

MARÍA TRINIDAD PÉREZ LÓPEZ

**HARMONICIDADE  
E  
GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA**

**90**

**1998**

Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología

---

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

# HARMONICIDADE

## E

# XEOMETRÍA SIMPLÉCTICA

María Trinidad Pérez López

Memoria realizada no departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección da profesora María Elena Vázquez Abal, para obter o grao de licenciada en Ciencias Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

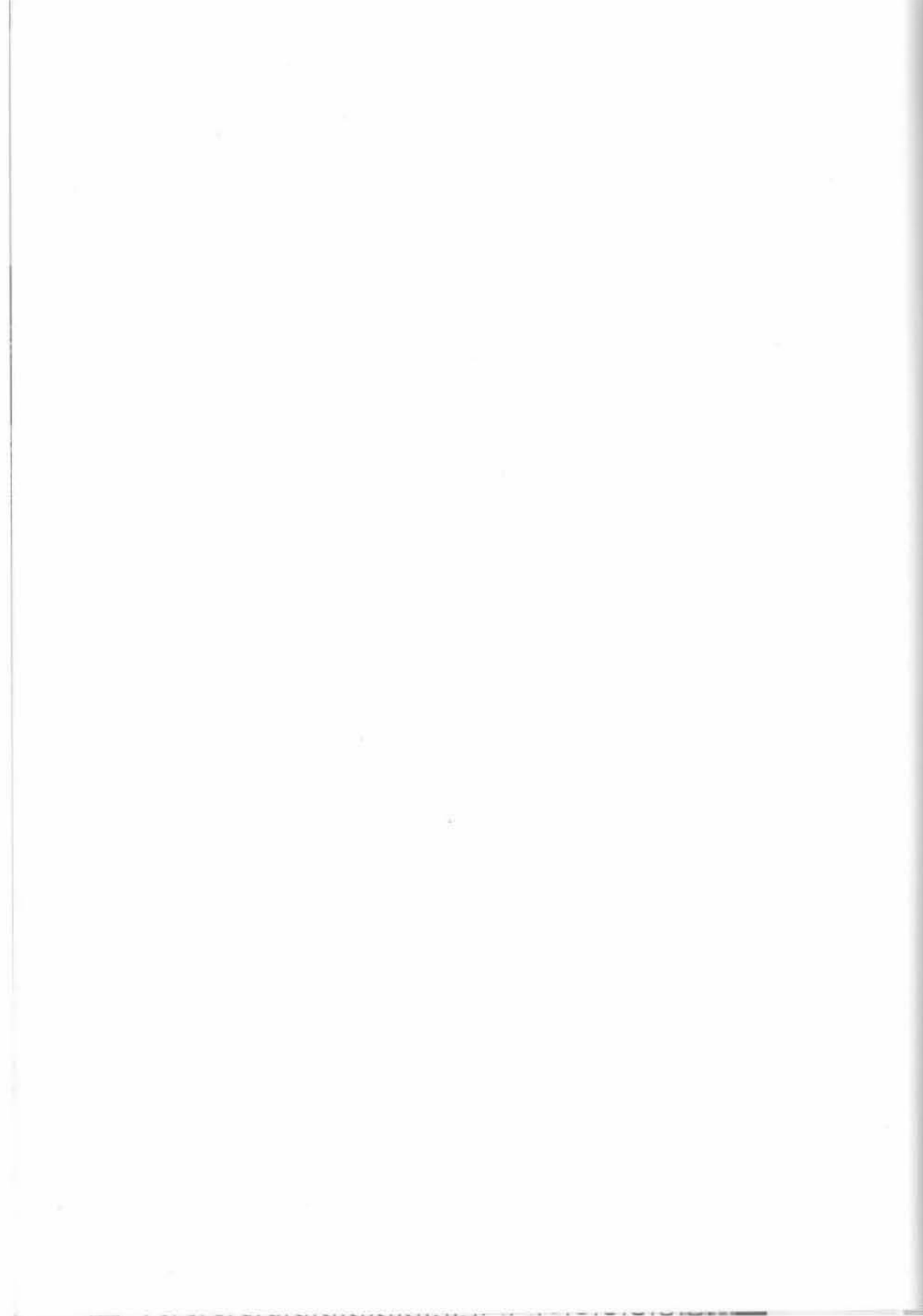
Santiago de Compostela, 25 de novembro de 1997

Asdo: María Elena Vázquez Abal



Imprime:  
Imprenta Universitaria  
Campus universitario sur  
Santiago de Compostela  
Dep. Legal C-696/98  
ISBN 84-89390-07-x

*Ós meus pais*



# Agradecementos

Quero amosa-lo meu principal agradecemento á profesora María Elena Vázquez Abal, que dirixiu esta tesina; sen a súa dirección científica e xenerosa dedicación, nunca se tería levado a cabo.

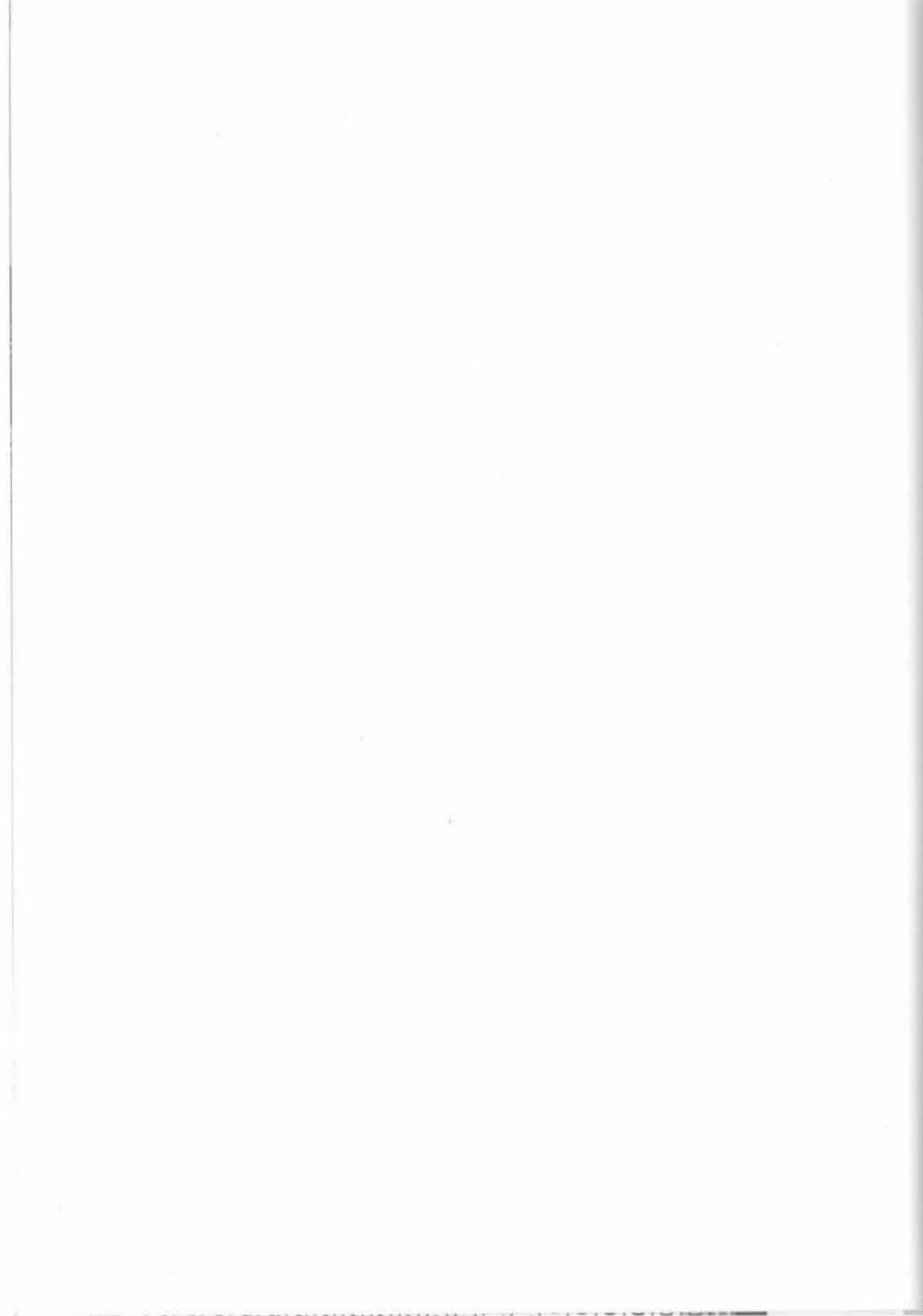
Ó mesmo tempo quero agradecer tamén a colaboración do profesor Eduardo García Río, que foi decisiva na elaboración deste traballo.

Importante foi tamén a axuda prestada polos profesores: Felipe Gago Couso, Modesto Salgado Seco e Luis M. Hervella Torrón, pola parte que á revisión e material prestado se refire.

En xeral fago extensivo o meu agradecemento a tódolos compoñentes do Departamento de Xeometría e Topoloxía polo insuperable ambiente de apoio e colaboración, así como polas oportunidades brindadas.

A Manuel Calaza Cabanas e Ramón Vázquez Lorenzo agradezo sinceramente o seu compañeirismo e consellos.

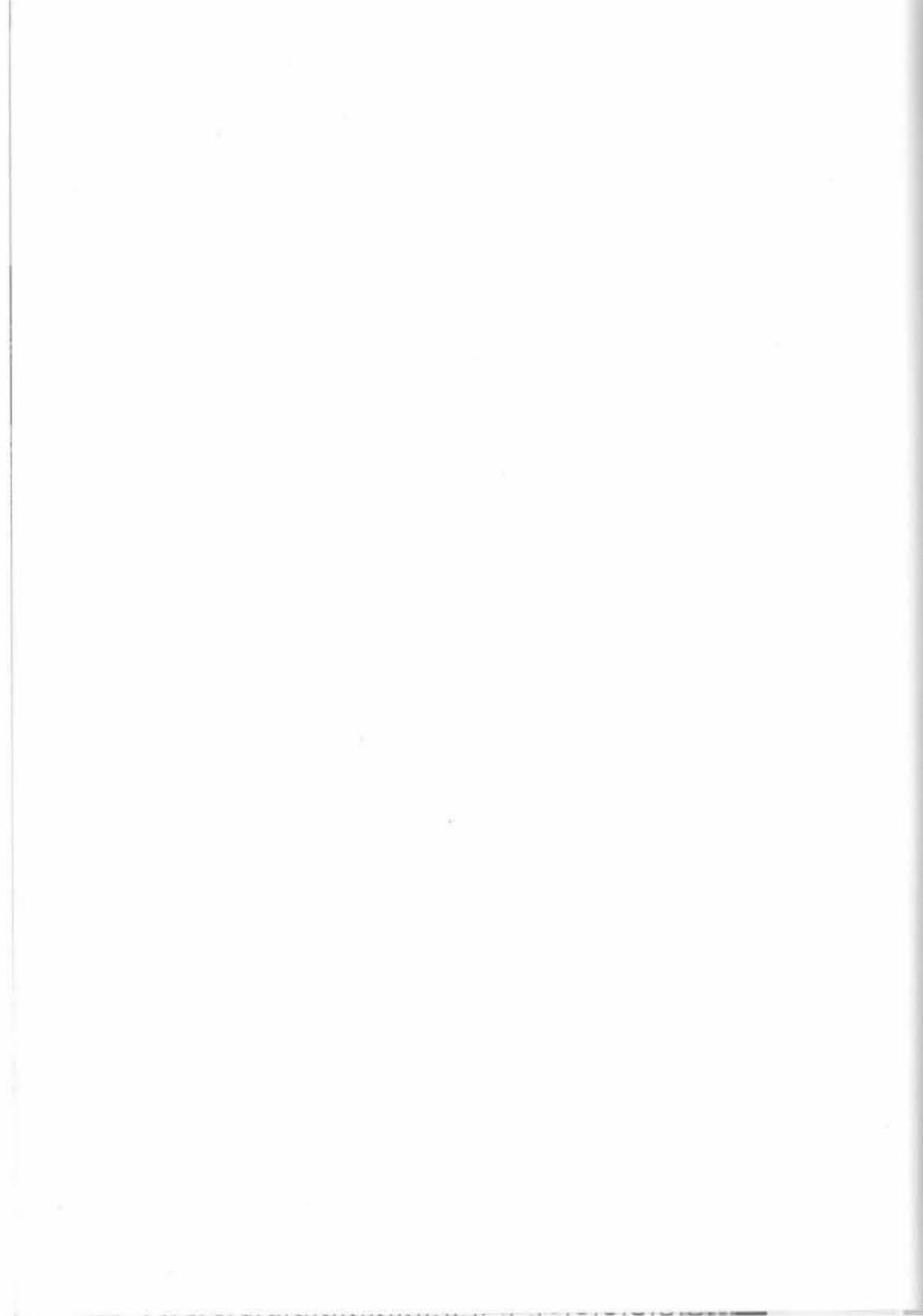
Non esquenzo tampouco ós meus compañeiros de promoción, da especialidade de Matemática Aplicada (moi en especial a María del Pilar Salgado Rodríguez), pola axuda prestada na utilización do  $\text{\TeX}$ .



# Contidos

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1	Métrica levantamento completo en $TM$ . . . . .	1
1.2	Extensión de Riemann en $T^*M$ . . . . .	4
1.3	Isomorfismos musicais . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Harmonicidade</b>	<b>9</b>
2.1	Campos de vectores e 1-formas que definen seccións harmónicas . . . . .	10
2.2	Campos de tensores de tipo $(1, 1)$ e $(0, 2)$ harmónicos . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Xeometría simpléctica</b>	<b>15</b>
3.1	Estructura simpléctica canónica do fibrado cotanxente . . . . .	15
3.2	Estructura simpléctica asociada a unha métrica no fibrado tanxente . . . . .	18
3.3	Harmonicidade das estruturas simplécticas . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Sistemas hamiltonianos e lagranxianos</b>	<b>25</b>
4.1	Sistemas hamiltonianos . . . . .	25
4.2	Sistemas lagranxianos . . . . .	26
4.3	Modelos matemáticos . . . . .	30
4.4	Transformación de Legendre . . . . .	33
4.4.1	Exemplos de transformacións de Legendre . . . . .	40
4.5	Transformación de Hamilton . . . . .	50
4.5.1	Exemplos de transformacións de Hamilton . . . . .	54





# Introducción

O estudio da xeometría diferencial dos fibrados tanxentes comezou a principios dos anos 60 con E. T. Davis, P. Dombroski, A.J. Ledger, M. Okuma, S. Sasaki, S. Tachubana e K. Yano ([26], [5], [6], [18], [24], [22], [23]).

S. Kobayashi e K. Yano ([28], [29], [30]) desenvolveron a teoría de levantamentos verticais e completos de campos de tensores e conexións nos fibrados tanxentes, e K. Yano e S. Ishihara ([27]), a teoría de levantamentos horizontais.

O estudio de levantamentos verticais, completos e horizontais de campos de tensores e conexións nos fibrados cotanxentes foi feito por E.M. Patterson e K. Yano ([32], [33]).

Dada unha variedade (semi-)riemanniana,  $(M, g)$ , denotamos por  $TM$  o seu fibrado tanxente, que equiparemos coa métrica semi-riemanniana  $g^C$ , levantamento completo de  $g$ .

Patterson e Walker ([20]) construíron unha métrica semi-riemanniana no fibrado cotanxente,  $T^*M$ , dunha variedade que posuía unha conexión afín e simétrica,  $\nabla$ , denotada por  $g_\nabla$ . Temos así dúas variedades semi-riemannianas:  $(TM, g^C)$  e  $(T^*M, g_\nabla)$ , coas que traballaremos nesta memoria.

É sabido que estas dúas variedades se poden relacionar mediante os isomorfismos musicais *bemol* :  $\flat$  e *díese* :  $\sharp$ . No capítulo 1 probamos que estes dous isomorfismos definen isometrías entre ámbalas dúas variedades.

