LUCÍA FERNÁNDEZ SUÁREZ

SOBRE LOS ESPACIOS DE CATEGORÍA DOS

91

1998

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sobre los espacios de categoría dos.

Lucía Fernández Suárez

Muchas gracias...

Daniel por tu amabilidad, tu buen humor y tu apoyo constante que hacen que todo parezca sencillo, por facilitarme la asistencia a tantos congresos y coloquios provechosos, por ser mi director de tesis,

Antonio por ocuparte (y preocuparte) de mis problemas académicos y administrativos, por tu eficacia y disponibilidad, por ser mi tutor,

Octavian, Steve y Jean-Claude por vuestra cordialidad, por vuestras correcciones, por dedicarme parte de vuestro tiempo,

Quique, Xosé y Aniceto por vuestra humanidad, por aceptar ser miembros del jurado,

Yves, John y Pascal por vuestra simpatía y generosidad, por compartir vuestras ideas conmigo, por todo lo que me habéis enseñado (gracias también Pascal por tu paciencia para contestar preguntas tontas),

Cristina por todas las horas (muchas robadas al sueño) que me dedicaste corrigiendo los detalles, compartiendo la fatiga y los apuros de última hora,

a todos los que me habéis hecho pasar en Lille y en Toronto tantos y tantos momentos inolvidables.

A mis padres

Introducción

En 1934 Lusternik y Schnirelmann introdujeron una acotación inferior del número de puntos críticos de una función diferenciable definida sobre una variedad M [27]. Esta acotación, conocida como la categoría de Lusternik y Schnirelmann, fue definida para un espacio topológico A por Fox en 1941 como el menor entero n tal que A puede recubrirse por $n+1$ abiertos contráctiles en A y es un invariante numérico del tipo de homotopía.

La categoría es un invariante que aporta información muy interesante sobre el tipo de homotopía del espacio (e.g. un espacio tiene categoría uno si y sólo si es un co-H-espacio), pero su cálculo directo es difícil. Whitehead y Ganea introdujeron en 1956 y 1961 caracterizaciones alternativas de la categoría, que permiten comprenderla mejor y que en algunos casos facilitan el cálculo.

Otra manera de enfocar el problema de la determinación de la categoría es tratar de acotarla, introduciendo nuevos invariantes numéricos. Entre las posibles acotaciones se encuentra la categoría fuerte o longitud de conos, un invariante del tipo de homotopía introducido por Ganea en [16] y perfeccionado por Cornea en [7], que es una acotación superior. De hecho, estos invariantes están muy próximos: la diferencia entre la categoría y la categoría fuerte es a lo sumo uno. Los co-H-espacios que no son suspensiones son espacios de categoría uno y categoría fuerte dos [6] y existen ejemplos recientes [11] de espacios de categoría tres y categoría fuerte cuatro. Curiosamente, los espacios de categoría dos permanecen aún sin desvelar: no se conocen ejemplos de espacios con categoría dos y categoría fuerte tres. Hay que señalar que dos de las conjeturas clásicas en Teoría de la Homotopía, la conjetura de Serre y la conjetura de Ganea, han resultado ser falsas y los contraejemplos encontrados respectivamente por Anick en 1986 e Iwase en 1997 son precisamente espacios cuya categoría es dos.

Los espacios racionales de tipo finito, i.e. los espacios topológicos simplemente conexos cuyos grupos de homotopía son espacios racionales de dimension finita, son un caso un poco particular: tienen categoría uno si y sólo si tienen categoría fuerte uno. Lemaire y Sigrist conjeturaron en [28] que la categoría y la categoría fuerte coinciden para los espacios racionales. Esta conjetura es falsa en general: Dupont [11] ha encontrado un espacio racional de categoría tres y categoría fuerte cuatro. Sin embargo, Félix y Thomas en [13] demostraron que si un espacio tiene categoría dos y es racional su categoría fuerte también es dos. Generalizaremos este resultado siguiendo dos direcciones (cf. capítulo 3); una de ellas eliminando la hipótesis "tipo finito" y otra demostrando un resultado análogo para espacios p-locales (i.e. sus grupos de homotopía son $\mathbf{Z}_{(p)}$-módulos) cuyo espacio de lazos admite cierta descomposición.

Las pruebas de esas generalizaciones están basadas en un nuevo fenómeno de cancelación de esferas, demostrado en el segundo capítulo, y tienen la ventaja de utilizar argumentos geométricos, y no los modelos algebraicos empleados normalmente en el estudio de espacios racionales y p-locales. Los problemas de cancelación de esferas son muy interesantes: consisten en estudiar la relación entre las propiedades homotópicas de A y las de una suma puntual $A \vee \mathbf{S}^n$. La situación no es tan sencilla como parece; existen ejemplos de espacios topológicos tales que $A \vee \mathbf{S}^n$ tiene el tipo de homotopía de $B \vee \mathbf{S}^n$ y A y B no tienen el mismo tipo de homotopía. El fenómeno de cancelación que demostramos aquí es el siguiente: si $A \vee \mathbf{S}^n$ es la cofibra homotópica de una aplicación entre sumas puntuales de esferas, A también será cofibra de una aplicación de este tipo, si A es racional o p-local.

Por último abordaremos el problema de la categoría y la categoría fuerte de un producto. Bassi demostró en [3] (ver también [14]) que la categoría de un producto de dos espacios está acotada por la suma de las categorías de los espacios,

$$\mathrm{cat}(A \times B) \leq \mathrm{cat}A + \mathrm{cat}B.$$

donde cat denota la categoría.

Hasta hace poco tiempo, el único ejemplo conocido donde la desigualdad era estricta es el producto de dos espacios A y B tales que $A \times B$ tiene el tipo de homotopía de la suma puntual $A \vee B$ (cf ejemplo 4.2.3). Félix, Halperin y Lemaire [12] han demostrado que para espacios racionales que verifiquen la dualidad de Poincaré se tiene siempre la igualdad. Ganea conjeturó la igualdad si uno de los espacios era una esferas, i.e. $\mathrm{cat}(A \times \mathbf{S}^n) = \mathrm{cat}A + 1$. Esta conjetura fue demostrada para espacios racionales por K. Hess en [22], pero en el caso general resulta ser falsa:

como hemos mencionado anteriormente, Iwase [25] ha proporcionado un espacio de categoría dos cuyo producto con la esfera sigue teniendo categoría dos.

Respecto a la categoría fuerte de un producto, Takens demostró en [39] una fórmula parecida a la de Bassi, denominada la fórmula del producto mixto:

$$\mathrm{Cat}(A \times B) \leq \mathrm{cat}A + \max\{\mathrm{Cat}B, 1\}$$

donde Cat denota la categoría fuerte y cat la categoría. Los ejemplos conocidos donde la desigualdad es estricta son los mismos que para la categoría, es decir, tales que $A \times B \sim A \vee B$(cf ejemplo 4.2.3), son ejemplos donde el espacio A tiene la homología enteramente de torsión. Presentaremos aquí un primer ejemplo de espacios sin torsión homológica donde la desigualdad de la fórmula del producto mixto es estricta. Demostraremos en el capítulo cinco que existe un espacio X, sin torsión en homología, de categoría fuerte dos y tal que la categoría fuerte del producto $X \times X$ sigue siendo dos.

El texto se organiza de la manera siguiente:

En el primer capítulo recordaremos la definición original de categoría, las definiciones equivalentes de Whitehead y Ganea, y los resultados que se deducen de ellas; así como las definiciones y propiedades de la categoría fuerte y de otras acotaciones de la categoría: la longitud en conos de esferas y la nilpotencia.

En el segundo capítulo presentamos un resumen de la teoría de localización de CW-complejos simplemente conexos [24]. Se demostrarán los resultados mencionados anteriormente sobre cancelación de esferas en el caso racional y p-local.

En el tercer capítulo aplicamos los resultados anteriores de cancelación a los espacios de categoría dos racionales y a los espacios de categoría dos p-locales denominados descomponibles.

El capítulo cuarto está dedicado a las fórmulas de Bassi y Takens sobre la categoría y la categoría fuerte de un producto. Si suponemos los espacios A y B de categoría fuerte uno, i.e. suspensiones, existe una demostración alternativa de que $\mathrm{Cat}(A \times B) \leq 2$ utilizando el Producto de Whitehead Generalizado introducido por Arkowitz en [1]. Presentaremos también un Teorema de Rutter, que generaliza ese Producto de Whitehead y es un resultado clave en las demostraciones del quinto capítulo.

El objetivo del quinto capítulo es el estudio de la categoría fuerte de la localización en 3 del espacio $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7) \times (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)$, donde $\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7$ es un co-H-espacio que no es una suspensión [6]. Demostraremos que $\mathrm{Cat}(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} \times (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} = 2$. Se encuentra así un ejemplo de espacio cuya categoría fuerte no sube al multiplicarlo por sí mismo para un espacio de categoría fuerte dos.

Hemos introducido un apéndice sobre límites homotópicos, recordando las definiciones de cofibraciones homotópicas, fibraciones homotópicas y enunciando las propiedades y construcciones más habituales.

Indice

Capítulo 1

La categoría y sus aproximaciones.

La categoría de Lusternik y Schnirelmann de un espacio topológico A, o simplemente categoría de A, es un invariante numérico del tipo de homotopía de A. Fue introducido en [27] por Lusternik y Schnirelmann para minorar el número de puntos críticos de una función diferenciable definida sobre una variedad.

Empezaremos el capítulo recordando la definición original de categoría y las propiedades inmediatas. Después presentaremos dos definiciones equivalentes de categoría, desarrolladas por Whitehead y Ganea, y los resultados que se deducen de ellas. Finalmente, como en general la categoría es un invariante difícil de calcular, introduciremos algunas acotaciones. Nos ocuparemos primero de la nilpotencia del anillo de cohomología reducida que es una acotación inferior y por último prestaremos especial atención a las acotaciones superiores denominadas la categoría fuerte y la longitud en conos de esferas.

1.1 Definición de cat y primeras propiedades.

Definición 1.1.1 *Sea A un espacio topológico. Sea U un subconjunto abierto de A. Diremos que U es categórico en A si es contráctil en A, es decir, si la inclusión $U \hookrightarrow A$ es homótopa a una aplicación constante. Un recubrimiento abierto de A formado por abiertos categóricos se dirá recubrimiento categórico.*

Un abierto contráctil es un abierto categórico, el recíproco es falso en general.

De hecho, la noción "ser categórico" depende del espacio A. En $\mathbf{R}^n$ todos los subconjuntos abiertos son categóricos, por ser $\mathbf{R}^n$ contráctil, sin embargo, no todos los abiertos de $\mathbf{R}^n$ son contráctiles.

Definición 1.1.2 *Sea A un espacio topológico. Diremos que la categoría de Lusternik y Schnirelmann de A, o simplemente la categoría de A, $catA$, es menor o igual que n si A admite un recubrimiento formado por $n+1$ abiertos categóricos. Si no existe tal recubrimiento escribiremos $catA = \infty$.*

Ejemplo 1.1.3 *Categoría de los espacios contráctiles.*

La categoría de un espacio contráctil es 0. En particular, dado un espacio topológico arbitrario A, el cono de A, $\mathcal{C}A$, y el cono reducido de A (si A tiene punto base), $A \wedge \mathbf{I}$, tienen categoría cero.

Ejemplo 1.1.4 *Categoría de las suspensiones.*

Dado A espacio topológico la categoría de la suspensión de A, SA, y de la suspensión reducida de A (si A tiene punto base), ΣA, es menor o igual a 1. En particular, la categoría de la esfera n-dimensional $\mathbf{S}^n$ es 1.

Definición 1.1.5 *Dado A un espacio topológico con punto base $*$ diremos que A tiene un buen punto si la inclusión $* \hookrightarrow A$ es un cofibración, es decir, si $*$ admite un entorno abierto N contráctil a $*$, relativamente a $*$ [38].*

Propiedad 1.1.6 *Categoría de un espacio normal.*

(i) Sea A un espacio topológico normal. Se tiene que $catA \leq n$ si y sólo si existe un recubrimiento de A formado por $n+1$ abiertos $\{V_r\}_{0\leq r\leq n}$ y una familia de $n+1$ homotopías $h_r : A \times \mathbf{I} \longrightarrow A$ tales que $h_r(a,0) = a \ \ \forall a \in A$ y $h_r(-,1)$ constante en V_r.

(ii) Sea A un espacio topológico normal, conexo por caminos y con buen punto base $*$. Se tiene que $catA \leq n$ si y sólo si existe un recubrimiento de A formado por $n+1$ abiertos $\{V_r\}_{0\leq r\leq n}$ contráctiles en A relativamente al punto $*$.

Demostración. (i) Sea $\{U_r\}_{0\leq r\leq n}$ un recubrimiento de A formado por $n+1$ abiertos categóricos, i.e. existen $n+1$ homotopías $h'_r : U_r \times \mathbf{I} \longrightarrow A$ tales que $h'_r(u,0) = u \ \ \forall u \in U_r$ y $h'_r(-,1)$ constante. Utilizando la normalidad de A podemos obtener dos recubrimientos de A: $\{V_r\}_{0\leq r\leq n}$, $\{W_r\}_{0\leq r\leq n}$ y una familia de aplicaciones contínuas $\lambda_r : A \longrightarrow \mathbf{I}$ tales que $V_r \subset \overline{V}_r \subset W_r \subset \overline{W}_r \subset U_r$ y $\lambda_r(\overline{V}_r) = 1$ y $\lambda_r(A - W_r) = 0$. Construyamos una aplicación contínua $h_r : A \times \mathbf{I} \longrightarrow A$ de la manera siguiente:

$$h_r(a,t) = \begin{cases} a & si \quad a \in A - W_r \\ h'_r(a, t\lambda_r(a)) & si \quad a \in V_r \end{cases}$$

Esta aplicación verifica $h_r(a,0) = a \ \ \forall a \in A$ y que $h_r(-,1)$ es constante en V_r.

(ii) Sea $\{U_r\}_{0\leq r\leq n}$ un recubrimiento de A formado por $n+1$ abiertos categóricos, y sea $h_r : U_r \times \mathbf{I} \longrightarrow A$ una familia de homotopías tales que $h_r(u,0) = u \quad \forall u \in U_r$ y $h_r(-,1)$ toma un valor constante c_r, para $0 \leq r \leq n$. Como A es conexo por caminos, para cada c_r existe un camino $\lambda_r : \mathbf{I} \longrightarrow A$ tal que $\lambda_r(0) = c_r$ y $\lambda_r(1) = *$. Además, por definición de buen punto base, existe un entorno abierto N de $*$ y existe una homotopía $g : N \times \mathbf{I} \longrightarrow A$ verificando $g(a,0) = a \quad \forall a \in N$, $g(a,1) = * \quad \forall a \in N$ y $g(*,t) = * \quad \forall t \in \mathbf{I}$.

Salvo reordenación de los abiertos, podemos suponer que existe k, $0 \leq k \leq n$ tal que $* \in U_r \quad 0 \leq r \leq k$ y $* \notin U_r \quad k+1 \leq r \leq n$. Como A es normal existe un recubrimiento $\{W_r\}_{0\leq r\leq n}$ tal que $W_r \subset \overline{W_r} \subset U_r$ para $0 \leq r \leq n$. Considérese el entorno de $*$ definido como $N' = N \cap U_1 \ldots U_k \cap \overline{W_{k+1}}^c \ldots \overline{W_n}^c$ que verifica $N' \cap W_r = \emptyset$ si $k+1 \leq r \leq n$. De nuevo, como A es normal, existe un abierto M tal que $* \in M \subset \overline{M} \subset N' \subset U_r$ para $0 \leq r \leq k$. Definimos la siguiente familia de abiertos, que es un recubrimiento de A:

$$V_r = \begin{cases} (U_r \cap \overline{M}^c) \cup M & 0 \leq r \leq k \\ W_r \cup N' & k+1 \leq r \leq n \end{cases}$$

Obsérvese que cada V_r es una unión disjunta de dos abiertos.

Si $0 \leq r \leq k$ definimos una aplicación $h'_r : \big((U_r \cap \overline{M}^c) \cup M\big) \times \mathbf{I} \longrightarrow A$ de la siguiente manera:

$$a \in (U_r \cap \overline{M}^c) \quad \rightarrow \quad h'_r(a,t) = \begin{cases} h_r(a,2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \lambda_r(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$a \in M \quad \rightarrow \quad h'_r(a,t) = \begin{cases} g(a,2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ * & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Si $k+1 \leq r \leq n$ definimos una aplicación $h'_r : (W_r \cup N') \times \mathbf{I} \longrightarrow A$ de la siguiente manera:

$$a \in W_r \quad \rightarrow \quad h'_r(a,t) = \begin{cases} h_r(a,2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \lambda_r(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$a \in N' \quad \rightarrow \quad h'_r(a,t) = \begin{cases} g(a,2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ * & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

□

Ejemplo 1.1.7 *Categoría de una suma puntual.*

Si A y B son espacios topológicos normales, conexos por caminos y con buen punto base $*$, se tiene que $cat(A \vee B) = máx\{catA, catB\}$.

Si $\mathrm{cat}A \leq n$ y $\mathrm{cat}B \leq m$, donde $n \leq m$, existen $\{U_r\}_{0 \leq r \leq n}$, $\{V_s\}_{0 \leq s \leq m}$ recubrimientos categóricos de A y B respectivamente. Utilizando 1.1.6 podemos suponer los abiertos contráctiles al punto base $*$, relativamente a $*$, y así $\{U_r \cup V_r\}_{0 \leq r \leq n} \cup \{U_n \cup V_s\}_{n+1 \leq s \leq m}$ es un recubrimiento categórico de $A \vee B$. La otra desigualdad es evidente.

Propiedad 1.1.8 *Sean A y B espacios topológicos. Si A domina B, entonces $catA \geq catB$.*

Demostración. Si A domina B existen dos aplicaciones contínuas $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$ tales que $f \circ g \sim 1_B$. Supongamos $\mathrm{cat}A = n$, sea $\{U_r\}_{0 \leq r \leq n}$ un recubrimiento categórico de A. Sea $V_r = g^{-1}(U_r)$, se tiene que $\{V_r\}_{0 \leq r \leq n}$ es un recubrimiento abierto de B.

$$\begin{tikzcd} V_r = g^{-1}(U_r) \arrow[r, "g/V_r"] \arrow[d, hook, "i_{V_r}"'] & U_r \arrow[d, hook, "i_{U_r}"'] \arrow[dr] & \\ & & * \arrow[dl] \\ B \arrow[r, "g"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Como U_r es contráctil en A, la restricción de f a U_r, $f \circ i_{U_r}$, es homotópicamente trivial, de donde deducimos que la restricción de $f \circ g$ a V_r, $f \circ g \circ i_{V_r}$ también es trivial. Ahora bien, $f \circ g$ es homótopa a la identidad de B, por tanto se tiene que i_{V_r} es homotópicamente trivial, es decir, V_r es contráctil en B y el recubrimiento $\{V_r\}_{0 \leq r \leq n}$ es categórico. □

Propiedad 1.1.9 *La categoría es un invariante homotópico.*

Demostración. Decir que A y B tienen el mismo tipo de homotopía es decir que A domina B y que B domina A. La propiedad se sigue inmediatamente de la anterior. □

Propiedad 1.1.10 *La categoría es subaditiva. Sea A un espacio topológico, y sean B y C dos abiertos de A tales que $A = B \cup C$. Se tiene que $catA \leq catB + catC + 1$*

Demostración. Supongamos $\mathrm{cat}B = n$, $\mathrm{cat}C = m$. Sean $\{V_s\}_{0\leq s\leq n}$, $\{U_r\}_{0\leq r\leq m}$ recubrimientos categóricos de B y C respectivamente. Puesto que B y C son abiertos en A, $\{V_s\}_{0\leq s\leq n} \cup \{U_r\}_{0\leq r\leq m}$ será un recubrimiento abierto de A, formado por abiertos categóricos. □

Propiedad 1.1.11 *Sean A, B dos espacios topológicos y $f : A \longrightarrow B$ una aplicación contínua. Sea C_f el cono de f, se tiene que*

$$catC_f \leq catB + 1.$$

En particular, si $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C$ es una cofibración homotópica se tiene que $catC \leq catB + 1$.

Demostración. Se tiene que $C_f = B \cup_f \mathcal{C}A$, donde $\mathcal{C}A$ denota el cono de A. Consideremos los subconjuntos de C_f:

$$D_1 = \{[a,t]/\ a \in A, t > 1/4\} \qquad D_2 = \{[b]/\ b \in B\} \cup \{[a,t] : a \in A, t < 1/2\}$$

Estos subconjuntos son abiertos de C_f, D_1 es contráctil, D_2 tiene el tipo de homotopía de B y $C_f = D_1 \cup D_2$, por tanto la primera conclusión se deduce directamente de la propiedad anterior. La segunda conclusión es cierta porque si $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C$ es una cofibración homotópica, C tiene el tipo de homotopía del cono de f y la categoría es un invariante del tipo de homotopía (propiedad 1.1.9) □

Ejemplo 1.1.12 *Categoría y dimensión de un CW-complejo.*

Sea A un CW-complejo de dimension m. A partir de la propiedad 1.1.11 se deduce que $catA \leq m$.

Ejemplo 1.1.13 *Categoría de los espacios proyectivos.*
El espacio proyectivo real de dimension n, $\mathbf{RP}^n$, es un CW-complejo de dimensión n y así $cat\mathbf{RP}^n \leq n$. Sean $\mathbf{CP}^n$, $\mathbf{HP}^n$ el espacio proyectivo complejo y el espacio proyectivo sobre los cuaterniones. Sus dimensiones como CW-complejos son respectivamente $2n$, $4n$. Utilizando la propiedad 1.1.11 y su estructura celular se obtiene que $\mathrm{cat}\mathbf{CP}^n \leq n$ y $\mathrm{cat}\mathbf{HP}^n \leq n$.

Proposición 1.1.14 *Categoría de un CW-complejo.*
(i) Dado A un CW-complejo, se tiene que $catA \leq n$ si y sólo si A admite un recubrimiento formado por $n+1$ subcomplejos contráctiles en A.
(ii) Dado A un CW-complejo conexo con punto base $*$, se tiene que $catA \leq n$ si y sólo si A admite un recubrimiento formado por $n+1$ subcomplejos contráctiles en A relativamente a $*$.

Demostración. (i) Supongamos que $\mathrm{cat}A \leq n$, sea $\{U_r\}_{0\leq r\leq n}$ un recubrimiento categórico de A. Como A es un CW-complejo, en particular es un espacio normal, podemos obtener un recubrimiento abierto de A, $\{W_r\}_{0\leq r\leq n}$, tal que $W_r \subset \overline{W_r} \subset U_r$. Asociado al recubrimiento abierto $\{W_r\}_{0\leq r\leq n}$ se tiene un recubrimiento $\{K_r\}_{0\leq r\leq n}$ formado por subcomplejos de A tales que $K_r \subset \overline{W_r}$ $0 \leq r \leq n$ [10]. Puesto que $K_r \subset U_r$ y U_r es contráctil en A se tiene que K_r contráctil en A para $r = 0, \ldots, n$.

Recíprocamente, sea $\{K_r\}_{0\leq r\leq n}$ un recubrimiento de A formado por subcomplejos contráctiles en A. Como la inclusión $K_r \hookrightarrow A$ es una cofibración, para cada K_r existe un abierto U_r de A tal que K_r es un retracto por deformación de U_r. La familia $\{U_r\}_{0\leq r\leq n}$ es entonces un recubrimiento de A formado por abiertos categóricos.

(ii) Supongamos $\mathrm{cat}A \leq n$, A un CW-complejo conexo. Sea $\{K_r\}_{0\leq r\leq n}$ un recubrimiento de A formado por $n+1$ subcomplejos contráctiles en A (tal recubrimiento existe por (i)). Supongamos que K_r es contráctil al punto a_r, donde $a_r \in A$. Por ser A conexo y CW-complejo es conexo por caminos, podemos entonces suponer que $* \in K_r$, donde K_r es un subcomplejo conexo, contráctil en A, para todo $r = 0, \ldots, n$,, por tanto ([33], (A) y (E), 333) podemos suponer que los K_r son contráctiles relativamente al punto $*$, es decir, existe una homotopía $h_r : K_r \times \mathbf{I} \longrightarrow A$ tal que $h_r(a,0) = a \quad \forall a \in K_r$, $h_r(a,1) = * \quad \forall a \in K_r$ y $h_r(*,t) = * \ \forall t \in \mathbf{I}$.

