PAUL DEDECKER

CONFERENCIAS SOBRE

GEOMETRIA DIFERENCIAL

Y TOPOLOGIA ALGEBRAICA

Notas recopiladas por

JOSÉ VAQUER y RICARDO MARIÑO

1

1959

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA - FACULTAD DE CIENCIAS
SEMINARIO MATEMÁTICO - SECCIÓN DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL

PROF. PAUL DEDECKER
DE LA UNIVERSIDAD DE LIEJA

CONFERENCIAS SOBRE GEOMETRIA DIFERENCIAL Y TOPOLOGIA ALGEBRAICA

CURSO DESARROLLADO EN EL SEMINARIO MATEMÁTICO

NOTAS RECOPILADAS POR

JOSÉ VAQUER Y RICARDO MARIÑO

PUBLICACIONES DEL SEMINARIO MATEMÁTICO. I
SANTIAGO DE COMPOSTELA, 1960

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA. FACULTAD DE CIENCIAS
SEMINARIO MATEMATICO. SECCION DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Prof. P A U L D E D E C K E R
De la Universidad de Lieja

CONFERENCIAS SOBRE
G E O M E T R I A D I F E R E N C I A L
y
T O P O L O G I A A L G E B R A I C A

Curso desarrollado en el Seminario Matemático
Notas recopiladas por
José Vaquer y Ricardo Mariño

PUBLICACIONES DEL SEMINARIO MATEMATICO. I
SANTIAGO DE COMPOSTELA. 1960

INDICE

I N T R O D U C C I O N

La Geometria diferencial se desarrolla en su primer período como interpretación del Cálculo diferencial, culminando -- con la publicación del libro de G. Darboux, "Leçons sur la Théorie générale des surfaces", (París, 1887-96).

En el segundo período de su desarrollo, la Geometria - diferencial está muy influida por la Física, especialmente por - la Teoría de la relatividad, y es el período en el que se desa-- rrollan los conceptos del Cálculo vectorial y tensorial, así como los espacios de Riemann y los distintos conceptos de conexión (métrica, afín, etc).

En los últimos años, la Geometría diferencial se desarrolló bajo la influencia del Álgebra abstracta y la Topología, las cuales permitieron esclarecer conceptos e introducir al mismo tiempo generalizaciones en los resultados.

Un ejemplo interesante del desarrollo de la Geometria diferencial se obtiene al comparar la definición del tensor dada hace unos treinta años con otras más modernas, tal como veremos - más adelante.

I VARIEDADES DIFERENCIABLES Y ESPACIOS FIBRADOS

1.- VARIEDAD DIFERENCIABLE.

Consideremos el espacio enclídeo $\mathcal{R}^n$ y un espacio topológico $\mathcal{V}$. Supongamos que para cada punto $x \in \mathcal{V}$ existe un homeomorfismo f_x de un entorno U_x con un conjunto abierto V_x de $\mathcal{R}^n$ y que, además, estos homeomorfismos son tales que, si $Z \in U_x \cap U_y$, la transformación $g : z' \longrightarrow z''$ en $\mathcal{R}^n$, correspondiente a $z' = f_x(z)$, $z'' = f_y(z)$ es una transformación de clase C^r (es decir, con derivadas continuas hasta el orden r): Diremos, entonces, que el conjunto del espacio topológico $\mathcal{V}$ y de los homeomorfismos f, definen una variedad diferenciable de clase C^r.

2.- PSEUDO-GRUPO DE TRANSFORMACIONES.

El conjunto Λ_n^r de todos los homeomorfismos de clase C^r, cuyos inversos también lo son, entre abiertos de $\mathcal{R}^n$, cumplen las siguientes condiciones:

1) Si $g_1 : U_1 \longrightarrow V_1 \in \Lambda_n^r$, Si $g_2 : U_2 \longrightarrow V_2 \in \Lambda_n^r$ y $g_1 | U_{12} = g_2 | U_{12}$, entonces $g_1 | U_{12} = g_2 | U_{12} \in \Lambda_n^r$

2) Si $g : U \longrightarrow V \in \Lambda_n^r$, entonces $g^{-1} : V \longrightarrow U \in \Lambda_n^r$

3) Si $g : U \longrightarrow V \in \Lambda_n^r$, $h : A \longrightarrow B \in \Lambda_n^r$ y $V \subset A$, entonces $h \circ g : U \longrightarrow h(V) \in \Lambda_n^r$

4) Si $g : U \longrightarrow V$ y es $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de tal modo que toda $g_i = g | U_i \in \Lambda_n^r$, entonces $g \in \Lambda_n^r$.

5) Si U es un abierto en $\mathcal{R}^n$, entonces existe un abierto $V \subset \mathcal{R}^n$ y $g : U \rightarrow V \in \Lambda_n^r$.

En general: un conjunto Γ de aplicaciones biunívocas f de subconjuntos de un conjunto E se llama <u>pseudo-grupo de transformaciones</u> si cumple 1), 2), 3), 4) y

5') E es la reunión de las <u>fuentes</u> de las funciones de Γ.

(El conjunto U es una <u>fuente</u> y el V un un <u>blanco</u> si $f : U \rightarrow V$).

Es conveniente conveniente suponer que la aplicación vacia, $\emptyset \rightarrow \emptyset$, pertenece a Γ.

En particular: para cada r, Λ_n^r es un pseudogrupo.

Consecuencias:

1ª Si U es fuente de $g \in \Gamma$, la identidad $I : U \rightarrow U \in \Gamma$. Pues si $g : U \rightarrow V \in \Gamma$, en virtud de 2) $g^{-1} : V \rightarrow U \in \Gamma$ y, por 3), $I = g^{-1} \circ g : U \rightarrow U \in \Gamma$.

2ª Si $g : U \rightarrow V \in \Gamma$ y $A \subset U$ es una fuente, de una aplicación de Γ, entonces $g | A \in \Gamma$. Pues, por la 1ª consecuencia, $I : A \rightarrow A \in \Gamma$ y, por 3), $g | A = g \circ I \in \Gamma$.

<u>Teorema</u>. <u>Las fuentes (blancos) de las funciones de Γ son conjuntos abiertos de una topología de E en la que todas las funciones de Γ son homeomorfismos</u>. En efecto:

a) Las fuentes cumplen las condiciones de los conjuntos abiertos en una topología de E. Pues $\emptyset$ es abierto, por ser fuente de la aplicación vacia. Además, si U_1, U2 son abiertos, la $I : U_1 \rightarrow U_1 \in \Gamma$ y la $I : U_2 \rightarrow U_2 \in \Gamma$ por lo que, en virtud de 1), $I : U_{12} \rightarrow U_{12} \in \Gamma$ y por lo tanto U_{12} es abierto. Si U_i ($i \in J$) son abiertos,

$I : U_i \rightarrow U_i \in \Gamma$ y, por 4), $I : \bigcup_{i \in J} U_i \rightarrow U_i \in \Gamma$, por lo que $\bigcup_{i \in J} U_i$ es abierto. Por 5'), E es abierto,

b) Las funciones $f \in \Gamma$ son homeomorfismos. Basta demostrar que transforman abiertos en abiertos (Pues, por 2), sus inversas también lo harán).

Sean $f : U \rightarrow V$ y A un abierto de U; entonces $I : A \rightarrow A \in \Gamma$ y, por 3), $f \circ I : A \rightarrow f(A) \in \Gamma$, por lo que f(A) es un blanco y, por tanto, un abierto.

3.- ATLAS

Consideremos los subconjuntos de dos conjuntos E, F : Si en un conjunto $\mathcal{A}$ de aplicaciones biunívocas de subconjuntos de F en subconjuntos de E, F es la reunión de las fuentes de las aplicaciones de $\mathcal{A}$, diremos que $\mathcal{A}$ es un atlas de F respecto E. Cada una de estas aplicaciones es una carta local.

Si $f_1 : U_1 \rightarrow V_1$ y $f_2 : U_2 \rightarrow V_2$ son dos cartas locales y $z \in U_1 \cap U_2$, $z' = f_1(z)$, $z'' = f_2(z)$, entonces la aplicación $g: f_1(U_{12}) \rightarrow f_2(U_{12})$ definida por $g(z') = z''$ se le llama cambio de carta local.

La aplicación g la representaremos por $g = f_2 f_1^{-1}$.

Si en E está definido un pseudogrupo de transformaciones Γ, llamaremos Γ-atlas a un atlas $\mathcal{A}$ tal, que todos los cambios de cartas locales pertenezcan a Γ.

Ejemplo: Una variedad diferenciable $\mathcal{V}$ de clase C^r viene dada por un Λ^r_n-atlas de $\mathcal{V}$ respecto $\mathcal{R}^n$.

Dado un Γ-atlas de F respecto E, el pseudo-grupo Γ define en E una topologia y las cartas locales permiten transportar esta topologia a cada una de las fuentes de dichas cartas.

<u>Teorema</u>. Si <u>$f_1:U_1 \to V_1$ y $f_2:U_2 \to V_2$ son dos cartas locales, las topologías indicidas por f_1 y f_2 en U_{12} coinciden</u>. Pues, los cambios de cartas locales son homeomorfismos para la Γ-topología de E.

Este teorema permite definir una topología en F y con ésta, las cartas locales son homeomorfismos.

<u>Definición</u>: Dos cartas locales de F respecto E se llaman Γ- <u>compatibles</u> si el cambio de cartas locales perteneca a Γ.

<u>Definición</u>: Un Γ-atlas $\mathcal{A}$ se llama completo o maximal si contiene todas las cartas Γ-compatibles con todas las cartas de $\mathcal{A}$.

<u>Teorema</u>: <u>Todo Γ-atlas $\mathcal{A}$ puede ampliarse a un Γ-atlas completo $\bar{\mathcal{A}}$</u>.

En efecto: El conjunto $\bar{\mathcal{A}}$ de las cartas locales $\bar{f}$ Γ-compatibles con todas las cartas de $\mathcal{A}$ es un Γ-atlas maximal que contiene $\mathcal{A}$. Para demostrarlo, basta ver que $\bar{\mathcal{A}}$ es un Γ-atlas, es decir, que si $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in \bar{\mathcal{A}}$, el cambio $\bar{f}_2 \bar{f}_1^{-1} \in \Gamma$. Si $\bar{f}_1 : U_1 \to V_1$ y $\bar{f}_2 : U_2 \to V_2$, entonces U_{12} puede recubrirse por cartas locales de $\mathcal{A}$. Sea $f : U \to V$ una de ellas; las funciones $g_1 = f\,\bar{f}_1^{-1}$ y $g_2 = f\,\bar{f}_2^{-1}$ pertenecen a Γ, luego $g_2^{-1}\,g_1$ también pertenece a Γ y por tanto, en virtud de la propiedad 4) de pseudogrupo, $g = \bar{f}_2\,\bar{f}_1^{-1} \in \Gamma$, c. q. d.

<u>Construcción de un pseudogrupo $\tilde{\Gamma}$ de transformaciones en F</u>.- Dado un atlas maximal $\mathcal{A}$ de F respecto E, compatible con Γ, los tres conjuntos de aplicaciones brunívocas de subconjuntos de F

$\tilde{\Gamma}_1 = \{\varphi \mid \forall f \in \mathcal{A} \Rightarrow f\varphi^{-1} \in \mathcal{A}\}$,

$\tilde{\Gamma}_2 = \{\varphi \mid \forall f \in \mathcal{A} \Rightarrow f\varphi \in \mathcal{A}\}$,

$\tilde{\Gamma}_3 = \{\varphi \mid \forall f, g \in \mathcal{A} \Rightarrow g\varphi f^{-1} \in \Gamma\}$,

coinciden.

En efecto: Si $\varphi \in \tilde{\Gamma}_1$, entonces $f\varphi^{-1} \in \mathcal{A}$ y $f\varphi^{-1}$ es compatible con todas las cartas locales de $\mathcal{A}$, es decir, $f\varphi^{-1}g^{-1} \in \Gamma$ y por tanto $g\varphi f^{-1} \in \Gamma$, luego $\varphi \in \tilde{\Gamma}_3$.

Recíprocamente, si $\varphi \in \tilde{\Gamma}_3$, $f\varphi^{-1}g^{-1} \in \Gamma$, luego $f\varphi^{-1}$ es compatible con todas las cartas de $\mathcal{A}$ que es maximal, luego $f\varphi^{-1} \in \mathcal{A}$ y $\varphi \in \tilde{\Gamma}_1$, por lo que es $\tilde{\Gamma}_1 = \tilde{\Gamma}_3$.

Análogamente se demuestra que es $\tilde{\Gamma}_2 = \tilde{\Gamma}_3$.

Se demuestra, también, que el conjunto de transformaciones $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 = \tilde{\Gamma}_2 = \tilde{\Gamma}_3$ es un pseudogrupo de transformaciones de F y que la topología definia por $\tilde{\Gamma}$ en F coincide con la topología definida por el atlas $\mathcal{A}$.

4.- Sea $\mathcal{V}_n^r$ una variedad diferenciable de clase C^r y dimensión n: Si $\mathcal{A}$ es un Λ_n^r-atlas maximal, también es un Λ_{n-1}^r- atlas; **si bien**, en general, no será maximal.

TEOREMA DE WHITNEY.- Si es $r \geq 1$ $(r = \infty)$ y $\mathcal{V}$ una variedad paracompacta de clase C^r, existe un atlas de $\mathcal{V}$ cuyos cambios pertenecen a Λ_n^{r+1} (Λ_n^ω). (La demostración de este teorema puede verse en "Geometric Integration Theory", H. Whitney; Princeton University Press. N. Y. 1.957)

Para $r = 0$ el teorema no está demostrado, pero se supone que es cierto.

Por otra parte la conjetura principal (Hauptvermutung) dice: Dadas dos triangulaciones de una variedad, existe un refinamiento común.

En el Congreso de Topologia de México del año 1.958 se demostró, mediante resultados obtenidos por Thom y Milnor, que las dos hipótesis anteriores se excluyen mutuamente.

Ejemplo de variedad analítica con Topología no separada.- El conjunto de puntos de la variedad está formado por los números reales no nulos, $\mathcal{R}'$, y dos puntos O_1, O_2. Las dos cartas locales:

$$f_1 : \mathcal{R}' \cup O_1 \longrightarrow \mathcal{R}\ , \text{ con } f_1(x) = x \text{ para } x \in \mathcal{R}' \text{ y } f_1(O_1)=0;$$
$$f_2 : \mathcal{R}' \cup O_2 \longrightarrow \mathcal{R}\ , \text{ con } f_2(x) = x \text{ para } x \in \mathcal{R}' \text{ y } f_2(O_2)=0;$$

definen, evidentemente una variedad analítica y, en ella, dos entornos cualesquiera de O_1 y O_2 siempre se cortan.

5.- VARIEDADES DIFERENCIALES CON BORDE.- Una función definida en un conjunto $A \subset \mathcal{R}^n$ se llama de clase C^r si es la restricción de una función de clase C^r definida en un abierto que contenga A.

Sean x', ..., x^n las coordenadas de $\mathcal{R}^n$ y designemos por $\mathcal{R}^{n+}$ a la parte de $\mathcal{R}^n$ para la que es $x^n \geq 0$: Si M^r_n es el pseudogrupo de transformaciones de los homeomorfismos de clase C^r entre abiertos de $\mathcal{R}^{n+}$ y $f : U \longrightarrow V \in M^r_n$, entonces

$$f \mid U \cap (x^n = 0) : U \cap (x^n = 0) \longrightarrow V \cap (x^n = 0)$$

es un homeomorfismo de Λ^r_{n-1}.

Se dice que una variedad $\mathcal{V}$ es una <u>variedad con borde</u>, si está definida por un M_n^r - atlas.

El conjunto de puntos, $G \subset \mathcal{V}$, que en las cartas locales estén representados por puntos para los que es $x^n = 0$, forman una subvariedad de dimensión n-1, la cual se llama <u>borde</u> de $\mathcal{V}$ y se representa por $G = \partial \mathcal{V}$.

6.- <u>VARIEDADES SIMPLECTICAS</u>.- Sean $x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^m$, coordenadas de $\mathcal{R}^n$ $(n = 2m)$ y consideremos la forma diferencial bilineal $\Omega = \sum (dx^i \delta y^i - \delta x^i dy^i)$ definida en $\mathcal{R}^{2m}$. Si $f: U \to V \in \Lambda_n^r$, entonces f transforma la restrinción de Ω a V en una forma Ω' de U y, si es $\Omega' = \Omega | U$, diremos que f es <u>simpléctica</u>.

El conjunto de todas las funciones simplécticas de clase r forman un subpseudogrupo de Λ_n^r y permiten definir <u>variedades simplécticas</u>.

7.- <u>NOCIONES INDUCTIVAS</u>.

Sea X un espacio topológico: A cada abierto $U \subset X$ le hacemos corresponder el conjunto T(U) de las funciones contínuas de U en la recta real R; T cumple las siguientes condiciones:

1) Si $\varphi: X \to Y$ es un homeomorfismo, $T(X) \xrightarrow{\varphi_T} T(Y)$ definida por $\varphi_T(\alpha) = \alpha \circ \varphi^{-1}$ es una aplicación biunívoca de T(X) en T(Y),

2) Si $\varphi: X \to Y$ y $\psi: Y \text{---} Z$ son homeomorfismos, se verifica: $(\psi \circ \varphi)_T = \psi_T \circ \varphi_T$,

3) Si U es un abierto de X, para la aplicación $i_{UX}: T(X) \to T(U)$ definida por $i_{UX}(\alpha) = \alpha | U$ se tiene: si $V \subset U \subset X$ son abiertos, $i_{yx} = i_{VU} \circ i_{Ux}$,

4) Si $\varphi : X \to Y$ es un homeomorfismo, U un abierto de X, $V = \varphi(U)$ y $\psi = \varphi | U : U \to V$, entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\varphi_T} & T(Y) \\ {\scriptstyle i_{UX}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{VY}} \\ T(U) & \xrightarrow{\psi_T} & T(V) \end{array}$$

es conmutativo, es decir, $i_{VY} \circ \varphi_T = \psi_T \circ i_{UX}$.

En general, T se llama <u>tipo de objetos inductivos</u> si

1) A cada espacio X corresponde un $T(X)$,

2) A cada homeomorfismo $X \xrightarrow{\varphi} Y$ corresponde una biyección $\varphi_T : T(X) \to T(Y)$ de modo que, si $\psi : Y \to Z$ es otro homeomorfismo, es $(\psi \circ \varphi)_T = \psi_T \, \varphi_T$,

3) A cada abierto $U \subset X$ le corresponde una aplicación $i_{UX} : T(X) \to T(U)$ tal, que si $V \subset U \subset X$, se verifica $i_{VU} \circ i_{UX} = i_{VX}$,

4) Si $\varphi : X \to Y$ es un homeomorfismo, U es un abierto de X, $V = \varphi(U)$ y $\psi = \varphi | U : U \to V$, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\varphi_T} & T(Y) \\ {\scriptstyle i_{UX}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{VY}} \\ T(U) & \xrightarrow{\psi} & T(V) \end{array}$$

es conmutativo.

Cuando T es el conjunto de funciones reales continuas y U un abierto de $\mathcal{R}^n$, podemos considerar el conjunto $S(U) \subset T(U)$ de funciones de clase r y entonces, si $\varphi : U \to V$ es un homeomorfismo, $\varphi_T : T(U) \to T(V)$; pero, en general, es $\varphi_T[S(u)] \neq S(v)$.

Si φ es de clase C^r, φ_T subordina una biyección $\varphi_T : S(U) \to S(V)$.

De una manera general; si se tiene un espacio E con un pseudogrupo de transformaciones Γ y un tipo T de objetos inductivos, y para cada abierto $U \subset E$ un subconjunto $S(U) \subset T(U)$, se dice que S es una <u>subfunción</u> de T si para $V \subset U$ es $i_{VU}[S(U)] = S(V)$.

Una subfunción S se llama <u>compatible</u> con Γ si para cada $\varphi : U \to V \in \Gamma$ se verifica que $\varphi_T : T(U) \to T(V)$ subordina una biyección $\varphi_T : S(U) \to S(V)$.

NOTACIONES: Sea $\mathcal{A} = \{f_i : U_i \to V_i\}$, $i \in I$, un Γ - atlas de F respecto (E, Γ):

$V_{ij} = f_i(U_{ij})$, $V_{ji} = f_j(U_{ij})$, $f_{ij} = f_i \, f_j^{-1} : V_{ji} \to V_{ij}$,

$V_{ijk} = f_i(U_{ijk}) = V_{ikj}$, $V_{kij} = f_k\,(U_{kij}) = V_{kji}$, $V_{ijk} = f_{ij}(V_{jki})$,

Se verifica: $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$; f_{ii} = identidad $V_i \to V_i$. Para todo $x \in V_{ijk}$, $f_{ik}(x) = f_{ij}\,[f_{jk}(x)]$.

