

MARIO JULIÁN RODRÍGUEZ

SÁNCHEZ DE TOCA

**HIPERSUPERFICIES DE
CURVATURA ADAPTADA EN
ESPACIOS SIMÉTRICOS**

**160€
2025**

**Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología**

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

MARIO JULIÁN RODRÍGUEZ SÁNCHEZ DE TOCA

**HIPERSUPERFICIES DE CURVATURA
ADAPTADA EN ESPACIOS SIMÉTRICOS**

160€
2025

**Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología**

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

© Universidade de Santiago de Compostela, 2025



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reproducción, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>



Esta obra se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra no incluida en la licencia Creative Commons BY-NC-ND 4.0 solo puede ser realizada con la autorización expresa de los titulares, salvo excepción prevista por la ley. Puede Vd. acceder al texto completo de la licencia en este enlace: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>



This work is licensed under a Creative Commons BY NC ND 4.0 international license. Any form of reproduction, distribution, public communication or transformation of this work not included under the Creative Commons BY-NC-ND 4.0 license can only be carried out with the express authorization of the proprietors, save where otherwise provided by the law. You can access the full text of the license at <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

MÁSTER EN MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

Hipersuperficies de curvatura adaptada en espacios simétricos

Mario Julián Rodríguez Sánchez de Toca

Julio, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Índice

Resumen/Abstract	5
Introducción	7
1. Preliminares	9
1.1. Geometría de Riemann	9
1.2. Subvariedades de Riemann	12
1.3. Grupos de Lie, álgebras de Lie y acciones de grupos	14
1.4. Forma de Killing	16
2. Espacios simétricos	19
2.1. Definición y primeras consecuencias	19
2.2. Descomposición de Cartan	22
2.3. Espacios simétricos irreducibles	28
2.4. Espacios de raíces y descomposición de Iwasawa	32
2.5. Modelo resoluble de espacios simétricos de tipo no compacto	39
3. Acciones de cohomogeneidad uno y curvatura adaptada en foliaciones	43
3.1. Algunos resultados conocidos	43
3.2. Cohomogeneidad uno en espacios simétricos de tipo no compacto	46
3.3. Foliaciones tipo \mathfrak{F}_ℓ	47
3.3.1. Resultados conocidos para foliaciones tipo \mathfrak{F}_ℓ	48
3.3.2. Curvatura adaptada en foliaciones tipo \mathfrak{F}_ℓ	50
3.4. Foliaciones tipo \mathfrak{F}_i	52
3.4.1. Resultados conocidos acerca de foliaciones de tipo \mathfrak{F}_i	52
3.4.2. Curvatura adaptada en foliaciones tipo \mathfrak{F}_i	54
Bibliografía	63

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es el de comenzar el estudio sistemático de las hipersuperficies homogéneas de curvatura adaptada en el contexto de los espacios simétricos de tipo no compacto. En este sentido, comenzamos el trabajo con algunos preliminares de Geometría de Riemann para introducir a continuación los espacios simétricos junto con algunas de sus propiedades fundamentales. Luego, pasamos a centrarnos en los espacios simétricos de tipo no compacto, y a detallar cómo éstos pueden ser descritos como grupos de Lie resolvibles con una métrica invariante a la izquierda. A continuación, presentamos las acciones de cohomogeneidad uno en espacios simétricos de tipo no compacto, con especial énfasis en las que producen una foliación de Riemann. Probamos finalmente que, en una amplia clase de espacios simétricos de tipo no compacto, las foliaciones homogéneas de cohomogeneidad uno son de curvatura adaptada.

Abstract

The main aim of this work is to address the study of curvature adapted homogeneous hypersurfaces in symmetric spaces of non-compact type. In this line, we start by presenting some preliminary results concerning Riemannian Geometry in order to bring in symmetric spaces and analyze some of their fundamental properties. Next, we focus on symmetric spaces of non-compact type and we show that they can be described as solvable Lie groups endowed with a left-invariant metric. Finally, we present cohomogeneity one actions on symmetric spaces of non-compact type, paying special attention to those producing a Riemannian foliation. We finally proof that, in a wide class of symmetric spaces of non-compact type, homogeneous foliations of cohomogeneity one are curvature adapted.

Introducción

La geometría de subvariedades ha resultado ser una de las ramas más fructíferas y significativas dentro de la Geometría de Riemann, y, de modo más general, dentro de la Geometría Diferencial. En este sentido, es natural comenzar analizando aquellas subvariedades con un alto grado de simetría, por ejemplo, las subvariedades (extrínsecamente) homogéneas, que son las que pueden describirse como la órbita por un punto de un subgrupo de Lie del grupo de isometrías del espacio ambiente. Esto convierte a los espacios simétricos en un marco particularmente interesante y adecuado para estudiar tal clase de subvariedades, pues son espacios equipados con grupos de isometrías lo suficientemente grandes para este planteamiento.

Otra clase de hipersuperficies de especial interés es la de las hipersuperficies de curvatura adaptada, introducidas por D'Atri [15] en la segunda mitad de la década de 1970, bajo el nombre de *amenable hypersurfaces*. Reciben este nombre, *curvatura adaptada*, porque en cierto modo puede entenderse que su geometría extrínseca está bien adaptada respecto a su geometría intrínseca. En términos más precisos, la manera usual de entender la geometría extrínseca de una hipersuperficie M de una variedad de Riemann \widetilde{M} es a través del operador forma \mathcal{S}_ξ , con respecto a un vector normal ξ a M en \widetilde{M} . Por otra parte, si R es el operador curvatura de \widetilde{M} , el operador de Jacobi $R_\xi = R(\cdot, \xi)\xi$ mide la curvatura intrínseca de \widetilde{M} en la dirección de ξ . Pues bien, la hipersuperficie M se dice de curvatura adaptada si el operador forma y el operador de Jacobi comutan o, equivalentemente, si existe una base para la cual diagonalizan simultáneamente.

En los espacios forma, todas las hipersuperficies son de curvatura adaptada. Como cabe esperar, esto deja de ser así en espacios simétricos en general. De hecho, las hipersuperficies de curvatura adaptada han sido especialmente estudiadas en espacios simétricos de rango uno. Así, en los espacios forma complejos, la condición de curvatura adaptada coincide con la condición de ser Hopf. De forma más concreta, $J\xi$ es una dirección principal del operador forma, donde J denota la estructura compleja del espacio. Las hipersuperficies Hopf con curvaturas principales constantes están clasificadas tanto en los espacios proyectivos complejos [27] como en los espacios hiperbólicos complejos [3]. En el primer caso, se recuperan todos los ejemplos de hipersuperficies homogéneas [40], mientras que en el segundo aparecen ejemplos de hipersuperficies homogéneas no Hopf [11]: la hipersuperficie de Lohnherr [32] y los tubos alrededor de las conocidas como *subvariedades de Berndt-Brück* [5]. Las hipersuperficies de curvatura adaptada también están clasificadas en: los espacios proyectivos cuaterniónicos [4]; los espacios hiperbólicos cuaterniónicos, con la hipótesis adicional

de curvaturas principales constantes [4]; y en el plano proyectivo de Cayley [34].

Con estas consideraciones en mente, nuestro objetivo en este trabajo será estudiar las subvariedades de curvatura adaptada en espacios simétricos de tipo no compacto. A este respecto, en [13] se muestran algunos resultados que simplifican la tarea de caracterización de este tipo de subvariedades. En concreto, se muestra que el estudio de las subvariedades de curvatura adaptada en espacios simétricos se reduce al estudio de dicha propiedad en hipersuperficies.

Usando acciones isométricas, podemos obtener subvariedades homogéneas de un espacio simétrico. En particular, cuando las órbitas principales de una acción isométrica sean hipersuperficies, estaremos hablando de *acciones de cohomogeneidad uno*. Teniendo estas consideraciones presentes, es natural estudiar cuándo las órbitas de las acciones de cohomogeneidad uno en un espacio simétrico son de curvatura adaptada. En el caso concreto de los espacios simétricos de tipo no compacto, se tiene que las acciones de cohomogeneidad uno pueden tener o bien una única órbita singular, o bien ninguna [5]. Las acciones de cohomogeneidad uno sin órbitas singulares inducen foliaciones de Riemann, y cada órbita de las mismas es una hoja. Las acciones de cohomogeneidad uno que inducen foliaciones se estudian y clasifican en [9]. El objetivo final en este trabajo es estudiar la propiedad de curvatura adaptada en las hojas de una foliación de este tipo. De hecho, obtenemos el siguiente

Teorema Principal. *Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico irreducible de tipo no compacto diferente de los siguientes:*

$$\frac{\mathrm{SU}_{r,r+n}}{S(\mathrm{U}_r \mathrm{U}_{r+n})}, \quad \frac{\mathrm{SO}_{4r+2}^*}{\mathrm{U}_{2r+1}}, \quad \frac{\mathrm{Sp}_{r,r+n}}{\mathrm{Sp}_r \mathrm{Sp}_{r+n}}, \quad \frac{\mathrm{E}_6^{-14}}{\mathrm{Spin}(10) \mathrm{U}_1} \quad y \quad \frac{\mathrm{F}_4^{-20}}{\mathrm{Spin}(9)}.$$

Entonces, todas las hojas de cualquier foliación de cohomogeneidad uno en M son de curvatura adaptada.

Con este fin, dedicaremos un primer capítulo a introducir las nociones básicas relacionadas con la Geometría de Riemann, grupos y álgebras de Lie y acciones isométricas necesarias para el desarrollo del trabajo. El segundo capítulo lo dedicaremos a la introducción y estudio de las propiedades básicas de un espacio simétrico, así como a la presentación de los distintos tipos de espacios simétricos que existen. Centrándonos en el caso de los espacios simétricos de tipo no compacto, estudiaremos también algunas de sus descomposiciones, así como un modelo de estos espacios simétricos que nos permite identificarlos como grupos de Lie resolubles dotados de una métrica invariante a la izquierda. Finalmente, presentaremos en el tercer capítulo las acciones de cohomogeneidad uno y algunos resultados relacionados con las mismas, centrándonos especialmente en aquellos referentes a foliaciones de Riemann, inducidas por acciones de cohomogeneidad uno sin órbitas singulares. Una vez presentada la clasificación de este tipo de acciones de cohomogeneidad uno, estudiaremos en cada uno de ellos si las hojas de la foliación son subvariedades de curvatura adaptada.

Capítulo 1

Preliminares

Dedicamos el presente capítulo del texto a introducir los conceptos, la terminología y las notaciones relativas esencialmente a la geometría de subvariedades y a la teoría de acciones isométricas que serán empleadas a lo largo del trabajo.

De un modo más preciso, dedicaremos la Sección 1.1 a introducir algunos de los aspectos centrales de la Geometría de Riemann, como lo son las nociones de variedad de Riemann, métrica, conexión de Levi-Civita, isometría y endomorfismo de curvatura. La Sección 1.2 se centrará en presentar el concepto de subvariedad de Riemann e introducir la segunda forma fundamental. Además, definimos el concepto central del trabajo: subvariedad de curvatura adaptada. La Sección 1.3 la centraremos en acciones isométricas de grupos de Lie sobre variedades de Riemann, aunque para ello recordaremos brevemente los conceptos de grupo de Lie y álgebra de Lie. En la Sección 1.4 desarrollaremos brevemente la teoría de álgebras de Lie, definiendo principalmente los conceptos de álgebra de Lie simple, semisimple, resoluble y nilpotente, e introduciendo la forma de Killing de un álgebra de Lie.

Las primeras dos secciones se confeccionaron usando como referencia [30], así como [13] a la hora hablar de subvariedades de curvatura adaptada. La tercera sección se basa principalmente en [28] en su primera mitad, mientras que en la sección de acciones isométricas (Sección 1.3) se utilizó [1]. En la Sección 1.4 se siguió como referencia [28].

1.1. Geometría de Riemann

Una variedad de Riemann (M, g) es una variedad diferenciable M equipada con una métrica *Riemanniana* g , es decir, un campo tensorial diferenciable bilineal simétrico definido positivo de tipo $(0, 2)$. Esto quiere decir que g es una aplicación diferenciable $g: M \rightarrow T^*M \times T^*M$ (con T^*M el dual del fibrado tangente TM) que a cada punto $p \in M$ le asocia una aplicación bilineal simétrica y definida positiva $g_p(\cdot, \cdot)$, también denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. En consonancia con la notación del producto escalar en cada punto, a partir de ahora denotaremos la métrica como $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Una noción que debemos definir en este punto es el concepto de isometría. Un difeo-

morfismo $f: (M, g) \rightarrow (N, g')$ entre dos variedades de Riemann se dice que es una *isometría* si

$$g'(f_{*p}v, f_{*p}w) = g(v, w), \quad \text{para cualesquiera } v, w \in T_p M \text{ y cualquier } p \in M,$$

donde f_{*p} denota la aplicación diferencial del difeomorfismo f en el punto $p \in M$. Si tomamos el caso particular de que $M = N$ y $g = g'$, f sería una isometría de M en sí mismo. Denotamos el conjunto de las isometrías de una variedad de Riemann en sí misma por $I(M)$. Este conjunto es un grupo de Lie (en [35] se puede encontrar una prueba de este hecho).

Queremos imitar el concepto de derivada covariante que se tiene en superficies, pero no podemos sumar vectores que están en espacios tangentes distintos. Es por ello que tenemos que introducir una conexión. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de los campos de vectores diferenciables en la variedad M y por $\mathcal{C}^\infty(M)$ al conjunto de aplicaciones diferenciables de M en \mathbb{R} . Una *conexión lineal* ∇ es una aplicación

$$\begin{aligned} \nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

tal que, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $a, b \in \mathbb{R}$, satisface:

- (a) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$,
- (b) $\nabla_X (aY + bZ) = a \nabla_X Y + b \nabla_X Z$,
- (c) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y$.

Sea (M, g) una variedad de Riemann, y sea ∇ una conexión lineal sobre M . Diremos que ∇ es *compatible* con la métrica g si $\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$. La conexión ∇ se dirá *simétrica* si satisface $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, donde $[\cdot, \cdot]$ denota el corchete de Lie de campos de vectores. Un resultado fundamental en relación con las conexiones en una variedad de Riemann (M, g) es que existe una única conexión compatible con la métrica g y que además es simétrica. Esta conexión se conoce como *conexión de Levi-Civita* de g o *conexión Riemanniana*. De ahora en adelante, salvo que se indique lo contrario, consideraremos que ∇ es la conexión de Levi-Civita. La conexión de Levi-Civita viene determinada además por la conocida como *fórmula de Koszul*:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2} (X g(Y, Z) + Y g(X, Z) - Z g(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) + g([Z, Y], X) + g([Z, X], Y)). \end{aligned} \tag{1.1}$$

El siguiente paso será usar la conexión para derivar curvas en la variedad M . Sea $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ una curva diferenciable. Un *campo de vectores diferenciable* a lo largo de γ será cualquier aplicación diferenciable $V: I \subset \mathbb{R} \rightarrow TM$ de forma que $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$ para todo $t \in I$. Denotaremos por \mathfrak{X}_t^γ al conjunto de campos de vectores diferenciables de M a lo largo de la curva γ . Por [30, Lemma 4.9], si D es una conexión (no necesariamente la de Levi-Civita), entonces existe un único operador $D_t: \mathfrak{X}_t^\gamma \rightarrow \mathfrak{X}_t^\gamma$ tal que:

- (a) $D_t(\lambda V + \mu W) = \lambda D_t V + \mu D_t W$, para cualesquiera $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vectores diferenciables a lo largo de γ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
- (b) $D_t(fV) = \left(\frac{d}{dt}f\right)V + fD_t V$, para toda función $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable,
- (c) Si V es la restricción a γ de un campo de vectores Y en M , entonces $D_t V(t) = D_{\gamma(t)} Y$.

Diremos entonces que un campo $V \in \mathfrak{X}_t^\gamma$ es un campo de vectores *paralelo* a lo largo de γ si $D_t V = 0$ para todo t en el que esté definido V .

Ahora ya podemos definir el concepto de curva geodésica. Una curva diferenciable $\gamma: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ es *geodésica* (para la conexión de Levi-Civita, pero se define de forma análoga para cualquier otra conexión) si se tiene que $D_t \dot{\gamma}(t) = 0$ en cualquier instante $t \in (a, b)$. De ahora en adelante, cuando la conexión que estemos utilizando sea la de Levi-Civita, usaremos la notación $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}$ en lugar de D_t . Una variedad de Riemann se dice *geodésicamente completa* si toda geodésica maximal (en el sentido de que no se puede extender su dominio sin perder la propiedad de ser geodésica) está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, ya podemos también definir el concepto de distancia entre dos puntos en una variedad de Riemann (M, g) . Supondremos que la variedad es conexa, ya que si no lo fuera basta con reducirse a cada componente conexa para tener los mismos conceptos. La *distancia* entre dos puntos $p, q \in M$ es el ínfimo de las longitudes de las curvas regulares a trozos con extremos en p y q . Esto quiere decir que, salvo en un conjunto finito de puntos $\{t_i\}_{i=1}^n \subset (a, b)$, $\dot{\gamma}(t) \neq 0$, junto con la propiedad de que $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$. La *longitud* de una curva regular $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ se define como

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \equiv \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Con esta definición de distancia, se tiene que cualquier variedad de Riemann conexa es un espacio métrico cuya topología inducida es la misma que la topología de la variedad. Existe una relación entre las variedades geodésicamente completas y las variedades completas como espacios métricos.

Teorema 1.1 (Teorema de Hopf-Rinow. [30, Theorem 6.13]). *Una variedad de Riemann conexa es geodésicamente completa si, y sólo si, es completa como espacio métrico.*

Corolario 1.2 ([30, Corollary 6.15]). *Si (M, g) es una variedad de Riemann conexa y completa, entonces dos puntos se pueden unir por un segmento de geodésica minimizante.*

Ahora que hemos convertido cualquier variedad de Riemann en un espacio métrico, uno podría centrar su atención en las aplicaciones de la variedad en sí misma que preservan la distancia. El siguiente resultado nos indica que éstas son exactamente las isometrías de la variedad de Riemann.

Teorema 1.3 ([23, Theorem 11.1]). *Sea M una variedad Riemanniana y φ una aplicación que preserva distancias de M en sí misma. Entonces M es una isometría.*

Además, las isometrías quedan determinadas por su imagen y diferencial en un único punto:

Lema 1.4 ([23, Lemma 11.2]). *Sean M una variedad Riemanniana, y φ y ψ dos isometrías de M . Supongamos que existe un punto $p \in M$ para el cual $\varphi(p) = \psi(p)$ y $d\varphi_p = d\psi_p$. Entonces $\varphi = \psi$.*

El concepto central de la Geometría de Riemann es el de curvatura. Sea (M, g) una variedad de Riemann. Definimos el *endomorfismo de curvatura (de Riemann)* como el campo tensorial $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por la expresión

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Un último concepto que introducimos en esta parte del capítulo es la curvatura seccional. Dada una variedad de Riemann M y un punto $p \in M$, si Π es un subespacio de dimensión dos de $T_p M$ y $\mathcal{V} \subset T_p M$ es cualquier entorno del 0 de $T_p M$ en el cual \exp_p es un difeomorfismo, $S_\Pi := \exp_p(\Pi \cap \mathcal{V})$ es una subvariedad de dimensión dos de M que contiene a p , que se denomina *sección plana* determinada por Π . La *curvatura seccional* de M asociada a Π , $K(\Pi)$, es la curvatura de Gauss de la superficie S_Π en p con la métrica inducida. Si $\{X, Y\}$ es una base de Π , también se puede denotar $K(\Pi)$ por $K(X, Y)$. Por [30, Proposition 8.8], se tiene que

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}.$$

1.2. Subvariedades de Riemann

Si consideramos una variedad de Riemann $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, M una variedad diferenciable, y una inmersión $f: M \rightarrow \widetilde{M}$, podemos inducir una métrica de Riemann en M , $f^* \widetilde{g}$, conocida como el *pull-back* de \widetilde{g} en M . Esta métrica viene definida por

$$(f^* \widetilde{g})_p(X, Y) := \widetilde{g}_p(f_{*p}X, f_{*p}Y), \quad \text{para cualesquiera } X, Y \in T_p M.$$

De ahora en adelante, salvo que indiquemos lo contrario, supondremos que las subvariedades que consideremos serán embebidas, es decir, que existe un embebimiento $\iota: M \rightarrow \widetilde{M}$. En este caso, podemos dotar a M con una métrica inducida por el pull-back de $\iota^* \widetilde{g} = \widetilde{g}$. De esta forma, tenemos que (M, g) es una *subvariedad de Riemann* embebida en \widetilde{M} . Teniendo esto en cuenta, la dimensión del espacio tangente a M en $p \in M$, $T_p M$, es menor o igual que la del espacio tangente $T_p \widetilde{M}$, siendo $T_p M$ subespacio vectorial de $T_p \widetilde{M}$. Podemos entonces considerar el complemento ortogonal de $T_p M$ con respecto a la métrica \widetilde{g} , que denominaremos *conjunto normal* y denotaremos por $T_p^\perp M$, de forma que podemos expresar $T_p \widetilde{M}$ como suma directa de dos subespacios vectoriales, $T_p \widetilde{M} = T_p M \oplus T_p^\perp M$.

Nuestro siguiente objetivo es dar una conexión de Levi-Civita en M a partir de la conexión de Levi-Civita de \widetilde{M} , que denotaremos por $\widetilde{\nabla}$. Para ello, tomemos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

dos campos de vectores, y sean $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ dos campos de vectores tales que $\tilde{X}|_M = X$ e $\tilde{Y}|_M = Y$. Definiremos el operador $\bar{\nabla}$ como $\bar{\nabla}_X Y = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})|_M$. Se puede comprobar que esta definición no depende de las extensiones \tilde{X} e \tilde{Y} que hayamos elegido, por lo que el operador está bien definido, y además es simétrico ([30, Lemma 8.1]). Nótese que, en principio, $(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})|_M \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ puede tener tanto componente tangencial como normal a M no nulas. Podemos entonces considerar la descomposición ortogonal $\bar{\nabla}_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$, con lo que definimos la *segunda forma fundamental* Π de M como

$$\Pi(X, Y) := (\bar{\nabla}_X Y)^\perp, \quad \text{para cualesquiera } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Si denotamos por ∇ la conexión de Levi-Civita de (M, g) , se satisface la *fórmula de Gauss* ([30, Theorem 8.2])

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Pi(X, Y),$$

donde $\nabla_X Y$ coincide con la parte tangencial de $\bar{\nabla}_X Y$ y $\Pi(X, Y)$ acabamos de definirla como la parte normal.

Ahora introduciremos una pieza fundamental en este trabajo, que es el operador forma de una variedad de Riemann. Denotemos por $\mathfrak{X}^\perp(M)$ al conjunto de campos de vectores diferenciables normales en todo punto a M (como subvariedad de \tilde{M}). Para cada $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M)$, el *operador forma* \mathcal{S}_ξ de M asociado al campo normal ξ es una aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\xi: \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ X &\longmapsto \mathcal{S}_\xi X, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{S}_\xi X$ es tal que $g(\mathcal{S}_\xi X, Y) = g(\Pi(X, Y), \xi)$, para cada $Y \in \mathfrak{X}(M)$. El operador forma es autoadjunto con respecto a la métrica g , es decir,

$$\langle X, \mathcal{S}_\xi Y \rangle = \langle \mathcal{S}_\xi X, Y \rangle, \quad \text{para cada } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Si aplicamos la ecuación de Weingarten,

$$\langle \bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle = -\langle \xi, \Pi(X, Y) \rangle, \tag{1.2}$$

siendo $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ [30, Lemma 8.3], al operador forma, obtenemos

$$\mathcal{S}_\xi X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^\perp, \quad \text{para cualesquiera } X \in \mathfrak{X}(M), \quad \xi \in \mathfrak{X}^\perp(M). \tag{1.3}$$

El objetivo final de este trabajo es el estudio de las hipersuperficies de curvatura adaptada en espacios simétricos de tipo no compacto. Por lo tanto, ahora vamos a introducir los conceptos que necesitaremos para tratar con éstas.