El recíproco se deduce de (i). $\square$

1.2 Caracterización de Whitehead.

Definición 1.2.1 *Dado A espacio topológico con punto base $*$, definimos la suma grosera de orden k de A, que denotaremos $\mathbf{T}^k A$ como el siguiente subespacio de A^{k+1}*

$$\mathbf{T}^k A = \{(a_0, \ldots, a_k) \in A^{k+1} / \ \exists r \ ; \ a_r = *\}.$$

Es decir, $\mathbf{T}^k A$ está formado por las $(k+1)$-uplas $(a_0, \ldots, a_k)$ en las que al menos una componente a_r es el punto de base. La suma grosera de orden 1 es la suma puntual de dos espacios.

Sean $i : \mathbf{T}^k A \longrightarrow A^{k+1}$ la inclusión de la suma grosera de orden k en el espacio producto y $\Delta_{k+1} : A \longrightarrow A^{k+1}$ la aplicación diagonal $\Delta_{k+1}(a) = (a, \ldots, a) \in A^{k+1}$.

Teorema 1.2.2 *Sean A un espacio topológico conexo por caminos, normal y con punto base $*$. Supongamos además que $*$ tiene un entorno abierto contráctil U. La categoría de Lusternik y Schnirelmann de A es menor o igual que n si y sólo si la aplicación diagonal Δ_{n+1} factoriza homotópicamente a través de la suma grosera de orden n.*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{T}^n A \arrow[d, hook, "i"] \\
A \arrow[ur, dashed, "\delta"] \arrow[r, "\Delta_{n+1}"'] & A^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que Δ_{n+1} factoriza homotópicamente a través de i. Sea $\delta : A \longrightarrow \mathbf{T}^n A$ la factorización. Sea U el entorno contráctil del punto de base de A, y $q_r : A^{n+1} \longrightarrow A$ la proyección de la $(r+1)$-ésima componente, $0 \leq r \leq n$.

Consideremos la familia de abiertos categóricos de A^{n+1} formada por la imagen recíproca de U a traves de las proyecciones : $\{q_r^{-1}(U)\}_{0 \leq r \leq n}$. Definamos $V_r = \delta^{-1}(i^{-1}(q_r^{-1}(U)))$ para $r = 0, \ldots, n$. La familia $\{V_r\}$ es un recubrimiento abierto de A.

$$\begin{tikzcd}
V_r \arrow[r, "(i\circ\delta)/V_r"] \arrow[dd, hook] & q_r^{-1}(U_r) \arrow[r] \arrow[dd, hook] & U_r \arrow[dd, hook] \arrow[dr] & \\
 & & & * \arrow[dl] \\
A \arrow[r, "i\circ\delta"] & A^{n+1} \arrow[r, "q_r"] & A &
\end{tikzcd}$$

Como $q_r \circ i \circ \delta \sim p_r \circ \Delta_{n+1} = 1_A$, los abiertos V_r son categóricos y cat$A \leq n$.

Recíprocamente, supongamos cat$A \leq n$. Como A es normal (ejemplo 1.1.6), existe un recubrimiento categórico de A, $\{V_r\}_{0\leq r\leq n}$ y una familia de homotopías $h_r : A \times \mathbf{I} \longrightarrow A$ verificando $h_r(a,0) = a$, $\forall a \in A$ y $h_r(-,1)$ constante en V_r, $\forall r = 0,\ldots,n$. Además, como A es conexo por caminos, podemos suponer que los abiertos son contráctiles al punto de base $*$, i.e. $h_r(v,1) = * \ \ \forall v \in V_r$

Sea H la aplicación contínua $H : A \times \mathbf{I} \longrightarrow A^{n+1}$ definida por $q_r \circ H = h_r$. Por construcción, se tiene que $q_r \circ H(a,0) = a$, $\forall a \in A$, por tanto $H(-,0) = \Delta_{n+1}$. Además, dado $a \in A$, como $\{V_r\}_{0\leq r\leq n}$ es un recubrimiento de A existe un abierto V_r tal que $a \in V_r$ y entonces $q_r \circ H(a,1) = h_r(a,1) = *$. Por tanto, $H(a,1) \in \mathbf{T}^n A$, $\forall a \in A$. Si definimos $\delta : A \longrightarrow \mathbf{T}^n A$ como $\delta(a) = H(a,1)$, $\forall a \in A$, se verifica que H es una homotopía de Δ_{n+1} a $i \circ \delta$. □

Observación 1.2.3 *Sea A un espacio normal, conexo por caminos y con buen punto base $*$, sea $\mathbf{T}^n A$ la suma grosera de orden n cuyo punto base es $(*, * \ldots, *)$, y A^{n+1} el espacio producto $n+1$ veces de A cuyo punto base es también $(*, * \ldots, *)$. La categoría de Lusternik y Schnirelmann de A es menor o igual que n si existe una aplicación $\delta : A \longrightarrow \mathbf{T}^n A$ que conserva el punto de base, tal que $i \circ \delta$ es homotópa a la aplicación diagonal Δ_{n+1}, relativamente al punto base.*

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{T}^n A \arrow[d, hook, "i"] \\ A \arrow[ur, dashed, "\delta"] \arrow[r, "\Delta_{n+1}"] & A^{n+1} \end{tikzcd}$$

Utilizando la propiedad 1.1.6 (ii) sabemos que cat$A \leq n$ si y sólo A admite un recubrimiento formado por $n+1$ abiertos contráctiles en A relativamente a $*$. La demostración de Whitehead puede entonces realizarse utilizando tal recubrimiento, y se obtiene la versión del teorema 1.2.2 donde las aplicaciones y las homotopías conservan el punto base $*$.

Ejemplo 1.2.4 *Categoría de un co-H-espacio.*
Recordemos que un co-H-espacio es un espacio topológico con punto base $*$ y con una aplicación $\sigma : A \longrightarrow A \vee A$ tal que el siguiente diagrama commuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} & A \vee A \arrow[d, hook, "i"] \\ A \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, "\Delta_2"] & A^2 = A \times A \end{tikzcd}$$

Como la suma puntual es de hecho la suma grosera de orden 1, de esta caracterización se sigue que si A es conexo por caminos, normal y con punto base $*$, tal que $*$ tiene un entorno abierto contráctil, A tiene categoría menor o igual que 1 si y sólo si A es un co-H-espacio.

1.3 Caracterización de Ganea.

En esta sección A es un CW-complejo con punto base $*$, las aplicaciones conservan $*$ y las homotopías son relativas a $*$. Vamos a definir una sucesión de fibraciones

$$F_n \xrightarrow{j_n} G_nA \xrightarrow{p_n} A$$

mediante una construcción recurrente denominada *fibra-cofibra.* Sea G_0A el espacio de caminos de A de origen $*$

$$G_0A = PA = \{\sigma : \mathbf{I} \longrightarrow A \ / \ \sigma(0) = *\}.$$

Sea $p_0 : G_0A \longrightarrow A$ la aplicación evaluación en el extremo: $p_0(\omega) = \omega(1) \ \ \forall \omega \in PA$. Esta aplicación p_0 es una fibración de fibra el espacio de lazos $\Omega A = \{\sigma : \mathbf{I} \longrightarrow A \ / \ \sigma(0) = \sigma(1) = *\}$, sea pues $F_0 = \Omega A$. Supongamos definida la fibración en la etapa n, sea $G_nA \cup_{j_n} (F_n \wedge \mathbf{I})$ el cono reducido de la aplicación j_n.

$$\begin{tikzcd}
F_n \arrow[d, hook, "j_n"] & & F_{n+1} \arrow[d, hook] \\
G_nA \arrow[r] \arrow[d, "p_n"'] & G_nA \cup_{j_n} (F_n \wedge \mathbf{I}) \arrow[r, "\tau_{n+1}", "\sim"'] \arrow[dl, "p'_{n+1}"'] & G_{n+1}A \arrow[dll, "p_{n+1}"] \\
A & &
\end{tikzcd}$$

La fibración $p_n : G_nA \longrightarrow A$ se extiende a una aplicación $p'_{n+1} : G_nA \cup (F_n \wedge \mathbf{I}) \longrightarrow A$ enviando el cono reducido $F_n \wedge \mathbf{I}$ al punto de base de A. Podemos transformar la aplicación ${p'}_{n+1}$ en una fibración equivalente, es decir, podemos construir una factorización de ${p'}_{n+1}$, ${p'}_{n+1} = p_{n+1} \circ \tau_{n+1}$ a través de un espacio $G_{n+1}A$, donde p_{n+1} es una fibración y $\tau_{n+1} : G_nA \cup (F_n \wedge \mathbf{I}) \longrightarrow G_{n+1}A$ es una equivalencia de homotopía. La aplicación p_n se dice la n-ésima fibración de Ganea.

Utilizando la propiedad 1.1.11 obtenemos a partir de la definición:

Observación 1.3.1 *Categoría del n-ésimo espacio de Ganea.*
El n-ésimo espacio de Ganea tiene categoría menor o igual que n.

Teorema 1.3.2 *Sea A un CW-complejo conexo con punto base $*$. La categoría de Lusternik y Schnirelmann de A es menor o igual que n si y sólo si en la n-ésima fibración de Ganea existe una sección homotópica de p_n.*

$$\begin{tikzcd}
\Omega A \arrow[d, "j_0"'] & F_1 \arrow[d, "j_1"'] & \cdots & F_n \arrow[d, "j_n"'] \\
PA \arrow[r] \arrow[d, "p_0"'] & G_1A \arrow[r] \arrow[dl, "p_1"'] & \cdots & G_nA \arrow[dlll, "p_n"'] \\
A \arrow[urrr, dotted, bend right=5, "s_n"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que existe una sección homotópica $s_n : A \longrightarrow G_nA$ de p_n, es decir, $p_n \circ s_n$ es homotópa a la identidad de A. Esto significa que A está dominada por G_nA; de la observación 1.3.1 y de la propiedad 1.1.8 deducimos que A tiene categoría menor o igual que n.

Recíprocamente, supongamos $\mathrm{cat}A \leq n$. Sea $\{K_r\}_{0\leq r\leq n}$ un recubrimiento de A formado por subcomplejos contráctiles en A relativamente al punto $*$, además, un CW-complejo es normal podemos suponer que existe una familia de homotopías $h_r : A \times \mathbf{I} \longrightarrow A$ tales que:

$h_r(a, 0) = a \;\; \forall a \in A$, $h_r(*, t) = * \;\; \forall t \in \mathbf{I}$ y $h_r(v, 1) = * \;\; \forall v \in K_r$,

Sea A_k la unión $\bigcup_{l=0}^{k} K_l$ y sea i_k la inclusión $i_k : A_k \longrightarrow A$, donde $0 \leq k \leq n$. Obsérvese que i_n es la identidad de A. La idea de la prueba es construir inductivamente una factorización de i_k a través del espacio de Ganea G_kA.

La aplicación $i_0 : K_0 \longrightarrow A$ es homótopa a $*$ relativamente a $*$ y por tanto factoriza a través de G_0A, que es el espacio de caminos PA. Supongamos que la aplicación $i_{k-1} : A_{k-1} \longrightarrow A$ factoriza a través del espacio de Ganea $G_{k-1}A$. Sea $\gamma_{k-1} : A_{k-1} \longrightarrow G_{k-1}A$ la factorización de i_{k-1}, es decir $i_{k-1} = p_{k-1} \circ \gamma_{k-1}$.

$$\begin{tikzcd}
A_{k-1} \arrow[r, "\gamma_{k-1}"] \arrow[dr, "i_{k-1}"'] & G_{k-1}A \arrow[d, "p_{k-1}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Consideremos la restricción de la homotopía h_k a A_k,

$$h_k : (A_{k-1} \cup K_k) \times \mathbf{I} \longrightarrow A$$

que verifica:

$$\begin{cases} h_k(-,0) = i_k \\ h_k(K_k,1) = \{*\} \\ h_k(*,\mathbf{I}) = \{*\} \end{cases}$$

En particular $h_k(-,0)/A_{k-1} = i_{k-1}$. Como p_{k-1} es una fibración podemos levantar esta restricción de la homotopía h_k a A_{k-1} hasta una homotopía

$$\Gamma_k : A_{k-1} \times \mathbf{I} \longrightarrow G_{k-1}A$$

que verifica:

$$\begin{cases} \Gamma_k(-,0) = \gamma_{k-1} \\ p_{k-1} \circ \Gamma_k(a,t) = h_k(a,t) \quad \forall a \in A_{k-1} \\ \Gamma_k(*,t) = * \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} A_{k-1} \arrow[r, "\gamma_{k-1}"] \arrow[d] & G_{k-1}A \arrow[d, "p_{k-1}"] \\ A_{k-1} \times \mathbf{I} \arrow[r, "h_k"'] \arrow[ur, "\Gamma_k"] & A \end{tikzcd}$$

Consideremos la restricción de $\Gamma_k(-,1)$ a D_k, donde $D_k = A_{k-1} \cap K_k$. Se tiene que: $p_{k-1} \circ \Gamma_k(d,1) = h_k(d,1) = *$, ya que $d \in D_k \subset K_k$. Así pues, la aplicación $\Gamma_k(-,1)$ factoriza a través de la fibra de p_{k-1}, es decir F_{k-1}. La inclusión $D_k \hookrightarrow K_k$ es una cofibración (D_k es un subcomplejo de K_k) y el cono reducido sobre F_{k-1}, $F_{k-1} \wedge \mathbf{I}$, es contráctil podemos entonces encontrar una aplicación $\bar{\gamma} : K_k \longrightarrow F_{k-1} \wedge \mathbf{I}$ tal que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} D_k \arrow[r, "\Gamma_k(-,1)"] \arrow[d, hook] & F_{k-1} \arrow[d] \\ K_k \arrow[r, "\bar{\gamma}"] & F_{k-1} \wedge \mathbf{I} \end{tikzcd}$$

Utilizando esa aplicación construyamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
D_k \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\Gamma_k(-,1)"] \arrow[dd, hook] & & A_{k-1} \arrow[dr, "\Gamma_k(-,1)"] \arrow[dd, hook, "j_{k-1}"] & & \\
& F_{k-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & G_{k-1}A \arrow[dd] & \\
K_k \arrow[rr, hook, "i_0"] \arrow[dr, "\bar{\gamma}"'] & & A_{k-1} \cup K_k \arrow[dr, dotted, "\phi_k"] \arrow[ddr, "h_k(-,1)"'] & & \\
& F_{k-1} \wedge \mathbf{I} \arrow[rr] & & G_{k-1} \cup (F_{k-1} \wedge \mathbf{I}) \arrow[r, "\tau_k", "\sim"'] \arrow[d, "p'_k"] & G_k A \arrow[d, "p_k"] \\
& & & A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}
$$

donde $\phi_k : A_{k-1} \cup K_k \longrightarrow G_{k-1} \cup (F_{k-1} \wedge \mathbf{I})$ es la aplicación inducida entre sumas amalgamadas topológicas. La aplicación ϕ_k es única y por tanto se tiene que $p_k \circ \tau_k \circ \phi_k = p'_k \circ \phi_k = h_k(-,1)$. Utilizando de nuevo que p_k es una fibración, podemos obtener a partir de la homotopía h_k una homotopía $\Phi_k : A_k \times \mathbf{I} \longrightarrow G_k A$ tal que $\Phi_k(-,1) = \tau_k \circ \phi_k$ y $p_k \circ \Phi_k(-,0) = i_k$. Sea $\gamma_k = \Phi_k(-,0)$, se tiene que $i_k = p_k \circ \gamma_k$ y por tanto, la aplicación i_k factoriza a través de $G_k A$. $\square$

El tipo de homotopía de la fibra del la n-ésima fibración de Ganea es bien conocida (cf. Proposición 3.3. de [18] y Teorema 2 de [32]):

Proposición 1.3.3 *La fibra F_n de la n-ésima fibración de Ganea $p_n : G_n A \longrightarrow A$ tiene el tipo de homotopía de $*^{n+1}\Omega A$.*

Ejemplo 1.3.4 *Co-H-espacios y suspensiones.*
Un espacio topológico dominado por una suspensión tiene categoría uno (cf 1.1.4, 1.1.8). Recíprocamente, para espacios con el tipo de homotopía de un CW complejo conexo con punto base $*$, utilizando la caracterización de Ganea, sabemos que si un espacio de categoría uno es una retracción de una suspensión. En otras palabras, A es un co-H-espacio si y sólo si A es retracción de una suspensión.

1.4 La nilpotencia de la cohomología.

Sea R un anillo conmutativo, denotaremos $H^*(-;R)$ la cohomología con coeficientes en R. Dada una triada topológica $(A; A_1, A_2)$, donde A_1, A_2 son abiertos en $A_1 \cup A_2$, recordemos que se puede definir un cup-producto en cohomología relativa:

$$\begin{array}{ccc} H^r(A, A_1; R) \otimes H^s(A, A_2; R) & \xrightarrow{\cup} & H^{r+s}(A, A_1 \cup A_2; R) \\ a_1 \otimes a_2 & \longrightarrow & a_1 \cup a_2 \end{array}$$

que es asociativo y conmutativo, en el sentido graduado. Además, dada una aplicación entre dos de esas triadas topológicas $f : (A; A_1, A_2) \longrightarrow (B; B_1, B_2)$, el cup-producto es natural, es decir; $f^* : H^*(B, B_1 \cup B_2) \longrightarrow H^*(A, A_1 \cup A_2)$ verifica $f^*(b_1 \cup b_2) = f^*(b_1) \cup f^*(b_2)$.

En particular, si $A_1 = A_2 = \emptyset$, el cup-producto proporciona a $H^*(A; R)$ una estructura de anillo graduado, conmutativo, asociativo y con unidad $1 \in H^0(A; R)$. Denotamos $\tilde{H}^*(A; R)$ la cohomología reducida, que es un anillo graduado conmutativo y asociativo.

Definición 1.4.1 *Sea R un anillo. Definimos el índice de nilpotencia de R, nil$R$, como el menor natural n que verifica que $r_1 r_2 \ldots r_{n+1} = 0 \quad \forall r_k \in R$.*

En particular un anillo R con unidad tiene nil$R = \infty$.

Proposición 1.4.2 *Sea A un espacio topológico. Se tiene que:*

$$nil\tilde{H}^*(A; R) \leq catA$$

Demostración. Omitiremos R, el anillo de coeficientes, en la notación de la prueba. Supongamos cat$A \leq n$, ya que si la categoría es infinita no hay nada que demostrar. Sea $\{U_r\}_{0 \leq r \leq n}$, un recubrimiento categórico de A. Consideramos la sucesión exacta de homología reducida asociada a cada una de las inclusiones:

$$\ldots \longrightarrow H^s(A, U_r) \longrightarrow H^s(A) \longrightarrow H^s(U_r) \longrightarrow H^{s+1}(A, U_r) \longrightarrow H^{s+1}(A) \ldots$$

para $r = 0, \ldots, n$. Para cada uno de esos abiertos categóricos , la inclusión $U_r \hookrightarrow A$ es homótopa a una constante, lo que implica que la aplicación inducida en cohomología reducida $\tilde{H}^*(A) \longrightarrow \tilde{H}^*(U_r)$ es nula. Utilizando la sucesión exacta de cohomología deducimos que existe un epimorfismo:

$$H^{r+1}(A, U_r) \twoheadrightarrow H^{r+1}(A) \; \forall r = 0, \ldots, n$$

Sean $a_0, a_1 \ldots, a_n \in H^*(A)$, queremos comprobar que $a_0 \cup a_1 \ldots \cup a_n = 0$. Sea $\bar{a}_r \in H^*(A, U_r)$ la imagen recíproca de a_r por ese epimorfismo. Utilizando la asociatividad y la naturalidad del cup-producto, se tiene que $a_0 \cup a_1 \ldots \cup a_n \in H^*(A)$ es la imagen del elemento $\bar{a}_0 \cup \bar{a}_1 \ldots \cup \bar{a}_n \in H^*(A, U_0 \cup U_1 \ldots U_n)$. Ahora bien, $H^*(A, U_0 \cup U_1 \ldots U_n) = 0$ ya que $\{U_r\}_{0 \leq r \leq n}$ es un recubrimiento de A. $\square$

Ejemplo 1.4.3 *La categoría de los espacios proyectivos.*

Hemos visto en ejemplos anteriores que la categoría de los espacios proyectivos $\mathbf{RP}^n$, $\mathbf{CP}^n$ y $\mathbf{HP}^n$ es menor o igual que n. La cohomología de estos espacios es bien conocida :

$$H^*(\mathbf{RP}^n;\mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[x_1]/(x_1^{n+1})$$
$$H^*(\mathbf{CP}^n;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[x_2]/(x_2^{n+1}$$
$$H^*(\mathbf{HP}^n;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[x_4]/(x_4^{n+1})$$

En los tres casos es un álgebra polinomial generada por x_d, elemento de grado $d = 1, 2, 4$ respectivamente, truncada por x_d^{n+1}. Por tanto,

$$\mathrm{nil}\tilde{H}^*(\mathbf{RP}^n;\mathbf{Z}_2) = \mathrm{cat}(\mathbf{RP}^n) = n$$
$$\mathrm{nil}\tilde{H}^*(\mathbf{CP}^n;\mathbf{Z}) = \mathrm{cat}(\mathbf{CP}^n;\mathbf{Z}) = n$$
$$\mathrm{nil}\tilde{H}^*(\mathbf{HP}^n;\mathbf{Z}) = \mathrm{cat}(\mathbf{HP}^n;\mathbf{Z}) = n$$

1.5 La categoría fuerte y la longitud en conos.

En [14], Fox introdujo una variante de la definición de categoría de Lusternik y Schnirelmann, sustituyendo “abierto categórico” por “abierto contráctil”, y proporcionó ejemplos que demuestran que esta definición no es un invariante homotópico. Más tarde, Ganea presentó en [15] otra variación, conocida como categoría fuerte, que sí tiene la propiedad de ser un invariante homotópico.

Definición 1.5.1 *Sea A un espacio topológico con punto base $*$. Diremos que la categoría fuerte de A, $CatA$, es menor o igual que n si A tiene el tipo de homotopía relativo a $*$ de un CW-complejo que admite un recubrimiento formado por $n+1$ subcomplejos contráctiles. Si no existe tal n escribiremos $CatA = \infty$.*

Denotaremos $\mathcal{W}^*$ la categoría de los espacios topológicos con punto base $*$ que tienen el tipo de homotopía relativo a $*$ de un CW-complejo.

Ejemplo 1.5.2 *i) Los espacios que no pertenecen a $\mathcal{W}^*$ se dicen de categoría fuerte infinita.*

ii) Los espacios de categoría fuerte 0 son los espacios contráctiles relativamente a $*$.

Se sigue directamente de la definición y de la propiedad 1.1.14 que cat$A \leq$ Cat$A$. Veremos más adelante que existen ejemplos de espacios donde cat $\neq$ Cat.

Ganea obtiene una caracterización de Cat en términos de cofibraciones homotópicas.

Teorema 1.5.3 *Sea $A \in \mathcal{W}^*$ y conexo por caminos. Entonces:*
(i) Cat$A = 0$ si y sólo si A es contráctil.
(ii) Cat$A \leq n$ si y sólo si existe una cofibración homotópica:

$$L \xrightarrow{\mu} A_{n-1} \xrightarrow{\eta} A_n$$

tal que A_n tiene el tipo de homotopía libre de A, L y A_{n-1} tienen el tipo de homotopía relativa a $*$ de CW-complejos y A_{n-1} es un espacio conexo con Cat$A_{n-1} \leq n-1$.

Demostración. La primera aserción se deduce de la definición.

Demostremos (ii). Supongamos que Cat$A \leq n$, A tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo J formado por $n+1$ subcomplejos contráctiles: $J_0, J_1, \ldots, J_n$. Sean los CW-complejos $K = \cup_{l=1}^{n} J_l$ y $L = J_0 \cap K$. A partir de la conexidad de A, salvo reordenación de los J_r, podemos suponer K y L conexos, L no vacío. La inclusión $(K, L) \hookrightarrow (J, J_0)$ induce un homeomorfismo entre la cofibra de $L \hookrightarrow K$, K/L y la cofibra de $J_0 \hookrightarrow J$, J/J_0. Ahora bien, J_0 es contráctil, por tanto J/J_0 tiene el tipo de homotopía libre de J, o sea, de A.

Recíprocamente, supongamos que existe la cofibración del enunciado, donde Cat$A_{n-1} \leq n-1$. Sean L' y K dos CW-complejos, CW-aproximaciones de L y A_{n-1}, respectivamente, donde K es la unión de n subcomplejos contráctiles K_1, $K_2, \ldots, K_n$. Podemos suponer [31] que existen $L_1, L_2, \ldots, L_n$ subcomplejos de L', que recubren L, y una aproximación $\mu' : L' \longrightarrow K$ de μ tales que $\mu'(L_r) \subset K_r$, para $r = 1, \ldots, n$. La cofibra de μ', que denotamos $C_{\mu'}$, tiene el tipo de homotopía de la cofibra de μ, es decir, de A_n. El CW-complejo $C_{\mu'}$ tiene categoría fuerte n, pues está formado por la unión de $n+1$ CW-complejos contráctiles $C_0, C_1 \ldots C_n$, donde C_0 es el cono reducido de L', y C_r es el cilindro de la restricción $\mu' : L_r \hookrightarrow K_r$, para $r = 1, \ldots, n$.

