_{U_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Si denotamos  $V_j := h^{-1}(U_j) \subseteq Z$ , podemos factorizar  $h|_{V_j}: V_j \rightarrow X$  como la composición  $i_j \circ \tilde{h}|_{V_j}: V_j \rightarrow U_j \hookrightarrow X$ . Así, se tiene que

$$(f \circ h)|_{V_j} = f \circ h|_{V_j} = f|_{U_j} \circ \tilde{h}|_{V_j} \simeq g|_{U_j} \circ \tilde{h}|_{V_j} = g \circ h|_{V_j} = (g \circ h)|_{V_j},$$

y concluimos que  $D(f \circ h, g \circ h) \leq n = D(f, g)$ .  $\square$

**Corolario 2.17.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua con  $Y$  conexo por caminos. Entonces se cumple que  $\text{cat}(f) \leq \text{cat}(Y)$ .

*Demostración.* Sea  $x_0 \in X$ ,  $y_0 := f(x_0)$ ,  $\text{cte}_{f(x_0)}: X \rightarrow Y$  una aplicación constante y  $\text{cte}_{y_0}: Y \rightarrow Y$ . Entonces, por la Proposición 2.16, se tiene que

$$\text{cat}(f) = D(f, \text{cte}_{f(x_0)}) = D(\text{id}_Y \circ f, \text{cte}_{y_0} \circ f) \leq D(\text{id}_Y, \text{cte}_{y_0}) = \text{cat}(Y). \quad \square$$

**Proposición 2.18.** Sean  $f, g: X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas con  $Y$  conexo por caminos. Entonces se cumple que

$$D(f, g) + 1 \leq (\text{cat}(f) + 1)(\text{cat}(g) + 1).$$

*Demostración.* Sea  $\text{cte}_{y_0}: X \rightarrow Y$  una aplicación constante. Sean  $\text{cat}(f) = D(f, \text{cte}_{y_0}) = n$  y  $\text{cat}(g) = D(g, \text{cte}_{y_0}) = m$ . Sean  $\{U_0, \dots, U_n\}$  y  $\{V_0, \dots, V_m\}$  recubrimientos de  $X$  por  $n + 1$  y  $m + 1$  abiertos tales que  $f|_{U_i} \simeq \text{cte}_{y_0}|_{U_i}$  y  $g|_{V_j} \simeq \text{cte}_{y_0}|_{V_j}$  para todo  $i = 0, \dots, n$  y  $j = 0, \dots, m$ . Si denotamos por  $W_{ij} = U_i \cap V_j$ , entonces  $\{W_{ij}\}$  es un recubrimiento de  $X$  formado por  $(n + 1)(m + 1)$  abiertos tales que  $f|_{W_{ij}} \simeq \text{cte}_{y_0}|_{W_{ij}} \simeq g|_{W_{ij}}$ . Así, se tiene que

$$D(f, g) \leq (n + 1)(m + 1) - 1 = (\text{cat}(f) + 1)(\text{cat}(g) + 1) - 1. \quad \square$$

## 2.4. Invarianza homotópica

A continuación, vemos la invarianza homotópica de la distancia homotópica.

**Proposición 2.19.** *Sean  $f, g: X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas.*

1. *Si  $s: Y \rightarrow Y'$  es una aplicación continua que admite inversa homotópica por la izquierda, entonces se cumple que  $D(s \circ f, s \circ g) = D(f, g)$ .*
2. *Si  $r: X' \rightarrow X$  es una aplicación continua que admite inversa homotópica por la derecha, entonces se cumple que  $D(f \circ r, g \circ r) = D(f, g)$ .*

*Demostración.* 1. Sea  $t: Y' \rightarrow Y$  una inversa homotópica por la izquierda de  $s$ , es decir,  $t \circ s \simeq \text{id}_Y$ . Por tanto, tenemos que  $t \circ s \circ f \simeq f$  y  $t \circ s \circ g \simeq g$ . Usando las Proposiciones 2.4 y 2.14 concluimos que

$$D(f, g) \geq D(s \circ f, s \circ g) \geq D(t \circ s \circ f, t \circ s \circ g) = D(f, g).$$

2. Sea  $t: X \rightarrow X'$  una inversa homotópica por la derecha de  $r$ , es decir,  $r \circ t \simeq \text{id}_X$ . Por tanto, tenemos que  $f \circ r \circ t \simeq f$  y  $g \circ r \circ t \simeq g$ . Usando las Proposiciones 2.4 y 2.16 concluimos que

$$D(f, g) \geq D(f \circ r, g \circ r) \geq D(f \circ r \circ t, g \circ r \circ t) = D(f, g). \quad \square$$

**Teorema 2.20.** *Sean  $f, g: X \rightarrow Y$ ,  $f', g': X' \rightarrow Y'$  aplicaciones continuas. Sean  $r: X' \rightarrow X$  y  $s: Y \rightarrow Y'$  equivalencias de homotopía tales que  $s \circ f \circ r \simeq f'$  y  $s \circ g \circ r \simeq g'$ . Entonces se cumple que  $D(f, g) = D(f', g')$ .*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightleftharpoons[f']{f'} & Y' \\ \downarrow r & & \uparrow s \\ X & \xrightleftharpoons[g]{f} & Y \end{array}$$

*Demostración.* Por las Proposiciones 2.4 y 2.19 tenemos que

$$D(f, g) = D(f \circ r, g \circ r) = D(s \circ f \circ r, s \circ g \circ r) = D(f', g') \quad \square$$

**Corolario 2.21.** *La categoría de Lusternik-Schnirelmann y la complejidad topológica son invariantes del tipo de homotopía. Es decir, si  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes, entonces se cumple que  $\text{cat}(X) = \text{cat}(Y)$  y  $\text{TC}(X) = \text{TC}(Y)$ .*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightleftharpoons[\text{id}_Y]{\text{cte}} & Y \\ \cong \downarrow & & \uparrow \cong \\ X & \xrightleftharpoons[\text{id}_X]{\text{cte}} & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xrightleftharpoons[\pi'_2]{\pi'_1} & Y \\ \cong \downarrow & & \uparrow \cong \\ X \times X & \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} & X \end{array}$$

## 2.5. Espacios normales

Si el dominio es un espacio normal, entonces la distancia homotópica verifica una desigualdad triangular. Este resultado, junto con la Observación 2.2, asegura que la distancia homotópica define una verdadera distancia en el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas definidas entre dos espacios.

**Definición 2.22.** Decimos que un espacio topológico  $X$  es normal si, dado un par de cerrados disjuntos  $A, B \subseteq X$ , existen dos abiertos disjuntos  $U_A$  y  $U_B$  tales que  $A \subseteq U_A$  y  $B \subseteq U_B$ .

Para demostrar el resultado deseado, usamos un lema muy general, pero extremadamente útil cuando se trabaja con recubrimientos de un espacio.

**Lema 2.23** ([35, Lema 4.3]). *Sea  $X$  un espacio normal y sean  $U = \{U_0, \dots, U_n\}$  y  $V = \{V_0, \dots, V_m\}$  dos recubrimientos de  $X$  por  $n + 1$  y  $m + 1$  abiertos tales que los elementos de  $U$  satisfacen cierta propiedad “A” y los elementos de  $V$  satisfacen cierta propiedad “B”. Si las propiedades “A” y “B” son heredadas por subconjuntos abiertos y uniones disjuntas, entonces  $X$  admite un recubrimiento  $W = \{W_0, \dots, W_{n+m}\}$  formado por  $n + m + 1$  abiertos que satisfacen tanto la propiedad “A” como la propiedad “B”.*

**Proposición 2.24.** *Sean  $X$  un espacio normal y  $f, g, h: X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas. Entonces se cumple que*

$$D(f, h) \leq D(f, g) + D(g, h).$$

*Demostración.* Sean  $D(f, g) = n$ ,  $D(g, h) = m$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  y  $\{V_0, \dots, V_m\}$  dos recubrimientos de  $X$  por  $n + 1$  y  $m + 1$  abiertos tales que  $f|_{U_i} \simeq g|_{U_i}$  para todo  $i = 0, \dots, n$  y  $g|_{V_j} \simeq h|_{V_j}$  para todo  $j = 0, \dots, m$ . La propiedad “ser homótopas” es heredada por conjuntos abiertos y uniones disjuntas. Por el Lema 2.23,  $X$  admite un recubrimiento  $W = \{W_0, \dots, W_{n+m}\}$  formado por  $n + m + 1$  abiertos tal que  $f|_{W_k} \simeq g|_{W_k} \simeq h|_{W_k}$  para todo  $k = 0, \dots, n + m$ . Por tanto, concluimos que  $D(f, h) \leq n + m = D(f, g) + D(g, h)$ .  $\square$

**Corolario 2.25.** *Sea  $X$  un espacio normal y consideremos aplicaciones  $f, g: X \rightarrow Y$  con  $Y$  conexo por caminos. Entonces se cumple que*

$$D(f, g) \leq \text{cat}(f) + \text{cat}(g).$$

*Demostración.* Sea  $\text{cte}: X \rightarrow Y$  una aplicación constante. Por la Proposición 2.24 se tiene que

$$D(f, g) \leq D(f, \text{cte}) + D(\text{cte}, g) = \text{cat}(f) + \text{cat}(g). \quad \square$$

*Observación 2.26.* El resultado del Corolario 2.25 mejora el de la Proposición 2.18.

**Proposición 2.27.** *Sea  $X$  un espacio normal y consideremos aplicaciones  $f, g: X \rightarrow Y$  y  $f', g': Y \rightarrow Z$ . Entonces se cumple que*

$$D(f' \circ f, g' \circ g) \leq D(f, g) + D(f', g').$$

*Demostración.* Sean  $D(f, g) = n$ ,  $D(f', g') = m$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  y  $\{V_0, \dots, V_m\}$  dos recubrimientos de  $X$  e  $Y$  por  $n + 1$  y  $m + 1$  abiertos tales que  $f|_{U_i} \simeq g|_{U_i}$  para todo  $i = 0, \dots, n$  y  $f'|_{V_j} \simeq g'|_{V_j}$  para todo  $j = 0, \dots, m$ . Entonces  $(g' \circ f)_{U_i} \simeq (g' \circ g)_{U_i}$  para todo  $i = 0, \dots, n$  y  $(f' \circ f)|_{f^{-1}(V_j)} \simeq (f' \circ g)|_{f^{-1}(V_j)}$  para todo  $j = 0, \dots, m$ . Por el Lema 2.23,  $X$  admite un recubrimiento  $W = \{W_0, \dots, W_{n+m}\}$  formado por  $n + m + 1$  abiertos tal que  $(f' \circ f)|_{W_k} \simeq (g' \circ f)|_{W_k} \simeq (g' \circ g)|_{W_k}$  para todo  $k = 0, \dots, n + m$ . Por tanto, concluimos que  $D(f' \circ f, g' \circ g) \leq n + m = D(f, g) + D(f', g')$ .  $\square$

## 2.6. Productos

Haciendo uso del Lema 2.23, demostramos un resultado relacionando la distancia homotópica con los productos.

**Teorema 2.28.** *Sean  $f, g: X \rightarrow Y$ ,  $f', g': X' \rightarrow Y'$  aplicaciones continuas tales que  $X \times X'$  es un espacio normal. Entonces se cumple que*

$$D(f \times f', g \times g') \leq D(f, g) + D(f', g').$$

*Demostración.* Para un abierto  $W \subseteq X \times X'$  consideremos las siguientes propiedades:

- “A”: Existe una homotopía  $(f \times \text{id}_{X'})|_W \simeq (g \times \text{id}_{X'})|_W$ .
- “B”: Existe una homotopía  $(\text{id}_X \times f')|_W \simeq (\text{id}_X \times g')|_W$ .

Estas propiedades son heredadas por subconjuntos abiertos y uniones disjuntas.

Sean  $D(f, g) = n$ ,  $D(f', g') = m$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  y  $\{V_0, \dots, V_m\}$  recubrimientos de  $X$  y  $X'$  por  $n + 1$  y  $m + 1$  abiertos tales que  $f|_{U_i} \simeq g|_{U_i}$  para todo  $i = 0, \dots, n$  y  $f'|_{V_j} \simeq g'|_{V_j}$  para todo  $j = 0, \dots, m$ . Entonces los recubrimientos  $U = \{U_0 \times X', \dots, U_n \times X'\}$  y  $V = \{X \times V_0, \dots, X \times V_m\}$  satisfacen las propiedades “A” y “B”, respectivamente. Por el Lema 2.23, existe un recubrimiento  $W = \{W_0, \dots, W_{n+m}\}$  formado por  $n + m + 1$  abiertos que satisfacen ambas propiedades:  $H: (f \times \text{id}_{X'})|_{W_k} \simeq (g \times \text{id}_{X'})|_{W_k}$  y  $H': (\text{id}_X \times f')|_{W_k} \simeq (\text{id}_X \times g')|_{W_k}$  para todo  $k = 0, \dots, n + m$ .

Sean  $\pi_Y: Y \times Y' \rightarrow Y$ ,  $\pi_{Y'}: Y \times Y' \rightarrow Y'$ ,  $\pi_X: X \times X' \rightarrow X$  y  $\pi_{X'}: X \times X' \rightarrow X'$  las proyecciones. Entonces la homotopía  $H'' = (\pi_Y \circ H, \pi_{Y'} \circ H')$  cumple que

$$H''_0(z) = (\pi_Y \circ H_0(z), \pi_{Y'} \circ H'_0(z)) = (f \circ \pi_X(z), f' \circ \pi_{X'}(z)) = (f \times f')(z)$$

y, análogamente,  $H''_1(z) = (g \times g')(z)$ . Por tanto, concluimos que  $D(f \times f', g \times g') \leq n + m = D(f, g) + D(f', g')$ .  $\square$

**Corolario 2.29.** *Supongamos que  $X \times Y$  es normal. Entonces se cumple que:*

1.  $\text{cat}(X \times Y) \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(Y)$ .
2.  $\text{TC}(X \times Y) \leq \text{TC}(X) + \text{TC}(Y)$ .

*Demostración.* Aplicando el Teorema 2.28 vemos que

$$\begin{aligned} \text{cat}(X \times Y) &= D(\text{id}_{X \times Y}, \text{cte}) = D((\text{id}_X \times \text{id}_Y), (\text{cte}' \times \text{cte}'')) \\ &\leq D(\text{id}_X, \text{cte}') + D(\text{id}_Y, \text{cte}'') = \text{cat}(X) + \text{cat}(Y). \end{aligned}$$

Por otra parte, si consideramos las proyecciones

$$\pi_1, \pi_2: (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow X \times Y, \quad \pi_1^X, \pi_2^X: X \times X \longrightarrow X, \quad \pi_1^Y, \pi_2^Y: Y \times Y \longrightarrow Y,$$

como  $(X \times Y) \times (X \times Y) \simeq (X \times X) \times (Y \times Y)$ , podemos escribir  $\pi_1 = (\pi_1^X \times \pi_1^Y)$  y  $\pi_2 = (\pi_2^X \times \pi_2^Y)$  y usar el Teorema 2.28 para ver que

$$\begin{aligned} \text{TC}(X \times Y) &= D(\pi_1, \pi_2) = D((\pi_1^X \times \pi_1^Y), (\pi_2^X \times \pi_2^Y)) \\ &\leq D(\pi_1^X, \pi_2^X) + D(\pi_1^Y, \pi_2^Y) = \text{TC}(X) + \text{TC}(Y). \end{aligned} \quad \square$$

## 2.7. $H$ -espacios

En esta sección introducimos una condición bajo la cual podemos acotar superiormente la distancia homotópica por la categoría LS del codominio: cuando este es un  $H$ -espacio.

**Definición 2.30.** Un  $H$ -espacio es un espacio topológico punteado  $(G, e)$  equipado con una operación continua  $\mu: G \times G \rightarrow G$ , llamada multiplicación, tal que las aplicaciones

$$\begin{array}{ll} G \longrightarrow G & G \longrightarrow G \\ x \longmapsto \mu(x, e), & x \longmapsto \mu(e, x), \end{array}$$

son homótopas a la identidad  $\text{id}_G: G \rightarrow G$ .

La multiplicación no tiene por qué ser ni conmutativa ni asociativa. Un  $H$ -espacio también cuenta con una operación de división  $\delta: G \times G \rightarrow G$ , satisfaciendo la condición  $\mu \circ (\pi_1, \delta) \simeq \pi_2$ .

**Ejemplo 2.31.** 1. Sea  $X$  un espacio topológico. El espacio de lazos  $\Omega X$  es un  $H$ -espacio con la operación  $\mu: \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$  dada por la concatenación de caminos

$$\mu(\alpha, \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \leq 1/2, \\ \beta(2t - 1), & t \geq 1/2. \end{cases}$$

2. La esfera  $\mathbb{S}^n$  admite una estructura de  $H$ -espacio si  $n = 0, 1, 3, 7$ . En este caso, la estructura se obtiene al identificarla como subespacio de una de las cuatro álgebras de división normadas (los números reales  $\mathbb{R}$ , los complejos  $\mathbb{C}$ , los cuaternios  $\mathbb{H}$  y los octonios  $\mathbb{O}$ ) y tomando la operación inducida por el producto del álgebra.
3. Un grupo de Lie es un  $H$ -espacio con la multiplicación de grupo. Más en general, cualquier grupo topológico es un  $H$ -espacio.



4. Todo espacio topológico punteado con el tipo de homotopía de un  $H$ -espacio admite una estructura de  $H$ -espacio (dada por la equivalencia de homotopía).

**Teorema 2.32.** *Sea  $G$  un  $H$ -espacio conexo por caminos y sean  $f, g: G \times G \rightarrow G$  dos aplicaciones continuas. Entonces se cumple que  $D(f, g) \leq \text{cat}(G)$ .*

*Demostración.* Sea  $\text{cat}(G) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $G$  por  $n + 1$  abiertos categóricos. Si denotamos  $V_j = (\delta \circ (f, g))^{-1}(U_j)$ , y consideramos la inclusión  $i_{V_j}: V_j \hookrightarrow G \times G$ , como se cumple que

$$\pi_2 \circ (f, g) \circ i_{V_j} \simeq \mu \circ (\pi_1, \delta) \circ (f, g) \circ i_{V_j},$$

podemos escribir

$$g|_{V_j} \simeq \mu \circ (f|_{V_j}, \delta \circ (f, g) \circ i_{V_j}).$$

Además,  $\delta \circ (f, g) \circ i_{V_j}$  factoriza a través de la inclusión  $i_{U_j}: U_j \hookrightarrow G$ , que es homótopa a una constante  $\text{cte}: G \rightarrow G$ . Como  $G$  es conexo por caminos, podemos suponer que la aplicación constante toma el valor del punto base  $e \in G$ . Por lo tanto,  $g|_{V_j} \simeq \mu \circ (f|_{V_j}, \text{cte}) \simeq f|_{V_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . En consecuencia,  $D(f, g) \leq n = \text{cat}(G)$ .  $\square$

**Corolario 2.33.** *Sea  $G$  un  $H$ -espacio conexo por caminos. Entonces se cumple que*

$$\text{TC}(G) = \text{cat}(G).$$

*Demostración.* La desigualdad  $\text{TC}(G) \leq \text{cat}(G)$  se sigue de aplicar el Teorema 2.32 a las proyecciones  $\pi_1, \pi_2: G \times G \rightarrow G$ . La otra desigualdad fue demostrada en el Corolario 2.12.  $\square$

*Observación 2.34.* El Corolario 2.33 no solo nos da la igualdad  $\text{TC}(G) = \text{cat}(G)$ . Si seguimos los pasos de la demostración del Teorema 2.32, a partir de un recubrimiento de  $G$  por abiertos categóricos, podemos obtener explícitamente un recubrimiento de  $G \times G$  formado por el mismo número de abiertos de Farber.

## 2.8. CW-complejos

Una de las consecuencias más importantes del Teorema 2.6 es que nos permite aplicar la teoría desarrollada en [18], donde se estudia el género de Sârc para espacios con el tipo de homotopía de un CW-complejo, o, equivalentemente, espacios con el tipo de homotopía de un ANR (*absolute neighborhood retract*) [16, Teorema 5.2.1]. Esta clase de espacios es particularmente amplia y efectiva para los objetivos de la topología algebraica [31].

Más en concreto, si se considera una fibración  $p: E \rightarrow B$  donde tanto  $E$  como  $B$  son ANRs, los recubrimientos empleados en el cálculo del género de Sârc pueden estar formados por subconjuntos cerrados o incluso por subconjuntos que no sean ni abiertos ni cerrados [18, Teorema 2.7]. Esta es la situación de la distancia homotópica cuando  $X$  e  $Y$  son ANRs. En tal caso, el espacio de caminos  $PY$  también es un ANR [22, Capítulo VI,

Teorema 3.1] y, al considerar el pullback correspondiente, se obtiene un ANR [19, Proposición 5.9]. Por tanto, en adelante restringimos nuestro análisis a esta clase de espacios.

A partir de estas consideraciones, en esta sección desarrollamos algunos resultados propios en el contexto de los CW-complejos, los cuales introducimos brevemente siguiendo [21]. Dado que estamos trabajando con invariantes homotópicos, dichos resultados se cumplen también para cualquier espacio con el tipo de homotopía de un CW-complejo.

**Definición 2.35.** Un CW-complejo es un espacio topológico de la forma  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  donde cada  $X_n$  es un  $n$ -esqueleto:

- El 0-esqueleto  $X_0$  es un conjunto discreto de puntos.
- Para cada  $n \geq 1$ , el  $n$ -esqueleto  $X_n$  se obtiene pegando al  $(n-1)$ -esqueleto  $X_{n-1}$  una familia de  $n$ -discos  $(\mathbb{D}_j^n)_{j \in J}$ , donde cada disco  $\mathbb{D}_j^n$  se pega a  $X_{n-1}$  a lo largo de su borde  $\partial \mathbb{D}_j^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$  mediante una aplicación de adjunción  $\varphi_j: \partial \mathbb{D}_j^n \rightarrow X_{n-1}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{j \in J} \mathbb{S}_j^{n-1} & \hookrightarrow & \bigsqcup_{j \in J} \mathbb{D}_j^n \\
 \downarrow \sqcup \varphi_j & & \downarrow \sqcup \\
 X_{n-1} & \longrightarrow & X_n
 \end{array}$$

Un subconjunto  $U \subseteq X$  es abierto si y solo si  $U \cap X_n$  es abierto para todo  $n \geq 0$ . Llamamos  $n$ -celda  $e_j^n$  a cada uno de los discos  $\mathbb{D}_j^n \subseteq X$ . Si existe un entero  $n \geq 0$  tal que todas las celdas tienen dimensión menor o igual a  $n$ , entonces decimos que  $X$  tiene dimensión  $n$ . En otro caso, decimos que  $X$  tiene dimensión infinita. Si  $X$  está formado por un número finito de celdas, decimos que  $X$  es un CW-complejo finito. En particular, un CW-complejo finito tiene dimensión finita. Decimos que  $X$  es un CW-complejo regular si las aplicaciones de adjunción son homeomorfismos.

- Ejemplo 2.36.**
1. Un CW-complejo de dimensión 1 es lo mismo que un grafo no dirigido: los vértices forman el 0-esqueleto y las aristas son las celdas de dimensión uno.
  2. Podemos construir la esfera  $\mathbb{S}^n$  con una celda  $e^0$  en dimensión cero y una celda  $e^n$  en dimensión  $n$ . La aplicación de adjunción colapsa el borde  $\varphi: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow e^0$ . También es posible construir  $\mathbb{S}^n$  con dos celdas en cada dimensión, interpretadas como hemisferios que se unen a lo largo del ecuador. Esto muestra que la construcción de un espacio topológico como CW-complejo no es única.
  3. Sea  $\mathbb{F}$  el cuerpo de los reales  $\mathbb{R}$ , complejos  $\mathbb{C}$  o cuaternios  $\mathbb{H}$ . Entonces podemos representar el espacio proyectivo  $\mathbb{F}P^n$  como un CW-complejo con celdas en dimensión  $0, k, 2k, \dots, nk$  con  $k = 1, 2, 4$  dependiendo si  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ . Esta descomposición coincide con la usual:  $\mathbb{F}P^n = \mathbb{F}^n \sqcup \mathbb{F}^{n+1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{F} \sqcup \{*\}$ . Por ejemplo, para el plano proyectivo real  $\mathbb{R}P^2$ , la 1-celda se corresponde con la recta del infinito.

4. Las variedades diferenciables compactas admiten una realización como CW-complejos finitos (ver Ejemplo 4.8).

**Proposición 2.37.** *El producto de CW-complejos  $X \times Y$  admite una estructura de CW-complejo en el que las celdas se corresponden con productos de celdas  $e_i \times e_j$ , con  $e_i$  recorriendo las celdas de  $X$  y  $e_j$  recorriendo las celdas de  $Y$ .*

**Definición 2.38.** Un subcomplejo de  $X$  es un subespacio cerrado  $Y \subseteq X$  que puede expresarse como unión de celdas de  $X$ .