Sea $\mathcal{A}$ un atlas de F respecto (E, Γ). Supongamos un tipo de objetos inductivos T y en E una subfunción S de T compatible con Γ. En F podemos definir una subfunción $S_{\mathcal{A}}$ de T, del siguiente modo:

Para un abierto $A \subset F$ sea $U_i' = A \cap U_i$, $V_i' = f_i(U_i')$ y para cada $\alpha \in T\,(A)$ sea $\alpha_i = i_{U_i' A}\,\alpha$, $\beta_i = f_{i\,T}\,\alpha_i$, entonces definimos:

$$S_{\mathcal{A}}(A) = \{\alpha \mid \alpha \in T(A) \text{ y } \forall\, i \in I, \beta_i \in S(V_i')\}.$$

<u>CONDICION DE RECOGIMIENTO</u>: Si $\alpha \in T(U)$, $U = \bigcup U_i$ y $\alpha \in S(U)$, entonces tambien $\alpha_i = i_{U_i U}\alpha \in S(U_i)$, aunque, en general, la condición de que α_i pertenezca a $S(U_i)$ no implica que α pertenezca a $S(U)$.

Si esta condición tiene lugar, se dice que S cumple la <u>condición de recogimiento</u>.

Si S cumple la condición de recogimiento, $S_{\mathcal{A}}$ es una subfunción de T que coincide con $S_{\bar{\mathcal{A}}}$.

8.- <u>APLICACIONES DIFERENCIABLES DE VARIEDADES</u>.- Como aplicación de lo dicho en el número anterior, consideremos una variedad $\mathcal{V}$ de clase C^r definida por un atlas $\mathcal{A}: \mathcal{V} \dashrightarrow (\mathcal{R}^n, \Lambda^r_n)$ y el tipo de objetos inductivos T de las funciones continuas en $\mathcal{R}^n$; las funciones reales de clase C^r forman una subfunción S de T compatible con Λ^r_n y que, evidentemente, cumple la condición de recogimiento; luego permite definir una subfunción sobre $\mathcal{V}$ cuyos elementos se llamarán funciones de clase C^r definidas sobre los abiertos de la variedad $\mathcal{V}$. En otras palabras: una aplicación $f : U \to \mathcal{R}$, $U \subset \mathcal{V}$ se llama de <u>clase</u> C^r si al expresarla en coordenadas locales resulta una función $f(x^1, \ldots, x^n)$ de clase C^r. Análogamente se definen las funciones de más variables, sin más que considerar funciones $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ de clase C^r.

Sea $\mathcal{W}$ una variedad diferenciable de dimensión m y clase C^r y $\mathcal{V}$ una variedad diferenciable de dimensión n y clase C^r. Consideremos el tipo de objetos inductivos $T(X)$ constituido por el conjunto de todas las funciones contínuas de un abierto de $\mathcal{W}$ en X (si $U \subset X$, $i_{UX} : T(X) \to T(U)$ se define como sigue: $\alpha \in T(X)$, $i_{UX}\alpha = \alpha | \alpha^{-1}U : \alpha^{-1}U \to U$) En el caso que $X = \mathcal{V}$, en ella está definido un pseudogrupo de transformaciones imagen del Λ^r_n por el atlas $\mathcal{A}: \mathcal{V} \dashrightarrow (\mathcal{R}^n, \Lambda^r_n)$; luego en $\mathcal{V}$ el tipo T tiene una subfunción S' compatible con el pseudogrupo de transformaciones cuyos elementos se llaman funciones de clase C^r de un abierto de W en V. En particular pueden considerarse funciones $f : W \dashrightarrow V$ de clase C^r.

9.- <u>PROLONGACION DE UN PSEUDOGRUPO DE TRANSFORMACIONES</u>.- Sea E un espacio con un pseudogrupo de transformaciones Γ y consideremos, análogamente, otros $(\tilde{E}, \tilde{\Gamma})$. Si p es una proyección de $\tilde{E}$ sobre E, diremos que $(\tilde{E}, \tilde{\Gamma}, p, E, F)$ es una <u>prolongación</u> de (E, Γ) cuando se cumplan las condiciones siguientes:

1)- Sea $\tilde{f} \in \tilde{\Gamma}$, $\tilde{f} : \tilde{U} \dashrightarrow \tilde{V}$: Si dos puntos $z, z' \in \tilde{E}$ tienen la misma proyección en E, $pz = pz'$, entonces es $p\tilde{f}z = p\tilde{f}z'$; si $U = p(\tilde{U})$ y $V = p(\tilde{V})$, la condición anterior permite definir $p\tilde{f} : U \dashrightarrow V$ de modo que para $x = pz \in U$ es $(p\tilde{f})x = p(\tilde{f}z)$,

2)- $\tilde{f} \in \tilde{\Gamma} \Longrightarrow p\tilde{f} \in \Gamma$,

3)- $\tilde{U} = p^{-1}(U)$, $\tilde{V} = p^{-1}(V)$,

4)- Para todo $f \in \Gamma$ existe $\tilde{f} \in \tilde{\Gamma}$ tal, que $f = p\tilde{f}$.

Si se cumple, además, esta otra condición:

5)- $\tilde{f}, \tilde{g}$ son iguales cuando tienen la misma proyección, la prolongación se llama <u>holoédrica</u>; en caso contrario, la prolongación se llama <u>meriédrica</u>.

Cuando es holoédrica, p induce una aplicación biunívoca de $\tilde{\Gamma}$ en Γ.

10.- <u>DETERMINACIÓN DE UN ATLAS POR SUS CAMBIOS DE COORDENADAS</u>.- Dadas E y F, una condición necesaria y suficiente para que $f_{ij} : V_{ji} \dashrightarrow V_{ij} \in \Gamma$ sean los cambios de coordenadas de un atlas es que se verifique:

1)- $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$

2)- Llamando $V_{ijk} = V_{ij} \cap V_{ik} = V_{ikj}$ ha de ser $f_{ji}(V_{ijk}) = V_{jik}$.

Entonces, si $x \in V_{kij}$ están definidos $f_{ik}(x)$, y $f_{jk}(x)$; pero $f_{jk}(x) \in V_{jik}$, luego $f_{ij}(f_{jk}(x))$ está definido. Y, finalmente,

3)- Para todo $x \in V_{kij}$ es $f_{ik}(x) = f_{ij}(f_{jk}(x))$.

La necesidad de la condición es evidente.

En cuanto a la suficiencia, tengamos presente el siguiente

L E M A: $V_{ij} \subset V_{ii} = V_i$; que resulta de ser $f_{ji}(V_{iji}) = V_{jii} = V_{ji}$ y por tanto $V_{ij} = f_{ij}\, V_{ji} = f_{ij}f_{ji}(V_{iji}) = V_{iji} = V_{ij} \cap V_{ii}$ y $V_{ij} \subset V_{ii}$.

Al suponer que f_{ij} son cambios que cumplen las condiciones 1), 2), 3), se puede construir un atlas que tiene f_{ij} como cambios de coordenadas: Pues, si es $\hat{F} = \{(x,i) \mid x \in V_i\}$ y en $\hat{F}$ definimos la relación $(x,i) \sim (y,j) \Longleftrightarrow x \in V_{ij},\ y \in V_{ji};\ x = f_{ij}\, y$. Además, con las propiedades 1), 2),3) es fácil ver que se trata de una relación de equivalencia. Si F es el espacio cociente de $\hat{F}$ por esta relación de equivalencia y $\Upsilon : \hat{F} \to F$ es la aplicación canónica, los conjuntos $\hat{V}_i = \{(x,i)\}$ de $\hat{F}$ se aplican biyectivamente por Υ en sus imágenes $U_i = \Upsilon(\hat{V}_i) \subset F$. Las aplicaciones

$$U_i \xrightarrow{\Upsilon^{-1}} \hat{V}_i \longrightarrow E$$
$$(x,i) \longrightarrow x$$

son cartas locales de F respecto E, $f_i : U_i \to V_i$, si para $z \in U_i \cap U_j$ es $z = \Upsilon(x,i) = \Upsilon(y,j)$; por tanto $x \in V_{ij}$, $y \in V_{ji}$, $y = f_{ji}x$ y $f_i z = x$, $f_j z = y$, por lo que f_{ij} son los cambios de este atlas.

Dicho atlas está definido, salvo un isomorfismo; pues, si $F' \xrightarrow{\mathcal{A}'} (E,\Gamma)$ es un atlas con cartas locales $f'_i : U'_i \to V_i$, con los mismos cambios f_{ij} la aplicación $\lambda : F' \to F$ definida por $\lambda(x) = \gamma(f_i(x),i)$, $x \in U'_i$, está bien definida y da un isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$.

11.- PROLONGACIÓN DE UN ATLAS.- Sea $(\tilde{E}, \tilde{\Gamma}, p, E, \Gamma)$ una prolongación de (E,Γ) y $\mathcal{A} : F \dots \to (E,\Gamma)$ un atlas.

Se llama prolongación del atlas $\mathcal{A}$, al diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tilde{F} \arrow[r, "\tilde{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "q"'] & (\tilde{E},\tilde{\Gamma}) \arrow[d, "p"] \\
F \arrow[r, "\mathcal{A}"] & (E,\Gamma)
\end{tikzcd}$$

en el que es

1)- $\mathcal{A} = \{ f_i : U_i \to V_i \}$, $i \in I$; $\tilde{\mathcal{A}} = \{ \tilde{f}_i : \tilde{U}_i \to \tilde{V}_i \}$, $i \in I$

con el mismo conjunto de índices.

2)- $\tilde{U}_i = q^{-1}U_i$, $\tilde{V}_i = p^{-1}V_i$, con el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\tilde{U}_i \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "q"'] & \tilde{V}_i \arrow[d, "p"] \\
U_i \arrow[r, "f_i"] & V_i
\end{tikzcd}$$

conmutativo y, finalmente,

3)- $f_{ij} = p\tilde{f}_{ij}$

TEOREMA: Si $(\tilde{E}, \tilde{\Gamma}, p, E, \Gamma)$ es una prolongación holoédrica de (E,Γ) y $\mathcal{A} : F \dots \to (E,\Gamma)$ un atlas, existe - salvo isomorfismos - una prolongación $\tilde{\mathcal{A}} : \tilde{F} \dots \to (\tilde{E}, \tilde{F})$ de $\mathcal{A}$, y solo una.

En efecto: Por ser $(\tilde{E}, \tilde{\Gamma}, p, E, \Gamma)$ holoédrica, a cada cambio $f_{ij} \in \Gamma$ del atlas $\mathcal{A}$ le corresponde una $\tilde{f}_{ij} \in \Gamma$, y solo una, tal, que $f_{ij} = p\tilde{f}_{ij}$. Las f_{ij} son cambios de coordenadas; por ser holoédrica la prolongación y $\tilde{\Gamma}$ un pseudogrupo, cumplen 1),2),3).

Estos cambios $\tilde{f}_{ij}$ definen un atlas, $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{F} \to (\tilde{E}, \tilde{\Gamma})$, que es la prolongación del $\mathcal{A}$. Por ser la prolongación holoédrica, los f_{ij} estan unívocamente determinados, luego, según 10, $\tilde{\mathcal{A}}$ también lo está (salvo isomorfismos).

12.- ESPACIO DE LOS VECTORES Y TENSORES TANGENTES.-

Consideremos el espacio euclídeo $\mathcal{R}^n$ y el pseudogrupo de transformaciones Λ^r_n : Vamos a definir una prolongación holoédrica $(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n, \tilde{\Lambda}^r_r, p, \mathcal{R}^n, \Lambda^r_n)$.

p está definida por $p(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) = x^1 \ldots x^n$ y $\tilde{\Lambda}^r_n$ del modo siguiente: Si $f : U \to V \in \Lambda^r_n$ está determinada por $\bar{x}^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$, entonces $\tilde{f} : U \times \mathcal{R}^n \to V \times \mathcal{R}^n \in \tilde{\Lambda}^r_n$ está dada por $\bar{x}^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$, $\bar{y}^\alpha = \sum_\beta \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} y^\beta$.

Si $V \xrightarrow{\mathcal{A}} (\mathcal{R}^n, \Lambda^r_n)$ es una variedad diferenciable, se puede prolongar este atlas y tenemos:

$$\begin{array}{ccc}
T(V) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{A}}} & \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n, \tilde{\Lambda}^r_n \\
q \downarrow & & \downarrow p \\
V & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathcal{R}^n, \Lambda^r_n
\end{array}$$

La variedad $T(V)$ así definida, se llama <u>espacio de los vectores tangentes a V</u>.

Para cada $x \in V$, $T_x(V) = q^{-1}(x)$ es el conjunto de vectores tangentes a x. Dada una carta local $f_i : U_i \to V_i$, da lugar a otra carta local $\tilde{f}_i : \tilde{U}_i \to V_i \times \mathcal{R}^n$ y si $z \in T_x(V)$, entonces $\tilde{f}_i(z) = (x^1_i, \ldots, x^n_i, \zeta^1_i, \ldots, \zeta^n_i)$ y en otra carta local, $\tilde{f}_i(z) = (x^1_j, \ldots, x^n_j, \zeta^1_j, \ldots, \zeta^n_j)$.

Si el cambio viene dado por $x_i^\alpha = f_{ij}^\alpha (x^1_j \ldots, x^n_j)$, el cambio en $T(V)$ vendrá dado por $x_i^\alpha = f_{ij}^\alpha (x^1, \ldots, x^n_j)$, $\zeta^\alpha_i = \sum \frac{\partial f^\alpha_{ij}}{\partial x_j^\beta} \zeta^\beta_j$ como en la teoría clásica.

Para obtener la prolongación holoédrica de $\mathcal{R}^n, \Lambda_n^r$, a cada $f : U \rightarrow V \in \Lambda_n^r$ y $x \in U$ le hemos asociado una matriz $A_x(f) = \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x_\beta}\right)_x^r \in GL(n)$ y $GL(n) \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$, definida por $(A^\alpha_\beta, x^\alpha) \rightarrow (\sum_\beta A^\alpha_\beta x^\beta)$.

De una manera análoga podemos considerar $\mathcal{R}^n \times GL(n) \rightarrow \mathcal{R}^n$ definida por $(x^\alpha, A^\alpha_\beta) \rightarrow (\sum_\beta x^\beta A^\beta_\alpha)$ y en este caso, por comodidad de escritura, escribiremos las coordenadas de $\mathcal{R}^n$ con los índices abajo.

Tenemos, pues, dos prolongaciones holoédricas de $\mathcal{R}^n, \Lambda_n^r$; $(\mathcal{R}^{2n}, \tilde{\Lambda}_n^r)$ y $(\mathcal{R}^{2n}, \bar{\Lambda}_n^r)$.

$$f : U \rightarrow V, \qquad\qquad f : U \rightarrow V.$$
$$\tilde{f} : U \times \mathcal{R}^n \rightarrow V \times \mathcal{R}^n, \qquad\qquad f : U \times \mathcal{R}^n \rightarrow V \times \mathcal{R}^n,$$
$$(x,y) \rightarrow f(x), A_x(f)y, \qquad\qquad (x,y) \rightarrow f(x), y\, A_{fx}(f^{-1}),$$

las cuales dan dos prolongaciones del atlas $V \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{R}^n \Lambda_n^r$: Una $T(V) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{A}}} \mathcal{R}^{2n} \tilde{\Lambda}_n^r$ y otra $T^*(V) \xrightarrow{\bar{\mathcal{A}}} \mathcal{R}^{2n} \bar{\Lambda}_n^r$.

La primera es el espacio de los vectores tangentes y la segunda el espacio de los covectores tangentes.

Los conjuntos $T_x(V)$, $T_x^*(V)$ de vectores tangentes a V en un punto $x \in V$ tienen una estructura de espacio vectorial (imagen de la estructura de $\mathcal{R}^n$) y se pueden considerar duales uno del otro.

Si para cada $x \in V$ consideramos los productos tensoriales $(\otimes^p T_x(V) \otimes (\otimes^q T_x^*(V))$, así como la reunión $T^p_q(V) = \bigcup_{x \in V} (\otimes^p T_x(V) \otimes (\otimes^q T_x^*(V))$; tenemos el espacio de los tensores de tipo $\binom{p}{q}$ y existe una proyección natural $T^p_q(V) \rightarrow V$, y análogamente con los productos exteriores o simétricos.

A una sección de $\wedge^q T(V)$ se le llama <u>forma diferencial</u>.

Del mismo modo, la prolongación holoédrica de $f : U \rightarrow V$, $f^\# : U \times \mathcal{R}$, $f^\#(x,t) = (fx, |A_x(f)|^w t)$ define los escalares de peso W y, mediante productos tensoriales, se obtienen los tensores con peso.

Es fácil ver que $V \xrightarrow{\varphi} W$, aplicación diferenciable de V en W, subordina $\tilde{\varphi}: T(V) \longrightarrow T(W)$ tal que

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & T(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

es conmutativo:

En cambio, dado el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^*(V) & & T^*(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow[\varphi]{} & W \end{array}$$

en general no puede completarse, pero para cada $x \in V$ se tiene

$$\begin{array}{ccc} T^*_x(V) & \xleftarrow{\tilde{\varphi}_x} & T^*_{\varphi(x)}(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

Si φ no es inyectiva, no hay manera de definir $\tilde{\varphi}: T^*(W) \to T^*(V)$

Dado $\begin{array}{ccc} & & \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \\ & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathcal{R}^n \end{array}$ (A abierto de $\mathcal{R}$),

con φ definida por $x^i = \varphi^i(t)$, la función $\tilde{\varphi}: A \to \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n$ definida por $x^i = \varphi^i\,(t)$, $y^i = \dfrac{\partial \varphi^i}{\partial t}$ es tal, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\tilde{\varphi}}{\nearrow} & \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \\ & & \downarrow \\ A & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathcal{R}^n \end{array}$$

Si $f \in \Lambda^r{}_n$, $\psi = f\,\varphi$, es $\tilde{\psi} = \tilde{f}\,\tilde{\varphi}$; luego mediante cartas locales, dado

$$\begin{array}{ccc} & & T(V) \\ & & \downarrow q \\ A & \xrightarrow[\varphi]{} & V \end{array}$$

podemos definir

$$\begin{tikzcd} & T(V) \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & V \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} U \times \mathcal{R}^n \arrow[d] \\ U \arrow[r, "f"'] & \mathcal{R} \end{tikzcd}$$

Dualmente: dado (U abierto de $\mathcal{R}^n$)

definido por $t = f(x^1,\ldots,x^n)$, la función $(x^1,\ldots,x^n) \rightarrow (x^1,\ldots,x^n,$ $\frac{\partial f}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x^n})$ es una sección que, mediante una función $g \in \Gamma$, se transforma como un vector; luego $f : V \rightarrow \mathcal{R}$ define una sección, $V \rightarrow T^*(V)$, que puede llamarse df. Tenemos, pues, lo siguiente:

$$\begin{tikzcd} & T(V) \arrow[d, "q"] & \\ \mathcal{R} \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "df"] & \mathcal{R} \\ & T^*(V) & \end{tikzcd}$$

y en una carta local

$$\varphi(t) = (\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t)),$$
$$f(\varphi(t)) = f(\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t)),$$
$$\tilde{\varphi}(t) = (\varphi^1(t),\ldots,\varphi^n(t),\dot{\varphi}^1(t),\ldots,\dot{\varphi}^n(t)) \ , \quad \text{con } \cdot = \frac{d}{dt}$$
$$\frac{d(f\circ\varphi)}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\varphi(t)} \dot{\varphi}^i(t)$$

expresión que es independiente de la carta local y da un apareamiento dual de $T_x(V)$, $T^*(V)$, y puede escribirse:

$$\frac{d(f\circ\varphi)}{dt}(t) = \langle df(\varphi(t)), \tilde{\varphi}t \rangle \, .$$

Sea $\mathcal{D}_x$, para $x \in V$, el conjunto de los gérmenes, en x, de las funciones reales diferenciables: $\mathcal{D}_x$ tiene una estructura natural de anillo, $f_x \rightarrow f(x)$ es una aplicación $\mathcal{D}_x \xrightarrow{f} \mathcal{R}$, y cada f da un elemento $d_x f \in T^*_x(V)$ que sólo depende del germen f_x. Dado $\xi \in T_x(V)$, el producto escalar $\langle d_x f, \xi \rangle$ puede considerarse como una aplicación lineal $L_\xi : \mathcal{D}_x \longrightarrow \mathcal{R}$.

Esta aplicación cumple: Si a, $a' \in \mathcal{D}_x$, entonces $L_\xi(a,a') = L_\xi(a)\beta(a') + \beta(a)L_\xi(a')$ y se llama una β-derivación.

En el caso analítico puede demostrarse que, recíprocamente, toda β-derivación de $\mathcal{D}_x$ está definida por un vector de $T_x(V)$, (Chevaley, Th. of Lie Groups); pero, si la variedad es de clase finita, el espacio vectorial de las β-derivaciones de $\mathcal{D}_x$ es de dimensión infinita.