Por outra banda, sexan  $(M, g)$  e  $(N, h)$  dúas variedades (semi-)riemannianas e  $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$  unha aplicación diferenciable de  $M$  en  $N$ . A derivada covariante da diferencial,  $\nabla df$ , é unha forma bilineal simétrica sobre  $TM$  que recibe o nome de *segunda forma fundamental de  $f$* . A traza respecto de  $g$  é o *campo de tensión* de  $f$  e denótase por  $\tau(f)$ .

A aplicación  $f$  dise harmónica se  $\tau(f) = 0$ , e totalmente xeodésica se  $\nabla df = 0$ . En termos físicos, imaxinemos que  $M$  está feita de *goma* e  $N$  de *mármore*, entón a aplicación  $f$  obriga a  $M$  a cingirse a  $N$ . Así, para cada punto  $x \in M$ , existe un vector  $\tau(f)(x)$  no punto  $f(x) \in N$  representando a tensión da goma neste punto. Polo tanto,  $f$  é harmónica se e soamente se  $f$  fai que  $M$  se axuste a  $N$  en posición de equilibrio elástico.

Exemplos de aplicacións harmónicas son as isometrías entre variedades de Riemann, as inmersións minimais e as xeodésicas, como aplicacións de  $\mathfrak{R}$  nunha variedade  $M$ .

Este concepto de harmonicidade esténdese a campos de vectores ([19]). Así diremos que un campo de vectores  $X$  sobre unha variedade semi-riemanniana  $M$  é harmónico se é harmónica a sección:

$$\sigma_X : (M, g) \rightarrow (TM, g^C).$$

Utilizando os isomorfismos musicais pódese establecer tamén cando unha 1-forma sobre unha variedade semi-riemanniana é harmónica, tal como se expón no capítulo 2 desta memoria.

Por último, o concepto de harmonicidade é tamén aplicado a campos de tensores de tipo  $(1, 1)$  e de tipo  $(0, 2)$ . Aparecen no capítulo 2 máis detalles e referencias.

Consideramos tamén o concepto de variedade simpléctica. Isto é, unha variedade diferenciable  $M$  dotada dunha estrutura simpléctica  $\omega$ .

En particular, se  $M$  é unha variedade diferenciable, o seu fibrado cotanxente,  $T^*M$ , pode ser dotado dunha estrutura simpléctica canónica. A 2-forma canónica constrúese a partir da 1-forma de Liouville:

$$\lambda_0 : T^*M \rightarrow T^*(T^*M).$$

No fibrado tanxente a unha variedade diferenciable non é posible, nem-bargantes, construír unha estrutura simpléctica canónica. O que si se pode facer é dotar ó fibrado tanxente dunha estrutura simpléctica asociada a unha métrica  $g$  sobre  $M$ . Esta estrutura simpléctica fórmase a partir do isomorfismo bemol e da forma simpléctica canónica do fibrado cotanxente.

Probamos no capítulo 3 que o campo de Liouville define unha sección totalmente xeodésica do fibrado:

$$\pi_C : (T(TM), (g^C)^C) \longrightarrow (TM, g^C),$$

así como a forma de Liouville define unha sección totalmente xeodésica do fibrado:

$$\pi_\nabla : (T^*(T^*M), (g_\nabla)_\nabla) \longrightarrow (T^*M, g_\nabla).$$

Probamos tamén que a 2-forma simpléctica canónica,  $\omega_0$ , do fibrado cotanxente é unha 2-forma harmónica en  $(T^*M, g_\nabla)$ , e a 2-forma simpléctica,  $\Omega_0$ , asociada a unha variedade de Riemann  $(M, g)$  é harmónica en  $(TM, g^C)$ .

Asemade vemos que estas 2-formas son harmónicas en senso clásico, isto é:  $\Delta\Omega_0 = 0$ ,  $\Delta\omega_0 = 0$ , sendo  $\Delta$  o operador de Laplace-de Rham.

Por último, a parte central deste traballo atópase no capítulo 4. Este está dedicado ó estudio de sistemas hamiltonianos e lagranxianos particulares. Considerámo-lo Lagranxiano  $L : TM \rightarrow \mathfrak{R}$ , a aplicación:

$$\begin{aligned} FL : TM &\rightarrow T^*M, \\ X_q &\mapsto FL_q(X_q) \in T_q^*M, \end{aligned}$$

chámase derivada fibrada de  $L$  ou transformación de Legendre.

Cando  $FL$  é un difeomorfismo local (equivalentemente,  $L$  é un Lagranxiano regular), entón podemos construír unha forma simpléctica sobre  $TM$  do xeito seguinte:

$$\omega_L = (FL)^*\omega_0.$$

Se  $FL$  é difeomorfismo (o que significa que  $L$  é un Lagranxiano hiperregular), entón é posible unha transición entre a formulación lagranxiana e a hamiltoniana. Para o proceso inverso defínese o concepto análogo de Hamiltoniano hiperregular e maila transformación de Hamilton:

$$\begin{aligned}
 FH: T^*M &\rightarrow TM, \\
 \omega_q &\mapsto FH_q(\omega_q) \in T_qM.
 \end{aligned}$$

Se, en particular,  $(M, g)$  é unha variedade (semi-)riemanniana, as aplicacións de Legendre e de Hamilton poden ser consideradas como aplicacións entre variedades semi-riemannianas  $(TM, g^C)$  e  $(T^*M, g_\nabla)$ :

$$\begin{aligned}
 (TM, g^C) &\xrightarrow{FL} (T^*M, g_\nabla) \\
 (q^i, \dot{q}^i) &\mapsto (q^i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (T^*M, g_\nabla) &\xrightarrow{FH} (TM, g^C) \\
 (q^i, p_i) &\mapsto (q^i, \frac{\partial H}{\partial p_i}).
 \end{aligned}$$

Damos explicitamente a forma que teñen os Lagranxianos  $L$  para que  $FL$  sexa isometría local, totalmente xeodésica ou harmónica. Vemos tamén que se  $FL$  é isometría, entón  $\omega_L$  é harmónica. A continuación expoñemos uns exemplos físicos para os que  $FL$  se atopa en cada unha das condicións antes sinaladas. Tamén explicitamos Hamiltonianos  $H$  para os que  $FH$  é isometría local, totalmente xeodésica ou harmónica, dando tamén exemplos físicos de cada caso.

# Capítulo 1

## Preliminares

Sexa  $M$  unha variedade diferenciable, denotaremos por  $TM$  o seu fibrado tanxente con proxección:  $\pi_{TM} : TM \rightarrow M$ , e por  $T^*M$  o seu fibrado cotanxente con proxección:  $\pi_{T^*M} : T^*M \rightarrow M$ .

Supoñendo que  $M$  é unha variedade (semi-)riemanniana  $m$ -dimensional con métrica  $g$  e conexión de Levi-Civita  $\nabla$ , as dúas variedades  $2m$ -dimensionais,  $TM$  e  $T^*M$ , poden ser equipadas cunhas métricas semi-riemannianas que denotaremos por  $g^C$  e  $g_\nabla$ .

Co fin de concretarmos un pouco máis estas construcións desenvolvemos a seguir unha serie de preliminares.

### 1.1 Métrica levantamento completo en $TM$

Sexa  $M$  unha variedade (semi-)riemanniana  $m$ -dimensional con métrica  $g$  e conexión de Levi-Civita  $\nabla$ . Denotaremos por  $TM$  o fibrado tanxente a  $M$  con proxección  $\pi_{TM} : TM \rightarrow M$ . Esta variedade  $2m$ -dimensional pode ser equipada coa métrica semi-riemanniana  $g^C$ , levantamento completo de  $g$  ([27]), de signatura  $(m, m)$  e definida por:

$$\begin{cases} g^C(X^H, Y^H) = g^C(X^V, Y^V) = 0, \\ g^C(X^H, Y^V) = g^C(X^V, Y^H) = g(X, Y)^V. \end{cases}$$

Aquí, os levantamentos verticais e horizontais dos vectores tan-

xentes  $X, Y$  en  $M$ , están referidos á descomposición do espazo tanxente,  $TM$ , en cada punto, en vectores horizontais con respecto a  $\nabla$  e vectores verticais canónicos. Para campos de vectores  $X, Y$  en  $M$  a función  $g(X, Y)^V$  definida en  $TM$  é o *pull-back* de  $g(X, Y)$  ó longo da proxección  $\pi_{TM}$ .

Sexa  $\mathcal{U} = \{U \subset M, (q^1, \dots, q^m)\}$  unha veciñanza de coordenadas en  $M$ , entón pódese considerar a veciñanza de coordenadas en  $TM$ ,  $T\mathcal{U} = \{\pi_{TM}^{-1}(U), (q^1, \dots, q^m; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m)\}$ . Temos así que a expresión local de  $g^C$  e mais da súa inversa en  $T\mathcal{U}$  veñen dadas polas seguintes matrices:

$$(1.1) \quad g^C = \begin{pmatrix} \dot{q}^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad (g^C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} \\ g^{ij} & \dot{q}^k \frac{\partial q^{ij}}{\partial q^k} \end{pmatrix},$$

con respecto á base

$$(1.2) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^m}; \frac{\partial}{\partial \dot{q}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^m} \right\},$$

do espazo tanxente a  $TM$  en cada punto. Por  $g_{ij}$  estamos denotando as compoñentes locais de  $g$  con respecto a

$$(1.3) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^m} \right\},$$

e por  $g^{ij}$ , as da súa inversa.

Nun punto do fibrado tanxente, denotaremos por

$$(1.4) \quad {}^{TM}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, 2m),$$

os símbolos de Christoffel da conexión de Levi-Civita,  $\nabla^C$ , asociada a  $g^C$ . Localmente exprésanse como

$$(1.5) \quad {}^{TM}\Gamma^k = \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^{TM}\Gamma^{\bar{k}} = \begin{pmatrix} \dot{q}^l \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q^l} & \Gamma_{ij}^k \\ \Gamma_{ij}^k & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $\Gamma_{ij}^k$  son os símbolos de Christoffel de  $\nabla$  e

$$(1.6) \quad \bar{k} = k + m, \quad (i, j, k = 1, \dots, m).$$

A variedade semi-riemanniana  $(TM, g^C)$  posúe propiedades xeométricas importantes, herdadas algunhas da variedade  $(M, g)$ .

**Proposición 1.1.1** [27][28] *Sexa  $(M, g)$  unha variedade (semi-)Riemanniana e  $(TM, g^C)$  o seu fibrado tanxente coa métrica levantamento completo de  $g, g^C$ . Daquela verificase:*

- (i) *Se  $(M, g)$  é localmente simétrica, entón  $(TM, g^C)$  é localmente simétrica.*
- (ii)  *$(TM, g^C)$  ten curvatura escalar cero.*
- (iii)  *$(TM, g^C)$  é unha variedade Einstein se e soamente se  $(M, g)$  ten curvatura escalar nula.*
- (iv) *Se  $(M, g)$  ten curvatura constante  $k$ . Entón  $(TM, g^C)$  ten curvatura constante se e soamente se  $k = 0$ .*

□

Ademáis a métrica  $g^C$  é utilizada en temas de harmonicidade.

**Proposición 1.1.2** [27] *Sexan  $(M, g)$  e  $(N, h)$  dúas variedades semi-riemannianas e  $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$  unha aplicación diferenciable. Entón  $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$  é harmónica se e soamente se  $df : (TM, g^C) \rightarrow (TN, h^C)$  é harmónica.* □

Nos seguintes capítulos utilizaremos esta métrica para definir varios conceptos relacionados coa harmonicidade, como poden ser campos de vectores harmónicos\* ou 1-formas harmónicas.



## 1.2 Extensión de Riemann en $T^*M$

Patterson e Walker ([20]) construíron unha métrica semi-riemanniana no espacio cotanxente dunha variedade que posuía unha conexión,  $\nabla$ , afín e simétrica, denominada extensión de Riemann de  $\nabla$  e denotada por  $g_\nabla$ . Se consideramos que  $\nabla$  é a conexión de Levi-Civita da variedade  $(M, g)$  e tomámo-la veciñanza de coordenadas inducida no fibrado cotanxente a  $M$ ,  $T^*\mathcal{U} = \{\pi^{-1}_{T^*M}(\mathcal{U}), (q^1, \dots, q^m; p_1, \dots, p_m)\}$ ,  $(\pi_{T^*M}: T^*M \rightarrow M)$ , temos que a métrica  $g_\nabla$  está definida como:

$$(1.7) \quad g_\nabla(X^C, Y^C) = -\gamma(\nabla_X Y + \nabla_Y X),$$

onde  $X^C, Y^C$  son os levantamentos completos a  $T^*M$  dos campos de vectores  $X$  e  $Y$  en  $M$ , expresados localmente por:

$$(1.8) \quad Z^C = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i} - p_k \frac{\partial Z^i}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial p_i},$$

onde,  $Z = Z^i \frac{\partial}{\partial q^i}$  e  $\gamma$  é a seguinte función en  $TM$ :

$$\begin{aligned} \gamma: TM &\rightarrow C^\infty(T^*M, \mathfrak{R}) \\ Z &\mapsto \gamma(Z), \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} \gamma(Z): T^*M &\rightarrow \mathfrak{R} \\ \gamma(Z)(\alpha_x) &= \alpha_x(Z), \end{aligned}$$

sendo  $\alpha_x = p_i dq^i$ .

En coordenadas locais:

$$(1.9) \quad \gamma(Z) = p_k Z^k.$$

Relativa á base

$$(1.10) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^m}; \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_m} \right\},$$

as expresións en coordenadas locais da extensión de Riemann e a súa inversa son:

$$(1.11) \quad (g_\nabla) = \begin{pmatrix} -2p_k^\nabla \Gamma_{ij}^k & \delta_{ij} \\ \delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad (g_\nabla)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ \delta_{ij} & 2p_k^\nabla \Gamma_{ij}^k \end{pmatrix},$$

onde  $\nabla \Gamma_{ij}^k$  son os símbolos de Christoffel de  $\nabla$ .

Os símbolos de Christoffel,  $T^*M \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ , ( $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, 2m$ ), da conexión de Levi-Civita,  $\nabla_\nabla$ , asociada a  $g_\nabla$ , veñen dados por:

$$(1.12) \quad T^*M \Gamma^k = \begin{pmatrix} \nabla \Gamma_{ij}^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^*M \Gamma^{\bar{k}} = \begin{pmatrix} p_l^k A_{ij}^l & -\Gamma_{kj}^i \\ -\Gamma_{ik}^j & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$(1.13) \quad {}^k A_{ij}^l = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial q^i} + 2\Gamma_{kt}^l \Gamma_{ij}^t,$$

$\Gamma_{ij}^k$  son os símbolos de Christoffel de  $\nabla$  en  $M$  e

$$\bar{k} = k + m, (i, j, k, l, t = 1, \dots, m).$$

A variedade semi-riemanniana  $(T^*M, g_\nabla)$  posúe propiedades xeométricas importantes, algunhas herdadas da variedade base.

**Proposición 1.2.1** [27] *Sexa  $M$  unha variedade dotada dunha conexión afín e simétrica  $\nabla$ . Se  $M$  é localmente simétrica, entón o fibrado cotanxente  $T^*M$  coa conexión  $\nabla_\nabla$  tamén é localmente simétrico.  $\square$*

**Proposición 1.2.2** [27] *Se  $\bar{C}$  é unha xeodésica con respecto a  $\nabla_\nabla$  en  $T^*M$ , entón a proxección  $C$  de  $\bar{C}$  é unha xeodésica en  $M$  e  $p_i(t)$  satisfan a ecuación:*

$$(1.14) \quad \frac{d^2 p_i}{dt^2} + p_a R_{hji}^a \frac{dq^j}{dt} \frac{dq^i}{dt} = 0$$

ó longo de  $C$ , onde  $\bar{C}$  ten a expresión:

$$q^{\bar{i}} = q^i(t), \quad p_i = p_i(t).$$

$\square$

### 1.3 Isomorfismos musicais

Defínense os isomorfismos *musicais* asociados a unha métrica  $g$  como as seguintes aplicacións entre os fibrados tanxente e cotanxente:

$$\text{bemol } \flat : TM \rightarrow T^*M, X \mapsto \flat(X) = g(X, \cdot)$$

$$\text{díese } \sharp : T^*M \rightarrow TM, \omega \mapsto \sharp(\omega),$$

onde  $\sharp(\omega)$  é o campo de vectores sobre  $M$  dado por  $g(\sharp(\omega), Y) = \omega(Y)$ , para todo campo de vectores  $Y$  sobre  $M$ .