**Proposición 2.39.** *Si  $Y$  es un subcomplejo de  $X$  entonces hereda la estructura de CW-complejo de  $X$  con la topología relativa. Además, el cociente  $X/Y$  admite una estructura de CW-complejo en el que las celdas de  $Y$  se colapsan a una celda de dimensión cero.*

**Definición 2.40.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios. Llamamos *join* de  $X$  e  $Y$ ,  $X * Y$ , al espacio cociente de  $X \times Y \times [0, 1]$  por las relaciones  $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$  y  $(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$ . Es decir, colapsamos el subespacio  $X \times Y \times \{0\}$  a  $X$  y el subespacio  $X \times Y \times \{1\}$  a  $Y$ .

*Observación 2.41.* Si  $X$  e  $Y$  son CW-complejos, entonces existe una estructura natural de CW-complejo en  $X * Y$  que tiene a  $X$  e  $Y$  como subcomplejos. El resto de celdas se corresponden con las del producto  $X \times Y \times (0, 1)$ .

**Ejemplo 2.42.** 1. Si  $Y$  está formado por un único punto, entonces  $X * Y$  es el cono sobre  $X$ , que denotamos por  $CX$ . El cono sobre cualquier espacio es contráctil, lo cual puede comprobarse mediante una homotopía que lo contrae al punto  $X \times \{*\} \times \{1\}$ . En particular,  $\text{cat}(CX) = \text{TC}(CX) = 0$  y  $D(f, g) = 0$  para cualesquiera dos aplicaciones  $f$  y  $g$  definidas sobre  $CX$ .

2. Si  $Y$  está formado por dos puntos, entonces  $X * Y$  es la suspensión de  $X$ , que denotamos por  $\Sigma X$ . También podemos interpretar  $\Sigma X$  como el espacio obtenido al pegar dos copias del cono  $CX$  por sus bases. Esto puede verse ilustrado en la Figura 2.1. En este caso, se cumple que  $\text{cat}(\Sigma X) \leq 1$ , ya que las copias del cono recubren la suspensión y son contráctiles.

**Definición 2.43.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Llamamos cono sobre  $f$ ,  $C_f$ , al espacio obtenido al pegar  $Y$  a  $CX$  por la relación  $(x, 0) \sim f(x)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 X & \hookrightarrow & CX \\
 \downarrow f & & \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & C_f
 \end{array}$$

**Ejemplo 2.44.** La adjunción de una celda  $e^n$  en la construcción de un CW-complejo es el cono sobre la aplicación de adjunción  $\varphi: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$ .

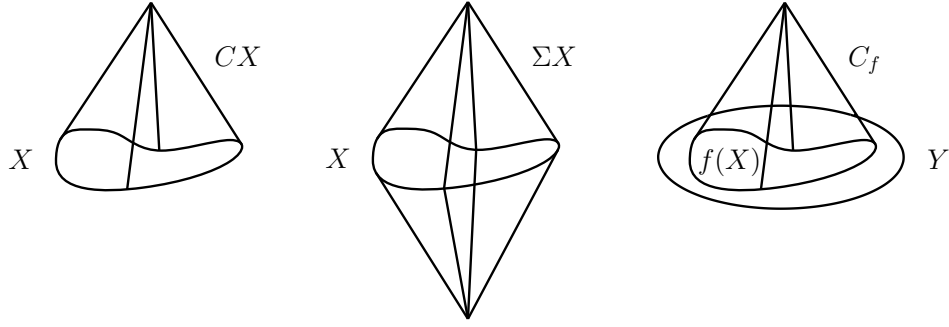


Figura 2.1: A la izquierda, el cono  $CX$  de  $X$ . En el centro, su suspensión  $\Sigma X$ . A la derecha, el cono  $C_f$  sobre  $f: X \rightarrow Y$

**Lema 2.45** ([29, Proposición 3.11]). *La distancia homotópica es subaditiva. Es decir, dado un recubrimiento  $\{U_0, \dots, U_k\}$  de  $X$  y dos aplicaciones continuas  $f, g: X \rightarrow Y$ , se cumple que*

$$D(f, g) + 1 \leq \sum_{l=0}^k (D(f|_{U_l}, g|_{U_l}) + 1).$$

*Demostración.* Lo demostramos para un recubrimiento formado por dos conjuntos  $\{V, W\}$ . El caso general se sigue por recurrencia. Supongamos que  $D(f|_V, g|_V) = n$  y  $D(f|_W, g|_W) = m$  y sean  $\{V_0, \dots, V_n\}$  y  $\{W_0, \dots, W_m\}$  recubrimientos de  $V$  y  $W$  formados por  $n+1$  y  $m+1$  subconjuntos tales que  $f|_{V_i} \simeq g|_{V_i}$  y  $f|_{W_j} \simeq g|_{W_j}$  para todo  $i = 0, \dots, n$  y  $j = 0, \dots, m$ . Entonces  $\{V_0, \dots, V_n, W_0, \dots, W_m\}$  es un recubrimiento de  $V \cup W = X$  formado por  $n+m+2$  subconjuntos en los cuales las restricciones de  $f$  y  $g$  son homótopas. Por tanto,

$$D(f, g) \leq n + m + 1 = D(f|_V, g|_V) + D(f|_W, g|_W) + 1. \quad \square$$

**Teorema 2.46.** *Sea  $C_f$  el cono sobre  $f: X \rightarrow Y$  y sean  $g, g': C_f \rightarrow Z$  dos aplicaciones continuas. Entonces se cumple que*

$$D(g, g') \leq D(g|_Y, g'|_Y) + 1.$$

*Demostración.* Sea  $\pi: (Y \sqcup CX) \rightarrow C_f$  la aplicación cociente. El resultado se sigue de aplicar el Lema 2.45 al recubrimiento  $\{\pi(Y), \pi(CX \setminus \{X \times \{0\}\})\}$  de  $C_f$ , teniendo en cuenta que  $\pi(Y) \simeq Y$  y que  $\pi(CX \setminus \{X \times \{0\}\})$  puede contraerse al vértice del cono.  $\square$

**Definición 2.47.** Sea  $f_i: X_i \rightarrow Y$  una familia de aplicaciones continuas. Llamamos familia de conos sobre las aplicaciones  $f_i$ ,  $C_{\sqcup f_i}$ , al espacio obtenido al pegar  $Y$  a  $\sqcup_i CX_i$  por las relaciones  $(x, 0) \sim f_i(x)$ .

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_i X_i & \hookrightarrow & \bigsqcup_i CX_i \\ \downarrow \sqcup f_i & & \downarrow \sqcup \\ Y & \longrightarrow & C_{\sqcup f_i} \end{array}$$

**Ejemplo 2.48.** La construcción del  $n$ -esqueleto de un CW-complejo es la familia de conos sobre las aplicaciones de adjunción  $\varphi_j: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$

**Teorema 2.49.** Sea  $C_{\sqcup f_i}$  la familia de conos sobre  $f_i: X_i \rightarrow Y$  y sean  $g, g': C_{\sqcup f_i} \rightarrow Z$  dos aplicaciones continuas. Entonces se cumple que

$$D(g, g') \leq D(g|_Y, g'|_Y) + 1.$$

*Demostración.* La demostración es análoga a la del Teorema 2.46, salvo que ahora en vez de  $\pi(CX \setminus \{X \times \{0\}\})$ , consideramos el subconjunto  $\sqcup_i \pi(CX_i \setminus \{X_i \times \{0\}\})$ .  $\square$

**Teorema 2.50.** Sea  $X$  un CW-complejo finito conexo por caminos y sean  $f, g: X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas. Entonces se cumple que

$$D(f, g) \leq \dim(X).$$

*Demostración.* Procedemos por inducción en la dimensión de  $X$ . Para  $n = 0$ ,  $X$  consiste en un único punto, por lo que la desigualdad se satisface de manera trivial. Supongamos que el resultado es cierto para todo CW-complejo de dimensión  $n - 1$ . Sea  $X$  un CW-complejo de dimensión  $n$ . Podemos considerar  $X$  como la familia de conos sobre las aplicaciones de adjunción del  $n$ -esqueleto. Aplicando el Teorema 2.49 obtenemos la desigualdad deseada.  $\square$

**Corolario 2.51.** Sea  $X$  un CW-complejo finito conexo por caminos. Entonces se cumple que:

1.  $\text{cat}(X) \leq \dim(X)$ .
2.  $\text{TC}(X) \leq 2 \cdot \dim(X)$ .

Además, el resultado del Teorema 2.50 puede ser refinado, ya que no se considera el caso en que ciertos  $k$ -esqueletos no contienen celdas.

**Teorema 2.52.** Sea  $X$  un CW-complejo finito conexo por caminos. La distancia homotópica entre dos aplicaciones definidas sobre  $X$  es estrictamente menor que el número de dimensiones en las que  $X$  tiene celdas.

*Demostración.* Si la dimensión de  $X$  es cero, la desigualdad se satisface de manera trivial. Sea  $X$  un CW-complejo de dimensión  $n \geq 1$ . En la construcción inductiva de los  $k$ -esqueletos, para  $k = 1, \dots, n$ , puede suceder uno de los dos siguientes casos en cada etapa:

1. Si no se añade ninguna celda, la distancia homotópica permanece invariante.
2. Si se añaden celdas, por el Teorema 2.49, la distancia homotópica de dos aplicaciones definidas sobre  $X_k$  aumenta como máximo en uno con respecto a la de aplicaciones definidas sobre  $X_{k-1}$ .  $\square$

**Corolario 2.53.** Sea  $X$  un CW-complejo finito conexo por caminos.

- 
1. *La categoría  $LS$  de  $X$  es estrictamente menor que el número de dimensiones en las que  $X$  tiene celdas.*
  2. *La complejidad topológica de  $X$  es estrictamente menor que el número de dimensiones en las que  $X \times X$  tiene celdas.*



# Capítulo 3

## Métodos algebraicos

En este capítulo abordamos el estudio de los invariantes homotópicos mediante herramientas algebraicas. Más concretamente, introducimos dos nuevos invariantes originales que acotan inferiormente la distancia homotópica. El primero es la distancia homotópica débil, formulada en términos de los grupos de homotopía de los espacios involucrados. El segundo es la distancia cohomológica, basada en la cohomología singular. Ilustramos su comportamiento mediante numerosos ejemplos representativos y estudiamos sus propiedades fundamentales.

Además, presentamos resultados originales referentes a la longitud cup y demostramos que nuestro invariante cohomológico mejora las cotas previamente establecidas en la literatura, lo cual constituye una de las principales contribuciones originales de este trabajo. Como caso particular, recuperamos la categoría cohomológica introducida en [33]. Finalmente, consideramos una versión homológica, que relacionamos con un invariante definido por Fox [15], y estudiamos su relación con la distancia cohomológica previamente introducida.

Para desarrollar estos temas nos apoyamos en herramientas y resultados clásicos de topología algebraica, cuya exposición detallada y demostraciones pueden consultarse en [21, 38].

### 3.1. Distancia homotópica débil

Con el objetivo de introducir la noción original de distancia homotópica débil, comenzamos fijando notación, recordando brevemente los grupos de homotopía y enunciando algunas propiedades que necesitamos posteriormente. Sean  $(X, x_0)$  y  $(Y, y_0)$  espacios topológicos con punto base fijado y  $[X, Y] = [(X, x_0), (Y, y_0)]$  el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas  $f: X \rightarrow Y$  tales que  $f(x_0) = y_0$ . Para  $n \geq 1$ , el  $n$ -ésimo grupo de homotopía de  $X$  en  $x_0$  es:

$$\pi_n(X, x_0) := [(\mathbb{S}^n, *), (X, x_0)].$$

Aunque el conjunto  $[X, Y]$  no tiene, en general, estructura de grupo, la adquiere si  $X$  es una suspensión o  $Y$  es un espacio de lazos. En el caso de los grupos de homotopía, la



estructura de grupo se hereda del hecho de que  $\mathbb{S}^n$  es la suspensión de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Cuando  $n = 1$ , recuperamos la definición del grupo fundamental. Si  $x'_0 \in X$  está en la misma componente conexa de  $X$  que  $x_0$ , entonces  $\pi_n(X, x'_0) \cong \pi_n(X, x_0)$ . Si  $X$  es conexo por caminos, lo denotamos por  $\pi_n(X)$ .

Una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  induce homomorfismos en los grupos de homotopía  $f_*: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  mediante  $f_*([\varphi]) = [f \circ \varphi]$ . Si  $g: X \rightarrow Y$  es homótopa a  $f$ , entonces  $f_* = g_*$ . Además, se cumple que  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_n(X)}$  y  $(f \circ f')_* = f_* \circ f'_*$ . En particular, si  $f: X \rightarrow Y$  es una equivalencia de homotopía, entonces  $f_*: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  es un isomorfismo para todo  $n \geq 1$ .

**Proposición 3.1.** *Sea  $p: E \rightarrow B$  una fibración de fibra  $F$  con  $B$  conexo por caminos. Entonces existe una sucesión exacta larga en los grupos de homotopía:*

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(B) \longrightarrow \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \longrightarrow \cdots$$

**Corolario 3.2.** *Si  $p: \widetilde{X} \rightarrow X$  es una aplicación de revestimiento, entonces  $p_*: \pi_n(\widetilde{X}) \rightarrow \pi_n(X)$  es un isomorfismo para todo  $n \geq 2$ .*

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos conexos por caminos y  $f, g: X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas.

**Definición 3.3.** La distancia homotópica débil entre  $f$  y  $g$ ,  $\pi D(f, g)$ , es el menor entero  $n \geq 0$  tal que existe un recubrimiento  $\{U_0, \dots, U_n\}$  de  $X$  por  $n + 1$  abiertos cumpliendo que  $(f|_{U_j})_* = (g|_{U_j})_*: \pi_m(U_j) \rightarrow \pi_m(Y)$  para todo  $m \geq 1$  y para todo  $j = 0, \dots, n$ . Si tal  $n$  no existe, escribimos  $\pi D(f, g) = \infty$ .

*Observación 3.4.* Puede suceder que  $\pi D(f, g) = 0$  pero  $f$  y  $g$  no sean homótopas. Esto puede verse ilustrado en los Ejemplos 3.22 y 3.25.

**Teorema 3.5.** *Se cumple que  $\pi D(f, g) \leq D(f, g)$ .*

*Demostración.* Sea  $D(f, g) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $X$  por  $n + 1$  abiertos tal que  $f|_{U_j} \simeq g|_{U_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Como aplicaciones homótopas inducen el mismo homomorfismo en los grupos de homotopía, se tiene que  $(f|_{U_j})_* = (g|_{U_j})_*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Así, concluimos que  $\pi D(f, g) \leq n = D(f, g)$ .  $\square$

*Observación 3.6.* La distancia homotópica débil cumple todas las propiedades que probamos para la distancia cohomológica en la Sección 3.4, por lo que omitimos aquí sus demostraciones.

**Ejemplo 3.7.** Sea  $\mathbb{CP}^1$  la recta proyectiva compleja. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} p: \mathbb{S}^3 &\longrightarrow \mathbb{CP}^1 \\ (x_0, x_1, x_2, x_3) &\longmapsto [x_0 + ix_1 : x_2 + ix_3], \end{aligned}$$

donde  $[z_0 : z_1]$  son las coordenadas homogéneas. Como  $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ , induce una aplicación a la que también denotamos por  $p: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Esta es conocida como la fibración de Hopf y define un fibrado trivialmente local sobre  $\mathbb{S}^2$  de fibra  $\mathbb{S}^1$  [37, Teorema 11.53]. Consideremos la sucesión exacta larga en homotopía asociada a esta fibración dada por la Proposición 3.1:

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(\mathbb{S}^2) \longrightarrow \pi_n(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_n(\mathbb{S}^3) \xrightarrow{p_*} \pi_n(\mathbb{S}^2) \longrightarrow \cdots$$

Como el revestimiento universal de  $\mathbb{S}^1$  es  $\mathbb{R}$ , aplicando el Corolario 3.2, obtenemos que  $\pi_n(\mathbb{S}^1) \cong \pi_n(\mathbb{R}) = 0$  para todo  $n \geq 2$ . Por lo tanto,  $p_*: \pi_n(\mathbb{S}^3) \rightarrow \pi_n(\mathbb{S}^2)$  es un isomorfismo para todo  $n \geq 2$ . En particular, se tiene un isomorfismo  $\pi_3(\mathbb{S}^2) \cong \pi_3(\mathbb{S}^3) \cong \mathbb{Z}$  [21, Corolario 4.25]. Sea  $\text{cte}: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  una aplicación constante. Entonces  $\pi D(p, \text{cte}) > 0$ . Por otra parte, como  $\text{cat}(\mathbb{S}^3) = 1$ , concluimos que  $\pi D(p, \text{cte}) = D(p, \text{cte}) = 1$ .

## 3.2. (Co)homología singular

Sea  $(R, +, \cdot)$  un anillo unitario conmutativo. Cuando decimos  $R$ -módulo nos referimos a un  $R$ -módulo por la izquierda.

**Definición 3.8.** Llamamos  $n$ -símplice estándar a

$$\Delta^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tales que } \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0, \text{ para todo } i = 0, \dots, n\}.$$

**Definición 3.9.** Un  $n$ -símplice singular en  $X$  es una aplicación  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  continua.

**Definición 3.10.** Llamamos  $R$ -módulo de  $n$ -cadenas singulares de  $X$ ,  $C_n(X; R)$ , al  $R$ -módulo generado por los  $n$ -símplices singulares en  $X$ . Los elementos de  $C_n(X; R)$ , las  $n$ -cadenas, son sumas formales de  $n$ -símplices singulares con coeficientes en  $R$ .

**Definición 3.11.** Llamamos operador borde al homomorfismo de  $R$ -módulos dado por

$$\begin{aligned} \partial_n: C_n(X; R) &\longrightarrow C_{n-1}(X; R) \\ \sigma &\longmapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]} \end{aligned}$$

**Lema 3.12.** Se cumple que  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ . Es decir,  $(C(X; R), \partial)$  es un complejo de cadenas, llamado el complejo singular de  $X$ .

**Definición 3.13.** Llamamos  $n$ -ciclos a los elementos de  $Z_n(X; R) := \ker \partial_n$ . A los elementos de  $B_n(X; R) := \text{im } \partial_{n+1}$  les llamamos  $n$ -bordes. El  $n$ -ésimo  $R$ -módulo de homología de  $X$  es

$$H_n(X; R) := \frac{Z_n(X; R)}{B_n(X; R)}.$$

**Ejemplo 3.14.** Sea  $X = \{*\}$  el espacio formado por un único punto. En este caso solo existe un  $n$ -símplice singular  $\sigma_n$  en  $X$ . Se tiene que

$$\partial\sigma_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1}$$

está formado por  $n+1$  términos, que se anulan si  $n$  es impar y toman el valor  $\sigma_{n-1}$  si  $n$  es par. El complejo singular de  $X$  es

$$\cdots \xrightarrow{\cong} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{\cong} R \xrightarrow{0} R \longrightarrow 0,$$

por lo que

$$H_n(X; R) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}} = \begin{cases} R/0 \cong R & \text{si } n = 0, \\ R/R \cong 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0/0 = 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Definición 3.15.** Llamamos  $R$ -módulos de  $n$ -cocadenas singulares de  $X$  a

$$C^n(X; R) := \operatorname{Hom}(C_n(X; R), R).$$

El operador coborde es el homomorfismo dual del operador borde

$$\delta^n: C^n(X; R) \rightarrow C^{n+1}(X; R),$$

por lo que  $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ . Denotamos a su núcleo por  $Z^n(X; R)$ , los  $R$ -módulos de  $n$ -cociclos; y a su imagen por  $B^n(X; R)$ , los  $R$ -módulos de  $n$ -cobordes. Llamamos  $n$ -ésimo  $R$ -módulo de cohomología de  $X$  a

$$H^n(X; R) := \frac{Z^n(X; R)}{B^n(X; R)}.$$

Una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  induce homomorfismos en todos los  $R$ -módulos de (co)homología

$$f_*: H_n(X; R) \rightarrow H_n(Y; R), \quad f^*: H^n(Y; R) \rightarrow H^n(X; R).$$

**Teorema 3.16.** *Aplicaciones homótopas inducen el mismo homomorfismo en todos los  $R$ -módulos de (co)homología.*

**Corolario 3.17.** *Una equivalencia de homotopía induce isomorfismos en los  $R$ -módulos de (co)-homología. Es decir, espacios homotópicamente equivalentes tienen  $R$ -módulos de (co)homología isomorfos.*

### 3.3. Distancia cohomológica

En esta sección, siguiendo la filosofía del Teorema 3.16 y de la categoría homológica introducida en [15], presentamos una nueva cota inferior original para la distancia homotópica, construida a partir la cohomología de un espacio. Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos conexos por caminos y  $f, g: X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas. Sea  $(R, +, \cdot)$  un anillo unitario conmutativo.

**Definición 3.18.** La distancia cohomológica entre  $f$  y  $g$  con coeficientes en un anillo  $R$ ,  $H^\bullet D(f, g; R)$ , es el menor entero  $n \geq 0$  tal que existe un recubrimiento  $\{U_0, \dots, U_n\}$  de  $X$  por  $n + 1$  abiertos cumpliendo que  $(f|_{U_j})^* = (g|_{U_j})^*: H^m(Y; R) \rightarrow H^m(U_j; R)$  para todo  $m \geq 0$  y para todo  $j = 0, \dots, n$ . Si tal  $n$  no existe, escribimos  $H^\bullet D(f, g; R) = \infty$ .

*Observación 3.19.* La distancia cohomológica, al igual que la distancia homotópica y la distancia homotópica débil, es constante sobre las clases de homotopía. Es decir, si  $f \simeq f'$  y  $g \simeq g'$ , entonces se cumple que  $H^\bullet D(f, g; R) = H^\bullet D(f', g'; R)$ .

Para la categoría LS, se tiene la categoría cohomológica

$$H^\bullet \text{cat}(X; R) = H^\bullet D(\text{cte}, \text{id}_X; R) = H^\bullet D(i_1, i_2; R),$$

introducida en [33], mientras que para la complejidad topológica, la llamamos complejidad cohomológica

$$H^\bullet \text{TC}(X; R) = H^\bullet D(\pi_1, \pi_2; R).$$

Nótese que distintas elecciones de anillo pueden dar lugar a diferentes valores de distancia cohomológica. Esto puede verse ilustrado en el Ejemplo 3.24.

**Teorema 3.20.** *Se cumple que  $H^\bullet D(f, g; R) \leq D(f, g)$ .*

*Demostración.* Sea  $D(f, g) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $X$  por  $n + 1$  abiertos tal que  $f|_{U_j} \simeq g|_{U_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Por el Teorema 3.16, aplicaciones homótopas inducen el mismo homomorfismo en cohomología. Así,  $(f|_{U_j})^* = (g|_{U_j})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ , por lo que  $H^\bullet D(f, g; R) \leq n = D(f, g)$ .  $\square$

**Ejemplo 3.21.** Consideremos de nuevo la fibración de Hopf  $p: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . En el Ejemplo 3.7 comprobamos que  $\pi D(p, \text{cte}) = D(p, \text{cte}) = 1$ , donde  $\text{cte}: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación constante cualquiera. Los  $R$ -módulos de cohomología de la esfera  $\mathbb{S}^n$  vienen dados por

$$H^m(\mathbb{S}^n; R) = \begin{cases} R, & \text{si } n = 0 \text{ o } n = m, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto, o bien  $H^i(\mathbb{S}^2; R) \cong 0$ , o bien  $H^i(\mathbb{S}^3; R) \cong 0$  para  $i = 1, 2, 3$ . Así, todas las aplicaciones continuas entre ambos espacios inducen el mismo homomorfismo en cohomología. En particular,  $H^\bullet D(p, \text{cte}; R) = 0$ . Esto muestra que la desigualdad del Teorema 3.20 puede ser estricta. Además, vemos que, en general,  $\pi D(f, g) \not\leq H^\bullet D(f, g; R)$ .