Sea M una subvariedad de \tilde{M} y sea ξ un campo de vectores normales a M en \tilde{M} , podemos considerar el *operador de Jacobi*, $R_\xi := R(\cdot, \xi)\xi$, donde R denota el endomorfismo de curvatura de \tilde{M} . Por lo tanto, este operador nos permite medir la curvatura intrínseca de \tilde{M} . Tanto el operador de Jacobi como el operador forma son autoadjuntos, sus autova-

lores representan las curvaturas extremas, y sus autoespacios indican las direcciones para las cuales la curvatura se hace extrema. Decimos entonces que una subvariedad M es *de curvatura adaptada a \widetilde{M}* si para cada vector normal a M , ξ , en un punto $p \in M$, el operador de Jacobi deja invariante $T_p M$, $R_\xi(T_p M) \subset T_p M$, y si existe una base de $T_p M$ en la que diagonalizan \mathcal{S}_ξ y $K_\xi := R_\xi|_{T_p M}$ de forma simultánea. Alternativamente, la segunda condición se puede formular como:

$$\mathcal{S}_\xi \circ K_\xi = K_\xi \circ \mathcal{S}_\xi;$$

es decir, los operadores comutan entre sí. Denominaremos *operador normal de Jacobi* de M con respecto a ξ al operador K_ξ . Para comprobar si una subvariedad es de curvatura adaptada, es claro que solamente hace falta comprobar estas dos propiedades para vectores normales unitarios.

1.3. Grupos de Lie, álgebras de Lie y acciones de grupos

Recordemos que un *grupo de Lie* G es una variedad diferenciable y un grupo en el que la aplicación multiplicación $m: G \times G \rightarrow G$, dada por $m(g, h) = gh$, es diferenciable, así como lo es la inversión $i: G \rightarrow G$, dada por $i(g) = g^{-1}$, para cualesquiera $g, h \in G$. Dado un grupo de Lie G y $g \in G$, denotaremos las aplicaciones multiplicación por la izquierda y por la derecha como $L_g: G \rightarrow G$ (dada por $L_g(h) = gh$) y $R_g: G \rightarrow G$ (dada por $R_g(h) = hg$), respectivamente. Dado un grupo de Lie G , un *subgrupo de Lie* de G será un subgrupo de G que también es grupo de Lie. Un hecho importante al respecto es que un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G es un subgrupo de Lie embebido en G [31, Theorem 20.12].

Por otra parte, recordemos también que un *álgebra de Lie* \mathfrak{g} real es un espacio vectorial real dotado de una aplicación bilineal, $[\cdot, \cdot]$, que se suele denominar *corchete*, que además es antisimétrica y verifica la *identidad de Jacobi*, esto es,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad \text{para cualesquiera } X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Cada grupo de Lie lleva asociada una única álgebra de Lie, isomorfa como espacio vectorial a $T_e G$ (denotando por $e \in G$ al neutro del grupo de Lie), y conformada por todos los campos de vectores invariantes por la izquierda de G ; es decir, los campos de vectores $X \in \mathfrak{X}(G)$ tales que $X \circ L_g = L_{g*} \circ X$ para todo $g \in G$. El corchete del álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie G es precisamente el corchete de los campos de vectores de G .

Entre un grupo de Lie y su álgebra de Lie asociada existe la *aplicación exponencial*, $\text{Exp}: \mathfrak{g} \rightarrow G$, que a cada $X \in \mathfrak{g}$ le hace corresponder $\alpha_X(1)$, siendo $\alpha_X: \mathbb{R} \rightarrow G$ la única curva integral del campo de vectores X en G con $\alpha(0) = e$ y $\alpha'_X(t) = X_{\alpha_X(t)}$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. La aplicación exponencial permite establecer un diagrama comutativo que involucra homomorfismos de grupos de Lie (homomorfismos de grupos que son además diferenciables). Sea $f: G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie entre G y H (cuyas álgebras de Lie son \mathfrak{g} y \mathfrak{h} , respectivamente), y sea $f_*: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ su diferencial en el neutro asociada; entonces el siguiente diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{f_*} & \mathfrak{h} \\
 \text{Exp}_G \downarrow & & \downarrow \text{Exp}_H \\
 G & \xrightarrow{f} & H
 \end{array}$$

Definimos la *aplicación adjunta* de grupos de Lie como aquella que lleva un elemento $g \in G$ en $\text{Ad}(g) = (I_g)_*$, siendo $I_g: G \rightarrow G$ la aplicación dada por $I_g(h) = ghg^{-1}$. La aplicación adjunta de álgebras de Lie, que denotamos por ad , es la diferencial de la aplicación diferencial de grupos de Lie, $\text{ad} = \text{Ad}_*$, o equivalentemente la aplicación que asocia a cada $X \in \mathfrak{g}$ la aplicación $\text{ad}(X)$, dada por $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$, para cada $Y \in \mathfrak{g}$.

Recordemos también el concepto de *centro* tanto para grupos como álgebras de Lie. Para un álgebra de Lie \mathfrak{g} , $Z(\mathfrak{g})$ se define como $Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}$. Para un grupo de Lie G , su definición es $Z(G) = \{g \in G : gh = hg, \text{ para todo } h \in G\}$. El centro a nivel de grupos resulta coincidir con el núcleo de la aplicación adjunta Ad , $Z(G) = \ker(\text{Ad})$, y $Z(\mathfrak{g})$ resulta ser el álgebra de Lie asociada a $Z(G)$ [31, Problems 20-20, 20-22].

Pasemos ahora a tratar con acciones diferenciables. Sean G un grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Se define una *acción diferenciable por la izquierda* φ de G sobre M como una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned}
 \varphi: G \times M &\longrightarrow M \\
 (g, p) &\longmapsto \varphi(g, p),
 \end{aligned}$$

tal que

1. $\varphi(e, p) = p$, para $e \in G$ el elemento neutro y cualquier $p \in M$.
2. $\varphi(g, \varphi(h, p)) = \varphi(gh, p)$, con $p \in M$ y $g, h \in G$.

Normalmente usaremos la notación $g \cdot p$ para referirnos a la acción diferenciable $\varphi(g, p)$. Una acción diferenciable de G sobre una variedad de Riemann M se dice *isométrica* para cada $g \in G$, el difeomorfismo $\varphi_g: M \rightarrow M$ definido como $p \mapsto g \cdot p$ es una isometría.

Definimos la órbita de la acción diferenciable φ pasando por un punto $p \in M$ como el conjunto

$$G \cdot p = \{g \cdot p : g \in G\}.$$

Definimos también el grupo de isotropía de una acción diferenciable en un punto $p \in M$ como el conjunto

$$G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}.$$

Una acción diferenciable se dice *libre* si $g \cdot p = p$ para algún $p \in M$, implica que $g = e$. Una acción diferenciable se dice *efectiva* si $g \cdot p = p$ para todo $p \in M$, tiene como consecuencia que $g = e$. Si una acción isométrica es efectiva, se tiene que G es isomorfo a un subgrupo del grupo $I(M)$ de isometrías de M .

Una acción diferenciable se dice *transitiva* si para cualesquiera $p, q \in M$, existe un $g \in G$ tal que $g \cdot p = q$. Cuando se tiene una acción transitiva de un grupo G sobre

una variedad diferenciable M , ésta resulta ser difeomorfa al cociente del grupo G que actúa transitivamente sobre ella por el grupo de isotropía en un punto cualquiera de la variedad [31, Theorem 21.18]. En este caso, la variedad M también se puede denominar *G-espacio homogéneo*. Como veremos, éste será el tipo de espacios con el que trataremos en los siguientes capítulos.

Una acción diferenciable se dice *propia* si la aplicación $G \times M \rightarrow M \times M$, dada por $(g, p) \mapsto (p, g \cdot p)$ es propia; es decir, la preimagen de un compacto por esta aplicación es compacto.

Si consideramos una acción diferenciable de un grupo G sobre una variedad diferenciable M , decimos que $p \in M$ está relacionado con $q \in M$ si existe $g \in G$ tal que $g \cdot p = q$. Esto establece una relación de equivalencia en M , donde cada punto está relacionado con todos los demás puntos de su órbita. Podemos entonces considerar el *espacio de órbitas* de la acción diferenciable, M/G , al cual se le dota de la topología cociente. Las órbitas de una acción siempre son subvariedades inmersas en M , pero si además la acción es propia, las órbitas resultan ser subvariedades embebidas [31, Proposition 21.7].

Una subvariedad P de una variedad de Riemann M se dice (*extrínsecamente*) *homogénea* si para cualesquiera dos puntos $p, q \in P$, existe una isometría g de M tal que $q = g(p)$ y $g(P) = P$. Equivalentemente, si P es cerrada, P es homogénea si existe un subgrupo de Lie H del grupo de isometrías de M , $I(M)$, tal que $P = H \cdot p$, para algún $p \in P$; o lo que es lo mismo, P es una órbita de una acción isométrica sobre M . Una subvariedad homogénea P de M es embebida si $H = \{g \in I(M) : g(P) = P\}$ es un subgrupo cerrado (por lo tanto es subgrupo de Lie) de $I(M)$; es decir, la acción es propia.

Proposición 1.5 ([17, Theorem 4]). *Sea G un subgrupo de Lie cerrado de $I(M)$. Entonces, la acción $\varphi_p : G \times M \rightarrow M$, dada por $\varphi(g, p) = g(p)$, es propia. Es más, G actúa propiamente sobre M si, y sólo si, G es un subgrupo cerrado de $I(M)$.*

1.4. Forma de Killing

En esta sección recogemos algunas de las definiciones básicas relacionadas con las álgebras de Lie, así como la definición de la forma de Killing, junto con algunos resultados que utilizaremos en capítulos posteriores.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita. Definimos la *serie derivada* de \mathfrak{g} como

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(0)}], \quad \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}], \quad \dots, \quad \mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}], \quad \dots$$

Por definición de ideal de un álgebra de Lie, se tiene que todos los elementos de la serie derivada de \mathfrak{g} son ideales de esta álgebra de Lie. Decimos que el álgebra de Lie \mathfrak{g} es *resoluble* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$. En particular, diremos que \mathfrak{g} es *resoluble en k pasos* si $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ y $\mathfrak{g}^{(k-1)} \neq 0$.

Por otra parte, también podemos definir la *serie descendente* del álgebra de Lie \mathfrak{g} como

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0], \quad \mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1], \quad \dots, \quad \mathfrak{g}_n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{n-1}], \quad \dots$$

Resulta de nuevo que cada elemento de la serie descendente es un ideal de \mathfrak{g} . Diremos que \mathfrak{g} es *nilpotente* si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}_k = 0$. Diremos que además es *nilpotente en k pasos* si $\mathfrak{g}_k = 0$ y $\mathfrak{g}_{k-1} \neq 0$.

Por un argumento inductivo, se comprueba que $\mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] = \mathfrak{g}_k$, con lo que toda álgebra de Lie nilpotente es resoluble. El recíproco no es necesariamente cierto: podemos considerar

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\},$$

que es resoluble, pero no nilpotente, con el corchete usual de las álgebras de Lie matriciales, dado por $[A, B] = AB - BA$, con $A, B \in \mathfrak{g}$. También se tiene que si un álgebra de Lie es abeliana (i.e. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$), es tanto resoluble como nilpotente en un paso.

Definimos el *radical* de un álgebra de Lie \mathfrak{g} , $\text{rad}(\mathfrak{g})$, como el único ideal resoluble maximal para la inclusión. Un álgebra de Lie \mathfrak{g} se dice que es *simple* si tiene dimensión $\dim(\mathfrak{g}) \geq 2$ y si no tiene ideales propios no triviales.

Por su parte, un álgebra de Lie *semisimple* es aquella cuyos ideales resolubles son triviales, es decir, $\text{rad}(\mathfrak{g}) = 0$. De esta definición se sigue que el único ideal abeliano de \mathfrak{g} debe ser el 0. El recíproco de esta afirmación también resulta ser cierto. En efecto, supongamos que $\text{rad}(\mathfrak{g})$ es no trivial. Como $\text{rad}(\mathfrak{g})$ es resoluble, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\text{rad}(\mathfrak{g})^{(k)} = [\text{rad}(\mathfrak{g})^{(k-1)}, \text{rad}(\mathfrak{g})^{(k-1)}] = 0$, con $\text{rad}(\mathfrak{g})^{(k-1)} \neq 0$. Por lo tanto, $\text{rad}(\mathfrak{g})^{(k-1)}$ sería un ideal abeliano de \mathfrak{g} no nulo, llegando a contradicción. Además, un álgebra de Lie es semisimple si, y sólo si, es suma directa de álgebras de Lie simples [28, Theorem 1.54].

Definimos la *forma de Killing* del álgebra de Lie \mathfrak{g} como la aplicación $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la expresión

$$B(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)), \quad \text{para cualesquiera } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Se puede comprobar que la forma de Killing es una forma bilineal simétrica de \mathfrak{g} .

Finalmente, enunciamos algunos resultados que utilizaremos en los capítulos siguientes. Comenzamos por dar un criterio para determinar la semisimplicidad de un álgebra de Lie a partir de su forma de Killing, conocido como *criterio de Cartan para la semisimplicidad*.

Teorema 1.6 ([28, Theorem 4.15]). *Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es semisimple si, y sólo si, su forma de Killing es no degenerada.*

Decimos que un álgebra de Lie es *compacta* si existe un grupo de Lie G compacto cuya álgebra de Lie sea \mathfrak{g} . Las álgebras de Lie compactas semisimples admiten la siguiente caracterización.

Proposición 1.7 ([41, Proposition 3.25]). *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie, y sea B su forma de Killing. La forma B es definida negativa si, y sólo si, \mathfrak{g} es compacta con $Z(\mathfrak{g}) = 0$.*

Proposición 1.8 ([41, Proposition 3.24]). *Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie compacta, entonces existe un producto interior en \mathfrak{g} para el cual $\text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es antisimétrico para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

El último resultado que presentamos en este capítulo nos indica cuál es el comportamiento de la forma de Killing con respecto a automorfismos del álgebra de Lie. Recordemos que un *automorfismo* de un grupo (respectivamente álgebra) de Lie es un isomorfismo del grupo (álgebra) de Lie en sí mismo. Recordemos también que un automorfismo de un grupo de Lie G tiene por diferencial un automorfismo de su álgebra de Lie \mathfrak{g} . Denotaremos por $\text{Aut}(G)$ al conjunto de automorfismos de un grupo de Lie G y por $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ al conjunto de automorfismos de un álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Proposición 1.9 ([41, Proposition 1.37]). *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie, B su forma de Killing y $A \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$. Entonces*

- (a) *B es invariante por A , es decir, $B(AX, AY) = B(X, Y)$ para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{g}$.*
- (b) *Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. Entonces $B(\text{ad}(Z)X, Y) + B(X, \text{ad}(Z)Y) = 0$.*

Capítulo 2

Espacios simétricos

Este capítulo lo dedicaremos a la introducción y al estudio de los espacios simétricos, con especial énfasis en los de tipo no compacto. Comenzamos por dar la definición de espacio simétrico en la Sección 2.1, en la que también demostramos que son variedades de Riemann completas y homogéneas. En la Sección 2.2 pasamos a centrarnos en las herramientas algebraicas relacionadas con los espacios simétricos, y comenzamos por introducir la conocida como *descomposición de Cartan*. Ésta nos permitirá distinguir entre espacios simétricos de tipo Euclíadiano, de tipo compacto o de tipo no compacto, lo cual detallaremos en la Sección 2.3. En la Sección 2.4, nos centraremos en la descomposición de Iwasawa asociada a los espacios simétricos de tipo no compacto, para lo cual tendremos que introducir también la descomposición en espacios de raíces y la teoría de espacios de raíces. Finalmente, en la Sección 2.5 veremos que todo lo anterior nos permite identificar cada espacio simétrico de tipo no compacto con un grupo de Lie resoluble con una métrica invariante a la izquierda.

Este capítulo ha sido escrito tomando como referencias [23] y [41] para la Sección 2.1, la Sección 2.2 y la Sección 2.3. Para la Sección 2.4, los resultados presentados aparecen reflejados en [28], pero para su adaptación al capítulo se utilizó [20, Section 3.1]. Para la elaboración de la Sección 2.5 se siguió [20, Section 3.2].

2.1. Definición y primeras consecuencias

Diremos que una variedad de Riemann conexa, (M, g) , es un *espacio simétrico (global)* si en cada punto $p \in M$ existe una isometría $s_p: M \rightarrow M$, conocida como *reflexión geodésica* en p , con las siguientes propiedades:

1. Fija el punto p , esto es, $s_p(p) = p$.
2. La diferencial de s_p en p , $(s_p)_{*p}: T_p M \rightarrow T_p M$, es $(s_p)_{*p} = -\text{Id}$.

Esta definición también se puede dar localmente. Un *espacio simétrico local* es una variedad de Riemann conexa, (M, g) , tal que para todo punto $p \in M$, existe un $r > 0$ para el cual podemos encontrar una isometría $s_p: B_p(r) \rightarrow B_p(r)$ que satisface las dos propiedades anteriores. Recordemos que $B_p(r) = \{q \in M : d(p, q) < r\}$ se conoce como *bola geodésica*.

Sea M un espacio simétrico y sea s_p la reflexión geodésica por $p \in M$. Observemos la isometría que estamos considerando es una *involución* ya que $s_p^2 = \text{Id}$. En efecto, se tiene que $s_p(s_p(p)) = s_p(p) = p$ y $(s_p)_{*p}^2 = (s_p)_{*p}(s_p)_{*p} = -(s_p)_{*p} = \text{Id}$, con lo que tenemos una isometría que deja fijo p y con diferencial la identidad, algo que comparte con la aplicación identidad. Por lo tanto, usando el Lema 1.4, deducimos que $s_p^2 = \text{Id}$.

Una serie de propiedades que se derivan directamente de la definición de espacio simétrico se recogen en el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Sean M un espacio simétrico, $p \in M$ un punto, y s_p su reflexión geodésica. Se tiene que:*

- (a) *Si $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ es una geodésica tal que $\gamma(0) = p$, entonces $s_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ para cualquier $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, donde $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.*
- (b) *M es completo.*
- (c) *M es un espacio homogéneo.*

Demostación. Demostremos cada uno de los puntos por separado:

- (a) Como s_p es una isometría, entonces la curva α , que definimos como $\alpha := s_p \circ \gamma$ es una geodésica tal que $\alpha(0) = (s_p \circ \gamma)(0) = s_p(p) = p$ y $\dot{\alpha}(0) = (s_p)_{*p}(\dot{\gamma}(0)) = -\dot{\gamma}(0)$. Como dos geodésicas que pasan en un instante t por un mismo punto con la misma velocidad deben ser la misma, deducimos que $\alpha(t)$ debe ser exactamente $\gamma(-t)$.
- (b) Usando el Teorema 1.1, como M es conexo por definición, basta comprobar que es geodésicamente completo para tener que es completo como espacio métrico. Consideremos entonces $\gamma: [0, t_0) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ una geodésica con $\gamma(0) = p$. Lo que haremos será extenderla mediante reflexiones geodésicas respecto de puntos sobre γ suficientemente cerca del final de la geodésica. Sea $\epsilon > 0$, y veamos que podemos reflejar la geodésica hasta un instante $t_0 + \epsilon$ siempre que $\epsilon < \frac{t_0}{2}$. En efecto, consideremos la curva $\tilde{\gamma}: (-\epsilon, t_0 - \epsilon) \rightarrow M$ dada por $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t + t_0 - \epsilon)$. Esta curva verifica $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(t_0 - \epsilon)$ y $\tilde{\gamma}'(0) = -\gamma'(t_0 - \epsilon)$. Ahora vamos a definir la curva $\beta(t) = s_{\gamma(t_0 - \epsilon)} \circ \tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(-t)$; es decir, $\beta(t) = \gamma(t + t_0 - \epsilon)$, y está definida mientras $t + t_0 - \epsilon < t_0$. Pero por otra parte β está definida mientras $t_0 - \epsilon + t_0 - \epsilon > t_0$, de lo que se deduce que podemos prolongar γ por reflexión hasta un instante $t_0 + \epsilon$ con $\epsilon < \frac{t_0}{2}$. Repitiendo el proceso sucesivamente, podemos prolongar tanto como queramos las geodésicas; es decir, las podemos definir en todo \mathbb{R} . Por tanto, M es geodésicamente completo, y entonces es completo. En la Figura 2.1 se puede ver un esquema del proceso seguido en esta demostración.
- (c) Veamos que M es una variedad homogénea. Sean $p, q \in M$ dos puntos, y, usando el Corolario 1.2 junto con el apartado anterior, sea $\gamma: [-t_0, t_0] \rightarrow M$ un segmento de geodésica que los une, siendo $\gamma(-t_0) = p$ y $\gamma(t_0) = q$. Sea $m = \gamma(0) \in M$ el punto medio del segmento de geodésica. Consideremos la reflexión geodésica en m , s_m , así como la curva $\beta(t) := (s_m \circ \gamma)(t)$. Entonces, usando el primer apartado, se tiene que $\beta(t) = \gamma(-t)$, de lo que tenemos que $s_m(p) = s_m(\gamma(-t_0)) = \beta(-t_0) = \gamma(t_0) = q$. \square

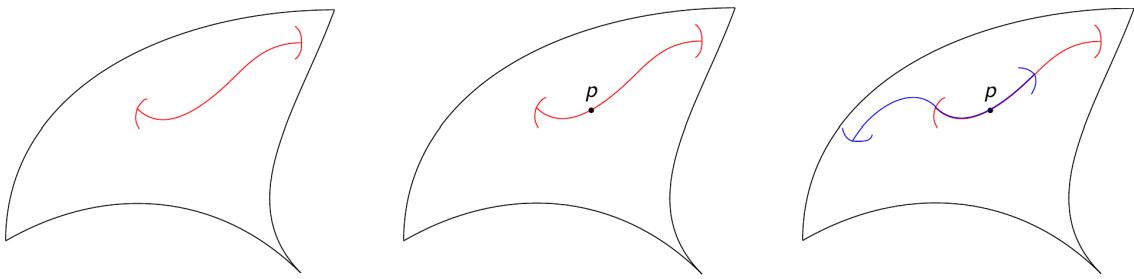


Figura 2.1: Esquema de extensión de geodésicas en un espacio simétrico. Primero solamente teniendo un arco de la geodésica, luego seleccionando un punto suficientemente cerca del extremo de la geodésica y finalmente consiguiendo una geodésica prolongada por reflexión en el punto elegido.

El resultado (c) de la proposición anterior nos da un hecho importante, y es que el conjunto de isometrías de M , $I(M)$ (que ya indicamos en el capítulo anterior que era un grupo de Lie), actúa transitivamente sobre el espacio simétrico M . Por lo tanto M será difeomorfo, como vimos en la Sección 1.3, al cociente de $I(M)$ por el grupo de isotropía de un punto $p \in M$, $M \cong \frac{I(M)}{I(M)_p}$. Este difeomorfismo vendrá dado por

$$\begin{aligned}\Phi: \frac{I(M)}{I(M)_p} &\longrightarrow M \\ \sigma I(M)_p &\longmapsto \sigma(p).\end{aligned}$$

Además, veremos a continuación que nos podemos restringir a la componente conexa de la identidad de $I(M)$:

Proposición 2.2. *Sea $G = I^0(M)$ la componente conexa de la identidad del grupo de isometrías $I(M)$ de un espacio simétrico M . Entonces G es un grupo de Lie que actúa transitivamente sobre M .*

*Demuestra*ión. Nótese que la componente conexa de la identidad de un grupo de Lie también es un grupo de Lie (véase, por ejemplo, [31, Proposition 7.12 y Lemma 7.15]).

Solamente nos resta ver que $I^0(M)$ actúa transitivamente sobre M . Para ello, consideremos dos puntos $p, q \in M$ y veamos que existe $\sigma \in I^0(M)$ tal que $\sigma(p) = q$. Ya sabemos, por el apartado (b) de la Proposición 2.1, que podemos unir p y q por un segmento de geodésica $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ (con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$). Ahora, usando el apartado (c) de la Proposición 2.1, tenemos $s_{\gamma(\frac{1}{2})}(p) = q$. Como $s_p(p) = p$, se tiene que $(s_{\gamma(\frac{1}{2})} \circ s_p)(p) = q$. Consideremos la aplicación continua (se puede comprobar que, en efecto, esta aplicación es continua en la topología compacto-abierta de $I(M)$, pero no daremos aquí los detalles de tal prueba)

$$\begin{aligned}\Psi: [0, 1] &\longrightarrow I(M) \\ t &\longmapsto s_{\gamma(\frac{t}{2})} \circ s_p,\end{aligned}$$

para la cual se tiene que $\Psi(0) = s_p^2 = \text{Id}$ y $\Psi(1) = s_{\gamma(\frac{1}{2})} \circ s_p$; es decir, es un camino en $I(M)$ que une la identidad con $s_{\gamma(\frac{1}{2})} \circ s_p$. Por tanto, $s_{\gamma(\frac{1}{2})} \circ s_p$ es un elemento de $I^0(M)$ que lleva p en q . \square

A partir de ahora, salvo que indiquemos lo contrario, consideraremos un espacio simétrico M como cociente de $G = I^0(M)$ por $K = G_p$, siendo $p \in M$. Cabe observar que es posible que, para un cierto $q \in M$, s_q no pertenezca a G .