$\square$

Corolario 1.5.4 *Los espacios de $\mathcal{W}^*$ conexos por caminos de categoría fuerte 1 son las suspensiones.*

Por tanto, un co-H-espacio que no tiene el tipo de homotopía de una suspensión es un espacio con categoría 1 y categoría fuerte estrictamente mayor que 1. En el capítulo 5 veremos un ejemplo de tal co-H-espacio, descubierto por Berstein y Hilton en [6].

Corolario 1.5.5 *Categoría fuerte de los espacios de Ganea.*
Sea $A \in \mathcal{W}^*$, conexo por caminos. El n-ésimo espacio de Ganea de A tiene categoría fuerte menor o igual que n.

Demostración. Se deduce de la construcción de G_nA, a partir del teorema 1.5.3 y de la propiedad 1.1.11.

La categoría fuerte y la categoría están estrechamente relacionadas. El siguiente resultado se debe a Ganea y a Takens:

Proposición 1.5.6 *Sea $A \in \mathcal{W}^*$, conexo por caminos, tal que $catA \leq n$. Existe una suspensión ΣH tal que*

$$Cat(A \vee \Sigma H) \leq n.$$

En particular, se verifica:

$$catA \leq CatA \leq catA + 1.$$

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cat}A \leq n$, sea K un CW-complejo con el tipo de homotopía de A, tal que K admite un recubrimiento formado por $n+1$ subcomplejos contráctiles en K, $K_0, K_1, \ldots, K_n$. Sea K' el complejo obtenido pegando un cono sobre cada K_r. K' tiene categoría fuerte n, ya que es la unión de $n+1$ conos, que son espacios contráctiles.

Demostraremos que K' tiene el tipo de homotopía de $K \vee \Sigma K_0 \vee \ldots \vee \Sigma K_n$. Sea K_0' el espacio obtenido a partir de K pegando un cono sobre K_0. K_0' es el cono de la inclusión $K_0 \hookrightarrow K$, que es una aplicación homotópa a la aplicación trivial $K_0 \xrightarrow{*} K$. K_0' tiene así el tipo de homotopía del cono de $K_0 \xrightarrow{*} K$, que es $K \vee \Sigma K_0$. Reiterando el argumento se obtiene que $K \vee \Sigma K_0 \vee \ldots \vee \Sigma K_n$ tiene el tipo de homotopía de K', y la proposición es cierta tomando $\Sigma H = \Sigma K_0 \vee \ldots \vee \Sigma K_n$.

La primera desigualdad se deduce directamente de las definiciones. Respecto a la segunda, si cat$A \leq n$, existe ΣH tal que Cat$(A \vee \Sigma H) \leq n$. El espacio A tiene el tipo de homotopía del cono de la inclusión $\Sigma H \hookrightarrow A \vee \Sigma H$, y utilizando la caracterización de Ganea se tiene que

$$\mathrm{Cat}A \leq Cat(A \vee \Sigma H) + 1 \leq \mathrm{cat}A + 1.$$

□

Corolario 1.5.7 *Para todo co-H-espacio $B \in \mathcal{W}^*$, conexo por caminos, existe un espacio H tal que $B \vee \Sigma H$ es una suspensión.*

La categoría fuerte indica el número mínimo de cofibraciones necesarias $L_r \longrightarrow A_r \longrightarrow A_{r+1}$ para construir un CW-complejo a partir de una suspensión A_1. A partir de la caracterización de Ganea, exigiendo condiciones extra a los espacios L_r, se pueden definir otros invariantes homotópicos. Por ejemplo, si se exige que L_r sea una suspension, se obtiene la longitud en conos, y si se exige que sea una suspensión iterada, se obtiene la gran longitud en conos. Estos dos invariantes fueron estudiados por Cornea, primero en [7], donde demuestra propiedades análogas a las de la categoría fuerte y después en [8] donde demuestra la equivalencia de las tres definiciones.

Definición 1.5.8 *Longitud en conos.*

Sea $A \in \mathcal{W}^*$, conexo por caminos. Diremos que la longitud en conos de A es cero si A es contráctil y escribiremos $clA = 0$. Diremos que la longitud en conos de A es menor o igual a uno si A tiene el tipo de homotopía de una suspensión. Diremos que la longitud en conos de A es menor o igual que n y escribiremos $clA \leq n$ si y sólo si existe una cofibración homotópica:

$$\Sigma L \xrightarrow{\mu} A_{n-1} \xrightarrow{\eta} A_n$$

tal que A_n tiene el tipo de homotopía de A, L y A_{n-1} tienen el tipo de homotopía de CW-complejos y A_{n-1} es un espacio conexo por caminos tal que $clA_{n-1} \leq n-1$.

Definición 1.5.9 *Gran longitud en conos.*

Sea $A \in \mathcal{W}^*$, conexo por caminos. Diremos que la gran longitud en conos de A es cero si A es contráctil y escribiremos $ClA = 0$. Diremos que la gran longitud en conos de A es menor o igual a uno si A tiene el tipo de homotopía de una suspensión. Diremos que la gran longitud en conos de A es menor o igual que n y escribiremos $ClA \leq n$ si y sólo si existe una cofibración homotópica:

$$\Sigma^{n-1}L \xrightarrow{\mu} A_{n-1} \xrightarrow{\eta} A_n$$

tal que A_n tiene el tipo de homotopía de A, L y A_{n-1} tienen el tipo de homotopía de CW-complejos y A_{n-1} es un espacio conexo por caminos tal que $ClA_{n-1} \leq n-1$.

Se deduce inmediatamente de las definiciones que:

$$\mathrm{cat}A \leq \mathrm{Cat}A \leq \mathrm{cl}A \leq \mathrm{Cl}A.$$

En [7] Cornea estudió las propiedades de estas longitudes en conos, y en [8] demostró que son equivalentes a la noción de categoría fuerte:

Teorema 1.5.10 *[8] Sea $A \in \mathcal{W}^*$, conexo por caminos. Se tiene que:*

$$CatA = clA = ClA.$$

Utilizando este teorema y el Teorema 1.1. de [8] se puede determinar el espacio H del teorema 1.5.6 en función del espacio de lazos de A. Este resultado lo utilizaremos en el capítulo tercero, pero sólo en un caso particular: para los espacios de categoría dos, por esta razón no proporcionamos la (larga) demostración general.

1.6 La longitud en conos de esferas.

En esta sección nos ocuparemos de un invariante homotópico denominado longitud en esferas. Este invariante se define de manera análoga a las longitudes en conos, pero imponiendo una condición muy estricta sobre los espacios que se utilizan como cobases en las cofibraciones: se exige que sean una suma puntual de esferas.

Recordemos que $\mathcal{W}^*$ representa la categoría de los espacios topológicos con punto base $*$ que tienen el tipo de homotopía relativo a $*$ de un CW-complejo:

Definición 1.6.1 *Longitud en conos de esferas.*

Sea $A \in \mathcal{W}^*$, conexo por caminos. Diremos que la longitud en conos de esferas de A es cero si A es contráctil y escribiremos $cl_S A = 0$. Diremos que la longitud en conos de esferas de A es menor o igual que n y escribiremos $cl_S A \leq n$ si y sólo si existe una cofibración homotópica:

$$L \xrightarrow{\mu} A_{n-1} \xrightarrow{\eta} A_n$$

donde A_n tiene el tipo de homotopía de A, L es una suma puntual de esferas y A_{n-1} es un espacio topológico con el tipo de homotopía de un CW complejo, conexo por caminos y con punto base $*$ tal que $cl_S A_{n-1} \leq n-1$.

Este invariante de homotopía mide el número mínimo de etapas necesarias para construir un CW-complejo a partir de las células. A partir de las definiciones se deduce:

$$\mathrm{cat} A \leq \mathrm{Cat} A \leq \mathrm{cl}_S A.$$

Ejemplo 1.6.2 *Longitud en conos de una suspensión.*

Los espacios de longitud en conos uno son simplemente las sumas puntuales de esferas. Una suspensión no contráctil que no tenga el tipo de homotopía de tal suma puntual, por ejemplo $\Sigma \mathbf{CP}^2 = \mathbf{S}^3 \cup e^5$, es un espacio donde la categoría fuerte (y por tanto la categoría) es estrictamente menor que la longitud en esferas.

Además de ser diferentes, como se ve en este ejemplo, se tiene que la longitud en esferas y la categoría no están tan próximas como la categoría y la categoría fuerte. En la proposición 1.5.6 hemos visto que la diferencia de Cat y cat es a lo sumo 1, sin embargo no hay ninguna mayoración de la diferencia entre cat y cl_S. La siguiente propiedad, señalada por Cornea, nos proporciona una minoración mejor de la longitud en conos en esferas:

Propiedad 1.6.3 *Sea $A \in \mathcal{W}^*$, conexo por caminos. Supongamos que existen n operaciones de cohomología $\mathcal{O}^s$, $s = 1, \ldots, n$ tales que $\mathcal{O}^n \circ \mathcal{O}^{n-1} \ldots \mathcal{O}^1(\xi) \neq 0$, siendo ξ una clase de cohomología de A, entonces $n + 1 \leq cl_S A$.*

Demostración. Sean G, Π dos grupos abelianos, m y n dos enteros. Recordemos que una operación de cohomología de tipo $(G, m; \Pi, n)$ es una transformación natural $\mathcal{O} : H^m(-; G) \longrightarrow H^n(-; \Pi)$. Debido a la representabilidad de la cohomología existe una biyección entre las operaciones de cohomología de tipo $(G, m; \Pi, n)$ y las clases de aplicaciones $[K(G,n), K(\Pi,m)]$, donde $K(G,n)$ y $K(\Pi,m)$ son espacios de Eilenberg-McLane de tipo (G,n) y (Π,m) respectivamente.

Demostremos el resultado por recurrencia. Supongamos que existe una operación de cohomología no nula en A, A no puede tener el tipo de homotopía de una suma puntual de esferas, puesto que en tal suma puntual no hay operaciones de cohomología, o sea, $cl_S A \geq 2$.

Sean $\mathcal{O}^s : K(\Pi_{s-1}, m_{s-1}) \longrightarrow K(\Pi_s, m_s)$, $s = 1, \ldots, n$, n operaciones de cohomología. Supongamos que $\mathcal{O}^n \circ \mathcal{O}^{n-1} \ldots \mathcal{O}^1(\xi) \neq 0$, siendo $\xi \in H^{m_0}(A; \Pi_0)$ una clase de cohomología de A representada por $\xi : A \longrightarrow K(\Pi_0, m_0)$. Denotemos $\mathcal{O}' : K(\Pi_0, m_0) \longrightarrow K(\Pi_{n-1}, m_{n-1})$ la composición $\mathcal{O}' = \mathcal{O}^{n-1} \ldots \circ \mathcal{O}^2 \circ \mathcal{O}^1$.

Sea A tal que $cl_S A < \infty$, existe entonces una cofibración homotópica

$$L \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\eta} A$$

donde $cl_S B = cl_S A - 1$ y L es una suma puntual de esferas. Considérese el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\mu"] & B \arrow[r, "\eta"] & A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\xi"'] & \Sigma L \arrow[d, dotted, "\xi'"] & \\
 & & K(\Pi_0, m_0) \arrow[r, "\mathcal{O}'"] & K(\Pi_{n-1}, m_{n-1}) \arrow[r, "\mathcal{O}^n"] & K(\Pi_n, m_n)
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis se tiene que $\mathcal{O}^n \circ \mathcal{O}' \circ \xi \neq 0$. Vamos a demostrar que $\mathcal{O}' \circ \xi \circ \eta \neq 0$

Supongamos que $\mathcal{O}' \circ \xi \circ \eta$ es homotópicamente nula, existiría entonces una factorización $\xi' : \Sigma L \longrightarrow K(\Pi_{n-1}, m_{n-1})$ de tal composición. Como ΣL es una suma puntual de esferas, no hay operaciones de cohomología y se tiene que $\mathcal{O}^n \circ \mathcal{O}' \circ \xi = 0$ lo que contradice las hipótesis.

Por tanto $\mathcal{O}' \circ \xi \circ \eta$ es no nula. Utilizando la hipótesis de recurrencia, como $\xi \circ \eta$ es una clase de cohomología de B tal que $\mathcal{O}^{n-1} \ldots \mathcal{O}^1 \circ \xi \circ \eta \neq 0$, se tiene que $cl_s B \geq n$ y entonces $cl_S A \geq n + 1$. □

Utilizando esta propiedad se encuentran ejemplos donde la diferencia entre $\mathrm{Cat}A$ y $\mathrm{cl}_S\ddot{E}$ es tan grande como se quiera.

Ejemplo 1.6.4 *Longitud en conos de esferas de* $\Sigma\mathbf{CP}^n$.

Sea $\mathbf{CP}^n$ el espacio proyectivo complejo, $n \geq 2$. Su categoría es n, al igual que su longitud en esferas. Recordemos que la cohomología de $\mathbf{CP}^n$ es un álgebra polinomial truncada, y por ello existen operaciones de cohomología no nulas (potencias de Steenrod). Las operaciones de cohomología son invariantes para la suspensión, por tanto $\Sigma\mathbf{CP}^n$ tiene potencias de Steenrod de orden n y $\mathrm{cl}_S\Sigma\mathbf{CP}^n \geq n$, pero este espacio es una suspensión y por ello $\mathrm{Cat}\Sigma\mathbf{CP}^n = 1$.

Capítulo 2

Cancelación de esferas p-locales y racionales.

El problema de la cancelación de esferas puede plantearse en los siguientes términos *si una propiedad homotópica se verifica para una suma puntual* $A \vee \mathbf{S}^n$*, ¿qué ocurre con esa propiedad en* A*?* Por ejemplo, la cohomología y la homología de A se determinan fácilmente si se conoce la de $A \vee \mathbf{S}^n$, la categoría de A y de $A \vee \mathbf{S}^n$ coinciden si A es conexo por caminos ..., sin embargo hay situaciones más complicadas : el tipo de homotopía de $A \vee \mathbf{S}^n$ no permite precisar el tipo de homotopía de A, existen ejemplos de espacios A y B de distinto tipo de homotopía tales que $A \vee \mathbf{S}^n \sim B \vee \mathbf{S}^n$.

El fenómeno de cancelación que nos interesa es el siguiente: si $A \vee \mathbf{S}^n$ es la cofibra de una aplicación entre dos sumas puntuales de esferas, ¿es A también cofibra de una aplicación de este tipo? Veremos aquí que la respuesta es afirmativa cuando el espacio A es p-local o racional. En el caso racional podemos incluso cancelar una suma puntual infinita de esferas.

En el caso racional este tipo de cancelación está intimamente relacionado con los espacios de categoría 2. Félix y Thomas estudiaron estos espacios en [13] y demostraron ese fenómeno sin enunciarlo explícitamente. Otra demostración en el caso racional se encuentra en la prueba del teorema de Félix y Thomas dada por Cornea en [7]. Como en la demostración de Félix y Thomas se utilizan los modelos algebraicos de Sullivan, y en la de Cornea los modelos de Quillen, aquí presentaremos una nueva demostración, más geométrica, que puede generalizarse al caso p-local.

En la primera sección definiremos la P-localización de un CW complejo, simplemente conexo y con punto base, donde P es una familia de primos. Veremos los ejemplos usuales de p-localización, donde p es un primo, y de racionalización. Enunciaremos las propiedades y teoremas más importantes. La referencia fundamental es "Localization of Nilpotent Groups and Spaces", de Hilton, Mislin y Roitberg [24].

En la segunda sección nos ocuparemos de la longitud en conos de esferas, y su posible definición para espacios p-locales y racionales.

En la tercera sección presentaremos el fenómeno de cancelación racional, y su relación con la longitud en esferas racional. La última sección está dedicada al mismo problema en el contexto p-local.

2.1 Localización y Racionalización.

Sea $\mathcal{W}_1^*$ la categoría de los espacios topológicos simplemente conexos con punto base $*$, con el tipo de homotopía relativo a $*$ de un CW complejo. Las aplicaciones son las aplicaciones contínuas que conservan el punto base $*$, y las homotopías son relativas al punto base $*$. Los grupos de homotopía de un espacio $A \in \mathcal{W}_1^*$ son grupos abelianos, por ello presentaremos en esta sección la teoría de P-localización de grupos aplicada a los grupos abelianos, aunque esta teoría puede desarrollarse en el caso, más general, de grupos nilpotentes. Recordemos que la localización de $\mathbf{Z}$ en P, que denotamos $\mathbf{Z}_P$, es el anillo de fracciones donde se han invertido todos los primos que no están en P.

Definición 2.1.1 *Los grupos abelianos P-locales. Sea P una familia de primos y $\mathbf{Z}_P$ la localización en P de $\mathbf{Z}$. Diremos que un grupo abeliano G es un grupo P-local si G es un $\mathbf{Z}_P$-módulo, i.e., si la aplicación $G \longrightarrow G \otimes \mathbf{Z}_P$ definida $g \longrightarrow g \otimes 1$ es un isomorfismo.*

Las familias de primos que utilizaremos normalmente son $P = \emptyset$ y $P = \{p\}$

Ejemplo 2.1.2 *Grupos p-locales.*

Sea p un número primo fijado. Los ejemplos clásicos de grupos p-locales son los grupos abelianos finitos de torsión p y la p-localización de $\mathbf{Z}$, que denotaremos $\mathbf{Z}_{(p)}$.

Ejemplo 2.1.3 *Grupos $\emptyset$-locales o racionales.*

Sea $P = \emptyset$, la localización $Z_\emptyset$ es el conjunto de racionales $\mathbf{Q}$. Un grupo $\emptyset$-local es en particular un grupo divisible. Ejemplos clásicos de grupos divisibles son los espacios vectoriales racionales, que son grupos $\emptyset$-locales. Sin embargo, el grupo divisible de torsión $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ no es un grupo $\emptyset$-local.

Para simplificar, escribiremos siempre p-local (respectivamente racional) y no $\{p\}$-local (respectivamente $\emptyset$-local).

Definición 2.1.4 *Sea $A \in \mathcal{W}_1^*$ y sea P una familia de primos. Diremos que el espacio A es P-local si los grupos de homotopía de A son grupos abelianos P-locales.*

Ejemplo 2.1.5 *Localización trivial*

Todo $A \in \mathcal{W}_1^*$ es P-local si P es la familia de todos los primos.

Ejemplo 2.1.6 *Espacios racionales.*

Dado $A \in \mathcal{W}_1^*$, A será un espacio racional si todos sus grupos de homotopía son espacios vectoriales racionales. Los espacios de Eilenberg-Mac Lane, $K(V, n)$, donde V es un espacio vectorial racional, y sus productos son ejemplos de espacios racionales.

Ejemplo 2.1.7 *Espacios p-locales*

Dado $A \in \mathcal{W}_1^*$, p un número primo, A será un espacio p-local si todos sus grupos de homotopía son grupos p-locales. Los espacios de Eilenberg Mac-Lane $K(G, n)$, donde G es un grupo p-local, como por ejemplo $K(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}, n)$, y sus productos son espacios p-locales.

Ejemplo 2.1.8 *Las esferas tienen p-torsión para todo primo p, por tanto no son espacios racionales, ni p-locales, ni en general P-locales para ninguna familia propia P de primos.*

Definición 2.1.9 *P-localización de un espacio.*

Sea P una familia de primos. Sean $A, B \in \mathcal{W}_1^*$. Diremos que una aplicación $f : A \longrightarrow B$ P-localiza el espacio A, si B es P-local y para todo espacio D P-local la aplicación f induce una biyección

$$[B, D] \cong [A, D]$$

Una P-localización es pues una aplicación $f : A \longrightarrow B$ donde B es P-local, que es universal para toda aplicación $g : A \longrightarrow D$, siendo D un espacio P-local.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & D . \\
& B \arrow[ur, dotted, "g_P"'] &
\end{tikzcd}$$

Existen dos teorema fundamentales en teoría de la P-localización, cuya demostración puede encontrarse en [24]. El primer teorema nos dice que podemos detectar una localización de dos maneras equivalentes; una estudiando los homomorfismos inducidos en homotopía y otra estudiando los inducidos en homología. El segundo teorema asegura la existencia de P-localizaciones.

Teorema 2.1.10 *Sea $f : A \longrightarrow B$, donde $A, B \in \mathcal{W}_1^*$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) f P-localiza el espacio A.

(ii) B es P-local y $\pi_n(f) \otimes \mathbf{Z}_P : \pi_n(A) \otimes \mathbf{Z}_P \longrightarrow \pi_n(B)$ es un isomorfismo para todo $n \geq 1$.

(iii) B es P-local y $H_n(f) : H_n(A) \otimes \mathbf{Z}_P \longrightarrow H_n(B)$ es un isomorfismo para todo $n \geq 1$.

Teorema 2.1.11 *Existencia de la P-localización*

Sea P una familia de primos. Todo espacio $A \in \mathcal{W}_1^*$ admite una P-localización, única salvo equivalencia de homotopía.

Dado $A \in \mathcal{W}_1^*$, fijaremos una P-localización y la denotaremos $\theta_P : A \longrightarrow A_P$.

Observación 2.1.12 *Hay que señalar que en la prueba del teorema 2.1.10 se utiliza un resultado interesante en sí mismo:*

Sea P una familia de primos, y sea $B \in \mathcal{W}_1^*$. Entonces $\pi_n(B)$ es P-local para todo $n \geq 1$ si y sólo si $H_n(B)$ es P-local para todo $n \geq 1$.

A partir de estos dos teoremas, debido a la universalidad de la P-localización, se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 2.1.13 *(i) Sea $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ una fibración homotópica en $\mathcal{W}_1^*$. Entonces $F_P \longrightarrow E_P \longrightarrow B_P$ es una fibración homotópica en $\mathcal{W}_1^*$.*

(ii) Sea $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ una cofibración homotópica en $\mathcal{W}_1^*$. Entonces $A_P \longrightarrow B_P \longrightarrow C_P$ es una cofibración homotópica en $\mathcal{W}_1^*$.

Corolario 2.1.14 *Racionalización de un espacio.*

Dado $A \in \mathcal{W}_1^*$, existe un espacio racional A_0 y una aplicación $\theta_0 : A \longrightarrow A_0$ tal que toda aplicación $g : A \longrightarrow D$, donde D es un espacio racional, factoriza a través de θ_0.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\theta_0"'] & & D \\ & A_0 \arrow[ur, dotted, "g_0"'] & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.1.15 *Racionalización de una esfera impar.*

Sea $f : \mathbf{S}^{2n+1} \longrightarrow K(\mathbf{Q}, 2n+1)$ la inclusión de la primera célula del espacio de Einlenberg-McLane. Esta aplicación induce un isomorfismo entre los grupos de homotopía al tensorizar por $\mathbf{Q}$, ya que todos los grupos de homotopía de $\mathbf{S}^{2n+1}$, excepto el $2n+1$ que es $\mathbf{Z}$, son de torsión. La racionalización de una esfera impar $\mathbf{S}^{2n+1}$ es por tanto el espacio de Moore $K(\mathbf{Q}, 2n+1)$.

Corolario 2.1.16 *Localización en p de un espacio.*

Sea p un número primo. Dado $A \in \mathcal{W}_1^*$, existe un espacio p-local $A_{(p)}$ y una aplicación $\theta_{(p)} : A \longrightarrow A_{(p)}$ tal que toda aplicación $g : A \longrightarrow D$, donde D es un espacio p-local, factoriza a través de $\theta_{(p)}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\theta_{(p)}"'] & & D \\ & A_{(p)} \arrow[ur, dotted, "g_{(p)}"'] & \end{tikzcd}$$

2.2 La longitud en conos de esferas P-locales.

Recordemos que la longitud en conos de un espacio topológico conexo por caminos, con punto de base $*$ y con el tipo de homotopía relativa al punto $*$ de un CW-complejo, se define como el número mínimo de cofibraciones necesarias para construir el espacio a partir de sumas puntuales de esferas, e indica, en cierta manera, la descomposición celular mínima del CW-complejo. En el contexto P-local esta noción no tiene mucho sentido ya que en la construcción de una P-localización se añaden a menudo infinitas células, para eliminar la torsión de los grupos de homotopía. Por ejemplo, hemos visto en el ejemplo 2.1.15 que la racionalización del CW-complejo más sencillo (una esfera impar) es un espacio de Einlenberg-McLane que es un CW-complejo con un número infinito de células.