Nótese que si $\mathcal{V}$ es de clase C^r, los espacios tensoriales vienen dados como variedades diferenciables de clase C^{r-1}, pues, en la elevación de Λ^r_n se pierde una unidad y las proyecciones naturales sobre $\mathcal{V}$ son aplicaciones de clase C^{r-1}

13.- ESPACIOS FIBRADOS.(*)- Sea B un espacio topológico (base); F otro espacio topológico (fibra) y G un grupo topológico que opera efectivamente sobre F (grupo estructural).

En $B \times F$ consideremos un pseudogrupo de transformaciones Γ cuyas funciones son del tipo $f : U \times F \longrightarrow U \times F$, $f(x,y) = (x, g(x)y)$, donde $g : U \longrightarrow G$ es continua.

Un espacio fibrado es un atlas $E \xrightarrow{\mathcal{a}} (B \times F, \Gamma)$. Dada una carta local $f_i : E_i \longrightarrow U_i \times F$, la proyección natural $\bar{p} : B \times F \longrightarrow B$ define una proyección $p_i = \bar{p}\, f_i : E_i \longrightarrow B$, y evidentemente $p_i \mid E_{ij} = p_i \mid E_{ji}$, luego tenemos una proyección $p : E \longrightarrow B$.

Los cambios de coordenadas son de la forma

$$f_{ij} : U_{ij} \times F \longrightarrow U_{ji} \times F$$
$$(x,y) \longrightarrow (x, g_{ij}(x)y)$$

(*) Para las demostraciones de los teoremas sobre espacios fibrados ver: Steenrod, "Topology of fibre bundles" y las publicaciones del Seminario Cartan.

Y para que las f_{ij} cumplan las condiciones de cambio de coordenadas, las funciones g_{ij} (llamadas funciones de transición) han de cumplir $g_{ij}(x) = g_{ji}^{-1}(x)$ y $g_{ik}(x) = g_{ij}(x)\; g_{jk}(x)$. (Estas condiciones son suficientes y, si el grupo opera efectivamente sobre F, son necesarias).

Hemos visto que los cambios de coordenadas determinan el atlas, luego las funciones de transición $g_{ij} : U_{ij} \longrightarrow G$ determinan el espacio fibrado, salvo isomorfismos.

Casos particulares:

1) la fibra coincide con el grupo y éste opera por traslaciones por la izquierda (Espacio fibrado principal)
2) la fibra coincide con el grupo y éste opera por automorfismos internos.

En los espacios fibrados principales H (B,G,p), el grupo G opera por la derecha sobre H como sigue:

Sea $z \in H$, $g \in G$; z viene representado en una carta local por (x,γ) (con $x \in B$, $\gamma \in G$), tenemos entonces $(x,\gamma g)$ como representante de zg; es fácil ver que el elemento $z\gamma$ así definido, no depende de la carta local; luego tenemos una aplicación $H \times G \rightarrow H$.

14.- <u>EL ESPACIO TANGENTE, COMO ESPACIO FIBRADO</u>.- Hemos definido el espacio tangente T (V) como una variedad diferenciable definida por el atlas $T(V) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{A}}} \mathcal{R}^{2n}, \tilde{\Lambda}^r_n$, prolongación del $V \xrightarrow{\mathcal{A}} \mathcal{R}^n, \Lambda^r_n$.

Vamos a ver que T (V) puede considerarse como un espacio fibrado de base V, de fibra $\mathcal{R}^n$ y cuyo grupo estructural es el grupo general lineal de dimensión n, GL(n).

$$\begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{A}}} & \mathcal{R}^{2n}, \tilde{\Lambda}^r_n \\ \downarrow p & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathcal{R}^{n}, \Lambda^r_n \end{array}$$

Sean $f_i : U_i \rightarrow V_i$ y $\tilde{f}_i : U_i \times \mathcal{R}^n \rightarrow V_i \times \mathcal{R}^n$ dos cartas locales homólogas de $\mathcal{A}$ y $\tilde{\mathcal{A}}$, $E_i = p^{-1}(U_i)$ y definimos $\varphi_i : E_i \rightarrow U_i \times \mathcal{R}^n$ como sigue: si $z \in E_i$, entonces $x = p(z) \in U_i$ y $\tilde{f}_i(z)$ es de la forma $(f_i x, y_i)$. Pongamos $\varphi_i(z)=(x,y_i)$

Las funciones φ_i determinan un atlas de $T(V)$ respecto $V \times \mathcal{R}^n$, cuyos cambios de carta local vamos a calcular. Si $z \in E_{ij}$, entonces tenemos $x = p\, z \in U_{ij}$, $\tilde{f}_i(z) = (f_i x, yi)$, $\tilde{f}_j(z) = (f_i x, y_i$ y los cambios de carta son $f_i x = f_{ij}(f_i x)$, $y_i = A_{f_i(x)}(f_{ij}) \cdot y_i$; luego el cambio $\varphi_i(z) = (x,y_i)$, $\varphi_j(z) = (x,y_j)$ viene dado por $\varphi_{ij}(x,y_j) = (x, g_{ij}(x) \cdot y_j)$ con $g_{ij}(x) = A_{f_j(x)}(f_{ij}) \in GL(n)$.

De una manera análoga puede definirse una estructura de espacio fibrado de base V en el espacio de los tensores de tipo $\binom{p}{q}$.

15.- ESPACIOS FIBRADOS ASOCIADOS.- Dado un espacio fibrado principal $H = (B,G,p)$, para cada fibra F sobre la que opere G existe un espacio fibrado $E = (B,F,G,q,H)$ que tiene las mismas funciones de transición que H , A todos estos espacios se les llama espacios asociados al H.

Un espacio asociado E puede definirse también como sigue: En $H \times F$ definimos la relación de equivalencia $(h,y) \sim (hg, g^{-1}y)$ con $g \in G$ y llamamos E al cociente de $H \times F$ respecto de esta equivalencia.

Si es $(h,y) \sim (\bar{h},\bar{y})$, será $\bar{h} = hg$ y por tanto $\bar{h}$ está en la misma fibra que h; encontes $ph = p\bar{h}$, luego p permite definir una proyección $q : E \rightarrow B$. Cada carta local $f_i : H_i \rightarrow U_i \times G$ de H define una aplicación $f_i' : H_i \times F \rightarrow U_i \times G \times F$ por $f_i'(h,y)=(f_i'(h),y$

pero (x, γ, y) y $(x, e, \gamma y)$ son imágenes de elementos equivalentes de $H_i \times F$; luego f_i' puede interpretarse como una aplicación $\varphi_i : E_i \to U_i \times F$ identificando $(x,e,\gamma y)$ con $(x, \gamma y)$; así tenemos un atlas de E respecto $B \times F$ y los cambios de carta local vienen dados por

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & (x,g_i\, y) \\ (h,y) \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \\ & (x,g_j\, y) \end{tikzcd} \qquad \text{luego } \varphi_{ji}\,(x,g_i y) = (x,g_{ji}(x)g_i y) = = (x,g_j y).$$

Dado un espacio fibrado $E = (B,F,G,p)$, para obtener el espacio fibrado principal asociado a él, basta construir el atlas cuyos cambios de carta local vienen dados por las funciones transición de E operando por traslaciones a la izquierda sobre G.

16.- <u>ESPACIO FIBRADO IMAGEN RECIPROCA</u>.- Si E y E' son dos espacios fibrados sobre B y B' con la misma fibra y el mismo grupo estructural, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

se llama un homomorfismo si cumple

1) $fp = p'\overline{f}$,

2) f y $\overline{f}$ son aplicaciones contínuas,

3) Si $\varphi_i : E \to U_i \times F$, $\varphi'_\alpha : E'_\alpha \to U'_\alpha \times F$ son dos cartas locales de E y E', $U_{i\alpha} = U_i \cap f^{-1}(U'_\alpha)$, $E_{i\alpha} = p^{-1}(U_{i\alpha})$, entonces existe una función continua $g_{i\alpha} : U_{i\alpha} \to G$ tal, que si $z \in E_{i\alpha}$, $\varphi_{i\alpha}(z) = (x;y)$, entonces $\varphi'_\alpha \tilde{f}\,(z) = (fx, g_{i\alpha}(x), y)$.

<u>Teorema</u> .- Si f es un homeomorfismo, $\tilde{f}$ también lo es.

<u>Teorema</u> .- Dado el diagrama

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

donde $E' \xrightarrow{p'} B'$ es un espacio fibrado, existe un espacio fibrado $E \xrightarrow{p} B$ (determinado salvo isomorfismos) tal, que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

es un homomorfismo.

Al espacio E, así definido, se le llama <u>imagen inversa</u> de E' por f.

<u>Teorema fundamental</u>.- Si los diagramas

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \end{tikzcd}$$

son homomorfismos, entonces existe un isomorfismo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "id"] & B \end{tikzcd}$$

tal que $\bar{f} = f . \lambda$.

17.- <u>ELEVACION DE HOMOTOPIAS</u>.

<u>Primer teorema de elevación de homotopías</u>

Sea el homomorfismo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

y una homotopía $B\times I \xrightarrow{\Phi} B'$ de f (es decir $\Phi(x,0) = f(x)$). Si B es localmente compacto y paracompacto, existe una homotopía $E\times I \xrightarrow{\bar{\Phi}} E'$ de $\bar{f}$ tal, que

$$\begin{tikzcd} E\times I \arrow[r, "\bar{\Phi}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d] \\ B\times I \arrow[r, "\Phi"] & B' \end{tikzcd}$$

y además se cumple que si $\Phi(x,t) = \Phi(x,t_o)$, con $t_o \leq t \leq t_1$, también es $\bar{\Phi}(z,t) = \Phi(z,t_o)$.

<u>Segundo teorema de elevación de homotopías</u>.- Dado el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & B' \end{tikzcd}$$

y una homotopía $B\times I \xrightarrow{G} B'$ de g, si B es localmente compacto y paracompacto, existe una homotopía $B\times I \xrightarrow{F} E'$ de f tal, que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "p'"] \\ B\times I \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "G"'] & B' \end{tikzcd}$$

es conmutativo y además se cumple que si $G(x,t) = G(x,t_o)$, con $t_o \leq t \leq t_1$, también es $F(x,t) = F(x,t_o)$.

Estos teoremas son de gran importancia en el estudio de los espacios fibrados e incluso muchas propiedades de los mismos sólo dependen de dichos Teoremas. Esto ha inducido a considerar los espacios siguientes:

Definición de espacio fibrado de Serre.- Un espacio fibrado de Serre es un espacio E^{+} con una proyección contínua $E^{+} \xrightarrow{p} B$ sobre un espacio B, que verifique el segundo Teorema de elevación de homotopías para poliedros.

Definición de espacio fibrado de Hurewicz.- Un espacio fibrado de Hurewicz es un espacio E con una proyección continua $p : E \longrightarrow B$ sobre un espacio B, que verifique el segundo Teorema de elevación de homotopías para cualquier espacio.

Está claro que todo espacio de Hurewicz es un espacio de Serre y todo espacio fibrado con fibra y grupo estructural es un espacio de Serre.

La generalización más amplia es la de Serre; pues, muchos espacios importantes son espacios fibrados de Serre sin ser espacios fibrados con fibra y grupo estructural y la condición de Hurewicz es demasiado restrictiva. Generalmente basta poder elevar las homotopías de poliedros.

18.- GRUPOS DE HOMOTOPIA.- Sea I^n el cubo de n dimensiones, $\dot{I}^n$ su frontera, I^{n-1} la cara $x^n = 0$ y J^{n-1} la reunión de las restantes caras.

Sean $B \subset A$ espacios topológicos y $x \in B$. En el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones

$$f : I^n , \dot{I}^n \longrightarrow A, x,$$

puede definirse una estructura de grupo; éste se llama el n -esimo grupo de homotopía de (A, x) y se representa por $\pi_n(A, x)$.

Análogamente, en el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones

$$f : I^n, \dot{I}^n, J^{n-1} \longrightarrow A, B, x$$

puede definirse una estructura de gurpo y éste se llama el n -ésimo grupo de homotopía de (A_1B_1x) y se representa por $\pi_n(A_1B_1x)$.

19.- <u>SUCESION EXACTA DE HOMOTOPIA DE UN ESPACIO FIBRADO DE SERRE</u>.- Sean $E \xrightarrow{p} B$ un espacio fibrado de Serre, $x \in B$ e $y \in p^{-1}(x) = F_x \subset E$.

La inclusión $i : F_x, y \to E, y$ induce un homomorfismo $i_* : \pi_n(F_x, y) \to \pi_n(E, y)$.

La inclusión $j : E, y, y \to E, F_x\ y$ induce un homomorfismo $j_* : \pi_n(E\ y) \to \pi_n(E, F_x, y)$.

La restricción de las aplicaciones $f : I^n, \dot{I}^n, J^{n-1} \to E, F_x, y$ á I^{n-1}, induce el homomorfismo

$$\partial_* : \pi_n(E, F_x, y) \to \pi_{n-1}(F_x, y)$$

y la sucesión

$$\to \pi_n(F_x,y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E,y) \xrightarrow{j_*} \pi_n(E,F_x,y) \xrightarrow{\partial_*} \pi_{n-1}(F_x,y) \to$$

es exácta.

Hasta aquí no es necesaria la estructura fibrada de E.

Consideremos ahora la proyección

$$p: E, F_x, y \to B, y, y;$$

ésta induce un homomorfismo

$$p_* : \pi_n(E,F_x,y) \to \pi_n(B,x)$$

y el teorema de elevación de las homotopías permite demostrar que p_* es un isomorfísmo, obteniéndose la sucesión exácta

$$\to \pi_n(F_x,y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E,y) \xrightarrow{j_*} \pi_n(B,x) \xrightarrow{\Delta} \pi_{n-1}(F_x,y) \to$$

llamada sucesión exácta de homotopía del espacio fibrado.

20.- <u>EJEMPLO DE UN ESPACIO FIBRADO DE SERRE</u>.- Sea x un punto de un espacio B. En el conjunto E(B,x) de los caminos de origen x (o sea aplicaciones continuas $z : I \to B$ con $z(0) = x$) definamos la topología de la convergencia compacta, es decir, la topología engendrada por los conjuntos $\Omega(k,u) = \{ z \mid z(k) \subset U \}$ donde k es un compacto de I y U un abierto de B.

Si B es arco - conexo, la proyección $P : E(B,x) \longrightarrow B$ definida por $pz = z(1)$ es una sobreyección, evidentemente contínua; pues, si U es un abierto de B, $p^{-1}(U) = \Omega(1,U)$.

Puede demostrarse que se trata de un espacio fibrado de Serre; es decir, si P es un poliedro y consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & E(B,x) \arrow[d, "p"] \\ P \arrow[ur, "\overline{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

y $P \times I \xrightarrow{F} B$ es una homotopía de f, existe una homotopía de $\overline{f}$

$$\begin{tikzcd} & E(B) \arrow[d, "p"] \\ P \times I \arrow[ur, "\overline{F}"] \arrow[r, "F"'] & B \end{tikzcd}$$

Y en este espacio, la fibra sobre x es el conjunto $p^{-1}(x) = \Omega(B,x)$ de los caminos cerrados o lazos de origen x.

<u>Teorema</u>.- El espacio E(B,x) es un espacio contráctil. Es decir, existe una aplicación $E \times I \xrightarrow{\Phi} E$ tal, que $\Phi(z,0) = z$, $\Phi(z,1) = z_0$ etc.

En efecto: $\Phi(z,t)$ es el camino definido por la función $z((1-t)\tau) : I \longrightarrow B$.

Siendo, pues, E (B,x) un espacio contráctil, sus grupos de homotopía son nulos y si $y \in \Omega(B,x)$ es el lazo constante, la sucesión exácta de homotopía.

$$\longrightarrow \Pi_n(\Omega,y) \longrightarrow \Pi_n(E,y) \longrightarrow \Pi_n(B,x) \longrightarrow \Pi_{n-1}(\Omega,y) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \Pi_{n-1}(E,y) \longrightarrow$$

Nos da $\pi_n(B,x)\simeq\pi_{n-1}(\Omega,y)$

21.- <u>APLICACION A LOS ESPACIOS DE EILEMBERG - MAC LANE</u>.- Un espacio de Eilemberg - Mac Lane $K(\pi,n)$ es un espacio que tiene nulos todos sus grupos de homotopía, salvo el n -ésimo que es π. (Sobre la construcción de tales espacios véase "Seminario de Cartan 1.954 - 55").

Aplicando el teorema anterior, tenemos:

$$\pi_n(k(\pi,n))\simeq\pi_{n-1}(\Omega(k(\pi,n)),$$

es decir

$$\Omega(k(\pi,n)) = k(\pi,n-1).$$

22.- <u>ESPACIOS FIBRADOS DE GRUPOS</u>.- Dado un espacio fibrado principal $H = (B,G,p)$, hemos visto que el grupo estructural G opera por la derecha sobre H. Este hecho puede expresarse de otra manera más apta para las generalizaciones, diciendo que el espacio fibrado trivial $B\times G \longrightarrow B$ opera por la derecha en H, entendiendo que la fibra $x\times G$ opera sobre la fibra $H_x = p^{-1}(x)$.

Cada fibra de H es homeomorfa al grupo estructural G, pero este homeomorfismos depende de la carta local, y los cambios de carta no respetan la estructura de grupo; por tanto, no existe ninguna estructura de grupo canónica sobre las fibras de H.

Ahora vamos a construir un espacio fibrado $E \xrightarrow{q} B$ en el cual cada fibra posee una estructura de grupo isomorfo al G (no canónicamente) y opera por la izquierda sobre la correspondiente fibra de H.

Sean $g_{ij}(x)$ las funciones de transición de H y $\rho: G \longrightarrow I(G)$ el homomorfismo canónico de G en el grupo de sus automorfismos internos. Fácilmente se prueba que $\rho(g_{ij}(x))$ son funciones de transición que definen un espacio fibrado E de base B, fibra G y grupo estructural $I(G)$.

Si $\psi_i : E_i \to U_i \times G$, $\psi_j : E_j \to U_j \times G$ son dos cartas locales y $x \in U_{ij}$; ψ_i y ψ_j definen la misma estructura de grupo sobre $E_x = p^{-1}x$, pues si $z, z' \in E_x$, entonces $\psi_i(z) = (x, \gamma_i)$, $\psi_i(z') = (x, \gamma'_i)$, $\psi_j(z) = (x, \gamma_j)$, $\psi_j(z') = (x, \gamma'_j)$ con $\gamma_i = g_{ij}(x)\gamma_j \; g_{ji}(x)$, $\gamma'_i = g_{ij}(x)\gamma'_j \; g_{ji}(x)$, luego $\gamma_i \gamma'_i = g_{ij}(x)\gamma_j \gamma'_j \; g_{ji}(x)$ y se puede definir el producto $z\, z' = \psi_i^{-1}(x, \gamma_i \gamma'_i)$.

E opera por la izquierda sobre H, pues si $z \in E_x$, $h \in H_x$, tomando cartas locales $\psi_i : E_i \to U_i \times G$, $\varphi_i : H_i \text{---} U_i \times G$, $\psi_i(z) = (x, \gamma_i)$, $\varphi_i(h) = (x, g_i)$, y el elemento de $H_x \ni zH = = \varphi_i^{-1}(x, \gamma_i\, g_i)$ es independiente de la carta local elegida.

De la misma manera que retorciendo $B \times G$ se ha obtenido H, y $B \times G$ opera por la derecha sobre H, retorciendo E obtendremos un $H' \xrightarrow{p'} B$ que no es un espacio fibrado de grupo estructural G, pero sobre cuyas fibras $p'^{-1}(x)$ operan las fibras de E por la derecha.

Para hacer eso, sean $\gamma_{ij} : U_{ij} \to E$ una familia de secciones locales sobre los abiertos U_{ij} de U que cumplan:

1º)- $\gamma_{ij}(x) = \gamma_{ji}(x)^{-1}$,

2º)- Si $x \in U_{ijk}$, $\gamma_{ik}(x) = \gamma_{ij}(x)\,\gamma_{jk}(x)$

(Condiciones que tienen sentido, porque en las fibras de E está definida una estructura de grupo). En el conjunto $M = \{(z,i) \mid z \in E_i = q^{-1}(U_i)\}$ se define la relación $(z_i, i) \sim (z_j, j) \Longleftrightarrow q\, z_i = q\, z_j = x$, $z_i = \gamma_{ij}(x) z_j$ que, por las condiciones que cumplen las secciones γ_{ij}, es una relación de equivalencia. Sea H' el cociente de M por esta relación de equivalencia y $C : M \to H'$ la aplicación canónica.

Se define una proyección $p' : H' \longrightarrow B$ por $p'c(z,i) = qz$ que evidentemente es independiente del representante elegido.