En coordenadas:

$$(1.15) \quad \flat(q^i, \dot{q}^i) = (q^i, g_{ik}\dot{q}^k),$$

$$(1.16) \quad \sharp(q^i, p_i) = (q^i, g^{ik}p_k),$$

$g_{ik}$  denotan as compoñentes locais da métrica  $g$  e  $g^{ik}$  as da súa inversa.

Xa que a métrica  $g$  é non-dexenerada, os isomorfismos musicais definen isomorfismos de fibrados entre  $TM$  e  $T^*M$ . No epígrafe anterior equipamos estes fibrados con métricas semi-riemannianas e resulta natural investiga-la información xeométrica que preservan estes isomorfismos.

**Teorema 1.3.1** [14] *Sexa  $(M, g)$  unha variedade semi-riemanniana e  $D$  unha conexión libre de torsión en  $M$ . Entón os isomorfismos musicais inducidos por  $g$  son aplicacións totalmente xeodésicas entre  $(TM, g^C)$  e  $(T^*M, g_D)$  se e soamente se  $D$  coincide coa conexión de Levi-Civita  $\nabla$  de  $g$ .*  $\square$

Pero ademais tense un resultado máis forte, que é o seguinte:

**Teorema 1.3.2** *Sexa  $(M, g)$  unha variedade (semi-)riemanniana, e sexan os fibrados tanxente e cotanxente dotados das métricas  $g^C$  e  $g_\nabla$ , respectivamente. Entón os isomorfismos musicais son isometrías entre  $(TM, g^C)$  e  $(T^*M, g_\nabla)$ .*

**Demostración:**

En coordenadas temos:

$$(TM, g^C) \xrightarrow{b} (T^*M) \xrightarrow{\sharp} (TM, g^C)$$

$$b(q^i, \dot{q}^i) = (q^i, g_{ki}\dot{q}^k)$$

$$\sharp(q^j, p_j) = (q^j, g^{kj}p_k).$$

Resulta evidente que ámbalas dúas aplicacións son difeomorfismos verificando  $b \circ \sharp = 1_{TM}$  e  $\sharp \circ b = 1_{T^*M}$ .

Probemos agora que  $b^*g_{\nabla} = g^C$  e  $\sharp^*g^C = g_{\nabla}$ .

Facendo contas temos:

$$\begin{aligned} (b^*g_{\nabla})_{ij} &= -2p_h\Gamma_{ij}^h + \dot{q}^t \frac{\partial g_{jt}}{\partial q^i} + \dot{q}^t \frac{\partial g_{it}}{\partial q^j} \\ &= \dot{q}^t \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^t}, \end{aligned}$$

tendo en conta:

$$-2p_k\Gamma_{ij}^k = -p_k g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{li}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l} \right\} = -\dot{q}_l \left\{ \frac{\partial g_{li}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l} \right\},$$

$$(b^*g_{\nabla})_{i\bar{j}} = g_{j\bar{i}},$$

$$(b^*g_{\nabla})_{\bar{i}\bar{j}} = g_{ij},$$

$$(b^*g_{\nabla})_{\bar{i}\bar{j}} = 0,$$

$i, j, k, l = 1, \dots, m; \bar{() } = () + m.$

Reciprocamente:

$$\begin{aligned} (\#^* g^C)_{ij} &= q^t \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^t} - p_t g^{kt} \left\{ \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^t} \right\} - p_t g^{kt} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^t} \\ &= -2p_t \Gamma^t_{ij}, \end{aligned}$$

$$(\#^* g^C)_{\bar{i}j} = \delta_{ij},$$

$$(\#^* g^C)_{i\bar{j}} = \delta_{ij},$$

$$(\#^* g^C)_{\bar{i}\bar{j}} = 0,$$

$i, j, k, l = 1, \dots, m; \bar{() } = () + m.$

Comparando coas expresións de  $g^C$  e  $g_\nabla$  dadas en (1.1) e (1.11) témo-lo resultado.  $\square$

## Capítulo 2

# Harmonicidade

Sexan agora  $(M, g)$  e  $(N, h)$  variedades (semi-)riemannianas, de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente, e sexa  $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$  unha aplicación de  $M$  en  $N$ . Entón pódese construí-lo fibrado de 1-formas en  $M$  con valores no fibrado *pull-back*  $f^{-1}(TN)$ , é dicir,  $T^*M \otimes f^{-1}(TN)$ . Este fibrado é equipado coa conexión inducida polas conexións de Levi-Civita de  $g$  e  $h$ .

A derivada covariante da diferencial,  $\nabla df$ , é unha forma bilinear simétrica sobre  $TM$  e chámase *segunda forma fundamental de  $f$* . A traza de  $\nabla df$  con respecto a  $g$  chámase *campo de tensión de  $f$* , e denótase por  $\tau(f)$ . Unha aplicación  $f$  dise *armónica* se  $\tau(f) = 0$ , e *totalmente xeodésica* se  $\nabla df = 0$  (ver [7],[8] para máis detalle).

Agora, se  $\mathcal{U} = \{U \subset M, (q^1, \dots, q^m)\}$  e  $\mathcal{V} = \{V \subset N, (y^1, \dots, y^n)\}$  son veciñanzas de coordenadas en  $M$  e  $N$ , respectivamente, e supoñemos que  $f$  se representa localmente por  $y^a = f^a(q^1, \dots, q^m)$ ,  $a = 1, \dots, n$ . Entón temos:

$$(2.1) \quad \nabla(df)_{ij}^a = \frac{\partial^2 f^a}{\partial q^i \partial q^j} - g\Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^a}{\partial q^k} + {}^h\Gamma_{bc}^a(f) \left[ \frac{\partial f^b}{\partial q^i} \frac{\partial f^c}{\partial q^j} \right],$$

$$(2.2) \quad \tau(f)^a = g^{ij} (\nabla(df)_{ij}^a),$$

para  $i, j, k = 1, \dots, m$ ;  $a, b, c = 1, \dots, n$ .

## 2.1 Campos de vectores e 1-formas que definen secciones harmónicas

Un campo de vectores  $X$  nunha variedade  $M$  define unha sección do fibrado tanxente  $\sigma_X : M \rightarrow TM$ . Cando  $M$  se dota dunha métrica semi-riemanniana  $g$ , un campo de vectores  $X$  dise *harmónico* se a sección  $\sigma_X : (M, g) \rightarrow (TM, g^C)$  é unha aplicación harmónica. Tal noción de harmonicidade foi estudiada por Nouhaud [19], e o principal resultado amosa que un campo de vectores  $X$  en  $(M, g)$  é harmónico se, e sómentes se, é un *campo de vectores xeodésico* (ver [31] e tamén Observación 2.1.1 para a definición de campos de vectores xeodésicos).

**Teorema 2.1.1** [19] *Un campo de vectores  $X$  en  $(M, g)$  define unha sección harmónica de  $(TM, g^C)$  se, e sómentes se:*

$$(2.3) \quad g^{ij}(\mathcal{L}_X \nabla) \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = 0,$$

onde  $\mathcal{L}$  denota a derivada de Lie. Ademais  $X$  define unha sección totalmente xeodésica de  $(TM, g^C)$  se e soamente se:

$$(2.4) \quad \mathcal{L}_X \nabla = 0.$$

□

**Observación 2.1.1** Os campos de vectores que definen secciones totalmente xeodésicas de  $(TM, g^C)$  son chamados *campos de vectores afíns Killing* ([21]). Os campos de vectores que satisfan a condición (2.3) son chamados *campos de vectores xeodésicos* por Yano e Nagano. Referímos a [31] para máis información sobre tales campos de vectores en variedades riemannianas compactas.

Exemplos de campos de vectores que definen secciones harmónicas poden ser construídos usando os levantamentos vertical e completo de campos de vectores a  $TM$  como se amosa a seguir:

**Teorema 2.1.2** [14] *Sexa  $(M, g)$  unha variedade semi-riemanniana e  $X$  un campo de vectores en  $M$ . Entón temos:*

- (i) O levantamento vertical  $X^V$  de  $X$  é un campo de vectores en  $(TM, g^C)$  que define unha sección harmónica de  $(T(TM), (g^C)^C)$ . Ademais define unha sección totalmente xeodésica se e soamente se  $X$  define unha sección totalmente xeodésica de  $(TM, g^C)$ .
- (ii) O levantamento completo  $X^C$  de  $X$  define unha sección harmónica (resp. totalmente xeodésica) de  $(T(TM), (g^C)^C)$  se e soamente se  $X$  define unha sección harmónica (resp. totalmente xeodésica) de  $(TM, g^C)$ .

□

Agora, usando o Teorema 1.3.2, témo-las seguintes relacións entre as seccións de  $TM$  e  $T^*M$ .

**Teorema 2.1.3** *Sexa  $(M, g)$  unha variedade semi-riemanniana.*

- (a) Unha 1-forma,  $\omega$ , en  $M$  define unha sección harmónica (resp. totalmente xeodésica) de  $(T^*M, g_\nabla)$  se e soamente se  $X = \sharp(\omega)$  define unha sección harmónica (resp. totalmente xeodésica) de  $(TM, g^C)$ .
- (b) Un campo de vectores,  $X$ , en  $M$  define unha sección harmónica (resp. totalmente xeodésica) de  $(TM, g^C)$  se e soamente se  $\omega = \flat(X)$  define unha sección harmónica (resp. totalmente xeodésica) de  $(T^*M, g_\nabla)$ .

**Demostración:**

Xa que a segunda forma fundamental da composición de dúas aplicacións satisfai:

$$\nabla d(\psi \circ \phi) = d\psi \circ \nabla(d\phi) + \nabla(d\psi)(d\phi, d\phi)$$

onde  $\phi : M \rightarrow N$  e  $\psi : N \rightarrow P$ , temos que a composición de dúas aplicacións totalmente xeodésicas é totalmente xeodésica. Ademais, se  $\phi$  é harmónica e  $\psi$  é totalmente xeodésica, a composición  $\psi \circ \phi$  é unha aplicación harmónica (véxase [7] e [8], para máis información). Agora, a demostración conclúese do Teorema 1.3.2 e do feito de que toda isometría é unha aplicación totalmente xeodésica. □



A continuación expóñense algúns exemplos de 1-formas que definen seccións harmónicas. Usando os resultados dos Teoremas 2.1.2 e 2.1.3 temos:

**Teorema 2.1.4** *Sexa  $(M, g)$  unha variedade semi-riemanniana e  $X$  un campo de vectores en  $M$ . Entón:*

- (i)  $b(X^V)$  é unha 1-forma en  $(TM, g^C)$  que define unha sección harmónica do fibrado cotanxente  $(T^*(TM), g_{\nabla^C})$ . Ademais define unha sección totalmente xeodésica se e soamente se  $X$  define unha sección totalmente xeodésica de  $(TM, g^C)$ .
- (ii)  $b(X^C)$  define unha sección harmónica de  $(T^*(TM), g_{\nabla^C})$  se e soamente se  $X$  define unha sección harmónica de  $(TM, g^C)$ .

□

Cada 1-forma  $\omega$  en  $M$  induce un campo de vectores no fibrado cotanxente, este campo de vectores é o levantamento vertical  $\omega^V$  de  $\omega$ , que se expresa en coordenadas locais do xeito seguinte  $\omega^V = \omega_k \frac{\partial}{\partial p_k}$ , sendo  $\omega_k$  as coordenadas de  $\omega$  en  $M$ .

**Teorema 2.1.5** [14]  $\omega^V$  define unha sección harmónica de  $(T(T^*M), (g_{\nabla^C})^C)$  para cada 1-forma  $\omega$  en  $(M, g)$ . □

## 2.2 Campos de tensores de tipo $(1, 1)$ e $(0, 2)$ harmónicos

Un campo de tensores de tipo  $(1, 1)$  nunha variedade riemanniana  $(M, g)$  determina unha aplicación  $\varphi : TM \rightarrow TM$  onde  $TM$  denota o fibrado tanxente de  $M$ . É así natural da-la seguinte definición:

**Definición 2.2.1** [13] *Un campo de tensores de tipo  $(1, 1)$  nunha variedade semi-riemanniana  $(M, g)$  dise harmónico se e soamente se  $\varphi : (TM, g^C) \rightarrow (TM, g^C)$  é unha aplicación harmónica.*

*Asemade, un campo de tensores de tipo  $(0, 2)$ ,  $\phi$ , en  $M$  é harmónico se e soamente se o campo de tensores de tipo  $(1, 1)$  asociado, definido por  $g(\varphi(X), Y) = \phi(X, Y)$ , é harmónico.*

En [13] determínase unha condición necesaria e suficiente para que un campo de tensores de tipo  $(1, 1)$ ,  $\varphi$ , sexa harmónico. Seguindo [2] denótase por  $\nabla^*$  a adxunción formal da conexión de Levi-Civita  $\nabla$  en  $(M, g)$ , que se expresa en coordenadas locais:

$$(\nabla^* \varphi)^k = -g^{ij} (\nabla_i \varphi)_j^k.$$

**Teorema 2.2.1** [13] *O campo de endomorfismos  $\varphi$  en  $(M, g)$  é harmónico se e soamente se  $\nabla^* \varphi = 0$ .  $\square$*

Como consecuencia deste teorema, un campo de tensores de tipo  $(0, 2)$ ,  $\phi$ , é harmónico se e soamente se ten diverxencia nula, i.e.,  $\delta\phi = 0$ . É interesante sinalar que o concepto de tensor harmónico foi previamente estudiado por Chen e Nagano ([3]), no caso particular de campos de tensores de tipo  $(0, 2)$  simétricos. Resulta que o campo de tensores  $\phi$  é harmónico no sentido de [3] se e soamente se

$$\bar{\phi} = \phi - \frac{1}{2}(\text{traza}\phi)g$$

é harmónico no sentido da definición 2.2.1 (referímos a [13] para máis exemplos de campos de tensores harmónicos).

Existen moitos tipos interesantes de campos de tensores de tipo  $(1, 1)$  que desempeñan diferentes papeis na xeometría riemanniana. Os operadores de configuración e de Ricci caracterizan interesantes propiedades das variedades riemannianas en esferas xeodésicas suficientemente pequenas. Baseándose nos resultados de [4] e [13] temos:

- Sexa  $(M, g)$  unha variedade riemanniana con  $\dim M \geq 3$ . Entón  $(M, g)$  é un espacio harmónico se e soamente se o operador Ricci é harmónico en cada esfera xeodésica suficientemente pequena.
- Unha variedade Einstein  $(M, g)$  é un espacio harmónico se e soamente se o operador de configuración en cada esfera xeodésica suficientemente pequena é harmónico.

As estruturas case complexas e case producto son estruturas xeometricamente interesantes cando se estudia xeometría riemanniana. Ademais, a harmonicidade de tales estruturas conecta con propiedades destas variedades tal e como se amosa en [13].

- Sexa  $(M, g, J)$  unha variedade case Hermitiana. Entón  $J$  é un campo de tensores de tipo  $(1,1)$  harmónico se e soamente se  $(M, g, J)$  é semi-Kähler.
- Sexa  $(M, g, P)$  unha variedade métrica case producto. Entón  $P$  é unha estrutura casi producto harmónica se e soamente se os autoespacios correspondentes ós autovalores  $+1$  e  $-1$  de  $P$  definen distribucións minimais en  $M$ .