Introduciremos por tanto una nueva definición de longitud en conos, más coherente en el contexto P-local. Recuérdese que las cofibraciones conmutan con las P-localizaciones, podemos entonces utilizar las esferas P-localizadas para construir los espacios P-localizados, y definir:

Definición 2.2.1 *Longitud en conos de esferas P-locales.*

Sea $A \in \mathcal{W}_1^*$, A un espacio P-local. Diremos que la longitud en conos de esferas de A es cero si A es contráctil y escribiremos $cl_S A = 0$. Diremos que la longitud en conos de esferas de A es menor o igual que n y escribiremos $cl_S A \leq n$ si y sólo si existe una cofibración homotópica:

$$L \xrightarrow{\mu} A_{n-1} \xrightarrow{\eta} A_n$$

donde A_n tiene el tipo de homotopía de A, L es una suma puntual de esferas P-locales y $A_{n-1} \in \mathcal{W}_1^*$, A_{n-1} P-local, tal que $cl_S A_{n-1} \leq n-1$.

Utilizaremos la misma notación para la longitud en conos de esferas y la longitud en conos de esferas P-locales, teniendo siempre presente que si A es P-local, $cl_S A$ es su longitud en esferas P-locales. En particular si A es racional $cl_S A$ es su longitud en conos en esferas racionales, si A es p-local $cl_S A$ es su longitud en conos en esferas p-locales...

Propiedad 2.2.2 *Sea $A \in \mathcal{W}_1^*$, sea A_P su P-localización, donde P es una familia de primos. Se verifica:*

$$cl_s(A_P) \leq cl_s A$$

Demostración. Se deduce del corolario 2.1.13.

2.3 Cancelación racional.

En esta sección las esferas son esferas racionales y en general, los espacios son 1-conexos racionales. En particular los grupos de homotopía y de homología de tal espacio son espacios vectoriales racionales.

Teorema 2.3.1 *Sea A_0 un espacio racional simplemente conexo. Supongamos que existe una cofibración homotópica:*

$$\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu} \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k} \xrightarrow{\eta} A_0 \vee \bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l}$$

Entonces se puede construir otra cofibración:

$$\bigvee_{r\in R'} \mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu'} \bigvee_{k\in K'} \mathbf{S}^{n_k} \xrightarrow{\eta'} A_0$$

Corolario 2.3.2 *Sea A_0 un espacio racional simplemente conexo. Se tiene que $cl_S(A_0) \leq 2$ si y sólo si $cl_S\left(A_0 \vee \bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l}\right) \leq 2$, donde $\bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l}$ es una suma puntual de esferas racionales.*

Demostración. Supongamos que existe tal cofibración homotópica:

$$\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu} \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k} \xrightarrow{\eta} A_0 \vee \bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l}$$

Recordemos que a una cofibración se le asocia una sucesión exacta larga en homología. En este caso particular, tenemos la siguiente sucesión exacta de espacios vectoriales racionales:

$$\ldots \longrightarrow H_n(\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r}) \xrightarrow{\mu_*} H_n(\bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k}) \xrightarrow{\eta_*} H_n(A_0)\oplus H_n(\bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l}) \xrightarrow{\delta} H_n(\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r+1})\ldots$$

Sea $V = H_*(\bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l})$. Por ser una sucesión exacta de espacios vectoriales es escindida y podemos descomponer $V = V_1 \oplus V_2$, donde

$$\begin{array}{ll} V_1 = & \{v \in V \ / \ v \in \mathrm{Im}\eta_*\} \\ V_2 = & \{v \in V \ / \ \delta(v) \neq 0\} \end{array}.$$

Sean $\{\upsilon_l\}_{l\in L_1}$, $\{\upsilon_l\}_{l\in L_2}$ bases de V_1 y V_2 respectivamente, su unión es una base de V. Sea $\upsilon_l \in V = H_*(\bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l})$ un elemento de alguna de las bases, como todo elemento de homología de una esfera proviene de una clase de homotopía, sabemos que existe una aplicación $\mathbf{S}^{n_l} \xrightarrow{\upsilon_l} \bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l}$, que realiza el elemento υ_l, i.e. $(\upsilon_l)_*(\iota) = \upsilon_l$ donde ι es el generador de homología de la esfera $\mathbf{S}^{n_l}$. Utilizando las familias $\{\upsilon_l\}_{l\in L_1}$ y $\{\upsilon_l\}_{l\in L_2}$ se puede definir una aplicación contínua entre las sumas puntuales de esferas:

$$(+_{l\in L_1})\upsilon_l + (+_{l\in L_2})\upsilon_l : \bigvee_{l\in L_1} \mathbf{S}^{n_l} \vee \bigvee_{l\in L_2} \mathbf{S}^{n_l} \longrightarrow \bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l}$$

que es una equivalencia de homotopía por ser un isomorfismo homológico entre espacios 1-conexos.

Por esta razón, podemos suponer que la cofibración homotópica tiene la siguiente forma:

$$\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu} \bigvee_{k\in K}\mathbf{S}^{n_k} \xrightarrow{\eta} A_0 \vee \bigvee_{l\in L_1}\mathbf{S}^{n_l} \vee \bigvee_{l\in L_2}\mathbf{S}^{n_l}$$

donde $H_*(\bigvee_{l\in L_1}\mathbf{S}^{n_l}) = V_1$ y $H_*(\bigvee_{l\in L_2}\mathbf{S}^{n_l}) = V_2$.

Empezaremos cancelando la subsuma $\bigvee_{l\in L_1}\mathbf{S}^{n_l}$. Supongamos entonces que existe una cofibración homotópica:

$$\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu} \bigvee_{k\in K}\mathbf{S}^{n_k} \xrightarrow{\eta} A_0 \vee \bigvee_{l\in L_1}\mathbf{S}^{n_l}$$

tal que η_* es sobreyectiva en $H_*(\bigvee_{l\in L_1}\mathbf{S}^{n_l})$. Existe entonces un subespacio de $H_*(\bigvee_{k\in K}\mathbf{S}^{n_k})$ isomorfo via η_* a $H_*(\bigvee_{l\in L_1}\mathbf{S}^{n_l})$, subespacio que puede realizarse en una subsuma puntual de $\bigvee_{k\in K}\mathbf{S}^{n_k}$. Es decir, podemos suponer que $\bigvee_{l\in L_1}\mathbf{S}^{n_l}$ proviene de una subsuma puntual de $\bigvee_{k\in K}\mathbf{S}^{n_k}$, que denotaremos $\bigvee_{k\in K_1}\mathbf{S}^{n_k}$, sea entonces $K = K_1 \cup K'$. Construyamos entonces el siguiente diagrama (cf. 6.12), donde las líneas horizontales y verticales son cofibraciones homotópicas:

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r] \arrow[d] & \bigvee_{k\in K_1}\mathbf{S}^{n_k} \arrow[r, equal] \arrow[d, hook, "i"] & \bigvee_{k\in K_1}\mathbf{S}^{n_k} \arrow[d, "\eta\circ i"] \\
\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \bigvee_{k\in K}\mathbf{S}^{n_k} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & A_0 \vee \bigvee_{l\in L_1}\mathbf{S}^{n_l} \arrow[d] \\
\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r} \arrow[r, "\mu'"] & \bigvee_{k\in K'}\mathbf{S}^{n_k} \arrow[r, "\eta'"] & C_{\mu'}
\end{tikzcd}$$

La cofibra de μ' y la cofibra de $\eta\circ i$ tienen el mismo tipo de homotopía. La cofibra de $\eta\circ i$ es A_0 y $C_{\mu'}$ es la cofibra de una aplicación entre dos sumas puntuales de esferas, la suma $\bigvee_{l\in L_1}\mathbf{S}^{n_l}$ puede cancelarse.

Pasemos a la otra cancelación, supongamos que existe una cofibración homotópica:

$$\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu} \bigvee_{k\in K}\mathbf{S}^{n_k} \xrightarrow{\eta} A_0 \vee \bigvee_{l\in L_2}\mathbf{S}^{n_l}$$

donde $\bigvee_{l\in L_2}\mathbf{S}^{n_l}$ se va a una subsuma puntual $\bigvee_{r\in R_2}\mathbf{S}^{n_r+1}$ de $\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r+1}$ via el morfismo de conexión. Denotemos $R = R_2 \cup R'$. Podemos construir un diagrama análogo al caso anterior:

$$\begin{tikzcd}
\bigvee_{r\in R'} \mathbf{S}^{n_r} \arrow[r, "\mu\circ i"] \arrow[d, hook, "i"] & \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k} \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, equal] & C_{\mu\circ\iota} \arrow[d] \\
\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & A_0 \vee \bigvee_{l\in L_2} \mathbf{S}^{n_l} \arrow[d] \\
\bigvee_{r\in R_2} \mathbf{S}^{n_r} \arrow[r] & * \arrow[r] & \bigvee_{r\in R_2} \mathbf{S}^{n_r+1}
\end{tikzcd}$$

Sea la aplicación compuesta:

$$C_{\mu'} \longrightarrow A_0 \vee \bigvee_{l\in L_2} \mathbf{S}^{n_l} \longrightarrow A_0.$$

Esta aplicación es un isomorfismo de homología, por tanto, A_0 tiene el tipo de homotopía de $C_{\mu'}$, siendo de nuevo $C_{\mu'}$ la cofibra de una aplicación entre sumas puntuales de esferas. $\square$

2.4 Cancelación p-local.

Demostraremos el mismo fenómeno de cancelación anterior en el contexto p-local. En esta sección todos los espacios serán siempre 1-conexos y p-locales, por tanto sus grupos de homotopía y de homología son grupos abelianos p-locales.

Teorema 2.4.1 *Sea A un espacio p-local simplemente conexo. Supongamos que existe una cofibración homotópica:*

$$\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu} \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k} \xrightarrow{\eta} A \vee \mathbf{S}^n$$

Entonces se puede construir otra cofibración:

$$\bigvee_{r\in R'} \mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu'} \bigvee_{k\in K'} \mathbf{S}^{n_k} \xrightarrow{\eta'} A$$

Corolario 2.4.2 *Sea A un espacio p-local simplemente conexo. Se tiene que $cl_S A \leq 2$ si y sólo si $cl_S(A \vee \mathbf{S}^n) \leq 2$, para todo $n \geq 2$.*

Antes de la demostración del teorema, probaremos el siguiente lema, que nos proporciona condiciones para “cambiar” una aplicación de una esfera en una suma puntual por la inclusión canónica de la esfera en la suma.

Lema 2.4.3 *Sean p primo y q tal que m.c.d.$(p,q) = 1$. Sea $\mathbf{S}^n$ la esfera p-local, denotaremos ι el generador de la homología $H_n(\mathbf{S}^n)$. Sea $\psi : \mathbf{S}^n \longrightarrow W \vee \mathbf{S}^n$ una aplicación contínua tal que $\psi_*(\iota) = q\iota + \omega$, donde $\omega \in H_n(W)$, siendo W un espacio p-local arbitrario.*

$$\begin{tikzcd}
& W \vee \mathbf{S}^n \arrow[r] & C_\psi \\
\mathbf{S}^n \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, hook, "i"'] & & \\
& W \vee \mathbf{S}^n \arrow[uu, dotted, "\Psi"'] \arrow[r] & W
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una equivalencia de homotopía $\Psi : W \vee \mathbf{S}^n \longrightarrow W \vee \mathbf{S}^n$ tal que $\Psi \circ i = \psi$. En particular, la cofibra de ψ tiene el tipo de homotopía de W.

Demostración. Denotaremos $\Psi : W \vee \mathbf{S}^n \longrightarrow W \vee \mathbf{S}^n$ la suma de ψ y de la inclusión canónica: $W \hookrightarrow W \vee \mathbf{S}^n$. Vamos a demostrar que Ψ es un isomorfismo en homología y así, Ψ es una equivalencia de homotopía.

Sea ι el generador de $H_n(\mathbf{S}^n) = \mathbf{Z}_{(p)}$, obsérvese que si p y q son primos entre sí el elemento $q\iota$ es también un generador de $H_n(\mathbf{S}^n)$. Esto implica que Ψ_* es un isomorfismo.

Sea C_ψ la cofibra homotópica de ψ. En el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{S}^n & \xrightarrow{i} & \mathbf{S}^n \vee W \\
\| & & {\scriptstyle\Psi}\downarrow \\
\mathbf{S}^n & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{S}^n \vee W
\end{array}$$

las aplicaciones verticales son equivalencias de homotopía, por tanto las cofibras homotópicas de i y ψ tienen el mismo tipo de homotopía . $\square$

Este lema se utilizará en la prueba del teorema de cancelación p-local.

Demostración del teorema 2.4.1. Dada la cofibración homotópica del enunciado:

$$\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu} \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k} \xrightarrow{\eta} A \vee \mathbf{S}^n$$

existe una sucesión exacta larga de homología de $\mathbf{Z}_{(p)}$-módulos:

$$\dots H_n\left(\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r}\right)\xrightarrow{\mu_*}H_n\left(\bigvee_{k\in K}\mathbf{S}^{n_k}\right)\xrightarrow{\eta_*}H_n(A)\oplus H_n(\mathbf{S}^n)\xrightarrow{\delta}H_n\left(\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r+1}\right)\dots$$

Sea ι el generador de $H_n(\mathbf{S}^n)$. Existen dos posibilidades para ι:

Caso 1: Existe $\nu\in H_n\left(\bigvee_{k\in K}\mathbf{S}^{n_k}\right)$ tal que $\eta_*(\nu)=\iota$ donde el elemento ν no será divisible por p, por no serlo ι

Caso 2: $\delta(\iota)\neq 0$. Entonces podemos descomponer $\delta(\iota)=p^t\beta$, siendo $\beta\in H_n(\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r+1})$ un elemento que no es divisible por p.

Caso 1: Sea $\psi:\mathbf{S}^n\longrightarrow\bigvee_{k\in K}\mathbf{S}^{n_k}$ una aplicación tal que $\psi_*(\iota)=\nu$. Como ν no es divisible por p, podemos escribir $\nu=q\iota_1+\omega_1$, donde m.c.d.$(p,q)=1$, ι_1 es el generador de homología de una esfera ${\mathbf{S}^n}_{k_1}$ y $\omega_1\in H_n(\bigvee_{k\in K'}\mathbf{S}^{n_k})$ siendo $K=K'\cup\{k_1\}$. Utilizando el lema 2.4.3 se deduce que la cofibra homotópica de ψ es la suma puntual de esferas $\bigvee_{k\in K'}\mathbf{S}^{n_k}$.

Vamos construir de nuevo un diagrama (cf 6.12) donde las flechas horizontales y verticales son todas cofibraciones homotópicas:

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{S}^n_{k_1} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\psi"] & \mathbf{S}^n_{k_1} \arrow[d, "\eta\circ\psi"] \\
\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \bigvee_{k\in K}\mathbf{S}^{n_k} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & A\vee\mathbf{S}^n \arrow[d] \\
\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r} \arrow[r, "\mu'"] & \bigvee_{k\in K'}\mathbf{S}^{n_k} \arrow[r, "\eta'"] & A'
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que $(\eta\circ\psi)_*(\iota_1)=\eta_*(\nu)=\iota$. Utilizando de nuevo el lema 2.4.3 para $q=1$ obtenemos $A'\sim A$, por tanto A es la cofibra de una aplicación entre dos sumas puntuales.

Caso 2: $\delta(\iota)=p^t\beta\neq 0$, β no divisible por p.

2.1) Supongamos $t=0$ entonces $\delta(\iota)=\beta$, $\beta\in H_n(\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r+1})$. Podemos escribir $\beta=q\iota_2+\omega_2$, donde ι_2 es el generador de homología de una n-esfera $\mathbf{S}^n_{r_2}$ y $\omega_2\in H_n(\bigvee_{r\in R'}\mathbf{S}^{n_r+1})$, donde $R=R'\cup\{r_2\}$.

Utilizando el lema 2.4.3 podemos descomponer $\bigvee_{r\in R}\mathbf{S}^{n_r+1}=\mathbf{S}^n\vee\bigvee_{r\in R'}\mathbf{S}^{n_r+1}$, y construir un diagrama (cf 6.12) donde las líneas horizontales y verticales son todas cofibraciones homotópicas:

$$\begin{tikzcd}
\bigvee_{r\in R'} \mathbf{S}^{n_r} \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d] & \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, equal] & A' \arrow[d, "\tilde{\imath}"] \\
\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & A \vee \mathbf{S}^n \arrow[d] \\
\mathbf{S}^{n-1}_{r_2} \arrow[r] & * \arrow[r] & \mathbf{S}^n_{r_2}
\end{tikzcd}$$

La composición de la aplicación $\tilde{\imath}$ con la proyección canónica $A \vee \mathbf{S}^n \to A$ induce un isomorfismo en homología. Se tiene que A tiene el tipo de homotopía de A' que es la cofibra de una aplicación entre dos sumas puntuales de esferas.

2.2) Supongamos ahora que $\delta(\iota) = p^t\beta$ donde $t > 0$. Como tenemos una sucesión exacta de homología se verifica que $\mu_*(\beta) = 0$, ya que $H_n\left(\bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k+1}\right)$ es un $\mathbf{Z}$-módulo libre. Por tanto existe un elemento $\upsilon \in H_n(A) \oplus H_n(\mathbf{S}^n)$ tal que $\delta(\upsilon) = \beta$. El elemento υ puede descomponerse en una suma $\upsilon = s\iota + \omega_3$ donde ι es el generador de $\mathbf{S}^n$ y $\omega_3 \in H_n(A)$. Sustituyendo υ por su expresión en función de ι y ω_3 se obtiene que $\iota - p^t\upsilon = (1-p^ts)\iota + p^t\omega_3$. A partir de $\delta(\iota - p^t\upsilon) = 0$ se deduce la existencia de un elemento $\nu' \in H_n\left(\bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k}\right)$ tal que $\eta_*(\nu') = (1-p^ts)\iota + p^t\omega_3$.

Sea $\psi : \mathbf{S}^n \longrightarrow \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k}$ una aplicación tal que $\psi_*(\iota) = \nu'$. El elemento $(1-p^ts)\iota + p^t\omega_3$ no es divisible por p, y por tanto ν' tampoco es divisible por p, podemos descomponer $\nu' = q\iota_4 + \omega_4$ y utilizar el lema 2.4.3 para obtener que la cofibra de ψ es una suma puntual $\bigvee_{k\in K'} \mathbf{S}^{n_k}$. Construyamos de nuevo según 6.12 un diagrama donde todas las líneas horizontales y verticales son cofibraciones homotópicas:

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{S}^n \arrow[r, equal] \arrow[d, "\psi"] & \mathbf{S}^n \arrow[d, "\eta\circ\psi"] \\
\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & A \vee \mathbf{S}^n \arrow[d] \\
\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r} \arrow[r, "\mu'"] & \bigvee_{k\in K'} \mathbf{S}^{n_k} \arrow[r, "\rho'"] & A'
\end{tikzcd}$$

Aplicando el lema 2.4.3 a $\eta \circ \psi$ obtenemos $A \sim A'$, donde A' es la cofibra de una aplicación entre dos sumas puntuales de esferas. $\square$

Capítulo 3

Aplicación a los espacios de categoría 2.

Los resultados sobre cancelación del capítulo anterior serán aplicados en el contexto racional y p-local a los espacios de categoría dos.

La primera sección está dedicada a un caso particular de un teorema de Cornea (cf Teorema 1.1 [7]), que proporciona, dado un CW-complejo A conexo por caminos de categoría 2, una cofibración homotópica:

$$\Sigma L \longrightarrow \Sigma K \longrightarrow A \vee \Sigma H$$

donde L, K y H se expresan en función del espacio de lazos de A.

En la segunda sección se define la categoría P-local y la categoría fuerte P-local, y se estudia la relación de estos invariates P-localizados con los invariantes generales. Lemaire y Sigrist conjeturaron en [28] que la categoría racional (categoría P-local para $P = \emptyset$) coincide con la categoría fuerte racional. Recientemente, Dupont ha encontrado un contraejemplo a esta conjetura: un espacio racional simplemente conexo de categoría tres y categoría fuerte cuatro [11]. Félix y Thomas demostraron en [13] que si un espacio A 1-conexo, racional, de tipo finito, tiene categoría dos, entonces su categoría fuerte es también dos En la tercera sección proporcionamos una demostración alternativa al resultado de Félix y Thomas, de hecho es un corolario de la cancelación racional, que no necesita la hipótesis "tipo finito".

En la cuarta sección generalizaremos ese resultado a espacios p-locales cuyo espacio de lazos admite una descomposición: los espacios p-descomponibles. Obtendremos, aplicando un resultado de McGibbon y Wilkerson, que si A es un CW complejo finito, cuya homotopía racional es finita y de categoría dos, entonces sus p-localizaciones tienen categoría fuerte dos para casi todo p.

3.1 Espacios de categoría fuerte dos.

Denotamos $\mathcal{W}^*$ la categoría de los espacios topológicos con punto base $*$, con el tipo de homotopía relativo a $*$ de un CW-complejo. Hemos visto en el capítulo uno dado un espacio $A \in \mathcal{W}^*$, conexo por caminos, si $\mathrm{cat}A \leq n$ existe un espacio H tal que $\mathrm{Cat}(A \vee \Sigma H) \leq n$ (cf 1.5.6) En el Teorema 1.1. de [7] Cornea determina el espacio H y la familia de n cofibraciones homotópicas en función del espacio de lazos de A. Utilizaremos este resultado aplicado a los espacios de categoría menor o igual a dos.

Teorema 3.1.1 *([7], Teorema 1.1) Sea $A \in \mathcal{W}^*$, conexo por caminos de categoría menor o igual a dos. Existe una cofibración homotópica:*

$$*^2\Omega A \vee (\wedge^2 \Omega A \wedge \Sigma H) \xrightarrow{\mu} \Sigma\Omega A \vee (\Omega A \wedge \Sigma H) \xrightarrow{\eta} A \vee \Sigma H\,,$$

donde $H = \Omega(*^3\Omega A)$.

La prueba de este teorema utiliza las propiedades de los límites homotópicos (cf Apéndice).

Demostración del teorema 3.1.1. Consideremos la construcción "fibra-cofibra" de Ganea (cf 1.3):

$$\begin{tikzcd}
\Omega A \arrow[d, "j_0"'] & F_1 \arrow[d, "j_1"'] & F_2 \arrow[d, "j_2"'] \\
PA \arrow[r, "\eta_0"] \arrow[d, "p_0"'] & G_1A \arrow[r, "\eta_1"] \arrow[dl, "p_1"] & G_2A \arrow[dll, "p_2"] \\
A \arrow[urr, dotted, bend right, "s"'] & &
\end{tikzcd}$$

como $\mathrm{cat}A \leq 2$ existe una sección homotópica s de p_2.

Sea $H \xrightarrow{i_s} A \xrightarrow{s} G_2A$ la fibración homotópica (cf capítulo 6) asociada a s. Se tiene $s \circ i_s \sim *$, por tanto $p_2 \circ s \circ i_s \sim i_s \sim *$. La inclusión de la fibra i_s es trivial y entonces en la cofibración homotópica $H \xrightarrow{i_s} A \longrightarrow C_{i_s}$ la cofibra C_{i_s} tiene el tipo de homotopía de $A \vee \Sigma H$.

A partir de las cofibraciones de Ganea construiremos la cofibración homotópica del enunciado. Sea E el producto fibrado homotópico de $s : A \longrightarrow G_2A$ y $\eta_1 : G_1A \longrightarrow G_2A$, sean $s' : E \longrightarrow G_1A$, $q_1 : E \longrightarrow A$ las aplicaciones inducidas:

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r] & G_1A \arrow[r, "\eta_1"] & G_2A \\
H \arrow[u] \arrow[r, "q_0"] & E_1 \arrow[u, "s'"'] \arrow[r, "q_1"] & A \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}$$

Utilizando la composición de productos fibrados homotópicos se tiene que el producto fibrado homotópico de s' y $* \longrightarrow G_1A$ tiene el tipo de homotopía de H y la composición $q_1 \circ q_0$ es homotópa a la aplicación i_s, en particular $q_1 \circ q_0 \sim *$.

Sea C_{q_0} la cofibra de q_0, utilizando la composición de sumas amalgamadas homotópicas:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "q_0"] \arrow[d] & E_1 \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "\iota_{q_0}"'] & A \arrow[d] \\
* \arrow[r] & C_{q_0} \arrow[r] & A \vee \Sigma H
\end{tikzcd}$$

se deduce que la suma amalgamada de q_1 y ι_{q_0} es la cofibra de $q_1 \circ q_0$, o sea, la cofibra de i_s.