**Ejemplo 3.22.** Sea  $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  el toro realizado como CW-complejo con la estructura dada por la Proposición 2.37. Consideremos la aplicación que colapsa el 1-esqueleto a un punto

$$\pi: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \frac{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1}{\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1} \cong \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2.$$

Teniendo en cuenta que los grupos de homotopía preservan productos [21, Proposición 4.2] y aplicando el Corolario 3.2, vemos que

$$\pi_n(T) = \pi_n(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \pi_n(\mathbb{S}^1) \times \pi_n(\mathbb{S}^1) \cong \pi_n(\mathbb{R}) \times \pi_n(\mathbb{R}) \cong 0$$

para todo  $n \geq 2$ . Como  $\pi_1(\mathbb{S}^2) \cong 0$ , se cumple que  $\pi D(\pi, \text{cte}) = 0$ . Por otra parte,  $\pi$  envía la 2-celda de  $T$  a la 2-celda de  $\mathbb{S}^2$ . En cohomología en dimensión 2, induce un isomorfismo

$$\begin{aligned} \pi^*: H^2(\mathbb{S}^2) &\longrightarrow H^2(T) \\ [\alpha] &\longmapsto \pi^*[\alpha] = [\beta], \end{aligned}$$

donde  $[\alpha]$  y  $[\beta]$  denotan las clases fundamentales de la esfera y del toro, respectivamente. Así, se cumple que  $H^\bullet D(\pi, \text{cte}; \mathbb{Z}) > 0$ . Esto también muestra que  $H^\bullet D(f, g; R) \not\leq \pi D(f, g)$ .

**Ejemplo 3.23.** Consideremos ahora los mismos espacios del Ejemplo 3.22, pero estudiando aplicaciones en sentido contrario: sea  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  una aplicación continua cualquiera. Como  $\mathbb{S}^2$  es simplemente conexo,  $f$  admite un levantamiento al revestimiento universal de  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  [21, Proposición 1.33], que es  $\mathbb{R}^2$ . Como este es contráctil, dicho levantamiento  $\tilde{f}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es nulhomótopo. Al proyectar la homotopía, obtenemos que  $p \circ \tilde{f} = f$  es nulhomótopa y concluimos que  $D(f, g) = 0$  para cualesquiera aplicaciones  $f, g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

**Ejemplo 3.24.** Consideremos el producto  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$  y el grupo de rotaciones  $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ . Sea

$$f: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\gamma} \text{SO}(3, \mathbb{R})$$

la composición de la proyección en el primer factor  $\pi_1: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  con la aplicación  $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \text{SO}(3, \mathbb{R})$  que asigna a cada elemento  $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$  la rotación de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $z$ . Otra manera de definir  $\gamma$  es identificar  $\text{SO}(3, \mathbb{R})$  con  $\mathbb{RP}^3$  [7, Proposición 5.67], en cuyo caso  $\gamma$  es la inclusión del 1-esqueleto  $\gamma: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^3$ .

La aplicación  $f^*: H^3(\text{SO}(3, \mathbb{R}); R) \rightarrow H^3(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2; R)$  es la trivial, pues factoriza a través de  $H^3(\mathbb{S}^1; R) \cong 0$ . En particular,  $f$  es una aplicación de grado 0. Si tomamos  $R = \mathbb{Z}$ , entonces  $H^1(\text{SO}(3, \mathbb{R}); \mathbb{Z}) \cong 0$ , por lo que  $f^*: H^i(\text{SO}(3, \mathbb{R}); \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2; \mathbb{Z})$  es la aplicación cero para  $i > 0$ . Sin embargo, para el caso  $R = \mathbb{Z}_2$ , la aplicación  $f^*: H^1(\text{SO}(3, \mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2; \mathbb{Z}_2)$  es la identidad  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . A nivel de grupos de homotopía,  $f_*: \pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) \rightarrow \pi_1(\text{SO}(3, \mathbb{R}))$  es la proyección canónica  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . Sea  $\text{cte}: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \text{SO}(3, \mathbb{R})$  una aplicación constante. Como  $\text{cat}(\mathbb{S}^1) = 1$ , tenemos que  $D(f, \text{cte}) \leq 1$ . En resumen, hemos demostrado que  $H^\bullet D(f, \text{cte}; \mathbb{Z}) = 0$ , mientras que

$$H^\bullet D(f, \text{cte}; \mathbb{Z}_2) = \pi D(f, \text{cte}) = D(f, \text{cte}) = 1.$$

**Ejemplo 3.25.** Sea  $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  el 3-toro realizado como CW-complejo con la estructura dada por la Proposición 2.37. Consideremos la aplicación que colapsa el 2-esqueleto  $T_2$  a un punto

$$\pi: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \frac{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1}{T_2} \cong \mathbb{S}^3.$$

Sea  $p: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  la fibración de Hopf. Como vimos en el Ejemplo 3.21,  $p$  es trivial en cohomología, es decir,  $(p \circ \pi)^* = \text{cte}^*$ , y por tanto  $H^\bullet D(p \circ \pi, \text{cte}; R) = 0$ . Por otra parte, razonando igual que en el Ejemplo 3.22,  $\pi_n(T) \cong 0$  para todo  $n \geq 2$  y  $\pi_1(\mathbb{S}^3) \cong 0$ , por lo que  $\pi D(p \circ \pi, \text{cte}) = 0$ . No obstante,  $D(p \circ \pi, \text{cte}) > 0$ . En efecto, supongamos que  $H: p \circ \pi \simeq \text{cte}$  es una homotopía. Entonces, como  $p$  es una fibración, existe un levantamiento

$$\begin{array}{ccc} T \times \{0\} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{S}^3 \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ T \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & \mathbb{S}^2 \end{array}$$

de manera que  $p \circ \tilde{H}(x, 0) = H(x, 0) = p \circ \pi(x)$  y  $p \circ \tilde{H}(x, 1) = H(x, 1) = \text{cte}$ . Supongamos que la aplicación constante toma el valor  $x_0 \in \mathbb{S}^2$ . En ese caso, la imagen de  $\tilde{H}(x, 1)$  queda contenida en  $p^{-1}(x_0) \cong \mathbb{S}^1$ , por lo que  $\tilde{H}$  define una homotopía entre  $\pi$  y otra aplicación que solo toma valores en  $p^{-1}(x_0)$ . Esta nueva aplicación induce en cohomología el homomorfismo nulo en dimensión 3, pues  $H^3(\mathbb{S}^1; R) \cong 0$ .

Sin embargo,  $\pi$  lleva la 3-celda de  $T$  en la 3-celda de  $\mathbb{S}^3$ . En cohomología en dimensión 3, induce un isomorfismo

$$\pi^*: H^3(\mathbb{S}^3; \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(T; \mathbb{Z}),$$

lo cual lleva a una contradicción, pues aplicaciones homótopas inducen el mismo homomorfismo en cohomología. Por otra parte, tenemos que  $D(p \circ \pi, \text{cte}) \leq D(p, \text{cte}') = 1$ , siendo  $\text{cte}': \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  una aplicación constante. Por tanto, concluimos que  $D(p \circ \pi, \text{cte}) = 1$ .

Los grupos homotopía y la (co)homología de un espacio son herramientas fundamentales en topología algebraica para estudiar y clasificar espacios. Sin embargo, como muestra el Ejemplo 3.25, estos métodos presentan limitaciones inherentes que impiden capturar todos los matices de la topología. Esto nos recuerda que, al traducir problemas topológicos a cuestiones algebraicas, perdemos información sobre ciertos aspectos más sutiles de los espacios.

## 3.4. Propiedades

Dedicamos este apartado a presentar algunos resultados sobre la distancia cohomológica análogos a los expuestos para la distancia homotópica. Más en concreto, estudiamos

su comportamiento respecto a la composición de aplicaciones. A partir de esto, deducimos algunas desigualdades relacionándola con la categoría y la complejidad cohomológica. También mostramos que es un invariante en el mismo sentido que la distancia homotópica. Por último, damos un resultado relativo a  $H$ -espacios.

**Proposición 3.26.** *Se cumple que  $H^\bullet D(f, g; R) \leq H^\bullet \text{cat}(X; R)$ .*

*Demostración.* Sea  $H^\bullet \text{cat}(X; R) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $X$  por  $n + 1$  abiertos tal que  $\text{cte}^* = (\text{id}_{X|U_j})^* = i^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ , donde  $i: U_j \hookrightarrow X$  es la inclusión. En cohomología en dimensión cero, bajo la hipótesis de conexidad por caminos, todas las aplicaciones inducen el mismo homomorfismo, por lo que  $(f|_{U_j})^* = (g|_{U_j})^*$  en este caso. Para dimensiones superiores,  $\text{cte}^*$  es la aplicación cero: podemos factorizarla como  $\text{cte}: U_j \rightarrow \{*\} \hookrightarrow Y$  y, siguiendo un razonamiento análogo al Ejemplo 3.14, ver que  $H^i(\{*\}; R) \cong 0$  para todo  $i > 0$ . Entonces podemos escribir

$$(f|_{U_j})^* = (f \circ i)^* = i^* \circ f^* = \text{cte}^* \circ f^* = 0 \circ f^* = 0.$$

Del mismo modo,  $(g|_{U_j})^* = 0$ . Por tanto,  $H^\bullet D(f, g; R) \leq n = H^\bullet \text{cat}(X; R)$ .  $\square$

**Proposición 3.27.** *Sea  $h: Y \rightarrow Z$  una aplicación continua. Entonces se cumple que*

$$H^\bullet D(h \circ f, h \circ g; R) \leq H^\bullet D(f, g; R).$$

*Si, además,  $h$  admite una inversa homotópica por la izquierda, entonces se cumple la igualdad.*

*Demostración.* Sea  $H^\bullet D(f, g; R) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $X$  por  $n + 1$  abiertos tal que  $(f|_{U_j})^* = (g|_{U_j})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Como

$$((h \circ f)|_{U_j})^* = (h \circ f|_{U_j})^* = (f|_{U_j})^* \circ h^* = (g|_{U_j})^* \circ h^* = (h \circ g|_{U_j})^* = ((h \circ g)|_{U_j})^*$$

para todo  $j = 0, \dots, n$ , se tiene que  $H^\bullet D(h \circ f, h \circ g; R) \leq n = H^\bullet D(f, g; R)$ .

Supongamos ahora que  $h': Z \rightarrow Y$  es una inversa homotópica por la izquierda de  $h$ , es decir,  $h' \circ h \simeq \text{id}_Y$ . Por tanto, tenemos que  $h' \circ h \circ f \simeq f$  y  $h' \circ h \circ g \simeq g$ . En vista de la Observación 3.19 y la primera parte de esta Proposición, concluimos que

$$H^\bullet D(f, g; R) \geq H^\bullet D(h \circ f, h \circ g; R) \geq H^\bullet D(h' \circ h \circ f, h' \circ h \circ g; R) = H^\bullet D(f, g; R). \quad \square$$

**Proposición 3.28.** *Sea  $h: Z \rightarrow X$  una aplicación continua. Entonces se cumple que*

$$H^\bullet D(f \circ h, g \circ h; R) \leq H^\bullet D(f, g; R).$$

*Si, además,  $h$  admite una inversa homotópica por la derecha, entonces se cumple la igualdad.*

*Demostración.* Sea  $H^\bullet D(f, g; R) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $X$  por  $n + 1$  abiertos tal que  $(f|_{U_j})^* = (g|_{U_j})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Si denotamos por  $V_j := h^{-1}(U_j) \subseteq Z$ , podemos factorizar  $(h|_{V_j})^*: H^*(X; R) \rightarrow H^*(V_j; R)$  como la composición  $(i_j \circ \tilde{h}|_{V_j})^*: H^*(X; R) \rightarrow H^*(U_j; R) \rightarrow H^*(V_j; R)$ . Así, como

$$((f \circ h)|_{V_j})^* = (h|_{V_j})^* \circ f^* = (\tilde{h}|_{V_j})^* \circ (f|_{U_j})^* = (\tilde{h}|_{V_j})^* \circ (g|_{U_j})^* = (h|_{V_j})^* \circ g^* = ((g \circ h)|_{V_j})^*,$$

se tiene que  $H^\bullet D(f \circ h, g \circ h; R) \leq n = H^\bullet D(f, g; R)$ .

Supongamos ahora que  $h': X \rightarrow Z$  es una inversa homotópica por la derecha de  $h$ , es decir,  $h \circ h' \simeq \text{id}_X$ . Por tanto, tenemos que  $f \circ h \circ h' \simeq f$  y  $g \circ h \circ h' \simeq g$ . En vista de la Observación 3.19 y la primera parte de esta Proposición, concluimos que

$$H^\bullet D(f, g; R) \geq H^\bullet D(f \circ h, g \circ h; R) \geq H^\bullet D(f \circ h \circ h', g \circ h \circ h'; R) = H^\bullet D(f, g; R). \quad \square$$

**Corolario 3.29.** *Se cumple que  $H^\bullet \text{cat}(X; R) \leq H^\bullet \text{TC}(X; R) \leq H^\bullet \text{cat}(X \times X; R)$ .*

*Demostración.* Consideremos la inclusión  $i_2: X \rightarrow X \times X$  que, para un cierto  $x_0 \in X$  fijado, lleva cada punto  $x$  a  $i_2(x) = (x_0, x)$ . Así, usando la Proposición 3.28, podemos escribir

$$H^\bullet \text{cat}(X; R) = H^\bullet D(\text{cte}, \text{id}_X; R) = H^\bullet D(\pi_1 \circ i_2, \pi_2 \circ i_2; R) \leq H^\bullet D(\pi_1, \pi_2; R) = H^\bullet \text{TC}(X; R).$$

La otra desigualdad se sigue de aplicar la Proposición 3.26 a las proyecciones  $\pi_1, \pi_2: X \times X \rightarrow X$ ,

$$H^\bullet \text{TC}(X; R) = H^\bullet D(\pi_1, \pi_2; R) \leq H^\bullet \text{cat}(X \times X; R). \quad \square$$

**Corolario 3.30.** *Se cumple que  $H^\bullet D(f, g; R) \leq H^\bullet \text{TC}(Y; R)$ .*

*Demostración.* Considerando la aplicación  $(f \times g): X \times X \rightarrow Y \times Y$  y usando la Proposición 3.28 vemos que

$$H^\bullet D(f, g; R) = H^\bullet D(\pi_1 \circ (f \times g), \pi_2 \circ (f \times g); R) \leq H^\bullet D(\pi_1, \pi_2; R) = H^\bullet \text{TC}(X; R). \quad \square$$

**Teorema 3.31.** *Sean  $f, g: X \rightarrow Y$ ,  $f', g': X' \rightarrow Y'$  aplicaciones continuas. Sean  $r: X' \rightarrow X$  y  $s: Y \rightarrow Y'$  equivalencias de homotopía tales que  $s \circ f \circ r \simeq f'$  y  $s \circ g \circ r \simeq g'$ . Entonces se cumple que  $H^\bullet D(f, g; R) = H^\bullet D(f', g'; R)$ .*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightleftharpoons[g']{f'} & Y' \\ \downarrow r & & \uparrow s \\ X & \xrightleftharpoons[g]{f} & Y \end{array}$$

*Demostración.* En vista de la Observación 3.19 y las Proposiciones 3.27 y 3.28 tenemos que

$$H^\bullet D(f, g; R) = H^\bullet D(f \circ r, g \circ r; R) = H^\bullet D(s \circ f \circ r, s \circ g \circ r; R) = H^\bullet D(f', g'; R) \quad \square$$



**Corolario 3.32.** *La categoría cohomológica y la complejidad cohomológica son invariantes del tipo de homotopía. Es decir, si  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes, entonces se cumple que  $H^\bullet \text{cat}(X; R) = H^\bullet \text{cat}(Y; R)$  y  $H^\bullet \text{TC}(X; R) = H^\bullet \text{TC}(Y; R)$ .*

**Teorema 3.33.** *Sea  $G$  un  $H$ -espacio conexo por caminos y sean  $f, g: G \times G \rightarrow G$  dos aplicaciones continuas. Entonces se cumple que  $H^\bullet D(f, g; R) \leq H^\bullet \text{cat}(G; R)$ .*

*Demostración.* Sea  $H^\bullet \text{cat}(G; R) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $G$  por  $n+1$  abiertos tal que  $(i_{U_j})^* = \text{cte}^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Recordemos que, como  $G$  es un  $H$ -espacio, existen una multiplicación  $\mu: G \times G \rightarrow G$  y una división  $\mu: G \times G \rightarrow G$  cumpliendo que  $\mu \circ (\pi_1, \delta) \simeq \pi_2$ . En particular, tenemos que  $(\mu \circ (\pi_1, \delta))^* = \pi_2^*$ . Por lo tanto, si denotamos  $V_j = (\delta \circ (f, g))^{-1}(U_j)$ , y consideramos la inclusión  $i_{V_j}: V_j \hookrightarrow G \times G$ , podemos escribir

$$(\pi_2 \circ (f, g) \circ i_{V_j})^* = (\mu \circ (\pi_1, \delta) \circ (f, g) \circ i_{V_j})^*,$$

de manera que

$$(g|_{V_j})^* = (\mu \circ (f|_{V_j}, \delta \circ (f, g) \circ i_{V_j}))^*.$$

Además,  $\delta \circ (f, g) \circ i_{V_j}$  factoriza a través de la inclusión  $i_{U_j}: U_j \hookrightarrow G$ , que induce la misma aplicación en cohomología que una aplicación constante  $\text{cte}: G \rightarrow G$ . Como  $G$  es conexo por caminos, podemos suponer que la aplicación constante toma el valor del punto base  $e \in G$ . Así,  $(g|_{V_j})^* = (\mu \circ (f|_{V_j}, \text{cte}))^* = (f|_{V_j})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . En consecuencia,  $H^\bullet D(f, g; R) \leq n = H^\bullet \text{cat}(G; R)$ .  $\square$

**Corolario 3.34.** *Sea  $G$  un  $H$ -espacio conexo por caminos. Entonces se cumple que*

$$H^\bullet \text{TC}(G; R) = H^\bullet \text{cat}(G; R).$$

*Demostración.* La desigualdad  $H^\bullet \text{TC}(G; R) \leq H^\bullet \text{cat}(G; R)$  se sigue de aplicar el Teorema 3.33 a las proyecciones  $\pi_1, \pi_2: G \times G \rightarrow G$ . La otra desigualdad fue demostrada en el Corolario 3.29.  $\square$

*Observación 3.35.* Al igual que sucedía en la Observación 2.34, el Corolario 3.34 no solo nos da la igualdad  $H^\bullet \text{TC}(G; R) = H^\bullet \text{cat}(G; R)$ . Si seguimos los pasos de la demostración del Teorema 3.33, a partir de un recubrimiento de  $G$  por abiertos tales que las inclusiones inducen la misma aplicación en cohomología que una aplicación constante, podemos obtener explícitamente un recubrimiento de  $G \times G$  formado por el mismo número de abiertos en los cuales las proyecciones inducen la misma aplicación en cohomología.

## 3.5. Producto cup

La ventaja de la cohomología frente a la homología es que existe un producto, llamado producto cup, que dota a la suma directa de los  $R$ -módulos de cohomología de estructura de  $R$ -álgebra graduada. En particular, esta estructura es un invariante más fino que los  $R$ -módulos de (co)homología, como puede apreciarse en el Ejemplo 3.39.

**Definición 3.36.** Dadas dos cocadenas  $\varphi \in C^n(X; R)$  y  $\psi \in C^m(X; R)$ , definimos su producto cup como la cocadena  $\varphi \smile \psi \in C^{n+m}(X; R)$  dada por

$$\varphi \smile \psi(\sigma) := \varphi(\sigma|_{[e_0, \dots, e_n]}) \cdot \psi(\sigma|_{[e_n, \dots, e_{n+m}]})$$

**Proposición 3.37.** Se cumple que  $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^n \varphi \smile \delta\psi$ .

Como consecuencia de la Proposición 3.37, el producto cup de dos cociclos es un cociclo, el de dos cobordes es un coborde y el de un coborde y un cociclo es un coborde. Por tanto, el producto cup induce una aplicación  $R$ -bilineal, asociativa y distributiva en los  $R$ -módulos de cohomología

$$\smile: H^n(X; R) \times H^m(X; R) \rightarrow H^{n+m}(X; R).$$

En general, dados dos abiertos  $U, V \subseteq X$ , se tiene un producto cup relativo [38, Capítulo 5, Sección 6]

$$\smile: H^n(X, U; R) \times H^m(X, V; R) \rightarrow H^{n+m}(X, U \cup V; R).$$

**Teorema 3.38.**  $H^*(X; R) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X; R)$  es una  $R$ -álgebra graduada con el producto cup:

1.  $(H^*(X; R), +, \smile)$  es un anillo y un  $R$ -módulo donde los escalares conmutan con todo.
2.  $H^n(X; R) \smile H^m(X; R) \subseteq H^{n+m}(X; R)$ .
3. Los elementos  $\varphi$  de  $H^n(X; R)$  se dice que tienen grado  $n$  y lo denotamos por  $|\varphi| = n$ .

Además, el producto en  $H^*(X; R) \otimes H^*(X; R)$  dado por

$$(\varphi_1 \otimes \psi_1) \cdot (\varphi_2 \otimes \psi_2) = (-1)^{|\psi_1||\varphi_2|} \varphi_1 \smile \varphi_2 \otimes \psi_1 \smile \psi_2$$

induce una estructura de anillo. Así,  $H^*(X; R) \otimes H^*(X; R)$  también adquiere una estructura de  $R$ -álgebra graduada para la cual

$$\smile: H^*(X, U; R) \otimes H^*(X, V; R) \rightarrow H^*(X, U \cup V; R)$$

es un homomorfismo de  $R$ -álgebras.

**Ejemplo 3.39.** Consideremos el toro  $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  y la unión punteada de una esfera y dos circunferencias  $S = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ . Denotando por  $X$  cualquiera de los dos espacios tenemos que

$$H^0(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H^1(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H^2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Es decir,  $H^*(T; \mathbb{Z})$  y  $H^*(S; \mathbb{Z})$  son isomorfos como grupos abelianos. Sin embargo, mientras que el producto cup de los generadores de  $H^1(S)$  es cero, el producto cup de los generadores de  $H^1(T)$  es un generador de  $H^2(T)$ . En consecuencia,  $H^*(T; \mathbb{Z})$  y  $H^*(S; \mathbb{Z})$  no son isomorfos como anillos, por lo que  $T$  y  $S$  no tienen el mismo tipo de homotopía.

### 3.6. Longitud cup

Uno de los enfoques más comunes para obtener cotas inferiores de los invariantes homotópicos consiste en considerar productos en las álgebras de cohomología. Un ejemplo clásico de esta estrategia se encuentra en el estudio de la categoría LS, para la cual se tiene la siguiente cota:

**Definición 3.40.** La longitud cup con coeficientes en un anillo  $R$  de  $X$ , l.c.p.  $(X; R)$ , es el menor entero  $n$  tal que cualquier producto  $x_0 \smile \cdots \smile x_n$  de  $n+1$  elementos de  $H^{>0}(X; R)$  es cero.

Por otra parte, para la complejidad topológica, existe una variante relacionada:

**Definición 3.41.** La longitud cup con coeficientes en un anillo  $R$  de los divisores de cero de  $X$ , l.c.p.  $(\ker \smile; R)$ , es el menor entero  $n$  tal que cualquier producto  $x_0 \cdots x_n$  de  $n+1$  elementos del núcleo del producto cup

$$\smile: H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \rightarrow H^*(X; R)$$

es cero.

Una cuestión que surge al considerar estas cotas es si, al igual que sucede con los invariantes homotópicos a los que están asociadas, existe alguna relación de desigualdad entre ellas. El siguiente resultado original proporciona una respuesta afirmativa a esta pregunta.

**Teorema 3.42.** *Se cumple que  $\text{l.c.p.}(X; R) \leq \text{l.c.p.}(\ker \smile; R)$ .*

*Demostración.* Nótese que si  $x$  es un elemento no nulo de  $H^*(X; R)$ , entonces  $(x \otimes 1 - 1 \otimes x) \in H^*(X; R) \otimes H^*(X; R)$  está en el núcleo del producto cup pues

$$\smile (x \otimes 1 - 1 \otimes x) = x \smile 1 - 1 \smile x = x - x = 0.$$

Supongamos que  $\text{l.c.p.}(X; R) = n$  y  $x_1 \smile \cdots \smile x_n$  es un producto no nulo de elementos de  $H^{>0}(X; R)$ . El producto

$$\prod_{i=1}^n (x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i)$$

es una suma de  $2^n$  tensores elementales indexados por subconjuntos  $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ :

$$\sum_{S \subseteq \{1, \dots, n\}} (\pm) \left( \smile_{i \in S} x_i \right) \otimes \left( \smile_{j \notin S} x_j \right).$$

Cada sumando está en una componente bigraduada  $(p, q)$  de  $H^*(X; R) \otimes H^*(X; R)$  diferente, con  $p+q = \sum_i |x_i|$ . El sumando correspondiente a  $S = \{1, \dots, n\}$  es  $(x_1 \smile \cdots \smile x_n) \otimes 1$ , que es distinto de cero por hipótesis. Por lo tanto, el producto  $\prod_{i=1}^n (x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i)$  no se anula y concluimos que  $\text{l.c.p.}(\ker \smile; R) \geq n = \text{l.c.p.}(X; R)$ .  $\square$

Reinterpretemos ahora la Definición 3.41. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & PX \\ & \searrow \Delta & \downarrow \pi \\ & & X \times X \end{array}$$

donde  $\Delta$  es la aplicación diagonal,  $\pi$  es la fibración de caminos y  $\varphi$  es la aplicación que a cada punto  $x$  de  $X$  le asigna el camino constante igual a  $x$ . Se cumple que  $\varphi$  es una equivalencia de homotopía, cuya inversa homotópica es la fibración  $\pi': PX \rightarrow X$  que a cada camino  $\gamma \in PX$  le asigna su punto inicial  $\pi'(\gamma) = \gamma(0)$ . En efecto,  $\pi' \circ \varphi = \text{id}_X$  y  $\varphi \circ \pi' = \text{cte} \simeq \text{id}_{PX}$  mediante la homotopía  $H: PX \times [0, 1] \rightarrow PX$  dada por  $H(\gamma, s)(t) = \gamma(s \cdot t)$ .