## Capítulo 3

# Xeometría simpléctica

Sexa  $M$  unha variedade diferenciable, e  $\omega$  unha 2-forma en  $M$ . Dise que  $\omega$  é unha *estructura simpléctica* se

- (a)  $\omega$  é non-dexenerada: A aplicación inducida  $\bar{\omega} : T_x M \rightarrow T_x^* M$  é un isomorfismo, para todo  $x \in M$ .
- (b)  $\omega$  é pechada:  $d\omega=0$ .

Unha variedade simpléctica é unha variedade  $M$  dotada dunha estrutura simpléctica,  $\omega$ , e denotarémola por  $(M, \omega)$ .

Como consecuencia inmediata desta definición, temos que:

- (a) Se  $(M, \omega)$  é simpléctica,  $\dim M = 2m$ , é par.
- (b) Se  $(M, \omega)$  é simpléctica,  $M$  é orientable, e a  $2m$ -forma  $\omega^m$  é un elemento de volume para  $M$ .

### 3.1 Estructura simpléctica canónica do fibrado cotanxente

Sexa  $M$  unha variedade diferenciable  $m$ -dimensional e sexa  $T^*M$  o seu fibrado cotanxente. En  $T^*M$  existe unha 1-forma canónica,

$$\lambda_0 : T^*M \rightarrow T^*(T^*M),$$

denominada *forma de Liouville*, caracterizada pola propiedade de que se  $\sigma$  é unha 1-forma en  $M$ , entón  $\sigma^*\lambda_0 = \sigma$ . A derivada exterior desta 1-forma,  $d\lambda_0$ , é unha forma simpléctica en  $T^*M$ . A estrutura simpléctica  $\omega_0 = -d\lambda_0$  chámase *estructura simpléctica canónica de  $T^*M$* .

Para definir  $\lambda_0$ , consideremos  $p \in T^*M$  e  $v_p \in T_p(T^*M)$  un vector tanxente en  $p$ . Se  $\pi_{T^*M} : T^*M \rightarrow M$  é a proxección e  $\pi_{T^*M}(p) = x$ , témo-lo seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 v_p \in T(T^*M) & \xrightarrow{(\pi_{T^*M})_*} & TM \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 p \in T^*M & \xrightarrow{\pi_{T^*M}} & M
 \end{array}$$

Definimos  $(\lambda_0)_p(v_p) = p((\pi_{T^*M})_*(v_p))$ , entón se  $\sigma : M \rightarrow T^*M$  é unha 1-forma en  $M$  e  $W_x \in T_xM$  é un vector tanxente a  $M$ , e se  $\sigma(x) = p \in T^*M$ ,

$$\begin{aligned}
 \sigma^*(\lambda_0)_p(W_x) &= (\lambda_0)_p(\sigma_*(W_x)) \\
 &= p((\pi_{T^*M})_* \circ \sigma_*(W_x)) \\
 &= p(W_x) \\
 &= \sigma(x)(W_x),
 \end{aligned}$$

como isto ocorre para calquera vector tanxente  $W_x$ , temos que  $\sigma^*\lambda_0 = \sigma$ .

Imos escribi-la forma  $\lambda_0$  en coordenadas locais. Sexa

$$T^*(\mathcal{U}) = \{\pi_{T^*M}^{-1}(\mathcal{U}), (q^1, \dots, q^m; p_1, \dots, p_m)\}$$

unha veciñanza de coordenadas locais en  $T^*M$  inducido pola veciñanza  $\mathcal{U} = \{U \subset M, (q^1, \dots, q^m)\}$  en  $M$ . Cada 1-forma  $p \in T^*(\mathcal{U})$  exprésase:

$$p = p_i dq^i,$$

de tal modo que se  $\pi_{T^*M}(p) = q$  vén dado polas coordenadas  $(q^1, \dots, q^m)$ , entón  $p$  vén dado polas coordenadas  $(q^1, \dots, q^m; p_1, \dots, p_m)$ .

Neste sistema de coordenadas a 1-forma de Liouville vén dada por:

$$\lambda_0(q, p) = p_i dq^i.$$

Agora resulta inmediato que

$$\omega_0 = -d\lambda_0 = dq^i \wedge dp_i,$$

é unha forma simpléctica e denomínase *estructura simpléctica canónica do fibrado cotanxente*.

## 3.2 Estructura simpléctica asociada a unha métrica no fibrado tanxente

Así como no fibrado cotanxente dunha variedade é posible definir unha estrutura simpléctica de xeito canónico, no fibrado tanxente isto non é posible. A continuación descríbese algún caso no que si se pode dotar ó tanxente dunha estrutura simpléctica.

Sexa  $M$  unha variedade diferenciable  $m$ -dimensional. O campo de vectores,  $C$ , que enxendra o grupo 1-paramétrico de homotecias de  $TM$  é un campo de vectores en  $TM$ , chamado *campo de Liouville*.

Sexa

$$T(\mathcal{U}) = \{\pi^{-1}_{TM}(\mathcal{U}), (q^1, \dots, q^m; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m)\},$$

a veciñanza coordenada en  $TM$  inducido por  $\mathcal{U} = \{U \subset M, (q^1, \dots, q^m)\}$  e a proxección  $\pi_{TM} : TM \rightarrow M$ .

Cada campo de vectores  $\dot{q} \in T(\mathcal{U})$  exprésase:  $\dot{q} = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$ , de tal modo que se  $\pi_{TM}(\dot{q}) = q$  vén dado polas coordenadas  $(q^1, \dots, q^m)$ , entón  $\dot{q}$  vén dado polas coordenadas  $(q^1, \dots, q^m; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m)$ .

Neste sistema de coordenadas, o campo de Liouville exprésase:

$$C(q, \dot{q}) = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}.$$

Consideraremos agora que temos definida en  $M$  unha métrica (se-mi-)riemanniana  $g$ . O isomorfismo *bemol*,  $\flat$ , asociado a esa métrica, definido no capítulo 1 permítenos construír unha estrutura simpléctica en  $TM$  do xeito seguinte:

$$(3.1) \quad \Omega_0 = (\flat)^*(\omega_0).$$

Claramente  $\Omega_0 = -d((\flat)^*\lambda_0)$ .

A súa expresión local vén dada por:

$$(3.2) \quad \Omega_0 = -(g_{ij} dq^i \wedge dq^j + \dot{q}^i \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} dq^j \wedge dq^k),$$

onde  $g_{ij}$  son as compoñentes locais da métrica  $g$  en  $\mathcal{U}$ .

Esta 2-forma  $\Omega_0$  é non-dexenerada e pechada, polo tanto define unha estrutura simpléctica en  $TM$ , (ver [1] para máis detalles).

**Nota:** Tanto o campo de Liouville como a forma de Liouville están definidos globalmente, é dicir, as seccións que definen son globais.

### 3.3 Harmonicidade das estruturas simplécticas

Utilizando as definicións do capítulo 2, imos analiza-la harmonicidade dos conceptos definidos nas seccións anteriores. En primeiro lugar analizáremo-lo campo e a forma de Liouville.

**Proposición 3.3.1** *O campo de Liouville,  $C$ , define unha sección totalmente xeodésica do fibrado  $\pi_C : (T(TM), (g^C)^C) \rightarrow (TM, g^C)$ .*

**Demostración:**

Sexa  $\nabla^C$  a conexión de Levi-Civita de  $g^C$ . Seguindo o Teorema 2.1.1, é necesario probar que:

$$(\mathcal{L}_C \nabla^C) = 0.$$

En coordenadas locais, se  $\{\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\}$  é unha base de  $T_{(q^i, \dot{q}^i)}(TM)$  nunha veciñanza de cada punto, entón o que debemos probar é que:

$$(\mathcal{L}_C \nabla^C)\left(\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial q^j}\right) = 0,$$

$$(\mathcal{L}_C \nabla^C)\left(\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\right) = 0,$$

$$(\mathcal{L}_C \nabla^C)\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \frac{\partial}{\partial q^j}\right) = 0,$$

$$(\mathcal{L}_C \nabla^C)\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\right) = 0.$$

sendo :

$$(\mathcal{L}_X \nabla)(Y, Z) = \mathcal{L}_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\mathcal{L}_X Z) - \mathcal{L}_{[X, Y]}Z.$$



para  $X, Y, Z$  campos de vectores sobre unha variedade con conexión  $\nabla$ . En coordenadas locais, con respecto á base  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ :

$$(3.3) \quad (\mathcal{L}_X \nabla) \left( \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma^l{}_{jk} \frac{\partial X^i}{\partial x^l} + X^h \frac{\partial \Gamma^i{}_{jk}}{\partial x^h} + \Gamma^i{}_{mk} \frac{\partial X^m}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{jm} \frac{\partial X^m}{\partial x^k}.$$

Utilizando os símbolos de Christoffel asociados a  $g^C$  dados en (1.5), e logo duns cálculos sinxelos, témo-lo que queríamos probar.  $\square$

**Proposición 3.3.2** *A forma de Liouville,  $\lambda_0$ , define unha sección totalmente xeodésica do fibrado  $\pi_\nabla : (T^*(T^*M), (g_\nabla)_\nabla) \rightarrow (T^*M, g_\nabla)$ .*

**Demostración:**

Polo Teorema 1.3.2, probar que  $\lambda_0$  é unha sección totalmente xeodésica de  $\pi_\nabla$  é equivalente a probar que  $\sharp(\lambda_0) = X_{\lambda_0}$  define unha sección totalmente xeodésica do fibrado:  $(T(T^*M), (g_\nabla)^C) \rightarrow (T^*M, g_\nabla)$ .

Como  $g_\nabla(X_{\lambda_0}, Y) = \omega(Y)$  para todo  $Y$  sobre  $M$ , en coordenadas locais:

$$X_{\lambda_0} = p_i \frac{\partial}{\partial p_i},$$

onde  $T^*(U) = \{\pi_{T^*M}^{-1}(U), (q^1, \dots, q^m; p_1, \dots, p_m)\}$  é unha veciñanza de coordenadas inducida en  $T^*M$ .

Para este campo de vectores procedemos de xeito análogo que na demostración do teorema anterior, isto é, consideramo-la base  $\{\frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial p_i}\}$  de  $T_{(q^i, p_i)}(T^*M)$  e os símbolos de Christoffel asociados a  $g_\nabla$  dados en (1.12) e sen máis que substituír na expresión (3.3) obtense o que se quería demostrar.  $\square$

Referido ás formas simplécticas definidas no fibrado cotanxente e no fibrado tanxente, témo-los seguintes resultados:

**Proposición 3.3.3** *A 2-forma simpléctica canónica,  $\omega_0$ , do fibrado cotanxente é unha 2-forma harmónica en  $(T^*M, g_\nabla)$ .*

**Demostración:**

Sexa  $\omega_0 = dq^i \wedge dp_i$  a 2-forma canónica do fibrado cotanxente e  $X$  un campo de vectores en  $T^*M$ , definido localmente por:  $X = X^k \frac{\partial}{\partial q^k} + X^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial p_k}$ . Temos que probar que a diverxencia de  $\omega_0$  é nula.

Tendo en conta as expresións locais da inversa da métrica  $g_\nabla$  (ver (1.11)) temos:

$$\begin{aligned} \delta\omega_0(X) &= -\delta_i^j [\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}} (\omega_0(\frac{\partial}{\partial p_j}, X)) - \omega_0(\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}} \frac{\partial}{\partial p_j}, X)] \\ &\quad - \omega_0(\frac{\partial}{\partial p_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}} X) \\ &= -\delta_j^i [\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}} (\omega_0(\frac{\partial}{\partial q^j}, X)) - \omega_0(\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}} \frac{\partial}{\partial q^j}, X)] \\ &\quad - \omega_0(\frac{\partial}{\partial q^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}} X) \\ &= -2p_k \Gamma_{ij}^k [\nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}} (\omega_0(\frac{\partial}{\partial p_j}, X)) - \omega_0(\frac{\partial}{\partial p_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}} X)] \\ &= \delta_i^j [-X^k \Gamma_{ij}^k - X^k \Gamma_{ik}^j] - \delta_j^i [\Gamma_{ij}^l X^l - X^k \Gamma_{ik}^j] = 0 \end{aligned}$$

□

Consideremos agora a 2-forma no fibrado tanxente:

$$(3.4) \quad \Omega_0 = (b)^*(\omega_0) = -(g_{ij} dq^i \wedge dq^j + \dot{q}^i \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} dq^j \wedge dq^k)$$

onde  $\omega_0$  é a forma simpléctica canónica do fibrado cotanxente. Tense o seguinte resultado:

**Proposición 3.3.4** *A 2-forma simpléctica  $\Omega_0$  definida no fibrado tanxente a unha variedade de Riemann  $(M, g)$  é unha 2-forma harmónica en  $(TM, g^C)$ .*

### Demostración

En efecto, tendo en conta a expresión da inversa da métrica  $g^C$  (ver (1.1)) temos que:

$$\begin{aligned}
 \delta\Omega_0(X) &= -G^{\alpha\beta}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial q_\alpha}}\Omega_0)(\frac{\partial}{\partial q_\beta}, X) \\
 &= -G^{\alpha\beta}[\nabla_{\frac{\partial}{\partial q_\alpha}}(\Omega_0(\frac{\partial}{\partial q_\beta}, X)) - \Omega_0(\nabla_{\frac{\partial}{\partial q_\alpha}}\frac{\partial}{\partial q_\beta}, X) \\
 &\quad - \Omega_0(\frac{\partial}{\partial q_\beta}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial q_\alpha}}X)] \\
 &= -g^{ij}[\nabla_{\frac{\partial}{\partial q_i}}(\Omega_0(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}, X)) - \Omega_0(\nabla_{\frac{\partial}{\partial q_i}}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}, X) \\
 &\quad - \Omega_0(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial q_i}}X)] \\
 &\quad - g^{ij}[\nabla_{\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}}(\Omega_0(\frac{\partial}{\partial q_j}, X)) - \Omega_0(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}}\frac{\partial}{\partial q_j}, X) \\
 &\quad - \Omega_0(\frac{\partial}{\partial q_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}}X)] \\
 &\quad - \dot{q}_t \frac{\partial g^{ij}}{\partial q_t} [\nabla_{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}}(\Omega_0(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}, X)) - \Omega_0(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}}X)] \\
 &= g^{ij}X^s \frac{\partial g_{sj}}{\partial q_i} - g^{ij}X^s \frac{\partial g_{sj}}{\partial q_i} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

É isto é o que se quería demostrar. □

Seguindo ([1]) téñense as seguintes definicións:

**Definición 3.3.1** O operador de Laplace-de Rham defínese do xeito seguinte:

$$\Delta = d\delta + \delta d.$$

Este operador é simétrico e non dexenerado, isto é:

- $(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta)$ ,
- $(\delta\alpha, \alpha) \geq 0$ ,

sendo  $(\cdot, \cdot)$  un  $L^2$  produto interno nas seccións de  $\Omega^k(M)$ ,  $M^n$  variedade diferenciable, definido como segue:  $(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge * \beta$  e  $*\beta$  é unha  $(n-k)$ -forma cumprindo:  $(*\beta)(v_{k+1}, \dots, v_n) = \beta(v_1, \dots, v_k)$ , onde  $\beta$  é unha  $k$ -forma. Os vectores  $v_1, \dots, v_n$  son ortonormais e orientados en  $T_x M$ .  $*$  é chamado o operador de Hodge star.