E opera por la derecha sobre H', pues si $z \in E_x$, $c(z_i,i) \in H'_x$, el elemento $c(z_i z,i) \in H'_x$ es independiente del representante elegido.

H' puede representarse por un sistema de cartas locales $\varphi'_i : H'_i \longrightarrow U_i \times G$, $\varphi'_i\, c(z_i,i) = \psi_i(z_i)$.

Si $c(z_i,i) = c\,(z_j,j)$ es $qz_i = qz_j = x \in U_{ij}$, $z_i = \gamma_{ij}(x) z_j$,

$\varphi'_i\, c(z_i,i) = \psi_i(z_i) = (x,\ g_i)$

$\varphi'_i\, c(z_j,j) = \psi_j(z_j) = (x,\ g_j)$

y llamando $\psi_i(\gamma_{ij}(x)) = (x, \gamma^i_{ij})$, $\psi_i(z_j) = (x, g^i_j)$,

tenemos $\psi_i(z_i) = (x,\ \gamma^i_{ij}(x) g^i_j) = (x, \gamma^i_{ij}(x) g_{ij}(x)\ g_j\ g_{ji}(x))$, es decir, que las funciones de transición de H' son $\bar{g}'_{ij}(x) = \gamma^i_{ij}(x)\, \rho(g_{ij}($

luego $H' \xrightarrow{p'} B$ puede considerarse como un espacio fibrado de fibra G y grupo estructural el producto cruzado $G \square G$, operando G por automorfismos internos sobre G, es decir:

$(\gamma \cdot \rho(g)) \cdot (\gamma' \rho(g')) = \gamma(\rho(g)\,(\gamma')) \cdot \rho\,(gg')$, Comprobándose sin dificultad que con este producto las g'_{ij} son funciones de transición.

El mismo proceso que ha servido para obtener E, a partir de H, sirve para obtener un $E' \xrightarrow{q'} B$ espacio fibrado cuyas fibras son grupos isomorfos al G y que opera por la izquierda sobre H'.

Para ello, se define en M la equivalencia $(z_i,i) \sim (z_j,j)$ $\Longleftrightarrow q(z_i) = q(z_j) = x$, $z_i = \gamma_{ij}(x) z_j\, \gamma_{ji}(x)$. Y sea E' el cociente de M por ésta equivalencia y $c' : M \longrightarrow E'$ la aplicación canónica.

Se define la proyección $q' : E' \longrightarrow B$ por $q'c'(z,i) = q(z)$ que evidentemente es independiente del representante elegido.

E' puede representarse por un sistema de cartas locales $\psi'_i : E'_i \longrightarrow U_i \times G$ definidas por $\psi'_i\, c'(z_i,i) = \psi_i(z_i)$.

Si $c'(z_i,i) = c'(z_j,j)$ es $q(z_i)=q(z_j) = x\in U_{ij}$, $z_i=\gamma_{ij}(x)z_j\,\gamma_{ji}(x)$,

$\psi'_i\, c'(z_i,i) = \psi_i(z_i) = (x,g_i)$

$\psi'_j\, c'(z_j,j) = \psi_j(z_j) = (x,g_j)$

y llamando $\psi_i(\gamma_{ij}(x)) = (x,\gamma^i_{ij}(x)) = (x(\gamma^i_{ji}(x))^{-1})$, $\psi_i(z_j)=(x,g^i_j)$,

tenemos $\psi_i(z_i) = \gamma^i_{ij}(x)g^i_j\,\gamma^i_{ji}(x) = \gamma^i_{ij}(x)g_{ij}(x)\; g_j\, g_{ji}(x)\gamma^i_{ji}(x)$,

es decir, las funciones de transición son

$$g'_{ij}(x) = \rho(\gamma^i_{ij}(x)\, g_{ij}(x)),$$

luego E' es un espacio fibrado de grupo estructural I(G).

En las fibras de E' puede definirse una estructura de grupo por $c'(z_i,i)\,.\,c'(\bar{z}_i,i) = c'(z_i\bar{z}_i,i)$, que es independiente de los representantes elegidos; pues, si $c'(z_j,j) = c'(z_i,i)$ y $c'(\bar{z}_j,j) = c'(\bar{z}_i,i)$, tenemos $z_i = \gamma_{ij}(x)z_j\,\gamma_{ji}(x)$, $\bar{z}_i = \gamma_{ij}(x)\,\bar{z}_j\,\gamma_{ji}(x)$ y, por tanto, $z_i\,\bar{z}_i = \gamma_{ij}(x)\,z_j\,\bar{z}_j\,\gamma_{ji}(x)$.

E' opera por la izquierda sobre H' como sigue:

$c'(\gamma_i,i)\,.\,c(z_i,i) = c(\gamma_i z_i,i)$, $\quad (q(\gamma_i)= q(z_i) = x)$, operación que es independiente del representante elegido; pues, si $c'(\gamma_j,j) = c'(\gamma_i,i)$, $c(z_j,j) = c(z_i,i)$, se tiene: $\gamma_i = \gamma_{ij}(x)\,\gamma_j\,\gamma_{ji}(x)$, $z_i = \gamma_{ij}(x)z_j$, luego $\gamma_i z_i = \gamma_{ij}\,\gamma_j\,z_j$, es decir, $c(\gamma_i z_i,i) = c(\gamma_j z_j,j)$.

El espacio fibrado E se obtiene a partir de un espacio fibrado principalmente H y opera a la izquierda sobre él; en cambio, el espacio H' sobre el que opera E' por la izquierda, no es principal. Ahora vamos a ver cómo el espacio E' puede obtenerse de la misma manera que el E a partir de un espacio fibrado principal $H'\otimes H$, que llamaremos <u>producto tensorial</u> de H' y H.

En el conjunto $H'\times_B H =\{(h',h)\mid h'\in H',\ h\in H,\ p'h'= ph\}$, definimos la equivalencia $(h's,h)\sim(h',sh)$ para cualquier $s\in E_{ph}$.

Sea $H'\otimes H$ el cociente de $H'\times_B H$ por esta relación de equivalencia, e indiquemos por $h'\otimes h$ a la clase que contiene (h',h).

Se define una proyección $p_1 : H'\otimes H \longrightarrow B$ por $p_1(h'\otimes h) = p'h' = ph$, evidentemente independiente del representante elegido.

$H'\otimes H$ pueden representarse por un sistema de cartas locales $\xi_i : H_i'\otimes H_i \longrightarrow U_i\times G$, definidas por $\xi_i(h_i'\otimes h_i) = (x,g_i'g_i)$ si $\varphi_i'(h_i') = (x,g_i')$, $\varphi_i(h_i) = (x,g_i)$. Esta aplicación ξ_i está bien definida, puesto que $\xi_i(h_i's\otimes s^{-1}h_i) = (x,g_i'g_i)$, ya que si $\psi_i(s) = (x,\gamma_i)$, entonces $\varphi_i(h_i's) = (x,g_i'\gamma_i)$ y $\varphi_i(h_i) = (x,\gamma_i^{-1}g_i)$.

Si $\xi_j : H_j'\otimes H_j \longrightarrow U_j\times G$ es otra carta local, tenemos:

$$\xi_i(h'\otimes h) = (x,g_i'g_i) \quad \text{si} \quad \varphi_i(h') = (x,g_i'),\quad \varphi_i(h) = (x,g_i),$$
$$\xi_j(h'\otimes h) = (x,g_j'g_j) \quad \text{si} \quad \varphi_j'(h') = (x,g_j'),\quad \varphi_i(h) = (x,g_j)$$

y $g_i = g_{ij}(x)g_j$, $g_i' = \gamma^i_{ij}(x)\, g_{ij}(x)g_j'\, g_{ji}(x)$, luego $g_i'g_i = \gamma^i_{ij}(x)g_{ij}(x)\, g_j'g_j$, es decir, que las funciones de transición son $g_{ij}'(x) = \gamma^i_{ij}(x)\, g_{ij}(x)$ y operan sobre la fibra G por traslaciones a la izquierda, por lo que $H'\otimes H$ es un espacio fibrado principal.

El espacio fibrado que se obtiene haciendo operar las funciones de transición de $H\otimes H'$, sobre G por automorfismos internos, es el espacio E' antes considerado, el cual opera sobre $H'\otimes H$ por la izquierda.

Resumiendo, se tiene la siguiente situación: Las secciones $g_{ij}(x)$ del espacio trivial $B\times G$ definen un espacio principal H y operando por automorfismos internos sobre G un espacio fibrado de grupos E, E opera por la izquierda sobre H y $B\times G$ opera por la derecha. Las secciones γ_{ij} del espacio E definen un espacio H' (cuyo grupo estructural no es el G) y las funciones $\gamma^i_{ij}(x)g_{ij}(x)$ definen un espacio principal $H'\otimes H$ y operando por automorfismos internos sobre G un espacio fibrado de grupos E', E' opera por la izquierda sobre H' (y sobre $H'\otimes H$) y E opera por la derecha sobre H'. La situación E', $H'\otimes H$, $B\times G$ es la misma que la E, H, $B\times G$, luego secciones γ'_{ij} de E' permiten definir un H'' (cuyo grupo estructural no es G) y las funciones $\gamma'^{i}_{ij}(x)\gamma^{i}_{ij}(xg_{ij}(x)$ un espacio principal $H''\otimes H'\otimes H$ y operando por automorfismos internos un espacio fibrado de grupos E'', E'' opera por la izquierda sobre H'' y E' opera por la derecha sobre H'', etc., obteniendose una sucesión de espacios fibrados

$$
\begin{array}{cccccccc}
\ldots\ H''' & E'' & H'' & E' & H' & E & H & B\times G \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\ldots\ B & B & B & B & B & B & B & B
\end{array}
$$

Los espacios fibrados $E^{(i)}\rightarrow B$ son espacios fibrados cuyas fibras son grupos isomorfos al grupo estructural G y operan por la izquierda sobre $H^{(i)}\rightarrow B$ y por la derecha sobre $H^{(i+1)}\rightarrow B$. Los espacios $H^{(i)}\rightarrow B$, $i\geqslant 1$ tienen el grupo estructural distinto de G, pero los productos tensiorales $H^{(i+1)}\otimes_{E^{(i)}} H^{(i)}\rightarrow B$ son espacios fibrados principales del grupo G. Las funciones de transición de $H^{(i+1)}\otimes_{E^{(i)}} H^{i}\rightarrow B$ dan (operando por automorfismos internos sobre G) el espacio fibrado $E^{(i+1)}\rightarrow B$.

II

G A V I L L A S

1.- GAVILLAS.- Sea X un espacio topológico y T(U) un tipo de objetos inductivos, definidos para los abiertos de X; sea $\mathcal{T}_x$ el límite inductivo de $(T(U), i_{UV})$ cuando U recorre los entornos de x. Es decir, $\mathcal{T}_x$ es $\bigcup_{x\in U} T(U)$, módulo la relación: $\alpha\in T(U)$, $\beta\in T(V)$ son equivalentes sí, y sólo si, existe $W\subset U\cap V$ tal, que $i_{WU}\alpha = i_{WV}\beta$. Sean $i_{x,u} : T(U) \to \mathcal{T}_x$ las aplicaciones canónicas; si $\alpha\in T(U)$, $\alpha_x = i_{xu}\alpha$ se llama germen de α en x. Sea $\mathcal{T} = \bigcup_{x\in X}\mathcal{T}_x$ y la aplicación $p: \mathcal{T} \to X$ definido por: si $\omega\in\mathcal{T}_x$, $p\omega = x$. Finalmente, en $\mathcal{T}$ se define una topologia por la base $\Phi(\alpha, U) = \{\alpha_x \mid x\in U\}$.

Definición: Al espacio $\mathcal{T}$ asi definido, con la topología anteriormente dicha, se le llama una gavilla sobre la base X.

De la definición de la topologia de $\mathcal{T}$ se deduce sin dificultad que para todo $\omega\in\mathcal{T}$ con proyección en $x\in X$ existe un entorno V de ω tal, que p(V) es abierto en X y $p|V$ es un homeomorfismo entre V y pV.

Definición: Se llama sección local sobre un abierto $U\subset X$, a una función continua $s : U \to \mathcal{T}$ tal, que $ps(x)=x$. Es fácil ver que si dos secciones locales $s : U \to \mathcal{T}$, $t : V \to \mathcal{T}$ tales que $s(x) = t(x)$, para un punto $x\in U\cap V$, entonces existe un $W\subset U\cap V$ tal que $s|W = t|W$.

Sea $\Gamma\mathcal{T}(U)$ el conjunto de todas las secciones locales sobre U. Si $\alpha\in T(U)$, la aplicación $s_\alpha : U \to \mathcal{T}$ definida por $s_\alpha(x) = \alpha_x$ es una sección local y obtenemos una aplicación

$$T(U) \longrightarrow \mathcal{T}(U), \quad (*)$$

que en general no es inyectiva ni sobreyectiva.

Si $s : U \to \mathcal{T}$ es una sección local, $s(x) \in \mathcal{T}_x$, sea $\alpha(x) \in T(W_x)$ un representante de $s(x)$; $s_{\alpha(x)} : W_x \to \mathcal{T}$ es una sección local que coincide con s en x, luego coincide con ella en un entorno de x que podemos suponer que es W_x, es decir $s_{\alpha(x)} = s|W_x$. De aquí que una condición n y s. para que $(*)$ sea "sobre" es que para todo recubrimiento $\{W_i\}$ de U y $\alpha_i \in T(W_i)$ tales, que $i_{W_{ij}W_i}\alpha_i = \alpha_{ji} = \alpha_{ij} = i_{W_{ij}W_j}\alpha_j$, exista una $\alpha \in T(U)$ tal, que $\alpha_i = \alpha | W_i$.

Para que $(*)$ sea biyectiva es n. y s. que el elemento $\alpha \in T(U)$ anteriormente dicho sea único.

Siendo biyectiva esa aplicación, se pueden identificar los elementos de $\mathcal{T}(U)$ con los de $\Gamma\mathcal{T}(U)$, es decir, con las secciones locales sobre U.

<u>Definición</u>: Un tipo de objetos inductivos se llama local si es biyectiva $(*)$.

Los elementos de T(U) pueden ser grupos, anillos, etc. e i_{UV} homomorfismos, obteniéndose entonces una gavilla de grupos, de anillos, etc.

2.- <u>COHOMOLOGIA CON COEFICIENTES NO ABELIANOS</u>.- Sea $\mathcal{G}$ una gavilla de grupos no abelianos sobre B y $U = \{U_i\}$ un recubrimiento de B.

Se llama cocadena de dimensión 0, $\gamma = (\gamma_i)$, a una familia de secciones locales $\gamma_i : U_i \longrightarrow \mathcal{G}$.

Una cocadena se llama un <u>cociclo</u>, si cumple $\gamma_i(x)\gamma_j(x)^{-1} = e_x$ = unidad $\in G_x$ para todo $x \in U_{ij}$. En el conjunto de cocadenas de dimensión 0 está definida de una manera natural una operación de grupo; este grupo lo designaremos por $C^0(U,\mathcal{G})$. Con esta operación, el conjunto de los cociclos en un subgrupo $Z^0(U,\mathcal{G}) = H^0(U,\mathcal{G})$, que también se llama 0-grupo de cohomologia.

Se llama cocadena de dimensión 1, $g = (g_{ij})$, a una familia de secciones $g_{ij} : U_{ij} \longrightarrow \mathcal{G}$.

Una cocadena se llama alternada si cumple $g_{ij}(x)=g_{ji}(x)^{-1}$ para todo $x\in U_{ij}$.

Una cocadena alternada se llama un cociclo si además cumple $g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot g_{ki}(x) = e_x$ para todo $x\in U_{ijk}$.

En el conjunto de las cocadenas de dimensión 1 está definida, de una manera matural, una operación de grupo; este grupo lo designaremos por $C^1(U,\mathcal{G})$

En la dimensión 1 el conjunto de las cocadenas alternadas $C^1_a(U,\mathcal{G})$ no es un subgrupo y el conjunto de los 1-cociclos $Z^1_a(U,\mathcal{G})$ tampoco, lo cual es una dificultad para definir los grupos de cohomologia de dimensión 1.

Sin embargo, el grupo $C^0(U,\mathcal{G})$ opera por la izquierda sobre el conjunto $Z^1_a(U,\mathcal{G})$, como sigue: $\gamma \in C^0(U,\mathcal{G})$, $g\in Z^1_a(U,\mathcal{G})$. $\gamma g = g' \in Z^1_a(U,\mathcal{G})$ donde $g' = (g'_{ij})$ viene dado por $g'_{ij}(x) = \gamma_i(x)g_{ij}(x)\,\gamma_j(x)^{-1}$ y evidentemente g' es en 1-cociclo. Esta operación cumple $\gamma(\gamma' g) = (\gamma\gamma')g$ y $\varepsilon g = g$ si ε es la unidad de $C^0(U,\mathcal{G})$.

Al conjunto de las clases de intransitividad de $Z^1_a(U,\mathcal{G})$ respecto $C^0(U,\mathcal{G})$ se le llama 1-conjunto de cohomologia $H^1(U,\mathcal{G})$.

Mediante un límite inductivo sobre los recubrimientos de B se obtienen el grupo $H^0(B,\mathcal{G})$ y el conjunto $H^1(B,\mathcal{G})$.

En el caso no abeliano se pierde la estructura algebráica en $H^1(B,\mathcal{G})$ y esta puede recobrarse sumergiendo $H^1(B,\mathcal{G})$ en un conjunto $\mathcal{H}^1(B,\mathcal{G})$ conveniente, en el que se tiene una operación de grupoide y puede definirse un análogo a la sucesión exácta de homología del caso abeliano (para las primeras dimensiones).

3.- <u>RELACION CON LOS ESPACIOS FIBRADOS</u>.- Como es sabido, un espacio fibrado principal de grupo estructural G viene determinado por sus funciones de transición $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ que cumplen $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)^{-1}$, $g_{ij}(x)\, g_{jk}(x)\, g_{ki}(x) = \text{identidad} \in G$.

Siempre se puede considerar que los espacios fibrados están definidos mediante un mismo recubrimiento de B; entonces, una condición necesaria y suficiente para que sean equivalentes es que existan funciones $\gamma_i : U_i \rightarrow G$ tal, que $g'_{ji}(x) = \check{\gamma}_i(x) g_{ji}(x) \check{\gamma}_i(x)^{-1}$

Ahora bien, si $\mathcal{G}$ es la gavilla de los surtidores locales "jet" de funciones $U \rightarrow G$, donde U es un abierto de E, existe una correspondencia binnivoca entre las funciones $U_{ij} \rightarrow G$ y las secciones locales $U_{ij} \rightarrow \mathcal{G}$,teniendose el siguiente

<u>Teorema</u> <u>A cada clase de equivalencia de espacios fibrados principales sobre B de grupo estructural G corresponde un elemento de $H^1(B,\mathcal{G})$ y recíprocamente</u>.

Es decir: $H^1(B,\mathcal{G})$ puede considerarse como el conjunto de los espacios fibrados principales abstractos.

III

SUCESION ESPECTRAL Y APLICACIONES AL CALCULO DE VARIACIONES Y A LOS INVARIANTES INTEGRALES

§ 1.- LA FILTRACION ASOCIADA A UN SISTEMA DIFERENCIAL EXTERIOR

1. Consideremos una variedad $\mathcal{V}$ de N dimensiones, que la supondremos ó indefinidamente diferenciable ó analítica real; según los casos, los datos introducidos en lo que sigue serán, respectivamente, indefinidamente diferenciales (abreviadamente: diferenciables) o bien analíticos reales (abreviadamente: analiticos).

Sea $K_n(\mathcal{V})$ el conjunto de las aplicaciones diferenciables (analíticas) v de rango igual a n en todo punto de un entorno A del cubo unidad I^n del espacio numérico R^n en la variedad $\mathcal{V}$.(I indica el intervalo cerrado $[0,1]$ de la recta numérica R). Dos aplicaciones v, v' pertenecientes a K_n se dirá que son de la misma clase, si coinciden en un entorno de I^n; toda clase de aplicaciones equivalentes será llamada <u>cubo regular diferenciable</u> (<u>analítico</u>) <u>de</u> n <u>dimensiones de</u> $\mathcal{V}$ (abreviadamente: n-<u>cubo</u> (regular)). Los elementos del grupo libre generado por estos cubos se llamarán <u>cadenas regulares diferenciables (analíticas), de</u> n <u>dimensiones</u>, de $\mathcal{V}$ (abreviadamente: n-<u>cadenas</u> (<u>regulares</u>)); este grupo libre se designará por $C_n(\mathcal{V})$ y el grupo graduado suma directa $\sum_{n=0}^{N} C_n(\mathcal{V})$, cuyos elementos son las <u>cadenas regulares</u> de $\mathcal{V}$, se designará por $C(\mathcal{V})$.