Algunos ejemplos sencillos de espacios simétricos son los espacios Euclidianos \mathbb{R}^n , las esferas \mathbb{S}^n y los espacios hiperbólicos reales $\mathbb{R}H^n$. Veamos primero que \mathbb{R}^n es un espacio simétrico con la métrica usual. Para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$, consideremos la aplicación dada por $s_p(p + v) = p - v$, con $v \in \mathbb{R}^n$. Esta aplicación es una isometría trivialmente, ya que $(s_p)_{*(p+v)} = \text{Id}$. Además, $s_p(p) = p$ y $s_{*p} = -\text{Id}$, con lo que s_p es una reflexión geodésica respecto del punto $p \in \mathbb{R}^n$, con lo que \mathbb{R}^n es un espacio simétrico.

Ahora veamos que las esferas \mathbb{S}^n son espacios simétricos. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la métrica usual del espacio Eucliano \mathbb{R}^{n+1} . Estamos considerando $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \|p\| = 1\}$ la esfera de radio uno de dimensión n , la cual se puede dotar de métrica mediante el pull-back de la métrica de \mathbb{R}^{n+1} . Consideramos un punto $p \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Definamos la aplicación $\tilde{s}_p: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, dada por $\tilde{s}_p(q) = -q + 2\langle q, p \rangle p$. La restricción de esta aplicación \tilde{s}_p a \mathbb{S}^n , $s_p = \tilde{s}_p|_{\mathbb{S}^n}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ es una reflexión geodésica en \mathbb{S}^n . En efecto, consideremos una base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} , $\{v_0, \dots, v_n\}$, con $p = v_0$. La aplicación s_p que estamos considerando lleva $q = \sum_{i=0}^n \langle q, v_i \rangle v_i$ en $s_p(q) = \langle q, v_0 \rangle - \sum_{i=1}^n \langle q, v_i \rangle v_i$; es decir, mantiene la proyección de q en la dirección de p intacta y refleja las otras n componentes de q . Veamos que s_p es reflexión geodésica. Lo primero es observar que la aplicación s_p es una aplicación lineal, con lo que coincide con su diferencial, $(s_p)_{*q} = s_p$. Además, se puede verificar que $\langle s_p(q), s_p(q') \rangle = \langle q, q' \rangle$, con lo que se comprueba que s_p es isometría. Se tiene además que $s_p(p) = p$, y en el espacio tangente a p , $T_p \mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p \rangle = 0\}$, se tiene que $(s_p)_{*q} = -\text{Id}$, con lo que concluimos que \mathbb{S}^n es un espacio simétrico.

El caso del espacio hiperbólico n -dimensional real es análogo al de la esfera. Este espacio se define como

$$\mathbb{R}H^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{1,n}, \langle x, x \rangle = 1, x_0 > 0\},$$

donde $\mathbb{R}^{1,n}$ denota el espacio Eucliano dotado con la métrica definida por

$$\langle x, y \rangle = \langle (x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_n) \rangle = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

La aplicación restricción de $s_p: \mathbb{R}^{1,n} \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$, definida por $s_p(q) = -q - 2\langle q, p \rangle p$, a $\mathbb{R}H^n$ también es reflexión geodésica para este espacio, y se comprueba exactamente de la misma forma que en el caso de la esfera. Por lo tanto, se tiene que $\mathbb{R}H^n$ es un espacio simétrico.

2.2. Descomposición de Cartan

Tras introducir los espacios simétricos, algunas de las propiedades que se siguen de manera directa de su definición, y presentar algunos ejemplos, pasamos ahora a estudiar

ciertos aspectos y herramientas algebraicas relativas a los mismos. En esta sección nos centraremos en la conocida como *descomposición de Cartan*. De modo informal, obtendremos el álgebra de Lie de la componente conexa del grupo de isometrías de cada espacio simétrico M como la suma del álgebra de Lie del grupo de isotropía de un punto $p \in M$ con un espacio vectorial que resultará ser isomorfo a $T_p M$. De esta descomposición también obtendremos la *involución de Cartan* θ , de gran importancia en lo que sigue. Recordemos que de ahora en adelante $M = G/K$ denota un espacio simétrico, donde $G = I^0(M)$ y $K = G_p$, siendo $p \in M$ un punto arbitrario pero fijado.

Proposición 2.3. *Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico. Entonces:*

(a) *La reflexión geodésica s_p induce un automorfismo involutivo*

$$\begin{aligned}\sigma: G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto s_p g s_p.\end{aligned}$$

(b) *Si $G^\sigma = \{g \in G : \sigma(g) = g\}$ es el conjunto de puntos fijos de σ y G_0^σ la componente conexa de la identidad de G^σ , entonces*

$$G_0^\sigma \subset K \subset G^\sigma.$$

Demostración. Veamos cada uno de los apartados por separado:

- (a) Observemos que, por definición de s_p , se tiene que $s_p^2 = \text{Id}$, de lo cual se deduce que $s_p^{-1} = s_p$ y que el neutro de G es un punto fijo de la aplicación σ . Dado que σ es composición de traslaciones, es diferenciable. De esta forma, σ es una aplicación diferenciable (con lo que lleva componentes conexas en componentes conexas) que tiene el neutro como punto fijo, y concluimos que $\sigma(G) \subset G$, es decir, σ está bien definida. Podemos además ver σ como una conjugación de $g \in G$ por $s_p \in I(M)$. Dado que $I(M)$ es un grupo de Lie, se tiene entonces que σ es una aplicación diferenciable. Por último, dado que $s_p^2 = \text{Id}$, se tiene que $\sigma^2(G) = s_p s_p G s_p s_p = G$, y con esto se concluye que σ es, en efecto, un automorfismo involutivo.
- (b) Primero observemos que G^σ es un subgrupo de Lie cerrado. Es inmediato comprobar que G^σ es subgrupo, así que veamos que es cerrado. Para ello, sea una sucesión de elementos de G^σ , $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, convergente a $g \in G$. Entonces, por una parte, dada la continuidad de σ , se tiene que $\{\sigma(g_n)\} \rightarrow \sigma(g)$ y $\{g_n\} \rightarrow g$; y por otra parte, como $\sigma(g_n) = g_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y G es Hausdorff, se sigue que $\sigma(g) = g$. Es decir, $g \in G^\sigma$, concluyéndose que G^σ es subgrupo cerrado de G , y por tanto un subgrupo de Lie embebido de G , por el Teorema de Cartan [31, Theorem 20.12].

Veamos ahora que $K \subset G^\sigma$. Sea entonces $h \in K$. Por una parte, como K es el subgrupo de isotropía en p , se tiene que

$$\sigma(h)(p) = (s_p h s_p)(p) = p = h(p);$$

y por otra parte, teniendo en cuenta que s_p es reflexión geodésica obtenemos

$$(\sigma(h))_{*p} = (s_p h s_p)_{*p} = (s_p)_{*p} h_{*p} (s_p)_{*p} = -\text{Id } h_{*p} (-\text{Id}) = h_{*p}.$$

Con lo cual, se concluye, usando el Lema 1.4, $\sigma(h) = h$, y así h pertenece a G^σ .

Finalmente, veamos que $G_0^\sigma \subset K$. Como vimos que G^σ es un subgrupo de Lie de G , tendremos que su componente conexa de la identidad, G_0^σ , también es un subgrupo de Lie de G . Por lo tanto, podemos considerar su álgebra de Lie, que denotaremos por $\text{Lie}(G_0^\sigma)$. Consideremos $X \in \text{Lie}(G_0^\sigma)$. Se tiene entonces que $\text{Exp}(tX) \in G_0^\sigma$ para todo $t \in \mathbb{R}$ [31, Proposition 20.9]. Ahora bien, si utilizamos la definición de G^σ , se tiene que $s_p \text{Exp}(tX) s_p = \sigma(\text{Exp}(tX)) = \text{Exp}(tX)$. Aplicando esto a p , deducimos que

$$(s_p \text{Exp}(tX) s_p)(p) = (s_p \text{Exp}(tX))(p) = \text{Exp}(tX)(p).$$

Como $(s_p)_{*p} = -\text{Id}$, para cualquier entorno de p suficientemente pequeño, se tiene que s_p no puede fijar ningún punto salvo p , con lo que deducimos que $\text{Exp}(tX)(p) = p$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $\text{Exp}(tX) \in K$. Para terminar, basta tener en cuenta que, como G_0^σ es un grupo de Lie conexo, éste está generado por un entorno del elemento neutro que es homeomorfo a un abierto de $\text{Lie}(G_0^\sigma)$. \square

La involución σ inducirá otra involución de \mathfrak{g} en sí misma, que es la conocida como *involución de Cartan* que venimos anunciando desde el comienzo de esta sección. El interés de esta involución se ve en la siguiente proposición.

Proposición 2.4. *La involución σ induce otra involución $\theta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ y se tienen las siguientes propiedades:*

- (a) *El álgebra de Lie \mathfrak{g} de G se puede descomponer como suma directa de $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = X\}$ y $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = -X\}$, esto es, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Esto quiere decir que \mathfrak{g} se descompone en suma directa de los autoespacios asociados a los autovalores $+1$ y -1 de la involución θ .*
- (b) *Estos autoespacios satisfacen las siguientes tres reglas de corchete entre ellos:*

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}.$$

- (c) *La descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ es ortogonal con respecto a la forma de Killing B de \mathfrak{g} .*

Demostración. Lo primero que veremos es que $\theta = \sigma_*$ es una involución inducida por $\sigma: G \rightarrow G$. Dado que $s_p = s_p^{-1}$, σ es un conjugación por un $s_p \in I(M)$ fijado, y en consecuencia σ será un automorfismo que preserva G . Por otra parte, como $s_p^2 = \text{Id} \in G$, se tiene que $\sigma^2(h) = h$ para cualquier $h \in G$, y entonces σ es una involución. Así, también se tendrá que $\theta^2 = \sigma_*^2 = \text{Id}$; es decir, θ es involución.

- (a) Ahora veamos que θ diagonaliza con autovalores $+1$ y -1 , de forma que podemos hacer la descomposición en autoespacios $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Supongamos que $\theta X = \lambda X$ para algún $X \in \mathfrak{g}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Como θ es involución, se tiene que $X = \theta^2 X = \lambda^2 X$, y por tanto concluimos que θ diagonaliza con autovalores $\lambda \in \{+1, -1\}$. Definimos entonces los autoespacios asociados a cada uno de estos autovalores:

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = X\}, \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : \theta X = -X\}.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

- (b) Dado que θ es la diferencial de un automorfismo de grupos de Lie, es un isomorfismo de álgebras de Lie. Por lo tanto, se tiene que $\theta[X, Y] = [\theta X, \theta Y]$. Así, basta con aplicar la definición de cada uno de los autoespacios en los corchetes:

- Sean $K_1, K_2 \in \mathfrak{k}$. Entonces $\theta[K_1, K_2] = [\theta K_1, \theta K_2] = [K_1, K_2]$, con lo que $[K_1, K_2] \in \mathfrak{k}$; es decir, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$.
- Sean $K \in \mathfrak{k}$ y $P \in \mathfrak{p}$. Entonces $\theta[K, P] = [\theta K, \theta P] = -[K, P]$, de modo que $[K, P] \in \mathfrak{p}$; es decir, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$.
- Sean $P_1, P_2 \in \mathfrak{p}$. Entonces $\theta[P_1, P_2] = [\theta P_1, \theta P_2] = [P_1, P_2]$, así que $[P_1, P_2] \in \mathfrak{k}$; es decir, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$.

- (c) Veamos que $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Sean $K \in \mathfrak{k}$ y $P \in \mathfrak{p}$. Entonces, usando el resultado del apartado anterior,

$$B(K, P) = \text{tr}(\text{ad}(K) \circ \text{ad}(P)) = \text{tr} \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & 0 \end{array} \right) = 0.$$

La segunda igualdad viene de calcular las representaciones matriciales de $\text{ad}(K)$ y $\text{ad}(P)$:

$$\text{ad}(K) = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array} \right), \quad \text{ad}(P) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & 0 \end{array} \right),$$

donde las primeras columnas se refieren a la acción en \mathfrak{k} y las segundas en \mathfrak{p} . \square

En adelante, nos referiremos a θ como involución de Cartan y a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ como descomposición de Cartan. En ciertos textos también se hace referencia a σ como involución de Cartan, siendo una versión a nivel de grupos de Lie. El siguiente resultado nos da más información acerca de los autoespacios de θ .

Proposición 2.5. *Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico, donde G es la componente conexa de la identidad de su grupo de isometrías. Se tiene entonces que:*

- (a) *El subespacio \mathfrak{k} es precisamente el álgebra de Lie del grupo de isotropía $K = I^0(M)_p$.*
- (b) *Como espacios vectoriales, \mathfrak{p} y $T_p M$ son isomorfos. Entonces, \mathfrak{p} se puede dotar de un producto interior que resulta ser $\text{Ad}(K)$ -invariante.*

Demostración. (a) Veamos primero que el álgebra de Lie de K , $\text{Lie}(K)$, está contenida en \mathfrak{k} . Sea entonces $X \in \text{Lie}(K)$, lo cual equivale a que $\text{Exp}(tX) \in K$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Queremos ver que $\theta X = X$, así que hacemos el cálculo correspondiente:

$$(\theta X)_e = \sigma_{*e} X_e = \sigma_{*e} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Exp}(tX) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sigma(\text{Exp}(tX)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Exp}(tX) = X_e,$$

como queríamos ver. En la segunda igualdad hemos usado que $\text{Exp}(tX)$ es una curva que pasa por el neutro en $t = 0$ y con velocidad X , mientras que en la penúltima hemos usado que $\text{Exp}(tX) \in K \subset G^\sigma$. Evaluamos en el neutro porque los campos de un álgebra de Lie, en particular de $\text{Lie}(K)$, están determinados por su valor en el neutro.

Ahora veamos la otra inclusión, $\mathfrak{k} \subset \text{Lie}(K)$. Consideremos $X \in \mathfrak{k}$, que satisface $\theta X = X$. Podemos entonces hacer el siguiente cálculo:

$$\text{Exp}(tX) = \text{Exp}(t\theta X) = \text{Exp}(\theta(tX)) = \sigma(\text{Exp}(tX)),$$

donde hemos utilizado la comutación $\text{Exp}(f_*X) = f(\text{Exp}(X))$, tomando $f = \sigma$. Se tiene entonces que $\text{Exp}(tX) \in G^\sigma$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Ahora bien, dado que $\text{Exp}(0) = \text{Id}$ y Exp es una aplicación diferenciable, se tiene que $\text{Exp}(tX) \in G_0^\sigma$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$.

(b) Esta demostración la faremos en tres etapas:

1. Veamos que \mathfrak{p} y $T_p M$ son isomorfos como espacios vectoriales. Consideremos la *aplicación órbita* por p , $\phi: G \rightarrow M$, definida por $\phi(g) = g(p)$. La aplicación ϕ es diferenciable de rango constante [31, Theorem 7.25], y como estamos en un espacio simétrico, se deduce que es, además, sobreyectiva. Por lo tanto, es una submersión.

Si ahora consideramos la aplicación $F: G/K \rightarrow M$, definida mediante $gK \mapsto F(gK) = g(p)$, los siguientes dos diagramas son comutativos:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & M \\ \pi \downarrow & \nearrow F & \\ G/K & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{\phi_{*e}} & T_p M \\ \pi_{*e} \downarrow & \nearrow F_{*K} & \\ T_K(G/K) & & \end{array}$$

Observemos que, como M es difeomorfo a G/K precisamente por F , se tiene que F_{*K} es un isomorfismo entre espacios tangentes. Entonces,

$$\ker(\phi_{*e}) = \ker(F_{*K} \circ \pi_{*e}) = \ker(\pi_{*e}) \cong \mathfrak{k},$$

donde estamos usando justamente el apartado (a) para el isomorfismo final. Como $T_e G$ es isomorfo a $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, deducimos que $\phi_{*e}|_{\mathfrak{p}}: \mathfrak{p} \rightarrow T_p M$ es un isomorfismo.

De esta forma, podemos definir el producto interior que indicamos en el enunciado como

$$\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{p}} := \langle \phi_{*e} X_e, \phi_{*e} Y_e \rangle, \quad \text{para cualesquiera } X, Y \in \mathfrak{p}.$$

2. Veamos \mathfrak{p} que es $\text{Ad}(K)$ -invariante; es decir, $\text{Ad}(K)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$. Sea $\alpha: G \rightarrow G$ un automorfismo de grupos de Lie, y sea $I_g: G \rightarrow G$ la conjugación por g . Se deduce la siguiente igualdad:

$$(\alpha \circ I_g)(h) = \alpha(ghg^{-1}) = \alpha(g)\alpha(h)\alpha(g)^{-1} = (I_{\alpha(g)} \circ \alpha)(h);$$

es decir, $\alpha \circ I_g = I_{\alpha(g)} \circ \alpha$. Podemos entonces aplicar diferenciales y obtener

$$\alpha_{*e} I_{g*e} = (\alpha \circ I_g)_{*e} = (I_{\alpha(g)} \circ \alpha)_{*e} = I_{g*e} \alpha_{*e}.$$

Para el caso de la aplicación adjunta, teniendo en cuenta su definición, se obtiene

$$\alpha_{*} \circ \text{Ad}(g) = \text{Ad}(\alpha(g)) \circ \alpha_{*}. \quad (2.1)$$

Ahora vamos a aplicar la involución de Cartan a $\text{Ad}(k)(P)$ para $k \in K$ y $P \in \mathfrak{p}$ arbitrarios, y veremos que $\text{Ad}(k)(P) \in \mathfrak{p}$:

$$\theta \text{Ad}(k)(P) = \sigma_{*} \text{Ad}(k)(P) = \text{Ad}(\sigma(k)) \sigma_{*}(P) = \text{Ad}(k) \theta(P) = -\text{Ad}(k)(P),$$

donde en la segunda igualdad hemos usado la ecuación (2.1), en la tercera que $K \subset G^{\sigma}$ y en la cuarta que $\theta|_{\mathfrak{p}} = -\text{Id}$. Por lo tanto, y como queríamos ver, $\text{Ad}(k)(P)$ pertenece al autoespacio asociado al autovalor -1 de θ , que, recordemos, es \mathfrak{p} por la Proposición 2.4.

3. Nos resta ver que $\text{Ad}(k)$ es una isometría, para cualquier $k \in K = I^0(M)_p$, para el producto interior que acabamos de definir en \mathfrak{p} . Recordemos que $\phi: G \rightarrow M$ viene definida por $\phi(g) = g(p)$. Observemos que

$$(\phi \circ I_k)(g) = \phi(kgk^{-1}) = kgk^{-1}(p) = kg(p) = (k \circ \phi)(p).$$

Usando esto, podemos realizar la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}(k)X, \text{Ad}(k)Y \rangle_{\mathfrak{p}} &= \langle \phi_{*e} I_{k*e} X_e, \phi_{*e} I_{k*e} Y_e \rangle \\ &= \langle (\phi \circ I_k)_{*e} X_e, (\phi \circ I_k)_{*e} Y_e \rangle \\ &= \langle (k \circ \phi)_{*e} X_e, (k \circ \phi)_{*e} Y_e \rangle \\ &= \langle k_{*e} \phi_{*e} X_e, k_{*e} \phi_{*e} Y_e \rangle \\ (k_{*e} \text{ es isometría}) \quad &= \langle \phi_{*e} X_e, \phi_{*e} Y_e \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Con esto queda probado el resultado. \square

Observemos que la descomposición de Cartan depende del punto considerado; sin embargo, se tiene que todas las involuciones de Cartan que podamos considerar son conjugadas entre sí [28, Corollary 6.19].

2.3. Espacios simétricos irreducibles

El objetivo fundamental de esta sección será, haciendo uso los contenidos introducidos de la Sección 2.2, agrupar o clasificar los espacios simétricos irreducibles en tres grandes clases: de tipo Euclíadiano, de tipo compacto y de tipo no compacto. Además de algunas de sus propiedades, explicaremos brevemente la dualidad existente entre los espacios simétricos de tipo compacto y los espacios simétricos de tipo no compacto, y mostraremos algunos ejemplos concretos de dicha dualidad.

Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico. Se tiene entonces que su recubrimiento universal, \widetilde{M} , es también un espacio simétrico. Además, por el Teorema de de Rham (ver [16]), podemos descomponer \widetilde{M} como $\widetilde{M} = \widetilde{M}_0 \times \widetilde{M}_1 \times \cdots \times \widetilde{M}_n$, donde \widetilde{M}_0 es un factor Euclíadiano (es decir, es localmente isométrico a un espacio Euclíadiano), y los \widetilde{M}_i , con $i \in \{1, \dots, n\}$, son espacios simétricos simplemente conexos irreducibles.

Consideremos la representación

$$\begin{aligned} \rho: K &\longrightarrow O(T_p M) \\ k &\longmapsto \rho(k) = k_{*p}: T_p M \longrightarrow T_p M, \end{aligned}$$

donde $k(p) = p$ dado que $K = I^0(M)_p$. Ésta recibe el nombre de *representación de isotropía* del espacio simétrico $M \cong G/K$. Una propiedad fundamental de esta representación la indicamos a continuación.

Proposición 2.6 ([41, Corollary 9.8]). *Si $M \cong G/K$ es un espacio simétrico simplemente conexo irreducible, entonces la representación de isotropía es irreducible.*

Este resultado es la motivación principal de la definición de espacio simétrico irreducible. Un espacio simétrico $M \cong G/K$ se dice *irreducible* si K_0 (la componente conexa del subgrupo de isotropía) actúa de forma irreducible sobre $T_p M$. En caso contrario, estaremos hablando de un espacio simétrico *reducible*. Se tiene que M es irreducible como espacio simétrico si, y sólo si, \widetilde{M} es irreducible y no se puede considerar como producto no trivial de espacios simétricos, salvo que \widetilde{M} sea un espacio Euclíadiano. Una condición suficiente para que un espacio simétrico sea irreducible es que G sea un grupo simple.

Teniendo en cuenta la Proposición 2.5, identificamos \mathfrak{p} en la descomposición de Cartan con $T_p M$. Entonces, resulta que las siguientes representaciones son equivalentes

$$\begin{array}{ccc} K \times T_p M & \longrightarrow & T_p M \\ (k, v) & \longmapsto & k_{*p}v \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K \times \mathfrak{p} & \longrightarrow & \mathfrak{p} \\ (k, X) & \longmapsto & \text{Ad}(k)X. \end{array}$$

En efecto, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p} & \xrightarrow{\text{Ad}(k)} & \mathfrak{p} \\ \text{Id} \times (d\phi)_e \downarrow & & \downarrow (d\phi)_e \\ T_p M & \xrightarrow{k_{*e}} & T_p M \end{array}$$

commuta, ya que

$$\phi_{*e}(\text{Ad}(k)X)_e = \phi_{*e}I_{k*e}X_e = (\phi \circ I_k)_{*e}X_e = k_{*e}\phi_{*e}X_e.$$

Llegados a este punto, estudiaremos las formas bilineales y veremos la importancia de la forma de Killing a la hora de clasificar los espacios simétricos irreducibles.

Proposición 2.7. *Sean B_1 y B_2 dos formas bilineales simétricas definidas sobre un espacio vectorial V tales que B_1 es definida positiva. Si un grupo de Lie compacto K actúa irreduciblemente sobre V y B_1, B_2 son invariantes por K , entonces $B_2 = \lambda B_1$ para un cierto $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Lo primero que haremos será definir un endomorfismo $\varphi: V \rightarrow V$, dado por $B_2(u, v) = B_1(\varphi(u), v)$, para cualquier $u \in V$ y $v \in V$ fijado. Veamos que podemos hacer esta elección. Dado que B_1 es definida positiva por hipótesis, $B_1(V, v) \neq 0$, y entonces existe un $w \in V$ tal que $B_1(w, v) \neq 0$. Podemos entonces seleccionar un $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $B_1(\mu w, v) = B_2(u, v)$, y esto lo podemos hacer para cualquier $u \in V$. Nos basta definir $\varphi(u) = \mu w$. Nos falta solamente comprobar que esta definición de φ la convierte en una aplicación lineal:

$$\begin{aligned} B_1(\varphi(au_1 + bu_2), v) &= B_2(au_1 + bu_2, v) = aB_2(u_1, v) + bB_2(u_2, v) \\ &= aB_1(\varphi(u_1), v) + bB_1(\varphi(u_2), v) = B_1(a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2), v), \end{aligned}$$

con lo que $\varphi(au_1 + bu_2) = a\varphi(u_1) + b\varphi(u_2)$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ y $u_1, u_2 \in V$; es decir, φ es, en efecto, una aplicación lineal.