**Corolario 3.3.1** *As formas simplécticas  $\omega_0$  e  $\Omega_0$  son harmónicas en senso clásico, é dicir,  $\Delta\omega_0 = 0$  e  $\Delta\Omega_0 = 0$ , onde  $\Delta$  é o operador de Laplace-de Rham.*

### Demostración

O operador de Laplace-de Rham vén definido por  $\Delta = d\delta + \delta d$ . Utilizando as proposicións 3.3.3 e 3.3.4, e o feito de que as formas simplécticas son pechadas, témo-lo o resultado requirido.  $\square$

É posible dar unha demostración alternativa da proposición 3.3.4 utilizando técnicas de variedades case-producto. Sexa  $Q$  o endomorfismo do fibrado tanxente a  $TM$  que verifica:

$$(3.5) \quad \Omega_0(Q(A), B) = g^C(A, B), \quad \forall A, B \in T(TM),$$

temos que

$$(3.6) \quad Q^2(A) = A, \quad g^C(Q(A), Q(B)) = g^C(A, B), \quad \forall A, B \in T(TM).$$

Polo tanto,  $Q$  define unha estrutura case-producto métrica en  $TM$ . Ademais :

$$(3.7) \quad Q(X^V) = X^V \text{ e } Q(X^H) = -X^H, \quad \forall X \in TM,$$

$$(3.8) \quad \Omega_0(A, B) = g^C(Q(A), B), \quad \forall A, B \in T(TM).$$

Entón, utilizando a Proposición 3.9 de [13] que garante que  $Q$  é harmónico, temos que, pola propia definición de 2-forma harmónica (Definición 2.2.1),  $\Omega_0$  é harmónica

**Nota:** Este método non se pode aplicar ó caso de  $\omega_0$ , xa que o endomorfismo de  $T(T^*M)$  que define, non é unha estrutura case-producto.

## Capítulo 4

# Sistemas hamiltonianos e lagranxianos

### 4.1 Sistemas hamiltonianos

O campo de vectores hamiltoniano dunha función  $H$  nunha variedade simpléctica fórmase de xeito semellante ó gradiente dunha función nunha variedade riemanniana. Ademais, a antisimetría da forma simpléctica introduce propiedades conservativas no campo hamiltoniano, mentres que a simetría da métrica riemanniana introduce propiedades disipativas no gradiente.

**Definición 4.1.1** *Sexa  $(N, \omega)$  unha variedade simpléctica  $2n$ -dimensional e  $H : N \rightarrow \mathfrak{R}$  unha función diferenciable.*

*O campo de vectores  $X_H$  determinado pola condición:*

$$\omega(X_H, Y) = dH(Y)$$

*isto é :*

$$i_{X_H}\omega = dH,$$

*chámase campo de vectores hamiltoniano con función enerxía  $H$ . Denotaremos por  $(N, \omega, X_H)$  un sistema hamiltoniano.*

O carácter non dexenerado de  $\omega$  garante a existencia do campo de vectores  $X_H$ .

**Proposición 4.1.1** [1] *Sexa  $(N, \omega, X_H)$  un sistema hamiltoniano e  $\mathcal{V} = \{V \subset N, (q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n)\}$  unha veciñanza de coordenadas canónicas para  $\omega$ , é dicir,  $\omega = dq^i \wedge dp_i$ . Entón, nesas coordenadas,*

$$(4.1) \quad X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

*Polo tanto,  $\alpha(t) = (q(t), p(t))$  é unha curva integral de  $X_H$  se, e sómentes se, verifica as ecuacións de Hamilton:*

$$(4.2) \quad \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

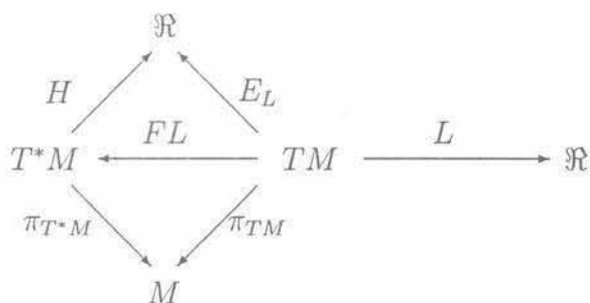
□

Probamos no capítulo 3 que  $T^*M$  ten unha estrutura simpléctica natural. Polo tanto é posible estudar campos de vectores hamiltonianos no espacio de fases dos momentos,  $T^*M$ , é dicir considerar os sistemas hamiltonianos  $(T^*M, \omega_0, X_H)$  para distintas funcións  $H$ .

## 4.2 Sistemas lagranxianos

Como vimos anteriormente, o fibrado tanxente carece dunha estrutura simpléctica natural. Nesta sección describiremos un tratamento no espacio de fases das velocidades alternativo ó hamiltoniano no caso do fibrado cotanxente.

A idea consiste en considerar unha función  $L : TM \rightarrow \mathfrak{R}$  e as solucións a unhas ecuacións diferenciais de segunda orde. De  $L$  pódese obter unha función enerxía  $E_L$  en  $TM$ , que, trasladada a  $T^*M$  mediante a *derivada fibrada*  $FL : TM \rightarrow T^*M$ , (a derivada de  $L$  en cada fibra de  $TM$ ), proporciona un Hamiltoniano adecuado. Entón as curvas solución en  $T^*M$  (ecuacións de Hamilton), e en  $TM$  (ecuacións de Lagrange), coincidirán cando sexan proxectadas en  $M$ .



Este proceso pódese inverter, permitindo pasar dunha formulación hamiltoniana a unha lagranxiana.

Hai que ter en conta que as dúas formulacións se establecen en espazos diferentes, que en xeral non poden ser identificados. En consecuencia, a relación entre  $H$  e  $L$  non é un simple cambio de coordenadas.

**Definición 4.2.1** Sexa  $M$  unha variedade diferenciable e  $L : TM \rightarrow \mathfrak{R}$  unha función diferenciable. A aplicación :

$$FL : TM \rightarrow T^*M, X_q \mapsto DL_q(X_q) \in \mathcal{L}(T_qM, \mathfrak{R}) = T_q^*M,$$

chámase derivada fibrada de  $L$ .  $L_q$  denota a restricción de  $L$  á fibra sobre  $q \in M$ .

Nótese que  $FL$  non é necesariamente un homomorfismo de espazos fibrados, pero si é unha aplicación diferenciable que preserva as fibras.

**Definición 4.2.2** Sexa  $\omega_0$  a forma simpléctica canónica de  $T^*M$  e  $L : TM \rightarrow \mathfrak{R}$  unha función diferenciable. Entón

$$\omega_L = (FL)^*\omega_0$$

é a 2-forma de Lagrange asociada ó Lagranxiano  $L$ .

Diremos que o Lagranxiano  $L$  é regular se  $FL$  é unha aplicación regular en tódolos puntos.

**Proposición 4.2.1** [1] Sexa  $L : TM \rightarrow \mathfrak{R}$  unha aplicación diferenciable. Entón son equivalentes:



- (i)  $L$  é un Lagranxiano regular,
- (ii)  $FL$  é un difeomorfismo local,
- (iii)  $\omega_L = (FL)^*\omega_0$  é unha forma simpléctica en  $TM$ .

□

Sexa  $\mathcal{U} = \{U \subset M, (q^1, \dots, q^m)\}$  unha veciñanza de coordenadas en  $M$  e  $TU$  e  $T^*\mathcal{U}$  as correspondentes veciñanzas inducidas en  $TM$  e  $T^*M$  con coordenadas  $(q^i, \dot{q}^i)$  e  $(q^i, p_i)$ , respectivamente. A expresión local da transformación de Legendre é:

$$(4.3) \quad FL(q^1, \dots, q^m; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m) = (q^1, \dots, q^m; p_1, \dots, p_m),$$

onde  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ .

Seguindo esta notación a 2-forma de Legendre exprésase localmente do xeito seguinte:

$$(4.4) \quad \omega_L = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} dq^i \wedge d\dot{q}^j.$$

**Definición 4.2.3** Dado o Lagranxiano  $L : TM \rightarrow \mathfrak{R}$ , defínese a acción  $A : TM \rightarrow \mathfrak{R}$  por  $A(v_x) = [FL(v_x)](v_x)$  e a enerxía por  $E_L = A - L$ .

Por un campo de vectores lagranxiano para  $L$ , entendemos un campo de vectores  $X_L$  en  $TM$  tal que  $i_{X_L} \omega_L = dE_L$ .

No caso de que  $L$  sexa regular, temos asegurada a existencia de  $X_L$  e diremos que define unhas ecuacións de movemento consistentes.

En coordenadas locais:

$$(4.5) \quad A = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad E_L = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L.$$

**Nota:** En realidade  $A \equiv CL : TM \rightarrow \mathfrak{R}$ , sendo  $C$  o campo de Liouville. Asemade  $E_L = CL - L$ .

**Definición 4.2.4** Sexa  $L : TM \rightarrow \mathfrak{R}$  unha aplicación diferenciable. Diremos que  $L$  é un Lagranxiano hiperregular se  $FL : TM \rightarrow T^*M$  é un difeomorfismo.

A transición entre a formulación lagrangiana e a hamiltoniana vén dada polo seguinte teorema:

**Teorema 4.2.1** [1] *Sexa  $L$  un Lagrangiano hiperregular en  $M$  e sexa  $H = E_L \circ (FL)^{-1} : T^*M \rightarrow \mathfrak{R}$ , onde  $E_L$  é a enerxía de  $L$ . Entón  $X_L$  e  $X_H$  están  $FL$ -relacionados,  $(FL)_*X_L = X_H$ . As curvas integrais de  $X_L$  son aplicadas por  $FL$  sobre curvas integrais de  $X_H$ .  $\square$*

Para completa-lo proceso, vexámo-lo camiño inverso.

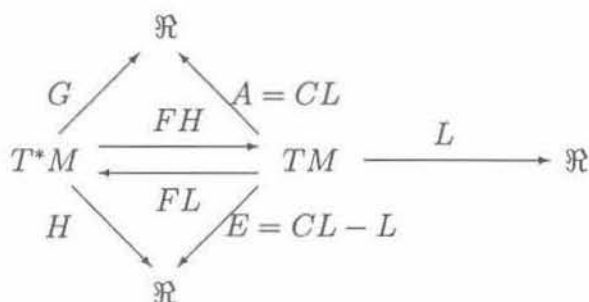
**Definición 4.2.5** *Un Hamiltoniano  $H : T^*M \rightarrow \mathfrak{R}$  chámase Hamiltoniano hiperregular se  $FH : T^*M \rightarrow TM, \omega_q \mapsto DH_q(\omega_q) \in T_qM$  é un difeomorfismo. A aplicación  $FH$  chámase transformación de Hamilton.*

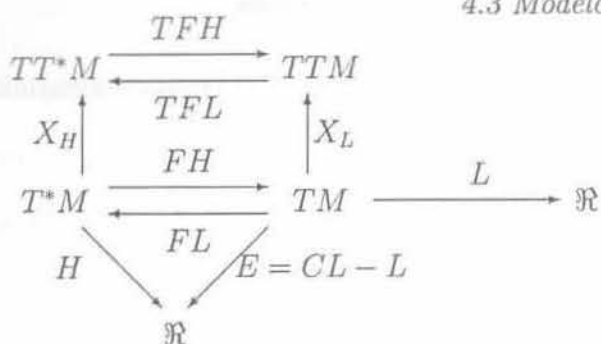
*Se  $\lambda_0$  é a 1-forma de Liouville de  $T^*M$ ,  $G = \lambda_0(X_H)$  é a acción de  $H$ .*

**Teorema 4.2.2** [1] *Sexa  $H$  un Hamiltoniano hiperregular sobre  $T^*M$ . Definimos  $E_L = H \circ (FH)^{-1}$ ,  $A = G \circ (FH)^{-1}$  e  $L = A - E_L$ . Entón,  $L$  é un Lagrangiano hiperregular en  $TM$  e de feito  $FL = (FH)^{-1}$ .  $\square$*

**Teorema 4.2.3** *Hai unha correspondencia bixectiva entre os Lagrangianos hiperregulares,  $L$ , e os Hamiltonianos hiperregulares,  $H$ .*

*$H$  constrúese a partir de  $L$  mediante o Teorema 4.2.1, e  $L$  a partir de  $H$  polo Teorema 4.2.2. Os seguintes diagramas conmutan:*





□

## 4.3 Modelos matemáticos

Cando se considera un sistema de  $n$  partículas que se moven libremente en  $\mathfrak{R}^3$  con masas  $m_1, \dots, m_n$ , os puntos  $(x, v) \in \mathfrak{R}^{3n} \times \mathfrak{R}^{3n}$ , que representan posición e velocidade, chámaselles *estados do sistema*.

Dado o difeomorfismo:

$$TI : T\mathfrak{R}^{3n} \rightarrow \mathfrak{R}^{3n} \times \mathfrak{R}^{3n}$$

onde  $I$  é a identidade de  $\mathfrak{R}^{3n}$ , pódese ver un estado coma un punto de  $T\mathfrak{R}^{3n}$ . Se  $\{(x^i, y^i, z^i), i = 1, \dots, n\}$  son as coordenadas canónicas en  $\mathfrak{R}^{3n}$ , definímo-la *métrica da enerxía cinética* do sistema como:

$$g_T = m_i [(dx^i)^2 + (dy^i)^2 + (dz^i)^2]$$

Denomínase *espacio de configuración* ó subconxunto,  $M$ , de  $\mathfrak{R}^{3n}$  das posibles posicións das partículas. Se o espacio de configuración,  $M$ , é un aberto de  $\mathfrak{R}^{3n}$ , entón o *espacio fase das velocidades* é  $TM \cong M \times \mathfrak{R}^{3n}$ , e a métrica da enerxía cinética é unha métrica de Riemann en  $M$ .

Desta forma, en lugar de considerar  $n$  partículas que se moven libremente en  $\mathfrak{R}^3$ , consideramos como se unha soa partícula se movese nun aberto de  $\mathfrak{R}^{3n}$ .

A función enerxía cinética do sistema é a aplicación:

$$T : TM \rightarrow \mathfrak{R},$$

dada por:

$$T(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v), \quad (x, v) \in TM.$$

Agora ben, no caso en que o sistema está suxeito a *ligaduras holonómicas*, o espazo de configuración xa non será un aberto, senón unha subvariedade de dimensión  $d$  de  $\mathfrak{R}^{3n}$ . Pensamos en  $d$  coma o número de graos de liberdade do sistema. A asunción de que as ligaduras son holonómicas significa que restrinxen a posición que as partículas poden ocupar, pero non limitan as súas velocidades, é dicir, se  $(x, v)$  é un elemento do espazo fase das velocidades (un estado do sistema), entón cada posición posible do sistema ha de ser un elemento do espazo de configuración ( $x \in M$ ). Nembargantes calquera vector tanxente a  $M$ ,  $v$ , pode ser considerado coma unha velocidade posible.

A métrica enerxía cinética en  $\mathfrak{R}^{3n}$ , restrinxida á variedade  $d$ -dimensional  $M$ , define unha métrica de Riemann, tamén denotada por  $g_T$ , sobre  $M$ .

Entón, un modelo matemático,  $(M, g_T)$ , para un sistema de partículas que se moven en  $\mathfrak{R}^3$  suxeito a ligaduras holonómicas consiste en:

- (a) Unha variedade diferenciable  $M \hookrightarrow \mathfrak{R}^{3n}$  como espazo de configuración,
- (b) o fibrado tanxente  $TM$ , espazo fase das velocidades,
- (c) e a métrica de Riemann  $g_T$  en  $M$  (métrica da enerxía cinética).

No caso en que  $(M, g)$  sexa unha variedade de Riemann pódese definir un Lagranxiano de maneira canónica:

$$L(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v), \quad (x, v) \in TM.$$

Neste caso, a transformación de Legendre  $FL : TM \rightarrow T^*M$  é:

$$[FL(w)](v) = g_x(v, w), \quad v, w \in T_x M,$$

e polo tanto  $L$  é un Lagranxiano hiperregular con acción:

$$A(v) = [F(v)] \cdot v = g_x(v, v) = 2L, \quad v \in T_x M,$$

e a enerxía

$$E = A - L = L.$$

O Hamiltoniano correspondente é:

$$H(x, \alpha) = \frac{1}{2} g_x(\sharp\alpha, \sharp\alpha), \quad \alpha \in T_x^* M.$$

Se, ademais, sobre a variedade  $M$  temos definida unha función potencial, é dicir, unha función diferenciable  $V : M \rightarrow \mathfrak{R}$ , entón é posible definir un Lagranxiano en  $M$  do xeito seguinte:

$$(4.6) \quad L : TM \rightarrow \mathfrak{R}, \quad L = T - (V \circ \pi_{TM}),$$

onde  $T$  é a enerxía cinética.