A partir de la suma amalgamada homotópica:

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_1A \arrow[d] \\
* \arrow[r] & G_2A
\end{tikzcd}$$

y de la aplicación $s : A \longrightarrow G_2A$ podemos realizar la construcción conocida como *el cubo triple* (cf 6.14) para obtener una suma amalgamada homotópica:

$$\begin{tikzcd}
(H \times F_1)/H \arrow[r] \arrow[d] & C_{q_0} \arrow[d] \\
* \arrow[r] & A \vee \Sigma H
\end{tikzcd}$$

En otras palabras, obtenemos la cofibración homotópica del enunciado:

$$(H \times F_1)/H \longrightarrow C_{q_0} \longrightarrow A \vee \Sigma H$$

Estudiemos primero el tipo de homotopía de $(H \times F_1)/H$. La proposición 1.3.3 nos dice que F_1 tiene el tipo de homotopía de $\Omega A * \Omega A = \Sigma\Omega A \wedge \Omega A$. Utilizando la suma amalgamada homotópica

$$\begin{tikzcd}
\Omega A \wedge \Omega A \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
* \arrow[r] & F_1
\end{tikzcd}$$

la proyección $H \times F_1 \longrightarrow F_1$ y *el cubo triple* obtendremos una cofibración homotópica:

$$((\Omega A \wedge \Omega A) \times H)/H \longrightarrow * \longrightarrow (H \times F_1)/F_1$$

Por tanto $(H \times F_1)/F_1 \sim \Sigma\left[((\Omega A \wedge \Omega A) \times H)/H\right]$ y entonces, utilizando la fórmula que desarrolla la suspensión de un producto, se tiene que:

$$\Sigma\left[((\Omega A \wedge \Omega A) \times H)/H\right] \sim \Sigma(\Omega A \wedge \Omega A) \vee \Sigma\left((\Omega A \wedge \Omega A) \wedge H\right).$$

Determinemos el tipo de homotopía de C_{q_0}. Consideremos la primera cofibración de Ganea $\Omega A \longrightarrow PA \longrightarrow G_1 A$, en términos de límites homotópicos se tiene una suma amalgamada homotópica:

$$\begin{tikzcd}
\Omega A \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
* \arrow[r] & G_1 A
\end{tikzcd}$$

Sea la aplicación $s' : E \longrightarrow G_1 A$ definida anteriormente. De nuevo, con esta aplicación, la suma amalgamada anterior y *el cubo triple* obtendremos una cofibración homotópica:

$$(\Omega A \times H)/H \longrightarrow * \longrightarrow C_{q_0}$$

de donde $C_{q_0} \sim \Sigma\Omega A \vee (\Omega A \wedge \Sigma H)$

Sólo nos queda demostrar que el espacio H tiene el tipo de homotopía de $\Omega(*^3\Omega A)$. Tenemos que $p_2 \circ s$ es homótopa a la identidad en A, por tanto su fibra homotópica es $*$. Considérese el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & * \arrow[rr] \arrow[dd] & & F_2 \arrow[r] \arrow[dd] & * \arrow[dd] \\
H \arrow[ur, dotted] \arrow[rr] \arrow[dr] & & * \arrow[ur] \arrow[dr, "i_s"] & & \\
 & A \arrow[rr, "s"] & & G_2A \arrow[r, "p_2"] & A
\end{tikzcd}
$$

La aplicación $i_s : H \longrightarrow A$, utilizando las propiedades de los productos fibrados homotópicos factoriza a través del punto y y por composición de productos fibrados homotópicos, obtendremos que:

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
* \arrow[r] & F_2
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado homotópico: H tiene entonces el tipo de homotopía de ΩF_2, donde F_2 es la fibra de la segunda fibración de Ganea que por la proposición 1.3.3 verifica $H \sim \Omega(\Sigma\Omega A \wedge \Omega A)$. $\square$

3.2 Localización de los invariantes.

Denotaremos, como en el capítulo anterior, $\mathcal{W}_1^*$ la categoría de los espacios topológicos 1-conexos con punto base $*$, con tipo de homotopía relativo a $*$ de un CW-complejo.

Definición 3.2.1 *Categoría fuerte P-local.*
Sea P una familia de primos. Dado $A \in \mathcal{W}_1^*$, sea A_P la P-localización de A. Se define la categoría fuerte P-local de A, $Cat_P(A)$, como la categoría fuerte de A_P.

Definición 3.2.2 *Categoría P-local.*
Sea P una familia de primos. Dado $A \in \mathcal{W}_1^*$, sea A_P la P-localización de A. Se define la categoría P-local de A, $cat_P(A)$, como la categoría de A_P.

Sea $A \in \mathcal{W}_1^*$. Denominaremos respectivamente categoría racional, categoría fuerte racional, categoría p-local y categoría fuerte p-local a la categoría de A_0, categoría fuerte de A_0, categoría de $A_{(p)}$ y categoría fuerte de $A_{(p)}$, y denotaremos $\mathrm{cat}_0(A)$, $\mathrm{Cat}_0(A)$, $\mathrm{cat}_{(p)}(A)$ y $\mathrm{Cat}_{(p)}(A)$.

Proposición 3.2.3 *Sea P una familia de primos. Para todo $A \in \mathcal{W}_1^*$ se tiene que:*
(i) $Cat_P(A) \leq Cat(A)$
(ii) $cat_P(A) \leq cat(A)$

Demostración. (i) Supongamos $\mathrm{Cat}(A) \leq n$, existen entonces n cofibraciones:

$$L_r \longrightarrow A_r \longrightarrow A_{r+1} \quad 0 \leq r < n$$

donde $A_0 \sim *$, $A_n \sim A$. La racionalización conmuta con las cofibraciones, tenemos entonces n cofibraciones (P-locales):

$$(L_r)_P \longrightarrow (A_r)_P \longrightarrow (A_{r+1})_P \quad 0 \leq r < n$$

donde $(A_0)_P = *$ y $(A_n)_P \sim A_P$.

(ii). Supongamos $\mathrm{cat}(A) \leq n$. Utilizando la caracterización de Ganea 1.3.2, sabemos que A está dominado por el n-ésimo espacio de Ganea G_nA, por tanto la localización de A, A_P, está dominada por $(G_nA)_P$. Ahora bien, utilizando (i) y el corolario 1.5.5 obtenemos

$\mathrm{cat}_P(A) \leq \mathrm{cat}_P(G_nA) \leq \mathrm{Cat}_P(G_nA) \leq \mathrm{Cat}(G_nA) \leq n$. □.

Los invariantes P-localizados pueden ser iguales o estrictamente inferiores a los invariantes generales. Veremos a continuación ejemplos de los dos tipos de situaciones.

Ejemplo 3.2.4 *Categoría y localización de esferas.*

Utilizando la proposición anterior y el ejemplo 1.1.4 deducimos $\mathrm{cat}_P(\mathbf{S}^n) = 1$ y $\mathrm{Cat}_P(\mathbf{S}^n) = 1$ para toda familia de primos P, ya que la localización de una esfera nunca es contráctil: $\pi_n(\mathbf{S}^n_P) \cong \pi_n(\mathbf{S}^n) \otimes \mathbf{Z}_P \cong \mathbf{Z}_P$.

Ejemplo 3.2.5 *Categoría y localización de espacios proyectivos*

La categoría y la categoría fuerte de los espacios proyectivos localizados está acotada por n. Por otra parte, recordemos que las álgebra de cohomología de $\mathbf{CP}^n$ y $\mathbf{HP}^n$ son álgebras polinomiales truncadas, con cualquier tipo de coeficientes, por tanto, la nilpotencia de la cohomología, que acota inferiormente la categoría, será siempre n.

Ejemplo 3.2.6 *Categoría y localización de espacios de Moore .*
Consideremos la multiplicación por p^r de la esfera $\mathbf{S}^n$, siendo p un primo fijado. Denotemos $M(n, p^r)$ el cono de esta aplicación, que denominaremos espacio de Moore de tipo $(n, \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})$.

Obsérvese que la cofibración:

$$\mathbf{S}^n \xrightarrow{\times p^r} \mathbf{S}^n \longrightarrow M(n, p^r)$$

es la suspensión de la cofibración:

$$\mathbf{S}^{n-1} \xrightarrow{\times p^r} \mathbf{S}^{n-1} \longrightarrow M(n-1, p^r)$$

por tanto un espacio de Moore es una suspensión no trivial, y así su categoría fuerte y categoría son iguales a 1. Utilizando la proposición anterior, obtendremos que $\mathrm{cat}_P(M(n, p^r)) \leq 1$ y $\mathrm{Cat}_P(M(n, p^r)) \leq 1$

Supongamos P una familia de primos tal que p no pertenezca a P. La P localización de la aplicación $\mathbf{S}^n \xrightarrow{\times p^r} \mathbf{S}^n$ es un isomorfismo, puesto que hemos invertido p, y así su cofibra, la P-localización de $M(n, p^r)$, es el punto $*$. En este caso la desigualdad es estricta $\mathrm{cat}_P M(n, p^r) = 0 < \mathrm{cat} M(n, p^r) = 1$.

Al contrario, si p pertenece a la familia P de primos, la categoría P-local y la categoría fuerte P-local de un espacio de Moore coincidirán con los invariantes generales, pues en este caso $H_n(M(n, p^r) \otimes \mathbf{Z}_P \cong H_n(M(n, p^r); \mathbf{Z}_P) = \mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$, el espacio no es contráctil.

Ejemplo 3.2.7 *Categoría y localización de $\mathbf{S}^{2n+1} \cup_\beta e^m$.*
Sea $\beta : \mathbf{S}^{m-1} \longrightarrow \mathbf{S}^{2n+1}$ una aplicación contínua, donde $m \geq 2n+2$, sea $C_\beta = \mathbf{S}^{2n+1} \cup_\beta e^m$ el cono de β. Por construcción se tiene que $\mathrm{cat} C_\beta \leq \mathrm{Cat} C_\beta \leq 2$, veremos en el capítulo 5, que según la aplicación β, se puede tener $1 = \mathrm{cat} C_\beta < \mathrm{Cat} C_\beta = 2$, ó incluso $\mathrm{cat} C_\beta = \mathrm{Cat} C_\beta = 2$. Vamos a comprobar que existe siempre una familia P tal que:

$$\mathrm{cat}_P(\mathbf{S}^{2n+1} \cup_\beta e^m) = \mathrm{Cat}_P(\mathbf{S}^{2n+1} \cup_\beta e^m) = 1$$

La aplicación $\beta \in \pi_{m-1}(\mathbf{S}^{2n+1})$ es un elemento de torsión, ya que los grupos de homotopía de las esferas impares, si $m-1 > 2n+1$, son todos de torsión. Sea t la torsión de β, sean p_i donde $i = 1, \ldots, n$ los factores primos de t y sea P una familia de primos disjunta con $\{p_1, \ldots, p_n\}$. La P-localización de la aplicación β será la aplicación trivial, puesto que β es de t-torsión y t es inversible al localizar en P. La cofibra de β_P es la suma puntual de esferas P-locales $\mathbf{S}_P^{2n+1} \vee \mathbf{S}_P^m$, que es un espacio de categoría y categoría fuerte iguales a 1.

3.3 Categoría dos racional.

Recordemos que en el caso general, un co-H-espacio que no sea una suspensión es un espacio cuya categoría fuerte no coincide con la categoría. La siguiente proposición muestra que en el caso racional, este tipo de ejemplos no aparecen:

Proposición 3.3.1 *[36] Sea $A \in \mathcal{W}_1^*$. Supongamos que A es un co-H-espacio, 1-conexo. Entonces A_0 tiene el tipo de homotopía de una suma puntual de esferas racionales.*

En particular de esta proposición y 1.5.10 se deduce:

Corolario 3.3.2 *Sea $A \in \mathcal{W}_1^*$, se tiene que $Cat(A_0) = cl_S(A_0)$, es decir, para espacios racionales la categoría fuerte coincide coincide con la longitud en esferas.*

La proposición 3.3.1 demuestra que un espacio racional, 2-conexo, tiene categoría uno si y sólo si tiene categoría fuerte uno si y sólo si su longitud en conos de esferas es uno. Este hecho motivó la siguiente conjetura:

Conjetura de Lemaire y Sigrist. *Sea A un espacio racional* 1*-conexo, de tipo finito. Se tiene que $catA = CatA$.*

Recientemente N. Dupont ha encontrado un ejemplo de espacio racional con categoría tres y categoría fuerte cuatro [11]. Sin embargo, para espacios de categoría dos, de tipo finito, la conjetura fue demostrada por Félix y Thomas en [13] utilizando modelos de Sullivan. El resultado es cierto sin la hipótesis “tipo finito”: es una consecuencia de la cancelación racional del capítulo anterior.

Teorema 3.3.3 *Sea A un espacio racional* 1*-conexo. Se tiene que*
$$catA \leq 2 \text{ si y sólo si } CatA \leq cl_S A \leq 2.$$

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cat}A \leq 2$, existe una cofibración homotópica (cf 3.1.1):

$$\Sigma L \longrightarrow \Sigma K \longrightarrow A \vee \Sigma H$$

donde $H = \Omega(*^3\Omega A)$, $\Sigma L = *^2\Omega A \vee (\wedge^2\Omega A \wedge \Sigma H)$ y $\Sigma K = \Sigma\Omega A \vee (\Omega A \wedge \Sigma H)$.

Como A es un espacio racional y las cofibraciones conmutan con la racionalización, podemos suponer la cofibración anterior formada por espacios racionales, y utilizando la proposición 3.3.1, deducimos la existencia de una cofibración:

$$\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu} \bigvee_{s\in S} \mathbf{S}^{n_s} \xrightarrow{\eta} A \vee \bigvee_{t\in T} \mathbf{S}^{n_t}$$

y por el teorema de cancelación 2.3.1, sabemos que existe otra cofibración:

$$\bigvee_{r\in R'} \mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu'} \bigvee_{s\in S'} \mathbf{S}^{n_s} \xrightarrow{\eta'} A$$

entonces $\mathrm{Cat}A \leq \mathrm{cl}_S A \leq 2$. $\square$

3.4 Los espacios p-descomponibles.

En esta sección nos ocuparemos de los espacios p-locales cuyo espacio de lazos admite una descomposición. Utilizaremos la notación usual:

$$\Omega^k = \begin{cases} \mathbf{S}^k & k = 2n-1 \\ \Omega\mathbf{S}^{k+1} & k = 2n \end{cases}$$

Definición 3.4.1 *Sea p un número primo. Un espacio $A \in \mathcal{W}_1^*$ se dice p-descomponible hasta m si existe un $m \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tal que $\Omega A \sim_{(p)} \prod_{k\in K} \Omega^{n_k} \times E$ siendo $E \in \mathcal{W}_1^*$ un espacio m-conexo.*

Un espacio descomponible según [2], [37] es un espacio p-descomponible hasta ∞ para todo primo p.

Teorema 3.4.2 *Sea p un número primo, sea $A \in \mathcal{W}_1^*$ finito de dimensión m. Si A es un espacio p-descomponible hasta m y $catA_{(p)} \leq 2$, entonces $CatA_{(p)} \leq cl_S A_{(p)} \leq 2$.*

Este teorema establece una condición necesaria para que los espacios de categoría dos sean descomponibles en el sentido general:

Corolario 3.4.3 *Espacios descomponibles.*
Sea A un descomponible según [2], [37]. Entonces, para todo primo p se tiene: $catA_{(p)} \leq 2$ si y sólo si $cl_S A_{(p)} \leq 2$.

En particular se deduce que si existe un primo p tal que la p localización de una suspensión no tiene longitud en conos de esferas menor que dos, la suspensión no es descomponible. Por ejemplo, $\Sigma \mathbf{CP}^n$ ($n \geq 3$) no es descomponible, ya que su localización en dos tiene longitud en conos n.

Para CW-finitos cuya homotopía racional sea finita McGibbon y Wilkerson [30]Ê han demostrado que son espacios descomponibles para casi todo p. Este resultado y el teorema 3.4.2 implican:

Corolario 3.4.4 *Sea $A \in \mathcal{W}_1^*$, finito, racionalmente finito y no contráctil. Si $catA \leq 2$ entonces $CatA_{(p)} \leq cl_S A_{(p)} \leq 2$ para casi todo p.*

Demostración del teorema. Todos los espacios considerados en esta prueba son p-locales, incluídos las esferas y los Ω^k. Sea $A \in \mathcal{W}_1^*$ p-descomponible hasta m, es decir, su espacio de lazos verifica:

$$\Omega A = \prod_{k \in K} \Omega^{n_k} \times E$$

siendo E un espacio m-conexo. Como $\mathrm{cat}A \leq 2$, existe una cofibración homotópica (cf 3.1.1):

$$*^2\Omega A \vee (\wedge^2 \Omega A \wedge \Sigma H) \xrightarrow{\mu} \Sigma\Omega A \vee (\Omega A \wedge \Sigma H) \xrightarrow{\eta} A \vee \Sigma H \quad (*)$$

Utilizaremos la descomposición de ΩA para demostrar que los espacios de la cofibración $(*)$ son, hasta cierta dimensión, sumas puntuales de esferas y poder entonces utilizar el teorema de cancelación p-local.

Aplicando las fórmulas que relacionan Σ y $\times$ obtenemos:

$$\Sigma\Omega A = \Sigma(\prod_{k \in K} \Omega^{n_k} \times E) = \Sigma(\prod_{k \in K} \Omega^{n_k}) \vee \Sigma E \vee \left[\Sigma(E \wedge \prod_{k \in K} \Omega^{n_k}) \right].$$

Denotemos $E' = \Sigma E \vee [\Sigma(E \wedge \prod_{k\in K} \Omega^{n_k})]$, este espacio E' es $(m+1)$-conexo.

La fórmula $\Sigma\left(\prod_{k\in K} \Omega^{n_k}\right) = \bigvee_{k\in\Lambda} \mathbf{S}^{n_k}$ implica

$$\Sigma\Omega A = \bigvee_{k\in\Lambda} \mathbf{S}^{n_k} \vee E'.$$

Sustituyendo $\Sigma\Omega A$ por esta expresión en la cofibración homotópica anterior $(*)$ obtenemos:

$$\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r} \vee E_1 \xrightarrow{\mu} \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k} \vee E_2 \xrightarrow{\eta} A \vee \bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l} \vee E_3$$

donde E_1, E_2 yE_3 son espacios topológicos, $(m+1)$-conexos como mínimo, siendo m la dimensión de A.

Sean $R^{(m)} = \{r \in R \;\;/\;\; n_r \leq m\}$ y $K^{(m)} = \{k \in K \;\;/\;\; n_k \leq m\}$. Por el teorema de aproximación celular podemos restringir la aplicación anterior a la aplicación $\bigvee_{r\in R^{(m)}} \mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu^{(m)}} \bigvee_{k\in K^{(m)}} \mathbf{S}^{n_k}$ y construir el siguiente diagrama donde las líneas horizontales son cofibraciones homotópicas:

$$\begin{tikzcd}
\bigvee_{r\in R^{(m)}} \mathbf{S}^{n_r} \arrow[r, "\mu^{(m)}"] \arrow[d, hook] & \bigvee_{k\in K^{(m)}} \mathbf{S}^{n_k} \arrow[r] \arrow[d, hook] & C_{\mu^{(m)}} \arrow[d, dotted, "\phi"'] \\
\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r} \vee E_1 \arrow[r] & \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k} \vee E_2 \arrow[r] & A \vee \bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l} \vee E_3 \arrow[d] \\
 & & A \vee \bigvee_{l\in L^{(m)}} \mathbf{S}^{n_l}
\end{tikzcd}$$

La aplicación inducida $\phi : C_{\mu^{(m)}} \longrightarrow A \vee \bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l} \vee E_3$ es un isomorfismo en homología hasta el grado m e inyectiva en $m+1$, ya que las inclusiones $\bigvee_{r\in R^{(m)}} \mathbf{S}^{n_r} \hookrightarrow \bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r}$ $\bigvee_{k\in K^{(m)}} \mathbf{S}^{n_k} \hookrightarrow \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k}$ son isomorfismos hasta el grado m. Existe entonces un subsuma puntual $\bigvee_{l\in L^{(m)}} \mathbf{S}^{n_l}$ de $\bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l}$ tal que la composición de la aplicación inducida $\phi : C_{\mu^{(m)}} \longrightarrow A \vee \bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l} \vee E_3$ y de la proyección $A \vee \bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l} \vee E_3 \longrightarrow A \vee \bigvee_{l\in L'} \mathbf{S}^{n_l}$ induce un isomorfismo en homología. En resumen, tenemos una equivalencia de homotopía entre $C_{\mu^{(m)}}$ y $A \vee \bigvee_{l\in L^{(m)}} \mathbf{S}^{n_l}$; podemos suponer que existe una cofibración homotópica:

$$\bigvee_{r\in R} \mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu} \bigvee_{k\in K} \mathbf{S}^{n_k} \xrightarrow{\eta} A \vee \bigvee_{l\in L} \mathbf{S}^{n_l}$$

Abusamos de la notación denotando μ y η las restricciones de μ y de η. Recordemos que como A es de tipo finito, también lo será ΣH, en particular, la suma puntual de esferas p-locales $\bigvee_{l \in L} \mathbf{S}^{n_l}$ hasta dimensión m es una suma puntual finita. Utilizando el teorema de cancelación p-local 2.4.1, deducimos la existencia de una cofibración:

$$\bigvee_{r \in R'} \mathbf{S}^{n_r} \xrightarrow{\mu'} \bigvee_{k \in K'} \mathbf{S}^{n_k} \xrightarrow{\eta'} A$$

y por tanto $\mathrm{Cat} A \leq \mathrm{cl}_S A \leq 2$. $\square$

Capítulo 4

Categorías de un producto.

En la primera sección estudiaremos la categoría del producto de dos espacios. Si los espacios son conexos por caminos y completamente normales, Fox desarrolla en [14] la desigualdad de Bassi:

$$\mathrm{cat}(A \times B) \leq \mathrm{cat}A + \mathrm{cat}B$$

Ganea conjeturó la igualdad si el espacio B era una esfera, es decir $\mathrm{cat}(A \times \mathbf{S}^n) = \mathrm{cat}A + 1$. Esta conjetura ha sido un problema abierto durante muchos años. K. Hess y B. Jessup la demostraron para espacios racionales, pero en el caso general resulta ser falsa: muy recientemente Iwase ha encontrado un espacio Q verificando $\mathrm{cat}(Q \times \mathbf{S}^n) = \mathrm{cat}Q$ para todo $n \geq 2$.

En la segunda sección nos ocuparemos de la categoría fuerte de un producto, desarrollando el resultado de Takens [39] conocido como el teorema del producto mixto:

$$\mathrm{Cat}(A \times B) \leq \ \mathrm{cat}A + \mathrm{máx}\{\mathrm{Cat}B, 1\}.$$

e ilustraremos este resultado con ejemplos sencillos donde la desigualdad es estricta.

En la tercera sección estableceremos, para espacios de categoría fuerte uno, la relación entre esta fórmula del producto mixto y el Producto de Whitehead Generalizado. Recordemos que un espacio de categoría fuerte uno es una suspensión, por ello la acotación $\mathrm{Cat}(\Sigma A') \times (\Sigma B') \leq 2$ equivale a la existencia de una aplicación entre suspensiones cuya cofibra sea $(\Sigma A') \times (\Sigma B')$. Arkowitz construye una cofibración homotópica:

$$\Sigma A' \wedge B' \longrightarrow \Sigma A' \vee \Sigma B' \longrightarrow \Sigma A' \times \Sigma B'$$

lo que nos proporciona una demostración alternativa del hecho $\mathrm{Cat}(\Sigma A')\times(\Sigma B') \leq 2$.

El resultado de Arkowitz fue generalizado por Rutter en [35], quién construyó una cofibración homotópica:

$$A \wedge B \xrightarrow{w} \Sigma A \vee B \longrightarrow (\Sigma A) \times B$$

cuando B es un co-H-espacio.

En la cuarta sección presentaremos la construcción de w. Este resultado se utilizará en el capítulo siguiente para calcular la categoría fuerte de cierto espacio producto.

4.1 Categoría de un producto.

Las referencias de esta sección son [14] y [41].

Definición 4.1.1 *Diremos que un espacio A es completamente normal si dados dos subespacios F_1 y F_2 de A tales que $F_1 \cap \bar{F}_2 = \bar{F}_1 \cap F_2 = \emptyset$, existen dos abiertos U y V en A tal que $F_1 \subset U$ y $F_2 \subset V$.*

El siguiente teorema es un resultado de Bassi [3] dado a conocer por Fox en [14] (Teorema 9).

Teorema 4.1.2 *Sean A y B dos espacios topológicos conexos por caminos completamente normales. Se verifica:*

$$cat(A \times B) \leq catA + catB$$

En particular, el resultado es cierto para CW-complejos conexos.

La demostración de este teorema utiliza la noción de subconjunto categórico, que generaliza la noción de abierto categórico del primer capítulo y que introducimos a continuación:

Definición 4.1.3 *Sea A un espacio topológico y sea $F \subset A$ un subespacio cualquiera de A. Diremos que F es categórico si existe un abierto categórico V de A tal que $F \subset V$.*

La noción de espacio con buen punto, es decir que la inclusión $* \longrightarrow A$ sea una cofibración, equivale a exigir que el punto sea categórico [38].