Ahora vamos a trabajar con la acción de K sobre V , usando notación multiplicativa $K \times V \rightarrow V$ dada por $(k, v) \mapsto kv$. Observemos que para cualesquiera $u, v \in V$ se tiene que

$$B_1(\varphi(u), v) = B_2(u, v) = B_2(v, u) = B_1(\varphi(v), u) = B_1(u, \varphi(v)),$$

con lo que vemos que φ es autoadjunta con respecto a B_1 . Como B_1 es, por hipótesis, definida positiva, se tiene entonces que φ diagonaliza con autovalores reales. Ahora bien, como B_1 y B_2 son invariantes bajo la acción de K , tenemos que

$$B_1(k\varphi(u), v) = B_1(\varphi(u), k^{-1}v) = B_2(u, k^{-1}v) = B_2(ku, v) = B_1(\varphi(ku), v),$$

con $k \in K$ y $u, v \in V$. Esto tiene como consecuencia que $B_1(k\varphi(u) - \varphi(ku), v) = 0$ para todo $v \in V$. Como B_1 es definida positiva, se sigue que $k\varphi = \varphi k$ para cualquier $k \in K$.

Finalmente, si consideramos E el autoespacio asociado al autovalor λ de φ , se tiene

$$\varphi(kE) = k\varphi(E) = \lambda kE,$$

con lo que $kE \subset E$. Por lo tanto, como K actúa irreduciblemente sobre V , $E = V$ (λ no puede ser 0 ya que si lo fuera, se tendría que $B_2 = 0$). Esto quiere decir que $\varphi = \lambda \text{Id}$, y por tanto se concluye el resultado buscado: $B_2 = \lambda B_1$. \square

Una consecuencia importante de este resultado se indica en el siguiente corolario.

Corolario 2.8. *Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico y sea B la forma de Killing en \mathfrak{g} . Si M es irreducible, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{p}} = \lambda B(X, Y), \quad \text{para cualesquiera } X, Y \in \mathfrak{p}.$$

Demuestra. Como M es irreducible, la acción $K \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$, dada por $(k, X) \mapsto \text{Ad}(k)X$, es irreducible. Ahora, consideremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{p}}$, que, por la Proposición 2.5 es una forma bilineal, simétrica, definida positiva e invariante bajo $\text{Ad}(K)$; y consideremos también $B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$ (la forma de Killing restringida), que es no nula, simétrica, bilineal e invariante bajo $\text{Ad}(K)$. Observemos que

$$\text{ad}(aX)Z = [aX, Z] = a[X, a^{-1}Z] = (a \circ \text{ad}(X) \circ a^{-1})(Z). \quad (2.2)$$

Usando la ecuación (2.2), podemos comprobar que la forma de Killing restringida a $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ es invariante por automorfismos de \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} B(aX, aY) &= \text{tr}(\text{ad}(aX) \circ \text{ad}(aY)) = \text{tr}(a \circ \text{ad}(X) \circ a^{-1} \circ a \circ \text{ad}(Y) \circ a^{-1}) \\ &= \text{tr}(a \circ \text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y) \circ a^{-1}) = \text{tr}(a^{-1} \circ a \circ \text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)) \\ &= \text{tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y)) = B(X, Y), \end{aligned}$$

siendo a un automorfismo de \mathfrak{g} .

Tomando $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{p}}$ como B_1 y la forma de Killing como B_2 en la Proposición 2.7, se tiene que existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{p}} = \lambda B(\cdot, \cdot)$. \square

En el caso de que el espacio simétrico sea reducible, también tenemos algo análogo, resultado de aplicar el corolario anterior a cada una de las componentes de la descomposición del espacio simétrico en producto de espacios irreducibles. Dado un espacio simétrico reducible en la forma $M = M_1 \times \dots \times M_n$, denotaremos por $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{p}_i$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) a la descomposición de Cartan correspondiente al álgebra de Lie \mathfrak{g}_i asociada a cada uno de los espacios simétricos M_i del producto.

Corolario 2.9. *Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico. Si M es reducible, entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{p}_n$ y*

$$\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{p}_i} = \lambda_i B(X, Y), \quad \text{para cualesquiera } X, Y \in \mathfrak{p}_i, \text{ e } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Usando el Corolario 2.8, podemos distinguir tres clases de espacios simétricos irreducibles a partir del signo de la constante de proporcionalidad λ . Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico irreducible. Por el Corolario 2.8, como $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{p}}$ es definida positiva, se tiene que $B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}} = \lambda^{-1} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{p}}$. En función del signo de este valor λ distinguimos tres clases de espacios simétricos irreducibles, que recogemos en la Tabla 2.1

Veamos más en detalle algunos aspectos recogidos en la Tabla 2.1.

Proposición 2.10. *Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico. Se tiene entonces que:*

	Tipo de espacio simétrico	M	G
$\lambda < 0$	Compacto	Compacto y curvatura seccional no negativa	Compacto y semisimple
$\lambda > 0$	No compacto	No compacto y curvatura seccional no positiva	No compacto y semisimple
$\lambda = 0$	Euclíadiano	El recubrimiento universal es \mathbb{R}^n	

Tabla 2.1: Clases de espacios simétricos irreducibles.

- (a) Si M es de tipo compacto, entonces G es semisimple y G y M son compactos.
- (b) Si M es de tipo no compacto, entonces G es semisimple y G y M son no compactos.
- (c) M es de tipo Euclíadiano si, y sólo si, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = 0$.

Demostración. (a) Se tiene que la involución de Cartan del álgebra de Lie \mathfrak{g} , θ , preserva la forma de Killing dado que es un automorfismo de \mathfrak{g} (Proposición 1.9). Lo primero que veremos es que $B|_{\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}}$ es definida negativa. Como K es compacto [41, Proposition 9.14], se tiene que \mathfrak{k} debe ser compacta, así que, por la Proposición 1.8, \mathfrak{k} admite un producto escalar, para el cual $\text{ad}(X)$ es una transformación antisimétrica de \mathfrak{g} para todo $X \in \mathfrak{k}$. Se tiene entonces que $\text{ad}(X) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ tiene todos sus autovalores imaginarios puros. Entonces, $B(X, X) = \text{tr}(\text{ad}(X)^2) \leq 0$. Ahora veamos que, de hecho, $B(X, X)$ debe ser negativo si $0 \neq X \in \mathfrak{k}$. Supongamos que $B(X, X) = 0$; es decir, $\text{tr}(\text{ad}(X)^2) = 0$, con lo que deducimos que $\text{ad}(X) = 0$. Por lo tanto, llegamos a que $X \in Z(\mathfrak{g})$. Sin embargo, como el grupo de isometrías de un espacio simétrico actúa efectivamente sobre éste, también lo hace de forma casi efectiva, y entonces \mathfrak{g} y \mathfrak{k} no pueden tener ideales distintos de 0 en común, llegándose a una contradicción, ya que $Z(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{k}$ es un ideal de \mathfrak{g} y de \mathfrak{k} .

Ahora, como $B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$ es definida negativa por hipótesis, B es no degenerada, así que, por el criterio de Cartan para la semisimplicidad (Teorema 1.6), \mathfrak{g} es semisimple. Además, al ser tanto $B|_{\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}}$ como $B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$ definidas negativas, B es definida negativa, lo cual equivale (Proposición 1.7) a que \mathfrak{g} sea compacta y $Z(\mathfrak{g})$ sea nulo; es decir, G es compacto como grupo de Lie de \mathfrak{g} . Finalmente, como M es difeomorfo al cociente de dos grupos compactos, es compacto, concluyéndose el resultado.

- (b) Usando el razonamiento del apartado anterior, llegamos a que $B|_{\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}}$ es definida positiva, por lo que, como $B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}}$ es definida positiva por hipótesis, se tiene que \mathfrak{g} es semisimple (criterio de Cartan de semisimplicidad, Teorema 1.6). Ahora, como B ya no es definida negativa, \mathfrak{g} no es compacta, por lo que G tampoco es compacto. Finalmente, como $M \cong G/K$ y K es compacto, se deduce que M no es compacto.
- (c) Por hipótesis, se tiene que $B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}} = 0$. Además, recordemos que $B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$. Como $B|_{\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}}$ es definida negativa (por el razonamiento anterior), el subespacio

$$\ker(B) = \{X \in \mathfrak{g} : B(X, Y) = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}$$

es precisamente \mathfrak{p} . Además, $\ker(B)$ es un ideal de \mathfrak{g} , ya que si tomamos $X \in \ker(B)$ e $Y \in \mathfrak{g}$, entonces dado un $Z \in \mathfrak{g}$, se tiene que

$$B([X, Y], Z) = -B(Y, [X, Z]) = 0,$$

con lo que $[\ker(B), \mathfrak{g}] \subset \ker(B)$. Por ser $\ker(B)$ ideal de \mathfrak{g} , también es álgebra de Lie, y se tendrá que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{k} = 0$ (dado que vimos que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$).

Recíprocamente, supongamos que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = 0$. Como $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, se sigue directamente que $B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}} = 0$. \square

Si consideramos un espacio simétrico arbitrario M , su recubrimiento universal, \widetilde{M} , se descompone como producto de espacios simétricos de la forma $\widetilde{M} = M_0 \times M_+ \times M_-$, siendo M_0 de tipo Euclíadiano, M_+ de tipo compacto, y M_- es de tipo no compacto.

Un hecho importante es que, considerando espacios simétricos simplemente conexos, existe una correspondencia entre los de tipo compacto y los de tipo no compacto. A esta correspondencia se le llama *dualidad*. Algunos ejemplos de esta dualidad los indicamos en la siguiente tabla.

Tipo compacto		Tipo no compacto	
Esferas reales	$\mathbb{S}^n = \frac{\mathrm{SO}_{n+1}}{\mathrm{SO}_n}$	Espacios hiperbólicos reales	$\mathbb{R}H^n = \frac{\mathrm{SO}_{1,n}^0}{\mathrm{SO}_n}$
Espacios proyectivos complejos	$\mathbb{C}P^n = \frac{\mathrm{SU}_{n+1}}{S(\mathrm{U}_1\mathrm{U}_n)}$	Espacios hiperbólicos complejos	$\mathbb{C}H^n = \frac{\mathrm{SU}_{1,n}}{S(\mathrm{U}_1\mathrm{U}_n)}$
Espacios proyectivos cuaterniónicos	$\mathbb{H}P^n = \frac{\mathrm{Sp}_{n+1}}{\mathrm{Sp}_1\mathrm{Sp}_n}$	Espacios hiperbólicos cuaterniónicos	$\mathbb{H}H^n = \frac{\mathrm{Sp}_{1,n}}{\mathrm{Sp}_1\mathrm{Sp}_n}$
Plano proyectivo de Cayley	$\mathbb{O}P^2 = \frac{\mathrm{F}_4}{\mathrm{Spin}(9)}$	Plano hiperbólico de Cayley	$\mathbb{O}H^2 = \frac{\mathrm{F}_4^{-20}}{\mathrm{Spin}(9)}$

Tabla 2.2: Ejemplos de espacios simétricos simplemente conexos de rango uno. Presentamos uno de tipo compacto con su correspondiente dual de tipo no compacto.

2.4. Espacios de raíces y descomposición de Iwasawa

Dado que el objetivo de este trabajo es el estudio de las hipersuperficies de curvatura adaptada en espacios simétricos de tipo no compacto, en la parte final del capítulo pasamos a centrarnos exclusivamente en éstos últimos. En esta sección, el objetivo será obtener la descomposición de Iwasawa asociada a un espacio simétrico de tipo no compacto, que afirma que la componente conexa que contiene a la identidad de su grupo de isometrías es difeomorfa al producto de un grupo de Lie compacto, por uno abeliano y otro nilpotente. Para llegar a ello, debemos introducir la teoría de espacios de raíces desarrollada por Cartan.

Sea entonces un espacio simétrico $M \cong G/K$ de tipo no compacto. Como vimos en la sección anterior, esto quiere decir que:

- (a) $G = I^0(M)$ es un grupo de Lie semisimple no compacto. Además, $K = G_p$ es un grupo de Lie compacto, para $p \in M$ [41, Proposition 9.14].

- (b) M es una variedad de Riemann no compacta y tiene curvatura seccional no positiva.
- (c) $B|_{\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}} > 0$, siendo B la forma de Killing asociada al álgebra de Lie \mathfrak{g} de G .
- (d) $B|_{\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}} < 0$.

Vemos que la forma de Killing no nos proporciona en este caso un producto interior ya que no es definida positiva. Por lo tanto, requeriremos de la definición de otra forma bilineal que sí sea definida positiva. Recordemos que denotamos por θ la involución de Cartan de \mathfrak{g} . Podemos definir en este punto un producto interior en \mathfrak{g} , que denotaremos por B_θ y viene dado por

$$B_\theta(X, Y) = -B(\theta X, Y), \quad \text{para cualesquiera } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Recordemos que \mathfrak{k} y \mathfrak{p} se definieron como los autoespacios asociados a los autovalores $+1$ y -1 de θ , respectivamente. Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$B_\theta(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = -B(\theta \mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = -B(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0,$$

$$B_\theta(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}) = -B(\theta \mathfrak{k}, \mathfrak{k}) = -B(\mathfrak{k}, \mathfrak{k}) > 0,$$

$$B_\theta(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = -B(\theta \mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = B(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) > 0.$$

En particular, comprobamos B_θ es definida positiva, con lo que es, efectivamente, un producto interior en \mathfrak{g} , dado que la forma de Killing es simétrica.

En el siguiente resultado recogemos algunas propiedades más acerca del producto interior B_θ , relacionadas con la aplicación adjunta de álgebras de Lie.

Lema 2.11. *Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico de tipo no compacto. Entonces*

- (a) *Si $X \in \mathfrak{k}$, entonces $\text{ad}(X): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es antisimétrica respecto de B_θ .*
- (b) *Si $X \in \mathfrak{p}$, entonces $\text{ad}(X): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ es simétrica respecto de B_θ .*

Demostración. (a) Sea $X \in \mathfrak{k}$. Queremos ver que $B_\theta(\text{ad}(X)(Y), Z) = -B_\theta(Y, \text{ad}(X)Z)$, para cualesquiera $Y, Z \in \mathfrak{g}$. En efecto, usando el apartado (b) de la Proposición 1.9:

$$\begin{aligned} B_\theta(\text{ad}(X)(Y), Z) &= B_\theta([X, Y], Z) = -B(\theta[X, Y], Z) = -B([\theta X, \theta Y], Z) \\ &= -B([X, \theta Y], Z) = B(\theta Y, [X, Z]) = -B_\theta(Y, [X, Z]) \\ &= -B_\theta(Y, \text{ad}(X)(Z)). \end{aligned}$$

- (b) La demostración es completamente análoga a la del apartado anterior, pero usando que si $X \in \mathfrak{p}$, entonces $\theta X = -X$. \square

Consideremos ahora un subespacio abeliano maximal \mathfrak{a} de \mathfrak{p} . Se tiene que cualquier otro subespacio abeliano maximal de \mathfrak{p} será conjugado a \mathfrak{a} mediante la acción adjunta de K (ver [28, Theorem 6.51]), por lo que los resultados que obtengamos para \mathfrak{a} solamente diferirán de los obtenidos para cualquier otro subespacio abeliano maximal \mathfrak{a}' de \mathfrak{p} en una conjugación por la acción adjunta de K . Este hecho nos permite introducir la definición del *rango* de un espacio simétrico $M \cong G/K$, que es precisamente la dimensión de cualquiera de estos subespacios abelianos maximales de \mathfrak{p} . Por otra parte, decimos que una subvariedad conexa N de M es *geodésica* en un punto $p \in N$ si toda geodésica de M que pasa por p y es tangente a N es una curva en N . La subvariedad N se dirá *totalmente geodésica* si es geodésica en todo punto $p \in N$. El rango de un espacio simétrico se interpreta geométricamente como la mayor dimensión de una subvariedad plana y totalmente geodésica dentro de tal espacio.

El siguiente resultado nos indica una propiedad interesante acerca de los endomorfismos de un espacio vectorial que comutan entre sí, y que nos permitirá considerar la definición de los *espacios de raíces restringidas*, imprescindibles a la hora de establecer la descomposición de Iwasawa.

Lema 2.12 ([22, Appendix A-8]). *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y $\mathcal{A} \subset \text{End}(V)$ un subconjunto de endomorfismos diagonalizables que comutan entre sí. Entonces, todos los endomorfismos de \mathcal{A} diagonalizan simultáneamente, es decir, existe una base de V formada por autovectores de todos los endomorfismos de \mathcal{A} .*

Sea \mathfrak{a} un subespacio abeliano maximal de \mathfrak{p} , y sea $H \in \mathfrak{a}$. Como $H \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, se tiene que $\theta H = -H$, con lo que se tiene que $\text{ad}(H) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es autoadjunto con respecto al producto interior B_θ . Por otra parte, como $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, se tiene que, dados $H_1, H_2 \in \mathfrak{a}$,

$$[\text{ad}(H_1), \text{ad}(H_2)] = \text{ad}([H_1, H_2]),$$

con lo que el conjunto $\mathcal{A} = \{\text{ad}(H) : H \in \mathfrak{a}\}$ es un conjunto comutativo de endomorfismos de \mathfrak{g} . Aplicando el Lema 2.12, se sigue que todos estos automorfismos diagonalizan de forma simultánea.

Teniendo en cuenta este último comentario, podemos plantear la definición de los espacios de raíces restringidas. Sean $M \cong G/K$ un espacio simétrico de tipo no compacto, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la descomposición de Cartan de \mathfrak{g} , y \mathfrak{a} un subespacio abeliano maximal de \mathfrak{p} . Se denomina *espacio de raíz restringida* a cada uno de los autoespacios comunes que hay en $\mathcal{A} = \{\text{ad}(H) : H \in \mathfrak{a}\}$; es decir, a cada uno de los subespacios vectoriales de \mathfrak{g} definidos, para cada $\alpha \in \mathfrak{a}^*$, como

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\},$$

con $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$. Los $\alpha \neq 0$ tales que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ se denominan *raíces restringidas* de \mathfrak{g} . Denotaremos por Δ al conjunto de raíces restringidas. Esto es,

$$\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* : \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

Obtenemos entonces la descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \right),$$

denominada *descomposición de \mathfrak{g} en espacios de raíces restringidas*. El subespacio \mathfrak{g}_0 es

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = 0, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Este conjunto es no nulo dado que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{a} \neq 0$, ya que todo subespacio generado por un único vector no nulo es abeliano y distinto del subespacio trivial. En lo que sigue, entenderemos que el término “raíz” hace referencia a raíz restringida.

Observemos que la descomposición de \mathfrak{g} en espacios de raíces depende del punto $p \in M$ considerado, así como del subespacio abeliano maximal \mathfrak{a} que elijamos. Sin embargo, estas elecciones conducen a descomposiciones que serán conjugadas entre sí, ya que, como ya indicamos anteriormente, las distintas involuciones de Cartan son conjugadas entre sí, y los subespacios abelianos maximales de \mathfrak{p} también son conjugados entre sí. A continuación, mostramos algunas propiedades de las descomposiciones en espacios de raíces.

Proposición 2.13. *Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico de tipo no compacto, y sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie de G . Se tiene que:*

- (a) *La descomposición de \mathfrak{g} en espacios de raíces, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha)$, es ortogonal con respecto del producto interior B_θ .*
- (b) *$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, para cualesquiera raíces $\alpha, \beta \in \Delta$.*
- (c) *$\theta \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ para cualquier raíz $\alpha \in \Delta$. Por lo tanto, si $\alpha \in \Delta$, entonces $-\alpha \in \Delta$.*
- (d) *$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$, siendo $Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ el centralizador de \mathfrak{a} en \mathfrak{k} ; es decir,*

$$Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \{X \in \mathfrak{k} : [H, X] = 0, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}.$$

Demostración. (a) Sean $\alpha, \beta \in \Delta$ dos raíces distintas; es decir, existe $H \in \mathfrak{a}$ tal que $\alpha(H) \neq \beta(H)$. Supongamos que $\alpha(H) \neq 0$, sin pérdida de generalidad dado que alguno de los dos debe ser no nulo para que sean distintos. Como $H \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, se tiene que $\text{ad}(H)$ es simétrica con respecto del producto interior B_θ . Por lo tanto, si consideramos $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_\beta$,

$$B_\theta(X, Y) = \frac{1}{\alpha(H)} B_\theta(\text{ad}(H)(X), Y) = \frac{1}{\alpha(H)} B_\theta(X, \text{ad}(H)(Y)) = \frac{\beta(H)}{\alpha(H)} B_\theta(X, Y).$$

Como $\frac{\beta(H)}{\alpha(H)} \neq 1$, se debe tener que $B_\theta(X, Y) = 0$, siguiéndose la ortogonalidad entre \mathfrak{g}_α y \mathfrak{g}_β .

- (b) Sean $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{g}_\beta$. Queremos ver que $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Usando entonces la identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned}\text{ad}(H)([X, Y]) &= [H, [X, Y]] = -[X, [Y, H]] - [Y, [H, X]] \\ &= [X, \text{ad}(H)(Y)] - [Y, \text{ad}(H)(X)] = \beta(H)[X, Y] - \alpha(H)[Y, X] \\ &= (\alpha + \beta)[X, Y].\end{aligned}$$

Por tanto, se sigue que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, para cada $\alpha, \beta \in \Delta$

- (c) Sea $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, y veamos que $\theta X \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Teniendo en cuenta que $H \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, se tiene que $\theta H = -H$. Así,

$$\begin{aligned}\text{ad}(H)(\theta X) &= [H, \theta X] = [\theta(-H), \theta X] = \theta[-H, X] \\ &= \theta(-\text{ad}(H)(X)) = \theta(-\alpha(H)X) = -\alpha(H)\theta X,\end{aligned}$$

con lo que se sigue que $\theta \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_{-\alpha}$, para cada $\alpha \in \Delta$. Si aplicamos el mismo razonamiento a $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, se tiene que $\theta \mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \mathfrak{g}_\alpha$. Como θ es involución, se obtiene que ambos espacios vectoriales tienen la misma dimensión y entonces $\mathfrak{g}_\alpha = \theta \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

- (d) Usando el apartado anterior, se tiene que $\theta \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0$. Por lo tanto, considerando la descomposición de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ inducida por θ , se tiene que $\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_0) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0)$. Veremos que $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0$ es \mathfrak{a} ya que $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_0 = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ por definición. Usaremos que \mathfrak{a} es un subespacio abeliano maximal de \mathfrak{p} . Como ya indicamos anteriormente, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_0$ por definición, así que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0$. Ahora supongamos que existiese algún $X \in (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0) \setminus \mathfrak{a}$. Entonces $[H, X] = 0$ para cualquier $H \in \mathfrak{a}$, por estar $X \in \mathfrak{g}_0$, y por tanto el subespacio $\mathfrak{a} + \mathbb{R}X \subsetneq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_0$ es un subespacio abeliano de \mathfrak{p} , contradiciendo la maximalidad de \mathfrak{a} . \square

Consideremos en el dual de \mathfrak{a} , \mathfrak{a}^* , el producto escalar

$$\langle \alpha, \beta \rangle := B(H_\alpha, H_\beta), \quad \text{para cualesquiera } \alpha, \beta \in \mathfrak{a}^*,$$

siendo $H_\lambda \in \mathfrak{a}$ tal que $B(H_\lambda, H) = \lambda(H)$ para cualquier $H \in \mathfrak{a}$, y siendo $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ un covector de \mathfrak{a} . Podemos introducir así una norma en \mathfrak{a}^* considerando $|\alpha| = \langle \alpha, \alpha \rangle^{1/2}$. Con este producto escalar en \mathfrak{a}^* , Δ constituye un *sistema de raíces abstracto* en \mathfrak{a}^* ; es decir, es un subconjunto finito de vectores no nulos de \mathfrak{a}^* tal que

- (a) Δ genera \mathfrak{a}^* .
- (b) Dados $\alpha, \beta \in \Delta$, se tiene que los *enteros de Cartan* $A_{\alpha\beta} := \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha|^2} \in \mathbb{Z}$.
- (c) Dados $\alpha, \beta \in \Delta$, se tiene que $\beta - A_{\alpha\beta}\alpha \in \Delta$.

En [28, Corollary 6.53] se puede encontrar una demostración de que Δ es, en efecto, un sistema de raíces abstracto en \mathfrak{a}^* . Las principales consecuencias de que Δ sea un sistema de raíces abstracto en \mathfrak{a}^* son: primeramente, que podemos establecer una noción de *positividad*

en el conjunto de raíces; luego, tenemos un conjunto de *raíces simples*; y finalmente, podemos asociar a cualquier espacio simétrico de tipo no compacto un diagrama de Dynkin.