## 4.4 Transformación de Legendre

Sexa agora  $(M, g)$  unha variedade (semi-)riemanniana. Neste caso a transformación de Legendre pode ser considerada como aplicación entre variedades semi-riemannianas :

$$(TM, g^C) \xrightarrow{FL} (T^*M, g_\nabla)$$

$$(q^i, \dot{q}^i) \mapsto (q^i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})$$

Imos analiza-las condicións que ten que verifica-lo Lagranxiano  $L$  para que a transformación de Legendre asociada sexa totalmente xeodésica, harmónica ou isometría, presentando posteriormente exemplos destas situacións.

Primeiro calcularemo-la segunda forma fundamental de  $FL$ .

$$(4.7) \left\{ \begin{array}{l} \nabla(dFL)^\gamma \equiv (0), \\ \nabla(dFL)_{ij}^{\bar{\gamma}} = \frac{\partial^3 L}{\partial q_i \partial q_j \partial \dot{q}_\gamma} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 L}{\partial q_k \partial \dot{q}_\gamma} - \dot{q}_t \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q_t} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}_\gamma} \\ \quad + \Gamma_{i\beta}^\gamma \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\beta \partial q_j} + \Gamma_{\alpha j}^\gamma \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \left[ \frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial q_\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{i\gamma}^\alpha}{\partial q_j} \right. \\ \quad \left. - \frac{\partial \Gamma_{\gamma j}^\alpha}{\partial q_i} + 2\Gamma_{\gamma t}^\alpha \Gamma_{ij}^t \right], \\ \nabla(dFL)_{ij}^{\bar{\gamma}} = \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j \partial \dot{q}_\gamma} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\gamma \partial \dot{q}_k} + \Gamma_{\alpha j}^\gamma \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_\alpha}, \\ \nabla(dFL)_{ij}^{\bar{\gamma}} = \frac{\partial^3 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_\gamma} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_\gamma} + \Gamma_{i\beta}^\gamma \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_j}, \\ \nabla(dFL)_{ij}^{\bar{\gamma}} = \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_\gamma}, \end{array} \right.$$

onde  $i, j, k, \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, m$  e  $\bar{() } = () + m$ .

**Teorema 4.4.1** *A transformación de Legendre é totalmente xeodésica, se e soamente se en cada veciñanza coordinada:*

$$T\mathcal{U} = \{\pi_{TM}^{-1}(\mathcal{U}), (q^1, \dots, q^m; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m)\},$$

as expresións dadas en (4.7) se anulan.

**Demostración:**

Basta ter en conta a definición de aplicación totalmente xeodésica.  $\square$

**Teorema 4.4.2** *A transformación de Legendre é harmónica se e soamente se en cada veciñanza coordinada:*

$$(4.8) \quad T\mathcal{U} = \{\pi_{TM}^{-1}(\mathcal{U}), (q^1, \dots, q^m; \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^m)\}$$

$$g^{ij} \left( \frac{\partial^3 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k} - \Gamma_{ij}^l \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} + \Gamma_{li}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^l} \right) = 0,$$

$i, j, k, l = 1, \dots, m.$

**Demostración:**

Utilizando as expresións de  $(g^C)^{-1}$  (ver (1.1)), temos que o campo de tensión vén dado por:

$$(4.9) \quad \begin{cases} \tau^k = 0, \\ \tau^{\bar{k}} = 2g^{ij} \left( \frac{\partial^3 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k} - \Gamma_{ij}^l \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} + \Gamma_{li}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^l} \right), \end{cases}$$

$i, j, k, l = 1, \dots, m.$

Basta utiliza-la definición de aplicación harmónica para obte-lo resultado.  $\square$

No caso de ter regularidade en  $L$ , sabemos que  $FL$  é un difeomorfismo local.

No seguinte teorema establecemos qué Lagrangianos fan da transformación de Legendre unha isometría local.

**Teorema 4.4.3** *A transformación de Legendre  $FL : (TM, g^C) \rightarrow (T^*M, g_\nabla)$  asociada a un Lagranxiano regular  $L$ , é unha isometría local se e soamente se :*

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}g(\dot{q}, \dot{q}) + \varphi(q), \dot{q} \in T_qM,$$

onde  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función diferenciable.

**Demostración:**

Para que  $FL$  sexa unha isometría debe cumprirse:

$$(4.10) \quad (FL)^*g_\nabla = g^C.$$

Considerémo-las seguintes veciñanzas coordenadas:

$$\mathcal{U} = \{\mathcal{U} \subset M, (q^i)\},$$

$$T\mathcal{U} = \{\pi_{TM}^{-1}(\mathcal{U}) \subset TM, (q^i, \dot{q}^i)\},$$

$$T^*\mathcal{U} = \{\pi^{-1}_{T^*M}(\mathcal{U}) \subset T^*M, (q^i, p_i), i = 1, \dots, m\}.$$

A expresión local da transformación de Legendre é :

$$FL(q^i, \dot{q}^i) = (q^i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}).$$

Calculemos  $(FL)^*g_\nabla$ , usando as compoñentes de  $g_\nabla$  dadas en (1.11).

A condición (4.10) dá lugar ó seguinte sistema de ecuacións diferenciais en derivadas parciais:

$$(4.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^s \partial \dot{q}^r} = g_{rs} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q^r \partial \dot{q}^s} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial q^s} - 2\Gamma_{sr}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \dot{q}^t \frac{\partial g_{rs}}{\partial q^t} \end{cases}$$

A función:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}g(\dot{q}, \dot{q}) + \varphi(q)$$



en coordenadas locais exprésase do xeito seguinte:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \varphi(q^i),$$

onde:

$$\dot{q} = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i},$$

que efectivamente cumpre as condicións (4.11) xa que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s} &= \frac{1}{2} g_{sj} \dot{q}^j + \frac{1}{2} g_{ts} \dot{q}^t \\ &= g_{sj} \dot{q}^j, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^s} &= g_{sr}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q^r \partial \dot{q}^s} &= \dot{q}^j \frac{\partial g_{sj}}{\partial q^r}, \end{aligned}$$

A partir do anterior, e tendo en conta que:

$$\Gamma_{rs}^k = \frac{1}{2} g^{kt} \left\{ \frac{\partial g_{rt}}{\partial q^s} + \frac{\partial g_{ts}}{\partial q^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial q^t} \right\},$$

temos:

$$2\Gamma_{rs}^k g_{kj} = \frac{\partial g_{rj}}{\partial q^s} + \frac{\partial g_{js}}{\partial q^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial q^j},$$

así:

$$\dot{q}^j \frac{\partial g_{sj}}{\partial q^r} + \dot{q}^j \frac{\partial g_{rj}}{\partial q^s} - \dot{q}^t \frac{\partial g_{rs}}{\partial q^t} = 2\Gamma_{sr}^k g_{kj} \dot{q}^j,$$

e isto proba o que queríamos.

Supoñamos agora que  $FL$  é unha isometría. Isto significa que se cumpren as ecuacións diferenciais (4.11), e tendo en conta que a primeira ecuación involucra tan só as derivadas con respecto a  $\dot{q}$ , podemos integrala facendo o cambio de variable:

$$(4.12) \quad u = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r},$$

co cal temos:

$$\frac{\partial u}{\partial \dot{q}^s} = g_{rs},$$

e así:

$$u(q, \dot{q}) = g_{rs}\dot{q}^s + A(q).$$

Volvendo a (4.12), temos:

$$\begin{aligned} g_{rs}\dot{q} + A(q) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r} \\ \Downarrow \\ L(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}g_{rs}\dot{q}^s\dot{q}^r + A(q)\dot{q} + B(q). \end{aligned}$$

Levando este  $L$  á outra ecuación deducimos que se  $A \equiv 0$  temos unha solución do sistema. Como os coeficientes das ecuacións son  $C^\infty$ , temos garantida a unicidade de solución unha vez que fixémo-las condicións iniciais adecuadas, e así:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}g_{rs}\dot{q}^r\dot{q}^s + B(q)$$

é a solución buscada, e isto conclúe o que queriamos probar.

□

**Teorema 4.4.4** *Sexa  $(M, g_T)$  un modelo matemático para un sistema de partículas que se moven en  $\mathbb{R}^3$  suxeito a ligaduras holonómicas. Sexa*

$V : M \rightarrow \mathbb{R}$ , unha función potencial definida sobre  $M$ . Entón, o Lagranxiano:

$$(4.13) \quad L = T - (V \circ \pi_{TM})$$

fai que a transformación de Legendre:

$$(4.14) \quad FL : (TM, g_T^C) \rightarrow (T^*M, (g_T)_\nabla)$$

sexa unha isometría.

**Demostración:**

Este Lagranxiano é hiperregular, polo tanto regular, e así este resultado é unha consecuencia inmediata do Teorema 4.4.3 e da definición da enerxía cinética.  $\square$

**Corolario 4.4.1** *Sexa a variedade simpléctica  $(TM, \omega_L, g^C)$ , onde  $\omega_L$  é a forma simpléctica inducida polo Lagranxiano  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ . Se a transformación de Legendre,  $FL$ , é isometría, entón a 2-forma simpléctica  $\omega_L$  é harmónica.*

**Demostración:**

A diverxencia de  $\omega_L$  vén dada por:

$$\begin{aligned} \delta\omega_L(X) &= -g^{ij}[\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}}(\omega_L(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, X)) - \omega_L(\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, X)] \\ &\quad - \omega_L(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}}X) \\ &= g^{ij}[\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}}(\omega_L(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, X)) - \omega_L(\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, X)] \\ &\quad - \omega_L(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}}X) \\ &= \dot{q}^t \frac{\partial g^{ij}}{\partial q^t} [\nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}}(\omega_L(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, X)) - \omega_L(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}}X)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X^k [g^{ij} (2 \frac{\partial^3 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k} - \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j \partial q^k} - 2\Gamma_{ij}^l \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^l \partial \dot{q}^k}) \\
&+ \dot{q}^l \frac{\partial g^{ij}}{\partial q^l} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k}] - X^{\bar{k}} g^{ij} \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k},
\end{aligned}$$

onde:

$$X = X^k \frac{\partial}{\partial q^k} + X^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \in T(TM)$$

Pelo Teorema 4.4.3,  $FL$  é unha isometría se e soamente se :

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \varphi(q^i),$$

e neste caso:

$$\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta \partial \dot{q}^\gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k} = 0,$$

$$\delta\omega_L(X) = X_k [g^{ij} (2g_{lk} \Gamma_{ij}^l - 2g_{lk} \Gamma_{ij}^l)] = 0,$$

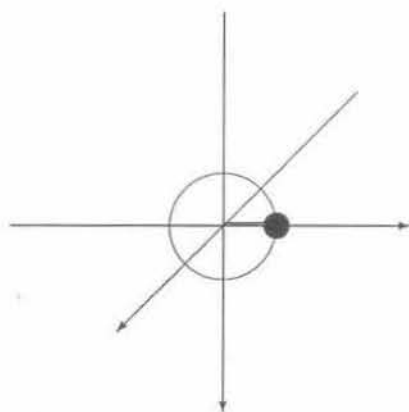
entón tense que  $\omega_L$  é harmónica. □

### 4.4.1 Exemplos de transformacións de Legendre

A continuación danse unha serie de exemplos físicos para os que a transformación de Legendre, nas condicións anteriores, resulta ser isometría, totalmente xeodésica ou harmónica.

#### PÉNDULO ESFÉRICO

Consideremos en primeiro lugar un sistema mecánico dun péndulo esférico, consistente nunha partícula de masa  $m$  restrinxida a moverse, baixo os efectos da gravidade, sobre unha esfera sen fricción. As ligaduras poden lograrse, por exemplo, colocando a partícula no extremo dunha varilla lixeira e facendo que o outro extremo da varilla estea fixo.



A esfera onde se move a partícula é  $S^2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$ , que é unha subvariedade de  $\mathbb{R}^3$ . Considerámo-la inmersión (embebemento) en coordenadas locais:

$$S^2 \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3$$

$$(q^1, q^2) \rightsquigarrow (\sin q^1 \cos q^2, \sin q^1 \sin q^2, \cos q^1).$$

A métrica da enerxía cinética en  $\mathfrak{R}^3$  vén dada en termos da carta identidade,  $(x, y, z)$ , de  $\mathfrak{R}^3$  por:

$$(4.15) \quad \tilde{g}_T = m[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2].$$

As enerxías cinética e potencial exprésanse como:

$$(4.16) \quad \tilde{T} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$(4.17) \quad \tilde{V} = gz, \quad (g = \text{cte. gravitatoria}).$$

Se restrinximos esto a  $S^2$ , temos:

$$(4.18) \quad (i^* \tilde{g}_T) = g_T = m((dq^1)^2 + \sin^2 q^1 (dq^2)^2),$$

$$(4.19) \quad T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m[(\dot{q}^1)^2 + \sin^2 q^1 (\dot{q}^2)^2].$$

Entón o Lagranxiano asociado é:

$$(4.20) \quad L_T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m[(\dot{q}^1)^2 + \sin^2 q^1 (\dot{q}^2)^2] - g \cos q^1.$$

Este Lagranxiano fai que a transformación de Legendre:

$$FL_T : (TS^2, g_T^C) \rightarrow (T^*S^2, (g_T)_\nabla)$$

$$(q^i, \dot{q}^i) \mapsto \left( q^i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)$$

sexa unha isometría.

Consideremos agora o Lagranxiano:

$$(4.21) \quad L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2] + \varphi(q^1, q^2),$$

onde  $\varphi : S^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  é unha función diferenciable.

Vexamos que  $L$  fai de  $FL$  unha aplicación harmónica. En efecto, sen máis que considerármolas expresións do campo de tensión dadas en (4.9), e tendo en conta que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q^k} &= \frac{\partial \varphi}{\partial q^k}, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial q^l} &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} &= m\dot{q}^k, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} &= m\delta^{lk},\end{aligned}$$

obtemos:

$$\tau(FL)^\gamma = 0, \quad \gamma = 1, 2, 3, 4,$$

e isto proba o que queríamos.

Nembargantes  $FL$  non é unha aplicación totalmente xeodésica, xa que se considerámo-los símbolos de Christoffel asociados a  $g_T$ :

$$(4.22) \quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^1 = \sin q^1 \cos q^1, \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{-\sin q^1}{\cos q^1}, \end{cases}$$

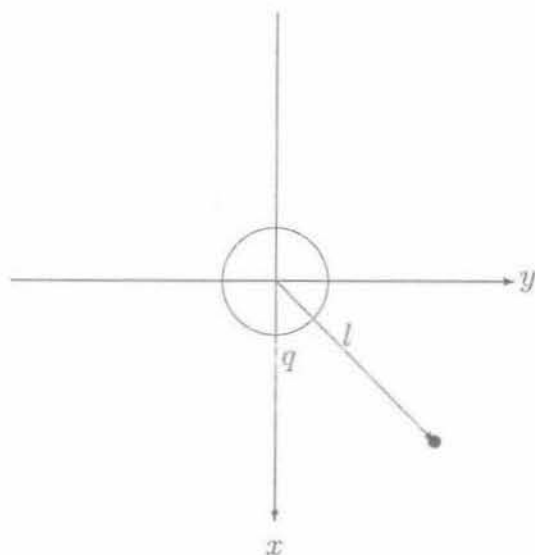
temos que existen termos da segunda forma fundamental de  $FL$  que son distintos de 0, por exemplo:

$$\nabla(dFL)_{12}^3 = m\dot{q}^1 (\sin^2 q^1 - \cos^2 q^1).$$

**Conclusión:** Construimos co modelo matemático do péndulo esférico un exemplo de transformación de Legendre harmónica que non é totalmente xeodésica e, polo tanto, que non é isometría, e outro que ilustra a situación do Teorema 4.4.4.