Además, si  $R$  es un cuerpo, gracias a la Fórmula de Künneth [38, Capítulo 5, Sección 3]

$$H^*(X \times X; R) \cong H^*(X; R) \otimes H^*(X; R),$$

y a que la aplicación diagonal induce el producto cup en cohomología [21, p. 279], se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^*(X; R) & \xleftarrow[\varphi^*]{\cong} & H^*(PX; R) \\ \uparrow \smile & \swarrow \Delta^* & \uparrow \pi^* \\ H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) & \xrightarrow{\cong} & H^*(X \times X; R) \end{array}$$

donde las flechas horizontales son isomorfismos. Por tanto, se cumple que

$$\ker \pi^* = \ker \Delta^* \cong \ker \smile.$$

Siguiendo esta misma línea, que relaciona el producto cup y la estructura de cohomología de un espacio, en [28, Sección 5] se propone una cota inferior para la distancia homotópica.

**Definición 3.43.** Sea  $\mathcal{J}(f, g; R) \subset H^*(X; R)$  la imagen de  $f^* - g^*: H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X; R)$ . Denotamos por l.c.p.  $\mathcal{J}(f, g; R)$  al menor entero  $n$  tal que cualquier producto  $x_0 \smile \cdots \smile x_n$  de  $n + 1$  elementos de  $\mathcal{J}(f, g; R)$  es cero.

A continuación, mostramos cómo la distancia cohomológica mejora la cota inferior para la distancia homotópica dada por l.c.p.  $\mathcal{J}(f, g; R)$ .

**Teorema 3.44.** *Se cumple que  $\text{l.c.p. } \mathcal{J}(f, g; R) \leq H^\bullet D(f, g; R)$ .*

*Demostración.* Sea  $H^\bullet D(f, g; R) = n$  y  $\{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $X$  por  $n+1$  abiertos tal que  $(f|_{U_j})^* = (g|_{U_j})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Consideremos un producto arbitrario  $x_0 \smile \dots \smile x_n$  de  $n+1$  elementos con  $x_k \in \mathcal{J}(f, g; R)$  para todo  $k = 0, \dots, n$ . Para cada abierto  $U = U_k$  del recubrimiento consideremos la sucesión exacta larga en cohomología del par  $(X, U)$  [21, p. 117]:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^m(X, U; R) & \xrightarrow{j_U} & H^m(X; R) & \xrightarrow{i^*} & H^m(U; R) \longrightarrow \dots \\ & & & & \uparrow f^* - g^* & \nearrow (f|_U)^* - (g|_U)^* & \\ & & & & H^m(Y; R) & & \end{array}$$

Como  $(f|_U)^* = (g|_U)^*$ , se tiene que  $(f|_U)^* - (g|_U)^* = 0$  y por lo tanto  $\mathcal{J}(f, g; R) \subseteq \ker i^* = \text{im } j_U$ . Así, para cada elemento  $x_k$  del producto  $x_0 \smile \dots \smile x_n$ , existe un elemento  $\tilde{x}_k \in H^*(X, U_k; R)$  tal que  $j_{U_k}(\tilde{x}_k) = x_k$ . Ahora, dados dos abiertos  $U_k$  y  $U_l$  del recubrimiento, tenemos el siguiente diagrama conmutativo [38, p. 251]:

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, U_k; R) \otimes H^*(X, U_l; R) & \xrightarrow{\smile} & H^*(X, U_k \cup U_l; R) \\ \downarrow j_{U_k} \otimes j_{U_l} & & \downarrow j_{U_k \cup U_l} \\ H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) & \xrightarrow{\smile} & H^*(X; R) \end{array}$$

Por recurrencia, también es conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, U_0; R) \otimes \dots \otimes H^*(X, U_n; R) & \xrightarrow{\smile} & H^*(X, \bigcup_{k=0}^n U_k; R) \\ \downarrow j_{U_0} \otimes \dots \otimes j_{U_n} & & \downarrow j_X \\ H^*(X; R) \otimes \dots \otimes H^*(X; R) & \xrightarrow{\smile} & H^*(X; R) \end{array}$$

Como  $H^*(X, \bigcup_{k=0}^n U_k; R) = H^*(X, X; R) = 0$ , concluimos que

$$x_0 \smile \dots \smile x_n = j_{U_0}(\tilde{x}_0) \smile \dots \smile j_{U_n}(\tilde{x}_n) = j_X(\tilde{x}_0 \smile \dots \smile \tilde{x}_n) = j_X(0) = 0,$$

y por lo tanto  $\text{l.c.p. } \mathcal{J}(f, g; R) \leq n = H^\bullet D(f, g; R)$ . □

**Corolario 3.45.** *Se cumple que  $\text{l.c.p. } \mathcal{J}(f, g) \leq D(f, g)$ .*

En el caso de la categoría LS, se tiene que

$$\mathcal{J}(\text{id}_X, \text{cte}; R) = \text{im}(\text{id}_X^* - \text{cte}^*) = H^*(X; R).$$

Así,  $\text{l.c.p. } \mathcal{J}(\text{id}_X, \text{cte}; R)$  coincide con la longitud cup,  $\text{l.c.p. } H^*(X; R) = \text{l.c.p. } (X; R)$ . De esta manera, la categoría cohomológica mejora la cota inferior de la longitud cup:

$$\text{l.c.p. } (X; R) \leq H^\bullet \text{cat}(X; R) \leq \text{cat}(X).$$

En general,  $\mathcal{J}(f, g; R)$  no tiene por qué ser un subanillo de  $H^*(X; R)$ . Por ejemplo, para la complejidad topológica sabemos que

$$\mathcal{J}(\pi_1, \pi_2; R) = \text{im}(\pi_1^* - \pi_2^*) \subseteq H^*(X \times X; R),$$

donde  $\pi_1, \pi_2: X \times X \rightarrow X$  son las proyecciones. Haciendo uso nuevamente de la Fórmula de Künneth (suponemos que  $R$  es un cuerpo), vemos que las aplicaciones inducidas en cohomología son

$$\begin{aligned} \pi_1^*: H^*(X; R) &\longrightarrow H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) & \pi_2^*: H^*(X; R) &\longrightarrow H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \\ x &\longmapsto x \otimes 1, & x &\longmapsto 1 \otimes x. \end{aligned}$$

Si  $z$  es un elemento de  $\mathcal{J}(\pi_1, \pi_2; R)$ , entonces es de la forma  $z = x \otimes 1 - 1 \otimes x$  para algún  $x \in H^*(X; R)$ . Ya vimos en la demostración del Teorema 3.42 que, en este caso,  $z \in \ker \smile$ . Por otra parte, si  $z = \sum_i a_i \otimes b_i \in \ker \smile$ , entonces  $\sum_i a_i \smile b_i = 0$ . Podemos reescribir cada término como

$$a_i \otimes b_i = a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) + (a_i \smile b_i) \otimes 1,$$

de modo que al hacer la suma obtenemos

$$\begin{aligned} z &= \sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) + (a_i \smile b_i) \otimes 1 \\ &= \sum_i (a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)) + \left( \sum_i (a_i \smile b_i) \right) \otimes 1 \\ &= \sum_i a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) \in \langle \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2) \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\langle \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2) \rangle = \ker \smile$ . Sin embargo, para ver que la cota del producto cup de la distancia homotópica aplicada a la complejidad topológica coincide con la longitud cup de los divisores de cero, necesitamos del siguiente resultado propio más general.

**Teorema 3.46.** *Si existen  $x_1, \dots, x_n \in \langle \mathcal{J}(f, g; R) \rangle$  tales que  $x_1 \smile \dots \smile x_n$  es distinto de cero, entonces se cumple que l.c.p.  $\mathcal{J}(f, g; R) \geq n$ .*

*Demostración.* Podemos escribir cada  $x_i \in \langle \mathcal{J}(f, g; R) \rangle$  como una suma finita

$$x_i = \sum_{k_i} (\alpha_{k_i} \smile (f^*(y_{k_i}) - g^*(y_{k_i}))), \quad y_{k_i} \in H^*(Y; R), \quad \alpha_{k_i} \in H^*(X; R).$$

Ahora, teniendo en cuenta que el producto cup es distributivo, podemos escribir

$$\begin{aligned} x_i \smile x_j &= \left( \sum_{k_i} (\alpha_{k_i} \smile (f^*(y_{k_i}) - g^*(y_{k_i}))) \right) \smile \left( \sum_{k_j} (\alpha_{k_j} \smile (f^*(y_{k_j}) - g^*(y_{k_j}))) \right) \\ &= \sum_{k_i, k_j} ((\alpha_{k_i} \smile \alpha_{k_j}) \smile ((f^*(y_{k_i}) - g^*(y_{k_i})) \smile (f^*(y_{k_j}) - g^*(y_{k_j}))))). \end{aligned}$$

Como el producto

$$x_1 \smile \cdots \smile x_n = \sum_{k_1, \dots, k_n} \left( \left( \bigcup_{i=1}^n \alpha_{k_i} \right) \smile \left( \bigcup_{i=1}^n (f^*(y_{k_i}) - g^*(y_{k_i})) \right) \right)$$

no se anula, existe al menos una tupla  $(k_1, \dots, k_n)$  cuyo término del sumatorio es distinto de cero. En particular, para esa tupla, el producto

$$\bigcup_{i=1}^n (f^*(y_{k_i}) - g^*(y_{k_i})) = (f^*(y_{k_1}) - g^*(y_{k_1})) \smile \cdots \smile (f^*(y_{k_n}) - g^*(y_{k_n}))$$

es distinto de cero, por lo que concluimos que  $\text{l.c.p. } \mathcal{J}(f, g; R) \geq n$ .  $\square$

Al aplicar el resultado del Teorema 3.46 a la complejidad cohomológica, comprobamos que  $\text{l.c.p. } \mathcal{J}(\pi_1, \pi_2; R)$  coincide con  $\text{l.c.p. } (\ker \smile; R)$  y podemos concluir que la complejidad cohomológica mejora la cota inferior de la longitud cup de los divisores de cero:

$$\text{l.c.p. } (\ker \smile; R) \leq H^\bullet \text{TC}(X; R) \leq \text{TC}(X).$$

En resumen, tenemos el siguiente diagrama de desigualdades, que muestra como las cotas cohomológicas inferiores que hemos definido mejoran a las de la longitud cup:

$$\begin{array}{ccccc} D(f, g) & \leq & \text{cat}(X) & \leq & \text{TC}(X) \\ \vee | & & \vee | & & \vee | \\ H^\bullet D(f, g; R) & \leq & H^\bullet \text{cat}(X; R) & \leq & H^\bullet \text{TC}(X; R) \\ \vee | & & \vee | & & \vee | \\ \text{l.c.p. } \mathcal{J}(f, g; R) & \leq & \text{l.c.p. } (X; R) & \leq & \text{l.c.p. } (\ker \smile; R) \end{array}$$

### 3.7. Distancia homológica

En este capítulo hemos introducido una cota cohomológica con el objetivo de establecer una relación con  $\text{l.c.p. } \mathcal{J}(f, g; R)$ . No obstante, también es posible definir de manera similar una variante homológica.

**Definición 3.47.** La distancia homológica entre  $f$  y  $g$  con coeficientes en  $R$ ,  $H^\bullet D(f, g; R)$ , es el menor entero  $n \geq 0$  tal que existe un recubrimiento  $\{U_0, \dots, U_n\}$  de  $X$  por  $n + 1$  abiertos cumpliendo que  $(f|_{U_j})_* = (g|_{U_j})_*: H_m(U_j; R) \rightarrow H_m(Y; R)$  para todo  $m \geq 0$  y para todo  $j = 0, \dots, n$ . Si tal  $n$  no existe, escribimos  $H^\bullet D(f, g; R) = \infty$ .

**Proposición 3.48.** Se cumple que  $H^\bullet D(f, g; R) \leq D(f, g)$ .

*Demostración.* Análoga al Teorema 3.20.  $\square$

Para relacionar la distancia cohomológica con la homológica, introducimos alguna hipótesis adicional. En nuestro caso, queremos hacer uso del Teorema del coeficiente universal para cohomología con coeficientes en un cuerpo.

**Teorema 3.49** ([32, Teorema 53.5]). *Sea  $A$  un complejo de cadenas y  $\mathbb{F}$  un cuerpo. Entonces, para todo  $n \geq 0$ , existe un isomorfismo natural de espacios vectoriales:*

$$\begin{aligned} \text{ev}: H^n(A; \mathbb{F}) &\longrightarrow \text{Hom}(H_n(A; \mathbb{F}), \mathbb{F}) \\ [\varphi] &\longmapsto \text{ev}([\varphi]): H_n(A; \mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F} \\ [c] &\longmapsto \text{ev}([\varphi])([c]) = \langle \varphi, c \rangle \end{aligned}$$

Sea ahora  $X$  un espacio topológico cuya cohomología sea finitamente generada, por ejemplo, un espacio con el tipo de homotopía de un CW-complejo finito [21, p. 140]. Entonces, para todo  $n \geq 0$ , existe un isomorfismo de espacios vectoriales:  $H^n(X; \mathbb{F}) \cong H_n(X; \mathbb{F})$ . Este isomorfismo no es natural: tenemos que fijar una base de  $H_n(X; \mathbb{F})$  y considerar la correspondiente base dual de  $\text{Hom}(H_n(X; \mathbb{F}), \mathbb{F})$ .

**Teorema 3.50.** *Sea  $\mathbb{F}$  un cuerpo. Entonces se cumple que  $H_\bullet D(f, g; \mathbb{F}) = H^\bullet D(f, g; \mathbb{F})$ .*

*Demostración.* Sea  $U \subseteq X$  un subconjunto abierto. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y; \mathbb{F}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{(f|_U)^*} \\ \xrightarrow{(g|_U)^*} \end{array} & H^n(U; \mathbb{F}) \\ \text{ev} \downarrow & & \downarrow \text{ev} \\ \text{Hom}(H_n(Y; \mathbb{F}), \mathbb{F}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{(f|_U)^*{}^\vee} \\ \xrightarrow{(g|_U)^*{}^\vee} \end{array} & \text{Hom}(H_n(U; \mathbb{F}), \mathbb{F}) \\ \text{Hom}(-, \mathbb{F}) \uparrow & & \uparrow \text{Hom}(-, \mathbb{F}) \\ H_n(Y; \mathbb{F}) & \begin{array}{c} \xleftarrow{(f|_U)_*} \\ \xleftarrow{(g|_U)_*} \end{array} & H_n(U; \mathbb{F}) \end{array}$$

Se tiene que  $(f|_U)^* = (g|_U)^*$  si y solo si  $(f|_U)^* - (g|_U)^*$  es la aplicación cero. Esto último es equivalente a que  $\text{ev}((f|_U)^* - (g|_U)^*) = (f|_U)^*{}^\vee - (g|_U)^*{}^\vee$  sea la aplicación cero. Ahora bien, fijadas unas bases  $B$  y  $B'$  de  $H_n(U; \mathbb{F})$  y  $H_n(Y; \mathbb{F})$  y las correspondientes bases duales  $\tilde{B}$  y  $\tilde{B}'$  de  $\text{Hom}(H_n(U; \mathbb{F}), \mathbb{F})$  y  $\text{Hom}(H_n(Y; \mathbb{F}), \mathbb{F})$ , la matriz asociada a  $(f|_U)^*{}^\vee - (g|_U)^*{}^\vee$  en las bases  $\tilde{B}'$  y  $\tilde{B}$  es la traspuesta de la matriz asociada a  $(f|_U)_* - (g|_U)_*$  en las bases  $B$  y  $B'$ . Luego  $(f|_U)_* - (g|_U)_*$  es la aplicación cero si y solo si  $(f|_U)^*{}^\vee - (g|_U)^*{}^\vee$  lo es. Así, concluimos que  $(f|_U)_* = (g|_U)_*$  si y solo si  $(f|_U)^* = (g|_U)^*$ .  $\square$

En general, no existe una desigualdad entre la distancia homológica y la cohomológica, como puede comprobarse en el Ejemplo 3.51. Este mismo ejemplo también muestra que l.c.p.  $\mathcal{J}(f, g; R)$  no es una cota inferior para la distancia homológica.

**Ejemplo 3.51.** Sea  $X = \mathbb{RP}^2$  el plano proyectivo real con la estructura de CW-complejo del Ejemplo 2.36. Se tiene que

$$H_n(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad H^n(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{si } n = 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Consideremos la aplicación que colapsa el 1-esqueleto a un punto

$$\pi: \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \frac{\mathbb{RP}^2}{\mathbb{S}^1} \cong \mathbb{S}^2.$$

Teniendo en cuenta los grupos de homología de la esfera  $\mathbb{S}^2$  (ver Ejemplo 3.21), el homomorfismo inducido en homología  $\pi_*: H_n(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^2; \mathbb{Z})$  es el trivial para  $n > 0$ . Como consecuencia, si  $\text{cte}: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  es una aplicación constante, se obtiene que  $H_\bullet D(\pi, \text{cte}; \mathbb{Z}) = 0$ . Sin embargo, como  $\pi$  envía la 2-celda de  $\mathbb{RP}^2$  en la 2-celda de  $\mathbb{S}^2$ , el homomorfismo inducido en cohomología  $\pi^*: H^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z})$  es la proyección canónica  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . Esto implica que  $H^\bullet D(\pi, \text{cte}; \mathbb{Z}) > 0$ , por lo que, en general,  $H^\bullet D(f, g; R) \not\leq H_\bullet D(f, g; R)$ .

Además, también se cumple que  $\mathcal{J}(\pi, \text{cte}; \mathbb{Z}) = H^*(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z})$ , por lo que

$$\text{l.c.p. } \mathcal{J}(\pi, \text{cte}; \mathbb{Z}) = \text{l.c.p. } (\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) = 1.$$

Esto que evidencia que, en términos generales,  $\text{l.c.p. } \mathcal{J}(f, g; R) \not\leq H_\bullet D(f, g; R)$ .

Dualmente, consideremos la inclusión del 1-esqueleto en  $\mathbb{RP}^2$ ,

$$i: X_1 \cong \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^2.$$

Por un argumento completamente análogo, puede verse que la aplicación inducida en cohomología  $i^*: H^n(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})$  es la trivial para  $n > 0$ , mientras que el homomorfismo inducido en homología  $i_*: H_1(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z})$  es la proyección canónica  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . Esto muestra que, en general,  $H_\bullet D(f, g; R) \not\leq H^\bullet D(f, g; R)$ .

# Capítulo 4

## Métodos combinatorios

En este capítulo desarrollamos un enfoque combinatorio de los invariantes homotópicos, que permite reformular las ideas de los capítulos anteriores en el marco de los complejos simpliciales. Estos son un tipo particular de espacios topológicos contruidos a base de pegar puntos, segmentos, triángulos, tetraedros y análogos de dimensiones superiores. Su estructura combinatoria los hace especialmente adecuados para el tratamiento computacional, lo que facilita la aplicación de técnicas algorítmicas.

Basándose en la noción de contigüidad, se han estudiado versiones simpliciales de la categoría LS [13, 14] y de la complejidad topológica [12]. Siguiendo esta línea de investigación, en [28, Sección 8] también se propone una variante discreta de la distancia homotópica: la distancia simplicial, que generaliza las anteriores y de la cual se da algún resultado en [4]. Con el fin de estudiarla, presentamos primero los aspectos fundamentales de la teoría clásica de complejos simpliciales, haciendo especial énfasis en las aplicaciones contiguas, las subdivisiones, los colapsos fuertes y la (co)homología simplicial. Para ello, seguimos [1, 2, 32, 38] como principales referencias, donde pueden consultarse todas las demostraciones.

A continuación, introducimos una nueva cota inferior original para la distancia simplicial: la distancia cohomológica simplicial, cuyas propiedades son análogas a las de la distancia cohomológica definida en el Capítulo 3. Estudiamos su comportamiento bajo la subdivisión y la realización geométrica y demostramos que satisface una propiedad clave (Teorema 4.62) que no se verifica en el caso de la distancia simplicial y que permite recuperar los invariantes originales. Este resultado nos permite, gracias a un programa propio de cálculo simbólico desarrollado en SageMath, hallar algunos invariantes homotópicos en espacios triangulables de manera totalmente algorítmica. Además, una ventaja de este método de naturaleza combinatoria, es que proporciona de forma explícita los recubrimientos asociados a los invariantes, lo que resulta especialmente útil para implementar soluciones en problemas prácticos reales.

## 4.1. Complejos simpliciales

A continuación, exponemos los complejos simpliciales.

**Definición 4.1.** Sea  $\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$  un conjunto de puntos geoméricamente independiente. Llamamos  $n$ -símplice generado por estos puntos al conjunto

$$\sigma = [v_0, \dots, v_n] := \left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i \text{ tales que } \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}.$$

A los puntos  $v_i$  los llamamos vértices. Decimos que  $n$  es la dimensión del símplice. Llamamos cara de  $\sigma$  a cualquier símplice generado por un subconjunto de  $\{v_0, \dots, v_n\}$ . Una cara propia es cualquier cara distinta de  $\sigma$ .

**Ejemplo 4.2.** Un 0-símplice es un punto. El 1-símplice generado por  $\{v_0, v_1\}$  es el segmento que une  $v_0$  y  $v_1$ . El 2-símplice generado por  $\{v_0, v_1, v_2\}$  es el triángulo que tiene por vértices a  $v_0, v_1$  y  $v_2$ . El 3-símplice generado por  $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$  es el tetraedro que tiene por vértices a  $v_0, v_1, v_2$  y  $v_3$ . Esto puede verse ilustrado en la Figura 4.1.

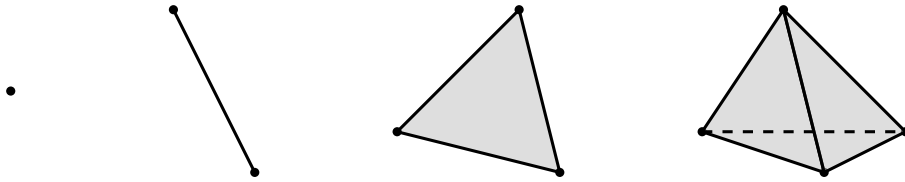


Figura 4.1: Ejemplos de símplices

**Definición 4.3.** Un complejo simplicial (geométrico) finito  $K$  en  $\mathbb{R}^n$  es una colección finita de símplices tales que:

1. Cualquier cara de cualquier símplice de  $K$  es también un símplice de  $K$ .
2. La intersección de dos símplices de  $K$  es, o bien vacía, o bien una cara de ambos símplices.

Si  $L$  es una subcolección de un complejo simplicial  $K$  que contiene todas las caras de sus elementos, entonces decimos que es un subcomplejo de  $K$ . Al subcomplejo formado por todos los símplices de dimensión menor o igual que  $n$  lo llamamos  $n$ -esqueleto de  $K$  y lo denotamos por  $K^{(n)}$ . Al entero  $n$  tal que  $K^{(n-1)} \subsetneq K$  y  $K^{(n)} = K$  le llamamos la dimensión de  $K$ .

**Ejemplo 4.4.** En la Figura 4.2 puede verse un complejo simplicial que tiene como subcomplejos, por ejemplo, el 2-símplice  $[v_0, v_1, v_2]$ , el 1-símplice  $[v_0, v_3]$  o el 3-símplice  $[v_2, v_3, v_4, v_5]$ . Los símplices de la derecha no forman un complejo simplicial.