Para establecer una noción de positividad, consideremos P un hiperplano lineal en el espacio vectorial \mathfrak{a}^* (un subespacio de codimensión uno) que no interseque a Δ , algo que podemos hacer ya que Δ es un conjunto finito. De esta forma, estamos dividiendo \mathfrak{a}^* en dos subespacios, P^+ y P^- . Diremos que $\alpha \in \Delta$ es *positiva* si pertenece a P^+ y *negativa* si pertenece a P^- . Esto divide Δ en dos conjuntos finitos, Δ^+ y Δ^- , de raíces positivas y negativas, respectivamente. Definimos una *raíz simple* como aquella que es positiva y que no podemos expresarla como suma de otras dos raíces positivas. El conjunto de las raíces simples lo denotaremos por Π .

Utilizando las raíces simples es posible construir el conocido como diagrama de Dynkin asociado a un espacio simétrico de tipo no compacto. Este diagrama se construye asignando un nodo a cada raíz simple. A continuación, los nodos correspondientes a las raíces simples α y β se unen mediante $A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha}$ aristas no dirigidas. Denotaremos por $\text{Aut}(DD)$ el grupo de simetrías de un diagrama de Dynkin.

Teniendo todo lo anterior presente, podemos definir el subespacio vectorial \mathfrak{n} mediante

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha,$$

que es subálgebra de Lie de \mathfrak{g} por la propiedad de que los espacios de raíces satisfacen $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, para cada $\alpha, \beta \in \Delta$.

Proposición 2.14 (Descomposición de Iwasawa). *Todo álgebra de Lie real semisimple \mathfrak{g} admite una descomposición como suma directa de subespacios vectoriales de la forma*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n},$$

siendo \mathfrak{k} un álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie compacto, \mathfrak{a} un álgebra de Lie abeliana, \mathfrak{n} un álgebra de Lie nilpotente, y siendo además $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ una subálgebra de Lie resoluble de \mathfrak{g} tal que $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$.

Demostración. Nótese que el hecho de ser \mathfrak{a} abeliana es simplemente una elección en la descomposición, siendo una subálgebra de Lie abeliana maximal. Podemos hacer esta elección dado que \mathfrak{n} , tal y como lo hemos definido, no interseca a \mathfrak{a} , ya que vimos que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_0$, y $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{n} = \{0\}$. Veamos ahora que \mathfrak{n} es una subálgebra nilpotente comprobando que la serie descendente se anula en cierto valor $N \in \mathbb{N}$. Usando la propiedad (b) de la

Proposición 2.13,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{n}_1 &= [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \left[\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \right] \subset \bigoplus_{\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha_1 + \alpha_2}, \\
 \mathfrak{n}_2 &= [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_1] \subset \left[\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, \bigoplus_{\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha_1 + \alpha_2} \right] \subset \bigoplus_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\
 &\vdots \\
 \mathfrak{n}_i &= [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_{i-1}] \subset \left[\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, \bigoplus_{\alpha_1, \dots, \alpha_i \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\sum_{k=1}^i \alpha_k} \right] \subset \bigoplus_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1} \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\sum_{k=1}^{i+1} \alpha_k}.
 \end{aligned}$$

Como Δ es finito, la serie descendente anterior se anula a partir de un cierto $N \in \mathbb{N}$. Para verlo, consideremos $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tal que $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$ para todo $\alpha \in \Delta^+$ (con el producto interior que indicamos anteriormente en \mathfrak{a}^*). Este λ es precisamente el vector normal al hiperplano P que apunta en la dirección de P^+ . Consideremos el máximo y el mínimo del producto escalar de raíces positivas por este λ :

$$a := \min_{\alpha \in \Delta^+} \langle \lambda, \alpha \rangle, \quad b := \max_{\alpha \in \Delta^+} \langle \lambda, \alpha \rangle.$$

Tomemos $k \in \mathbb{N}$ de forma que $k > \frac{b}{a}$. Se tiene que $\mathfrak{n}_k = 0$. En efecto, si sumamos k raíces positivas, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, la suma $\sum_{i=1}^k \alpha_i$ no puede ser raíz. Supongamos que $\sum_{i=1}^k \alpha_i$ fuera una raíz; entonces, ésta sería positiva, con lo que

$$\left\langle \lambda, \sum_{i=1}^k \alpha_i \right\rangle = \sum_{i=1}^k \langle \lambda, \alpha_i \rangle \geq ka > \frac{ab}{a} = b,$$

y llegamos a contradicción con la maximalidad de b . Por lo tanto, $\sum_{i=1}^k \alpha_i$ no es raíz, así que $\mathfrak{g}_{\sum_{i=1}^k \alpha_i} = 0$, y se tiene la nilpotencia de \mathfrak{n} .

Como \mathfrak{n} es nilpotente, es resoluble. Usando el apartado (b) de la Proposición 2.13, se tiene que $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$, y como \mathfrak{n} es resoluble, también lo es entonces $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. La inclusión $\mathfrak{n} \subset [\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}]$ se tiene dado que si tomamos un $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, con $\alpha \in \Delta^+$, y elegimos un $H \in \mathfrak{a}$ tal que $\alpha(H) \neq 0$, el corchete $[H, X]$ es no nulo y proporcional a X .

Ahora veamos que $\mathfrak{k} + (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$ es una suma directa. Consideremos entonces $X \in \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$. Se tiene entonces que $\theta X = X$ (por ser $X \in \mathfrak{k}$), y por el apartado (c) de la Proposición 2.13, $\theta X \in \mathfrak{a} \oplus \theta \mathfrak{n}$. Se deduce también del apartado (c) de la Proposición 2.13 que $X \in \mathfrak{a}$, ya que $\mathfrak{n} \cap \theta \mathfrak{n} = \{0\}$. Como $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$, deducimos que $X = 0$ y entonces la suma $\mathfrak{k} + (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})$ resulta ser directa.

Finalmente, veamos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. En efecto, si consideramos la descomposición de \mathfrak{g} en espacios de raíces, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ y usamos que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ (por el apartado (d) de la Proposición 2.13), dado $X \in \mathfrak{g}$, existen $H \in \mathfrak{a}$, $X_0 \in Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ y $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$ de forma que

$$X = H + X_0 + \sum_{\alpha \in \Delta} X_\alpha = \left(X_0 + \sum_{\alpha \in \Delta^+} (X_{-\alpha} + \theta(X_{-\alpha})) \right) + H + \sum_{\alpha \in \Delta^+} (X_\alpha - \theta(X_{-\alpha})),$$

con lo que X se descompone en suma de elementos de \mathfrak{k} , \mathfrak{a} y \mathfrak{n} . \square

Con este resultado ya podemos enunciar el teorema fundamental de esta sección, del cual puede verse una demostración en [28, Theorem 6.46]. Este teorema nos da la descomposición de Iwasawa a nivel de grupos de Lie.

Teorema 2.15 (Descomposición de Iwasawa). *Sea G un grupo de Lie semisimple, y sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ una descomposición de Iwasawa de su álgebra de Lie. Sean A y N los subgrupos de Lie conexos de G con álgebras de Lie \mathfrak{a} y \mathfrak{n} , respectivamente. Entonces los grupos A y N son cerrados, simplemente conexos, y la aplicación*

$$\begin{aligned}\Phi: K \times A \times N &\longrightarrow G \\ (k, a, n) &\longmapsto kan\end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

En las condiciones del teorema anterior, se tiene que el subgrupo cerrado $\{1\} \times A \times N$ de $K \times A \times N$ es difeomorfo a $AN = \{an : a \in A, n \in N\}$ de G . Tenemos entonces que AN es un subgrupo de Lie cerrado de G . Este grupo será de gran importancia en lo que sigue del trabajo.

2.5. Modelo resoluble de espacios simétricos de tipo no compacto

El objetivo principal de esta última sección del capítulo es utilizar la descomposición de Iwasawa asociada a un espacio simétrico de tipo no compacto M , introducida en la Sección 2.4, para ver que el grupo de Lie resoluble AN actúa simple y transitivamente sobre M , y por tanto es difeomorfo a éste. Llevando la métrica de M a AN , resulta entonces que todo espacio simétrico de tipo no compacto puede identificarse con un grupo de Lie resoluble equipado con una métrica que resulta además ser invariante a la izquierda.

Empecemos estableciendo el difeomorfismo entre AN y M .

Proposición 2.16. *Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico de tipo no compacto, siendo $G = I^0(M)$, $K = G_p$, y $p \in M$. Sea $G \simeq K \times A \times N$ la descomposición de Iwasawa de G , dada en el Teorema 2.15. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned}\varphi: AN &\longrightarrow M \\ h &\longmapsto h(p)\end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

Demostración. Veamos primero que φ es inyectiva. Sean entonces $g, h \in AN$ tales que $\varphi(g) = \varphi(h)$, es decir, $g(p) = h(p)$. Aplicando h^{-1} en ambos lados de esta última igualdad, $h^{-1}(g(p)) = p$. Por lo tanto, $h^{-1}g \in K = G_p$, y así $h^{-1}g \in K \cap AN$. Ahora bien, como

$K \cap AN = \{e\}$ (Teorema 2.15), se sigue que $h^{-1} = g^{-1}$, con lo que $g = h$, y así φ es inyectiva.

Ahora veamos que φ es sobreyectiva. Sea $q \in M$. Dado que la acción de G sobre M es transitiva, existe $g \in G$ tal que $g(q) = p$, o equivalentemente, $q = g^{-1}(p)$. Usando la descomposición de Iwasawa, existen $k \in K$, $a \in A$ y $n \in N$ tales que $g = kan$. Entonces

$$q = g^{-1}(p) = (kan)^{-1}(p) = (n^{-1}a^{-1}k^{-1})(p) = (n^{-1}a^{-1})(p).$$

Como AN es subgrupo de G , se tiene que $n^{-1}a^{-1} \in AN$, con lo que deducimos que φ es sobreyectiva.

Solamente nos resta ver que es un difeomorfismo local. Observemos que estamos considerando φ como la restricción de la aplicación

$$\begin{aligned} \phi: G &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto g(p) \end{aligned}$$

a AN , $\varphi = \phi|_{AN}$, que es una submersión ([31, Theorem 7.25]). Consideremos ahora la diferencial de ϕ , $\phi_{*e}: \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow T_p M$, que sabemos que es sobreyectiva y $\ker(\phi_{*e}) = \mathfrak{k}$, por lo que su restricción a $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, $\varphi_{*e} = (\phi|_{AN})_{*e}: \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \rightarrow T_p M$ es un isomorfismo. Usando la homogeneidad de los grupos de Lie, se sigue que $\varphi_{*g} = (\phi|_{AN})_{*g}: T_g AN \rightarrow T_{g(p)} M$ es un isomorfismo para cualquier $g \in G$.

Así, hemos probado que φ es difeomorfismo local y biyectivo, con lo que concluimos que es un difeomorfismo. \square

Este resultado nos indica precisamente lo que veníamos anunciando, todo espacio simétrico (M, g) de tipo no compacto es difeomorfo a un grupo de Lie resoluble, AN . Como M es una variedad de Riemann, este difeomorfismo nos permite dotar al grupo AN de una métrica de Riemann mediante el pull-back de g por φ , φ^*g . Esta métrica es invariante por la izquierda en AN . En efecto, sea $h \in AN$, y veamos que $L_h^* \varphi^*g = \varphi^*g$. Si tomamos $h' \in AN$, entonces

$$(h^{-1}\varphi \circ L_h)(h') = h^{-1}(\varphi(hh')) = h^{-1}(hh'(p)) = h'(p) = \varphi(h),$$

con lo que comprobamos que $(h^{-1}\varphi \circ L_h)(h') = \varphi$. Como $h \in AN \subset G$, h es una isometría de M , así que

$$L_h^* \varphi^* = L_h^* \varphi^* (h^{-1})^* g = (h^{-1} \circ \varphi \circ L_h)^* \varphi^* g,$$

como queríamos ver.

De ahora en adelante, denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{AN}$ tanto a la métrica φ^*g como a su producto escalar inducido en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. En el siguiente lema se prueban dos identidades del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{AN}$ que permiten calcular tanto $\langle X, Y \rangle_{AN}$ como $\langle \nabla_X Y, Z \rangle_{AN}$ en función del producto escalar B_θ , evitando así el tener que obtener el pull-back de la métrica g para poder hacer este mismo cálculo.

Lema 2.17. *Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico irreducible de tipo no compacto con grupo de Lie resoluble asociado AN e involución de Cartan θ . Sea B_θ el producto escalar de \mathfrak{g} , y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_{AN}$ el producto escalar inducido en AN . Podemos entonces definir un nuevo producto en M , $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\theta}$, de forma que se tenga, por una parte, que*

$$\langle X, Y \rangle_{AN} = \langle X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}} \rangle_{B_\theta} + \frac{1}{2} \langle X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}} \rangle_{B_\theta}, \quad (2.3)$$

con $X_{\mathfrak{a}}, X_{\mathfrak{n}}$ las proyecciones de X sobre \mathfrak{a} y \mathfrak{n} , respectivamente, e $Y_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{n}}$ las proyecciones de Y sobre \mathfrak{a} y \mathfrak{n} , respectivamente. Por otra parte

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle_{AN} = \frac{1}{4} \langle [X, Y] + [\theta X, Y] - [X, \theta Y], Z \rangle_{B_\theta}, \quad \text{para cualesquiera } X, Y, Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}. \quad (2.4)$$

Además, este producto también verifica la siguiente propiedad de antisimetría:

$$\langle \text{ad}(X)(Y), Z \rangle_{B_\theta} = -\langle Y, \text{ad}(\theta X)(Z) \rangle_{B_\theta}. \quad (2.5)$$

Demostración. Por la Proposición 2.7, la métrica de M en $p \in M$ es proporcional al producto escalar B_θ restringido a \mathfrak{p} ; es decir,

$$\phi^* g_p(\cdot, \cdot) = \lambda B_\theta(\cdot, \cdot),$$

para un cierto $\lambda > 0$, y con ϕ la aplicación $\phi: G \rightarrow M$ dada por $g \mapsto g(p)$. Definamos el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\theta} := \lambda B_\theta$, en $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, y veamos cuál es la relación entre $\langle \cdot, \cdot \rangle_{AN}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\theta}$. Sean $X, Y \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, y sean $X_{\mathfrak{k}}, Y_{\mathfrak{k}}$ y $X_{\mathfrak{p}}, Y_{\mathfrak{p}}$ sus proyecciones respectivas sobre \mathfrak{k} y \mathfrak{p} respecto de B_θ . Entonces

$$\langle X, Y \rangle_{AN} = \varphi^* g_p(X_{\mathfrak{k}} + X_{\mathfrak{p}}, Y_{\mathfrak{k}} + Y_{\mathfrak{p}}) = g_p(\phi_{*e} X_{\mathfrak{p}}, \phi_{*e} Y_{\mathfrak{p}}),$$

dado que $X_{\mathfrak{k}}, Y_{\mathfrak{k}} \in \ker(\phi_{*e})$. Como $\phi^* g_p = \lambda B_\theta$, y usando que $\mathfrak{k} = \ker(\theta - \text{Id})$ y $\mathfrak{p} = \ker(\theta + \text{Id})$, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_{AN} &= \lambda B_\theta(X_{\mathfrak{p}}, Y_{\mathfrak{p}}) = \lambda B_\theta\left(\left(\frac{\text{Id} - \theta}{2}\right)X, \left(\frac{\text{Id} - \theta}{2}\right)Y\right) \\ &= \frac{\lambda}{4} B_\theta(2X_{\mathfrak{a}} + X_{\mathfrak{n}} - \theta X_{\mathfrak{n}}, 2Y_{\mathfrak{a}} + Y_{\mathfrak{n}} - \theta Y_{\mathfrak{n}}) \\ &= \frac{\lambda}{4} (4B_\theta(X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}}) + B_\theta(X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}}) + B_\theta(\theta X_{\mathfrak{n}}, \theta Y_{\mathfrak{n}})) \\ &= \lambda B_\theta(X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}}) + \frac{\lambda}{4} (B_\theta(X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}}) + B_\theta(-X_{\mathfrak{n}}, -Y_{\mathfrak{n}})) \\ &= \lambda B_\theta(X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}}) + \frac{\lambda}{2} B_\theta(X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}}) = \langle X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}} \rangle_{B_\theta} + \frac{1}{2} \langle X_{\mathfrak{n}}, Y_{\mathfrak{n}} \rangle_{B_\theta}. \end{aligned}$$

Además, como B_θ satisface $B_\theta(\text{ad}(X)(Y), Z) = -B_\theta(Y, \text{ad}(\theta X)(Z))$, se sigue que

$$\langle \text{ad}(X)(Y), Z \rangle_{B_\theta} = -\langle Y, \text{ad}(\theta X)(Z) \rangle_{B_\theta}.$$

Ahora introduzcamos la conexión de Levi-Civita en el producto escalar para llegar a la relación indicada en el enunciado del lema. Usando la fórmula de Koszul, sean $X, Y, Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle_{AN} &= \frac{1}{2}(X \langle Y, Z \rangle_{AN} + Y \langle X, Z \rangle_{AN} - Z \langle X, Y \rangle_{AN} \\ &\quad + \langle [X, Y], Z \rangle_{AN} + \langle [Z, Y], X \rangle_{AN} + \langle [Z, X], Y \rangle_{AN}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_{AN}$ es invariante a la izquierda, para cualesquiera vectores $V, W \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, entendiendo éstos como campos de vectores evaluados en el neutro de AN , se tiene

$$\langle V_g, W_g \rangle_{AN} = \langle L_{g*}V_e, L_{g*}W_e \rangle_{AN} = L_g^* \langle V_e, W_e \rangle_{AN} = \langle V_e, W_e \rangle_{AN},$$

para $g \in G$ arbitrario. Deducimos de esto que el producto escalar de campos de vectores invariantes a la izquierda en AN es constante, con lo que los tres primeros términos de (2.6). Usando la antisimetría del corchete de Lie y que $[\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$, para cualesquiera campos de vectores X, Y, Z en $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle_{AN} &= \frac{1}{2}(\langle [X, Y], Z \rangle_{AN} - \langle [Y, Z], X \rangle_{AN} - \langle [X, Z], Y \rangle_{AN}) \\ &= \frac{1}{4}(\langle [X, Y], Z \rangle_{B_\theta} - \langle [Y, Z], X \rangle_{B_\theta} - \langle [X, Z], Y \rangle_{B_\theta}) \\ &= \frac{1}{4}(\langle [X, Y], Z \rangle_{B_\theta} - \langle \text{ad}(Y)(Z), X \rangle_{B_\theta} - \langle \text{ad}(X)(Z), Y \rangle_{B_\theta}) \\ &= \frac{1}{4}(\langle [X, Y], Z \rangle_{B_\theta} + \langle \text{ad}(\theta Y)(X), Z \rangle_{B_\theta} + \langle \text{ad}(\theta X)(Y), Z \rangle_{B_\theta}) \\ &= \frac{1}{4}([X, Y] + \text{ad}(\theta Y)(X) + \text{ad}(\theta X)(Y), Z)_{B_\theta} \\ &= \frac{1}{4}\langle [X, Y] + [\theta X, Y] - [X, \theta Y], Z \rangle_{B_\theta} \quad \square \end{aligned}$$

En el próximo capítulo, usaremos principalmente los productos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{AN}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\theta}$ en lugar de considerar la forma bilineal B_θ . Observemos que el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\theta}$ difiere de la forma B_θ en la multiplicación por una constante positiva, con lo que las propiedades de ortogonalidad relacionadas con B_θ son las mismas que tendremos con este nuevo producto escalar en M .

Capítulo 3

Acciones de cohomogeneidad uno y curvatura adaptada en foliaciones

En el presente capítulo comenzamos recordando la definición de acción de cohomogeneidad uno, e indicamos los espacios en los que éstas han sido clasificadas, enunciando además algunos de los correspondientes resultados de clasificación. A continuación, probamos que en espacios simétricos de tipo no compacto, las acciones de cohomogeneidad uno tienen a lo sumo una órbita singular. En estos mismos espacios, pasamos luego a presentar en detalle las foliaciones de Riemann, es decir, las acciones de cohomogeneidad uno sin órbitas singulares.

El objetivo de este capítulo es presentar la contribución original de este trabajo: la determinación de una amplia serie de foliaciones homogéneas de codimensión uno con hojas de curvatura adaptada en espacios simétricos de tipo no compacto. Para ello, presentaremos una serie de resultados relacionados con los distintos tipos de foliaciones de Riemann que inducen las acciones de cohomogeneidad uno sin órbitas singulares.

Para la elaboración de la Sección 3.2 se siguió [5] como referencia principal. Por su parte, los resultados de las secciones 3.3 y 3.4 relacionados con las foliaciones de Riemann se han tomado de [9]. Además, algunos resultados utilizados en la determinación de las hojas de curvatura adaptada en las distintas foliaciones aparecen en [20, Section 5] y [21].

3.1. Algunos resultados conocidos

Como se introdujo en la Sección 1.3, dada una acción isométrica de un grupo de Lie G sobre una variedad de Riemann M , denotaremos por $G \cdot p$ la órbita por $p \in M$ y por G_p el grupo de isotropía en el punto p .

Sea G un grupo de Lie que actúa por isometrías sobre una variedad de Riemann (M, g) . Consideraremos también $p \in M$ un punto de la variedad y recordemos que $G \cdot p$ es la órbita de la acción de G sobre M pasando por el punto p y G_p es el subgrupo de isotropía de la acción en el punto p . Denotaremos por M/G el conjunto de órbitas por la acción de G sobre M .

Dado otro punto $q \in M$, diremos que las órbitas $G \cdot p$ y $G \cdot q$ son *equivalentes*, y lo denotaremos por $G \cdot p \sim G \cdot q$, si los grupos de isotropía G_p y G_q son conjugados. Esto define una relación de equivalencia en el conjunto de órbitas. Denotaremos mediante $[G \cdot p]$ la clase de equivalencia de la órbita de G por p . El conjunto cociente correspondiente lo denotaremos por $\mathcal{O} = (M/G)/\sim$. En \mathcal{O} es posible definir un orden parcial, \leq , de la siguiente manera:

$$[G \cdot p] \leq [G \cdot q] \text{ si } G_q \text{ es conjugado a un subgrupo de } G_p.$$

Una órbita $G \cdot p$ se dice *principal* si su clase $[G \cdot p]$ es maximal para el orden que acabamos de introducir. Observemos que las órbitas principales tienen, por construcción, la misma dimensión. Las órbitas que tengan dimensión menor que una órbita principal se llaman *órbitas singulares*. La acción isométrica de G sobre M se dice de cohomogeneidad uno si las órbitas principales tienen codimensión uno en M , es decir, si son hipersuperficies homogéneas de M . Recordemos que, por la Proposición 1.5, para que las órbitas sean embebidas en la variedad ambiente, hace falta que las acciones sean propias; por lo tanto, salvo que indiquemos lo contrario, trabajaremos con acciones propias. Como mencionábamos, el objetivo principal del capítulo será el de analizar las acciones de cohomogeneidad uno en los espacios simétricos de tipo no compacto, con especial atención en aquellas cuyas órbitas son todas principales.

En los espacios Euclidianos, las acciones de cohomogeneidad uno fueron clasificadas por Segre [38], teniéndose el siguiente resultado de clasificación.

Teorema 3.1. *Una órbita principal de una acción de cohomogeneidad uno en un espacio Eucliano \mathbb{R}^n , con $n \in \mathbb{N}$, tiene $g \in \{1, 2\}$ curvaturas principales y es congruente a una de las siguientes hipersuperficies:*

- (a) un hiperplano afín \mathbb{R}^{n-1} de \mathbb{R}^n ,
- (b) una esfera \mathbb{S}^{n-1} en \mathbb{R}^n ,
- (c) un cilindro generalizado $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}$, con $k \in \{1, \dots, n-2\}$.

Por su parte, Cartan [14] clasificó las acciones de cohomogeneidad uno en espacios hiperbólicos reales $\mathbb{R}H^n$, teniéndose el resultado siguiente.

Teorema 3.2. *Una órbita principal de una acción de cohomogeneidad uno en un espacio hiperbólico real $\mathbb{R}H^n$, $n \in \mathbb{N}$, tiene $g \in \{1, 2\}$ curvaturas principales y es congruente a una de las siguientes hipersuperficies:*

- (a) un hiperespacio hiperbólico real totalmente geodésico $\mathbb{R}H^{n-1}$ en $\mathbb{R}H^n$ o una de sus hipersuperficies equidistantes,
- (b) un tubo en torno a un subespacio hiperbólico real totalmente geodésico $\mathbb{R}H^k$ en $\mathbb{R}H^n$, con $k \in \{1, \dots, n-2\}$,
- (c) una esfera geodésica en $\mathbb{R}H^n$,

(d) una horoesfera en $\mathbb{R}H^n$.