Propiedad 4.1.4 *Sea A un espacio topológico conexo por caminos y completamente normal. Si F_1 y F_2 son dos subconjuntos categóricos de A tales que $F_1 \cap \bar{F}_2 = \bar{F}_1 \cap F_2 = \emptyset$, se tiene que $F_1 \cup F_2$ es categórico.*

Demostración. Por definición de espacio completamente normal existen dos abiertos disjuntos D_1 y D_2 tales que $F_r \subset D_r \quad , r = 1, 2$, y puesto que son categóricos, existen dos abiertos categóricos U_1 y U_2 tales que $F_r \subset U_r \quad , r = 1, 2$. Definamos $V_r = D_r \cap U_r \quad , r = 1, 2$. Los abiertos V_r son categóricos, su intersección es vacía y el espacio es conexo por caminos, por tanto $V_1 \cup V_2$ es categórico y es un abierto que contiene a $F_1 \cup F_2$. □

Definición 4.1.5 *Sea A un espacio topológico, diremos que una cadena finita de abiertos (respectivamente cerrados) de A, $V_0 = \emptyset \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = A$ es una filtración categórica abierta (respectivamente cerrada) de longitud n si las diferencias $V_r - V_{r-1}$, $r = 1, \ldots, n$ son subconjuntos categóricos de A.*

Lema 4.1.6 *La existencia de una filtración categórica abierta de longitud n es equivalente a la existencia de una filtración categórica cerrada de longitud n.*

Demostración. Dada $\{V_r\}_{0 \leq r \leq n}$ una filtración categórica abierta de longitud n, se construye $\{U_r\}_{0 \leq r \leq n}$ una filtración categórica cerrada definiendo $U_r = A - V_{n-r}$. El recíproco es análogo. □

Proposición 4.1.7 *Sea A un espacio topológico, A admite una filtración categórica de longitud $n + 1$ si y sólo si cat$A \leq n$.*

Demostración. Dada $\{V_r\}_{0 \leq r \leq n+1}$ filtración categórica abierta, sea U_r el abierto categórico que contiene a $V_r - V_{r-1}$, $r = 1, \ldots, n+1$. La familia $\{U_r\}_{1 \leq r \leq n+1}$ es un recubrimiento de A formado por $n + 1$ abiertos categóricos, por tanto cat$A \leq n$.

Recíprocamente, sea $\{U_r\}_{1 \leq r \leq n+1}$ un recubrimiento de A formado por $n + 1$ abiertos categóricos. Se define $V_k = \bigcup_{r=1}^{k} U_r$ para todo $k = 1, \ldots, n + 1$ y $V_0 = \emptyset$. La familia $\{V_k\}_{0 \leq k \leq n+1}$ es una filtración categórica abierta de A. □

Demostración del teorema 4.1.2. Supongamos cat$A = n$ y cat$B = m$. Utilizando la proposición 4.1.7 sean $\{V_r\}_{0 \leq r \leq n+1}$, $\{U_s\}_{0 \leq s \leq m+1}$ filtraciones categóricas cerradas de A y de B respectivamente. Supongamos $m \leq n$, definimos los siguiente subconjuntos cerrados de $A \times B$:

$$W_k = \bigcup_{r+s=k+1} V_r \times U_s$$

donde $k = 1, \ldots, n+m+1$. Demostraremos que $\{W_k\}_{k=1,\ldots,n+m+1}$ es una filtración categórica cerrada de $A \times B$.

Se tiene que

$$W_{k+1} - W_k = \bigcup_{r+s=k+2} (V_r - V_{r-1}) \times (U_s - U_{s-1}), \quad k = 1, \ldots, n+m.$$

Para simplificar, denotemos $W_{r,s} = (V_r - V_{r-1}) \times (U_s - U_{s-1})$. Los espacios $W_{r,s}$ son producto de espacios categóricos, por tanto, son categóricos de $A \times B$. Supongamos además $r < r'$ y $s > s'$, se tiene que

$$\overline{W_{r,s}} \cap W_{r',s'} = \emptyset$$
$$W_{r,s} \cap \overline{W_{r',s'}} = \emptyset$$

utilizando la propiedad 4.1.4, se deduce que $W_{k+1} - W_k$, al ser unión de los $W_{r,s}$ es a su vez categórico. □

4.2 Categoría fuerte de un producto.

Los resultados de esta sección han sido demostrados por Takens [39].

Teorema 4.2.1 *Sean A, B espacios con el tipo de homotopía de CW-complejos conexos. Se verifica:*

$$Cat(A \times B) \leq catA + máx\{CatB, 1\}.$$

Demostración. Podemos suponer K y L poliedros conexos, $K \sim B$ y $L \sim A$, sean (K, t'), (L, t) triangulaciones fijadas. Sea $k = $máx$\{\text{Cat}K, 1\}$ y $n = \text{cat}L$. Existe un recubrimiento $\{V_j\}_{j=0}^n$ de (L, t) formado por subcomplejos cerrados categóricos.

Admitamos por el momento el siguiente lema:

Lema 4.2.2 *Si $CatB \leq k$, para cada número n existe un poliedro K, con el tipo de homotopía de B y una familia de $n+1$ recubrimientos $\{\{U_{i,j}\}_{i=0}^k\}_{j=0}^n$ de K con las siguientes propiedades:*

1. Existe una triangulación t de K tal que todos los $U_{i,j}$ son subcomplejos cerrados de (K, t).

2. $U_{i,j}$ es contráctil para todo i, j.

3. $\bigcup_{i=0}^k U_{i,j} = K$ para cada j.

4. $U_{i,j} \bigcap U_{i',j'} = \emptyset$ si $i + j = i' + j'$.

Sea una familia de $n+1$ recubrimientos $\{\{U_{i,j}\}_{i=0}^{k}\}_{j=0}^{n}$ de subcomplejos cerrados satisfaciendo las propiedades de este lema 4.2.2; como $k \geq 1$, podemos suponer que los $U_{i,j}$ son todos distintos de K.

Se tiene un recubrimiento de $K \times L$ formado por los subcomplejos de la forma $U_{i,j} \times V_j$. Estos subcomplejos no son, en general, contráctiles en sí mismos, tienen el tipo de homotopía de V_j. Por hipótesis V_j es categórico, es decir, contráctil en L, por tanto existen aplicaciones $\phi'_j : \mathcal{C}(V_j) \longrightarrow L$, donde $\mathcal{C}V_j$ es el cono de V_j, tales que $\phi'_j(v,0) = v \;\; \forall v \in V_j$. Existe una triangulación t_j del cono $\mathcal{C}(V_j)$ y aplicación simplicial $\phi_j : (\mathcal{C}(V_j), t_j) \longrightarrow (L,t)$ verificando $\phi_j \sim \phi'_j$ y $\phi_j(v,0) = v$.

Sea Δ^J el complejo simplicial contráctil cuyo conjunto de vértices es J, y cuyo conjunto de q-simplex es el conjunto de todos los subconjuntos de $q+1$ elementos de J. El conjunto J se elige lo suficientemente grande de manera que cada $(\mathcal{C}(V_j), t_j)$ pueda incluirse simplicialmente en él; sea $\sigma_j : (\mathcal{C}(V_j), t_j) \longrightarrow \Delta^J$ tales inclusiones simpliciales.

Definimos una familia de aplicaciones $\kappa_j : (\mathcal{C}(V_j), t_j) \longrightarrow [0,1]$ como sigue: cada vértice de la base va a 0, todos los otros vértices van a 1; k_j es lineal en cada simplex.

Finalmente, construímos una sucesión de inclusiones $\alpha_{i,j} : [0,1] \longrightarrow K$ tales que:

(a) $\alpha_{i,j}[0,1] \cap U_{i,j} = \alpha_{i,j}(0)$.

(b) $(U_{i,j} \cup \mathrm{Im}\alpha_{i,j}) \cap (U_{i',j'} \cup \mathrm{Im}\alpha_{i',j'}) = \emptyset$ para $i+j = i'+j'$,

(c) Hay una subdivision t'' de (K,t') tal que para todo (i,j) la aplicación $\alpha_{i,j}$ es lineal sobre cada 1-simplex.

Obsérvese que las $\alpha_{i,j}$ pueden construirse sólo si ninguno de los $U_{i,j}$ es igual a K.

Ahora podemos atar el cono de V_j sobre el producto $U_{i,j} \times V_j$ tomando :

$W_{i,j} = (U_{i,j} \times V_j \times \Delta^J) \cup \{(\alpha_{i,j}\kappa_j(u,t), \phi_j(u,t), \sigma_j(u,t)) \;/\; (u,t) \in \mathcal{C}(V_j)\}$.

Estos espacios $W_{i,j}$ verifican las siguientes propiedades:

1. $W_{i,j}$ es un subcomplejo cerrado de $K \times L \times \Delta^J$; esto es cierto porque $\alpha_{i,j}\kappa_j$, ϕ_j y σ_j son simpliciales con respecto a la misma triangulación t_j de $C(V_j)$.

2. $W_{i,j}$ es contráctil.

3. $W_{i,j} \cap W_{i',j'} = \emptyset$ si $i+j = i'+j'$; como se puede comprobar al proyectar sobre K.

4. $\bigcup_{i,j} W_{i,j} = K \times L \times \Delta^J$.

Por tanto $\mathrm{Cat}(K \times L \times \Delta^J) \leq n+k$, y como Δ^J es contráctil, $K \times L \sim K \times L \times \Delta^J$, se tiene que $\mathrm{Cat}(K \times L) \leq \mathrm{cat}(L) + \mathrm{máx}\{\mathrm{Cat}(K), 1\}$. $\square$.

Demostración del lema 4.2.2.

Fijaremos n y probaremos el lema por inducción en k.

Para $k = 0$ el lema es trivial tomando $U_{0,j} = B$. Dado un k arbitrario si $\mathrm{Cat}(B) = k$ existe (Teorema 1.5.3) una cofibración homotópica:

$$L' \longrightarrow B_{k-1} \longrightarrow B$$

donde B_{k-1} tiene $\mathrm{Cat}B_{k-1} \leq k-1$. Estos espacios tienen el tipo de homotopía de CW-complejos ó ,de manera equivalente [31], de complejos simpliciales. Sean L aproximación simplicial de L', M aproximación simplicial de B_{k-1} y sea $\mu : L \longrightarrow M$ aproximación simplicial de la aplicación $L' \longrightarrow B_{k-1}$. Se verifica que B tiene el tipo de homotopía del cono de la aplicación μ.

Si $\tau : M \longrightarrow M'$ es una equivalencia de homotopía, la composición $\tau \circ \mu : L \longrightarrow M'$ también verifica (i) y (ii). Por inducción podemos suponer que dado M, con $\mathrm{Cat}(M) = k-1$, existe un complejo simplicial M', una equivalencia de homotopía τ entre M y M' y un conjunto de $n+1$ recubrimientos $\{\{V_{i,j}\}_{i=0}^{k-1}\}_{j=0}^{n}$ satisfaciendo las propiedades 1, 2, 3 y 4 del lema. Sea K el cono de la aplicación $\tau \circ \mu$. El tipo de homotopía de K coincide con el tipo de homotopía del cono de μ, podemos suponer que $\tau \circ \mu$ es simplicial (con respecto a triangulaciones t y t' de L y M' tales que los conjuntos $V_{i,j}$ sean subcomplejos con respecto a t') y por tanto K es un complejo simplicial. Dado un subconjunto W de M', sea $W[t]$ el siguiente subconjunto de K:

$$W[t] = W \cup \{(l, \bar{t}) \ / \ \tau \circ \mu(l) \in W \ \text{ y } \bar{t} \leq t\}.$$

Obsérvese que $W[t]$ tiene el tipo de homotopía de W. Podemos ahora definir los recubrimientos K:

$$U_{i,j} = V_{i,j}\left[\frac{1}{j+2}\right] \qquad i = 0, \ldots, k-1 \ , j = 0, \ldots, n.$$

$$U_{k,j} = \left\{(l,t) \ / \ t \in \left[\frac{1}{j+2}, 1\right]\right\} \subset K.$$

Las propiedades 1, 2, 3, y 4 se deducen directamente. $\square$

Ejemplo 4.2.3 *Sean $M(n,p)$, $M(n,q)$ dos espacios de Moore, de tipo (n,p), (n,q) respectivamente, donde p y q son dos primos distintos, $n > 1$. Existe una equivalencia de homotopía*

$$M(n,p) \vee M(n,q) \sim M(n,p) \times M(n,q).$$

En particular

$$cat(M(n,p) \times M(n,q)) < catM(n,p) + catM(n,q).$$

$$Cat(M(n,p) \times M(n,q)) < catM(n,p) + máx\{CatM(n,q), 1\}.$$

En otras palabras, existen dos suspensiones cuyo producto sigue siendo una suspensión.

4.3 Producto de Whitehead Generalizado.

Dadas $\alpha \in \pi_r(\mathbf{S}^n)$, $\beta \in \pi_s(\mathbf{S}^n)$ recordemos que el producto de Whitehead de α y β es un elemento $[\alpha, \beta] \in \pi_{r+s-1}(\mathbf{S}^n)$. Arkowitz generaliza en [1] esta noción definiendo el Producto de Whitehead Generalizado:

Sean $\alpha \in [\Sigma A, W]$, $\beta \in [\Sigma B, W]$, donde A y B son CW-complejos conexos localmente finitos y W es un espacio topológico cualquiera. Sean $f : \Sigma A \longrightarrow W$ y $g : \Sigma B \longrightarrow W$ dos representantes de las clases α y β respectivamente. Denotemos $p_A : A \times B \longrightarrow A$, $p_B : A \times B \longrightarrow B$ las proyecciones canónicas. Consideremos las composiciones $f' : \Sigma(A \times B) \xrightarrow{\Sigma p_A} \Sigma A \xrightarrow{f} W$, $g' : \Sigma(A \times B) \xrightarrow{\Sigma p_B} \Sigma B \xrightarrow{g} W$. Sea $[f', g']$ el conmutador de f' y g' en el grupo $[\Sigma(A \times B), W]$. Se tiene que la restricción de $[f', g']$ a $\Sigma A \vee B$ es trivial, por tanto, este conmutador pasa al cociente:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma(A \times B) \arrow[rr, "{[f',g']}"] \arrow[dr] & & W \\
& \Sigma(A \wedge B) \arrow[ur, "\overline{[f',g']}"'] &
\end{tikzcd}$$

Definición 4.3.1 *Dados $\alpha \in [\Sigma A, W]$, $\beta \in [\Sigma B, W]$, donde $\alpha = [f]$, $\beta = [g]$, se define el producto de Whitehead generalizado $[\alpha, \beta] \in [\Sigma A \wedge B, W]$ como la clase de homotopía de $\overline{[f', g']}$.*

Este producto de Whitehead generalizado verifica propiedades análogas al producto de Whitehead usual: anti-conmutatividad, identidad de Jacobi, bi-aditividad, es nulo si W es un H-espacio...

Por otra parte, utilizando este producto generalizado, Arkowitz construye una aplicación $\mathbf{w} : \Sigma(A \wedge B) \longrightarrow \Sigma A \vee \Sigma B$ cuya cofibra homotópica es $\Sigma A \times \Sigma B$. En términos de invariantes homotópicos, esta cofibración demuestra que la categoría fuerte del producto de dos suspensiones es menor o igual a dos.

Teorema 4.3.2 *Sean $i_1 : \Sigma A \hookrightarrow \Sigma A \vee \Sigma B$ e $i_2 : \Sigma B \hookrightarrow \Sigma A \vee \Sigma B$ las inclusiones canónicas. Sea $\mathbf{w} : \Sigma A \wedge B \longrightarrow \Sigma A \vee \Sigma B$ el producto de Whitehead generalizado de i_1 e i_2. Se tiene una cofibración homotópica:*

$$\Sigma A \wedge B \xrightarrow{\mathbf{w}} \Sigma A \vee \Sigma B \xrightarrow{i} \Sigma A \times \Sigma B$$

siendo i la inclusión de la suma puntual en el producto.

4.4 El Teorema de Rutter.

El teorema de Rutter es una generalización del producto de Whitehead de Arkowitz: sustituye una de las suspensiones por un co-H-espacio, obteniendo una cofibración del mismo tipo.

Teorema 4.4.1 *[34] Sean A y B espacios 1-conexos, con el tipo de homotopía de un CW complejo con buen punto. Sea B un co-H-espacio. Existen tres aplicaciones w, h y κ, donde h es una equivalencia de homotopía y κ es homótopa a la identidad, que hacen conmutar el siguiente diagrama de cofibraciones homotópicas:*

$$\begin{tikzcd}
B \wedge A \arrow[r, "w"] & B \vee \Sigma A \arrow[r, "\iota_w"] \arrow[d, equal] & C_w \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma(B \wedge A) \arrow[d, "\kappa"'] \\
& B \vee \Sigma A \arrow[r, "i"] & B \times \Sigma A \arrow[r] & B \wedge \Sigma A
\end{tikzcd}$$

Sea B un co-H-espacio. Existe una sucesión exacta corta escindida de co-H-espacios:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, shift left, "s_B"] & (A \wedge B) \vee B \arrow[l, shift left, "r_B"] \arrow[r, shift left, "r_{A\wedge B}"] & A \wedge B \arrow[l, shift left, "s_{A\wedge B}"]
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que las secciones y las retracciones dependen de la comultiplicación de B.

Considérese la cofibración homotópica:

$$A \xrightarrow{i_A} A \times B \xrightarrow{q_B} (A \wedge B) \vee B$$

a la que se le asocia la siguiente co-acción:

$$(A \wedge B) \vee B \xrightarrow{\bar{\Psi}} \Sigma A \vee (A \wedge B) \vee B.$$

Las aplicaciones q_B and $\bar{\Psi}$ también dependen de la comultiplicación de B.

Sea $\bar{w}$ la aplicación compuesta:

$$\bar{w} : A \wedge B \xrightarrow{s_{A\wedge B}} (A \wedge B) \vee B \xrightarrow{\bar{\Psi}} \Sigma A \vee (A \wedge B) \vee B \xrightarrow{1 \vee r_B} \Sigma A \vee B.$$

La aplicación $w : A \wedge B \longrightarrow \Sigma A \vee B$ dada por Rutter [34] es una aplicación homótopa a $\bar{w}$.

Observación 4.4.2 *i) Si se supone el espacio B cogrupo podemos eliminar la hipótesis sobre la conexión de A y B.*

ii) La construcción de w depende de la comultiplicación de B; de hecho, la clase de homotopía de w está determinada de manera única por dicha comultiplicación.

Proposición 4.4.3 *Si B es una suspensión, la aplicación w coincide con el producto de Whitehehad generalizado.*

Capítulo 5

Cat $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7) \times (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)$.

En el primer capítulo se han definido dos invariantes numéricos del tipo de homotopía, la categoría $\mathrm{cat}A$ y la categoría fuerte $\mathrm{Cat}A$, que verifican $\mathrm{cat}A \leq \mathrm{Cat}A \leq \mathrm{cat}A + 1$. Existen ejemplos donde esos dos invariantes no coinciden, entre ellos el descubierto por Bernstein y Hilton en [6]. Este ejemplo se construye tomando la aplicación $\alpha : \mathbf{S}^{2p} \longrightarrow \mathbf{S}^3$, donde α es el generador de p-torsión de $\pi_{2p}(\mathbf{S}^3)$. El cono de esta aplicación, $\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^{2p+1}$, es un co-H-espacio y no es una suspensión, o sea $\mathrm{cat}(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^{2p+1}) = 1$, y $\mathrm{Cat}(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^{2p+1}) = 2$.

El objetivo de este capítulo es el estudio de la categoría fuerte de la localización en 3 del espacio $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7) \times (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)$. Utilizando el teorema de Takens 4.2.1, y la proposición 1.4.2 se demuestra que la categoría de este espacio es dos. Ahora bien, las fórmulas de Takens para la categoría fuerte sólo aseguran que

$$\mathrm{Cat}(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} \times (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} \leq 3.$$

La determinación de Cat de este producto es un problema propuesto por Ganea en [17], ya que cualquiera de los dos valores posibles 2 ó 3, tiene consecuencias interesantes. Demostraremos aquí que $\mathrm{Cat}(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} \times (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} = 2$. Se encuentra así un espacio cuya categoría fuerte no aumenta al multiplicarlo por sí mismo, de categoría fuerte dos y sin torsión en homología.

Empezaremos el capítulo con una sección en la que introducimos, en un caso particular, el invariante de Hopf y los resultados obtenidos por Bernstein y Hilton en [6] que relacionan este invariante con la categoría de un espacio.

La segunda sección está dedicada al espacio $\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7$, utilizando los resultados de la primera sección deduciremos que es un co-H-espacio que no tiene el tipo de homotopía de una suspensión.

La tercera sección se ocupa del estudio de $\mathrm{Cat}(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)}\hat{E} \times (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)}$. Utilizando el resultado de Rutter explicado en el capítulo 4, construiremos una cofibración 3-local:

$$Z \xrightarrow{u} (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} \vee (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} \xrightarrow{i} (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} \times (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)}$$

A partir de esta construcción, utilizando 1.5.6, se obtiene otra cofibración 3-local:

$$L \longrightarrow \Sigma N \longrightarrow (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} \times (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)}$$

y así la categoría fuerte de este producto es dos.

5.1 El invariante de Hopf.

Los resultados que presentamos a continuación para las esferas fueron demostrados por Berstein y Hilton en [6] en un contexto más general. Sea $i : A \vee A \longrightarrow A \times A$ la inclusión canónica de la suma puntual en el espacio producto.

Lema 5.1.1 *Consideremos la sucesión exacta larga asociada al par* $(A \times A, A \vee A)$

$$\dots \pi_{r+1}(A \times A, A \vee A) \xrightarrow{\delta_*} \pi_r(A \vee A) \xrightarrow{i_*} \pi_r(A \times A) \dots$$

Entonces existe un morfismo de grupos $\xi : \pi_r(A \times A) \longrightarrow \pi_r(A \vee A)$ *natural y tal que* $i_* \circ \xi = Id$.

En particular, si $r \geq 2$ los grupos son abelianos, la sucesión exacta es escindida y existirá por tanto un morfismo de grupos $\omega : \pi_r(A \vee A) \longrightarrow \pi_{r+1}(A \times A, A \vee A)$ tal que $\omega \circ \delta_* = Id$, $\delta_* \circ \omega + \xi \circ i_* = Id$.

Definición 5.1.2 *Invariante de Hopf.*
Sea $\beta \in \pi_k(\mathbf{S}^n)$, *y* $\nu : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n \vee \mathbf{S}^n$ *la comultiplicación de* $\mathbf{S}^n$. *Definimos el invariante de Hopf de* β *como* $\mathcal{H}(\beta) = \omega(\nu \circ \beta) \in \pi_{k+1}(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S}^n, \mathbf{S}^n \vee \mathbf{S}^n)$.

Teorema 5.1.3 *Sea* $\beta \in \pi_k(\mathbf{S}^n)$. *Si* $\mathcal{H}(\beta) = 0$ *la cofibra de* β *es un co-H-espacio.*

En particular, sea $\alpha : \mathbf{S}^6 \longrightarrow \mathbf{S}^3$ un generador del subgrupo de torsión 3 del grupo abeliano $\pi_6(\mathbf{S}^3)$, $\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7$ la cofibra homotópica de tal aplicación y $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)}$ su localización en 3.

Propiedad 5.1.4 $\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7$, $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)}$ *son co-H-espacios.*

Demostración. Sea $\alpha : \mathbf{S}^6 \longrightarrow \mathbf{S}^3$ el generador de torsión 3 de $\pi_6(\mathbf{S}^3)$. El invariante de Hopf de α pertenece al grupo de homotopía relativo $\pi_7(\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3, \mathbf{S}^3 \vee \mathbf{S}^3)$, ahora bien, α tiene torsión tres y sin embargo $\pi_7(\mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^3, \mathbf{S}^3 \vee \mathbf{S}^3) \cong \pi_6(\mathbf{S}^5) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; el invariante de Hopf es un morfismo de grupos por construcción, por tanto $\mathcal{H}(\alpha) = 0$. A partir del teorema 5.1.3 se tiene que $\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7$ es un co-H-espacio, es decir $\operatorname{cat}(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7) \leq 1$. Como la categoría de una localización es menor que la categoría del espacio se tiene que $\operatorname{cat}(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} \leq 1$ y así $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)}$ es también un co-H-espacio.

5.2 Los co-H-espacios $\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7$ y $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)}$.