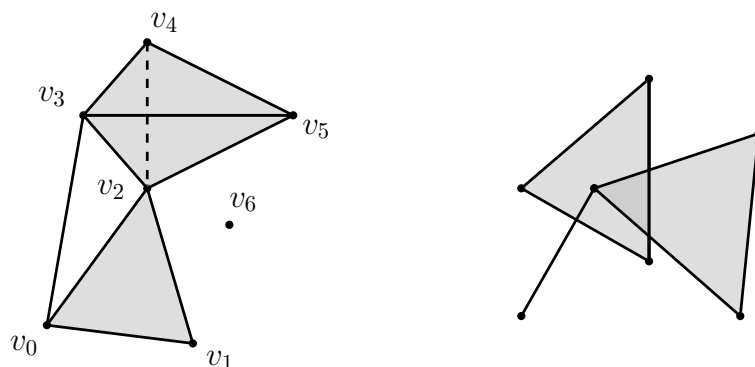


Figura 4.2: Ejemplos de complejo simplicial, subcomplejos y conjunto de símplices que no forman un complejo simplicial

**Definición 4.5.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Al espacio  $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ , con la topología que hereda como subespacio de  $\mathbb{R}^n$ , lo llamamos la realización geométrica de  $K$ .

**Teorema 4.6** ([38, p. 111-113]). *Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Entonces su realización geométrica  $|K|$  es Hausdorff, compacta y normal.*

**Definición 4.7.** Sea  $X$  un espacio topológico. Decimos que  $X$  es triangulable si existe un par  $(K, f)$ , donde  $K$  es un complejo simplicial y  $f: |K| \rightarrow X$  es un homeomorfismo.

**Ejemplo 4.8.** 1. Las variedades diferenciables compactas (con o sin borde) son triangulables [36, Capítulo 5, Sección 3.2].

2. Los CW-complejos regulares son triangulables [16, Teorema 3.4.1].

**Definición 4.9.** Un complejo simplicial abstracto finito es una familia finita de conjuntos  $S$  tal que si  $A$  es un elemento de  $S$ , entonces cualquier subconjunto de  $A$  también pertenece a  $S$ .

A los elementos de un complejo simplicial abstracto finito  $S$  los llamamos símplices. La dimensión de un símplice  $A$  es el cardinal de  $A$  menos 1. Cada subconjunto de un símplice  $A$  decimos que es una cara de  $A$ . La dimensión de  $S$  es el máximo de las dimensiones de sus símplices. A un subconjunto de  $S$  que también es un complejo le llamamos subcomplejo de  $S$ .

**Ejemplo 4.10.** El complejo simplicial abstracto  $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$  puede representarse por un complejo simplicial geométrico formado por tres vértices  $a$ ,  $b$  y  $c$  y dos aristas  $ab$  y  $bc$ :

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\} \longleftrightarrow \begin{array}{c} a \\ \swarrow \quad \searrow \\ b \\ \swarrow \quad \searrow \\ c \end{array}$$

Resulta que todo complejo simplicial abstracto finito  $K$  puede ser representado como un complejo simplicial geométrico finito  $K'$ . Recíprocamente, dado un complejo simplicial geométrico finito  $K'$ , la colección de todos los subconjuntos de vértices que generan símlices de  $K'$  es un complejo simplicial abstracto [32, Teorema 3.1]. En adelante, hablamos de un complejo simplicial finito para referirnos indistintamente a cualquiera de estos dos conceptos. Además, a veces también hacemos un abuso de notación a la hora de describir los complejos simpliciales y damos solo sus caras maximales.

## 4.2. Aplicaciones simpliciales

En esta sección introducimos las aplicaciones simpliciales y la noción de contigüidad.

**Definición 4.11.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales finitos. Una aplicación  $\varphi: K \rightarrow L$  se dice que es una aplicación simplicial si la imagen  $\varphi(\sigma)$  de todo símplex  $\sigma$  de  $K$  es un símplex de  $L$ .

De la propia definición de aplicación simplicial se deduce que la identidad es una aplicación simplicial y que la composición de aplicaciones simpliciales es, de nuevo, una aplicación simplicial. Además, toda aplicación simplicial  $\varphi: K \rightarrow L$  induce una aplicación continua en las realizaciones geométricas  $|\varphi|: |K| \rightarrow |L|$  cumpliendo que

$$x = \sum_{i=0}^n t_i v_i \implies |\varphi|(x) = \sum_{i=0}^n t_i \varphi(v_i).$$

**Definición 4.12.** Dos aplicaciones simpliciales  $\varphi, \psi: K \rightarrow L$  son contiguas,  $\varphi \sim_c \psi$ , si para cada símplex  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  de  $K$  se cumple que  $\varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)$  es un símplex de  $L$ .

**Definición 4.13.** Dos aplicaciones simpliciales  $\varphi, \psi: K \rightarrow L$  están en la misma clase de contigüidad,  $\varphi \sim \psi$ , si existe una familia finita de aplicaciones simpliciales  $\varphi_i: K \rightarrow L$  tales que

$$\varphi = \varphi_0 \sim_c \dots \sim_c \varphi_n = \psi.$$

No es lo mismo estar en la misma clase de contigüidad que ser contiguas, debido a que la relación “ser contiguas” no es una relación de equivalencia: es reflexiva y simétrica, pero no transitiva. Esto puede verse ilustrado en el Ejemplo 4.14. En particular, la relación “estar en la misma clase de contigüidad” es la clausura transitiva de la relación “ser contiguas”.

**Ejemplo 4.14.** Consideremos los complejos simpliciales finitos

$$K = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \quad L = \{\{d\}, \{e\}, \{f\}, \{d, e\}, \{e, f\}\},$$

que aparecen en la Figura 4.3, y las aplicaciones simpliciales constantes

$$p: \sigma \in K \rightarrow \{d\} \in L, \quad g: \sigma \in K \rightarrow \{e\} \in L, \quad h: \sigma \in K \rightarrow \{f\} \in L.$$

Para todo símplex  $\sigma \in K$  se tiene que  $p(\sigma) \cup g(\sigma) = \{d, e\} \in L$  y  $g(\sigma) \cup h(\sigma) = \{e, f\} \in L$ . Es decir,  $p \sim_c g$  y  $g \sim_c h$ . No obstante,  $p(\sigma) \cup h(\sigma) = \{d, f\} \notin L$ , por lo que  $p$  y  $h$  no son contiguas.

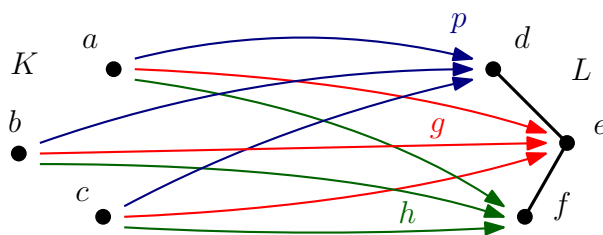


Figura 4.3:  $p$  y  $h$  están en la misma clase de contigüidad, pero no son contiguas

A la hora de estudiar invariantes en complejos simpliciales, pueden considerarse los invariantes homotópicos asociados a sus realizaciones geométricas. Sin embargo, de esta manera no se tienen en cuenta las propiedades combinatorias que caracterizan a este tipo de espacios. En este sentido, el concepto de contigüidad desempeña en el contexto de los complejos simpliciales un papel análogo al que cumple la homotopía en el estudio de aplicaciones continuas entre espacios topológicos. Por ejemplo, se tienen los siguientes resultados [38, Capítulo 3, Sección 5]:

**Proposición 4.15.** 1. Si dos aplicaciones simpliciales son contiguas entonces inducen aplicaciones homótopas en las realizaciones geométricas.

2. Las composiciones de aplicaciones simpliciales contiguas son contiguas.

### 4.3. Distancia simplicial

Dedicamos esta sección a exponer la distancia simplicial y ver cómo generaliza la categoría y la complejidad simplicial. Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales finitos y  $\varphi, \psi: K \rightarrow L$  aplicaciones simpliciales.

**Definición 4.16.** La distancia simplicial entre  $\varphi$  y  $\psi$ ,  $\text{sD}(\varphi, \psi)$ , es el menor entero  $n \geq 0$  tal que existe un recubrimiento  $\{K_0, \dots, K_n\}$  de  $K$  por  $n + 1$  subcomplejos cumpliendo que  $\varphi|_{K_j} \sim \psi|_{K_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ .

Al igual que en el caso homotópico, podemos recuperar la categoría simplicial de un complejo simplicial finito  $K$  como

$$\text{scat}(K) = \text{sD}(\text{id}_K, \text{cte}),$$

donde  $\text{cte}: K \rightarrow K$  es una aplicación simplicial constante. Para adaptar la complejidad topológica al caso simplicial, necesitamos definir el producto de complejos simpliciales.

**Definición 4.17.** El producto (categórico) de  $K$  y  $L$ ,  $K \times L$ , es el complejo simplicial finito cuyos vértices son de la forma  $(\sigma, \tau)$ , con  $\sigma$  un vértice de  $K$  y  $\tau$  un vértice de  $L$ , y cuyos símlices son de la forma

$$\{(\sigma_0, \tau_0), \dots, (\sigma_n, \tau_n)\},$$

de manera que  $\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$  es un símplex de  $K$  y  $\{\tau_0, \dots, \tau_n\}$  es un símplex de  $L$ .

Esta definición de producto simplicial, que aparece en [23, Definición 4.25], no se corresponde con la de producto cartesiano habitual en el contexto de complejos simpliciales, la cual depende del orden de los vértices y no satisface la propiedad universal del producto. Por otro lado, con nuestra definición,  $|K \times L|$  no es homeomorfo a  $|K| \times |L|$ , aunque sí tienen el mismo tipo de homotopía [23, Proposición 15.23], lo cual es suficiente para nuestro objetivo de estudiar invariantes homotópicos. Ahora, si consideramos las proyecciones

$$\begin{aligned} \pi_1: K \times K &\longrightarrow K & \pi_2: K \times K &\longrightarrow K \\ \{(\sigma_0, \tau_0), \dots, (\sigma_n, \tau_n)\} &\longmapsto \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}, & \{(\sigma_0, \tau_0), \dots, (\sigma_n, \tau_n)\} &\longmapsto \{\tau_0, \dots, \tau_n\}, \end{aligned}$$

obtenemos la complejidad simplicial de  $K$ ,

$$\text{sTC}(K) = \text{sD}(\pi_1, \pi_2).$$

En la definición original de complejidad simplicial [12, Definición 3.2] se piden recubrimientos de  $K \times K$  por subcomplejos  $K'$  de Farber: aquellos para los que existe una aplicación simplicial  $\varphi: K' \subseteq K \times K \rightarrow K$  tal que  $\Delta \circ \varphi \sim \text{id}_{K'}$ , donde  $\Delta: K \rightarrow K \times K$  es la aplicación diagonal. Sin embargo, se demuestra en [12, Teorema 3.4] que esto último es equivalente a que las proyecciones  $\pi_1, \pi_2: K \times K \rightarrow K$  estén en la misma clase de contigüidad  $\pi_1|_{K'} \sim \pi_2|_{K'}$ .

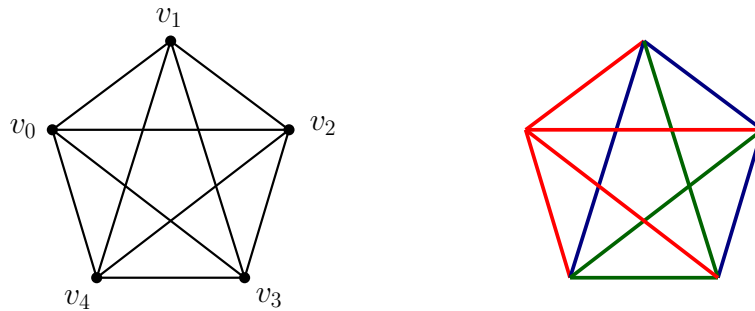
*Observación 4.18.* El resultado de la Proposición 2.4 para la distancia simplicial puede enunciarse de la siguiente manera: la distancia simplicial es constante sobre aplicaciones simpliciales en la misma clase de contigüidad. Es decir, si  $\varphi \sim \varphi'$  y  $\psi \sim \psi'$ , entonces se cumple que  $\text{sD}(\varphi, \psi) = \text{sD}(\varphi', \psi')$ .

La homotopía no es la herramienta más adecuada para estudiar estos invariantes simpliciales, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.19.** Consideremos el complejo simplicial finito  $K$  formado por todas las aristas que unen cinco vértices  $v_0, v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ . Los subcomplejos

$$\begin{aligned} K_0 &= [v_0, v_1] \cup [v_0, v_2] \cup [v_0, v_3] \cup [v_0, v_4], \\ K_1 &= [v_1, v_2] \cup [v_1, v_4] \cup [v_2, v_3], \\ K_2 &= [v_1, v_3] \cup [v_2, v_4] \cup [v_3, v_4], \end{aligned}$$

que aparecen en rojo, azul y verde, respectivamente, en la derecha de la Figura 4.4, forman un recubrimiento de  $K$  por subcomplejos tal que la inclusión  $i: K_j \hookrightarrow K$  está en la misma clase de contigüidad que una aplicación simplicial constante  $\text{cte}: K_j \rightarrow K$  para  $j = 0, 1, 2$ . Por tanto,  $\text{scat}(K) \leq 2$ . Además, como  $K$  tiene diez 1-símplices, en todo recubrimiento formado por dos subcomplejos al menos uno de ellos tiene cinco 1-símplices. No obstante, como  $K$  tan solo tiene cinco vértices, tal subcomplejo no es categórico. Por tanto,  $\text{scat}(K) = 2$ . Como  $\dim(K) = 1$ , esto muestra que la dimensión no sirve como cota superior para la distancia simplicial.

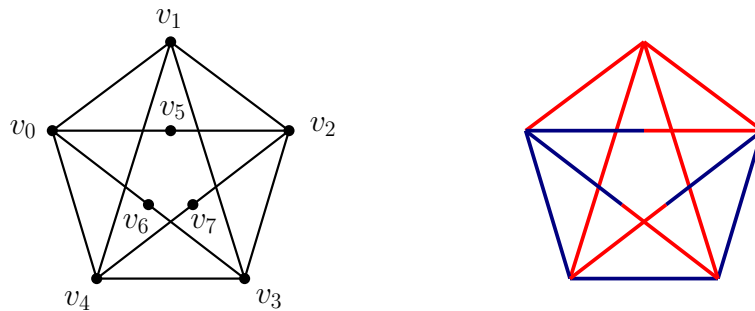
Figura 4.4: Recubrimiento de  $K$  por 3 subcomplejos categóricos

Por otra parte, podemos añadir tres vértices  $v_5, v_6$  y  $v_7$  a  $K$  y considerar el complejo simplicial  $K'$  representado en la izquierda de la Figura 4.5. Su realización geométrica es la misma que la de  $K$ . Sin embargo, en este caso, los subcomplejos

$$K'_0 = [v_0, v_1] \cup [v_1, v_2] \cup [v_1, v_3] \cup [v_1, v_4] \cup [v_2, v_5] \cup [v_3, v_6] \cup [v_4, v_7],$$

$$K'_1 = [v_0, v_4] \cup [v_0, v_5] \cup [v_0, v_6] \cup [v_2, v_3] \cup [v_2, v_7] \cup [v_3, v_4],$$

que aparecen en rojo y azul, respectivamente, en la derecha de la Figura 4.5, forman un recubrimiento de  $K'$  cumpliendo las mismas características que el recubrimiento previo de  $K$ . Por lo tanto,  $\text{scat}(K') = 1 < 2 = \text{scat}(K)$ . Esto muestra que la distancia simplicial no es un invariante del tipo de homotopía. De hecho, muestra que ni siquiera es un invariante topológico.

Figura 4.5: Recubrimiento de  $K'$  por 2 subcomplejos categóricos

## 4.4. Colapsos fuertes

La noción correcta para trabajar con complejos simpliciales finitos y clases de continuidad es la de colapso fuerte y tipo de homotopía fuerte. Sea  $K$  un complejo simplicial finito.



**Definición 4.20.** La estrella (cerrada) de un símple  $\sigma \in K$  es el subcomplejo  $\text{St}\sigma \subseteq K$  formado por los símlices  $\tau$  tales que  $\tau \cup \sigma$  es un símple de  $K$ . El engarce de  $\sigma$  es el subcomplejo  $\text{Lk}\sigma \subseteq \text{St}\sigma$  formado por los símlices disjuntos de  $\sigma$ .

Si  $v$  es un vértice de  $K$ , denotamos por  $K \setminus v$  al subcomplejo maximal de  $K$  que no contiene ningún símple que tenga a  $v$  como cara. El *join*  $w * K$  de un complejo  $K$  y un vértice  $w \notin K$  decimos que es un cono simplicial.

**Definición 4.21.** Decimos que existe un colapso elemental fuerte de  $K$  a  $K \setminus v$  si  $\text{Lk}(v)$  es un cono simplicial  $v' * K$ . En tal caso, decimos que  $v$  está dominado por  $v'$  y lo denotamos por  $K \searrow^e K \setminus v$  (ver Figura 4.6). La operación inversa se denomina expansión elemental fuerte y la denotamos por  $K \setminus v \nearrow^e K$ .

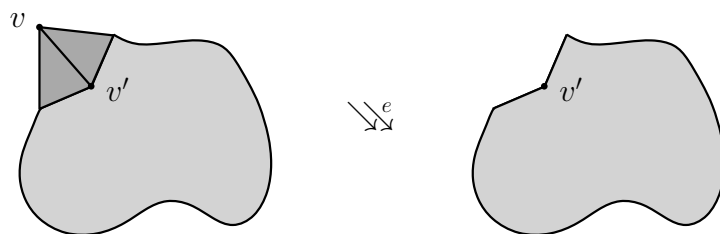


Figura 4.6: Colapso elemental fuerte: el vértice  $v$  está dominado por  $v'$

- Definición 4.22.**
1. Decimos que existe un colapso fuerte de  $K$  a  $L$ ,  $K \searrow L$ , si existen subcomplejos  $K = K_0, K_1, \dots, K_n = L$  tales que  $K_{i-1} \searrow^e K_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Un complejo  $K$  es fuertemente colapsable,  $K \searrow *$ , si existe un colapso fuerte de  $K$  a algún vértice  $v \in K$ .
  2. Análogamente, decimos que existe una expansión fuerte de  $K$  a  $L$ ,  $K \nearrow L$ , si existen subcomplejos  $K = K_0, K_1, \dots, K_n = L$  tales que  $K_{i-1} \nearrow^e K_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .
  3. Dos complejos  $K$  y  $L$  tienen el mismo tipo de homotopía fuerte si existe una secuencia de colapsos y expansiones fuertes entre ellos.

**Definición 4.23.** Una aplicación simplicial  $\varphi: K \rightarrow L$  es una equivalencia fuerte si existe una aplicación simplicial  $\psi: L \rightarrow K$  tal que  $\psi \circ \varphi \sim \text{id}_K$  y  $\varphi \circ \psi \sim \text{id}_L$ . Si existe una equivalencia fuerte entre  $K$  y  $L$  lo denotamos por  $K \sim L$ .

**Proposición 4.24.**  $K$  y  $L$  tienen el mismo tipo de homotopía fuerte si y solo si  $K \sim L$ .

En particular,  $K$  es fuertemente colapsable si y solo si la identidad  $\text{id}_K: K \rightarrow K$  está en la misma clase de contigüidad que una aplicación simplicial constante, es decir, si y solo si  $\text{scat}(K) = 0$ .

## 4.5. Propiedades

Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales finitos y  $\varphi, \psi: K \rightarrow L$  aplicaciones simpliciales.

**Proposición 4.25.** *Se cumple que  $\text{sD}(\varphi, \psi) \leq \text{scat}(K)$ .*

*Demostración.* Sea  $\text{scat}(K) = n$  y  $\{K_0, \dots, K_n\}$  un recubrimiento de  $K$  por  $n+1$  subcomplejos categóricos. Denotando la inclusión por  $i: K_j \hookrightarrow K$  y una aplicación simplicial constante por  $\text{cte}: K_j \rightarrow K$ , vemos que

$$\varphi|_{K_j} = \varphi \circ i \sim \varphi \circ \text{cte} = \text{cte}',$$

donde  $\text{cte}': K \rightarrow L$  es otra aplicación simplicial constante. Análogamente, se cumple que  $\psi|_{K_j} \sim \text{cte}'$ . Por tanto, concluimos que  $\text{sD}(\varphi, \psi) \leq n = \text{scat}(K)$ .  $\square$

**Proposición 4.26.** *Sea  $\eta: L \rightarrow L'$  una aplicación simplicial. Entonces se cumple que*

$$\text{sD}(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi) \leq \text{sD}(\varphi, \psi).$$

*Si, además,  $\eta$  admite una inversa fuerte por la izquierda (una aplicación simplicial  $\eta': L' \rightarrow L$  tal que  $\eta' \circ \eta \sim \text{id}_L$ ), entonces se cumple la igualdad.*

*Demostración.* Sea  $\text{sD}(\varphi, \psi) = n$  y  $\{K_0, \dots, K_n\}$  un recubrimiento de  $K$  por  $n+1$  subcomplejos cumpliendo que  $\varphi|_{K_j} \sim \psi|_{K_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Así, se tiene que

$$(\eta \circ \varphi)|_{K_j} = \eta \circ \varphi|_{K_j} \sim \eta \circ \psi|_{K_j} = (\eta \circ \psi)|_{K_j},$$

por lo que  $\text{sD}(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi) \leq n = \text{sD}(\varphi, \psi)$ .

Si  $\eta': L' \rightarrow L$  es una inversa fuerte por la izquierda de  $\eta$ , entonces  $\eta' \circ \eta \circ \varphi \sim \varphi$  y  $\eta' \circ \eta \circ \psi \sim \psi$ . Por la Observación 4.18 y la primera parte de esta Proposición, concluimos que

$$\text{sD}(\varphi, \psi) \geq \text{sD}(\eta \circ \varphi, \eta \circ \psi) \geq \text{sD}(\eta' \circ \eta \circ \varphi, \eta' \circ \eta \circ \psi) = \text{sD}(\varphi, \psi). \quad \square$$

**Proposición 4.27.** *Sea  $\eta: K' \rightarrow K$  una aplicación simplicial. Entonces se cumple que*

$$\text{sD}(\varphi \circ \eta, \psi \circ \eta) \leq \text{sD}(\varphi, \psi).$$

*Si, además,  $\eta$  admite una inversa fuerte por la derecha (una aplicación simplicial  $\eta': K \rightarrow K'$  tal que  $\eta \circ \eta' \sim \text{id}'_K$ ), entonces se cumple la igualdad.*

*Demostración.* Sea  $\text{sD}(\varphi, \psi) = n$  y  $\{K_0, \dots, K_n\}$  un recubrimiento de  $K$  por  $n+1$  subcomplejos cumpliendo que  $\varphi|_{K_j} \sim \psi|_{K_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Si denotamos  $K'_j := \eta^{-1}(K_j) \subseteq K'$ , podemos factorizar  $\eta|_{K'_j}: K'_j \rightarrow K$  como la composición  $i_j \circ \tilde{\eta}|_{K'_j}: K'_j \rightarrow K_j \hookrightarrow K$ . Así, como

$$(\varphi \circ \eta)|_{K'_j} = \varphi \circ \eta|_{K'_j} = \varphi|_{K_j} \circ \tilde{\eta}|_{K'_j} \sim \psi|_{K_j} \circ \tilde{\eta}|_{K'_j} = \psi \circ \eta|_{K'_j} = (\psi \circ \eta)|_{K'_j},$$

podemos concluir que  $\text{sD}(\varphi \circ \eta, \psi \circ \eta) \leq n = \text{sD}(\varphi, \psi)$ .