En este resultado, cuando hablamos de *tubos* en torno a una subvariedad N de una variedad de Riemann M , nos estamos refiriendo a las subvariedades cuyos puntos están a una misma distancia de N todos ellos. Por otra parte, una horoesfera es el límite de una sucesión de esferas de radio creciente que comparten un hiperplano tangente y su punto de tangencia, o alternativamente, una órbita de la acción de N sobre \mathbb{R}^n , siendo N el grupo de Lie correspondiente a la subálgebra \mathfrak{n} de la descomposición de Iwasawa de $\mathbb{R}H^n$. En la Figura 3.1 se muestran las acciones de cohomogeneidad uno en el caso del plano hiperbólico $\mathbb{R}H^2$.

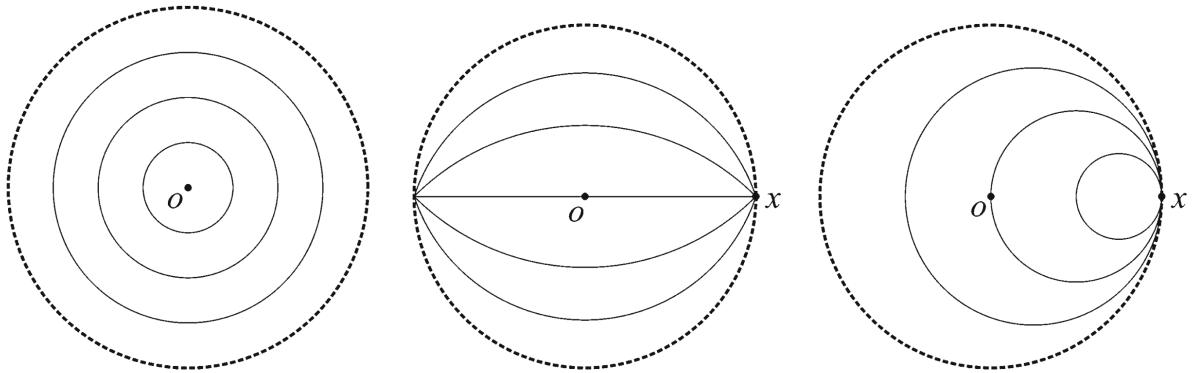


Figura 3.1: Acción de K , A y N en $\mathbb{R}H^2$, respectivamente.

Como último ejemplo, para las esferas \mathbb{S}^n , se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3 ([25]). *Cada acción de cohomogeneidad uno en una esfera \mathbb{S}^n tiene órbitas equivalentes a la representación de isotropía de un espacio simétrico de rango dos. Cualquier acción de este tipo tiene exactamente dos órbitas singulares, mientras que las otras órbitas son principales y son tubos en torno a cada una de las dos órbitas singulares.*

En el año 2002, Kollross [29] publica una clasificación de acciones de cohomogeneidad uno en espacios simétricos irreducibles de tipo compacto. Posteriormente, Berndt y Tamaru empezaron el estudio en los espacios simétricos de tipo no compacto, consiguiendo en [12] clasificar las acciones de cohomogeneidad uno en cada espacio simétrico de rango uno salvo en los espacios hiperbólicos cuaterniónicos. Esta tarea se completa en [19], consiguiéndose una clasificación completa de las acciones de cohomogeneidad uno en espacios hiperbólicos cuaterniónicos salvo equivalencia de órbitas. En el caso de algunos espacios simétricos de rango dos, se han clasificado también este tipo de acciones, como puede verse en [7, 39]. Además, también se han clasificado las acciones de cohomogeneidad uno en espacios simétricos de la forma $\frac{\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})}{\mathrm{SO}(n)}$ en [18].

Sea (M, g) una variedad de Riemann y G un subgrupo de Lie cerrado del grupo de isometrías de M . Mostert [33] y Bérard Bergery [2] probaron que el espacio de órbitas M/G con la topología cociente es homeomorfo a \mathbb{R} , \mathbb{S}^1 , $[0, 1]$ o $[0, \infty)$, siendo las topologías

de estos últimos las usuales. Si M/G es homeomorfo a \mathbb{R} o a \mathbb{S}^1 , entonces cada órbita es principal y éstas conforman una *foliación de Riemann* de M , concepto que definiremos más adelante. Como todas las órbitas principales son difeomorfas entre sí, en caso de ser M/G homeomorfo a \mathbb{R} o \mathbb{S}^1 , la proyección $\pi: M \rightarrow M/G$ es un fibrado. En el caso de ser M simplemente conexo, considerando la sucesión exacta de homotopía de un fibrado con fibras conexas y espacio base \mathbb{S}^1 , M/G no podrá ser homeomorfo a \mathbb{S}^1 .

3.2. Acciones de cohomogeneidad uno en los espacios simétricos de tipo no compacto

Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico de tipo no compacto y H un subgrupo de Lie de G que actúa sobre M con cohomogeneidad uno. El siguiente resultado es fundamental para clasificar este tipo de acciones en espacio simétricos de tipo no compacto.

Teorema 3.4. *Sea $M \cong G/K$ un espacio simétrico de tipo no compacto y sea H un subgrupo de G que actúa sobre M con cohomogeneidad uno. Entonces estamos en uno de los dos casos siguientes:*

- (i) *La acción no tiene órbitas singulares.*
- (ii) *La acción tiene exactamente una órbita singular.*

Demostración. Hemos indicado en el último párrafo de la Sección 3.1 que el espacio de órbitas M/H es homeomorfo a \mathbb{R} , \mathbb{S}^1 , $[0, 1]$ o $[0, \infty)$, lo cual se seguía de [2, 33]. Veremos que en el caso de un espacio simétrico de tipo no compacto estos casos se reducen a dos: \mathbb{R} y $[0, \infty)$, que se asocian con los casos de no tener ninguna órbita singular o tener exactamente una, respectivamente. Recordemos que un espacio simétrico de tipo no compacto es una variedad de Hadamard. Ya observamos anteriormente que M/H no podrá ser homeomorfo a \mathbb{S}^1 por ser simplemente conexo, así que nos quedan tres posibilidades.

Dado cualquier $p \in M$, el subgrupo de isotropía, H_p , de la H -acción en p es un subgrupo cerrado de H . Recordemos que estamos considerando acciones que sean propias, con lo que deducimos que H_p será un subgrupo compacto del grupo de isometrías de M (ver [31, Corollary 21.8]). Sea entonces L un subgrupo compacto maximal de H , el cual también será un compacto en $I(M)$. Se sigue del teorema del punto fijo de Cartan [36] que L tiene un punto fijo, q , en M . Dado que $L \subset H_q$ y H_q es compacto en H , se sigue que $L = H_q$. Hemos probado entonces que existe una órbita de la acción de H tal que el grupo de isotropía en cada uno de sus puntos es un subgrupo compacto maximal de H .

Supongamos que M/H es homeomorfo a \mathbb{R} , lo cual quiere decir que H_p es un subgrupo compacto maximal de H para cualquier $p \in M$ y todas las órbitas son principales, lo que nos conduce a (i) (ver [33]). Si, por otra parte, suponemos que M/H no es homeomorfo a \mathbb{R} , entonces se tiene que la órbita $F = H \cdot q$ es una órbita singular de la acción de H con la propiedad de que H_p es un subgrupo compacto maximal de H para todo $p \in F$. Veamos que F es la única órbita singular de la acción de H . Para ello, supongamos que

existe otra órbita singular F' , y sea $q' \in F'$. Como $H_{q'}$ es un subgrupo compacto de H , existe un $h \in H$ tal que $H_{q'} \subset hLh^{-1} = hH_{q'}h^{-1} = H_{h(q')}$. Por el Corolario 1.2, existe una geodésica, γ , conectando q' y $h(q')$, que además es única, dado que en variedades de Hadamard la aplicación exponencial de Riemann es un difeomorfismo [23, Theorem 13.3]. Una isometría en $H_{q'}$ fija γ punto a punto, ya que fija los puntos q' y $h(q')$ y existe una única geodésica conectando q' y $h(q')$; por lo cual, $H_{q'} \subset H_p$ para todo p sobre γ . Pero como γ interseca órbitas principales, llegamos a una contradicción. Por tanto, deducimos que no puede haber dos órbitas singulares distintas, con lo que M/H es homeomorfo a $[0, \infty)$, y estamos en el caso (ii). \square

De ahora en adelante, trabajaremos con acciones de cohomogeneidad uno que inducen folia-

ciones en un espacio simétrico, así que será conveniente introducir el concepto de *foliación de Riemann*. Sea \mathfrak{F} una descomposición de una variedad de Riemann M en subvariedades conexas inyectivamente inmersas, que llamaremos *hojas*, que pueden tener distintas dimensiones. Decimos que \mathfrak{F} es una *foliación singular de Riemann* si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

- (i) \mathfrak{F} es un *sistema transnormal*, esto es, toda geodésica ortogonal a una hoja de \mathfrak{F} sigue siendo ortogonal a todas las demás hojas de \mathfrak{F} que interseque.
- (ii) \mathfrak{F} es una *foliación singular*, esto es, $T_p L = \{X_p : X \in \mathcal{X}_{\mathfrak{F}}\}$ para cada hoja L en \mathfrak{F} y cada $p \in L$, donde $\mathcal{X}_{\mathfrak{F}}$ es el módulo de campos de vectores diferenciables en la variedad ambiente que son tangentes en todo punto a las hojas de \mathfrak{F} .

Una acción isométrica sobre un espacio simétrico sin órbitas singulares induce una foliación de Riemann. Diremos que dos foliaciones, \mathfrak{F} y \mathfrak{G} , de una variedad de Riemann M , son *isométricamente congruentes* si existe una isometría $f: M \rightarrow M$ que lleva las hojas de \mathfrak{F} en hojas de \mathfrak{G} . Salvo congruencia isométrica, las foliaciones de Riemann homogéneas en un espacio simétrico irreducible de tipo no compacto y rango r pueden ser de dos clases [9, Theorem 5.5]:

- (a) *Foliaciones tipo \mathfrak{F}_ℓ* , con $\ell \in \mathbb{R}P^{r-1}$ (el espacio proyectivo real $r - 1$ -dimensional), siendo r el rango del espacio M .
- (b) *Foliaciones tipo \mathfrak{F}_i* , con $i \in \{1, \dots, r\}$.

Las foliaciones de tipo \mathfrak{F}_ℓ se describen en la Sección 3.3, mientras que las foliaciones de tipo \mathfrak{F}_i , con $i \in \{1, \dots, r\}$, se detallan en la Sección 3.4.

3.3. Foliaciones tipo \mathfrak{F}_ℓ

Recordemos que $M \cong G/K$ es un espacio simétrico de tipo no compacto. Consideremos $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ un conjunto de raíces simples para el espacio de raíces Δ asociado a M (véase Sección 2.4). Sea ℓ un subespacio vectorial unidimensional de \mathfrak{a} . En el álgebra de Lie

$\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ asociada a $AN \cong M$ podemos considerar el complemento ortogonal \mathfrak{s}_ℓ de ℓ . Entonces, el álgebra de Lie

$$\mathfrak{s}_\ell = (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \ominus \ell = (\mathfrak{a} \ominus \ell) \oplus \mathfrak{n},$$

es una subálgebra de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ de codimensión uno. Sea S_ℓ el subgrupo de Lie conexo de AN cuya álgebra de Lie es \mathfrak{s}_ℓ . Las órbitas de la acción de S_ℓ sobre $AN \cong M$ forman entonces una foliación de Riemann de codimensión uno. En efecto, dado que AN actúa libremente en M , S_ℓ también lo hace y entonces los grupos de isotropía son todos triviales. Por tanto, las órbitas tienen la misma dimensión que el grupo S_ℓ , es decir, codimensión uno en M . Dado que S_ℓ es cerrado, y la acción es propia, las órbitas son subvariedades embebidas.

3.3.1. Resultados conocidos para foliaciones tipo \mathfrak{F}_ℓ

A continuación veremos algunos resultados relacionados con este tipos de foliaciones, estudiadas en detalle en [9, Section 3]. El primer resultado que indicamos muestra algunas propiedades básicas de este tipo de foliaciones.

Proposición 3.5. *Sean $p \in M$ y $H_\ell \in \mathfrak{a}$ un vector unitario normal a $S_\ell \cdot p$. Denotaremos por \mathcal{S}_{H_ℓ} al operador forma de $S_\ell \cdot p$ en p con respecto de H_ℓ . Entonces:*

(a) *Todas las hojas de \mathfrak{F}_ℓ son isométricamente congruentes entre sí.*

(b) *El operador forma \mathcal{S}_{H_ℓ} de la hoja $S_\ell \cdot p$ de \mathfrak{F}_ℓ por p viene dado por $\mathcal{S}_{H_\ell} = \text{ad}(H_\ell)|_{\mathfrak{s}_\ell}$.*

*Demuestra*cción. Sea $H_\ell \in \mathfrak{a}$ un vector unitario tal que $\ell = \mathbb{R}H_\ell$. Usando la fórmula de Koszul (1.1) y teniendo en cuenta que la métrica en AN vimos que era invariante por la izquierda, tenemos que

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle_{AN} = \langle [X, Y], Z \rangle_{AN} - \langle [Y, Z], X \rangle_{AN} + \langle [Z, X], Y \rangle_{AN}. \quad (3.1)$$

De esta expresión llegamos a que $\nabla_{H_\ell} H_\ell = 0$. De este hecho, deducimos que las curvas integrales de H_ℓ son geodésicas en AN , y de la definición de foliación de Riemann, sabemos que éstas intersecan cada hoja de \mathfrak{F}_ℓ perpendicularmente. Sea $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow AN$ la geodésica en AN con $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = H_\ell$. Entonces $\gamma(\mathbb{R}) \subset A$, y γ interseca cada una de las hojas de \mathfrak{F}_ℓ . Además, como A es un grupo abeliano, $N \subset S_\ell$ y $AN = NA$, con lo que tenemos que $\gamma(t)S_\ell = S_\ell\check{\gamma}(t)$, de lo que se sigue que

$$S_\ell \cdot \gamma(t) = \gamma(t)(\gamma(t)^{-1}S_\ell \gamma(t)) \cdot p = \gamma(t)S_\ell \cdot p \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Esto nos muestra que cada hoja de \mathfrak{F}_ℓ se obtiene mediante una traslación por la izquierda adecuada de $S_\ell \cdot p$ en AN , probando (a). Por lo tanto, para estudiar la geometría de cualquier hoja, es suficiente estudiarla en la hoja $S_\ell \cdot p$.

El vector H_ℓ es un vector unitario normal a $S_\ell \cdot p$ en p . Como estamos trabajando con subvariedades homogéneas, con obtener el operador forma en un único punto es suficiente para obtenerlo en cualquier otro punto. Denotamos por \mathcal{S}_{H_ℓ} al operador forma de $S_\ell \cdot p$ en p con respecto de H_ℓ y por Π a la segunda forma fundamental de $S_\ell \cdot p$. Como $\text{ad}(H_\ell)$ es

un endomorfismo autoadjunto en \mathfrak{g} con respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la expresión que obtuvimos para la conexión de Levi-Civita (3.1) y la fórmula de Weingarten (1.2) implican que

$$\langle \Pi(X, Y), H_\ell \rangle = \langle \mathcal{S}_{H_\ell} X, Y \rangle = \langle \text{ad}(H_\ell) X, Y \rangle, \quad \text{para cualesquiera } X, Y \in \mathfrak{s}_\ell = T_p(S_\ell \cdot p).$$

Con lo cual, concluimos que $\mathcal{S}_{H_\ell} = \text{ad}(H_\ell)|_{\mathfrak{s}_\ell}$. \square

El siguiente resultado indica cuándo dos foliaciones de tipo \mathfrak{F}_ℓ , con ℓ un subespacio de dimensión uno en \mathfrak{a} , son isométricamente congruentes. Para ello, se usan las simetrías del diagrama de Dynkin asociadas al espacio simétrico introducido en la Sección 2.4.

Teorema 3.6 ([9, Theorem 3.5]). *Dos foliaciones \mathfrak{F}_ℓ y $\mathfrak{F}_{\ell'}$ son isométricamente congruentes si, y sólo si, existe una simetría en el diagrama de Dynkin, $P \in \text{Aut}(DD)$, con $P(\ell) = \ell'$.*

Tenemos, de esta forma, una manera de clasificar las distintas foliaciones de tipo \mathfrak{F}_ℓ que aparecen en espacios simétricos de tipo no compacto mediante los distintos automorfismos del diagrama de Dynkin del espacio simétrico.

Ejemplo. Podemos construir un ejemplo de acción de tipo \mathfrak{F}_ℓ en el plano hiperbólico real, $\mathbb{R}H^2$, el cual se puede describir como el cociente $\text{SO}^0(2, 1)/\text{SO}(2)$ y se puede comprobar que su descomposición en espacios de raíces es de la forma

$$\mathfrak{so}(2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w \\ 0 & w & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_f \oplus \mathfrak{g}_{-f} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_f \oplus \mathfrak{g}_{-f},$$

donde $f \in \mathfrak{a}^*$ es el funcional lineal que lleva un elemento

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w \\ 0 & w & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}$$

en el correspondiente $w \in \mathbb{R}$. Esta descomposición nos permite llegar a la correspondiente descomposición de Iwasawa

$$\mathfrak{so}(2, 1) = \begin{pmatrix} \mathfrak{so}(2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_f,$$

siendo las matrices

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{so}(2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

las correspondientes a \mathfrak{k} en la descomposición de Iwasawa. Como hemos indicado, \mathfrak{a} es unidimensional, con lo que solamente podemos considerar un único $\ell \subset \mathfrak{a}$ de dimensión

uno, y es el propio \mathfrak{a} . Nuestra acción de cohomogeneidad uno sobre $\mathbb{R}H^2$ es la asociada a la que da $\exp(\mathfrak{n}) = N$ sobre AN .

En la Figura 3.1 se puede ver la acción de los grupos K , A y N sobre $\mathbb{R}H^2$, representado con el modelo de la bóla de Poincaré, que además son las únicas tres acciones de cohomogeneidad uno en este espacio simétrico salvo equivalencia de órbitas (ver 3.2). La acción de N precisamente nos da las horoesferas que vemos en la imagen más a la derecha de la Figura 3.1.

3.3.2. Curvatura adaptada en foliaciones tipo \mathfrak{F}_ℓ

En esta sección nos dedicaremos a comprobar que todas las hojas de foliaciones de tipo \mathfrak{F}_ℓ son de curvatura adaptada a su espacio ambiente. Sea $M \cong AN$ un espacio simétrico de tipo no compacto y sea $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ su álgebra de Lie. Comenzamos con un resultado auxiliar para manejar de forma más eficiente la conexión de Levi-Civita.

Lema 3.7. *Tenemos las siguientes propiedades:*

- (a) $\nabla_H X = 0$, para todo $H \in \mathfrak{a}$ y todo $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.
- (b) $\nabla_X H = -\alpha(H)X$, para todo $H \in \mathfrak{a}$ y todo $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, con $\alpha \in \Delta$.

*Demuestra*ón. Tomemos $H \in \mathfrak{a}$ y $X, Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Entonces, usando la ecuación (2.4) del Lema 2.17, tenemos,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_H X, Z \rangle_{AN} &= \frac{1}{4} \langle [H, X] + [\theta H, X] - [H, \theta X], Z \rangle_{B_\theta} = \frac{1}{4} \langle [H, X] - [H, X] - [H, \theta X], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= \frac{1}{4} \langle -[H, \theta X_\mathfrak{a} + \theta X_\mathfrak{n}], Z \rangle_{B_\theta} = 0, \end{aligned}$$

donde $\theta X_\mathfrak{a}$ y $\theta X_\mathfrak{n}$ denotan las proyecciones de θX a \mathfrak{a} y a \mathfrak{n} , respectivamente. Observemos que, como $X \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, se tiene que θX no tiene componentes en \mathfrak{n} , así que $\theta X_\mathfrak{n} = 0$. Por otra parte, como \mathfrak{a} es una subálgebra de Lie abeliana de \mathfrak{g} , se tiene que $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$. Con esto, deducimos (a).

Además usando de nuevo la ecuación (2.4) del Lema 2.17, tenemos, para $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ y $H \in \mathfrak{a}$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X H, Z \rangle_{AN} &= \frac{1}{4} \langle [X, H] + [\theta X, H] - [X, \theta H], Z \rangle_{B_\theta} = \frac{1}{4} \langle [X, H] + [X, H], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= -\frac{1}{4} \langle 2[H, X], Z \rangle_{B_\theta} = -\frac{1}{2} \langle \alpha(H)X, Z \rangle_{B_\theta} = -\langle \alpha(H)X, Z \rangle_{AN}, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos razonado de la misma forma que en el caso anterior, mientras que en la última igualdad hemos usado la ecuación (2.3) del Lema 2.17. Además, hemos usado que $\theta H = H$ por ser $H \in \mathfrak{a}$. Dada la elección arbitraria de $Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, deducimos (b). \square

Consideremos un cierto vector (unitario) $H \in \mathfrak{a}$. Dado que estamos trabajando con foliaciones tipo \mathfrak{F}_ℓ , estamos trabajando con álgebras de Lie de la forma $(\mathfrak{a} \ominus \mathbb{R}H) \oplus \mathfrak{n}$.

Corolario 3.8. *Sea $\mathfrak{s} = (\mathfrak{a} \ominus \mathbb{R}H) \oplus \mathfrak{n}$ y consideremos la órbita $S \cdot p$, donde S es el subgrupo de Lie conexo de AN cuya álgebra de Lie es \mathfrak{s} . Sean además \mathcal{S}_H el operador forma respecto del vector H , R_H el operador de Jacobi asociado a H , $\alpha \in \Delta$, X_α un vector en \mathfrak{g}_α y $L \in \mathfrak{a}$. Entonces*

- (a) $\mathcal{S}_H X_\alpha = \alpha(H) X_\alpha$.
- (b) $\mathcal{S}_H L = 0$.
- (c) $R_H L = 0$.
- (d) $R_H X_\alpha = -\alpha(H) \mathcal{S}_H X_\alpha$.

Demostración. Las afirmaciones (a) y (b) se siguen directamente de la afirmación (b) de la Proposición 3.5. Probemos entonces las otras dos afirmaciones.

- (c) Usando la afirmación (a) del Lema 3.7 junto con el hecho de que $H \in \mathfrak{a}$ (y esta subálgebra es abeliana), se tiene que

$$R_H L = \nabla_L \nabla_H H - \nabla_H \nabla_L H - \nabla_{[L, H]} H = 0.$$

- (d) Usando la afirmación (b) del Lema 3.7, junto con la ortogonalidad de la descomposición en espacios de raíces y (a), llegamos a que

$$R_H X_\alpha = \nabla_{X_\alpha} \nabla_H H - \nabla_H \nabla_{X_\alpha} H - \nabla_{[X_\alpha, H]} H = \alpha(H) \nabla_{X_\alpha} H = -\alpha(H) \mathcal{S}_H X_\alpha. \quad \square$$

Habiendo probado estas propiedades, estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema, que precisamente nos da el resultado que veníamos buscando, las hojas de las foliaciones tipo \mathfrak{F}_ℓ son de curvatura adaptada a su espacio ambiente.

Teorema 3.9. *Sea M un espacio simétrico irreducible de tipo no compacto. Si \mathfrak{F} es una foliación de Riemann de M de tipo \mathfrak{F}_ℓ , entonces todas sus hojas son hipersuperficies de curvatura adaptada.*

Demostración. Por el apartado (a) de la Proposición 3.5, todas las hojas de una foliación de tipo \mathfrak{F}_ℓ son isométricamente congruentes entre sí, así que nos centraremos en la hoja que contiene a un cierto punto $p \in M$.

Por una parte, usando las afirmaciones (b) y (c) del Corolario 3.8, tenemos

$$R_H \mathcal{S}_H(A) = 0 = \mathcal{S}_H R_H(A), \quad \text{para todo } A \in \mathfrak{a} \ominus \mathbb{R}H.$$

Por otra parte, usando los puntos (i) y (iv) del corolario anterior, seguimos que

$$R_H \mathcal{S}_H X_\alpha = R_H(\alpha(H) X_\alpha) = \alpha(H) R_H X_\alpha = -\alpha(H)^2 \mathcal{S}_H X_\alpha = -\alpha(H)^3 X_\alpha$$

y que

$$\mathcal{S}_H R_H X_\alpha = -\alpha(H) \mathcal{S}_H^2 X_\alpha = -\alpha(H)^3 X_\alpha,$$

lo cual concluye la demostración. \square

3.4. Foliaciones tipo \mathfrak{F}_i

Recordemos que, dado un espacio simétrico de tipo no compacto, podemos considerar un conjunto de raíces simples $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ asociado. En esta sección nos centraremos en el segundo tipo de foliaciones que indicamos anteriormente. Sea $\xi \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ un vector unitario, para un cierto $i \in \{1, \dots, n\}$, y definamos

$$\mathfrak{s}_\xi = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{n} \ominus \mathbb{R}\xi) \subset \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

Del apartado (b) de la Proposición 2.13, se sigue que el subespacio \mathfrak{s}_ξ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, con lo que podemos también considerar su subgrupo de Lie asociado, $S_\xi \subset AN$. Dado que estamos tomando $\xi \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, denotaremos las foliaciones \mathfrak{F}_ξ como \mathfrak{F}_i .