Consideremos de nuevo $\alpha : \mathbf{S}^6 \longrightarrow \mathbf{S}^3$ un generador del subgrupo de torsión 3 del grupo abeliano $\pi_6(\mathbf{S}^3)$. En esta sección veremos que este co-H-espacio y su localización en 3 son co-H-espacios que no tienen el tipo de homotopía de una suspensión.

Proposición 5.2.1 *[6] Sea $C_\beta = \mathbf{S}^n \cup_\beta e^{m+1}$ el cono de una aplicación contínua $\beta : \mathbf{S}^m \longrightarrow \mathbf{S}^n$. La cofibra C_β tiene el tipo de homotopía de una suspensión si y sólo si la aplicación β es homótopa a una suspensión.*

Propiedad 5.2.2 $\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7$ *no es una suspensión.*

Demostración. Obsérvese que $\pi_6(\mathbf{S}^3)$ es el primer grupo de homotopía de $\mathbf{S}^3$ con 3-torsión [40], por tanto la aplicación α no es una suspensión. Se deduce de la proposición 5.2.1 que $\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7$ no tiene el tipo de homotopía de una suspensión. □

Para demostrar que la localización en 3 de $\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7$ tampoco es una suspensión utilizaremos el siguiente lema, que también será empleado en la sección siguiente:

Lema 5.2.3 *Sea X la localización en 3 de $\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7$ y $\mathbf{CP}^3$ la localización en 3 del espacio projectivo complejo. Existe una equivalencia de homotopía $\Sigma\mathbf{CP}^3 \sim X \vee \mathbf{S}^5_{(3)}$*

Demostración del lema 5.2.3.
Sea $\mathbf{CP}^3 = (\mathbf{S}^2 \cup_\varrho e^4 \cup_\vartheta e^6)_{(3)}$, donde $\varrho : \mathbf{S}^3 \longrightarrow \mathbf{S}^2$ es la aplicación de Hopf y $\vartheta : \mathbf{S}^5 \longrightarrow \mathbf{CP}^2$ la adjunción de la última célula de $\mathbf{CP}^3$. La suspensión de $\mathbf{CP}^3$ es

$(\mathbf{S}^3 \cup_{\Sigma\varrho} e^5 \cup_{\Sigma\vartheta} e^7)_{(3)}$. La suspensión de la aplicación de Hopf $\Sigma\varrho$ es, al localizar en 3, trivial y entonces $\Sigma\mathbf{CP}^2 \sim \mathbf{S}^3_{(3)} \vee \mathbf{S}^5_{(3)}$. La suspensión de ϑ no es una aplicación trivial: si lo fuera $\Sigma\mathbf{CP}^3$ sería una suma puntual de esferas $\mathbf{S}^3_{(3)} \vee \mathbf{S}^5_{(3)} \vee \mathbf{S}^7_{(3)}$ y esto no es posible porque en $\mathbf{CP}^3$ existe una potencia de Steenrod no nula que se conserva al suspender el espacio. La aplicación $(\Sigma\vartheta)_{(3)}$ pertenece pues $\pi_6(\mathbf{S}^3_{(3)} \vee \mathbf{S}^5_{(3)}) = \pi_6(\mathbf{S}^3_{(3)}) = \mathbf{Z}_{(3)}\alpha_{(3)}$ y no es trivial, por tanto $(\Sigma\vartheta)_{(3)} = \alpha_{(3)}$ ó $(\Sigma\vartheta)_{(3)} = 2\alpha_{(3)}$. En cualquier caso, como $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} \sim (\mathbf{S}^3 \cup_{2\alpha} e^7)_{(3)}$ (recordemos que la multiplicación por dos, en el contexto 3-local, es una equivalencia de homotopía), se tiene que $\Sigma\mathbf{CP}^3 \sim X \vee \mathbf{S}^5_{(3)}$. $\square$

Propiedad 5.2.4 $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)}$ *no es una suspensión.*

Demostración. Sea X la localización en 3 de $\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7$. La cohomología de X con coeficientes en $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ se reduce a:

$$H^*(X; \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) = H^3(X; \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) \oplus H^7(X; \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) = a_3\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus a_7\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$$

Ahora bien, la equivalencia de homotopía del lema 5.2.3 nos asegura la existencia de una potencia de Steenrod $\mathcal{P}^1(a_3) = a_7$. Supongamos que X es una suspensión ΣW, entonces

$$H^*(W; \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) = H^2(X; \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) \oplus H^6(X; \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) = b_2\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus b_6\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$$

y como las potencias de Steenrod se conservan bajo suspensión, tendríamos que $\mathcal{P}^1(b_2) = b_6$, lo que no es posible por ser $(b_2)^2 = 0$. $\square$

Observación 5.2.5 *[20] Sea σ una co-multiplicación de $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)$. La racionalización de $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)$ es la suma puntual de esferas racionales $\mathbf{S}^3_0 \vee \mathbf{S}^7_0$ pero la racionalización de σ no es nunca la co-multiplicación usual de suspensión de $\mathbf{S}^3_0 \vee \mathbf{S}^7_0$.*

5.3 La categoría fuerte de $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} \times (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)}$.

Recordemos que trabajamos en la categoría $\mathcal{W}_1^*$ de espacios con el tipo de homotopía de CW complejos 1-conexos y con buen punto base. En esta sección trabajaremos con los espacios 3-locales definidos en el capítulo 2. Para simplificar las notaciones, denotaremos $Y = \mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7$, X la localización en 3 de Y, $\mathbf{CP}^k$ la localización en 3 del espacio proyectivo complejo de dimensión $2k$, y $\mathbf{S}^k$ la esfera 3-local de dimensión k. En otros casos, dado $W \in \mathcal{W}_1^*$ denotaremos como es usual $W_{(3)}$ la localización en 3 de W.

El resultado principal es el siguiente:

Teorema 5.3.1 *Existe un espacio 3-local Z y una aplicación $u : Z \longrightarrow X \vee X$ tales que:*

$$Z \xrightarrow{u} X \vee X \xrightarrow{i} X \times X$$

es una cofibración homotópica.

La suma puntual $X \vee X$ es un co-H-espacio, el corolario 1.5.7 indica que existe un espacio K tal que $X \vee X \vee \Sigma K$ es una suspensión. A partir de la cofibración del teorema 5.3.1 podemos entonces construir una cofibración homotópica:

$$Z \vee \Sigma K \xrightarrow{u \vee \Sigma K} X \vee X \vee \Sigma K \xrightarrow{i} X \times X$$

de donde se deduce:

Corolario 5.3.2 *La categoría fuerte de $(\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)} \times (\mathbf{S}^3 \cup_\alpha e^7)_{(3)}$ es dos.*

Para demostrar el teorema utilizaremos la siguiente proposición cuya demostración se encuentra al final de la sección.

Proposición 5.3.3 *Existe una equivalencia de homotopía $X \wedge \mathbf{CP}^3 \sim Z \vee \Sigma^4 X$ donde Z es un espacio 3-local, $Z = \mathbf{S}^5 \cup e^9 \cup e^9 \cup e^{13}$.*

Sea $j : Z \longrightarrow X \wedge \mathbf{CP}^3$ la composición de la inclusión y de esta equivalencia de homotopía.

Demostración del teorema 5.3.1

Aplicando el teorema de Rutter (cf 4.4.1) a los espacios $B = X$ y $A = \mathbf{CP}^3$, sabemos que existe una aplicación $X \wedge \mathbf{CP}^3 \xrightarrow{w} X \vee \Sigma\mathbf{CP}^3$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \wedge \mathbf{CP}^3 \arrow[r, "w"] & X \vee \Sigma\mathbf{CP}^3 \arrow[r, "\iota_w"] \arrow[d, equal] & C_w \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma(X \wedge \mathbf{CP}^3) \arrow[d, "\kappa"'] \\
 & X \vee \Sigma\mathbf{CP}^3 \arrow[r, "i"] & X \times \Sigma\mathbf{CP}^3 \arrow[r] & X \wedge \Sigma\mathbf{CP}^3
\end{tikzcd}$$

donde h es una equivalencia de homotopía y κ es una aplicación homótopa a la identidad.

Denotemos $F_w : (X \wedge \mathbf{CP}^3) \wedge \mathbf{I} \longrightarrow C_w$ la aplicación inducida por w, del cono reducido en la cofibra de w, recordemos que se verifica $h \circ F_w \circ i_0 = h \circ \iota_w \circ w = i \circ w$.

Sea $\pi : \Sigma\mathbf{CP}^3 \longrightarrow X$ la composición de la equivalencia de homotopía del lema 5.2.3 y de la proyección canónica. Sea $j : Z \longrightarrow X \wedge \mathbf{CP}^3$ la inclusión de la proposición 5.3.3.

Definimos la aplicación $u : Z \longrightarrow X \vee X$ como la composición $u := (X \vee \pi) \circ w \circ j$.

$$Z \xrightarrow{j} X \wedge \mathbf{CP}^3 \xrightarrow{w} X \vee \Sigma\mathbf{CP}^3 \xrightarrow{X \vee \pi} X \vee X$$

Vamos a demostrar que existe una equivalencia de homotopía $\rho : C_u \longrightarrow X \times X$, entre la cofibra homotópica de u, $C_u = (X \vee X) \cup (Z \wedge \mathbf{I})$, y $X \times X$.

Construcción de ρ.

Sea $F_u : Z \wedge \mathbf{I} \longrightarrow C_u$ la aplicación inducida por u del cono reducido en la cofibra de u. Sea $G : Z \wedge \mathbf{I} \longrightarrow X \times X$ la aplicación compuesta $G = (X \times \pi) \circ h \circ F_w \circ (j \wedge \mathbf{I})$

$$G : Z \wedge \mathbf{I} \xrightarrow{j \wedge \mathbf{I}} (X \wedge \mathbf{CP}^3) \wedge \mathbf{I} \xrightarrow{F_w} C_w \xrightarrow{h} X \times \Sigma\mathbf{CP}^3 \xrightarrow{X \times \pi} X \times X$$

Como $G(z \wedge 0) = (X \times \pi) \circ h \circ F_w(j(z) \wedge 0) = (X \times \pi) \circ i \circ w \circ j(z) = i \circ (X \vee \pi) \circ w \circ j(z) = i \circ u(z)$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_0"'] & X \vee X \arrow[d, "\iota_u"'] \arrow[ddr, bend left, "i"] & \\
Z \wedge \mathbf{I} \arrow[r, "F_u"] \arrow[drr, bend right, "G"'] & C_u \arrow[dr, dotted, "\rho"] & \\
 & & X \times X
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una única aplicación $\rho : C_u \longrightarrow X \times X$ tal que $\rho \circ \iota_u = i$ y $\rho \circ F_u = G$.

Tenemos que probar que ρ es una equivalencia de homotopía. Podemos construir la aplicación inducida entre las cofibras homotópicas: $\bar{\rho} : \Sigma Z \longrightarrow X \wedge X$ y obtener asíÊ Êun diagrama de cofibraciones homotópicas:

$$\begin{array}{ccccccc}
Z & \xrightarrow{u} & X \vee X & \xrightarrow{\iota_u} & C_u & \longrightarrow & \Sigma Z \\
 & & \| & & \rho \downarrow & & \bar{\rho} \downarrow \\
 & & X \vee X & \xrightarrow{i} & X \times X & \longrightarrow & X \wedge X
\end{array}$$

Como los espacios son 1-conexos, tenemos que ρ es una equivalencia de homotopía si y sólo si $\bar{\rho}$ es una equivalencia de homotopía .

Sea la aplicación $(X \wedge \pi) \circ \Sigma j : \Sigma Z \longrightarrow X \wedge X$. Demostraremos en los lemas siguientes que es una equivalencia de homotopía y que $\bar{\rho}$ es homótopa a esta aplicación teniendo así completa la demostración del teorema.

Lema 5.3.4 $\bar{\rho} \sim (X \wedge \pi) \circ \Sigma j$.

Lema 5.3.5 $(X \wedge \pi) \circ \Sigma j$ *es una equivalencia de homotopía .*

Demostración del lema 5.3.4:

Sea $v : Z \longrightarrow X \vee \Sigma\mathbf{CP}^3$ la aplicación compuesta $v := w \circ j$. Utilizaremos esta aplicación para construir una cofibración "intermedia" entre la cofibración asociada a u y la cofibración asociada a w.

Sea

$$Z \xrightarrow{v} X \vee \Sigma\mathbf{CP}^3 \xrightarrow{\iota_v} C_v$$

tal cofibración, donde la homotopía es $F_v : Z \wedge \mathbf{I} \longrightarrow C_v$.

Construiremos dos aplicaciones $\pi' : C_v \longrightarrow C_u$, $f : C_v \longrightarrow C_w$, tales que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & X \vee \Sigma\mathbf{CP}^3 \arrow[rr, "i"] \arrow[ddd, "X\vee\pi"] & & X \times \Sigma\mathbf{CP}^3 \arrow[rr] \arrow[ddd, "X\times\pi"] & & X \wedge \Sigma\mathbf{CP}^3 \arrow[ddd, "X\wedge\pi"] \\
X \wedge \mathbf{CP}^3 \arrow[r, "w"] & X \vee \Sigma\mathbf{CP}^3 \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "\iota_w"] \arrow[d, equal] & & C_w \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\delta"] & & \Sigma(X \wedge \mathbf{CP}^3) \arrow[ur, "\kappa"] & \\
Z \arrow[u, "j"] \arrow[r, "v"] \arrow[dd, equal] & X \vee \Sigma\mathbf{CP}^3 \arrow[rr, "\iota_v"] \arrow[dd, "X\vee\pi"] & & C_v \arrow[u, "f"] \arrow[rr] \arrow[dd, "\pi'"] & & \Sigma Z \arrow[u, "\Sigma j"] \arrow[dd, equal] & \\
 & & X \vee X \arrow[rr, "i"] & & X \times X \arrow[rr] & & X \wedge X \\
Z \arrow[r, "u"] & X \vee X \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "\iota_u"] & & C_u \arrow[ur, "\rho"] \arrow[rr] & & \Sigma Z \arrow[ur, "\bar{\rho}"] &
\end{tikzcd}$$

Construcción de $\pi' : C_v \longrightarrow C_u$.

Considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, "i_0"'] & X \vee \Sigma\mathbf{CP}^3 \arrow[d, "\iota_v"'] \arrow[ddr, bend left, "\iota_u\circ(X\vee\pi)"] & \\ Z\wedge\mathbf{I} \arrow[r, "F_v"] \arrow[drr, bend right, "F_u"'] & C_v \arrow[dr, dotted, "\pi'"] & \\ & & C_u \end{tikzcd}$$

Como $F_u(z \wedge 0) = \iota_u \circ u(z) = \iota_u \circ (X \vee \pi) \circ w \circ j(z) = \iota_u \circ (X \vee \pi) \circ v(z)$, este diagrama es conmutativo. La propiedad universal de C_v implica la existencia de una única aplicación $\pi' : C_v \longrightarrow C_u$ tal que $\pi' \circ \iota_v = \iota_u \circ (X \vee \pi)$ y $F_u = \pi' \circ F_v$.

Construcción de $f : C_v \longrightarrow C_w$.

Considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, "i_0"'] & X \vee \Sigma\mathbf{CP}^3 \arrow[d, "\iota_v"'] \arrow[ddr, bend left, "\iota_w"] & \\ Z\wedge\mathbf{I} \arrow[r, "F_v"] \arrow[drr, bend right, "F_w\circ(j\wedge\mathbf{I})"'] & C_v \arrow[dr, dotted, "f"] & \\ & & C_w \end{tikzcd}$$

Como $F_w \circ (j \wedge \mathbf{I})(z \wedge 0) = F_w(j(z) \wedge 0) = \iota_w \circ w(j(z)) = \iota_w \circ v(z)$, este diagrama es conmutativo. La propiedad universal de C_v nos proporciona una única aplicación $f : C_v \longrightarrow C_w$ tal que $\iota_w = f \circ \iota_v$ y $f \circ F_v = F_w \circ (j \wedge \mathbf{I})$.

Conmutatividad de la cara intermedia:

Tenemos que probar que $\rho \circ \pi' = (X \times \pi) \circ h \circ f$, para ello verificaremos que las dos aplicaciones son soluciones del mismo problema universal. Sea de nuevo $G : Z \wedge \mathbf{I} \longrightarrow X \times X$ la homotopía $G = (X \times \pi) \circ h \circ F_w \circ (j \wedge \mathbf{I})$. Como $G \circ i_0 = i \circ u = i \circ (X \vee \pi) \circ v$, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "v"] \arrow[d, "i_0"'] & X \vee \Sigma\mathbf{CP}^3 \arrow[d, "\iota_v"'] \arrow[ddr, bend left, "i\circ(X\vee\pi)"] & \\
Z \wedge \mathbf{I} \arrow[r, "F_v"] \arrow[drr, bend right, "G"'] & C_v \arrow[dr, dotted, "\chi"] & \\
& & X \times X
\end{tikzcd}$$

Entonces existe una única aplicación $\chi : C_v \longrightarrow X\times X$ tal que $\chi\circ\iota_v = i\circ(X\vee\pi)$ y $\chi \circ F_v = G$.

Por tanto, se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} ((X \times \pi) \circ h \circ f) \circ \iota_v = (X \times \pi) \circ h \circ \iota_w = (X \times \pi) \circ i = i \circ (X \vee \pi) \\ (\rho \circ \pi') \circ \iota_v = \rho \circ \iota_u \circ (X \vee \pi) = i \circ (X \vee \pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((X \times \pi) \circ h \circ f) \circ F_v = (X \times \pi) \circ h \circ F_w \circ (j \wedge \mathbf{I}) = G \\ (\rho \circ \pi') \circ F_v = \rho \circ F_u = G \end{cases}$$

y entonces $\chi = (X \times \pi) \circ h \circ f = \rho \circ \pi'$.

Conmutatividad de la cara de la derecha:

En el gran diagrama anterior, la cara del extremo derecho se obtiene a partir de la cara del medio utilizando las propiedades de las cofibraciones, todas las aplicaciones son aplicaciones inducidas entre cofibras (cf capítulo 6). Se tiene entonces que $\bar{\rho} = (X \wedge \pi) \circ \kappa \circ \Sigma j$. Utilizando el teorema de Rutter (cf teorema 4.4.1), sabemos que κ es homótopa a la identidad y así, $\bar{\rho} \sim (X \wedge \pi) \circ \Sigma j$. □

Demostración del lema 5.3.5

Sea $\mathbf{Z}_{(3)}$ la localización del anillo de enteros $\mathbf{Z}$ en 3. A partir de la descomposición celular de ΣZ, de $X \wedge \Sigma\mathbf{CP}^3$ y de $X \wedge X$ obtenemos la homología de estos espacios:

$$H_*(\Sigma Z; \mathbf{Z}_{(3)}) = \mathbf{Z}_{(3)}a_6 \oplus \mathbf{Z}_{(3)}a_{10} \oplus \mathbf{Z}_{(3)}b_{10} \oplus \mathbf{Z}_{(3)}b_{14}$$

$$H_*(X \wedge \Sigma\mathbf{CP}^3; \mathbf{Z}_{(3)}) = H_*(\Sigma Z; \mathbf{Z}_{(3)}) \oplus \mathbf{Z}_{(3)}a_8 \oplus \mathbf{Z}_{(3)}b_{12}$$

$$H_*(X \wedge X; \mathbf{Z}_{(3)}) = \mathbf{Z}_{(3)}a'_6 \oplus \mathbf{Z}_{(3)}a'_{10} \oplus \mathbf{Z}_{(3)}b'_{10} \oplus \mathbf{Z}_{(3)}b'_{14}$$

donde a_t, a'_t y b_t son generadores de grado t. Denotamos $\Sigma j_* : H_*(\Sigma Z) \longrightarrow H_*(X \wedge \mathbf{CP}^3)$ y $(X \wedge \pi)_* : H_*(X \wedge \mathbf{CP}^3) \longrightarrow H_*(X \wedge X)$ las aplicaciones inducidas en homología por Σj y $X \wedge \pi$. En nuestras hipótesis, sólo tenemos que comprobar que $(X\wedge\pi)_*\circ\Sigma j_*$ es un isomorfismo. Además, como estos módulos de homología son módulos libres sobre $\mathbf{Z}_{(3)}$, es suficiente demostrar que $(X\wedge\pi)_*\circ\Sigma j_*$ es sobreyectiva.

La aplicación $(X \wedge \pi)_* : H_*(X \wedge \mathbf{CP}^3) \longrightarrow H_*(X \wedge X)$ es sobreyectiva, por serlo $X \vee \pi$ y $X \times \pi$. Por razones de grado tendremos la inclusión

$$(X \wedge \pi)_*^{-1}(H_*(X \wedge X)) \subset H_*(\Sigma Z; \mathbf{Z}_{(3)})$$

y entonces la composición $(X \wedge \pi)_* \circ \Sigma j_*$ es sobreyectiva.

□

Observación 5.3.6 *En el lema 5.3.5 se prueba que $X \wedge X$ es la suspensión de Z.*

Demostración de la proposición 5.3.3.

A partir de la cofibración homotópica

$$\mathbf{S}^6 \xrightarrow{\alpha} \mathbf{S}^3 \xrightarrow{\iota_\alpha} X$$

obtenemos, utilizando la relación entre el producto reducido y las cofibraciones, que

$$\mathbf{S}^6 \wedge \mathbf{CP}^3 \xrightarrow{\alpha\wedge\mathbf{CP}^3} \mathbf{S}^3 \wedge \mathbf{CP}^3 \xrightarrow{\iota_\alpha\wedge\mathbf{CP}^3} X \wedge \mathbf{CP}^3.$$

Vamos a demostrar, utilizando una recurrencia, que la cofibra de $\alpha \wedge \mathbf{CP}^3$, es decir $X \wedge \mathbf{CP}^3$, tiene el tipo de homotopía de $(\mathbf{S}^5 \cup e^9 \cup e^9 \cup e^{13}) \vee \Sigma^4 X$. Empecemos estudiando la aplicación $\alpha \wedge \mathbf{CP}^2$.

Sea la cofibración homotópica $\mathbf{S}^3 \xrightarrow{\varrho} \mathbf{S}^2 \xrightarrow{\iota_\varrho} \mathbf{CP}^2$. Vamos a utilizar la funtorialidad del producto reducido y los grupos de homotopía 3-locales de las esferas [40] para construir el siguiente diagrama de cofibraciones homotópicas:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}^9 \arrow[r, "*"] \arrow[d, equal] & \mathbf{S}^8 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{S}^8 \vee \mathbf{S}^{10} \arrow[d, dashed, "\sim"', "\sigma_1"] \\
\mathbf{S}^6 \wedge \mathbf{S}^3 \arrow[r, "\mathbf{S}^6\wedge\varrho"] \arrow[d, "\alpha\wedge\mathbf{S}^3"'] & \mathbf{S}^6 \wedge \mathbf{S}^2 \arrow[r, "\mathbf{S}^6\wedge\iota_\varrho"] \arrow[d, "\alpha\wedge\mathbf{S}^2"'] & \mathbf{S}^6 \wedge \mathbf{CP}^2 \arrow[d, "\alpha\wedge\mathbf{CP}^2"] \\
\mathbf{S}^3 \wedge \mathbf{S}^3 \arrow[r, "\mathbf{S}^3\wedge\varrho"] \arrow[d, equal] & \mathbf{S}^3 \wedge \mathbf{S}^2 \arrow[r, "\mathbf{S}^3\wedge\iota_\varrho"] \arrow[d, equal] & \mathbf{S}^3 \wedge \mathbf{CP}^2 \arrow[d, dashed, "\sim"', "\sigma_2"] \\
\mathbf{S}^6 \arrow[r, "*"] & \mathbf{S}^5 \arrow[r] & \mathbf{S}^5 \vee \mathbf{S}^7
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que la parte central del diagrama conmuta exactamente, mientras que la parte superior e inferior conmuta sólo salvo homotopía. Las equivalencias de homotopía inducidas σ_1 y σ_2 dependen de estas homotopías. Sin embargo, por la construcción de la aplicación inducida entre cofibras, la composición: $\sigma_2 \circ (\alpha \wedge \mathbf{CP}^2) \circ \sigma_1$ restringida a $\mathbf{S}^8$ es $\alpha \wedge \mathbf{S}^2 = \Sigma^2\alpha$. Sea $\sigma' : \mathbf{S}^{10} \longrightarrow \mathbf{S}^5 \vee \mathbf{S}^7$ la restricción de $\sigma_2 \circ (\alpha \wedge \mathbf{CP}^2) \circ \sigma_1$ a la esfera $\mathbf{S}^{10}$. La cofibra de $(\alpha \wedge \mathbf{CP}^2)$, el espacio $X \wedge \mathbf{CP}^2$, tiene el mismo tipo de homotopía que la cofibra de $\Sigma^2\alpha + \sigma'$.