Si  $\eta': K \rightarrow K'$  es una inversa fuerte por la derecha de  $\eta$ , entonces  $\varphi \circ \eta \circ \eta' \sim \varphi$  y  $\psi \circ \eta \circ \eta' \sim \psi$ . Por la Observación 4.18 y la primera parte de esta Proposición, concluimos que

$$\text{sD}(\varphi, \psi) \geq \text{sD}(\varphi \circ \eta, \psi \circ \eta) \geq \text{sD}(\varphi \circ \eta \circ \eta', \psi \circ \eta \circ \eta') = \text{sD}(\varphi, \psi). \quad \square$$

**Corolario 4.28.** *Se cumple que  $\text{scat}(K) \leq \text{sTC}(K) \leq \text{cat}(K \times K)$ .*

*Demostración.* Consideremos la inclusión  $i_2: K \rightarrow K \times K$  que, para un vértice  $v_0 \in K$  fijado, lleva cada símplice  $\sigma \in K$  a  $i_2(\sigma) = (v_0, \sigma)$ . Así, usando la Proposición 4.27, podemos escribir

$$\text{scat}(K) = \text{sD}(\text{cte}, \text{id}_K) = \text{sD}(\pi_1 \circ i_2, \pi_2 \circ i_2) \leq \text{sD}(\pi_1, \pi_2) = \text{sTC}(K).$$

La otra desigualdad se sigue de aplicar la Proposición 4.25 a las proyecciones  $\pi_1, \pi_2: K \times K \rightarrow K$ ,

$$\text{sTC}(K) = \text{sD}(\pi_1, \pi_2) \leq \text{scat}(K \times K). \quad \square$$

**Corolario 4.29.** *Se cumple que  $\text{sD}(\varphi, \psi) \leq \text{sTC}(L)$ .*

*Demostración.* Considerando la aplicación  $(\varphi \times \psi): K \times K \rightarrow L \times L$  y usando la Proposición 4.27 vemos que

$$\text{sD}(\varphi, \psi) = \text{sD}(\pi_1 \circ (\varphi \times \psi), \pi_2 \circ (\varphi \times \psi)) \leq \text{sD}(\pi_1, \pi_2) = \text{sTC}(L). \quad \square$$

**Teorema 4.30.** *Sean  $\varphi, \psi: K \rightarrow L$ ,  $\varphi', \psi': K' \rightarrow L'$  aplicaciones simpliciales. Sean  $\eta: K' \rightarrow K$  y  $\mu: L \rightarrow L'$  equivalencias fuertes tales que  $\mu \circ \varphi \circ \eta \sim \varphi'$  y  $\mu \circ \psi \circ \eta \sim \psi'$ . Entonces se cumple que  $\text{sD}(\varphi, \psi) = \text{sD}(\varphi', \psi')$ .*

$$\begin{array}{ccc} K' & \xrightleftharpoons[\psi']{\varphi'} & L' \\ \eta \downarrow & & \uparrow \mu \\ K & \xrightleftharpoons[\psi]{\varphi} & L \end{array}$$

*Demostración.* En vista de la Observación 4.18 y las Proposiciones 4.26 y 4.27 tenemos que

$$\text{sD}(\varphi, \psi) = \text{sD}(\varphi \circ r, \psi \circ r) = \text{sD}(s \circ \varphi \circ r, s \circ \psi \circ r) = \text{sD}(\varphi', \psi') \quad \square$$

**Corolario 4.31.** *La categoría simplicial y la complejidad simplicial son invariantes del tipo de homotopía fuerte. Es decir, si  $K \sim L$ , entonces se cumple que  $\text{scat}(K) = \text{scat}(L)$  y  $\text{sTC}(K) = \text{sTC}(L)$ .*

## 4.6. (Co)homología simplicial

Una de las ventajas de los complejos simpliciales es que cuentan con una teoría de (co)homología propia, que puede ser calculada de manera puramente combinatoria. Sea  $K$  un complejo simplicial y  $(R, +, \cdot)$  un anillo unitario conmutativo.

**Definición 4.32.** Llamamos  $R$ -módulos de  $n$ -cadenas simpliciales  $K$ ,  $C_n(K; R)$ , al  $R$ -módulo generado por los  $n$ -símplices de  $K$ .

Fijamos ahora un orden total de los vértices de  $K$  y orientamos los símlices por el orden de sus vértices salvo un número par de permutaciones.

**Definición 4.33.** Llamamos operador borde al homomorfismo de  $R$ -módulos  $\partial$  dado por

$$\begin{aligned} \partial_n: C_n(K; R) &\longrightarrow C_{n-1}(K; R) \\ \sigma = [v_0, \dots, v_n] &\longmapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n], \quad \text{si } v_0 < \dots < v_n. \end{aligned}$$

**Lema 4.34.** Se cumple que  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ . Es decir,  $(C(K; R), \partial)$  es un complejo de cadenas, llamado el complejo de cadenas simplicial de  $K$ .

**Definición 4.35.** Llamamos  $n$ -ciclos a los elementos de  $Z_n(K; R) := \ker \partial_n$ . A los elementos de  $B_n(K; R) := \text{im } \partial_{n+1}$  les llamamos  $n$ -bordes. El  $n$ -ésimo  $R$ -módulo de homología de  $K$  es

$$H_n(K; R) := \frac{Z_n(K; R)}{B_n(K; R)}.$$

**Ejemplo 4.36.** Sea  $T$  el complejo simplicial formado por el rectángulo de la Figura 4.7, identificando los vértices con la misma letra y orientando los 2-símlices  $\sigma_i$  en sentido antihorario. Su realización geométrica es homeomorfa al toro. Como este es conexo,  $H_0(T; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ .

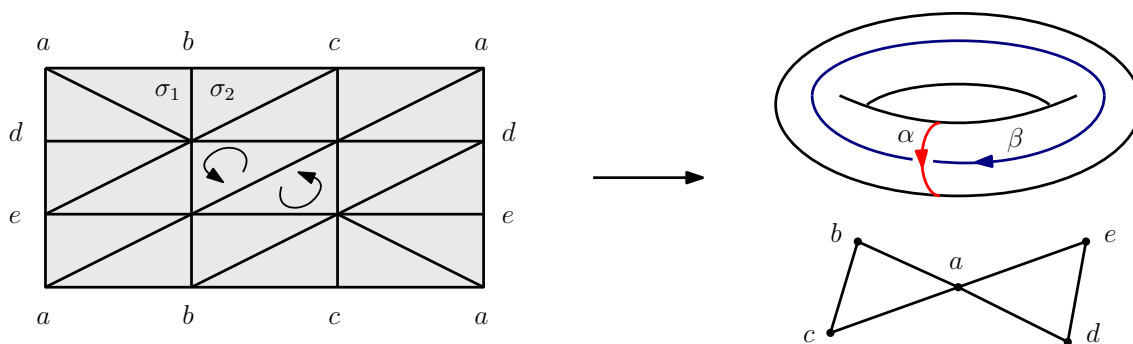


Figura 4.7: Triangulación del toro, donde  $\alpha = [a, d] + [d, e] + [e, a]$  y  $\beta = [a, b] + [b, c] + [c, a]$

Un 2-ciclo es una combinación lineal  $\sum c_i \sigma_i$  con  $c_i \in \mathbb{Z}$  tal que  $\partial_2(\sum c_i \sigma_i) = 0$ . Cada 1-símplex en la frontera pertenece a dos 2-símlices adyacentes con orientaciones opuestas. Para que los bordes se cancelen, los coeficientes  $c_i$  de los 2-símlices adyacentes deben ser iguales. Así, los 2-ciclos son múltiplos de  $\gamma = \sum \sigma_i$ . Como no hay 3-símlices,  $B_2(T; \mathbb{Z}) = 0$ , y por tanto  $H_2(T; \mathbb{Z}) = Z_2(T, \mathbb{Z}) = \langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}$ .

Por el mismo argumento, todo 1-ciclo es homólogo a uno contenido en la frontera. Por otra parte, todo 1-ciclo en la frontera es combinación lineal de  $\alpha = [a, d] + [d, e] + [e, a]$  y  $\beta = [a, b] + [b, c] + [c, a]$ . Un 1-ciclo de esta forma no puede ser el borde de una 2-cadena: de serlo, sería una 2-cadena cuyo borde esté contenido en la frontera del rectángulo, y ya hemos visto que en ese caso es un 2-ciclo. Así, podemos concluir que  $H_1(T) = \langle \alpha, \beta \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

**Teorema 4.37** ([32, Teorema 11.5]). *Los  $R$ -módulos de homología simplicial de un complejo simplicial finito son siempre computables y existe un algoritmo implementable para llevar a cabo dicho cálculo.*

**Definición 4.38.** Llamamos  $R$ -módulos de  $n$ -cocadenas simpliciales de  $K$  a

$$C^n(K; R) := \text{Hom}(C_n(K; R), R).$$

El operador coborde es el homomorfismo dual del operador borde

$$\delta^n: C^n(K; R) \rightarrow C^{n+1}(K; R),$$

por lo que  $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ . Denotamos a su núcleo por  $Z^n(K; R)$ , los  $R$ -módulos de  $n$ -cociclos; y a su imagen por  $B^n(K; R)$ , los  $R$ -módulos de  $n$ -cobordes. Llamamos  $n$ -ésimo  $R$ -módulo de cohomología de  $K$  a

$$H^n(K; R) := \frac{Z^n(K; R)}{B^n(K; R)}.$$

Una aplicación simplicial  $f: K \rightarrow L$  induce homomorfismos en todos los  $R$ -módulos de (co)homología

$$f_*: H_n(K; R) \rightarrow H_n(L; R), \quad f^*: H^n(L; R) \rightarrow H^n(K; R).$$

**Teorema 4.39.** *Si dos aplicaciones simpliciales  $\varphi, \psi: K \rightarrow L$  están en la misma clase de contigüidad entonces inducen el mismo homomorfismo en todos los  $R$ -módulos de (co)homología.*

Aplicaciones homótopas inducen el mismo homomorfismo en todos los  $R$ -módulos de (co)homología.

**Teorema 4.40** ([32, Teoremas 34.3, 34.4, 34.5 y 44.2]). *Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Entonces existe un isomorfismo natural entre la (co)homología simplicial de  $K$  y la (co)homología singular de su realización geométrica  $|K|$ , que conmuta con los operadores borde y los homomorfismos inducidos por aplicaciones continuas (en particular, por aplicaciones simpliciales).*

También existe una construcción del producto cup en el contexto de la cohomología simplicial, la cual satisface todas las propiedades descritas en la Sección 3.5 [1]. Del mismo modo, existen versiones simpliciales de los cotas inferiores relacionadas con la longitud cup de la Sección 3.6. Además, el isomorfismo establecido en el Teorema 4.40 entre la cohomología simplicial de un complejo y la cohomología singular de su realización geométrica resulta ser un isomorfismo de  $R$ -álgebras [32, Teorema 49.1], lo que asegura que los invariantes asociados a la longitud cup coinciden.

## 4.7. Distancia cohomológica simplicial

Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales finitos y  $\varphi, \psi: K \rightarrow L$  aplicaciones simpliciales.

**Definición 4.41.** La distancia cohomológica simplicial entre  $\varphi$  y  $\psi$  con coeficientes en  $R$ ,  $H^\bullet sD(\varphi, \psi; R)$ , es el menor entero  $n \geq 0$  tal que existe un recubrimiento  $\{K_0, \dots, K_n\}$  de  $K$  por  $n + 1$  subcomplejos cumpliendo que  $(\varphi|_{K_j})^* = (\psi|_{K_j})^*: H^m(L; R) \rightarrow H^m(K_j; R)$  para todo  $m \geq 0$  y para todo  $j = 0, \dots, n$ .

La distancia cohomológica simplicial cumple propiedades análogas a las demostradas para la distancia cohomológica y la distancia simplicial. En particular, destacamos:

1. Es constante sobre aplicaciones simpliciales en la misma clase de contigüidad.
2. Denotamos por  $H^\bullet \text{scat}(K; R) = H^\bullet sD(\text{cte}, \text{id}_K; R)$  y  $H^\bullet \text{sTC}(K; R) = H^\bullet sD(\pi_1, \pi_2; R)$  la categoría cohomológica simplicial y la complejidad cohomológica simplicial, respectivamente.
3. Se cumple que  $H^\bullet sD(\varphi, \psi; R) \leq sD(\varphi, \psi)$ .
4. No aumenta al precomponer o postcomponer por aplicaciones simpliciales.
5. Es un invariante del tipo de homotopía fuerte, en el sentido del Teorema 4.30.
6. Se cumple que  $H^\bullet sD(\varphi, \psi; R) \leq H^\bullet \text{scat}(K; R) \leq H^\bullet \text{sTC}(K; R) \leq H^\bullet \text{scat}(K \times K; R)$ .
7. Se cumple que  $H^\bullet sD(\varphi, \psi; R) \leq H^\bullet \text{sTC}(L; R)$ .
8. Mejora las cotas inferiores de la longitud cup:

$$\begin{array}{ccccc}
 sD(\varphi, \psi) & \leq & \text{scat}(K) & \leq & sTC(K) \\
 \vee | & & \vee | & & \vee | \\
 H^\bullet sD(\varphi, \psi; R) & \leq & H^\bullet \text{cat}(K; R) & \leq & H^\bullet \text{TC}(K; R) \\
 \vee | & & \vee | & & \vee | \\
 \text{l.c.p. } \mathcal{J}(\varphi, \psi; R) & \leq & \text{l.c.p. } (K; R) & \leq & \text{l.c.p. } (\ker \smile; R)
 \end{array}$$

9. Se puede definir la distancia homológica simplicial, y coincide con la cohomológica cuando el anillo de coeficientes es un cuerpo.

## 4.8. Subdivisión y aproximación simplicial

El procedimiento seguido en el Ejemplo 4.19 para obtener un nuevo complejo a partir de uno dado mediante una descomposición de sus símlices se conoce como subdivisión.

**Definición 4.42.** Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Decimos que un complejo simplicial finito  $K'$  es una subdivisión de  $K$  si:

1. Todo símlice de  $K'$  está contenido en algún símlice de  $K$ .
2. Todo símlice de  $K$  es la unión de símlices de  $K'$ .

Si  $K'$  es una subdivisión de  $K$ , entonces  $|K| = |K'|$ . En particular, sus realizaciones geométricas son homeomorfas. Intuitivamente, una subdivisión de un complejo puede entenderse como un refinamiento de su estructura simplicial, en el que segmentamos los símlices que lo forman sin alterar el espacio topológico subyacente. Un tipo particular de subdivisión es la subdivisión baricéntrica.

**Definición 4.43.** El baricentro de un símlice  $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$  es el punto

$$\widehat{\sigma} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i.$$

**Definición 4.44.** Sea  $K = \{\sigma_j\}$  un complejo simplicial finito. La subdivisión baricéntrica de  $K$ ,  $\text{sd}K$ , es el complejo simplicial formado por todos los posibles símlices de la forma  $[\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_n]$  tales que  $\sigma_i$  es una cara propia de  $\sigma_{i-1}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

*Observación 4.45.* Dado un complejo simplicial  $K$ , denotamos por  $\text{sd}^n K$  su  $n$ -ésima subdivisión baricéntrica. Al igual que sucede con las subdivisiones en general, se cumple que  $|\text{sd}^n K| = |K|$  para todo  $n \geq 1$ . Esto puede verse ilustrado para el caso  $\text{sd}^2 K = \text{sd}(\text{sd}K)$  en la Figura 4.8.

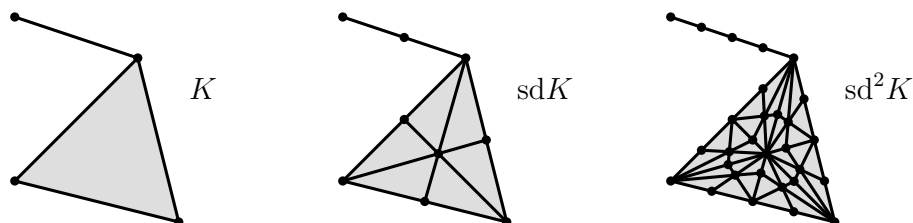


Figura 4.8: Subdivisiones baricéntricas de un complejo simplicial

**Teorema 4.46** ([32, Teorema 15.4]). *Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Para todo número real  $\varepsilon > 0$ , existe un entero  $n \geq 1$  tal que todo símlice de  $\text{sd}^n K$  tiene diámetro menor que  $\varepsilon$ .*

Si  $\varphi: K \rightarrow L$  es una aplicación simplicial, entonces induce una aplicación simplicial en las subdivisiones baricéntricas

$$\begin{aligned} \text{sd}\varphi: \text{sd}K &\longrightarrow \text{sd}L \\ [\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_n] &\longmapsto [\widehat{\varphi(\sigma_0)}, \dots, \widehat{\varphi(\sigma_n)}], \end{aligned}$$

de manera que  $\text{sd}(\text{id}_K) = \text{id}_{\text{sd}K}$  y  $\text{sd}(\varphi \circ \psi) = \text{sd}\varphi \circ \text{sd}\psi$ . Además, si  $\varphi \sim \psi$ , entonces se cumple que  $\text{sd}\varphi \sim \text{sd}\psi$  [13, Proposición 3.3]. Esto nos permite establecer la siguiente relación entre la subdivisión baricéntrica y la distancia simplicial.

**Teorema 4.47.** *Sean  $\varphi, \psi: K \rightarrow L$  aplicaciones simpliciales. Entonces se cumple que*

$$\text{sD}(\text{sd}\varphi, \text{sd}\psi) \leq \text{sD}(\varphi, \psi).$$

*Demostración.* Sea  $\text{sD}(\varphi, \psi) = n$  y  $\{K_0, \dots, K_n\}$  un recubrimiento de  $K$  por  $n+1$  subcomplejos tal que  $\varphi|_{K_j} \sim \psi|_{K_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Entonces,  $\text{sd}(\varphi|_{K_j}) \sim \text{sd}(\psi|_{K_j})$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Además,  $\{\text{sd}K_0, \dots, \text{sd}K_n\}$  es un recubrimiento de  $\text{sd}K$  por  $n+1$  subcomplejos. Ahora bien, para  $\sigma = [\widehat{\sigma}_0, \dots, \widehat{\sigma}_n] \in \text{sd}K_j$  podemos expresar

$$\begin{aligned} \text{sd}(\varphi|_{K_j})(\sigma) &= [\widehat{\text{sd}(\varphi|_{K_j})(\sigma_0)}, \dots, \widehat{\text{sd}(\varphi|_{K_j})(\sigma_n)}] \\ &= [\widehat{\text{sd}\varphi(\sigma_0)}, \dots, \widehat{\text{sd}\varphi(\sigma_n)}] \\ &= \text{sd}(\varphi)|_{\text{sd}K_j}(\sigma). \end{aligned}$$

Así, se cumple que

$$\text{sd}(\varphi)|_{\text{sd}K_j} = \text{sd}(\varphi|_{K_j}) \sim \text{sd}(\psi|_{K_j}) = \text{sd}(\psi)|_{\text{sd}K_j}$$

para todo  $j = 0, \dots, n$ . Por tanto, podemos concluir que  $\text{sD}(\text{sd}\varphi, \text{sd}\psi) \leq n = \text{sD}(\varphi, \psi)$ .  $\square$

**Corolario 4.48.** *Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Entonces se cumple que:*

1.  $\text{scat}(\text{sd}K) \leq \text{scat}(K)$ .
2.  $\text{sTC}(\text{sd}K) \leq \text{sTC}(K)$ .

Del mismo modo, podemos formular la siguiente desigualdad que involucra la subdivisión baricéntrica y la distancia cohomológica simplicial.

**Teorema 4.49.** *Sean  $\varphi, \psi: K \rightarrow L$  aplicaciones simpliciales. Entonces se cumple que*

$$H^\bullet \text{sD}(\text{sd}\varphi, \text{sd}\psi; R) \leq H^\bullet \text{sD}(\varphi, \psi; R).$$

*Demostración.* Sea  $H^\bullet \text{sD}(\varphi, \psi) = n$  y  $\{K_0, \dots, K_n\}$  un recubrimiento de  $K$  por  $n+1$  subcomplejos tal que  $(\varphi|_{K_j})^* = (\psi|_{K_j})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Entonces, el siguiente diagrama es conmutativo [32, Sección 17]:

$$\begin{array}{ccc} H^*(\text{sd}L; R) & \xrightarrow[\text{sd}]{\cong} & H^*(L; R) \\ \downarrow ((\text{sd}\varphi)|_{\text{sd}K_j})^* & & \downarrow (\varphi|_{K_j})^* \\ H^*(\text{sd}K_j; R) & \xrightarrow[\text{sd}]{\cong} & H^*(K_j; R) \end{array}$$

para todo  $j = 0, \dots, n$ , donde las flechas horizontales son isomorfismos. Por lo tanto,  $((\text{sd}\varphi)|_{\text{sd}K_j})^* = ((\text{sd}\psi)|_{\text{sd}K_j})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . De nuevo,  $\{\text{sd}K_0, \dots, \text{sd}K_n\}$  es un recubrimiento de  $\text{sd}K$  por  $n+1$  subcomplejos. Por tanto, concluimos que  $H^\bullet \text{sD}(\text{sd}\varphi, \text{sd}\psi; R) \leq n = H^\bullet \text{sD}(\varphi, \psi; R)$ .  $\square$



**Corolario 4.50.** *Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Entonces se cumple que:*

1.  $H^\bullet \text{scat}(\text{sd}K; R) \leq H^\bullet \text{scat}(K; R)$ .
2.  $H^\bullet \text{sTC}(\text{sd}K; R) \leq H^\bullet \text{sTC}(K; R)$ .

**Ejemplo 4.51.** Consideremos nuevamente el complejo simplicial finito  $K$  del Ejemplo 4.19, formado por todas las aristas que unen cinco vértices. Siguiendo el mismo razonamiento expuesto en dicho ejemplo, se cumple que  $H^\bullet \text{scat}(K; R) = 2$ . Dado que l.c.p.  $(K; R) = 1$ , este caso ilustra que nuestra cota inferior puede ser estrictamente mayor que la de la longitud cup. Además, se cumple que

$$H^\bullet \text{scat}(\text{sd}K; R) = \text{scat}(\text{sd}K) = 1 < H^\bullet \text{scat}(K; R) = \text{scat}(K) = 2,$$

lo que muestra que la desigualdad establecida en el Teorema 4.49 también puede ser estricta.

A parte del resultado del Teorema 4.46, la subdivisión baricéntrica es una herramienta extremadamente útil debido a su estrecha relación con las aproximaciones simpliciales.

**Definición 4.52.** Sea  $f: |K| \rightarrow |L|$  una aplicación continua. Una aproximación simplicial de  $f$  es una aplicación simplicial  $\varphi: K \rightarrow L$  tal que  $f(\text{St}v) \subseteq \text{St}\varphi(v)$  para todo vértice  $v \in K$ .

Una aproximación simplicial se trata de una aplicación simplicial que representa a una aplicación continua, reflejando su comportamiento local en torno a cada vértice. A pesar de que la definición no asegura su existencia de manera general, en caso de que exista, dicha aproximación es única salvo contigüidad [32, Lema 14.1]. Para encontrar aproximaciones simpliciales es necesario aplicar un número suficiente de subdivisiones al complejo de partida.

**Teorema 4.53** ([32, Teorema 16.1]). *Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales finitos y  $f: |K| \rightarrow |L|$  una aplicación continua. Entonces existe un entero  $n \geq 1$  tal que  $f$  admite una aproximación simplicial  $\varphi: \text{sd}^n K \rightarrow L$ .*

En particular, la utilidad de estas aproximaciones se evidencia gracias al siguiente resultado:

**Proposición 4.54** ([1, Proposición IV.2.1]). *Si  $\varphi: K \rightarrow L$  es una aproximación simplicial de una aplicación continua  $f: |K| \rightarrow |L|$ , entonces  $f$  y  $|\varphi|$  son homótopas.*

## 4.9. Realizaciones geométricas

En esta sección comparamos los invariantes simpliciales de los complejos simpliciales con los invariantes homotópicos de sus realizaciones geométricas.

**Teorema 4.55.** *Sean  $\varphi, \psi: K \rightarrow L$  dos aplicaciones simpliciales. Entonces se cumple que*

$$D(|\varphi|, |\psi|) \leq \text{sD}(\varphi, \psi).$$

*Demostración.* Sea  $\text{sD}(\varphi, \psi) = n$  y  $\{K_0, \dots, K_n\}$  un recubrimiento de  $K$  por  $n + 1$  subcomplejos tal que  $\varphi|_{K_j} \sim \psi|_{K_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Por el Teorema 4.15, las aplicaciones inducidas en las realizaciones geométricas son homótopas  $|\varphi|_{||K_j||} \simeq |\psi|_{||K_j||}$ . Como  $\{|K_0|, \dots, |K_n|\}$  es un recubrimiento de  $|K|$  formado por  $n + 1$  subconjuntos, concluimos que  $D(|\varphi|, |\psi|) \leq n = \text{sD}(\varphi, \psi)$ .  $\square$

**Corolario 4.56.** *Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Entonces se cumple que:*

1.  $\text{cat}(|K|) \leq \text{scat}(K)$ .
2.  $\text{TC}(|K|) \leq \text{sTC}(K)$ .

**Ejemplo 4.57.** Las desigualdades del Teorema 4.55 y del Corolario 4.56 pueden ser estrictas. Asimismo, a pesar del resultado dado por el Teorema 4.47 relacionando la distancia simplicial con la subdivisión baricéntrica, la desigualdad  $D(|\varphi|, |\psi|) \leq \text{sD}(\text{sd}^n \varphi, \text{sd}^n \psi)$  también puede ser estricta para todo  $n \geq 1$ . En efecto, consideremos el complejo simplicial finito  $K$  de la Figura 4.9. Su realización geométrica es contráctil, por lo que  $\text{cat}(|K|) = 0$ .