## PÉNDULO SIMPLE

Consideremos un péndulo simple tal como aparece na ilustración.



Aquí  $M$  é  $S^1$ , e cada punto de  $S^1$  está determinado por unha coordenada  $q$ .

$$S^1 \xrightarrow{i} \mathbb{R}^3$$

$$q \mapsto (l \cos q, l \sin q, 0).$$

As forzas que temos son  $m \cdot g$  e maila tensión, ( $g = \text{cte.}$  gravitatoria e  $m$  a masa da partícula).

Considerámo-la métrica  $\tilde{g}_T = m[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]$  en  $\mathbb{R}^3$ , e así  $i^* \tilde{g}_T = ml^2 dq \otimes dq$  dános unha métrica en  $S^1$ .

A enerxía cinética:

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (i^* \tilde{g}_T) \left( \dot{q} \frac{\partial}{\partial q}, \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} \right) = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{q})^2.$$

A única forza que actúa é na dirección de  $x$ , e así o potencial vén dado por:

$$V(x, y, z) = -mgx.$$



Se nos restrinximos a  $S^1$  obtemos:

$$V(q) = -mgl \cos q.$$

Se  $L = T - V \circ \pi$  tense:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{q})^2 + mgl \cos q.$$

E polo estudiado en xeral para este  $L$ ,  $FL$    isometría.

As ecuaci3ns de Euler-Lagrange neste caso:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = ml^2 \ddot{q}, \\ \frac{\partial L}{\partial q} = -mgl \sin q. \end{cases}$$

Do que se segue:

$$l\ddot{q} + g \sin q = 0.$$

Sexa agora o Lagranxiano:

$$(4.23) \quad L(q, \dot{q}) = A\dot{q} + Bq\dot{q} + C(\dot{q})^2 + D(\dot{q})^3 + \varphi(q),$$

onde  $A, B, C, D \in \mathfrak{R}$  e  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathfrak{R}$    unha aplicaci3n diferenciable.

Este Lagranxiano fai da transformaci3n de Legendre unha aplicaci3n harm3nica, basta ter en conta:

$$\frac{\partial^3 L}{\partial q \partial^2 \dot{q}} = 0,$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma = 0,$$

e a expresi3n do campo de tensi3n de  $FL$  dada no Teorema 4.4.2.

Nembargantes,

$$\begin{aligned}\nabla(dFL)_{22}^2 &= \frac{\partial^3 L}{\partial^3 \dot{q}^3} \\ &= 6D \neq 0,\end{aligned}$$

se  $D \neq 0$ , e polo tanto  $FL$  non é totalmente xeodésica.

Para conseguirmos un Lagranxiano que faga de  $FL$  unha aplicación totalmente xeodésica sen ser isometría basta tomar:

$$(4.24) \quad L(q, \dot{q}) = A\dot{q} + Bq\dot{q} + C(\dot{q})^2 + \varphi(q),$$

onde  $A, B, C \in \mathfrak{R}$  e  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathfrak{R}$  é unha aplicación diferenciable.

**Conclusión:** Temos exemplos das tres categorías de aplicacións:

- $FL$  isometría:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{q})^2 + mgl \cos q.$$

- $FL$  totalmente xeodésica:

$$L(q, \dot{q}) = A\dot{q} + Bq\dot{q} + C(\dot{q})^2 + \varphi(q),$$

onde  $A, B, C \in \mathfrak{R}$ ,  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathfrak{R}$  é unha función diferenciable.

- $FL$  harmónica;

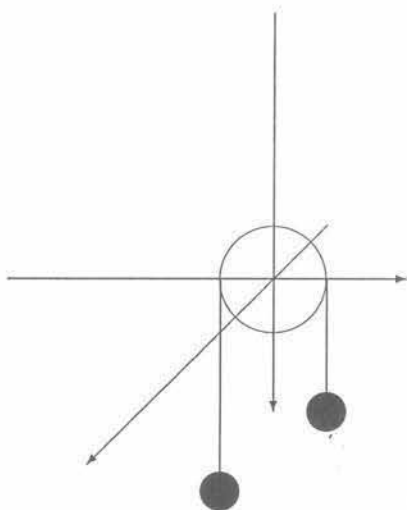
$$L(q, \dot{q}) = A\dot{q} + Bq\dot{q} + C(\dot{q})^2 + D(\dot{q})^3 + \varphi(q),$$

onde  $A, B, C, D \in \mathfrak{R}$ , ( $D \neq 0$ ), e  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathfrak{R}$  é unha función diferenciable.

## MÁQUINA DE ATWOOD

Consiste en dúas masas  $M_1$  e  $M_2$  unidas cun cordeliño que pasa por unha polea sen rozamento.

Considerámola en  $\mathbb{R}^3$  co eixo  $z$  "cara a fóra".



A variedade agora é:

$$M = \{(-a, q, 0, a, l - \pi a - q, 0) \in \mathbb{R}^6; 0 < q < l - \pi a\},$$

e polo tanto  $\dim M = 1$ ,

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{i} \mathbb{R}^6 \\ q &\mapsto (-a, q, 0, a, l - \pi a - q, 0). \end{aligned}$$

Para a construción de  $L$  precisamos  $T$  e  $V$ . A métrica da enerxía cinética en  $\mathbb{R}^6$  vén dada por:

$$\tilde{g}_T = m_i(dx^i)^2,$$

onde:

$$M_1 = m_1 = m_2 = m_3,$$

$$M_2 = m_4 = m_5 = m_6,$$

e así:

$$g_T = i^*(\tilde{g}_T) = (m_2 + m_5)(dq)^2,$$

é unha métrica de Riemann en  $M$ .

A enerxía cinética vén dada por:

$$\begin{aligned} T(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} i^*(g_T) \left( \dot{q} \frac{\partial}{\partial q}, \dot{q} \frac{\partial}{\partial q} \right) \\ &= \frac{1}{2} (m_2 + m_5) (\dot{q})^2. \end{aligned}$$

Por outra banda para calcularmos  $V$  necesitámo-la forza. Sobre cada masa  $m_i$ ,  $i = 2, 5$  actúa peso-tensión, denotaremos por:

- $F_1$  a forza que actúa sobre a masa  $M_1$  na dirección  $x$ ,
- $F_2$  a forza que actúa sobre a masa  $M_1$  na dirección  $y$ ,
- $F_3$  a forza que actúa sobre a masa  $M_1$  na dirección  $z$ .
- Para a masa  $M_2$  denotaremos estas mesmas forzas por  $F_4, F_5$  e  $F_6$  respectivamente.

E témo-lo seguinte:

$$F_i = 0, \quad i = 1, 3, 4, 6,$$

$$F_2 = m_2 g - \tau,$$

$$F_5 = m_5 g - \tau,$$

onde  $\tau$  é unha forza de ligazón. Ademais, a forza non depende de  $\dot{q}$ , e polo tanto, o sistema é holónomo e conservativo.

Escribamos isto con máis detalle:

$$F : T\mathcal{R} \rightarrow T^*\mathcal{R}^6,$$

$$\begin{aligned}
 F &= F_k dx^k \\
 &= F_2 dx^2 + F_5 dx^5 \\
 &= (m_2 g - \tau) dx^2 + (m_5 g - \tau) dx^5 \\
 &= m_2 g dx^2 + m_5 g dx^5 - \tau dx^2 - \tau dx^5.
 \end{aligned}$$

Dado que toda forza pode descompoñerse en forza aplicada e forza de ligazón, e unha forza,  $\tilde{F}$ , é de ligazón se e somentes se  $i^* \tilde{F} = 0$ , temos que  $\tilde{F} = -\tau dx^2(x) - \tau dx^5(x)$  efectivamente é de ligazón, pois cumpre o anterior. Deste xeito a forza total aplicada, que denotaremos por  $F^a$ , é:

$$F^a = m_2 g dx^2 + m_5 g dx^5,$$

entón:

$$(i^* F^a)(q, \dot{q}) = (m_2 g - m_5 g) dq.$$

Como  $F^a$  é conservativa, temos:

$$(i^* F^a)(q, \dot{q}) = -dV(x).$$

Buscamos  $V$  que cumpra o seguinte:

$$\begin{aligned}
 dV(x) &= (-m_2 g + m_5 g) dq(x) \\
 &= \frac{\partial V}{\partial q} \Big|_x dq(x).
 \end{aligned}$$

Como  $x = (-a, q, 0, a, l - \pi a - q, 0)$  temos:

$$V(q) = -m_2 g q + m_5 g (l - \pi a - q),$$

e finalmente:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (m_2 + m_5) (\dot{q})^2 + m_2 g q - m_5 g (l - \pi a - q),$$

que, polo estudado, en xeral nos permite afirmar que  $FL$  é unha isometría.

Como:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q} = -m_2g + m_5g, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_2 + m_5)\dot{q}, \end{cases}$$

as ecuacións de Euler-Lagrange son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= 0 \\ &\Downarrow \\ \frac{d^2q}{dt^2} &= \frac{(-m_2 + m_5)g}{(m_2 + m_5)}. \end{aligned}$$

Resolvendo estas ecuacións, coñecemos-la evolución do sistema.

De xeito similar ó péndulo simple, como  $\Gamma_{11}^1 = \Gamma = 0$ , pódense construír Lagranxianos que fagan da transformación de Legendre unha aplicación harmónica ou totalmente xeodésica, basta considerar:

- $FL$  harmónica e non totalmente xeodésica:

$$L(q, \dot{q}) = A\dot{q} + Bq\dot{q} + C(\dot{q})^2 + D(\dot{q})^3 + \varphi(q),$$

onde  $A, B, C, D \in \mathfrak{R}$ ,  $D \neq 0$ , e  $\varphi : M \rightarrow \mathfrak{R}$  é unha aplicación diferenciable.

- $FL$  totalmente xeodésica e non isometría:

$$L(q, \dot{q}) = A\dot{q} + Bq\dot{q} + C(\dot{q})^2 + \varphi(q),$$

onde  $A, B, C \in \mathfrak{R}$  e  $\varphi : M \rightarrow \mathfrak{R}$  é unha aplicación diferenciable.

## 4.5 Transformación de Hamilton

Sexa  $(M, g)$  unha variedade semi-riemanniana. Igual que no caso da transformación de Legendre a transformación de Hamilton pode ser considerada coma unha aplicación entre variedades semi-riemannianas:

$$\begin{aligned} (T^*M, g_{\nabla}) &\xrightarrow{FH} (TM, g^C) \\ (q^i, p_i) &\mapsto \left(q^i, \frac{\partial H}{\partial p_i}\right). \end{aligned}$$

A segunda forma fundamental de  $FH$  vén dada por:

$$(4.25) \left\{ \begin{aligned} \nabla(dFH)^{\gamma} &\equiv (0), \\ \nabla(dFH)_{ij}^{\bar{\gamma}} &= \frac{\partial^3 H}{\partial q_i \partial q_j \partial p_{\gamma}} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_{\gamma}} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \left[ \frac{\partial \Gamma_{ij}^{\alpha}}{\partial q_{\gamma}} \right. \\ &\quad - \frac{\partial \Gamma_{i\gamma}^{\alpha}}{\partial q_j} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma j}^{\alpha}}{\partial q_i} + 2\Gamma_{\gamma t}^{\alpha} \Gamma_{ij}^t \left. \right] \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_{\gamma}} \\ &\quad + \dot{q}_t \frac{\partial \Gamma_{ij}^{\gamma}}{\partial q_t} + \Gamma_{i\beta}^{\gamma} \frac{\partial^2 H}{\partial p_{\beta} \partial q_j} + \Gamma_{\alpha j}^{\gamma} \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_{\alpha}}, \\ \nabla(dFH)_{ij}^{\bar{\gamma}} &= \frac{\partial^3 H}{\partial p_i \partial q_j \partial p_{\gamma}} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_{\gamma}} + \Gamma_{\alpha j}^{\gamma} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_{\alpha}}, \\ \nabla(dFH)_{ij}^{\bar{\gamma}} &= \frac{\partial^3 H}{\partial q_i \partial p_j \partial p_{\gamma}} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_{\gamma}} + \Gamma_{i\beta}^{\gamma} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_{\beta}}, \\ \nabla(dFH)_{ij}^{\bar{\gamma}} &= \frac{\partial^3 H}{\partial p_i \partial p_j \partial p_{\gamma}}, \end{aligned} \right.$$

onde  $i, j, k, \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, m$  e  $\bar{() } = () + m$ .

Vexamos baixo qué condicións  $FH$  é totalmente xeodésica, harmónica ou isometría.

**Teorema 4.5.1** *A transformación de Hamilton é totalmente xeodésica se e soamente se en cada veciñanza coordenada:*

$$T^*(\mathcal{U}) = \{\pi_{T^*M}^{-1}(\mathcal{U}), (q^1, \dots, q^m; p_1, \dots, p_m)\},$$

as expresións dadas en (4.25) se anulan.

**Demostración:**

O resultado obtense da definición de aplicación totalmente xeodésica.  $\square$

**Teorema 4.5.2** *A transformación de hamilton é harmónica se e soamente se en cada veciñanza coordinada:*

$$T^*(\mathcal{U}) = \{\pi_{T^*M}^{-1}(\mathcal{U}), (q^1, \dots, q^m; p_1, \dots, p_m)\},$$

$$\delta_i^j \left( \frac{\partial^3 H}{\partial p_i \partial q_j \partial p_k} - \Gamma_{ij}^l \frac{\partial^2 H}{\partial p_l \partial p_k} + \Gamma_{il}^k \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_l} \right) + p_l \Gamma_{ij}^l \frac{\partial^3 H}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k} = 0.$$

**Demostración:**

Utilizando as compoñentes de  $(g_{\nabla})^{-1}$  (ver(1.11)), témo-las expresións do campo de tensión:

$$(4.26) \left\{ \begin{array}{l} \tau(FH)^k = 0, \\ \tau(FH)^{\bar{k}} = 2\delta_i^j \left( \frac{\partial^3 H}{\partial p_i \partial q_j \partial p_k} - \Gamma_{ij}^l \frac{\partial^2 H}{\partial p_l \partial p_k} + \Gamma_{il}^k \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_l} \right) \\ \quad + 2p_l \Gamma_{ij}^l \frac{\partial^3 H}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k}. \end{array} \right.$$

A definición de aplicación harmónica dá lugar ó resultado.  $\square$

A condición necesaria e suficiente para que un Hamiltoniano faga da transformación de Hamilton unha isometría local vén dado por:

**Teorema 4.5.3** *A transformación de Hamilton:*

$$FH : (T^*M, g_{\nabla}) \rightarrow (TM, g^C),$$



asociada a un Hamiltoniano regular  $H$ , é unha isometría local se e soamente se :

$$(4.27) \quad H(q, p) = \frac{1}{2}g(\sharp(p), \sharp(p)) + \psi(q), \quad p \in T^*_q M,$$

onde  $\psi : M \rightarrow \mathfrak{R}$  é unha función diferenciable.

### Demostración:

Sabemos que  $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + \varphi(q^i)$  se e soamente se  $FL$  é unha isometría local. Ademais  $FH = (FL)^{-1}$ , e construímos  $FH$  a partir de  $H = E_L \circ (FL)^{-1}$ , sendo  $E_L$  a enerxía:

$$\begin{aligned} E_L &= A - L \\ &= \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L. \end{aligned}$$

Como:  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = g_{ij}\dot{q}^j$ , temos:

$$E_L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - \varphi(q^i),$$

e así:

$$\begin{aligned} H(q^i, p_i) &= E_L \circ (FL)^{-1}(q^i, p_i) \\ &= E_L(q^i, p_k g^{ki}) \\ &= \frac{1}{2}g_{ij}p_k g^{ki} p_s g^{sj} - \varphi(q^i) \\ &= \frac{1}{2}p_k p_s g^{ks} - \varphi(q^i). \end{aligned}$$

E isto permítenos afirmar que  $FH$  é unha isometría local se e soamente se  $H$  ten a expresión anterior, que, escrita globalmente, é a dada polo teorema.  $\square$

Temos tamén a versión análoga para a transformación hamiltoniana no caso de modelos matemáticos.