3.4.1. Resultados conocidos acerca de foliaciones de tipo \mathfrak{F}_i

Veremos a continuación algunos resultados interesantes acerca de las foliaciones tipo \mathfrak{F}_i , estudiadas en [9, Section 4]. Lo primero que debemos observar es que este tipo de foliaciones están bien definidas.

Lema 3.10. *Sea $\alpha \in \Pi$ una raíz simple. Si ξ y η son dos vectores unitarios en \mathfrak{g}_α , entonces existe una isometría k en el centralizador $Z_K(\mathfrak{a})$ tal que $\text{Ad}(k)(\mathfrak{s}_\xi) = \mathfrak{s}_\eta$.*

Demostración. Si tenemos que \mathfrak{g}_α es de dimensión uno, el resultado es directo. En el caso de que \mathfrak{g}_α tenga dimensión mayor que uno, precisamente tenemos que el grupo $\text{Ad}(Z_K(\mathfrak{a}))$ actúa transitivamente en la esfera unidad de \mathfrak{g}_α respecto de B_θ (ver [24, p. 556]), con lo que concluimos el resultado. \square

En lo que sigue, como en la sección anterior, también enunciaremos resultados relacionados con la congruencia isométrica entre distintas foliaciones del tipo \mathfrak{F}_i , pero antes de llegar a éstos, nos dedicaremos a tratar con una serie de cuestiones referentes a las curvaturas principales y medias de las distintas hojas de una foliación del tipo \mathfrak{F}_i . De ahora en adelante, cuando hablemos de distancia orientada en foliaciones, nos referiremos a la distancia de una hoja respecto a otra teniendo en cuenta la dirección del vector normal considerado. El primer resultado que mostramos nos indica la relación entre dos hojas de una foliación de tipo \mathfrak{F}_i , en términos de congruencia isométrica.

Lema 3.11. *Sea $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_\xi$, para un cierto vector unitario $\xi \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, con $\alpha_i \in \Pi$. Entonces la hoja de \mathfrak{F}_i a distancia orientada $t \in \mathbb{R}$ en la dirección de ξ es isométricamente congruente a la órbita $S_{\xi_t} \cdot p$, con*

$$\xi_t = \frac{1}{\cosh(|\alpha_i|t)}\xi - \frac{1}{|\alpha_i|} \tanh(|\alpha_i|t)H_{\alpha_i},$$

con S_{ξ_t} el subgrupo de Lie conexo de AN con álgebra de Lie $(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \ominus \mathbb{R}\xi_t$.

Demuestra. Sea $\alpha_i \in \Delta$ una raíz simple y $\xi \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ un vector unitario tal que $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_\xi$. Consideremos $H_i = \frac{H_{\alpha_i}}{|H_{\alpha_i}|} = \frac{H_{\alpha_i}}{|\alpha_i|}$. Los vectores ξ y H_i generan una subálgebra de Lie de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ que satisface la siguiente propiedad de corchete:

$$[H_i, \xi] = \alpha_i(H_i)\xi = |\alpha_i|\xi.$$

Además, usando (3.1) y el Lema 3.7, se tienen las siguientes identidades para la conexión de Levi-Civita entre ξ y H_i :

$$\nabla_\xi \xi = |\alpha_i|H_i, \quad \nabla_\xi H_i = -|\alpha_i|\xi.$$

De esta forma, si consideramos ξ y H_i como campos de vectores invariantes por la izquierda, generan un subfibrado (autoparalelo) del fibrado tangente de AN , y se sigue que la órbita del correspondiente subgrupo conexo de AN por p es un plano hiperbólico real totalmente geodésico $\mathbb{R}H^2 \subset AN \cong M$. Sea $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ la geodésica en M con $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = \xi$. Dado que $\mathbb{R}H^2$ es totalmente geodésico, γ permanece en $\mathbb{R}H^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Usando la fórmula de Koszul (1.1) para la conexión de Levi-Civita de AN , se puede ver que el campo de vectores $\dot{\gamma}$ de γ satisface

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\cosh(|\alpha_i|t)}\xi_{\gamma(t)} - \tanh(|\alpha_i|t)(H_i)_{\gamma(t)}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

considerando ξ y H_i como campos de vectores invariantes por la izquierda en AN .

Sean $t \in \mathbb{R}$, $g = \gamma(t) \in AN$, y denotemos por $I_{g^{-1}}$ la conjugación en G_p por g^{-1} . El homomorfismo $I_{g^{-1}}$ deja AN invariante, y entonces $I_{g^{-1}}(S_\xi)$ es también un subgrupo de AN . Como

$$I_{g^{-1}}(S_\xi) \cdot p = g^{-1}S_\xi g \cdot p = \gamma(t)^{-1}S_\xi \cdot \gamma(t),$$

comprobamos que la órbita de la acción de $I_{g^{-1}}(S_\xi)$ por p es la traslación por la izquierda de $\gamma(t)$ a p de la órbita de la acción de S_ξ por $\gamma(t)$. Como $\dot{\gamma}(t)$ es un vector normal unitario de $S_\xi \cdot \gamma(t)$ en $\gamma(t)$, y la traslación por la izquierda $L_{g^{-1}}$ es una isometría, el vector

$$\xi_t = L_{g^{-1}*}\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\cosh(|\alpha_i|t)}\xi_0 - \tanh(|\alpha_i|t)(H_i)_p$$

es un vector unitario normal de $I_{g^{-1}}(S_\xi) \cdot p$ en p . Se sigue que $\text{Ad}(g^{-1})\mathfrak{s}_\xi = \mathfrak{s}_{\xi_t}$, o equivalentemente,

$$\text{Ad}(g)\mathfrak{s}_{\xi_t} = \mathfrak{s}_\xi,$$

siendo $\mathfrak{s}_{\xi_t} = (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \ominus \mathbb{R}\xi_t$. □

Para finalizar la sección, veremos un par de resultados que tratan con la congruencia isométrica de las distintas foliaciones tipo \mathfrak{F}_i de un espacio simétrico de tipo no compacto. El primer resultado es similar al Teorema 3.6 en el caso de foliaciones del tipo \mathfrak{F}_ℓ , pero para foliaciones \mathfrak{F}_i .

Teorema 3.12 ([9, Theorem 4.8]). *Dos foliaciones \mathfrak{F}_i y \mathfrak{F}_j son isométricamente congruentes si, y sólo si, existe una simetría del diagrama de Dynkin del espacio, $p \in \text{Aut}(DD)$ con $P(\alpha_i) = \alpha_j$.*

Ejemplo. Un ejemplo de foliación de tipo \mathfrak{F}_i lo tenemos en el plano hiperbólico real $\mathbb{R}H^2 \cong AN$, donde esta vez elegimos la acción de

$$A = \exp \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sobre el plano hiperbólico. En efecto, si de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ eliminamos un subespacio de dimensión uno contenido en \mathfrak{n} , eliminamos todo el propio \mathfrak{n} , quedándonos una subálgebra de Lie asociada al grupo de la acción $\mathfrak{s}_\xi = \mathfrak{a}$. Esta acción se corresponde con la imagen central mostrada en la Figura 3.1.

3.4.2. Curvatura adaptada en foliaciones tipo \mathfrak{F}_i

En esta sección, el objetivo principal, que completa además el objetivo de la memoria, será, fijada una foliación de tipo \mathfrak{F}_i , para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ donde $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ denota el conjunto de raíces simples, analizar en qué casos las órbitas de dicha foliación son de curvatura adaptada. Recordemos que la órbita de la foliación de \mathfrak{F}_i por p se obtiene como $S_\eta \cdot p$, donde S_η es el subgrupo de Lie conexo de AN cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{s}_\eta = \mathfrak{a} \oplus (\mathfrak{n} \ominus \mathbb{R}\eta)$, con $\eta \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$. Ahora bien, del Lema 3.11 se sigue que cualquiera de las otras órbitas de esta foliación \mathfrak{F}_i es congruente a una de la forma $S \cdot p$, donde S es el subgrupo de Lie conexo de AN cuya álgebra de Lie es

$$\mathfrak{s} = (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \ominus \mathbb{R}\xi,$$

donde $\xi = aH_{\alpha_i} + bX_{\alpha_i}$ es un vector unitario, para ciertos a y $b \neq 0$ reales tales que $a^2|\alpha_i|^2 + b^2 = 1$, cierto $X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$. Para simplificar la notación de aquí en adelante, escribiremos simplemente $\alpha = \alpha_i$ para la foliación de tipo \mathfrak{F}_i , y evitar así arrastrar el subíndice durante las demostraciones.

Sea entonces $\mathfrak{s} = (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \ominus \mathbb{R}\xi$, con $\xi = aH_\alpha + bX_\alpha$ un vector unitario, siendo $\alpha \in \Pi$ una raíz simple, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ un vector unitario y $a, b \in \mathbb{R}$. De esta forma, es claro que $a^2|\alpha|^2 + b^2 = 1$. Estudiaremos si la órbita $S \cdot p$ es de curvatura adaptada, donde S denota el subgrupo de Lie conexo de AN cuya álgebra de Lie es \mathfrak{s} . Nótese que podemos reescribir

$$\mathfrak{s} = (\mathfrak{a} \ominus \mathbb{R}H_\alpha) \oplus (\mathfrak{n} \ominus \mathbb{R}X_\alpha) \oplus \mathbb{R}U, \quad (3.2)$$

donde definimos U como

$$U = b|\alpha|^{-1}H_\alpha - a|\alpha|X_\alpha,$$

que satisface $\langle U, U \rangle_{AN} = 1$ y $\langle U, \xi \rangle_{AN} = 0$. De esta forma, en (3.2) tenemos una descomposición ortogonal del álgebra de Lie \mathfrak{s} .

Indicamos a continuación cuatro lemas que nos permitirán trabajar con esta descomposición en lo que sigue.

Lema 3.13. *Sean $\lambda \in \Delta^+$ y $X, Y \in \mathfrak{g}_\lambda$ ortogonales. Entonces*

$$(a) \quad [\theta X, X] = 2\langle X, X \rangle_{AN} H_\lambda = \langle X, X \rangle_{B_\theta} H_\lambda.$$

$$(b) \quad [\theta X, Y] \in \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0 \ominus \mathfrak{a}.$$

*Demuestra*o. Primero, de la Proposición 2.13, tenemos que $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\eta] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\eta}$ y $\theta \mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_{-\lambda}$. Además, se tiene que $\theta[\theta X, X] = -[\theta X, X]$. Por tanto, deducimos que $[\theta X, X] \in \mathfrak{a}$, con lo que basta obtener la proyección de $[\theta X, X]$ sobre H_λ y sobre cualquier otro vector $H \in \mathfrak{a}$ para comprobar el resultado. Usando la relación (2.5) del Lema 2.17, la definición de espacio de raíz y que $B(H_\lambda, H) = \lambda(H)$ para cualquier $H \in \mathfrak{a}$, deducimos

$$\langle [\theta X, X], H_\lambda \rangle_{B_\theta} = \langle X, [H_\lambda, X] \rangle_{B_\theta} = \langle X, \lambda(H_\lambda)X \rangle_{B_\theta} = |\lambda|^2 \langle X, X \rangle_{B_\theta} = 2|\lambda|^2 \langle X, X \rangle_{AN}.$$

Por otra parte, sea $H \in \mathfrak{a}$ ortogonal a H_λ , en el cálculo anterior, se anula $\lambda(H)$, con lo que $\langle [\theta X, X], H \rangle_{B_\theta} = 0$, probándose así la afirmación (a).

Para probar (b), consideremos $H \in \mathfrak{a}$. Usando el apartado (b) de la Proposición 2.13, tenemos que $[\theta X, Y] \in \mathfrak{g}_0$. Por otra parte, usando de nuevo la relación (2.5) del Lema 2.17, se tiene que

$$\langle [\theta X, Y], H \rangle_{B_\theta} = \lambda(H) \langle Y, X \rangle_{B_\theta} = 0,$$

lo cual quiere decir que $[\theta X, Y] \in \mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}_0 \ominus \mathfrak{a}$. \square

Lema 3.14. *Sea $\xi = aH_\alpha + bX_\alpha$ un vector unitario, donde $\alpha \in \Pi$ es una raíz simple, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$(a) \quad [\theta\xi, \xi] = -ab|\alpha|^2 X_\alpha + ab|\alpha|^2 \theta X_\alpha + 2b^2 H_\alpha.$$

$$(b) \quad \nabla_\xi \xi = b^2 H_\alpha - ab|\alpha|^2 X_\alpha.$$

*Demuestra*o. Para probar (a), usando que $\theta|_{\mathfrak{a}} = -\text{Id}$, que $\theta \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ para cualquier $\alpha \in \Delta$, la definición de espacio de raíz y la primera afirmación del Lema 3.13, deducimos que

$$\begin{aligned} [\theta\xi, \xi] &= [\theta(aH_\alpha + bX_\alpha), aH_\alpha + bX_\alpha] = -ab[H_\alpha, X_\alpha] + ab[\theta X_\alpha, H_\alpha] + b^2[\theta X_\alpha, X_\alpha] \\ &= -ab\alpha(H_\alpha)X_\alpha + ab\alpha(H_\alpha) + 2b^2H_\alpha = -ab|\alpha|^2 X_\alpha + ab|\alpha|^2 \theta X_\alpha + 2b^2 H_\alpha. \end{aligned}$$

Para demostrar (b), consideremos $Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Usando las ecuaciones (2.3) y (2.4) del Lema 2.17, junto con la afirmación (a), tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_\xi \xi, Z \rangle_{AN} &= \frac{1}{4} \langle [\xi, \xi] + [\theta\xi, \xi] - [\xi, \theta\xi], Z \rangle_{B_\theta} = \frac{1}{2} \langle [\theta\xi, \xi], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= \frac{1}{2} \langle -ab|\alpha|^2 X_\alpha + ab|\alpha|^2 \theta X_\alpha + 2b^2 H_\alpha, Z \rangle_{B_\theta} \\ &= -\frac{1}{2} ab|\alpha|^2 \langle X_\alpha, Z \rangle_{B_\theta} + b^2 \langle H_\alpha, Z \rangle_{B_\theta} \\ &= -ab|\alpha|^2 \langle X_\alpha, Z \rangle_{AN} + b^2 \langle H_\alpha, Z \rangle_{AN}, \end{aligned}$$

con lo que llegamos a la expresión (b). \square

Lema 3.15. *Sean dos vectores de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, $X = X_{\mathfrak{a}} + \sum_{\lambda \in \Delta^+} X_{\lambda}$ e $Y = Y_{\mathfrak{a}} + \sum_{\lambda \in \Delta^+} Y_{\lambda}$, tales que $X_{\mathfrak{a}}, Y_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}$ y $X_{\lambda}, Y_{\lambda} \in \mathfrak{g}_{\lambda}$ para toda $\lambda \in \Delta^+$. Si $\langle X_{\lambda}, Y_{\lambda} \rangle_{AN} = 0$, para cualquier $\lambda \in \Delta^+$, entonces*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}([X, Y] + [\theta X, Y] - [X, \theta Y])_{\mathfrak{n}},$$

donde $(\cdot)_{\mathfrak{n}}$ denota la proyección ortogonal en la subálgebra de Lie \mathfrak{n} .

Demostración. Primeramente, usando la relación (2.5) del Lema 2.17, y la hipótesis de ortogonalidad entre los X_{λ} y los Y_{λ} , tenemos

$$\begin{aligned} \langle [X, \theta Y], H \rangle_{B_{\theta}} &= \langle X, [Y, H] \rangle_{B_{\theta}} = -\langle X, [H, Y_{\mathfrak{a}} + \sum_{\lambda \in \Delta^+} Y_{\lambda}] \rangle_{B_{\theta}} = -\sum_{\lambda \in \Delta^+} \lambda(H) \langle X, Y_{\lambda} \rangle_{B_{\theta}} \\ &= -\sum_{\lambda \in \Delta^+} \lambda(H) \langle X_{\mathfrak{a}}, Y_{\lambda} \rangle_{B_{\theta}} - \sum_{\lambda \in \Delta^+} \sum_{\eta \in \Delta^+} \lambda(H) \langle X_{\eta}, Y_{\lambda} \rangle_{B_{\theta}} = 0, \end{aligned}$$

para cualquier $H \in \mathfrak{a}$. Esto quiere decir que $[X, \theta Y]$ es ortogonal con respecto a B_{θ} al subespacio \mathfrak{a} . De la misma manera, probamos que $[\theta X, Y]$ es ortogonal a \mathfrak{a} con respecto de B_{θ} . Ahora bien, como $[X, Y] \in [\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$, tenemos que la suma $[X, Y] + [\theta X, Y] - [X, \theta Y]$ también será ortogonal a \mathfrak{a} respecto de B_{θ} . Usando este hecho junto con las ecuaciones (2.3) y (2.4) del Lema 2.17, llegamos a que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle_{AN} &= \frac{1}{4} \langle [X, Y] + [\theta X, Y] - [X, \theta Y], Z \rangle_{B_{\theta}} \\ &= \frac{1}{4} \langle ([X, Y] + [\theta X, Y] - [X, \theta Y])_{\mathfrak{n}}, Z_{\mathfrak{n}} \rangle_{B_{\theta}} \\ &= \frac{1}{2} \langle ([X, Y] + [\theta X, Y] - [X, \theta Y])_{\mathfrak{n}}, Z \rangle_{AN}, \end{aligned}$$

para cualquier $Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, siguiéndose así el resultado. \square

Lema 3.16. *Sea $\xi = aH_{\alpha} + bX_{\alpha}$, donde $\alpha \in \Pi$, $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Sea $Y_{\beta} \in \mathfrak{g}_{\beta}$ un vector ortogonal a ξ para algún $\beta \in \Delta^+$. Entonces:*

- (a) $\langle [\theta Y_{\beta}, \xi], Z \rangle_{B_{\theta}} = \langle [\theta Y_{\beta}, X_{\alpha}], Z \rangle_{B_{\theta}} = 0$, para cualquier $Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.
- (b) $\langle [\theta [Y_{\beta}, \xi], \xi], Z \rangle_{B_{\theta}} = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.
- (c) Si $\beta \neq \alpha$, entonces $[Y_{\beta}, \theta \xi], [[Y_{\beta}, \xi], \theta \xi], [Y_{\beta}, \theta X_{\alpha}] \in \mathfrak{n}$.

Demostración. Para probar (a), comenzemos por observar que, por las propiedades de la descomposición en espacios de raíces, tenemos que

$$[\theta Y_{\beta}, \xi] = a[\theta Y_{\beta}, H_{\alpha}] + b[\theta Y_{\beta}, X_{\alpha}] \in \mathfrak{g}_{-\beta} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha-\beta}.$$

Tenemos, por hipótesis, que β es una raíz positiva, con lo que $-\beta$ es una raíz negativa, de lo que concluimos que $\langle \mathfrak{g}_{-\beta}, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \rangle_{B_{\theta}} = 0$. Además como $\alpha \in \Pi$ es una raíz simple y $\beta \in \Delta^+$, entonces $\alpha - \beta \notin \Delta^+$, y tenemos entonces que o $\beta = \alpha$ o $\mathfrak{g}_{\alpha-\beta} = 0$. En caso de que

$\beta = \alpha$, por la segunda afirmación del Lema 3.13 se tiene que $[\theta Y_\beta, X_\alpha] \in \mathfrak{k}_0$. En cualquier caso, $[\theta Y_\beta, X_\alpha]$ resulta ser ortogonal a $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ con respecto a B_θ , con lo que tenemos probado (a).

Veamos ahora (b). Tenemos que

$$[\theta[Y_\beta, \xi], \xi] = [\theta[Y_\beta, aH_\alpha + bX_\alpha], \xi] = -a\langle \alpha, \beta \rangle [\theta Y_\beta, \xi] + [\theta[Y_\beta, X_\alpha], \xi].$$

Usando el apartado (a) que acabamos de probar, $[\theta Y_\beta, \xi]$ es ortogonal a $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ con respecto de B_θ . Usando ahora las propiedades de la descomposición en espacios de raíces, deducimos que

$$[\theta[Y_\beta, X_\alpha], \xi] \in \mathfrak{g}_{-\beta-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\beta}, \quad \text{con } -\beta - \alpha, -\beta \notin \Delta^+ \cup \{0\}.$$

Hemos comprobado entonces que se cumple (b).

Finalmente, probemos (c). Usando de nuevo las propiedades de la descomposición en espacios de raíces, tenemos que

$$[Y_\beta, \theta\xi] \in \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\beta-\alpha} \quad \text{y} \quad [[Y_\beta, \xi], \theta\xi] \in \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\beta-\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\beta+\alpha}.$$

Como estamos asumiendo por hipótesis que $\beta \in \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$, tenemos que $\beta + \alpha \in \Delta^+$ o $\beta + \alpha \notin \Delta \cup \{0\}$, y $\beta - \alpha \in \Delta^+$ o $\beta - \alpha \notin \Delta \cup \{0\}$. En ambos casos, tenemos que $[[Y_\beta, \xi], \theta\xi] \in \mathfrak{n}$, y tomando $a = 0$ y $b = 1$ en el primer corchete, tenemos también que $[Y_\beta, \theta X_\alpha] \in \mathfrak{a}$, de lo que seguimos (c). \square

En la siguiente proposición mostramos una forma de relacionar los operadores forma y de Jacobi.