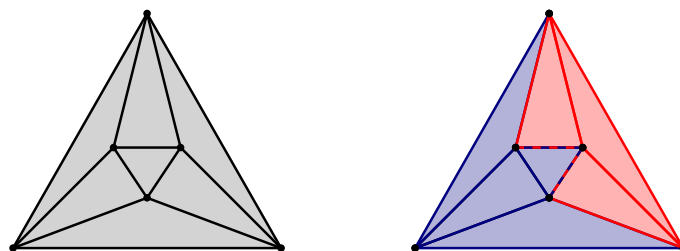


Figura 4.9: Un complejo contráctil, pero no fuertemente colapsable. A la derecha, un recubrimiento por dos subcomplejos categóricos

En la Figura 4.9 puede verse un recubrimiento de  $K$  por dos subcomplejos categóricos, por lo que  $\text{scat}(K) \leq 1$ . Por otra parte,  $K$  no es fuertemente colapsable: no tiene vértices dominados. Por tanto,  $\text{scat}(K) > 0$ . Además, un complejo es fuertemente colapsable si y solo si lo es su subdivisión baricéntrica [2, Teorema 4.15]. Es decir,  $\text{scat}(K) = 0$  si y solo si  $\text{scat}(\text{sd}K) = 0$ . Iterando, obtenemos que  $\text{cat}(|K|) = 0 < 1 = \text{scat}(\text{sd}^n K)$  para todo  $n \geq 1$ .

**Teorema 4.58.** *Sean  $\varphi, \psi: K \rightarrow L$  dos aplicaciones simpliciales. Entonces se cumple que*

$$H^\bullet D(|\varphi|, |\psi|; R) \leq H^\bullet \text{sD}(\varphi, \psi; R).$$

*Demostración.* Sea  $H^\bullet \text{sD}(\varphi, \psi; R) = n$  y  $\{K_0, \dots, K_n\}$  un recubrimiento de  $K$  por  $n + 1$  subcomplejos tal que  $(\varphi|_{K_j})^* = (\psi|_{K_j})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Debido al isomorfismo natural entre la cohomología simplicial de un complejo y la cohomología singular de su

realización geométrica (Teorema 4.40), tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(L; R) & \xrightarrow{\cong} & H^*(|L|; R) \\
 (\varphi_{K_j})^* \downarrow & & \downarrow (|\varphi|_{|K_j|})^* \\
 (\psi_{K_j})^* \downarrow & & \downarrow (|\psi|_{|K_j|})^* \\
 H^*(K_j; R) & \xrightarrow{\cong} & H^*(|K_j|; R)
 \end{array}$$

donde las flechas horizontales son isomorfismos. Luego  $(|\varphi|_{|K_j|})^* = (|\psi|_{|K_j|})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ .

Como  $K$  es finito, existe el mínimo de la distancia entre sus vértices

$$\varepsilon = \min d(v_i, v_j) > 0, \quad v_i, v_j \in K^{(0)}, \quad v_i \neq v_j.$$

Si  $|K| \subseteq \mathbb{R}^m$ , consideremos la función

$$\begin{aligned}
 d(-, |K_j|): \mathbb{R}^m &\longrightarrow [0, \infty] \\
 x &\longmapsto \min_{y \in |K_j|} d(x, y),
 \end{aligned}$$

y definamos los siguientes abiertos de  $\mathbb{R}^m$ :

$$V_j := \left\{ x \in \mathbb{R}^m \text{ tales que } d(x, |K_j|) < \frac{\varepsilon}{2} \right\} = d(-, |K_j|)^{-1} \left( \left[ 0, \frac{\varepsilon}{2} \right) \right).$$

Si denotamos por  $U_j = V_j \cap |K|$ , entonces  $\{U_0, \dots, U_n\}$  es un recubrimiento de  $|K|$  por  $n+1$  abiertos. Se cumple que  $|K_j| \subseteq U_j$  para todo  $j = 0, \dots, n$  y, además,  $U_j$  no contiene ningún vértice de  $K$  que no esté en  $K_j$ . Por esta razón,  $i: |K_j| \hookrightarrow U_j$  es una equivalencia de homotopía y, en particular, induce un isomorfismo en cohomología, haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(U_j; R) & \xleftarrow{(|\varphi|_{|U_j|})^*} & H^*(|L|; R) \\
 & \xleftarrow{(|\psi|_{|U_j|})^*} & \downarrow (|\varphi|_{|K_j|})^* \\
 & \searrow i^* & \downarrow (|\psi|_{|K_j|})^* \\
 & & H^*(|K_j|; R)
 \end{array}$$

En consecuencia,  $(|\varphi|_{|U_j|})^* = (|\psi|_{|U_j|})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Por lo tanto, se cumple que  $H^\bullet D(|\varphi|, |\psi|; R) \leq n = H^\bullet sD(\varphi, \psi; R)$ .  $\square$

**Corolario 4.59.** *Sea  $K$  un complejo simplicial finito. Entonces se cumple que:*

1.  $H^\bullet \text{cat}(|K|; R) \leq H^\bullet \text{scat}(K; R)$ .
2.  $H^\bullet \text{TC}(|K|; R) \leq H^\bullet \text{sTC}(K; R)$ .

**Teorema 4.60.** *Sea  $K$  un complejo simplicial finito e  $Y$  un espacio arbitrario. Sean  $f, g: |K| \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas. Si  $D(f, g) = n$ , entonces existe una subdivisión  $K'$  de  $K$  y un recubrimiento  $\{K'_0, \dots, K'_n\}$  de  $K'$  por  $n + 1$  subcomplejos cumpliendo que  $f|_{|K'_j|} \simeq g|_{|K'_j|}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ .*

*Demostración.* Sea  $D(f, g) = n$  y  $U = \{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $|K|$  por  $n + 1$  abiertos tal que  $f|_{U_j} \simeq g|_{U_j}$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Como  $K$  es finito, por el Teorema 4.6, su realización geométrica  $|K|$  es compacta. Por tanto,  $U$  admite un número de Lebesgue  $\delta$  [24, Lema 7.18]: todo subconjunto de  $|K|$  de diámetro menor que  $\delta$  está contenido en algún abierto del recubrimiento.

Aplicando el Teorema 4.46, existe un entero  $m \geq 1$  tal que todo símlice de la  $m$ -ésima subdivisión baricéntrica de  $K$ ,  $K' = \text{sd}^m K$ , tiene diámetro menor que  $\delta$ . En consecuencia, todo símlice de  $K'$  está contenido en algún abierto de  $U$ . Así, están bien definidos los siguientes subcomplejos de  $K'$ :

$$K'_j := \bigcup_{\substack{\sigma \in K' \\ |\sigma| \subseteq U_j}} \sigma, \quad j = 0, \dots, n,$$

de manera que  $\{K'_0, \dots, K'_n\}$  es un recubrimiento de  $K'$  por  $n + 1$  subcomplejos. Además,  $|K'_j|$  está contenido en  $U_j$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Considerando la inclusión  $i: |K'_j| \hookrightarrow U_j$ , se tiene que

$$f|_{|K'_j|} = i \circ f|_{U_j} \simeq i \circ g|_{U_j} = g|_{|K'_j|}. \quad \square$$

**Corolario 4.61.** 1. *Sea  $K$  un complejo simplicial finito tal que  $\text{cat}(|K|) = n$ . Entonces existe una subdivisión  $K'$  de  $K$  que admite un recubrimiento  $\{K'_0, \dots, K'_n\}$  por  $n + 1$  subcomplejos cuyas realizaciones geométricas son categóricas.*

2. *Sea  $K$  un complejo simplicial finito tal que  $\text{TC}(|K|) = n$ . Entonces existe una subdivisión  $K'$  de  $K \times K$  que admite un recubrimiento  $\{K'_0, \dots, K'_n\}$  por  $n + 1$  subcomplejos cuyas realizaciones geométricas son subconjuntos de Farber.*

**Teorema 4.62.** *Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales finitos y  $f, g: |K| \rightarrow |L|$  aplicaciones continuas tales que  $H^\bullet D(f, g; R) = n$ . Entonces existe una subdivisión  $K''$  de  $K$ , un recubrimiento  $\{K''_0, \dots, K''_n\}$  de  $K''$  por  $n + 1$  subcomplejos y dos aplicaciones simpliciales  $\varphi, \psi: K'' \rightarrow L$  cumpliendo que  $f \simeq |\varphi|$ ,  $g \simeq |\psi|$  y  $(\varphi|_{K''_j})^* = (\psi|_{K''_j})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ .*

*Demostración.* Sea  $H^\bullet D(f, g; R) = n$  y  $U = \{U_0, \dots, U_n\}$  un recubrimiento de  $|K|$  por  $n + 1$  abiertos cumpliendo que  $(f|_{U_j})^* = (g|_{U_j})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . Siguiendo los mismos razonamientos de la demostración del Teorema 4.60, obtenemos un recubrimiento  $\{K'_0, \dots, K'_n\}$  de  $K' = \text{sd}^m K$  por  $n + 1$  subcomplejos cumpliendo que  $|K'_j| \subseteq U_j$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . En este caso, se tiene que

$$(f|_{|K'_j|})^* = (i \circ f|_{U_j})^* = (f|_{U_j})^* \circ i^* = (g|_{U_j})^* \circ i^* = (i \circ g|_{U_j})^* = (g|_{|K'_j|})^*.$$

Por el Teorema 4.53, existe una subdivisión  $K'' = \text{sd}^p K'$  tal que  $f$  y  $g$  admiten una aproximación simplicial  $\varphi, \psi: K'' \rightarrow L$ . Sea  $K''_j = \text{sd}^p K'_j$  y consideremos el recubrimiento

$\{K_0'', \dots, K_n''\}$  de  $K''$  por  $n+1$  subcomplejos. Por la Proposición 4.54,  $f \simeq |\varphi|$  y  $g \simeq |\psi|$ . Como  $|K_j''| = |\text{sd}^p K_j'| = |K_j'|$ , en particular se cumple que

$$(|\varphi|_{||K_j''||})^* = (|\varphi|_{||K_j'||})^* = (f_{||K_j'||})^* = (g_{||K_j'||})^* = (|\psi|_{||K_j'||})^* = (|\psi|_{||K_j''||})^*$$

para todo  $j = 0, \dots, n$ . Además, debido a la naturalidad del isomorfismo entre la cohomología simplicial y la cohomología singular del Teorema 4.40, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^*(L; R) & \xrightarrow{\cong} & H^*(|L|; R) \\ \begin{array}{c} (\varphi_{K_j''})^* \downarrow \\ (\psi_{K_j''})^* \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} (|\varphi|_{||K_j''||})^* \downarrow \\ (|\psi|_{||K_j''||})^* \downarrow \end{array} \\ H^*(K_j''; R) & \xrightarrow{\cong} & H^*(|K_j''|; R) \end{array}$$

En consecuencia,  $(\varphi_{|K_j''|})^* = (\psi_{|K_j''|})^*$  para todo  $j = 0, \dots, n$ . □

**Corolario 4.63.** 1. Sea  $K$  un complejo simplicial finito tal que  $H^\bullet \text{cat}(|K|; R) = n$ . Entonces existe una subdivisión  $K'$  de  $K$  tal que  $H^\bullet \text{scat}(K'; R) = n$ .

2. Sea  $K$  un complejo simplicial finito tal que  $H^\bullet \text{TC}(|K|; R) = n$ . Entonces existe una subdivisión  $K'$  de  $K$  tal que  $H^\bullet \text{sTC}(K'; R) = n$ .

A lo largo de este trabajo, hemos establecido el siguiente diagrama, en el cual las flechas representan desigualdades entre los distintos invariantes considerados. Las flechas rojas indican que dichas desigualdades pueden ser estrictas para cualquier subdivisión baricéntrica (ver Ejemplo 4.57), mientras que las flechas azules señalan que siempre existe una subdivisión para la cual se alcanza la igualdad (ver Teorema 4.62).

$$\begin{array}{ccccc}
\text{sD}(\text{sd}^n \varphi, \text{sd}^n \psi) & \longrightarrow & \text{scat}(\text{sd}^n K) & \longrightarrow & \text{sTC}(\text{sd}^n K) \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
\text{sD}(\varphi, \psi) & \longrightarrow & \text{scat}(K) & \longrightarrow & \text{sTC}(K) \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
\text{H}^\bullet \text{sD}(\varphi, \psi; R) & \longrightarrow & \text{H}^\bullet \text{scat}(K; R) & \longrightarrow & \text{H}^\bullet \text{TC}(K; R) \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
\text{H}^\bullet \text{sD}(\text{sd}^n \varphi, \text{sd}^n \psi; R) & \longrightarrow & \text{H}^\bullet \text{scat}(\text{sd}^n K; R) & \longrightarrow & \text{H}^\bullet \text{TC}(\text{sd}^n K; R) \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
\text{l.c.p. } \mathcal{J}(\varphi, \psi; R) & \longrightarrow & \text{l.c.p. } (K; R) & \longrightarrow & \text{l.c.p. } (\ker \smile; R)
\end{array}$$

$\text{dim}(K) = \text{dim}(K) \longrightarrow \text{dim}(K \times K)$   
 $\text{D}(|\varphi|, |\psi|) \longrightarrow \text{cat}(|K|) \longrightarrow \text{TC}(|K|)$   
 $\text{H}^\bullet \text{D}(|\varphi|, |\psi|; R) \longrightarrow \text{H}^\bullet \text{cat}(|K|; R) \longrightarrow \text{H}^\bullet \text{TC}(|K|; R)$

## 4.10. Cálculos computacionales

En esta sección, utilizando un programa de cálculo simbólico implementado en SageMath, calculamos algunas distancias cohomológicas simpliciales para ciertas triangulaciones de espacios topológicos conocidos. Estos cálculos permiten ilustrar la eficacia del método desarrollado a lo largo del capítulo. Además, recuperamos algún ejemplo expuesto en [33]. Las triangulaciones de los espacios pueden consultarse en [3].

**Ejemplo 4.64.** Sea  $P$  el cociente del complejo simplicial de la Figura 4.10, que se corresponde con una triangulación minimal del plano proyectivo real  $\mathbb{RP}^2$ . Se cumple que  $\text{H}^\bullet \text{scat}(P; \mathbb{Q}) = \text{H}^\bullet \text{scat}(P; \mathbb{R}) = 0$ . Sin embargo, el recubrimiento formado por los subcomplejos

$$\begin{aligned}
K_0 &= [a, b, d] \cup [b, c, d] \cup [b, c, f] \cup [c, d, e], \\
K_1 &= [a, c, e] \cup [a, c, f] \cup [a, d, f] \cup [b, c, f], \\
K_2 &= [a, b, e] \cup [b, c, f] \cup [b, e, f] \cup [d, e, f],
\end{aligned}$$

cumple que la inclusión  $i: K_j \hookrightarrow K$  induce la misma aplicación en cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  que una aplicación simplicial constante para  $j = 0, 1, 2$ . Por lo tanto, se da la igualdad

$$\text{H}^\bullet \text{scat}(P; \mathbb{Z}_2) = \text{dim}(P) = \text{cat}(\mathbb{RP}^2) = 2.$$

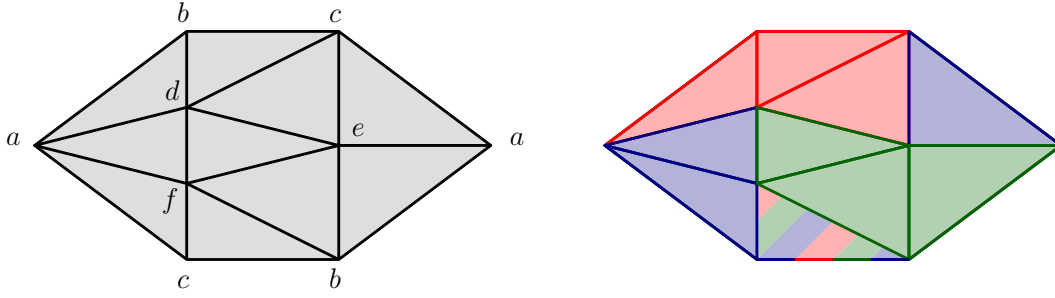


Figura 4.10: Triangulación del plano proyectivo real y recubrimiento asociado a  $H^\bullet \text{scat}(P; \mathbb{Z}_2) = 2$

**Ejemplo 4.65.** Sea  $T$  el cociente del complejo simplicial de la Figura 4.11, que se corresponde con una triangulación minimal del toro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . El recubrimiento formado por los subcomplejos

$$\begin{aligned} K_0 &= [a, b, d] \cup [b, c, g] \cup [b, d, e] \cup [b, e, g] \cup [e, f, g], \\ K_1 &= [a, b, f] \cup [a, c, e] \cup [a, c, g] \cup [a, e, f] \cup [c, e, d], \\ K_2 &= [a, d, g] \cup [b, c, f] \cup [c, d, f] \cup [d, f, g] \cup [e, f, g], \end{aligned}$$

cumple que la inclusión  $i: K_j \hookrightarrow K$  induce la misma aplicación en cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  que una aplicación simplicial constante para  $j = 0, 1, 2$ . En este caso, se tiene que

$$H^\bullet \text{scat}(T; \mathbb{Z}_2) = \dim(T) = \text{cat}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 2.$$

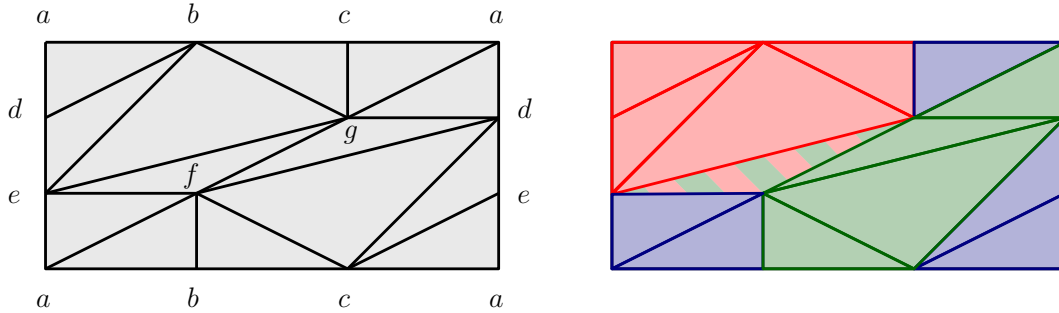


Figura 4.11: Triangulación del toro y recubrimiento asociado a  $H^\bullet \text{scat}(T; \mathbb{Z}_2) = 2$

Además, como  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  es un grupo topológico, siguiendo la Observación 3.35, podemos construir un recubrimiento explícito de  $T \times T$  formado por 3 subcomplejos en los cuales las proyecciones inducen la misma aplicación en cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$ , de manera que

$$H^\bullet \text{sTC}(T; \mathbb{Z}_2) = \text{TC}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 2.$$

Esto facilita implementar soluciones y algoritmos relacionados con la planificación de movimientos de un brazo robótico de dos articulaciones con rotación plana.

**Ejemplo 4.66.** Sea  $K$  el cociente del complejo simplicial de la Figura 4.12, que se corresponde con una triangulación minimal de la botella de Klein. El recubrimiento formado por los subcomplejos

$$\begin{aligned} K_0 &= [a, c, f] \cup [b, c, f] \cup [b, d, f] \cup [d, e, g] \cup [d, f, g] \cup [e, d, h], \\ K_1 &= [a, b, d] \cup [b, c, g] \cup [c, g, h] \cup [e, f, h] \cup [f, g, h], \\ K_2 &= [a, b, d] \cup [a, b, e] \cup [a, c, d] \cup [a, c, f] \cup [a, e, f] \cup [b, e, g] \cup [c, d, h], \end{aligned}$$

cumple que la inclusión  $i: K_j \hookrightarrow K$  induce la misma aplicación en cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  que una aplicación simplicial constante para  $j = 0, 1, 2$ . Se cumple que

$$H^{\bullet \text{scat}}(K; \mathbb{Z}_2) = \dim(K) = \text{cat}(K) = 2.$$

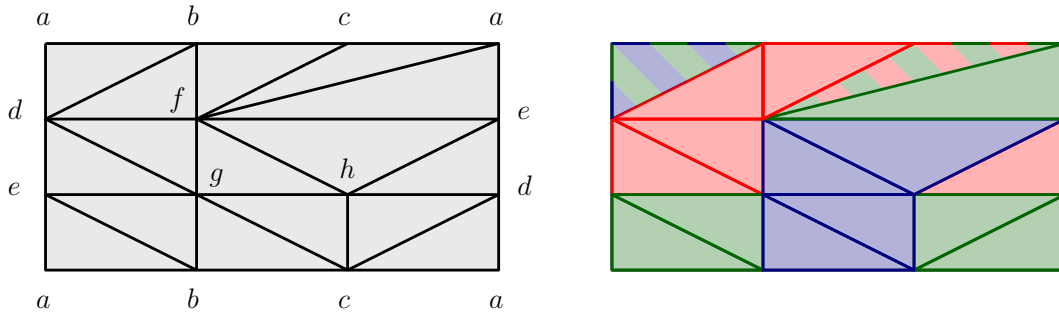


Figura 4.12: Triangulación de la botella de Klein y recubrimiento asociado a  $H^{\bullet \text{scat}}(K; \mathbb{Z}_2) = 2$

**Ejemplo 4.67.** Sea  $K = [0, 1] \cup [0, 2] \cup [1, 2]$  una triangulación de la circunferencia  $\mathbb{S}^1$ , y consideremos el producto  $K \times K$ . El recubrimiento de  $K \times K$  formado por los subcomplejos

$$\begin{aligned} K_0 &= [(1, 1), (2, 2), (2, 1)] \cup [(0, 2), (1, 2), (0, 0)] \cup [(1, 1), (1, 0), (0, 0)] \\ &\quad \cup [(2, 2), (2, 0), (0, 0)] \cup [(0, 1), (0, 2), (1, 2)] \cup [(1, 0), (1, 2), (0, 0)] \\ &\quad \cup [(1, 1), (2, 1), (1, 0)] \cup [(0, 1), (2, 2), (2, 1)] \cup [(0, 1), (2, 2), (0, 2)], \\ K_2 &= [(0, 1), (1, 1), (1, 2)] \cup [(2, 2), (1, 0), (2, 0)] \cup [(1, 1), (2, 2), (1, 2)] \\ &\quad \cup [(2, 2), (0, 2), (0, 0)] \cup [(0, 1), (2, 1), (0, 0)] \cup [(2, 2), (1, 0), (1, 2)] \\ &\quad \cup [(2, 1), (1, 0), (2, 0)] \cup [(2, 1), (2, 0), (0, 0)] \cup [(0, 1), (1, 1), (0, 0)], \end{aligned}$$

cumple que las proyecciones  $\pi_1, \pi_2: K_j \rightarrow K$  inducen la misma aplicación en cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  para  $j = 0, 1$ . En este caso se tiene que

$$H^{\bullet \text{sTC}}(K; \mathbb{Z}_2) = \text{TC}(\mathbb{S}^1) = 1.$$

Esto facilita implementar soluciones y algoritmos relacionados con la planificación de movimientos de un brazo robótico con una articulación de rotación plana.



**Ejemplo 4.68.** Sea  $K$  la triangulación minimal del espacio proyectivo real  $\mathbb{RP}^3$ . El recubrimiento formado por los subcomplejos

$$\begin{aligned} K_0 &= [3, 5, 9, 10] \cup [3, 6, 7, 8] \cup [1, 3, 5, 11] \cup [2, 3, 7, 8] \cup [3, 4, 5, 11] \\ &\quad \cup [1, 2, 3, 7] \cup [1, 3, 5, 10] \cup [3, 4, 5, 9] \cup [3, 6, 9, 10] \cup [2, 3, 4, 8], \\ K_1 &= [1, 4, 8, 10] \cup [3, 6, 8, 9] \cup [1, 5, 6, 11] \cup [3, 4, 8, 9] \cup [5, 6, 7, 8] \\ &\quad \cup [1, 5, 6, 8] \cup [2, 5, 7, 8] \cup [1, 5, 8, 10] \cup [2, 5, 8, 10] \cup [2, 4, 8, 10], \\ K_2 &= [2, 5, 7, 9] \cup [1, 6, 8, 9] \cup [2, 4, 6, 11] \cup [2, 3, 4, 11] \cup [1, 2, 3, 11] \\ &\quad \cup [1, 2, 6, 11] \cup [2, 6, 9, 10] \cup [1, 2, 6, 9] \cup [2, 4, 6, 10] \cup [2, 5, 9, 10], \\ K_3 &= [4, 5, 7, 9] \cup [1, 3, 7, 10] \cup [3, 6, 7, 10] \cup [4, 5, 6, 11] \cup [1, 4, 7, 10] \\ &\quad \cup [4, 6, 7, 10] \cup [1, 4, 8, 9] \cup [1, 2, 7, 9] \cup [1, 4, 7, 9] \cup [4, 5, 6, 7]. \end{aligned}$$

cumple que la inclusión  $i: K_j \hookrightarrow K$  induce la misma aplicación en cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  que una aplicación simplicial constante para  $j = 0, 1, 2, 3$ . Así, obtenemos

$$H^\bullet \text{scat}(K; \mathbb{Z}_2) = \dim(\mathbb{RP}^3) = \text{cat}(\mathbb{RP}^3) = 3.$$

Asimismo, como  $\mathbb{RP}^3$  también es un grupo topológico, podemos construir un recubrimiento explícito de  $K \times K$  formado por 4 subcomplejos en los cuales las proyecciones inducen la misma aplicación en cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$ , de manera que

$$H^\bullet \text{sTC}(K; \mathbb{Z}_2) = \text{TC}(\mathbb{RP}^3) = 3.$$

Además, como  $\mathbb{RP}^3$  es homeomorfo a  $\text{SO}(3, \mathbb{R})$  [7, Proposición 5.67], obtenemos un recubrimiento explícito para implementar soluciones y algoritmos relacionados con el espacio de rotaciones y el gimbal-lock.