Sean: u un (p+q) - cubo regular y $v(t_1,\dots,t_n)$, $n = p + q$, una aplicación de la clase u: todo q - cubo obtenido cuando se fijan p de las variables en v se llama <u>sección</u> de q dimensiones, de u (sección que no depende de la aplicación v elegida en la clase u). Si las variables que se fijan son las p primeras, la sección se llama <u>vertical</u> y si son las p últimas, <u>horizontal</u>. La sección obtenida reemplazando la i - ésima variable por ε (llamada i - ésima ε -cara) se indica por $\lambda^i_\varepsilon u$ ($i = 1,2,\ldots,n$; $\varepsilon = 0,1$); introduciremos la aplicación lineal (operación borde) $\partial : C_n(v) \longrightarrow C_{n-1}(v)$, que operará a la derecha y definida por

$$n\partial = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i(\lambda^o_i u - \lambda^1_i u).$$

Este operador de grado -1 es de cuadrado nulo y convierte el grupo graduado $C(\mathcal{V})$ en un complejo de cadenas que llamaremos <u>complejo regular</u> (diferenciable o analítico) de la variedad $\mathcal{V}$. Su grupo de homologia $H(\mathcal{V}) = \sum_n H_n(\mathcal{V})$ será el <u>grupo de homologia regular</u> (diferenciable o analítico) de la variedad $\mathcal{V}$.

Sea α un par de puntos (a_i), (b_i) $(1 \leq i \leq n)$ de I^n tales, que $a_i < b_i$; se designará por γ_α la aplicación de R^n sobre sí misma definida por

$$\gamma_\alpha(t_1,\ldots,t_n) = (a_1 + (b_1-a_1)t_1,\ldots,a_n + (b_n-a_n)t_n)$$

y que transforma el cubo I^n en el producto de los n intervalos cerrados $[a_i, b_i]$. Sea u un n-cubo de $\mathcal{V}$, v una aplicación de la clase u definida en el entorno A de I^n. La aplicación compuesta $v_\alpha = v\,\gamma_a$ está definida en el entorno $A_\alpha = \gamma_\alpha^{-1}(A)$ de I^n; le hace corresponder un n-cubo u_α de $\mathcal{V}$ que no depende mas que de u y del par α. Todo cubo u asi obtenido se llama <u>fragmento</u> de u.

2. Se llamará <u>sistema diferencial exterior</u> (diferenciable o analítico) sobre la variedad $\mathcal{V}$ a una familia $\mathcal{U}$ de pares $(U_i, \mathcal{U}_i)_{i\in I}$ que satisface las condiciones siguientes: (1º) $(U_i)_{i\in I}$

es un recubrimiento abierto de $\mathcal{V}$; (2º) $\mathcal{U}_i$ es un ideal en el álgebra $G(U_i)$ de las formas diferenciales exteriores (diferenciables o analíticas) del abierto U_i; (3º) si $U_{ij} = U_i \cap U_j$ no es vacio, existe un recubrimiento de U_{ij} por abiertos W en cada uno de los cuales los ideales $\mathcal{U}_i$ y $\mathcal{U}_j$ engendran el mismo ideal $\mathcal{U}_{ijW} \subset G(W)$. Corrientemente, los ideales $\mathcal{U}_i$ serán homogéneos y diferenciales (es decir que $\omega \in \mathcal{U}_i$ implica $d\omega \in \mathcal{U}_i$). Se dirá que dos sistemas $(U_i, \mathcal{U}_i)_{i\ I}$, $(V_j, \mathcal{B}_j)_{j\in J}$ son <u>equivalentes</u>, si toda intersección no vacia $U_i \cap V_j$ admite un recubrimiento con abiertos W en cada uno de los cuales los ideales $\mathcal{U}_i$ y $\mathcal{B}_j$ generan un mismo ideal de G(W).

Sea ω una forma diferencial (homogénea o no) sobre un abierto $U \subset \mathcal{V}$ y u un n-cubo de $\mathcal{V}$. Se dice que ω <u>se anula</u> sobre u, o que u es un <u>cubo integral</u> de ω, si en la clase u toda aplicación $v \in K_n(\mathcal{V})$, $v : A \longrightarrow \mathcal{V}$ satisface la siguiente condición: si V es la imagen recíproca $V = v^{-1}(U) \subset A$ y v_V la restricción de v a V, la forma $\dot{\omega} v_V$, imagen recíproca de ω en V, se anula en todo punto de $I^n \cap V$. Cuando todo forma $\omega \in \mathcal{U}_i$ de un sistema $\mathcal{U} = (U_i, \mathcal{U}_i)_{i\in I}$ se anula sobre u, se dice que $\mathcal{U}$ se anula sobre u o que u es un cubo integral del sistema $\mathcal{U}$. Una cadena obtenida por combinación lineal de cubos integrales, se llama <u>cadena integral.</u> El conjunto de cadenas integrales de un sistema $\mathcal{U}$ constituye un subgrupo homogéneo $R_{\mathcal{U}} \subset C(\mathcal{V})$ y dos sistemas equivalentes tienen el mismo grupo de cadenas integrales; de la proposición 1 resulta que es un subgrupo estable para el operador ∂ ; se puede considerar, pues, como subcomplejo de $C(\mathcal{V})$ y se podrá hablar de su grupo de homologia $H(R_{\mathcal{U}})$.

PROPOSICION 1.- <u>Toda sección y todo fragmento de un cubo integral es un cubo integral</u>.

Para verlo, basta volver a las definiciones y observar que si gf es una aplicación compuesta y ω una forma diferencial, se tiene $\omega(gf) = (\omega g)f$ (por lo que $\omega g = 0$ implica $\omega(gf) = 0$).

Esta propiedad elemental desempeñará, en lo que sigue, un papel esencial. Estableceremos, también, la siguiente

DEFINICION 1.- Se dice que un subgrupo $R \subset C({}^c V)$ está <u>saturado</u> si satisface las siguientes condiciones: (1º) R admite una base formada de cubos; (2º) toda sección y todo fragmento de un cubo $u \in R$ pertenecen a R.

El subgrupo $R_{\mathcal{U}}$ de las cadenas integrales de un sistema diferencial $\mathcal{U}$ está saturado.

Todo grupo saturado R es necesariamente homogéneo y estable para el operador ∂; se puede, pues, hablar de su grupo de homología H(R). Estos grupos constituyen una parte del conjunto de los subcomplejos de $C({}^c V)$.

A todo subgrupo $Q \subset C({}^c V)$ se le puede asociar el grupo saturado R(Q) generado por las secciones y los fragmentos de los cubos que componen las cadenas de Q; es el menor grupo saturado que contiene Q.

3. A todo grupo $R \subset C({}^c V)$ se le puede asociar una <u>bigraduación</u> de $C({}^c V)$ como sigue. Un cubo $u \in C_{p+q}({}^c V)$ se llamará <u>bihomogéneo</u> de <u>bigrado</u> (p,q) si cada una de sus secciones verticales de q dimensiones pertenece a R y si al menos una de sus secciones verticales de q + 1 dimensiones no le pertenece. El subgrupo de cadenas generado por los cubos de bigrado (p,q) (cadenas de bigrado (p,q)) lo indicaremos por $C_{p,q}$. Esto define perfectamente una bigraduación

de $C(\mathcal{V})$ dada la descomposición en suma directa $C(\mathcal{V}) = \sum_{p,q} C_{p,q}$; p es llamado <u>grado filtrante</u>, q el <u>grado complementario</u> y $p + q$ el <u>grado total</u>.

A esta bigraduación corresponde una filtración de $C(\mathcal{V})$ definida como sigue:

Para $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ se pone

$$A^{p,q} = C_{p,q} + C_{p-1,q+1} + \dots + C_{o,p+q} ;$$

para $p < 0$ se conviene en que sea $A^{p,q} = 0$ y para $p \geqslant 0$, $q < 0$ en que $A^{p,q} = A^{p+q,0}$; se introduce seguidamente

$$(1) \qquad A^p = \sum_q A^{p,q}$$

Se tienen las propiedades

$A^{p,q} \quad A^{p+1,q-1}$, $A^{p,q} \partial \subset A^{p,q-1}$, $A^p \subset A^{p+1}$, $A^p \partial \subset A^p$, $\bigcup_p A^p = C(\mathcal{V})$, $\bigcap_p A^p = 0$, que demuestra que las A^p definen una filtración creciente-en el sentido de J,P. Serre [9]-del complejo $C(\mathcal{V})$; la propiedad (1) expresa que esta filtración es compatible con la graduación natural de $C(\mathcal{V})$. Una cadena c se llama de filtración $f(c) = p$ si pertenece a A^p sin pertenecer a A^{p-1}; en particular, una cadena bihomogénea de bigrado (p,q) es de filtración p. Se tiene $f(c) \geqslant 0$ para $c \neq 0$, $f(0) = -\infty$, para c homogéneo de grado (total) n, $f(c) \leqslant n$.

PROPOSICION 2. <u>El subgrupo A^p $(p \geqslant 0)$ es el subgrupo generador por los cubos de dimensión $n \geqslant p$ del que cada sección de $n-p$ dimensiones pertenece a R. En particular $A^o = R$. Cada subgrupo A^p está saturado y cada fragmento de un cubo perteneciente a un $A^{p,q}$ pertenece a $A^{p,q}$.</u>

Esto resulta de la definición de A^p y del caracter saturado de R.

<u>Ejemplo</u>. Supongamos $\mathcal{V}_N$ provista de una estructura fibra-

da de base $\mathcal{B}_n$, fibra $\mathcal{F}_m$ $(N = n + m)$: Existe un recubrimiento $(V_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{V}_N$ y un recubrimiento $(B_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{B}_n$ que satisfacen las condiciones siguientes:(1º) $B_i = p(V_i)$; (2º) V_i es el dominio de coordenadas locales $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots y_m$ y B_i el dominio de coordenadas locales tales que la proyección se expresa por $(x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_m) \longrightarrow (x_1,\ldots,x_n)$. En V_i consideremos el ideal $\mathcal{U}_i \subset G(V_i)$ generado por las formas de Pffaff $dx_1,\ldots dx_n$; la familia $(V_i,\mathcal{U})_{i\in I}$ es un sistema diferencial sobre $\mathcal{V}$. La filtración $C(\mathcal{V})$ correspondiente al grupo de cadenas integrales de este sistema se remite al considerado por J.P. Serre [9] (con la diferencia de que este autor utiliza el complejo «singular» mayor que el complejo «regular» . Utilizamos, además, variedades fibradas en el sentido clásico, que es una noción menos general que la de espacio fibrado en el sentido de Serre). Se tiene una filtración análoga si la variedad $\mathcal{V}_N$ es foliada en hojas de m dimensiones; se elige entonces un recubrimiento $(V_i)_{i\in I}$ tal, que las hojas esten definidas localmente por $x_1 = \text{cte},\ldots, x^n = \text{cte}$.

Recordemos que en la teoria clásica de la sucesión espectral se definen los grupos

$C_r^{p,q}$ = grupo de las cadenas de $A^{p,q}$ cuyo borde esta en A^{p-r} ,

$B_r^{p,q}$ = grupo de las cadenas de $A^{p,q}$ bordeando cadenas de A^{p+r}:

$$B_r^{p,q} = (C_r^{p+r,q-r+1})\,\partial.$$

$C^{p,q} = C^{p,q}_{p+k} = C^{p,q}(K > 0)$ (ciclos contenidos en $A^{p,q}$),

$B^{p,q} = C^{p,q}_{q+k} = B^{p,q}_{\infty}(K > 0)$ (bordes de $A^{p,q}$)

$C_r^p = \sum_q C_r^{p,q}$, $B_r^p = \sum_q B_r^{p,q}$

y cocientes

$$E_r^{p,q} = C_r^{p,q} / (C_{r-1}^{p-1,q+1} + B_{r-1}^{p,q}), \quad E_r^p = \sum_q E_r^{p,q} \simeq C_r^p / (C_{r-1}^{p-1} + B_{r-1}^p),$$

$$E_r = \sum_p E_r^p.$$

E_r es un grupo bigraduado en el cual se introduce una diferencial bihomogénea ∂_r de bigrado $(-r, r-1)$, es decir que

$$\partial_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p-r,q+r-1};$$

definida por paso al cociente por medio de $\partial : C_r^{p,q} \longrightarrow C_r^{p-r,q+r-1}$; por consiguiente es de cuadrado nulo y se sabe que la homología de E_r para esta diferencial es canónicamente isomorfa a E_{r+1}.

El cálculo del término E_o demuestra que es canonicámente isomorfa a $C(\check{V})$ provista de una bigraduación antes definida. Se tiene, en efecto,

$$C_o^{p,q} = C_{-1}^{p,q} = A^{p,q}, \quad B_{-1}^{p,q} \subset C_{-1}^{p-1,q+1}$$

de donde

$$E_o^{p,q} = A^{p,q} / A^{p-1,q+1} \simeq C_{p,q}.$$

Todas estas propiedades dan lugar al

TEOREMA I.- <u>A todo subgrupo saturado R del complejo regular $C(\check{V})$ (en particular al grupo de las cadenas integrales del sistema diferencial exterior) corresponde una filtración creciente de este complejo; esta filtración es positiva inferior al grado y compatible con la estructura graduada de $C(\check{V})$. El primer término E_o de la sucesión espectral es canónicamente isomorfo a $C(\check{V})$ dotado de la bigraduación definida por $C_{p,q}$. El grupo terminal E_∞ es canónicamente isomorfo al grupo bigraduado asociado al grupo graduado $H(\check{V})$ convenientemente filtrado.</u>

NOTA.- Existen además relaciones entre los términos E_1, E_2 y ciertos productos tensoriales de los complejos construidos a partir de $C(\tilde{V})$. Estas relaciones generalizan resultados de J.P. Serre [9] y serán desarrolladas en otro trabajo.

4. Al grupo saturado $R \subset C(\tilde{V})$ se le va ahora a hacer corresponder para todo abierto $U \subset \tilde{V}$ una filtración del álgebra $G(U)$ de las formas diferenciales exteriores (diferenciables o analíticas) sobre U; A este respecto, el subespacio vectorial de $G(U)$ de las formas de grado $p + q$ que se anulan sobre las cadenas de $A^{p-1,q+1}$, se designará por $A_U^{*\,p,q}$; se pondrá también

$$A_U^{*\,p} = \sum_q A_U^{*\,p,q}$$

lo que da lugar a las propiedades

$$A_U^{*\,p,q} \subset A_U^{*\,p-1,q+1}\ ,\quad dA_U^{*\,p,q} \subset A_U^{*\,p,q+1},\quad A_U^{*\,p} \subset A_U^{*\,p-1}$$

(desigualdad en la que el sentido, opuesto del encontrado en el nº 3 para las A, expresa el caracter decreciente de la presente filtración).

$$dA_U^{*\,p} \subset A_U^{*\,p},\quad \bigcup_p A_U^{*\,p} = G(U),\quad \bigcap_p A_U^{*\,p} = 0$$

PROPOSICION 3.- <u>El sub-espacio vectorial $A_U^{*\,p} \subset G(U)$ es el conjunto de las formas de $G(U)$ que se anulan sobre las cadenas de A^{p-1}.</u>

Sea, en efecto, ω una forma diferencial de grado $p + q$ de $A_U^{*\,p}$ (por tanto $\omega \in A_U^{*\,p,q}$) y u un cubo de $A^{p-1,k}$. Si $p+q \geqslant p+k-1$, ω se anula sobre u. Si $p + q < p + k-1$, ω se anula sobre u si se anula sobre toda $(p+q)$-sección de u; lo que tiene lugar, ya que en virtud del caracter saturado de A^{p-1}, estas secciones pertenecen $A^{p-1,q+1}$. Recíprocamente, una forma ω de grado $p+q$ nula sobre A^{p-1}, se anula sobre $A^{p-1,q+1} \subset A^{p-1}$, por lo que $\omega \in A_U^{*\,p,q} \subset A_U^{*\,p}$.

Igualmente se estableceria la propiedad siguiente, debida también al caracter saturado de R:

$$(3) \qquad A_U^{*\,p,q} \wedge A_U^{*\,p',q'} \subset A_U^{*\,p+p',q+q'}\ ;$$

brevemente se dirá que la filtración es compatible con la estructura multiplicativa.

Se dice que una forma $\omega \in G(U)$ es de filtración $f^*(\omega)=p$ si pertenece a A_U^{*p} sin pertenecer a A_U^{*p+1}. Esta filtración es positiva, inferior al grado (pues, si ω es homogénea de grado $n < f^*(\omega) = p$, ω se anula sobre $A^{p,n-p} = C(^c V)$, de donde $\omega=0$) y compatible con la graduación (es decir, que se verifica la relación (2)).

Cuando R es el grupo de cadenas integrales de un sistema diferencial exterior $(U_i, \mathcal{U}_i)_{i\in I}$, sea $\mathcal{U}_U$ el conjunto de las formas de $\omega \in G(U)$ que satisfacen la siguiente condición: para todo punto $x\in U$ existe un entorno abierto W de x contenido en la intersección de U con U_i y tal que la restricción de ω a W pertenece al ideal generado por $\mathcal{U}_i$ en W. Toda forma de $\mathcal{U}_U$ es de filtración al menos igual a uno; dicho de otro modo, $\mathcal{U}_U \subset A_U^{*1}$. Si esta inclusión es realmente una igualdad, el sistema considerado se llama <u>completo</u> en U (ver E. Cartan, [2] p.28).

Se definen los espacios $C_{U_r}^{*p,q}$, $B_{U_r}^{*p,q}$ análogos a los grupos $C_r^{p,q}$, $B_r^{p,q}$, a saber: $C_{U_r}^{*p,q}$ = espacio de las formas de $A_U^{*p,q}$ cuyas diferenciales están en A_U^{*p+r}. $B_{U_r}^{*p,q} = dC_{U_r}^{*p-r,q+r-1}$, $C_U^{*p,q} = C_{U\infty}^{*p,q}$, $B_U^{*p,q} = B_{U\infty}^{*p,q}$, $C_U^{*p} = \sum_q C_{U_r}^{p,q}$, $B_{U_r}^{*p} = \sum_q B_{U_r}^{*p,q}$ y los cocientes

$$E_{U_r}^{*p,q} = C_{U_r}^{*p,q} / (C_{U_{r-1}}^{*p+1,q-1} + B_{U_{r-1}}^{*p,q}), \quad E_{U_r}^{*p} = \sum_q E_{U_r}^{*p,q},$$

$$E_{U_r}^{*} = \sum_p E_{U_r}^{*p}.$$

En virtud de la propiedad (3), la estructura multiplicativa se transmite a las $E_{U_r}^*$ que son por tanto álgebras bigraduadas. Del mismo modo, la diferencial d induce en $E_{U_r}^*$ un operador d_r bihomogéneo de bigrado $(r,1-r)$.

$$d_r : E^{*\,p,q}_{U_r} \longrightarrow E^{*\,p+r,q-r+1}_{U_r}$$

que es una diferencial en el sentido de las álgebras (1) de homologia $H(E_{U_r})$. Tenemos en resumen el teorema:

TEOREMA II.- <u>A todo grupo saturado $R \subset C(\mathcal{V})$ (en particular al grupo de las cadenas integrales de un sistema diferencial exterior) y a todo abierto $U \subset \mathcal{V}$ corresponde una filtración decreciente del álgebra $G(U)$ de las formas diferenciales exteriores de U. Esta filtración es positiva, inferior al grado y compatible con las estructuras graduadas y multiplicativa de $G(U)$. El término $E^*_{U\infty}$ de la sucesión espectral es isomorfo al álgebra bigraduada asociada al álgebra graduada de homologia $H(G(U))$ convenientemente filtrada.</u>

<u>Ejemplo</u>. Consideremos nuevamente el ejemplo ya tratado de $\mathcal{V}$ fibrado o foliado. Una forma de U es de filtración p a condición, necesaria y suficiente, de que su expresión local en todo $U \cap V_i$ sea de grado al menos igual a p en las diferenciales $dx_1, \ldots, dx_n$; en particular, las formas llamadas <u>semi-básicas</u> [3] (nº 3, pág. 20) son aquellas cuya filtración es máxima, es decir igual al grado. Esta filtración se enlaza directamente a las consideradas por J.Leray [6] y J.L Koszul [5] ; nos encontramos, por otra parte, en presencia de una bigraduación canónica de $G(U)$ y de un isomorfismo canónico entre este álgebra bigraduada y el término E^*_{U0} de la sucesión espectral, circunstancia que no tiene lugar en el caso general.

---

(1) Es decir que dr es de cuadrado nulo y está asociado a un endomorfismo lineal $\omega_r : E^*_{U_r} \longrightarrow E^*_{U_r}$ tal que

$$d_r(a.b) = d_r\, a.b + \omega_r(a).d_r b$$

donde a y $b \in E^*_{U_r}$ y . designa la multiplicación en $E^*_{U_r}$. Este endomorfismo se deduce por paso al cociente del que está asociado a la estructura de álgebra diferencial de $G(U)$.