**Teorema 4.5.4** *Sexa  $(M, g_T)$  un modelo matemático para un sistema de partículas que se moven en  $R^3$  suxeito a ligaduras holonómicas. Sexa  $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ , unha función potencial definida sobre  $M$ . Entón o Hamiltoniano:*

$$(4.28) \quad H = E_L \circ (FL)^{-1}, (L = T - (V \circ \pi_{TM})),$$

*sendo  $E_L$  a enerxía, fai que a transformación de Hamilton:*

$$(4.29) \quad FH : (T^*M, (g_T)_\nabla) \rightarrow (TM, (g_T)^C),$$

*sexo unha isometría.*

**Demostración:**

Este Hamiltoniano é hiperregular, polo tanto regular. Paralelamente ó caso lagranxiano, o resultado é unha consecuencia inmediata do teorema 4.5.3 e da definición de enerxía cinética.  $\square$

### 4.5.1 Exemplos de transformaci3ns de Hamilton

Vexamos agora a versi3n hamiltoniana dos exemplos f3sicos estudia- dos na secci3n anterior. Obtemos aqu3 Hamiltonianos para os que a trans- formaci3n de Hamilton resulta ser isometria, totalmente xeod3sica ou harm3nica.

#### P3NDULO ESF3RICO

O Lagranxiano considerado en (4.20):

$$L_T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m[(\dot{q}^1)^2 + \sin^2 q^1 (\dot{q}^2)^2] - g \cos q^1,$$

3 un Lagranxiano hiperregular; seguindo o Teorema 4.2.3 podemos cons- truí-lo Hamiltoniano asociado:

$$\begin{aligned} H &= E_L \circ (FL_T)^{-1} \\ &= E_L(q^i, \dot{q}^i). \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} E_L &= A - L_T \\ &= \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L_T \\ &= \frac{1}{2}m[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 \sin^2 q^1] + g \cos q^1, \end{aligned}$$

ent3n:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}m[p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2 q^1}] + g \cos q^1$$

e, para este  $H$ , a aplicaci3n:

$$FH : (T^*S^2, (g_T)_\nabla) \rightarrow (TS^2, g_T^C)$$

$$(q^i, p_i) \mapsto \left( q^i, \frac{\partial H}{\partial p_i} \right),$$

é unha isometría sen máis que ter en conta o Teorema 4.5.3.

Se consideramos agora o Lagranxiano:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2] + \varphi(q^1, q^2),$$

ó igual que no caso anterior,  $L$  é un Lagranxiano hiperregular, e así podemos construí-lo Hamiltoniano  $H$  tamén do mesmo xeito, e tense:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}m[(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2] - \varphi(q^1, q^2)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^4 q^1}\right) - \varphi(q^1, q^2)$$

Este  $H$  fai que  $FH$  sexa unha aplicación harmónica. En efecto, sen máis que considera-las expresións do campo de tensión dadas en (4.26), obtemos:

$$(4.30) \quad \tau(FH)^\gamma = 0, \quad \gamma = 1, 2, 3, 4,$$

e isto proba o que queríamos.

Nembargantes  $FH$  non é unha aplicación totalmente xeodésica, pois tendo en conta as expresións dos símbolos de Christoffel asociados a  $g_T$  dadas en (4.22), temos termos da segunda forma fundamental de  $FH$  que son distintos de cero, por exemplo:

$$\nabla(dFH)_{41}^4 = \frac{\partial^3 H}{\partial p_2 \partial q_1 \partial p_2} - \Gamma_{21}^k \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_2} + \Gamma_{\alpha 1}^2 \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_\alpha}$$

$$= \frac{4 \cos q^1}{m \sin^5 q^1}$$

**Nota:** Hai que ter en conta o feito de que, así como a inversa dunha isometría é unha isometría, isto non ocorre coas aplicacións harmónicas. Isto fai índa máis interesante este exemplo, xa que temos que a inversa dunha aplicación harmónica resulta selo tamén.

**Conclusión:** Coma no caso lagranxiano, construimos co modelo matemático do péndulo esférico un exemplo de transformación de Hamilton harmónica que non é totalmente xeodésica, e, polo tanto, que non é isometría, e outra que ilustra o Teorema 4.5.4.

## PÉNDULO SIMPLE

Se pasámo-lo exemplo:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{q})^2 + mgl\cos q$$

á formulación hamiltoniana, a transformación de Hamilton correspondente resultará ser unha isometría.

Temos:

$$V(q) = -mgl\cos q,$$

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}ml^2(\dot{q})^2.$$

Como  $L$  é un Lagranxiano hiperregular  $FL$  é un difeomorfismo,  $FH = FL^{-1}$  e ademais  $H = E \circ (FL)^{-1}$  onde  $E$  é a enerxía. Temos entón:

$$\begin{array}{ccc} TM \xrightarrow{FL} T^*M & T^*M \xrightarrow{FH} TM \\ (q, \dot{q}) \mapsto (q, ml^2\dot{q}) & (q, p) \mapsto (q, \frac{p}{ml^2}), \end{array}$$

$$\begin{aligned} E_L(q, \dot{q}) &= T(q, \dot{q}) + (V \circ \pi)(q, \dot{q}) \\ &= \frac{1}{2}ml^2(\dot{q})^2 - mgl\cos q, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{FL} & T^*M \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & E & E \circ (FL)^{-1} =: H \\
 & & \mathfrak{R}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 H(q, p) &= (E_L \circ (FL)^{-1})(q, p) \\
 &= E_L\left(q, \frac{p}{ml^2}\right) \\
 &= \frac{1}{2}ml^2 \frac{p^2}{m^2l^4} - mgl \cos q \\
 &= \frac{1}{2} \frac{p^2}{ml^2} - mgl \cos q.
 \end{aligned}$$

Así:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{ml^2} - mgl \cos q,$$

e para este  $H$ ,  $FH$  é unha isometría polo estudiado en xeral:

As ecuacións de Hamilton:

$$\begin{cases}
 \frac{dq}{dt} \Big|_t = \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_{(q(t), p(t))} = \frac{p(t)}{ml^2} = \dot{q}(t), \\
 \frac{dp}{dt} \Big|_t = -\frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{(q(t), p(t))} = -mgl \sin(q(t)).
 \end{cases}$$

De aquí séguese:

$$\frac{dp}{dt} = -mgl \sin(q(t))$$

$$\parallel$$

$$ml^2(\ddot{q}(t)),$$

e finalmente:

$$l\ddot{q} + g \sin q = 0;$$

ecuación que coincide coa de Euler-Lagrange.

Sexa agora o Hamiltoniano:

$$H(q, p) = Ap + Bqp + Cp^2 + Dp^3 + \psi(q),$$

onde  $A, B, C, D \in \mathfrak{R}$  e  $\psi : S^1 \rightarrow \mathfrak{R}$  é unha aplicación diferenciable.

Este Hamiltoniano fai da transformación de Hamilton unha aplicación harmónica, basta ter en conta:

$$\frac{\partial^3 H}{\partial q \partial p^2} = 0,$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma = 0,$$

e a expresión do campo de tensión de  $FH$  dada no Teorema 4.5.2.

Nembargantes, igual que no caso lagranxiano:

$$\begin{aligned} \nabla(dFH)_{22}^2 &= \frac{\partial^3 H}{\partial p^3} \\ &= 6D \neq 0, \end{aligned}$$

se  $D \neq 0$ , e polo tanto,  $FH$  non é totalmente xeodésica.

Por último, o Hamiltoniano:

$$H(q, p) = Aqp + Bp + Cp^2 + \psi(q),$$

onde  $A, B, C \in \mathfrak{R}$  e  $\psi : S^1 \rightarrow \mathfrak{R}$  unha aplicación diferenciable, fai da transformación de Hamilton unha aplicación totalmente xeodésica sen ser isometría.

**Conclusión:** Coma no caso lagranxiano volvemos ter exemplos de tres categorías de aplicacións:

- $FH$  isometría:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{ml^2} - mg \cos q.$$

- $FH$  totalmente xeodésica:

$$H(q, p) = Ap + Bqp + Cp^2 + \psi(q),$$

onde  $A, B, C \in \mathfrak{R}$  e  $\psi : S^1 \rightarrow \mathfrak{R}$  unha aplicación diferenciable.

- $FH$  harmónica:

$$H(q, p) = Ap + Bqp + Cp^2 + Dp^3 + \psi(q),$$

onde  $A, B, C, D \in \mathfrak{R}, D \neq 0$ , e  $\psi : S^1 \rightarrow \mathfrak{R}$  unha aplicación diferenciable.

## MÁQUINA DE ATWOOD

Tiñámo-lo Lagranxiano:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(m_2 + m_5)(\dot{q})^2 + m_2 g q - m_5 g(l - \pi a - q).$$



e o mesmo que no exemplo anterior,  $L$  é un Lagranxiano hiperregular, e pola teoría xeral:

$$\begin{aligned} H(q, p) &= (E_L \circ (FL)^{-1})(q, p) \\ &= E_L\left(q, \frac{p}{m_2 + m_5}\right). \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} E_L(q, \dot{q}) &= T(q, \dot{q}) + (V \circ \pi)(q, \dot{q}), \\ &= \frac{1}{2}(m_2 + m_5)(\dot{q})^2 - m_2 g q - m_5 g(l - \pi a - q), \end{aligned}$$

tense:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{(m_2 + m_5)} - m_2 g q - m_5 g(l - \pi a - q),$$

o que nos permite afirmar que  $FH$  é unha isometría.

E por último, tendo en conta:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q} = m_2 g + m_5 g, \\ \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_2 + m_5}, \end{cases}$$

as ecuacións de Hamilton son:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} \Big|_t = \frac{\partial H}{\partial p} \Big|_{(q(t), p(t))} = \frac{p(t)}{m_2 + m_5}, \\ \frac{dp}{dt} \Big|_t = -\frac{\partial H}{\partial q} \Big|_{(q(t), p(t))} = -m_2 g + m_5 g. \end{cases}$$

Neste caso tamén  $\Gamma_{11}^1 = \Gamma = 0$ , e pódense construír Hamiltonianos que fagan da transformación de Hamilton unha aplicación harmónica ou totalmente xeodésica; basta considerar:

- $FH$  harmónica e non totalmente xeodésica:

$$H(q, p) = Ap + Bqp + Cp^2 + Dp^3 + \psi(q),$$

onde  $A, B, C, D \in \mathfrak{R}$ ,  $D \neq 0$ , e  $\psi : M \rightarrow \mathfrak{R}$  é unha aplicación diferenciable.

- $FH$  totalmente xeodésica e non isometría:

$$H(q, p) = Ap + Bqp + Cp^2 + \psi(q),$$

onde  $A, B, C \in \mathfrak{R}$  e  $\psi : M \rightarrow \mathfrak{R}$  é unha aplicación diferenciable.



# Bibliografía

- [1] R. ABRAHAM, J.E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings (1981).
- [2] A. BESSE, *Einstein manifolds*, Erg. Math. G., Folge 10, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
- [3] B.Y. CHEN, T. NAGANO, Harmonic metrics, harmonic tensors, and Gauss maps, *J. Math. Soc. Japan*, **36** (1984), 295–313.
- [4] B.Y. CHEN, L. VANHECKE, Differential geometry of geodesic spheres, *J. Reine Angew. Math.*, **325** (1981), 28–67.
- [5] E.T. DAVIS, On the curvature of the Tangent Bundle, *Ann. Mat. Pure Appl. (IV)*, **81** (1969), 193–204.
- [6] P. DOMBROWSKI, On the geometry of the Tangent Bundle, *Reine Angew. Math.*, **210** (1962), 73–88.
- [7] J. EELLS, L. LEMAIRE, A report on harmonic maps, *Bull. London Math. Soc.*, **10** (1978), 1–68.
- [8] J. EELLS, L. LEMAIRE, Another report on harmonic maps, *Bull. London Math. Soc.*, **20** (1988), 385–524.
- [9] J. EELLS, J.H. SAMPSON, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 109–160.
- [10] P.M. GADEA, J.M. MASQUÉ, Classification of Almost Parahermitian Manifolds, *Rend. Mat. Appl.*, **11** (1991), 377–396.

- [11] E. GARCÍA-RÍO, L. VANHECKE, M.E. VÁZQUEZ-ABAL, Tangent bundles of order  $r$  and harmonicity of induced maps, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (a aparecer).
- [12] E. GARCÍA-RÍO, L. VANHECKE, M.E. VÁZQUEZ-ABAL, Harmonic connections, *Acta Math. (Szeged)*, **62** (1996), 61-83.
- [13] E. GARCÍA-RÍO, L. VANHECKE, M.E. VÁZQUEZ-ABAL, Harmonic endomorphisms fields, *Illinois J. Math.*, **41** (1997), 23-29.
- [14] E. GARCÍA-RÍO, L. VANHECKE, M.E. VÁZQUEZ-ABAL, Notes on harmonic tensor fields, *Proceeding of the Conference on Differential Geometry*, Budapest 1996. (J. Szenthe, ed.) Kluwer Acad. Publ., (a aparecer).
- [15] C. GODBILLON, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann, París, 1969.
- [16] A. GRAY, L. HERVELLA, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **123** (1980), 35-58.
- [17] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience, New York, vol.I (1963), vol.II (1969).
- [18] A.J. LEDGER, K. YANO, Almost complex structures on Tensor Bundles, *J. Diff. Geom.*, **1** (1967), 355-368.
- [19] O. NOUHAUD, Applications harmoniques d'une variété Riemannienne dans son fibré tangent. Généralisation, *Acad. Sci. París*, **284** (1977), 815-818.
- [20] E.M. PATTERSON, A.G. WALKER, Riemann Extensions, *Quart. Jour. Math., Oxford*, **3** (1952), 19-28.
- [21] W.A. POOR, *Differential geometric structures*, McGraw-Hill, 1981.
- [22] S. SASAKI, On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, *Tôhoku Math. J.*, **10** (1958), 233-354.

- [23] S. SASAKI, On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II, *Tôhoku Math. J.* **14** (1962), 146–155.
- [24] S. TACHIBANA, M. OKUMURA, On the Almost-Complex Structures of Tangent Bundles of Riemannian Spaces, *Tôhoku Math. J.*, bf 14 (1962), 156–161.
- [25] M.E. VÁZQUEZ-ABAL, Harmonicity on the tangent bundle of order  $r$ , *C.R. Acad. Sci. Paris* **312** (1991), 131–136.
- [26] K. YANO, E.T. DAVIS, Metrics and Connections on the Tangent Bundle, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **23** (1971), 493–504.
- [27] K. YANO, S. ISHIHARA, *Tangent and cotangent bundles*, Pure and Appl. Math. **16**, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [28] K. YANO, S. KOBAYASHI, Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, I, General Theory, *J. Math. Soc. Japan*, **18** (1966), 194–210.
- [29] K. YANO, S. KOBAYASHI, Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, II, Affine Automorphisms, *J. Math. Soc. Japan*, **18** (1966), 236–246.
- [30] K. YANO, S. KOBAYASHI, Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, III, holonomy Groups; *J. Math. Soc. Japan*, **39** (1967), 486–488.
- [31] K. YANO, T. NAGANO, On geodesic vector fields in a compact orientable Riemannian space, *Comm. Math. Helv.*, **35** (1961), 55–64.
- [32] K. YANO, E.M. PATTERSON, Vertical and Complete Lifts from a manifold to its Cotangent Bundle, *J. Math. Soc. Japan*, **19** (1976), 91–113.
- [33] K. YANO, E.M. PATTERSON, Horizontal Lift from a manifold to Its Cotangent Bundle, *J. Math. Soc. Japan*, **19** (1967), 185–198.