**Ejemplo 4.69.** Sea  $K$  la triangulación minimal del plano proyectivo complejo  $\mathbb{CP}^2$ . El recubrimiento formado por los subcomplejos

$$\begin{aligned} K_0 &= [1, 2, 5, 6, 8] \cup [2, 4, 6, 7, 9] \cup [1, 3, 4, 5, 7] \cup [1, 3, 4, 7, 8] \cup [1, 3, 5, 7, 9] \cup [1, 2, 4, 5, 6] \\ &\quad \cup [1, 2, 6, 7, 8] \cup [1, 2, 3, 7, 8] \cup [1, 2, 5, 8, 9] \cup [1, 4, 5, 7, 9] \cup [1, 3, 4, 5, 6] \cup [1, 2, 4, 7, 9], \\ K_1 &= [2, 4, 5, 8, 9] \cup [1, 2, 4, 6, 7] \cup [4, 5, 7, 8, 9] \cup [1, 5, 6, 8, 9] \cup [1, 3, 5, 6, 9] \cup [1, 4, 6, 7, 8] \\ &\quad \cup [1, 3, 4, 6, 8] \cup [3, 5, 6, 7, 9] \cup [3, 4, 6, 8, 9] \cup [4, 6, 7, 8, 9] \cup [5, 6, 7, 8, 9] \cup [1, 3, 6, 8, 9], \\ K_2 &= [2, 3, 4, 6, 9] \cup [1, 2, 3, 7, 9] \cup [2, 3, 6, 7, 9] \cup [1, 2, 4, 5, 9] \cup [2, 3, 4, 8, 9] \cup [3, 4, 5, 7, 8] \\ &\quad \cup [2, 5, 6, 7, 8] \cup [1, 2, 3, 8, 9] \cup [2, 3, 5, 7, 8] \cup [2, 3, 4, 5, 6] \cup [2, 3, 5, 6, 7] \cup [2, 3, 4, 5, 8], \end{aligned}$$

cumple que la inclusión  $i: K_j \hookrightarrow K$  induce la misma aplicación en cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  que una aplicación simplicial constante para  $j = 0, 1, 2$ . Por lo tanto, se tiene que

$$H^\bullet \text{scat}(K; \mathbb{Z}_2) = \text{cat}(\mathbb{CP}^2) = 2.$$

**Ejemplo 4.70.** Sea  $K$  la triangulación minimal de la esfera homológica de Poincaré  $\mathcal{S}$ . El recubrimiento  $\{K_0, K_1\}$  de  $K$  que aparece en la Tabla 4.1 cumple que la inclusión  $i: K_j \hookrightarrow K$  induce la misma aplicación en cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  que una aplicación simplicial constante para  $j = 0, 1$ . Sin embargo, la categoría LS de la esfera homológica de Poincaré es 3 [34, Teorema 1.1]. En este caso

$$H^\bullet \text{scat}(K; \mathbb{Z}_2) = 1 < \text{cat}(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{S}) = 3.$$

**Ejemplo 4.71.** Sean  $K' = [0, 1] \cup [0, 2] \cup [1, 2]$  y  $K'' = [0, 1, 2] \cup [0, 1, 3] \cup [0, 2, 3] \cup [1, 2, 3]$  unas triangulaciones de la circunferencia  $\mathbb{S}^1$  y de la esfera  $\mathbb{S}^2$ , respectivamente. El recubrimiento  $\{K_0, K_1, K_2\}$  del producto  $K = K' \times K''$  que aparece en la Tabla 4.2 cumple que la inclusión  $i: K_j \hookrightarrow K$  induce la misma aplicación en cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  que una aplicación simplicial constante para  $j = 0, 1, 2$ . Así, obtenemos

$$H^\bullet \text{scat}(K; \mathbb{Z}_2) = \text{cat}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) = 2.$$

Esto facilita implementar soluciones y algoritmos relacionados con la planificación de movimientos de un brazo robótico de dos articulaciones, una de rotación plana y otro de rotación espacial.

**Ejemplo 4.72.** Sea  $K = [0, 1, 2] \cup [0, 1, 3] \cup [0, 2, 3] \cup [1, 2, 3]$  una triangulación de la esfera  $\mathbb{S}^2$ , y consideremos el producto  $K \times K$ . El recubrimiento  $\{K_0, K_1, K_2\}$  de  $K \times K$  que aparece en la Tabla 4.3 cumple que las proyecciones  $\pi_1, \pi_2: K_j \rightarrow K$  inducen la misma aplicación en cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  para  $j = 0, 1, 2$ . En este caso, se tiene que

$$H^\bullet \text{sTC}(K; \mathbb{Z}_2) = \text{TC}(\mathbb{S}^2) = 2.$$

Esto facilita implementar soluciones y algoritmos relacionados con la planificación de movimientos de un brazo robótico con una articulación de rotación espacial.

Tabla 4.1: Caras maximales de los subcomplejos que forman un recubrimiento de una triangulación de la esfera homológica de Poincaré

$K_0$	$K_1$
[5, 8, 9, 12], [6, 7, 12, 13], [1, 2, 9, 14]	[1, 3, 4, 12], [10, 13, 15, 16], [2, 3, 7, 10]
[7, 9, 14, 15], [1, 8, 10, 13], [1, 5, 8, 13]	[4, 7, 11, 15], [12, 13, 14, 15], [7, 8, 10, 14]
[2, 8, 12, 15], [1, 2, 6, 14], [13, 14, 15, 16]	[5, 9, 10, 15], [1, 3, 10, 15], [1, 2, 4, 15]
[10, 11, 13, 16], [3, 5, 10, 15], [1, 9, 11, 14]	[2, 4, 11, 15], [3, 5, 11, 14], [1, 5, 6, 14]
[1, 5, 8, 11], [7, 8, 14, 15], [4, 8, 10, 13]	[1, 3, 7, 12], [1, 7, 8, 10], [5, 7, 9, 15]
[5, 8, 9, 13], [2, 7, 9, 14], [1, 5, 11, 14]	[4, 5, 7, 15], [1, 3, 7, 10], [1, 3, 4, 15]
[2, 3, 7, 13], [4, 6, 10, 11], [11, 13, 14, 16]	[1, 2, 6, 15], [2, 3, 5, 11], [3, 4, 5, 14]
[4, 10, 11, 13], [2, 7, 10, 14], [6, 12, 13, 15]	[8, 12, 14, 15], [2, 4, 9, 13], [1, 6, 13, 15]
[2, 6, 10, 14], [2, 5, 10, 12], [4, 6, 10, 14]	[4, 5, 6, 7], [2, 4, 11, 13], [9, 11, 14, 16]
[2, 7, 9, 13], [1, 9, 11, 12], [2, 6, 12, 15]	[4, 6, 7, 11], [3, 12, 13, 14], [1, 2, 4, 9]
[4, 8, 9, 12], [6, 10, 11, 12], [9, 14, 15, 16]	[2, 5, 8, 11], [9, 10, 11, 12], [4, 8, 10, 14]
[1, 5, 6, 13], [1, 10, 13, 15], [3, 7, 12, 13]	[3, 4, 12, 14], [4, 5, 6, 14], [9, 10, 11, 16]
[5, 6, 7, 13], [2, 6, 10, 12], [2, 3, 5, 10]	[1, 7, 8, 11], [7, 8, 11, 15], [3, 4, 5, 15]
[2, 5, 8, 12], [5, 7, 9, 13], [1, 4, 9, 12]	[3, 11, 13, 14], [4, 8, 9, 13], [6, 7, 11, 12]
[2, 8, 11, 15], [5, 9, 10, 12], [4, 8, 12, 14]	[1, 7, 11, 12], [2, 3, 11, 13], [9, 10, 15, 16]

Tabla 4.2: Caras maximales de los subcomplejos que forman un recubrimiento de una triangulación del producto  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$

$K_0$	$K_1$	$K_2$
[(2, 2), (1, 2), (1, 1), (2, 3)]	[(1, 3), (0, 3), (0, 0), (0, 1)]	[(0, 2), (0, 3), (2, 3), (0, 1)]
[(2, 2), (1, 0), (2, 0), (2, 3)]	[(1, 0), (1, 3), (1, 1), (0, 0)]	[(1, 3), (0, 2), (0, 3), (0, 1)]
[(2, 2), (0, 2), (0, 0), (2, 3)]	[(2, 2), (1, 1), (2, 3), (2, 1)]	[(0, 0), (2, 3), (2, 1), (0, 1)]
[(2, 2), (1, 0), (1, 2), (2, 3)]	[(1, 0), (2, 0), (2, 3), (2, 1)]	[(2, 2), (0, 2), (2, 3), (0, 1)]
[(2, 2), (2, 0), (0, 0), (2, 1)]	[(1, 2), (1, 3), (1, 1), (0, 1)]	[(1, 0), (1, 2), (1, 1), (0, 0)]
[(2, 2), (1, 0), (2, 0), (2, 1)]	[(1, 3), (0, 2), (0, 3), (0, 0)]	[(2, 2), (2, 3), (2, 1), (0, 1)]
[(0, 2), (0, 3), (0, 0), (2, 3)]	[(1, 0), (1, 3), (1, 1), (2, 3)]	[(2, 2), (0, 0), (2, 1), (0, 1)]
[(2, 2), (2, 0), (0, 0), (2, 3)]	[(1, 0), (1, 1), (2, 3), (2, 1)]	[(1, 2), (1, 1), (0, 0), (0, 1)]
[(2, 0), (0, 0), (2, 3), (2, 1)]	[(1, 3), (1, 1), (0, 0), (0, 1)]	[(1, 2), (1, 3), (0, 2), (0, 0)]
[(2, 2), (0, 2), (0, 0), (0, 1)]	[(1, 0), (1, 2), (1, 3), (2, 3)]	[(1, 2), (0, 2), (0, 0), (0, 1)]
[(2, 2), (1, 0), (1, 2), (1, 1)]	[(1, 2), (1, 3), (0, 2), (0, 1)]	[(1, 0), (1, 2), (1, 3), (0, 0)]
[(1, 2), (1, 3), (1, 1), (2, 3)]	[(2, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 1)]	[(0, 3), (0, 0), (2, 3), (0, 1)]

Tabla 4.3: Caras maximales de los subcomplejos que forman un recubrimiento de una triangulación del producto  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$

$K_0$	$K_1$	$K_2$
$[(2, 3), (0, 1), (0, 3), (1, 3), (0, 0)]$	$[(3, 3), (2, 2), (2, 0), (3, 2), (0, 0)]$	$[(3, 3), (2, 2), (2, 0), (3, 2), (0, 0)]$
$[(0, 1), (3, 3), (3, 1), (0, 0), (1, 1)]$	$[(2, 2), (2, 1), (0, 0), (1, 1), (1, 0)]$	$[(2, 2), (2, 1), (0, 0), (1, 1), (1, 0)]$
$[(2, 3), (0, 2), (3, 3), (0, 3), (0, 0)]$	$[(2, 2), (2, 0), (2, 1), (0, 0), (1, 0)]$	$[(2, 2), (2, 0), (2, 1), (0, 0), (1, 0)]$
$[(2, 3), (0, 2), (0, 1), (0, 3), (1, 3)]$	$[(2, 3), (3, 3), (1, 3), (1, 1), (1, 0)]$	$[(2, 3), (3, 3), (1, 3), (1, 1), (1, 0)]$
$[(2, 3), (0, 1), (1, 3), (0, 0), (1, 1)]$	$[(2, 3), (3, 3), (2, 2), (2, 0), (0, 0)]$	$[(2, 3), (3, 3), (2, 2), (2, 0), (0, 0)]$
$[(2, 3), (2, 1), (0, 0), (1, 1), (1, 0)]$	$[(2, 3), (2, 0), (2, 1), (0, 0), (1, 0)]$	$[(2, 3), (2, 0), (2, 1), (0, 0), (1, 0)]$
$[(2, 3), (1, 2), (0, 2), (1, 3), (0, 0)]$	$[(2, 3), (1, 2), (3, 3), (2, 2), (1, 0)]$	$[(2, 3), (1, 2), (3, 3), (2, 2), (1, 0)]$
$[(0, 1), (3, 3), (3, 1), (3, 2), (1, 1)]$	$[(2, 3), (3, 3), (2, 1), (1, 1), (1, 0)]$	$[(2, 3), (3, 3), (2, 1), (1, 1), (1, 0)]$
$[(2, 3), (0, 2), (0, 3), (1, 3), (0, 0)]$	$[(3, 3), (2, 0), (3, 1), (2, 1), (0, 0)]$	$[(3, 3), (2, 0), (3, 1), (2, 1), (0, 0)]$
$[(0, 1), (3, 3), (3, 1), (2, 1), (0, 0)]$	$[(1, 2), (0, 1), (2, 2), (0, 0), (1, 1)]$	$[(1, 2), (0, 1), (2, 2), (0, 0), (1, 1)]$
$[(0, 2), (3, 3), (2, 2), (3, 2), (0, 0)]$	$[(2, 3), (0, 1), (3, 3), (2, 1), (0, 0)]$	$[(2, 3), (0, 1), (3, 3), (2, 1), (0, 0)]$
$[(2, 3), (0, 2), (0, 1), (3, 3), (2, 2)]$	$[(2, 3), (1, 2), (2, 2), (0, 0), (1, 0)]$	$[(2, 3), (1, 2), (2, 2), (0, 0), (1, 0)]$
$[(0, 2), (3, 3), (0, 3), (1, 3), (0, 0)]$	$[(1, 2), (0, 2), (0, 1), (2, 2), (0, 0)]$	$[(1, 2), (0, 2), (0, 1), (2, 2), (0, 0)]$
$[(2, 3), (1, 2), (0, 1), (2, 2), (1, 1)]$	$[(2, 3), (1, 2), (1, 3), (0, 0), (1, 0)]$	$[(2, 3), (1, 2), (1, 3), (0, 0), (1, 0)]$
$[(2, 3), (0, 1), (3, 3), (0, 3), (0, 0)]$	$[(1, 2), (2, 2), (0, 0), (1, 1), (1, 0)]$	$[(1, 2), (2, 2), (0, 0), (1, 1), (1, 0)]$
$[(2, 3), (1, 2), (0, 2), (0, 1), (1, 3)]$	$[(0, 2), (0, 1), (2, 2), (3, 2), (0, 0)]$	$[(0, 2), (0, 1), (2, 2), (3, 2), (0, 0)]$
$[(0, 1), (3, 3), (1, 3), (0, 0), (1, 1)]$	$[(3, 3), (3, 0), (2, 0), (3, 1), (1, 0)]$	$[(3, 3), (3, 0), (2, 0), (3, 1), (1, 0)]$
$[(1, 2), (0, 2), (0, 1), (3, 3), (3, 2)]$	$[(3, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 1), (1, 1)]$	$[(3, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 1), (1, 1)]$
$[(2, 3), (1, 2), (0, 2), (0, 1), (2, 2)]$	$[(3, 3), (3, 0), (2, 0), (3, 2), (1, 0)]$	$[(3, 3), (3, 0), (2, 0), (3, 2), (1, 0)]$
$[(2, 3), (0, 2), (0, 1), (3, 3), (0, 3)]$	$[(3, 3), (2, 2), (2, 0), (3, 2), (1, 0)]$	$[(3, 3), (2, 2), (2, 0), (3, 2), (1, 0)]$
$[(2, 3), (0, 2), (3, 3), (2, 2), (0, 0)]$	$[(2, 3), (3, 3), (2, 0), (2, 1), (1, 0)]$	$[(2, 3), (3, 3), (2, 0), (2, 1), (1, 0)]$
$[(2, 3), (1, 2), (0, 1), (1, 3), (1, 1)]$	$[(2, 3), (1, 3), (0, 0), (1, 1), (1, 0)]$	$[(2, 3), (1, 3), (0, 0), (1, 1), (1, 0)]$
$[(0, 2), (0, 1), (3, 3), (2, 2), (3, 2)]$	$[(3, 3), (3, 0), (2, 0), (3, 1), (0, 0)]$	$[(3, 3), (3, 0), (2, 0), (3, 1), (0, 0)]$
$[(0, 1), (3, 3), (2, 2), (3, 2), (2, 1)]$	$[(2, 3), (1, 2), (3, 3), (1, 3), (1, 0)]$	$[(2, 3), (1, 2), (3, 3), (1, 3), (1, 0)]$
$[(3, 3), (1, 3), (0, 0), (1, 1), (1, 0)]$	$[(1, 2), (3, 3), (2, 2), (3, 2), (1, 0)]$	$[(1, 2), (3, 3), (2, 2), (3, 2), (1, 0)]$
$[(2, 3), (0, 1), (2, 1), (0, 0), (1, 1)]$	$[(2, 3), (2, 2), (2, 0), (0, 0), (1, 0)]$	$[(2, 3), (2, 2), (2, 0), (0, 0), (1, 0)]$
$[(0, 1), (3, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 1)]$	$[(2, 3), (3, 3), (2, 0), (2, 1), (0, 0)]$	$[(2, 3), (3, 3), (2, 0), (2, 1), (0, 0)]$
$[(1, 2), (0, 1), (3, 3), (1, 3), (1, 1)]$	$[(2, 3), (3, 3), (2, 2), (2, 0), (1, 0)]$	$[(2, 3), (3, 3), (2, 2), (2, 0), (1, 0)]$
$[(2, 3), (1, 2), (0, 2), (2, 2), (0, 0)]$	$[(0, 1), (2, 2), (2, 1), (0, 0), (1, 1)]$	$[(0, 1), (2, 2), (2, 1), (0, 0), (1, 1)]$
$[(3, 3), (3, 1), (0, 0), (1, 1), (1, 0)]$	$[(3, 3), (3, 1), (2, 1), (1, 1), (1, 0)]$	$[(3, 3), (3, 1), (2, 1), (1, 1), (1, 0)]$
$[(2, 3), (0, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 1)]$	$[(3, 3), (2, 0), (3, 1), (2, 1), (1, 0)]$	$[(3, 3), (2, 0), (3, 1), (2, 1), (1, 0)]$
$[(0, 1), (3, 3), (0, 3), (1, 3), (0, 0)]$	$[(3, 3), (3, 0), (2, 0), (3, 2), (0, 0)]$	$[(3, 3), (3, 0), (2, 0), (3, 2), (0, 0)]$



# Bibliografía

- [1] R. Ayala, E. Domínguez, A. Quintero. *Elementos de la teoría de homología clásica*. Ciencias, 65. Universidad de Sevilla, 2002.
- [2] J. A. Barmak, E. G. Minian. Strong homotopy types, nerves and collapses. *Discrete Comput. Geom.*, 47(2):301–328, 2012.
- [3] B. Benedetti, F. H. Lutz. The Manifold Page, [https://www3.math.tu-berlin.de/IfM/Nachrufe/Frank\\_Lutz/stellar/](https://www3.math.tu-berlin.de/IfM/Nachrufe/Frank_Lutz/stellar/), 2013. Último acceso: 2 de junio de 2025.
- [4] A. Borat, M. Pamuk, T. Vergili. Contiguity distance between simplicial maps. *Turk. J. Math.*, 47(2):664–677, 2023.
- [5] D. C. Cohen, L. Vandembroucq. Topological complexity of the Klein bottle. *J. Appl. Comput. Topol.*, 1(2):199–213, 2017.
- [6] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanré. *Lusternik-Schnirelmann category*. Math. Surv. Monogr. Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.
- [7] M. D. Crossley. *Essential topology*. Springer Undergrad. Math. Ser., Springer, London, 2005.
- [8] E. Fadell. The equivariant Lusternik-Schnirelmann method for invariant functionals and relative cohomological index theories. *Méthodes topologiques en analyse non linéaire*, Sémin. Math. Supér., 95:41–70, 1985.
- [9] M. Farber. Topological complexity of motion planning. *Discrete Comput. Geom.*, 29(2):211–221, 2003.
- [10] M. Farber. *Invitation to topological robotics*. Zur. Lect. Adv. Math., European Mathematical Society, Zürich, 2008.
- [11] Y. Felix, S. Halperin. Rational L.-S. category and its applications. *Trans. Am. Math. Soc.*, 273:1–37, 1982.
- [12] D. Fernández-Ternero, E. Macías-Virgós, E. Minuz, J. A. Vilches. Discrete topological complexity. *Proc. Am. Math. Soc.*, 146(10):4535–4548, 2018.

- [13] D. Fernández-Ternero, E. Macías-Virgós, E. Minuz, J. A. Vilches. Simplicial Lusternik-Schnirelmann category. *Publ. Mat., Barc.*, 63(1):265–293, 2019.
- [14] D. Fernández-Ternero, E. Macías-Virgós, J. A. Vilches. Lusternik-Schnirelmann category of simplicial complexes and finite spaces. *Topology Appl.*, 194:37–50, 2015.
- [15] R. H. Fox. On the Lusternik-Schnirelmann category. *Ann. Math. (2)*, 42:333–370, 1941.
- [16] R. Fritsch, R. A. Piccinini. *Cellular structures in topology*, Camb. Stud. Adv. Math., 19, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [17] T. Ganea. Some Problems on Numerical Homotopy Invariants. *Lecture Notes in Math.*, 249:13–22, 1971.
- [18] J. M. García-Calines. A note on covers defining relative and sectional categories. *Topology Appl.*, 265:14, 2019.
- [19] J. M. García-Calines. Relative sectional category revisited. *Expo. Math.*, 42(5):22, 2024.
- [20] A. J. Hanson. *Visualizing Quaternions*. Morgan Kaufmann. First edition, 2006.
- [21] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [22] S.-T. Hu. *Theory of retracts*. Detroit: Wayne State University Press, 1965.
- [23] D. Kozlov. *Combinatorial algebraic topology*. Algorithms Comput. Math., 21, Springer, Berlin, 2008.
- [24] J. M. Lee. *Introduction to topological manifolds*. Grad. Texts Math., 202, Springer, New York, NY, 2000.
- [25] L. Lusternik, L. Schnirelmann. Existence de trois géodésiques fermées sur toute surface de genre 0. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 188:534–536, 1929.
- [26] L. Lusternik, L. Schnirelmann. Sur le problème de trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 189:269–271, 1929.
- [27] L. Lusternik, L. Schnirelmann. *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*. Actualités Scientifiques et Industrielles. Hermann Paris, 1934.
- [28] E. Macías-Virgós, D. Mosquera-Lois. Homotopic distance between maps. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 172(1):73–93, 2022.
- [29] E. Macías-Virgós, D. Mosquera-Lois, M. J. Pereira-Sáez. Homotopic distance and generalized motion planning. *Mediterr. J. Math.*, 19(6):20, 2022.
- [30] J. P. May. *A concise course in algebraic topology*. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

- 
- [31] J. W. Milnor. On spaces having the homotopy of a CW-complex. *Trans. Am. Math. Soc.*, 90:272–280, 1959.
  - [32] J. R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison Wesley Publishing Company, 1984.
  - [33] A. Méndez-Vázquez. Categoría LS Cohomológica. Trabajo de Fin de Grado. Universidade de Santiago de Compostela, Facultade de Matemáticas, 2024.
  - [34] J. Oprea, Y. Rudyak. Detecting elements and Lusternik-Schnirelmann category of 3-manifolds., In: *Lusternik-Schnirelmann category and related topics (South Hadley, MA, 2001)*, Contemp. Math. 316, AMS, Providence, RI, pp. 181–191, 2002.
  - [35] J. Oprea, J. Strom. Mixing categories. *Proc. Am. Math. Soc.*, 139(9):3383–3392, 2011.
  - [36] V. V. Prasolov. *Elements of combinatorial and differential topology*. Grad. Stud. Math., 74, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
  - [37] J. J. Rotman. *An introduction to algebraic topology*. Grad. Texts Math., 119, Springer-Verlag, 1988.
  - [38] E. H. Spanier. *Algebraic topology*. McGraw-Hill, 1966.