§ 2. LOS INVARIANTES INTEGRALES Y LAS RELACIONES INTEGRALES DE INVARIANCIA

5. En el caso en que la variedad ^{c}V del ejemplo precedente es foliado en curvas, se está en las condiciones de aplicación de la teoría de invariantes integrales de H. Poincaré [8] y E. Cartan [1] y de las relaciones integrales de invariancia de A.Lichnerowicz [7], se comprueba que las definiciones de estos autores se reducen a lo siguiente: una forma ω de grado n engendra una relación integral de invariancia cuando es de filtración igual a su grado por tanto semibásica, o se anula en $A^{(n-1,1)}$; constituye un invariante integral absoluto si su integral extendida a las cadenas de $C_1^{n,0}$ es constante sobre las clases de $E_1^{n,0}$; constituye un invariante integral relativo si su integral extendida a los ciclos de $C^{n,0}$ es constante sobre las clases de $C^{n,0}/B_0^{n,0}$. Este último cociente no considerado por los inventores de la sucesión espectral, entra en un tipo estudiado por R.Deheuvels [4] y que se escribe con nuestras notaciones

$$M_{r,s,t}^{p,q} = C_r^{p,q} / (C_{r-s}^{p-s,q+s} + B_t^{p,q}) , \qquad (S > 0).$$

Introducieremos tambien para $S > 0$

$$F_t^{p,q} = C^{p,q} / B_t^{p,q} = M_{\infty,\infty,t}^{p,q}$$

$$M_{r,s,t}^{*p,q} = C_r^{*p,q} / (C_{r-s}^{*p+r,q-r} + B_t^{*p,q}) \qquad ((2))$$

((2)) Todos los espacios vectoriales que intervienen en esta fórmula y los que siguen son relativos al abierto $U = {}^{c}V$; el índice U puede, pues, omitirse sin riesgo de confusión.

$$C_t^{*p,q} = C_{p+t+1}^{*0,p+q} / (C_t^{*p+1,q-1} + B_0^{*0,p+q}) = M_{p+t+1,p+1,0}^{*0,p+q}$$

Cuando se considera sobre la variedad $\mathcal{V}$ un sistema diferencial exterior cualquiera $\mathcal{U}=(U_i, \mathcal{U}_i)_{i\in I}$ o un grupo saturado $R\subset C(\mathcal{V})$, la teoría clásica admite entonces la generalización siguiente:

6. DEFINICION 2 .- Se dice que una forma diferencial ω de la variedad $\mathcal{V}$ engendra una <u>relación integral de invariancia de tipo (p,q,r)</u> relativa al sistema diferencial $\mathcal{V}$ (o al grupo saturado R) cuando es de grado $p + q$ y su integral se anula sobre $C_r^{p,q}$. El conjunto de estas formas se designará por $\mathcal{C}_r^{p,q}$.

Es de observar que para $r \leq 0$, no son más que las formas de filtración $p + 1$ y grado $p + q$: $\mathcal{C}_0^{*p,q} = A^{*p+1,q-1}$; se tiene, en efecto, en este caso $C_r^{p,q} = A^{p,q}$ y si la integral de una forma ω de grado $p + q$ se anula sobre todo cubo u de $A^{p,q}$ también debe anularse sobre todo fragmento de u (prop.2); para esto es necesario (y suficiente) que ω se anule sobre u. Para todo valor de r una $(p + q)$-forma pertenece a $\mathcal{C}_r^{*p,q}$ si es de filtración $p + 1$ o si es la diferencial de una forma de filtración $p-r+1$:

$$A^{*p+1,q-1} + B_0^{*p-r+1,q+r-1} \subset \mathcal{C}_r^{*p,q}.$$

DEFINICION 3.- Se dice que una forma diferencial ω constituye un <u>invariante integral de tipo (p,q,r,s,t)</u> cuando es de grado $p+q$ y su integral extendida a las cadenas de $C_r^{p,q}$ es constante sobre las clases de $M_{r,s,t}^{p,q}$. En el caso particular $s = 1$, $t = r-1$, se dice que ω es un <u>invariante integral absoluto de tipo (p,q,r)</u>. En el caso particular $r > p$, $s > p$ (lo que implica $M_{r,s,t}^{p,q} = F_t^{p,q}$), se dice que el invariante integral es <u>relativo</u> de tipo (p,q,t). Finalmente en el caso general el invariante se llama <u>mixto</u>.

Por ejemplo, si ω es un invariante integral absoluto de tipo $(p,q,1)$ y el borde de la cadena $c \in C_0^{p,q+1}$ se descompone en $c\partial = \gamma - \gamma' + \alpha$ donde γ y $\gamma' \in C_1^{p,q}$ y $\alpha \in C_0^{p-1,q+1}$, se tiene $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$. Si ω es un invariante integral relativo del tipo $(p,q,0)$ y el borde de la cadena $c \in C_0^{p,q+1}$ es de la forma $c\partial = \gamma - \gamma'$ donde $\gamma' \in C_\infty^{p,q}$, se tiene $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$.

TEOREMA 3.- <u>Para que una forma diferencial ω sea un invariante integral mixto del tipo (p,q,r,s,t) es necesario y suficiente que genere una relación integral de invariancia del tipo $(p-s,q+s,r-s)$ y su diferencial una relación integral de invariancia del tipo $(p+t,q-t+1,t)$. Para ello basta que pertenezca a $C^{*p-s+1,q+s-1}_{s+t}$ y esto es también necesario cuando $r-s \leq 0$ y $t \leq 0$.</u>

Para que ω de grado $p+q$ responda a esta cuestión, la integral de ω debe, en efecto, anularse sobre las cadenas de $C^{p-s,q+s}_{r-s} + B^{p,q}_t$, denominador de $M^{p,q}_{r,s,t}$. Anularse sobre el primer término equivale a $\omega \in \mathcal{C}^{*p-s,q+s}_{r-s}$. Del mismo modo, si la integral se anula sobre el segundo, $B^{p,q}_t = (C^{p+t,q-t+1}_t)\partial$, la integral de $d\omega$ debe anularse, en virtud de la fórmula de Stokes, sobre $C^{p+t,q-t+1}_t$, de donde $d\omega \in \mathcal{C}^{*p+t,q-t+1}_t$. Estas condiciones son, recíprocamente, suficientes. Se cumplen, manifiestamente, si $\omega \in C^{*p-s+1,q+s-1}$. Hemos visto, además, que para $r-s \leq 0$, $t \leq 0$, $\mathcal{C}^{*p-s,q+s}_{r-s} = A^{*p-s,q+s}$ y $\mathcal{C}^{*p+t,q-t+1}_t = A^{*p+t,q-t+1}$; en este caso, las condiciones se reducen, pues, a $\omega \in C^{*p-s+1,q+s-1}_{s+t}$.

Resulta de este teorema que si ω es un invariante integral de tipo (p,q,r,s,t), $d\omega$ es un invariante integral de tipo $(\pi,\chi,\rho,\sigma,\tau)$ para todos los valores de π,χ,ρ que satisfacen las relaciones $\pi = p+t+\sigma-K$, $\chi = q+K-t-\sigma+1$, $\rho = t+\sigma-K+K'$, donde σ,τ, K,K' son enteros arbitrarios tales que $\sigma > 0$, $K \geq 0$, $K' \geq 0$.

El teorema admite, además, los casos particulares siguientes: Para que ω defina un invariante integral absoluto de tipo (p,q,r), es necesario y sufienciente que esta forma genere una relación integral de invariancia de tipo $(p-1,q+1,r-1)$ y su diferencial una relación integral de invariancia de tipo $(p+r-1,q-r+2,r-1)$; para esto es suficiente que ω pertenezca a $C_r^{*p,q}$, lo que también es necesario cuando $r \leq 1$. Para que ω genere un invariante integral relativo de tipo (p,q,t) es necesario y basta que sea de grado $p+q$ y que su diferencial genere una relación integral de invariancia de tipo $(p+t, q-t+1,t)$; para esto es suficiente que ω pertenezca a $C_{p+t+1}^{*0,p+q}$ y esto es también necesario cuando $t \leq 0$. Si ω define un invariante integral absoluto de tipo (p,q,r), su diferencial define un invariante absoluto de tipo $(p+r-k,\ q-r+k+1,\ r-k+k')$ con k y $k' \geq 0$. Si ω define un invariante integral relativo de tipo (p,q,t), su diferencial genera un invariante integral absoluto de tipo $(p+t+1-k,\ q-t+k,\ t+1-k+k')$ con k y $k' \geq 0$. Es de observar que los casos importantes son aquellos para los que es $k = k' = 0$; los demás se deducen teniendo en cuenta las relaciones de inclusión fáciles de establecer entre las $\mathcal{C}_r^{*p,q}$. Estas propiedades generalizan, evidentemente, las clásicas de los invariantes integrales (para los absolutos, $q=r-1=0$ y para los relativos $q=t=0$).

Un invariante mixto de tipo (p,q,r,s,t) es nulo (es decir, su integral se anula sobre las cadenas de $C_r^{p,q}$) si, y solamente si, pertenece a $\mathcal{C}_r^{*p,q}$; basta, pues, que pertenezca a $C_t^{*p+1,q-1} + B_{r-s}^{*p-s+1,q+s-1}$. De donde el teorema:

TEOREMA 4.- <u>Existe una dualidad natural entre $M_{r,s,t}^{p,q}$ y $M_{s+t,s,r-s}^{*p-s+1,q+s-1}$; en particular, entre $E_r^{p,q}$ y $E_r^{*p,q}$ en lo que concierne a los invariantes absolutos y entre $F_t^{p,q}$ y $G_t^{*p,q}$ en lo que con-</u>

cierne a los invariantes relativos.

7. Caso particular en el que $t = r-s$, Los invariantes integrales mixtos de este tipo desempeñan un papel interesante ((3)). Se observa que los invariantes integrales clásicos absolutos y relativos entran en este caso particular; para los primeros se tiene, en efecto, $s = 1$, $t = r-1$ y para los segundos $r = s = p + 1$, $t = 0$.

Introduzcamos los grupos

$$E_{r,s}^{p,q} = M_{r,s,r-s}^{p,q}, \quad E_{r,s}^{p} = \sum_p E_{r,s}^{p,q}, \quad E_{r,s} = \sum_p E_{r,s}^{p}$$

que se reducen a los $E_r^{p,q}$, E_r^p, E_r cuando $s = 1$. Los $E_{r,s}$ son grupos bigraduados. El operador borde $\partial : C_r^{p,q} \to C_r^{p-r,q+r-1}$ transforma $C_{r-s}^{p-s,q+s}$ en $C_{r-s}^{p-r-s,q+r+s-1} + B_{r-s}^{p-r,q+r-1}$; define, pues, por paso al cociente en $E_{r,s}$ un operador diferencial bihomogéneo $\partial_{r,s}$ de bigrado $(-r,r-1)$; este operador goza de las propiedades

$$(4) \qquad \partial_{r,s} : E_{r,s}^{p,q} \longrightarrow E_{r,s}^{p-r,q+r-1}$$
$$\partial_{r,s}\,\partial_{r,s} = 0$$

Las $E_{r,s}$ se convierten así en grupos diferenciales de los que se calcula fácilmente la homología. El núcleo de la aplicación (4) es, en efecto,

$$(C_{r+s}^{p,q} + C_{r-s}^{p-s,q+s} + B_{r-s}^{p,q})/(C_{r-s}^{p-s,q+s} + B_{r-s}^{p,q}) =$$
$$=(C_{r+s}^{p,q} + C_{r-s}^{p-s,q+s})/(C_{r-s}^{p-s,q+s} + B_{r-s}^{p,q}) ;$$

la imagen de

$$\partial_{r,s} : E_{r,s}^{p+r,q-r+1} \longrightarrow E_{r,s}^{p,q}$$

es

((3)) Las propiedades estudiadas en este párrafo han sido observadas por el autor en la conferencia de Bolonia; nos parece sin embargo útil indicarlas aquí.

$$(B_r^{p,q} + C_{r-s}^{p-s,q+s} + B_{r-s}^{p,q})/(C_{r-s}^{p-s,q+s} + B_{r-s}^{p,q}) =$$

$$= (C_{r-s}^{p-s,q+s} + B_r^{p,q})/(C_{r-s}^{p-s,q+s} + B_{r-s}^{p,q}).$$

La homología de $E_{r,s}$ calculada para el bigrado (p,q) es, pues,

$$H(E_{r,s}^{p,q}) \simeq (C_{r+s}^{p,q} + C_{r-s}^{p-s,q+s})/(C_{r-s}^{p-s,q+s} + B_r^{p,q}) = (C_{r+s}^{p,q} + C_{r-s}^{p-s,q+s} + B_r^{p,q}) \simeq C_{r+s}^{p,q}/C_{r+s}^{p,q} \cap (C_{r-s}^{p-s,q+s} + B_r^{p,q}) = C_{r+s}^{p,q}/(C_r^{p-s,q+s} + B_r^{p,q}) = E_{r+s,s}^{p,q}.$$

TEOREMA 5.- <u>A la filtración del complejo $C(\mathcal{V})$ definida por un subgrupo saturado (más generalmente, a toda filtración de un grupo diferencial graduado gozando de las mismas propiedades formales) le corresponde una doble sucesión de grupos bigraduados provistos de una diferencial $\partial_{r,s}$ bihomogénea de bigrado $(-r,r-1)$. El grupo de homología de $E_{r,s}$ es canónicamente isomorfo a $E_{r+s,s}$.</u>

Este resultado se transporta por dualidad a la filtración del álgebra de las formas diferenciales. Se definen espacios bigraduados $E_{r,s}^*$ análogos a los grupos $E_{r,s}$ y que se proveen naturalmente de una estructura de álgebra diferencial para la que se tiene un isomorfismo canónico de $H(E_{r,s}^*)$ sobre $E_{r+s,s}^*$. Haciendo $s = 1$, se vuelve a encontrar la propiedad clásica de la sucesión espectral.

Observemos también, que para $t = r-s$ la dualidad del teorema 4 es una dualidad entre $E_{r,s}^{p,q}$ y $E_{r,s}^{*\,p-s+1,q+s-1}$.

3 GENERALIZACIÓN.

8.- Cambiando ligeramente las notaciones, sea A un módulo filtrado por una sucesión creciente de submódulos $\ldots \subset A^p \subset A^{p+1} \subset \ldots$ tales que $\bigcap A^p = 0$ y $\bigcup A^p = 0$.

Si en A tenemos una diferenciación $d : A \longrightarrow A$ con $dd=0$, una filtración se llama estable si cumple $dA^p \subset A^p$. Una filtración se llama casi estable si cumple: $dA^p \subset A^{p+x}$.

Definamos en A los submódulos

$$C^p_q = \{ a | a \in A^p \wedge da \in A^q \} , \quad B^p_q = dC^q_p ,$$

que evidentemente cumplen:

$$B^p_q \subset C^p_s ,$$
$$C^r_s \subset C^q_s , \quad B^s_r \subset B^s_q \quad \text{si } r \leq q$$
$$C^q_t \subset C^q_s , \quad B^t_q \subset B^s_q \quad \text{si } t \leq q .$$

En particular $C^p_{+\infty} = A^p$.

Del módulo filtrado A se deduce el módulo graduado $g(A) = \sum_{dir} A^p/A^{p-1}$ y si la filtración es casi estable, tenemos $dA^p \subset A^{p+x}$, $dA^{p-1} \subset A^{p+x-1}$, luego d induce una derivación $\overline{d} : A^p/A^{p-1} \longrightarrow A^{p+x}/A^{p+x-1}$ de grado x en el módulo graduado $g(A)$.

En vez de considerar los cocientes A^p/A^{p-1} , podemos considerar C^q_s/C^p_s para $q \geqslant p$; pero entonces d envia C^q_s dentro de C^s_x para cualquier x y si consideramos un cociente análogo C^s_x/C^t_x con $t \leq s$, no encontramos que en general $dC^p_s \not\subset C^t_x$, luego la generalización justa es

$$C^q_s/C^p_s + B^q_y \xrightarrow{\ \triangle\ } C^s_x/C^t_x + B^s_p$$

con $q \geqslant p$, $s \geqslant t$ y $\triangle$ inducido por d.

Para abreviar indicaremos por letras griegas a las cuaternas $\mu = (y,q,p,s)$ con $q \geqslant p$ y $E(\mu) = C^p_s/C^p_s + B^q_y$.

Si $\mu = (m,n,p,q)$, $\mu' = (p,q,r,s)$, $\mu'' = (r,s,t,u)$, tenemos:

$$E(\mu) \xrightarrow{\triangle_{\mu'\mu}} E(\mu') \xrightarrow{\triangle_{\mu''\mu'}} E(\mu'').$$

De $dd = 0$ se deduce inmediatamente $\operatorname{Ker} \triangle_{\mu'\mu''} \supset \operatorname{Im} \triangle_{\mu'\mu}$

TEOREMA 5.- Ker $\Delta_{\mu''\mu'}/\mathcal{J}_m \Delta_{\mu'\mu} \cong E(n,q,r,t)$

Demostración: Teniendo en cuenta $n \geqslant p$, $q \geqslant r$, $s \geqslant t$, se tiene: $I_m \Delta_{\mu'\mu} = (B^q_n + C^r_s + B^q_p)/C^r_s + B^q_p = (C^r_s + B^q_n)/C^r_s + B^q_r$ -

Si $x^p_s \in C^q_s$ es un representante de Ker $\Delta_{\mu''\mu'}$, se tiene $dx^q_s = y^t_u + dz^r_s$ con $y^t_u \in C^t_u$, $z^r_s \in C^r_s$, luego $x^q_s - z^r_s \in C^q_t$ y $x^q_s \in C^q_t + C^r_s \subset C^q_s$; recíprocamente $d(C^q_t + C^r_s) = B^t_q + B^s_r \subset C^t_u + B^s_r$ luego Ker $\Delta_{\mu''\mu'} = (C^q_t + C^r_s)/(C^r_s + B^q_r)$ y de aquí

$$\text{Ker } \Delta_{\mu''\mu'}/\mathcal{J}_m \Delta_{\mu'\mu} \cong (C^q_t + C^r_s)/(C^r_s + B^q_n) \approx C^q_t/C^q_t \cap (C^r_s + B^q_n)$$

y por ser $B^q_n \subset C^q_t$ resulta

$$\text{Ker } \Delta_{\mu''\mu'}/\mathcal{J}_m \Delta_{\mu'\mu} \approx C^q_t/C^r_t + B^q_n = E(n,q,r,t)$$

como se quería demostrar.

Este teorema, nos da una generalización del teorema 5 del § 7.

9. Aplicaciones al cálculo de variaciones.- Sea ω una forma diferencial de grado p sobre la variedad $\mathcal{V}$ y consideremos el problema variacional $\{\mathcal{V}, \omega\}$, es decir, la obtención de las p-cadenas c_p extremales de la integral $\int_{c_p} \omega$. Estas cadenas constituyen un subgrupo $E_p \subset C(\mathcal{V})$ y definen un subgrupo saturado $R(E_p) \subset C(\mathcal{V})$ (cfr.n.2). La filtración definida por R(Q), siendo Q un subgrupo de $C(\mathcal{V})$ se dirá asociada a Q; si $Q = E_p$, se dirá asociada al problema variacional $\{\mathcal{V}, \omega\}$.

TEOREMA 6.- Dado un problema variacional $\{\mathcal{V}, \omega\}$, la forma define, para la filtración asociada, un invariante integral relativo de tipo (1,p-1,0) y la forma $d\omega$ un invariante integral absoluto del tipo (2,p-1,1) (o, lo que es lo mismo, $d\omega$ engendra una relación integral de invariancia de tipo (1,p,0)). La forma $d\omega$ es de filtración al menos igual a dos.

Todo se reduce a demostrar que $d\omega$ se anula sobre $A^{1,p}$ y esto resulta del hecho de que las extremales son cadenas integrales de p dimensiones del primer sistema asociado de $d\omega$ (Ver [3] propos. 3 pág.22)

Como en el caso $p = 1$ -en el que el teorema precedente se reduce a la propiedad clásica de los invariantes integrales del cálculo de variaciones- el teorema 6 admite un recíproco, pero es de suponer que existen suficientes cadenas extremales, es decir, que el grupo E_p sea normal en el sentido siguiente.