Proposición 3.17. *Sea $\xi = aH_\alpha + bX_\alpha$ un vector unitario, con $\alpha \in \Pi$ una raíz simple, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ un vector unitario, y $a, b \in \mathbb{R}$. Sea $Y_\beta \in \mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{s} = (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}) \ominus \mathbb{R}\xi$, donde $\beta \in \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$. Entonces*

$$(R_\xi + \mathcal{S}_\xi^2) Y_\beta = 0.$$

Demostración. Dado que $\alpha \in \Pi$ es raíz simple y $\beta \in \Delta^+$, se tiene que $\alpha - \beta \notin \Delta^+$. Ahora, usando las afirmaciones del Lema 3.14, tenemos que

$$\nabla_\xi \xi \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_\alpha, \quad \nabla_\xi \xi - \theta \nabla_\xi \xi = [\theta \xi, \xi].$$

Así, usando el Lema 3.15, junto con el hecho de que $\langle Y_\beta, \mathfrak{g}_\alpha \rangle = 0$ (por ser $\beta \neq \alpha$), tenemos

$$\nabla_{Y_\beta} \nabla_\xi \xi = \frac{1}{2} ([Y_\beta, \nabla_\xi \xi] + [\theta Y_\beta, \nabla_\xi \xi] - [Y_\beta, \theta \nabla_\xi \xi])_{\mathfrak{n}} = \frac{1}{2} [Y_\beta, [\theta \xi, \xi]].$$

Observemos que el segundo sumando del término intermedio de la igualdad es ortogonal a $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, según se puede ver en la primera afirmación del Lema 3.16, con lo que su proyección ortogonal sobre \mathfrak{n} es nula. Si volvemos a utilizar el Lema 3.15 junto con las tres afirmaciones del Lema 3.16 y la simetría de la conexión de Levi-Civita,

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \nabla_{Y_\beta} \xi &= \frac{1}{2} \nabla_\xi ([Y_\beta, \xi] + [\theta Y_\beta, \xi] - [Y_\beta, \theta \xi])_{\mathfrak{n}} = \frac{1}{2} \nabla_\xi [Y_\beta, \xi] - \frac{1}{2} \nabla_\xi [Y_\beta, \theta \xi] \\ &= \frac{1}{2} [\xi, [Y_\beta, \xi]] + \frac{1}{2} \nabla_{[Y_\beta, \xi]} \xi - \frac{1}{2} \nabla_\xi [Y_\beta, \theta \xi]. \end{aligned}$$

Dado que $\beta \in \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$, tenemos $[Y_\beta, \xi] \in \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ y $\xi \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$, con lo que podemos volver a aplicar el Lema 3.15 y los puntos (b) y (c) del Lema 3.16 para llegar a

$$\nabla_{[Y_\beta, \xi]} \xi = \frac{1}{2}([[[Y_\beta, \xi], \xi], \xi] + [\theta[Y_\beta, \xi], \xi] - [[Y_\beta, \xi], \theta\xi])_{\mathfrak{n}} = \frac{1}{2}[[Y_\beta, \xi], \xi] - \frac{1}{2}[[Y_\beta, \xi], \theta\xi].$$

Podemos volver a usar el Lema 3.15 junto con todos los puntos del Lema 3.16 para tener, por último,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\xi^2 Y_\beta &= \nabla_{\nabla_{Y_\beta} \xi} \xi = \frac{1}{2} \nabla_{([Y_\beta, \xi] + [\theta Y_\beta, \xi] - [Y_\beta, \theta \xi])_{\mathfrak{n}}} \xi = \frac{1}{2} \nabla_{[Y_\beta, \xi]} \xi - \frac{1}{2} \nabla_{[Y_\beta, \theta \xi]} \xi \\ &= \frac{1}{2} \nabla_{[Y_\beta, \xi]} \xi + \frac{1}{2} [\xi, [Y_\beta, \theta \xi]] - \frac{1}{2} \nabla_\xi [Y_\beta, \theta \xi] \\ &= \frac{1}{2} \nabla_{[Y_\beta, \xi]} \xi - \frac{1}{2} [Y_\beta, [\theta \xi, \xi]] - \frac{1}{2} [\theta \xi, [\xi, Y_\beta]] - \frac{1}{2} \nabla_\xi [Y_\beta, \theta \xi]. \end{aligned}$$

Juntando todas las expresiones que acabamos de obtener, llegamos a que

$$\begin{aligned} (R_\xi + \mathcal{S}_\xi^2) Y_\beta &= \nabla_{Y_\beta} \nabla_\xi \xi - \nabla_\xi \nabla_{Y_\beta} \xi - \nabla_{[Y_\beta, \xi]} \xi + \mathcal{S}_\xi^2 Y_\beta \\ &= \frac{1}{2} [Y_\beta, [\theta \xi, \xi]] - \frac{1}{2} [\xi, [Y_\beta, \xi]] - \frac{1}{2} \nabla_{[Y_\beta, \xi]} \xi + \frac{1}{2} \nabla_\xi [Y_\beta, \theta \xi] - \frac{1}{2} [[Y_\beta, \xi], \xi] \\ &\quad + \frac{1}{2} [[Y_\beta, \xi], \theta \xi] + \frac{1}{2} \nabla_{[Y_\beta, \xi]} \xi - \frac{1}{2} [Y_\beta, [\theta \xi, \xi]] - \frac{1}{2} [\theta \xi, [\xi, Y_\beta]] - \frac{1}{2} \nabla_\xi [Y_\beta, \theta \xi] \\ &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

Usando este resultado, tenemos que $R_\xi|_{\mathfrak{g}_\beta} = -\mathcal{S}_\xi^2|_{\mathfrak{g}_\beta}$ para cada $\beta \in \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$. De esta forma, para $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{s}$ (siendo $\beta \in \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$) obtenemos que

$$(\mathcal{S}_\xi \circ R_\xi) X_\beta = \mathcal{S}_\xi(-\mathcal{S}_\xi^2 X_\beta) = -\mathcal{S}_\xi^3 X_\beta = -(\mathcal{S}_\xi^2 \circ \mathcal{S}_\xi) X_\beta = (R_\xi \circ \mathcal{S}_\xi) X_\beta. \quad (3.3)$$

Veamos la última igualdad. Para ello, consideremos $\mathcal{S}_\xi X_\beta$ y veremos para qué β 's es posible aplicar la Proposición 3.17. Considerando la relación (2.4) del Lema 2.17, la relación (1.3), y dado $Z \in \mathfrak{g}_\alpha$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_\beta} \xi, Z \rangle_{AN} &= \frac{1}{4} \langle [X_\beta, aH_\alpha + bX_\alpha] + [\theta X_\beta, aH_\alpha + bX_\alpha] - [X_\beta, a\theta H_\alpha + b\theta X_\alpha], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= \frac{1}{2} \langle [X_\beta, aH_\alpha], Z \rangle_{B_\theta} - \frac{1}{4} \langle [X_\beta, b\theta X_\alpha], Z \rangle_{B_\theta}. \end{aligned}$$

Para obtener la última igualdad, hemos usado las propiedades de la descomposición en espacios de raíces y la ortogonalidad de tal descomposición. Hemos llegado entonces a una restricción para la validez de la última igualdad de la ecuación (3.3). Si $\beta = \alpha$, o $\beta = 2\alpha$, entonces tenemos que $[X_\beta, H_\alpha] \in \mathfrak{g}_\alpha$, o $[X_\beta, \theta X_\alpha] \in \mathfrak{g}_\alpha$, respectivamente. Por tanto, $\mathcal{S}_\xi X_\beta$ pertenecerá a \mathfrak{g}_α para estas dos elecciones de β , y entonces la Proposición 3.17 no es aplicable. Podemos, sin embargo, concluir un resultado parcial, válido en el caso de que 2α no sea raíz.

Proposición 3.18. *Si $\alpha \in \Pi$ es una raíz simple tal que $2\alpha \notin \Delta^+$, entonces*

$$(R_\xi \circ \mathcal{S}_\xi)|_{\mathfrak{n} \ominus \mathfrak{g}_\alpha} = (\mathcal{S}_\xi \circ R_\xi)|_{\mathfrak{n} \ominus \mathfrak{g}_\alpha}.$$

Con los resultados que hemos visto hasta ahora, respecto a la descomposición de \mathfrak{s} vista en la ecuación (3.2), hemos visto que, asumiendo que $2\alpha \notin \Delta^+$, el operador forma \mathcal{S}_ξ y el operador de Jacobi R_ξ comutan, siendo $\xi = aH_\alpha + bX_\alpha$. Ahora bien, esto lo hemos hecho para vectores distintos del vector $U = b|\alpha|^{-1}H_\alpha - a|\alpha|X_\alpha$. Por lo tanto, en lo que sigue, trabajaremos con resultados referentes al vector U , comenzando por dar una serie de identidades útiles para trabajar con este vector.

Lema 3.19. *Dado un vector unitario $\xi = aH_\alpha + bX_\alpha$, siendo $\alpha \in \Pi$ una raíz simple, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ unitario y $a, b \in \mathbb{R}$, y siendo $U = b|\alpha|^{-1}H_\alpha - a|\alpha|X_\alpha$ asociado, se tienen las siguientes identidades:*

$$\begin{array}{lll} (i) \quad \nabla_{X_\alpha} \xi = |\alpha|U, & (iii) \quad \nabla_U U = a|\alpha|^2 \xi, & (v) \quad [U, \xi] = |\alpha|X_\alpha, \\ (ii) \quad \nabla_U \xi = -a|\alpha|^2 U, & (iv) \quad \nabla_\xi U = -b|\alpha|\xi, & (vi) \quad \nabla_\xi \xi = b|\alpha|U. \end{array}$$

Demuestração. En toda la demostración estaremos considerando un vector $Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ arbitrario. Veamos cada una de las identidades por separado.

- (i) Usando las relaciones (2.3) y (2.4) del Lema 2.17 junto con el punto (a) del Lema 3.13, llegamos a que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_\alpha} \xi, Z \rangle_{AN} &= \frac{1}{4} \langle [X_\alpha, aH_\alpha + bX_\alpha] + [\theta X_\alpha, aH_\alpha + bX_\alpha] - [X_\alpha, \theta(aH_\alpha + bX_\alpha)], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= \frac{1}{4} \langle a[X_\alpha, H_\alpha] + a[\theta X_\alpha, H_\alpha] + b[\theta X_\alpha, X_\alpha] \\ &\quad - a[X_\alpha, \theta H_\alpha] - b[X_\alpha, \theta X_\alpha], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= \frac{1}{2} \langle -a[H_\alpha, X_\alpha] + b[\theta X_\alpha, X_\alpha], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= \frac{1}{2} \langle -a|\alpha|^2 X_\alpha, Z \rangle_{B_\theta} + \langle b\langle X_\alpha, X_\alpha \rangle_{AN} H_\alpha, Z \rangle_{B_\theta} \\ &= a|\alpha|^2 \langle X_\alpha, Z \rangle_{B_\theta} + b\langle H_\alpha, Z \rangle_{B_\theta} a|\alpha|^2 \langle X_\alpha, Z \rangle_{AN} + b\langle H_\alpha, Z \rangle_{AN} \\ &= \langle |\alpha|U, Z \rangle_{AN}. \end{aligned}$$

Observemos que en la tercera igualdad hemos usado las propiedades de la descomposición en espacios de raíces para eliminar el sumando $a[\theta X_\alpha, H_\alpha]$.

- (ii) Usando el apartado (i) que acabamos de probar junto con el apartado (i) del Lema 3.7, obtenemos

$$\nabla_U \xi = b|\alpha|^{-1} \nabla_{H_\alpha} \xi - a|\alpha| \nabla_{X_\alpha} \xi = -a|\alpha|^2 U.$$

- (iii) Usando otra vez las relaciones (2.3) y (2.4) del Lema 2.17 junto con el punto (a) del Lema 3.13, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{X_\alpha} U, Z \rangle_{AN} &= \frac{1}{4} \langle [X_\alpha, U] + [\theta X_\alpha, U] - [X_\alpha, \theta U], Z \rangle_{B_\theta} \\
&= \frac{1}{4} \langle -b|\alpha|^{-1}[H_\alpha, X_\alpha] - a|\alpha|[\theta X_\alpha, X_\alpha] \\
&\quad - b|\alpha|^{-1}[H_\alpha, X_\alpha] + a|\alpha|[X_\alpha, \theta X_\alpha], Z \rangle_{B_\theta} \\
&= -a|\alpha| \langle H_\alpha, Z \rangle_{B_\theta} - \frac{1}{2}b|\alpha| \langle X_\alpha, Z \rangle_{B_\theta} \\
&= -a|\alpha| \langle H_\alpha, Z \rangle_{AN} - b|\alpha| \langle X_\alpha, Z \rangle_{AN}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

De esta identidad deducimos que $\nabla_{X_\alpha} U = -|\alpha|\xi$. Si usamos entonces la identidad (i) del Lema 3.7, tenemos

$$\nabla_U U = b|\alpha|^{-1} \nabla_{H_\alpha} U - b|\alpha| \nabla_{X_\alpha} U = a|\alpha|^2 \xi.$$

- (iv) Usando también que $\nabla_{X_\alpha} U = -|\alpha|\xi$ y el apartado (i) del Lema 3.7, deducimos que

$$\nabla_\xi U = a \nabla_{H_\alpha} U + b \nabla_{X_\alpha} U = -b|\alpha|\xi.$$

- (v) Si tenemos en cuenta que ξ es unitario, tenemos que $a^2|\alpha|^2 + b^2 = 1$, con lo cual

$$[U, \xi] = [b|\alpha|^{-1}H_\alpha - a|\alpha|X_\alpha, aH_\alpha + bX_\alpha] = b^2|\alpha|X_\alpha + a^2|\alpha|^3X_\alpha = |\alpha|X_\alpha.$$

- (vi) Se sigue directamente del punto (ii) del Lema 3.14. \square

Proposición 3.20. *Sean $\xi = aH_\alpha + bX_\alpha$ y $U = b|\alpha|^{-1}H_\alpha - a|\alpha|X_\alpha$. Entonces*

$$(i) \quad \mathcal{S}_\xi U = a|\alpha|^2 U.$$

$$(ii) \quad R_\xi(U) = -|\alpha|^2 U.$$

Demuestração. Usando el Lema 3.19, obtenemos

$$\mathcal{S}_\xi U = (-\nabla_U \xi)^\top = (a|\alpha|^2 U)^\top = a|\alpha|^2 U,$$

junto con

$$\begin{aligned}
R_\xi U &= R(U, \xi)\xi = \nabla_U \nabla_\xi \xi - \nabla_\xi \nabla_U \xi - \nabla_{[U, \xi]} \xi = \nabla_U b|\alpha|U + \nabla_\xi a|\alpha|^2 U - \nabla_{|\alpha|X_\alpha} \xi \\
&= ab|\alpha|^2 \xi - ab|\alpha|^3 \xi = -|\alpha|^2 U,
\end{aligned}$$

concluyéndose así la demostración. \square

Como consecuencia de la anterior proposición, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.21. *Sean $\xi = aH_\alpha + bX_\alpha$ y $U = b|\alpha|^{-1}H_\alpha - a|\alpha|X_\alpha$. Entonces*

$$(R_\xi \circ \mathcal{S}_\xi)(U) = (\mathcal{S}_\xi \circ R_\xi)(U).$$

Tomemos $\alpha \in \Delta^+$, pero con $2\alpha \notin \Delta^+$. Entonces, dados $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus X_\alpha$ y $Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{Y_\alpha} \xi, Z \rangle_{AN} &= \frac{1}{4} \langle [Y_\alpha, aH_\alpha + bX_\alpha] + [\theta Y_\alpha, aH_\alpha + bX_\alpha] - [Y_\alpha, -aH_\alpha + b\theta X_\alpha], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= \frac{1}{4} \langle -a[H_\alpha, Y_\alpha] - a[H_\alpha, Y_\alpha], Z \rangle_{B_\theta} = -\frac{1}{2} a \langle [H_\alpha, Y_\alpha], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= -\frac{1}{2} a|\alpha|^2 \langle Y_\alpha, Z \rangle_{B_\theta} = -a|\alpha|^2 \langle Y_\alpha, Z \rangle_{AN}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

En la segunda igualdad, como $2\alpha \notin \Delta^+$ y la suma de raíces positivas o es una raíz positiva o no es raíz porque su subespacio de raíz asociado es trivial, deducimos que $[Y_\alpha, X_\alpha] \in \mathfrak{g}_{2\alpha} = 0$. Además, los corchetes $[\theta Y_\alpha, X_\alpha]$ y $[Y_\alpha, X_\alpha]$ se anulan al hacer el producto con $Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ por ser elementos de $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_0$. Así, dados $\xi = aH_\alpha + bY_\alpha$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathbb{R}X_\alpha$ y $\alpha \in \Delta^+$, $2\alpha \notin \Delta^+$,

$$\mathcal{S}_\xi(Y_\alpha) = -(\nabla_{Y_\alpha} \xi)^\top = a|\alpha|^2 Y_\alpha. \quad (3.6)$$

Ahora, tenemos que calcular también $R_\xi(Y_\alpha)$. Para hacer esto, hay algunos cálculos previos que tenemos que llevar a cabo. Sean $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \ominus \mathbb{R}X_\alpha$ y $Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

$$\begin{aligned} \langle \nabla_\xi Y_\alpha, Z \rangle_{AN} &= \frac{1}{4} \langle [\xi, Y_\alpha] + [\theta \xi, Y_\alpha] - [\xi, \theta Y_\alpha], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= \frac{1}{4} \langle [aH_\alpha + bX_\alpha, Y_\alpha] + [-aH_\alpha + b\theta X_\alpha, Y_\alpha] - [aH_\alpha + bX_\alpha, \theta Y_\alpha], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= \frac{1}{4} \langle a|\alpha|^2 Y_\alpha - a|\alpha|^2 Y_\alpha, Z \rangle_{B_\theta} = 0. \end{aligned}$$

Como sucedía en (3.5), todos los corchetes que involucran a X_α junto con Y_α se anulan de por sí o lo hacen al considerar el producto escalar con Z . Por otra parte, $[H_\alpha, \theta Y_\alpha] \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, con lo que el producto por Z también se hace nulo. Por otra parte, si calculamos el corchete de Y_α con ξ , tenemos del hecho de que 2α no sea raíz

$$[Y_\alpha, \xi] = [Y_\alpha, aH_\alpha + bX_\alpha] = -a[H_\alpha, Y_\alpha] = -a|\alpha|^2 Y_\alpha. \quad (3.7)$$

Para calcular $R_\xi(Y_\alpha)$ necesitaremos también de la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{Y_\alpha} U, Z \rangle &= \frac{1}{4} \langle [Y_\alpha, b|\alpha|^{-1}H_\alpha - a|\alpha|X_\alpha] + [\theta Y_\alpha, U] - [Y_\alpha, -b|\alpha|^{-1}H_\alpha - a|\alpha|\theta X_\alpha], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= \frac{1}{4} \langle -[b|\alpha|^{-1}H_\alpha, Y_\alpha] - [b|\alpha|^{-1}H_\alpha, Y_\alpha], Z \rangle_{B_\theta} \\ &= -\frac{1}{2} b|\alpha| \langle Y_\alpha, Z \rangle_{B_\theta} = -b|\alpha| \langle Y_\alpha, Z \rangle_{AN}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

El término $[\theta Y_\alpha, U]$ no se ha desarrollado ya que su producto escalar con cualquier elemento $Z \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ es nulo. Teniendo presentes las ecuaciones (3.7) y (3.8), podemos calcular $R_\xi(Y_\alpha)$:

$$\begin{aligned} R_\xi(Y_\alpha) &= \nabla_{Y_\alpha} \nabla_\xi \xi - \nabla_\xi \nabla_{Y_\alpha} \xi - \nabla_{[Y_\alpha, \xi]} \xi = b|\alpha| \nabla_{Y_\alpha} U + a|\alpha|^2 \nabla_\xi Y_\alpha + a|\alpha|^2 \nabla_{Y_\alpha} \xi \\ &= b|\alpha| \nabla_{Y_\alpha} U - a^2 |\alpha|^4 Y_\alpha = (-b^2 |\alpha|^2 - a^2 |\alpha|^4) Y_\alpha, \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tomando las ecuaciones (3.6) y (3.9), tenemos

$$(R_\xi \circ \mathcal{S}_\xi)(Y_\alpha) = R_\xi(a|\alpha|^2 Y_\alpha) = a|\alpha|^2 (-b^2 |\alpha|^2 - a^2 |\alpha|^4) Y_\alpha,$$

$$(\mathcal{S}_\xi \circ R_\xi)(Y_\alpha) = \mathcal{S}_\xi(-b^2 |\alpha|^2 - a^2 |\alpha|^4) Y_\alpha = a|\alpha|^2 (-b^2 |\alpha|^2 - a^2 |\alpha|^4) Y_\alpha.$$

Con todo, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 3.22. *Sea M un espacio simétrico irreducible de tipo no compacto y $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ un conjunto de raíces simples para el sistema de raíces Δ asociado a M . Sea \mathfrak{F} una foliación de M de tipo \mathfrak{F}_i , con $i \in \{1, \dots, r\}$, tal que $2\alpha_i \notin \Delta$. Entonces todas las hojas de la foliación \mathfrak{F}_i son de curvatura adaptada.*

Ahora estamos en disposición de demostrar el resultado principal de esta memoria.

Demostración del Teorema Principal. Los espacios simétricos irreducibles de tipo no compacto que tienen una raíz simple α tal que 2α es también raíz son [6, p. 340]:

$$\frac{\mathrm{SU}_{r,r+n}}{S(\mathrm{U}_r \mathrm{U}_{r+n})}, \quad \frac{\mathrm{SO}_{4r+2}^*}{\mathrm{U}_{2r+1}}, \quad \frac{\mathrm{Sp}_{r,r+n}}{\mathrm{Sp}_r \mathrm{Sp}_{r+n}}, \quad \frac{\mathrm{E}_6^{-14}}{\mathrm{Spin}(10) \mathrm{U}_1} \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{F}_4^{-20}}{\mathrm{Spin}(9)}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta el Teorema 3.9, el Teorema 3.22 y la clasificación de foliaciones homogéneas de cohomogeneidad uno en espacios simétricos irreducibles de tipo no compacto [9, Theorem 5.5] obtenemos el resultado principal de esta memoria. \square

Bibliografía

- [1] M. M. Alexandrino, R. G. Bettiol, *Lie groups and geometric aspects of isometric actions*. Springer, 2015.
- [2] L. Bérard Bergery, Sur de nouvelles variétés riemanniennes d’Einstein. *Publ. Inst. E. Cartan* **4** (1982), 1–60.
- [3] J. Berndt, Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic space. *J. Reine Angew. Math.* **395** (1989), 132–141.
- [4] J. Berndt, Real hypersurfaces in quaternionic space forms. *J. Reine Angew. Math.* **419** (1991), 9–26.
- [5] J. Berndt, M. Brück, Cohomogeneity one actions on hyperbolic spaces. *J. Reine Angew. Math.* **541** (2001), 209–235.
- [6] J. Berndt, S. Console, C. Olmos, *Submanifolds and holonomy. Second edition*. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [7] J. Berndt, M. Domínguez-Vázquez, Cohomogeneity one actions on some noncompact symmetric spaces of rank two. *Transform. Groups* **20** (2015), no. 4, 921–938.
- [8] J. Berndt, V. Sanmartín-López, Submanifolds with constant principal curvatures in Riemannian symmetric spaces. A aparecer en *Commun. Anal. Geom.* arXiv:1805.10088.
- [9] J. Berndt, H. Tamaru, Homogeneous codimension one foliations on noncompact symmetric spaces. *J. Differential Geom.* **63** (2003), 1–40.
- [10] J. Berndt, H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces with a totally geodesic singular orbit. *Tohoku Math. J. (2)* **56** (2004), no. 2, 163–177.
- [11] J. Berndt, H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one. *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 7, 3425–3438.
- [12] J. Berndt, H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type. *J. Reine Angew. Math.* **683** (2013), 129–159.

- [13] J. Berndt, L. Vanhecke, Curvature-adapted submanifolds. *Nikonhai Math J.* **3** (1992), no. 2, 177–185.
- [14] É. Cartan, Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante. *Ann. Mat. Pura Appl.* **17** (1938), 177–191.
- [15] J. E. D’Atri, Certain isoparametric families of hypersurfaces in symmetric spaces. *J. Differential Geom.* **14** (1979), no. 1, 21–40.
- [16] G. de Rham, Sur la reductibilité d’un espace de Riemann. *Comment. Math. Helv.* **26** (1952), 328–344.
- [17] J. C. Díaz-Ramos, Proper isometric actions. arXiv:0811.0547.
- [18] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez, T. Otero, Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type and higher rank. *Adv. Math.* **428** (2023), 109–165.
- [19] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez, A. Rodríguez-Vázquez, Homogeneous and inhomogeneous isoparametric hypersurfaces in rank one symmetric spaces. *J. Reine Angew. Math.* **779** (2021), 189–222.
- [20] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López, Submanifold geometry in symmetric spaces of noncompact type. *São Paulo J. Math. Sci.* **15** (2021), no. 1, 75–110.
- [21] M. Domínguez-Vázquez, V. Sanmartín-López, H. Tamaru, Codimension one Ricci soliton subgroups of solvable Iwasawa groups. *J. Math. Pures Appl.* **152** (2021), 69–93.
- [22] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie algebras and representations*. Quantum Theory for Mathematicians, Springer, New York, NY, 2013.
- [23] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic press, 1978.
- [24] S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 39, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [25] W. Y. Hsiang, H. B. Lawson Jr., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *J. Differential Geom.* **5** (1971), 1–38.
- [26] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer, Berlin, 1966.
- [27] M. Kimura, Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), no. 1, 137–149.
- [28] A. W. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*. Second edition. Progress in Mathematics, 140. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

- [29] A. Kollross, A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), 571–612.
- [30] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer, 1997.
- [31] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Second Edition, Springer, 2013.
- [32] M. Lohnherr, H. Reckziegel, On ruled real hypersurfaces in complex space forms. *Geom. Dedicata* **74** (1999), 267–286.
- [33] P. S. Mostert, On a compact Lie group acting on a manifold. *Ann. of Math.* **65** (1957), 447–455.
- [34] T. Murphy, Curvature-adapted submanifolds of symmetric spaces. *Indiana Univ. Math. J.* **61** (2012), no. 2, 831–847.
- [35] S. B. Myers, N. E. Steenrod, The group of isometries of a Riemannian manifold. *Ann. of Math* (2) **40** (1939), no. 2, 400–416.
- [36] B. Panyanak, W. Atiponrat, W. Inthakon et al. Extended Cartan fixed point theorem. *J. Fixed Point Theory Appl.* **24** (2022).
- [37] A. Rodríguez-Vázquez, *Homogeneous hypersurfaces and totally geodesic submanifolds*. Ph.D. thesis University of Santiago de Compostela, 2022.
- [38] B. Segre, Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (6) **27** (1938), 203–207.
- [39] I. Solonenko, Classification of homogeneous hypersurfaces in some noncompact symmetric spaces of rank two. *Ann. Mat.* **202** (2023), 2915–2946.
- [40] R. Takagi, On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space. *Osaka Math. J.* **10** (1973), 495–506.
- [41] W. Ziller, *Lie Groups. Representations Theory and Symmetric Spaces*. University of Pennsylvania, Preprint 2021. <https://www2.math.upenn.edu/~wziller/math650/LieGroupsReps.pdf> (último acceso 28/06/2024).