DEFINICION 4.- Un sugrupo $Q \subset C(\mathcal{V})$ se llamará <u>normal</u> si es generado por cubos de los que contiene todos los fragmentos y satisface la siguiente condición: Sea u un p-cubo de Q cuya primer vértice ((4)) está en $P \in \mathcal{V}$ y v un camino (cubo de una dimensión) del mismo origen P, no tangente a u en P; existe siempre un cubo $\bar{u}$ de $p+1$ dimensiones cuya primera 0-cara es idéntica a u, del que toda sección vertical de p dimensiones pertenece a Q y del que la sección horizontal de una dimensión, que pase por P, es idéntica a v ((5))

TEOREMA 7.- <u>Sea Q un subgrupo normal de $C(\mathcal{V})$ engendrado por cubos de p dimensiones. Si para la filtración asociada al grupo saturado R(Q), la p-forma ω es un invariante integral relativo de tipo (1,p-1,0) (o, lo que es lo mismo, si $d\omega$ genera una relación integral de invariancia de tipo (1,p,0)), Q es un grupo de cadenas extremales del problema variacional $\{\mathcal{V},\omega\}$. Lo mismo ocurre si $d\omega$ es un invariante integral absoluto de tipo (2,p-1,1).</u>

((4)) El primer vértice de un p-cubo es la imagen por una de las aplicaciones que definen este cubo del origen de R^p.

((5)) Por abuso de lenguaje, una sección de un cubo es asimilada aquí a su imagen en $\mathcal{V}$.

En efecto: Si estas condiciones se cumplen y X es un campo de vectores cualesquiera sobre la variedad $\mathcal{V}$, todo cubo u de Q anula la p-forma $d\omega i(X)$ (producto interior de $d\omega$ por X). Por tanto, en virtud de [3], teorema 1, p,21, u es un cubo extremal.

Los problemas variacionales planteados en las variedades fibradas, frecuentemente se limitan a las cadenas extremales genéricas es decir a las que la proyección sobre la base también es una cadena regular. Constituyen un subgrupo E'_p del grupo E_p de todas las cadenas extremales; el teorema 6 se aplica evidentemente al subgrupo E'_p. Del mismo modo, el teorema 7 se aplica si Q es un grupo normal y genérico (es decir, constituido por cadenas genéricas). Hemos demostrado, en particular, que todo problema variacional de tipo clásico concerniente a una integral I_p de orden cualquiera y dependiente de los elementos de contacto de primer orden diferencial de una variedad $\mathcal{V}$ es «equivalente» a un problema $\{\mathcal{E}, \Omega\}$ siendo una variedad fibrada ((6)) de base $\mathcal{V}$ y Ω una p-forma semibásica de $\mathcal{E}$. La equivalencia entre el problema $\{\mathcal{V}, I_p\}$ y el problema $\{\mathcal{E}-Z, \Omega\}$ debe interpretarse en el siguiente sentido ([3], teorema 3 p.26): toda cadena extremal genérica de $\mathcal{E}$ -Z, se proyecta en la base $\mathcal{V}$ según una cadena extremal de $\{\mathcal{V}, I_p\}$; toda cadena extremal de $\{\mathcal{V}, I_p\}$ es la proyección de al menos una cadena extremal genérica de $\{\mathcal{E}-Z, \Omega\}$.

Los teoremas 6 y 7 anteriores suministran, pues, para los problemas $\{\mathcal{V}, I_p\}$ una generalización de teorema clásico de E.Cartan [1] que caracteriza las extremales de una integral simple por la pro

---

((6)) De la que se ha retirado un conjunto cerrado excepcional Z.

piedad de admitir un invariante integral lineal relativo ó a un invariante integral doble absoluto.

B I B L I O G R A F I A

[1] E.CARTAN, Leçons sur les invariants intégraux, Paris, Hermann 1922.

[2] — Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris, Hermann 1.945

[3] P.DEDECKER, Calcul des variations, formes différentielles et champs géodésiqnes, Colloque de Géométrie différentielle, Strasbourg, C.N.R.S. mayo 1953.

[4] R.DEHEUVELS, Anneau différentiel à filtration réelle, C.R.Paris t. 235, pp. 778-780 (1952)

[5] J.L.KOSZUL, Sur un type d'algébre différentielle en rapport avec les espaces fibrés, Colloque de Topologie, Centre belge de rech. math., Bruselas, 1950.

[6] J.LERAY, L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue, Journ. Math. t.29, pp.1-139 (1950). L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe, Journ. Math. t. 29, pp. 169-214 (1950).

[7] A.LICHNERWICZ, Les relations intégrales d'invariance et leurs applications à la dynamique, Bull. Sc. Math. t. 70 (1946).

[8] H.POINCARE, Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t, 3, Paris, Gauthiers Villars (1899).

[9] J.P. SERRE, Homologie singulière des espaces fibrés, applications, Ann. Math. t. 54, pp.425-505 (1951).

Vamos a dar ahora algunas indicaciones más completas sobre los problemas de cálculo de Variaciones, que se refieren a integrales múltiples.

4.- SOBRE LAS INTEGRALES MULTIPLES DEL CALCULO DE VARIACIONES

1. Consideremos en el espacio E_N de las $x^1,\dots,x^N$ una forma diferencial exterior $\Omega = A_{a_1\dots a_\mu}\, dx^{a_1}\dots dx^{a_\mu}$ de grado $\mu < N$; le asociamos el problema del calculo de variaciones de E_N consistente en buscar las variedades V_μ, de μ dimensiones, extremales de la integral

$$I = \int_{V_\mu} \Omega . \qquad (1)$$

Hay que señalar que la búsqueda de las extremales $x^i = x^i(t^\alpha)$ de una integral μ-uple.

$$\int L\left(t^\alpha, x^i, \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha}\right) dt^1\dots dt^\mu \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1,2,\dots,\mu \\ i = 1,2,\dots,n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

puede reducirse a un problema del tipo procedente en un cierto espacio fibrado que tiene por base el espacio $E_{\mu+n}$ de las $t^1,\dots,t^\mu$, $x^1,\dots,x^n$. Para $\mu = 1$, este resultado fué establecido por A.C. Dixon ((1)) y después por E.Cartan ((2)) el cual demostró, además, que es necesario buscar en ello la clave de las propiedades de los invariantes integrales de la dinámica.

((1)) A.C.Dixon, On the relation between Pfaff's Problem and the Calculus of Variations.Proc.London Math.Soc., vol.VII, 1.909

((2)) E. Cartan, Leçous sur les Invariants Intégraux. Paris, Hermann, 1.922.

Vamos a generalizar aquí esta propiedad para valores cualesquiera de μ y n ((3)), y ésto nos dará, al mismo tiempo, la posibilidad de generalizar el invariante integral relativo de E. Cartan. Demostraremos también que las extremales se pueden caracterizar por una propiedad análoga al "principio de la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía" de E. Cartan. Las ecuaciones canónicas de Hamilton están generalizadas por un sistema de ecuaciones diferenciales exteriores (10 de este §), en tanto que las ecuaciones de la energía se generalizan bajo la forma de un sistema de μ ecuaciones diferenciales exteriores (11). Análogamente se obtienen de una manera natural los resultados de M.Th.Lepage.

2.- TEOREMA 1.- La condición necesaria y suficiente para que una variedad V_μ de E_N sea extremal de (1) es que verifique las N ecuaciones diferenciales exteriores siguientes:

$$\frac{\partial(d\Omega)}{\partial(d\,x^a)} = (\mu + 1)\, B_{aa_1 \ldots a_\mu}\, dx^{a_1} \ldots dx^{a_\mu} = 0 \qquad (3)$$

$$(a, a_1, \ldots, a_\mu = 1, 2, \ldots N)$$

En este enunciado, $d\,\Omega = B_{aa_1 \ldots a_\mu}\, dx^a dx^{a_1} \ldots dx^{a_\mu}$ designa la diferencial exterior de la forma Ω y las B se suponen antisimétricas en los $\mu + 1$ índices $a, a_1, \ldots, a_\mu$.

Supongamos que la variedad V_μ varía en una familia dependiente de un parámetro τ y tiene una frontera fija $V_{\mu-1}$; las ecuaciones paramétricas de $V_\mu(\tau)$ se escriben $x^a = x^a(\tau, u^1, \ldots u^\mu)$: la integral I es una función I (τ) cuya derivada es:

((3)) Una generalización paralela a la de A.C.Dixon es debida a Th. De Donder y F.H.van Den Dungen: La formule fondamentale du Calcul des Variations écrite en variables canoniques. Bull.Acad. R.Belgique, Cl.Sc., t.XXXIV, 1.948. Ella no es invariante en las transformaciones en que aparecen juntas las x y las t.

$$\frac{dI}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \int_{V_\mu} \Omega = (\mu + 1) \int_{V_\mu} B_{aa_1 \ldots a_\mu} \frac{\partial x^a}{\partial \tau} dx^{a_1} \ldots dx^{a_\mu}$$

Para que una variedad sea extremal, esta derivada debe ser nula cualesquiera que sean las $\frac{\partial x^a}{\partial \tau}$, obteniéndose en consecuencia las ecuaciones (3). ((4))

La existencia de variedades integrales de μ dimensiones del sistema particular (3) está asegurada por las condiciones: 1º que los datos sean analíticos; 2º que existan elementos integrales de μ dimensiones (es decir, según Kähler que sea el número característico $r_\mu \geq 0$ ó, según Cartan, que sea el caracter $S_{\mu-1} \leq N-\mu$). En grande, dada una variedad $V_{\mu-1}$ genérica, existe bajo estas condiciones al menos una variedad integral de μ dimensiones que la contiene (y lo mismo una infinidad si $r_\mu > 0$ ó $S_{\mu-1} < N-\mu$); esto resulta por ejemplo del primer teorema de existencia de Kähler (loc.cit. p. 26).

En particular, $V_{\mu-1}$ puede ser cerrada y existirá al menos una V_μ integral, definida en su entorno.

En general, esta V_μ (que es conexa para $\mu > 1$) no puede ser prolongada en una variedad integral simplemente conexa; por ejemplo, para $\mu = 1$, por dos puntos pasa una variedad integral simplemente conexa con la condición necesaria y suficiente de que estos dos puntos pertenezcan a una misma variedad característica de $d\Omega$.

3.- Consideremos una familia regular $\mathcal{F}$ de variedades V_μ recubriendo una region R de E_N. (Se entiende por <u>familia regular</u> un

---

((4)) La teoría de las ecuaciones del tipo (3) es debida a E.Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Teubner 1.934, y a E.Cartan, Les Systémes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris, Hermann, 1.945, A.S.I. nº 994.

conjunto de variedades de dimensión μ que cumplen las propiedades siguientes:

1º)- por lo menos pasa una variedad por cada punto P_0 de R,

2º)- cada V_{μ_0} pasando por P_0 forma parte de una $V_{\mu+1}$ que admite una representación paramétrica $x^a = x^a(\tau, u^1, \dots u^\mu)$ tal que a) las funciones x^a son continuamente diferenciables, b) toda variedad τ = cte pertence a $\mathcal{F}$ y se reduce a V_{μ_0} para un cierto valor τ_0, c) los valores de las $\dfrac{\partial x^a}{\partial \tau}$ en P_0 pueden ser tomados arbitrariamente).

Designemos por $\mathcal{G}$ la familia (determinada por $\mathcal{F}$) de las variedades $V_{\mu+1}$ antes consideradas, engendradas por el desplazamiento de una $V_\mu \in \mathcal{F}$ en función de un parámetro τ ; designemos por W_μ un ciclo de μ dimensiones de una $V_{\mu+1}$, es decir una variedad cerrada de μ dimensiones sumergida en una $V_{\mu+1} \in \mathcal{G}$.

TEOREMA II.- La condición necesaria y suficiente para que una familia $\mathcal{F}$ sea una familia de soluciones de las ecuaciones (3) es que sea

$$\int_{W_\mu} \Omega = 0$$

para todo ciclo W_μ homólogo a cero en una $V_{\mu+1} \in \mathcal{G}$.

La aplicación de la fórmula de Stokes demuestra que la condición anterior equivale a establecer que la integral de $d\Omega$ extendida a un dominio cualquiera de una $V_{\mu+1} \in \mathcal{G}$ debe ser nula; por otra parte, basta considerar los paralelepípedos P infinitamente pequeños en los que una μ-cara se encuentran sobre una V_μ.

Sean $x^a = x^a(\tau, u^1, \dots, u^\mu)$ las ecuaciones de una $V_{\mu+1}$, donde las V_μ están caracterizadas por τ = cte.

Para un paralelepípedo infinitamente pequeño P, se tiene:

$$\frac{1}{\mu+1}\int_P d\Omega = \frac{\partial x^a}{\partial \tau} B_{aa_1\ldots a_\mu}\frac{\partial(x^{a_1},\ldots,x^{a_\mu})}{\partial(u^1,\ldots,u^\mu)}\, d\tau\, du^1\ldots du^\mu .$$

Esta expresión es nula si la μ-cara $d\tau=0$ verifica las ecuaciones (3). Inversamente, si esta expresión es nula cualesquiera que sean las $\frac{\partial x^a}{\partial \tau}$, esta μ-cara verifica estas ecuaciones.

Llamenos _tubo_ y designemos por $V^*_{\mu+1}$ a toda $V_{\mu+1}$ tal que el conjunto de sus $V_\mu \in \mathcal{F}$ consideradas como puntos de un espacio abstracto es homeomorfo a una circunferencia. Designemos también por $\mathcal{G}^*$ al conjunto de los _tubos_ y supongamos que la condición 2ª (verificada por las variedades de una familia regular) permanece cierta cuando se reemplaza $V_{\mu+1}$ por $V^*_{\mu+1}$. Se tiene el teorema siguiente, que recuerda mejor las propiedades del invariante integral relativo:

TEOREMA II bis.- _La condición necesaria y suficiente para que la familia $\mathcal{F}$ sea una familia de soluciones de las ecuaciones (3) es que sea_

$$\int_{W_\mu}\Omega = \int_{W'}\Omega$$

para todo par de ciclos homólogos W_μ, W'_μ en un tubo cualquiera $W_{\mu+1} \in \mathcal{G}^*$.

4.- Estudiemos seguidamente la integral múltiple

$$\int L\left(t^\alpha, x^i, \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha}\right)dt^1\ldots dt^\mu \quad \text{con} \begin{cases}\alpha = 1,2,\ldots,\mu.\\ i = 1,2,\ldots,n.\end{cases}$$

Llamaremos problema variacional (L,E) a la búsqueda de las extremales $x^i = x^i(t^\alpha)$ de esta integral en el espacio E de las $t^1,\ldots,t^\mu$, $x^1,\ldots,x^n$.

Introduzcamos el espacio $\mathcal{E}$ de las t^α, x^i, x^i_α que es un espacio fibrado de fibra (x^i_α) y de base E; la proyección $\mathcal{E} \longrightarrow E$ está definida por $(t^\alpha, x^i, x^i_\alpha) \longrightarrow (t^\alpha, x^i)$. (Siendo las considera ciones locales, los espacios fibrados considerados son productos topológicos de un espacio B, llamado espacio base, por otro espacio F, llamado fibra. Si (b,f), $b \in B$, $f \in F$ es un punto del espacio fibrado $B \times F$, su <u>proyección</u> sobre B es el punto b).

Dada una variedad V_μ $\{x^i = x^i(t^\alpha)\}$ de E, entenderemos por <u>imagen</u> de V_μ en $\mathcal{E}$ a la variedad $x^i = x^i(t^\alpha)$, $x^i_\alpha = \dfrac{\partial x^i}{\partial t^\alpha}$. Las imágenes en $\mathcal{E}$ de las variedades de E son esencialmente las integrales de las n ecuaciones de Pfaff.

$$\omega^i \equiv dx^i - x^i_\alpha \, dt^\alpha = 0 . \qquad (4)$$

Llamaremos problema variacional $(L, \mathcal{E})$ al problema de <u>extremunligado</u> que consiste en buscar en $\mathcal{E}$, entre las soluciones de las ecuaciones (4), las variedades $x^i = x^i(t^\beta)$, $x^i_\alpha = x^i_\alpha(t^\beta)$ extremales de

$$\int L\,(t^\alpha, x^i, x^i_\alpha)\, dt^1 \,\ldots\ldots\, dt^\mu$$

Naturalmente, toda extremal de (L,E) tiene por imagen una extremal de $(L,\mathcal{E})$ y toda extremal de $(L,\mathcal{E})$ es la imagen de una extremal de (L,E).

Se establecerá fácilmente el

LEMA.- <u>Las imágenes en $\mathcal{E}$ de las variedades</u> $x^i = x^i(t^\alpha)$ <u>son las soluciones</u> $x^i = x^i(t^\beta)$, $x^i_\alpha = x^i_\alpha(t^\beta)$ <u>de las ecuaciones diferenciales exteriores:</u>

$$\omega^i\, dt^2 \ldots\ldots dt^\mu = dt^1\, \omega^i\, dt^3 \ldots\ldots dt^\mu = \ldots\ldots = dt^1 \ldots\ldots dt^{\mu-1}\, \omega^i =$$
$$= \omega^i \omega^i\, dt^3 \ldots\ldots dt^\mu = dt^1\, \omega^i \omega^i dt^4 \ldots\ldots dt^\mu = \ldots\ldots = \omega^{i_1} \ldots\ldots \omega^{i_\mu} = 0$$

Para simplificar los cálculos, supondremos de aqui en adelante $n = \mu = 2$, si bien todos los resultados se extienden al caso general. Las ecuaciones precedentes se reducen entonces a

$$\omega^i\, dt^2 = dt^1\, \omega^i = \omega^1 \omega^2 = 0.$$

El método de los multiplicadores de Lagrange nos sugiere la idea de buscar las extremales de la integral

$$\int \Theta = \int L dt^1 dt^2 + L_i^1 \omega^i dt^2 + L_i^2 dt^1 \omega^i + \tfrac{1}{2} \lambda_{ij} \omega^i \omega^i, (\lambda_{ij} + \lambda_{ji} = 0)$$

en el espacio $\mathcal{E}^*$ de las t^α, x^i, x^i_α, L_i^α, $\lambda (= \lambda_{12} = -\lambda_{21})$ y estudiar su proyección sobre el espacio E. La aplicación del teorema I conduce, entre otras, a las ecuaciones:

$$\frac{\partial(d\Theta)}{\partial(dx^i_\alpha)} \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial x^i_\alpha} - L_i^\alpha\right) dt^1\, dt^2 + \lambda_{ij} \omega^i\, dt^\alpha = 0$$

$$\frac{\partial(d\Theta)}{\partial(d\lambda_{ij})} \equiv \tfrac{1}{2} \omega^i \omega^i = 0, \quad \frac{\partial(d\Theta)}{\partial(dL_i^\alpha)} \equiv \pm \omega^i\, dt^\alpha = 0$$

lo que da, si $\dfrac{\partial L}{\partial x^i_\alpha} \neq L_i^\alpha$,

$$dt^1\, dt^2 = dx^i\, dt^\alpha = dx^1\, dx^2 = 0$$

En otros términos, la hipótesis $\dfrac{\partial L}{\partial x^i} \neq L_i^\alpha$ implica que las extremales en $\mathcal{E}^*$ se proyectan según curvas o puntos de E.

El único caso interesante está pues caracterizado por $L_i^\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial x^i_\alpha}$. Esto nos lleva a considerar finalmente el espacio $\tilde{\mathcal{E}}$ de las variables t^α, x^i, x^i_α, $\lambda (= \lambda_{12} = -\lambda_{21})$ que es un nuevo espacio fibrado a la vez sobre $\mathcal{E}$ (fibra $[\lambda]$), y sobre E (fibra $[x^i_\alpha, \lambda]$). En este espacio estudiaremos el problema de <u>extremun</u> <u>libre</u> (problema $[L, \tilde{\mathcal{E}}]$)

$$\delta \int \Omega = 0, \quad \Omega = L dt^1 dt^2 + \frac{\partial L}{\partial x^i_1} \omega^i\, dt^2 + \frac{\partial L}{\partial x^i_2} dt^1 \omega^i + \tfrac{1}{2} \lambda_{ij} \omega^i \omega^i.$$

(Esta forma Ω es la que ha sido considerada por primera vez por Th. Lepage ((5)), en el estudio de los campos geodésicos como solución

---

((5)) Ver Th.Lepage: <u>Sur les champs géodésiques des intégrales multiples</u>, Bull. Acad. R. Belg., t.XXII (1936); <u>Sur les champs géodésiques des intégrales multiples</u>, ibid. t.XXVII (1941); <u>Champs stationnaires, champs géodésiques et formes intégrables</u>, ibid. t. XXVIII (1.942)

La idea de considerar las funciones arbitrarias de Th. Lepage como nuevas variables independientes habia sido formulada por P.V. Paquet: <u>Les formes différentielles Ω dans le Calcul des Variations</u>, ibid. t. XXVII (1.941) de las congruencias $\Omega \equiv L\, dt^1\, dt^2$, $d\,\Omega \equiv 0$ (mód. ω^i). El considerable λ como función arbitraria de las t^α, x^i, x^i_α, mientras que nosotros consideramos este parámetro como una variable suplementaria. Para M. Th. Lepage había allí un haz de formas Ω definidas en el espacio $\mathcal{E}$; para nosotros hay una sola forma Ω definida en el espacio $\tilde{\mathcal{E}}$).

El teorema I nos da primeramente las ecuaciones.

$$\frac{\partial(d\Omega)}{\partial(d\lambda)} \equiv \omega^1 \omega^2 = 0,$$

$$\frac{\partial(d\Omega)}{\partial(dx^i_\alpha)} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial x^j_1 \partial x^i_\alpha}\omega^j\, dt^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x^j_2 \partial x^i_\alpha}\, dt^1 \omega^j + \lambda_{ij}\, dt^\alpha \omega^j = 0$$

cuyo segundo grupo constituye un sistema de cuatro ecuaciones lineales homogéneas de las $\omega^i\, dt^\alpha$ cuyo determinante es el hessiano

$$\Delta = \left| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^i_\alpha \partial x^j_\beta} \right|$$

de la función $\mathcal{L} = L - \lambda_{ij}\, x^i_1\, x^j_2$. Para $\Delta \neq 0$ se tiene, pues:

$$\omega^i\, dt^\alpha = \omega^1 \omega^2 = 0. \qquad (5)$$

En virtud del Lema, las extremales verifican pues las ecuaciones (4) y por consiguiente también las ecuaciones $d\omega^i = 0$.

Teniendo en cuenta ésto, las ecuaciones

$$\frac{\partial(d\Omega)}{\partial(\omega^i)} = 0 \quad \text{se reducen a las}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}\, dt^1\, dt^2 - d\,\frac{\partial L}{\partial x^i_1}\, dt^2 - dt^1\, d\,\frac{\partial L}{\partial x^i_2} = 0, \qquad (6)$$

correspondientes a las ecuaciones habituales de Euler - Lagrange. En cuanto a las ecuaciones $\frac{\partial(d\Omega)}{\partial(dt^\alpha)} = 0$, sus primeros miembros son nulos módulo ω^i; son pues, consecuencia de (4).

Hagamos notar tambien que estas ecuaciones no hacen intervenir las λ_{ij}. Podemos enunciar el teorema siguiente:

TEOREMA III.- <u>Las extremales del problema $(L, \tilde{\mathcal{E}})$ están definidas por las ecuaciones diferenciales exteriores (4) y (6) a condición de que $\Delta \neq 0$ en cada uno de sus puntos. Si se tiene una extremal $x^i = x^i(t^\beta)$, $\lambda = \lambda(t^\beta)$, se obtiene otra reemplazando λ por una función arbitraria de las t^α con tal que Δ permanezca distinto de cero. Todas las extremales asi obtenidas se proyectan sobre $\mathcal{E}$ según una extremal fija del problema $(L, \mathcal{E})$ que también es imagen de una extremal del problema (L,E). Las variedades integrales generales de dimensión máxima del sistema (4),(6) son las imágenes recíprocas completas de las superficies extremales del espacio $\mathcal{E}$.</u>

(Por imagen recíproca completa de un conjunto β de puntos de la base de un espacio fibrado, se entiende el conjunto de puntos del espacio fibrado que se proyecta en los puntos de β).

5.- Para introducir las variedades canónicas y una función hamiltoniana, haremos un cambio de coordenadas en la fibra (x^i_α, λ) del espacio $\tilde{\mathcal{E}}$ considerado como fibra sobre E. Para ésto, comencemos por reemplazar en Ω las ω^i por su valor en función de las dx^i, dt (en otras palabras, escribamos Ω en la base dx^i, dt^α) y por convención pongamos $t^1 = x^3$, $t^2 = x^4$; tenemos encontes

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\lambda_{ij}\, dx^i dx^j + \left(\frac{\partial L}{\partial x^i_1} - \lambda_{ij}\, x^j_2\right) dx^i\, dx^4 + \left(\frac{\partial L}{\partial x^i_2} + \lambda_{ij}\, x^j_1\right) dx^3 dx^i +$$

$$+ \left(L - \frac{\partial L}{\partial x^i_\alpha}\, x^i + \lambda_{ij}\, x^i_1\, x^j_2\right) dx^3\, dx^4$$

Pongamos ahora:

$$P_{i4} = \frac{\partial L}{\partial x^i_1} - \lambda_{ij}\, x^j_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{x^i_1}, \qquad P_{3i} = \frac{\partial L}{\partial x^i_2} + \lambda_{ij}\, x^j_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i_2} \qquad (7)$$

$$P_{12} = \lambda = -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^1_1\, \partial x^2_2}\ ; \quad H = \frac{\partial L}{\partial x^i_\alpha}\, x^i_\alpha - L - \lambda_{ij}\, x^i_1\, x^j_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{x^i}\, x^i - \mathcal{L}$$

(donde $\mathcal{L} = L - \lambda_{ij}\, x^i_1\, x^j_2 = L - \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}_{ij}\, x^i_\alpha\, x^j_\beta$).

En el caso de n y μ cualesquiera, se pondrá: $x^{n+\alpha} = t^\alpha$ y se introducirán las variables canónicas $P_{(r_1,\dots,r_\mu)}$ $(r_\alpha = 1,\dots,n+\mu)$, los paréntesis indican que se evitan las combinaciones de indices en que todas las $r_\alpha > n$) que son expresiones lineales en los menores de orden 1,2,...,t-1, $[t = \text{mín.}(n,\mu)]$ de la matriz (x^i_α); la función H será lineal en los menores hasta el orden t inclusive.
Mediante la (7) se tiene pues

$$\Omega = \frac{1}{2} P_{(rs)}\, dx^r\, dx^s - H\, dx^3\, dx^4, \quad (r,s = 1,2,3,4).$$

Solo están definidos los P_{12}, P_{i4}, P_{3i}; sin embargo, para tener más simetría se hacen a veces intervenir los símbolos P_{21}, P_{4i}, P_{i3} que no designan nuevas variables sinó que son puestos en lugar de $-P_{12}$, $-P_{i4}$, $-P_{3i}$. Los paréntesis en la notación $P_{(rs)}$ indican que no se deben utilizar las combinaciones 34 y 43. Se pondrá, igualmente

$$\partial/\partial P_{21} = -\partial/\partial P_{12}, \text{ etc.}$$

La transformación $(x^i_\alpha, \lambda) \longrightarrow (P_{(rs)})$ generaliza la transformación de Legendre para las integrales simples y es inversible si el hessiano $\Delta \neq 0$. En esta hipótesis, la función H es

$$H = H\,(x^r, P_{(rs)});$$

diremos que las $P_{(rs)}$ son las <u>variables canónicas</u> y que H es la <u>función hamiltoniana</u>.

La transformación inversa $(P_{(rs)}) \longrightarrow (x^i_\alpha, \lambda)$ se escribe

$$\lambda = P_{12}, \quad x^i_1 = \frac{\partial H}{\partial P_{i4}}, \quad x^i_2 = \frac{\partial H}{\partial P_{34}} \qquad (8)$$

y se tiene, además, la identidad

$$\frac{\partial H}{\partial P_{12}} + \frac{\partial H}{\partial P_{13}}\,\frac{\partial H}{\partial P_{42}} + \frac{\partial H}{\partial P_{14}}\,\frac{\partial H}{\partial P_{23}} = 0 \qquad (9)$$

Para demostrarlo se identifican los coeficientes de las diferenciales en

$$dH = x^i_\alpha \quad d\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{\partial H}{\partial P_{(rs)}} dP_{(rs)}, \quad (dx^r=0).$$

<u>Observación</u>.- En el caso $\mu=1$, la función H está definida cuando se da un elemento de contacto lineal del espacio y el lugar de estos elementos de contacto es el espacio $\tilde{\mathcal{E}}$. Aquí el espacio $\tilde{\mathcal{E}}$ es más amplio que el espacio de elementos de contacto bidimensionales de E y la función H no tiene un valor determinado para un tal elemento de contacto. Esta indeterminación inherente a la naturaleza del problema está compensada por la ecuación en las derivadas parciales (9) que no tiene nada de análogo cuando $\mu = 1$.

En el caso general, n y μ cualesquiera, la función H es - solución de varias ecuaciones en derivadas parciales.

6.- Las ecuaciones obtenidas anulando la primera variación de

$$\int \Omega = \int \tfrac{1}{2} P_{(rs)}\, dx^r\, dx^s - H\, dx^3\, dx^4$$

son necesariamente equivalentes a las ecuaciones (4) y (6). Se obtiene el sistema

$$dx^r\, dx^s = \frac{\partial H}{\partial P_{(rs)}} dx^3\, dx^4, \quad dP_{ir}\, dx^r = -\frac{\partial H}{\partial x^i} dx^3\, dx^4, \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} &d\, P_{3i}\, dx^i - (d\, H - \frac{\partial H}{\partial x^3} dx^3)\, dx^4 = 0 \\ &d\, P_{4i}\, dx^i + (d\, H - \frac{\partial H}{\partial x^4} dx^3)\, dx^3 = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

Las ecuaciones (10) generalizan las ecuaciones canónicas de Hamilton. En cuanto a las (11), generalizan la ecuación de la energía.

$$dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt = 0$$

que, como se sabe, proviene de las ecuaciones canónicas.

Vamos a establecer el

TEOREMA IV.- <u>Las ecuaciones</u> (11) <u>son consecuencia de las</u> (10).

Observemos primeramente que el primer grupo de las ecuaciones (10) puede escribirse

$$dx^{\alpha}\bar{\omega}^{i} = 0, \quad \bar{\omega}^{i} = dx^{i} - \frac{\partial H}{\partial P_{i4}}\, dx^{3} - \frac{\partial H}{\partial P_{3i}}\, dx^{4}, \qquad \begin{matrix} i = 1,2 \\ \alpha = 3,4 \end{matrix} \qquad (12)$$

$$dx^{1}\, dx^{2} - \frac{\partial H}{\partial P_{12}}\, dx^{3}\, dx^{4} = 0.$$

Igualmente que el lema (nº 4), se demuestra que toda superficie integral general verifica necesariamente las ecuaciones $\bar{\omega}^{i} = 0$. Por otra parte, en virtud de (9), la ecuación (13) puede escribirse $\bar{\omega}^{1}.\bar{\omega}^{2} = 0$.

El teorema se demuestra entonces desarrollando dH en los primeros miembros de (11) y eliminando las dx^{i} con ayuda de las $\bar{\omega}^{i} = 0$. Teniendo en cuenta entonces el segundo grupo de las ecuaciones (10), una nueva eliminación de las dx^{i} nos da el resultado buscado. Por ejemplo, el primer miembro de la ecuación (11) es sucesivamente igual a

$$\frac{\partial H}{\partial P_{i4}}\,(-\,dP_{i\alpha}\, dx^{\alpha}) - \frac{\partial H}{\partial P_{12}}\, dP_{12} dx_{4} - \left(\frac{\partial H}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial H}{\partial P_{i4}}\right) dx^{3}\, dx^{4} =$$

$$= \frac{\partial H}{\partial P_{14}}\, dP_{12}\, dx^{2} - \frac{\partial H}{\partial P_{24}}\, dP_{12} dx^{1} - \frac{\partial H}{\partial P_{12}}\, dP_{12}\, dx^{4} =$$

$$= -\left(\frac{\partial H}{\partial P_{12}} + \frac{\partial H}{\partial P_{13}}\,\frac{\partial H}{\partial P_{42}} + \frac{\partial H}{\partial P_{14}}\,\frac{\partial H}{\partial P_{23}}\right) d\, P_{12}\, dx^{4},$$

que, en virtud de (9), es idénticamente nulo.

7.- A partir del teorema II, la generalización del invariante integral relativo y del principio de la conservación de la cantidad de movimiento y la energía es inmediata.

TEOREMA V.- Sea $\mathcal{F}$ una familia regular de superficie V_2 recubriendo una región del espacio $\tilde{\mathcal{E}}$ de las x^r, $P_{(rs)}$. Sea $\mathcal{G}$ el conjunto de las V_3 engendradas por ∞^1 V_2. Si las $V_2 \in \mathcal{F}$ son extremales, se tiene

$$\int_{W_2} \Omega = \int_{W_2} \tfrac{1}{2} P_{(rs)}\, dx^r\, dx^s - H\, dx^3\, dx^4 = 0$$

para todo ciclo W_2 homólogo a cero en una $V_3 \in \mathcal{G}$. Recíprocamente, si todo ciclo W_2 homólogo a cero en una $V_3 \in \mathcal{G}$ da lugar a la relación (14), la familia $\mathcal{F}$ es una familia de extremales.

8.- A fin de esclarecer el papel de la variable complementaria λ y de la ecuación en derivadas parciales (9), pasemos de las coordenadas no homogéneas x^j_α de los elementos de contacto bidimensionales de E a las coordenadas plückerianas homogéneas P^{rs} definidas por las fórmulas

$$\frac{P^{34}}{1} = \frac{P^{14}}{x^1_1} = \frac{P^{24}}{x^2_1} = \frac{P^{31}}{x^1_2} = \frac{P^{32}}{x^2_2} = \frac{P^{12}}{x^2_1\, x^1_2 - x^2_1\, x^1_2} \qquad (15)$$

ligadas por la relación

$$\varphi = P^{12}\, P^{34} + P^{13}\, P^{42} + P^{14}\, P^{23} = 0$$

La integral $\int L\left(t^\alpha, x^i, \frac{\partial x^i}{\partial t}\right) dt^1\, dt^2$ tiene que ser sustituida por la integral paramétrica

$$\int \mathcal{L}\left(x^r, \frac{(x^r, x^s)}{(u,v)}\right) du\, dv,$$

donde la integral está extendida a la superficie $x^r = x^r(uv)$ y la función $\mathcal{L}$, homogénea de primer grado en las P^{rs}, está definida por

$$\mathcal{L} = P^{34}\, L\left(x^r, \frac{P^{14}}{P^{34}}\ \frac{P^{31}}{P^{34}}\ \frac{P^{24}}{P^{34}}\ \frac{P^{32}}{P^{34}}\right).$$

Esta se puede reemplazar evidentemente, por toda función $\mathcal{L}^*$ idéntifica a $\mathcal{L}$ sobre $\varphi = 0$, es decir, por toda función del tipo

$$\mathcal{L}^* \equiv \mathcal{L} + \frac{\lambda}{p^{34}} \varphi$$

donde λ es una <u>función</u> arbitraria de las x^r, p^{rs} ((6)). No es necesario suponer que λ es homogénea y de grado cero en las P', es suficiente que $\mathcal{L}^*$ sea homogénea sobre $\varphi = 0$.

No es necesario decir que se hace sobre las p^{rs} un convenio análogo al que hicimos sobre las $P_{(rs)}$; toda vez que las combinaciones rs = 34 ó 43 no están excluidas.

Si consideramos λ como <u>variable</u> suplementaria y si escribimos

$$\Omega = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial p^{rs}} dx^r dx^s \qquad (\text{mód. } \varphi)$$

se comprueba fácilmente que esta forma Ω es idéntica a la considerada precedentemente.

9.- Considermos el espacio afin central A_6 de variables p^{rs} en el cual representamos por P_{rs} las coordenadas (no homogéneas) de un hiperplano (la ecuación del hiperplano es $P_{rs}p^{rs} = 1$)

Consideremos en A_6 la variedad de cuatro dimensiones I_4 definida por las ecuaciones

$$\mathcal{L}(p^{rs}) = 1 , \quad \varphi = 0 \qquad (16).$$

El conjunto de elementos de contacto formados por un punto de I_4 y un hiperplano tangente en este punto, constituye una multiplicidad $\mathfrak{J}_5$ de cinco dimensiones cuya base puntual está definida por (16) y cuya base tangencial J_5 es una hipersuperficie del espacio A_6'

((6)) Ver para este objeto R.Debever: <u>Sur une classe d'espaces a connexión enclidienne</u>, Bruxelles, Hayez (1.947, p.23.

de las $P_{(rs)}$ (dual de A_6) ((7))

Este soporte tangencial puede ser definido paramétricamente por

$$P_{rs} = \frac{\partial \mathcal{L}^*}{p^{rs}} \qquad (\text{mód. } \varphi)$$

o por una ecuación

$$\mathcal{H}(P_{rs}) = 1 \qquad (17)$$

donde la función $\mathcal{H}$ puede, sin inconveniente, suponerse homogénea y de grado uno en las P_{rs}.

(En virtud de un teorema de R. Debever (loc. cit.p.93) el hessiano $\left| \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial P_{rs} \partial P_{tn}} \right|$ de esta función es a lo más igual a cuatro y se puede comprobar que siempre es, efectivamente, igual a este número).

El soporte puntual admite, a su vez, la representación paramétrica

$$p^{rs} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{rs}} ,$$

de donde se sigue que la función $\mathcal{H}$ verifica la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{12}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{34}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{13}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{42}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{14}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{23}} = 0. \qquad (18)$$

La hipersuperficie J_5 de A_6' es <u>reglada</u>, correspondiendo cada generatriz d al haz α de los hiperplanos tangentes en un punto P de I_4. Recíprocamente, el hiperplano tangente a J_5 en un punto variable sobre la generatriz d corresponde al punto de contacto fijo P del haz α. Este hiperplano es, pues, también fijo y J_5 es, por consiguiente, una hipersuperficie <u>desarrollable</u>; ésta posee una arista de retroceso, lugar de los puntos donde el hiperplano tangente es inde-

---

((7)) Para la geometría de multiplicidades se puede consultar E. Vessiot: <u>Sur la théorie des multiplicités et le calcul des variations</u>, Bull.Soc. Math. France, t.40 (1912).

terminado ($\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{rs}} = 0$).

Está claro que se puede interpretar el espacio $\tilde{\mathcal{E}}$ como un espacio E fibrado con ayuda de una J_5 asignada a cada uno de sus puntos (con la diferencia que asi se introducen nuevos puntos correspondientes a $P^{34} = 0$ y que estaban excluidos al principio de este estu-- dio por la consideración de coordenadas no homogéneas x^i_α). Se conprueba fácilmente que los puntos singulares de $\tilde{\mathcal{E}}$, caracterizados por $\Delta = 0$, son los de la arista de retroceso de la fibra J_5; se ve, al mismo tiempo, que la arista de retroceso encuentra a cada generatriz d de J_5 en cuatro puntos.

Fuera de éstos puntos, se puede resolver la ecuación (17) con relación, por lo menos, a una de las P_{rs}; por ejemplo, si $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{34}} = P^{34} \neq 0$, se podrá resolver con relación a P_{34} y la solución será:

$$P_{34} = - H\,(x^r, P_{(rs)})$$

donde H es la función hamiltoniana introducida en el nº 5. La ecuación (9) aparece, entonces, como consecuencia de (18).

10.- Terminaremos con la observación siguiente: Numerosos autores han intentado eliminar la indeterminación debida al parámetro λ reemplazándola por una función convenientemente elegida de las ($t^\alpha, x^i, x^i_\alpha$) o de las ($P^{rs}$).((8))

((8)) En el método de De Donder-Weyl, se hace $\lambda = 0$, Th. De Donder: Théorie invariantive du Calcul des Variations, Paris, Gauthier-Villars, 1953; H. Weye: Geodosic fields in the calculus of variations multiple integrales, Ann. Math., vol. 36 (1935).
El método de C. Caratheodory consiste en hacer una elección tal que la forma Ω sea simple (cfr Th. Lepage, loc. cit.; R. Debever, loc. cit).
V. Wagner hace en la clase $\mathcal{L}^*$ una elección semejante que se puede caracterizar de la manera siguiente: la función $\mathcal{L}^*$ verifica la ecuación $\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial P^{12}} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial P^{34}} + \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial P^{13}} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial P^{42}} + \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial P^{14}} \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial P^{23}} = 0$;
V. Wagner: Geometry of a space with an areal metric and its applications tothe calculus of variations, Mat. Sbornik, t. 19 (61) (1946); On a sufficient condition in the Problem of Lagrange for multiple integrals, C.R. Acad. Sc. U.R.S.S., t. LIV, nº6 (1945).
Para esta elección, véase igualmente H. Kneser: Homogene Funktionen auf der grassmannschen Mannig faltigkeit, Bull. Soc. Math. Grece, t. 20, 1940.

Nosotros creemos preferible asignar a un problema variacional , puesto bajo forma paramétrica ,una clase de funciones $\mathcal{L}^*$ que se identifiquen entre sí sobre la variedad $\varphi = 0$, es decir, un elemento del cociente de un anillo de funciones por un cierto ideal de este anillo. Por el contrario, se le puede asociar una función $\mathcal{H}$ unívocamente determinada (nuestra función $\mathcal{H}$ es idéntica a la función $\dot{\varphi}$ de V. Wagner) pero sujeta a verificar una ecuación en derivadas parciales (en el caso de μ y n cualesquiera, un sistema de ecuaciones en derivadas parciales).

<u>No hay, pues, una dualidad perfecta entre las variables p^{rs} y P_{rs}</u>

+++++++++++++oOo+++++++++++++