Se tiene que $\sigma' \in \pi_{10}(\mathbf{S}^5 \vee \mathbf{S}^7)$, donde

$$\pi_{10}(\mathbf{S}^5 \vee \mathbf{S}^7) \cong \pi_{10}(\mathbf{S}^5) \oplus \pi_{10}(\mathbf{S}^7) \oplus \pi_{10}(\Sigma\Omega(\mathbf{S}^5) \wedge \Omega(\mathbf{S}^7)).$$

El espacio $(\Sigma\Omega(\mathbf{S}^5) \wedge \Omega(\mathbf{S}^7))$ es 10-conexo y como hemos localizado en 3, $\pi_{10}(\mathbf{S}^5) = 0$ [40], se tiene entonces que $\sigma' \in \pi_{10}(\mathbf{S}^5 \vee \mathbf{S}^7) \cong \pi_{10}(\mathbf{S}^7) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Además, la aplicación σ' no puede ser trivial, si lo fuera la cofibra de $\Sigma^2\alpha \vee \sigma'$, que tiene el tipo de homotopía de $X \wedge \mathbf{CP}^2$, sería $\Sigma^2 X \vee \mathbf{S}^7 \vee \mathbf{S}^{11}$. Ahora bien, $\Sigma X \wedge \mathbf{CP}^2 \sim X \wedge (\mathbf{S}^3 \vee \mathbf{S}^5) \sim \Sigma^3 X \vee \Sigma^5 X$ y este espacio no tiene el tipo de homotopía de la suspensión de $\Sigma^2 X \vee \mathbf{S}^7 \vee \mathbf{S}^{11}$.

Utilicemos este resultado para calcular $\alpha \wedge \mathbf{CP}^3$. Sea $\vartheta : \mathbf{S}^5 \longrightarrow \mathbf{CP}^2$ la aplicación de adjunción de la última célula de $\mathbf{CP}^3$, recordemos que $\Sigma\vartheta = \alpha$, entonces $\mathbf{S}^6 \wedge \vartheta = \Sigma^5\alpha : \mathbf{S}^{11} \longrightarrow \mathbf{S}^8$ y $\mathbf{S}^3 \wedge \vartheta = \Sigma^2\alpha : \mathbf{S}^8 \longrightarrow \mathbf{S}^5$. Construyamos un diagrama análogo al anterior:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}^{11} \arrow[r, "\Sigma^5\alpha\vee *"] \arrow[d, equal] & \mathbf{S}^8 \vee \mathbf{S}^{10} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_1"'] & \mathbf{S}^8 \cup e^{12} \vee \mathbf{S}^{10} \arrow[d, dashed, "\sim"', "\bar\sigma_1"] \\
\mathbf{S}^6 \wedge \mathbf{S}^5 \arrow[r, "\mathbf{S}^6\wedge\vartheta"] \arrow[d, "\alpha\wedge\mathbf{S}^5"'] & \mathbf{S}^6 \wedge \mathbf{CP}^2 \arrow[r, "\mathbf{S}^6\wedge\iota_\vartheta"] \arrow[d, "\alpha\wedge\mathbf{CP}^2"'] & \mathbf{S}^6 \wedge \mathbf{CP}^3 \arrow[d, "\alpha\wedge\mathbf{CP}^3"] \\
\mathbf{S}^3 \wedge \mathbf{S}^5 \arrow[r, "\mathbf{S}^3\wedge\vartheta"] \arrow[d, equal] & \mathbf{S}^3 \wedge \mathbf{CP}^2 \arrow[r, "\mathbf{S}^3\wedge\iota_\vartheta"] \arrow[d, "\sigma_2"'] & \mathbf{S}^3 \wedge \mathbf{CP}^3 \arrow[d, dashed, "\sim"', "\bar\sigma_2"] \\
\mathbf{S}^8 \arrow[r, "\Sigma^2\alpha\vee *"] & \mathbf{S}^5 \vee \mathbf{S}^7 \arrow[r] & \mathbf{S}^5 \cup e^9 \vee \mathbf{S}^7
\end{tikzcd}$$

cuyas partes superior e inferior conmutan salvo homotopía, y cuya parte central conmuta exactamente. Denotemos $\bar\sigma_1$ y $\bar\sigma_2$ las aplicaciones inducidas entre las cofibras por σ_1 y σ_2 respectivamente. Estudiemos la aplicación $\bar\sigma_2 \circ (\alpha \wedge \mathbf{CP}^3) \circ \bar\sigma_1$, ya que al ser $\bar\sigma_1$, $\bar\sigma_2$ equivalencias de homotopía, la cofibra de esa composición tiene el tipo de homotopía de la cofibra de $\alpha \wedge \mathbf{CP}^3$, es decir, de $X \wedge \mathbf{CP}^3$.

Por construcción de aplicación inducida entre las cofibras, la restricción de $\bar{\sigma}_2 \circ (\alpha \wedge \mathbf{CP}^3) \circ \bar{\sigma}_1$ a $\mathbf{S}^{10}$ es la restricción de $\sigma_2 \circ (\alpha \wedge \mathbf{CP}^2) \circ \sigma_1$ a $\mathbf{S}^{10}$, es decir $\sigma' \in \pi_{10}(\mathbf{S}^7)$. Sea γ la restricción de $\bar{\sigma}_2 \circ (\alpha \wedge \mathbf{CP}^3) \circ \bar{\sigma}_1$ al espacio $\mathbf{S}^8 \cup e^{12}$. Se tiene que $\gamma \in [\mathbf{S}^8 \cup e^{12}, \mathbf{S}^5 \cup e^9 \vee \mathbf{S}^7]$. Como $\mathbf{S}^8 \cup e^{12}$ es una suspensión, se tiene:

$$[\mathbf{S}^8 \cup e^{12}, \mathbf{S}^5 \cup e^9 \vee \mathbf{S}^7] \cong [\mathbf{S}^7 \cup e^{11}, \Omega(\mathbf{S}^5 \cup e^9 \vee \mathbf{S}^7)]$$

donde

$$\Omega(\mathbf{S}^5 \cup e^9 \vee \mathbf{S}^7) \sim \Omega(\mathbf{S}^5 \cup e^9) \times \Omega\mathbf{S}^7 \times \Omega(\Sigma\Omega(\mathbf{S}^5 \cup e^9) \wedge \Omega\mathbf{S}^7)$$

y así:

$$[\mathbf{S}^8 \cup e^{12}, \mathbf{S}^5 \cup e^9 \vee \mathbf{S}^7] \cong [\mathbf{S}^8 \cup e^{12}, \mathbf{S}^5 \cup e^9] \oplus [\mathbf{S}^8 \cup e^{12}, \mathbf{S}^7] \oplus \Big[\mathbf{S}^8 \cup e^{12}, \Sigma\left(\Omega(\mathbf{S}^5 \cup e^9) \wedge \Omega(\mathbf{S}^7)\right)\Big]$$

Estudiemos los dos últimos factores utilizando la sucesión exacta asociada a la cofibración $\mathbf{S}^{11} \xrightarrow{\Sigma^5\alpha} \mathbf{S}^8 \longrightarrow \mathbf{S}^8 \cup e^{12}$.

El segundo factor es nulo, ya que se tiene una sucesión exacta:

$$\ldots [\mathbf{S}^8, \mathbf{S}^7] \longleftarrow [\mathbf{S}^8 \cup e^{12}, \mathbf{S}^7] \longleftarrow [\mathbf{S}^{12}, \mathbf{S}^7] \ldots$$

donde $[\mathbf{S}^8, \mathbf{S}^7] = 0$ y $[\mathbf{S}^{12}, \mathbf{S}^7] = 0$.

Respecto al tercer factor, obsérvese que $\Sigma\left(\Omega(\mathbf{S}^5 \cup e^9) \wedge (\Omega(\mathbf{S}^7)\right) = \mathbf{S}^{11} \cup e^{15} \cup e^{15} \ldots$, es decir, su esqueleto de orden doce está formado solamente por $\mathbf{S}^{11}$, y por aproximación celular se tendrá que $[\mathbf{S}^8 \cup e^{12}, \Sigma\left(\Omega(\mathbf{S}^5 \cup e^9) \wedge (\Omega(\mathbf{S}^7)\right)] = [\mathbf{S}^8 \cup e^{12}, \mathbf{S}^{11}]$. Ahora bien, este grupo es nulo, ya que se tiene igualmente una sucesión exacta:

$$\ldots [\mathbf{S}^8, \mathbf{S}^{11}] \longleftarrow [\mathbf{S}^8 \cup e^{12}, \mathbf{S}^{11}] \longleftarrow [\mathbf{S}^{12}, \mathbf{S}^{11}] \ldots$$

donde $[\mathbf{S}^8, \mathbf{S}^{11}] = 0$ y $[\mathbf{S}^{12}, \mathbf{S}^{11}] = 0$.

Por tanto $\gamma \in [\mathbf{S}^8 \cup e^{12}, \mathbf{S}^5 \cup e^9 \vee \mathbf{S}^7] \cong [\mathbf{S}^8 \cup e^{12}, \mathbf{S}^5 \cup e^9]$, y así la aplicación $\gamma + \sigma'$ tiene como cofibra $[\mathbf{S}^5 \cup e^9 \cup \gamma\,(\mathbf{S}^8 \cup e^{12})] \vee \Sigma^4 X$. $\square$

Capítulo 6

Apéndice: Límites homotópicos

En la categoría homotópica las nociones de suma amalgamada topológica o de producto fibrado topológico no tienen sentido pues no conservan el tipo de homotopía, como demuestran los siguientes ejemplos:

Producto fibrado. El espacio de caminos de un espacio A con punto $*$, denotado PA es un espacio contráctil; sin embargo, en los siguientes productos fibrados topológicos:

$$\begin{tikzcd} \Omega A \arrow[r] \arrow[d] & PA \arrow[d] \\ * \arrow[r] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} * \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

el espacio de lazos de A, ΩA, no tiene en general el tipo de homotopía de $*$.

ÊSuma amalgamada. El cono reducido de un espacio A con punto $*$ es contráctil; sin embargo, en las siguientes sumas amalgamadas topológicas:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A \wedge \mathbf{I} \arrow[d] \\ * \arrow[r] & \Sigma A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

la suspensión reducida de A, ΣA, no tiene en general el tipo de homotopía de $*$.

Definiremos las nociones de suma amalgamada homotópica y de producto fibrado homotópico según Mather [29] pues, exigiendo ciertas condiciones en las homotopías, se obtienen objetos y propiedades "casi" universales en la categoría homotópica.

En general, en este apéndice, los espacios considerados son espacios topológicos Hausdorff con buen punto base $*$, las aplicaciones contínuas conservan $*$ y las homotopías son relativas a $*$, aunque se pueden demostrar resultados análogos para espacios sin punto base. Las pruebas de los resultados enunciados se encuentran en [29]. Denotaremos en general la aplicación identidad de un espacio como el propio espacio, para que los diagramas sean más claros.

S.A.H. y P.F.H.

Dado A espacio topológico con punto base $*$. Denotaremos respectivamente $A \times' \mathbf{I}$ el cilindro reducido y $A \wedge I$ el cono reducido.

$$A \times' \mathbf{I} = (A \times \mathbf{I})/\{*\} \times \mathbf{I} \qquad A \wedge I = (A \times \mathbf{I})/(A \times \{1\} \cup \{*\} \times \mathbf{I})$$

Abusando de la notación denotaremos de la misma manera las inclusiones $i_0 : A \longrightarrow A \times' \mathbf{I}$, donde $i_0(a) = (a, 0)$ e $i_0 : A \longrightarrow A \wedge \mathbf{I}$, donde $i_0(a) = (a \wedge 0)$.

Sean $\mu : A \longrightarrow B$, $\nu : A \longrightarrow D$ dos aplicaciones contínuas. Sea

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\nu"] \arrow[dr, "i_0"'] & & D \\ & (A \times' \mathbf{I})_\nu \cup D \arrow[ur, "\bar{\nu}", "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

la factorización de ν a través del cilindro reducido de ν. Recordemos que i_0 es una cofibración y $\bar{\nu}$ es una equivalencia de homotopía. Denotaremos $C_{\mu,\nu}$ la suma amalgamada topológica de $i_0 : A \longrightarrow (A \times' \mathbf{I})_\nu \cup D$ y de $\mu : A \longrightarrow B$.

Definición 6.1 *(Suma amalgamada estándard)*
Llamaremos suma amalgamada homotópica estándar, s.a.h.e., de μ y ν al siguiente cuadrado homotópicamete conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mu"'] & D \arrow[d, "\iota_\nu"] \\ B \arrow[r, "\iota_\mu"] & C_{\mu,\nu} \end{tikzcd}$$

donde $C_{\mu,\nu} = B \cup_\mu (A \times' \mathbf{I}) \cup_\nu D$, $\iota_\mu : B \longrightarrow C_{\mu,\nu}$, $\iota_\nu : D \longrightarrow C_{\mu,\nu}$ son las inclusiones canónicas y la homotopía, denominada homotopía estándar, viene dada $E : A \times' \mathbf{I} \longrightarrow C_{\mu,\nu}$, $E(a, t) = [a, t]$.

Propiedad 6.2 *La noción de s.a.h.e. es simétrica en B y D.*

Considérese el siguiente cuadrado conmutativo salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mu"'] & D \arrow[d, "\epsilon"] \\ B \arrow[r, "\eta"'] & C \end{tikzcd}$$

siendo $H : A \times' \mathbf{I} \longrightarrow C$ la homotopía de $\epsilon \circ \nu$ a $\eta \circ \mu$.

Utilizando las propiedades de la suma amalgamada $C_{\mu,\nu} = B \cup_\mu (A \times' \mathbf{I}) \cup_\nu D$ podemos definir a partir de las aplicaciones η, H y ϵ una aplicación contínua $\eta \cup H \cup \epsilon : C_{\mu,\nu} \longrightarrow C$ de la manera siguiente:

$$\eta \cup H \cup \epsilon([b]) = \eta(b) \quad \eta \cup H \cup \epsilon([a,t]) = H(a,t) \quad \eta \cup H \cup \epsilon([d]) = \epsilon(d)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mu"'] & D \arrow[d, "\iota_\nu"] \arrow[ddr, bend left, "\epsilon"] & \\ B \arrow[r, "\iota_\mu"] \arrow[drr, bend right, "\eta"'] & C_{\mu,\nu} \arrow[dr, dotted, "\eta\cup H\cup\epsilon"] & \\ & & C \end{tikzcd}$$

Definición 6.3 *Con las notaciones anteriores, el cuadrado homotópico $ABDC$, con la homotopía H, se dice una suma amalgamada homotópica, s.a.h., si la aplicación $\eta \cup H \cup \epsilon$ es una equivalencia de homotopía.*

Ejemplo 6.4 *Suma amalgamada topológica de una cofibración.*

Si $\mu : A \longrightarrow B$ es una cofibración, la suma amalgamada topológica, con la homotopía estática es una s.a.h., puesto que la suma amalgamada topológica de una cofibración es un retracto por deformación de la s.a.h.e.. En particular, como suponemos que los espacios tienen buen punto, las inclusiones $* \hookrightarrow A$, $* \hookrightarrow B$ son cofibraciones y así la suma puntual de dos espacios es una s.a.h., con la homotopía estática.

Ejemplo 6.5 *La suspensión de A.*

El siguiente cuadrado es una s.a.h.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & \Sigma A \end{tikzcd}$$

con la homotopía $H : A \times' \mathbf{I} \longrightarrow \Sigma A$, $H(a,t) = [a,t]$.

Las definiciones duales de Eckman-Hilton de s.a.h.e. y s.a.h. se denominan respectivamente producto fibrado estándar, p.f.h.e., y producto fibrado homotópico, p.f.h., nos ocuparemos de ellas en la última sección.

Cofibraciones homotópicas

Esta sección está dedicada a las propiedades de las cofibraciones homotópicas, que definimos a continuación como un caso particular de s.a.h.

Definición 6.6 *Cono de una aplicación.*
Sea $\mu : A \longrightarrow B$ una aplicación contínua. El cono de μ, que denotaremos C_μ es la suma amalgamada homotópica estándar de $\mu : A \longrightarrow B$ y $A \longrightarrow *$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & * \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\eta"] & C_\mu \end{tikzcd}$$

donde $C_\mu = B \cup_\mu (A \wedge \mathbf{I})$ y $E : A \times' \mathbf{I} \longrightarrow C_\mu$ es la homotopía estándar $E(a,t) = a \wedge t$.

En otras palabras, el cono de μ es la suma amalgamada topológica de $i_0 : A \longrightarrow A \wedge \mathbf{I}$ y $\mu : A \longrightarrow B$. Para todo μ denotaremos $\iota_\mu : B \longrightarrow C_\mu$ la inclusión canónica y $F_\mu : A \wedge \mathbf{I} \longrightarrow C_\mu$ la aplicación inducida.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "i_0"'] & B \arrow[d, "\iota_\mu"] \\ A \wedge \mathbf{I} \arrow[r, "F_\mu"] & C_\mu \end{tikzcd}$$

Obsérvese que $F_\mu \circ i_0 = \iota_\mu \circ \mu$, por tanto, la aplicación compuesta $A \times' \mathbf{I} \longrightarrow A \wedge \mathbf{I} \xrightarrow{F_\mu} C_\mu$ es una homotopía hasta el punto para $\iota_\mu \circ \mu$. A menudo, abusando de la notación, utilizaremos F_μ como la homotopía desde $\iota_\mu \circ \mu$ a $*$.

Consideremos dos aplicaciones $\mu : A \longrightarrow B$ y $\eta : B \longrightarrow C$ cuya composición sea homotópicamente nula. Sea $H : A \times' \mathbf{I} \longrightarrow C$ una homotopía de $\eta \circ \nu$ a $*$. La homotopía H factoriza a través del cono reducido $A \wedge \mathbf{I}$, ya que $H(*, t) = * \ \forall t \in \mathbf{I}$. Abusando de la notación denotemos $H : A \wedge \mathbf{I} \longrightarrow C$ esa factorización y construyamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "i_0"'] & B \arrow[d, "\iota_\mu"'] \arrow[ddr, bend left, "\eta"] & \\
A \wedge \mathbf{I} \arrow[r, "F_\mu"] \arrow[drr, bend right, "H"'] & C_\mu \arrow[dr, dotted, "\eta \cup H"] & \\
 & & C
\end{tikzcd}$$

La propiedad universal de C_μ nos proporciona una única aplicación contínua $(\eta \cup H) : C_\mu \longrightarrow C$ tal que $(\eta \cup H) \circ \iota_\mu = \eta$ y $(\eta \cup H) \circ F_\mu = H$.

Definición 6.7 *Una cofibración homotópica de homotopía H es una s.a.h. de homotopía H:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & * \arrow[d] \\
B \arrow[r, "\eta"] & C
\end{tikzcd}$$

ó de manera equivalente,
sean $A \xrightarrow{\mu} B$ y $B \xrightarrow{\eta} C$ dos aplicaciones cuya composición es homotópicamente nula. Sea $H : A \wedge \mathbf{I} \longrightarrow C$ una homotopía de $\eta \circ \mu$ a $*$. Diremos que $A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\eta} C$ es una cofibración homotópica de homotopía H si la aplicación inducida por H y η, $\eta \cup H : C_\mu \longrightarrow C$ es una equivalencia de homotopía.

Propiedad 6.8 *Dada una aplicación $\mu : A \longrightarrow B$ existe una sucesión de cofibraciones:*

$$A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\iota_\mu} C_\mu \xrightarrow{\delta} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma\mu} \Sigma B \longrightarrow \cdots$$

es decir, cada espacio es la cofibra homotópica de la aplicación que le precede.

Propiedad 6.9 *La aplicación inducida.*

Sean $A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\eta} C$, $A' \xrightarrow{\mu'} B' \xrightarrow{\eta'} C$ *dos cofibraciones homotópicas de homotopías respectivas* H *y* H'*. Supongamos que existe un diagrama conmutativo salvo homotopía:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[d, "\Phi"'] \\ A' \arrow[r, "\mu'"] & B' \end{tikzcd}$$

siendo $K : A \times' \mathbf{I} \longrightarrow B'$ *la homotopía de* $\Phi \circ \mu$ *a* $\mu' \circ \phi$*.*

Entonces existe una aplicación $\bar{\Phi} : C \longrightarrow C'$ *y dos homotopías* $\bar{K} : B \times' \mathbf{I} \longrightarrow C'$ *y* $\bar{\bar{K}} : C \times' \mathbf{I} \longrightarrow \Sigma A'$ *:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\Phi"'] & C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\bar{\Phi}"'] & \Sigma A \arrow[r, "\Sigma\mu"] \arrow[d, "\Sigma\phi"'] & \Sigma B \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma\Phi"'] & \cdots \\ A' \arrow[r, "\mu'"] & B' \arrow[r, "\eta'"] & C' \arrow[r, "\delta"] & \Sigma A' \arrow[r, "\Sigma\mu'"] & \Sigma B' \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

tales que $\bar{K}$ *es la homotopía de* $\bar{\Phi} \circ \eta$ *a* $\eta' \circ \Phi$ *y* $\bar{\bar{K}}$ *es la homotopía de* $\Sigma\phi \circ \delta$ *a* $\delta \circ \bar{\Phi}$*.*

Las aplicaciones $\bar{\Phi}$, $\bar{K}$ y $\bar{\bar{K}}$ están determinadas de manera única, salvo homotopía, por una condición de compatibilidad [29].

Propiedad 6.10 *Las cofibraciones y el producto reducido.*

Sea $A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\eta} C$ *una cofibración homotópica y* $D \xrightarrow{\xi} D'$ *una aplicación contínua. Entonces se tiene un diagrama que conmuta salvo homotopía:*

$$\begin{tikzcd} A \wedge D \arrow[r, "\mu\wedge D"] \arrow[d, "A\wedge\xi"'] & B \wedge D \arrow[r, "\eta\wedge D"] \arrow[d, "B\wedge\xi"'] & C \wedge D \arrow[d, "C\wedge\xi"'] \\ A \wedge D' \arrow[r, "\mu\wedge D'"] & B \wedge D' \arrow[r, "\eta\wedge D'"] & C \wedge D' \end{tikzcd}$$

donde la línea superior e inferior son cofibraciones homotópicas y la aplicación inducida por la propiedad 6.9 es $C \wedge \xi$

Proposición 6.11 *Las tres s.a.h.*

Consideremos un diagrama :

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & A_2 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& A_1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & A \arrow[dd] \\
B_0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & B_2 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& B_1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \arrow[dd, dotted] \\
C_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & C_2 \arrow[dr] & \\
& C_1 \arrow[rr] & & C
\end{tikzcd}$$

donde la cara superior y la cara intermedia son s.a.h., y $A_r \longrightarrow B_r \longrightarrow C_r$ son cofibraciones homotópicas para $r = 0, 1, 2$. Se tiene que la cara inferior es una s.a.h. si y sólo si $A \longrightarrow B \longrightarrow C$ es una cofibración homotópica.

En particular, obtenemos la siguiente propiedad:

Corolario 6.12 *Las cuatro cofibraciones.*
Consideremos el siguiente cuadrado conmutativo salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccc}
A_0 & \xrightarrow{\mu} & A_1 \\
{\scriptstyle\gamma}\downarrow & & {\scriptstyle\eta}\downarrow \\
B_0 & \xrightarrow{\delta} & B_1
\end{array}$$

Denotemos A, B, C_0 y C_1, las cofibras respectivas de μ, δ, γ y η y denotemos $\tilde{\eta} : A \longrightarrow B$ y $\tilde{\delta} : C_0 \longrightarrow C_1$ las aplicaciones inducidas. Obtenemos un diagrama conmutativo salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccccc}
A_0 & \xrightarrow{\mu} & A_1 & \longrightarrow & A \\
{\scriptstyle\gamma}\downarrow & & {\scriptstyle\eta}\downarrow & & {\scriptstyle\tilde{\eta}}\downarrow \\
B_0 & \xrightarrow{\delta} & B_1 & \longrightarrow & B \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C_0 & \xrightarrow{\tilde{\delta}} & C_1 & \longrightarrow & C
\end{array}$$

en el cual C es la cofibra homotópica común de $\tilde{\delta}$ y de $\tilde{\eta}$.

Fibraciones homotópicas y el axioma del cubo

El siguiente resultado, conocido como *el axioma del cubo* se utiliza muy a menudo en el contexto de los límites homotópicos. Tiene la particularidad de no verificarse al dualizar, i.e. el enunciado dual que consiste en intercambiar s.a.h. por p.f.h. es falso.

Teorema 6.13 *Consideremos una suma amalgamada homotópica de homotopía H:*

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\mu"] & A_2 \arrow[d, "\mu_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\mu_1"] & A \end{tikzcd}$$

Sea $f : B \longrightarrow A$ una aplicación. Denotemos $f_0 : B_0 \longrightarrow A_0$, $f_1 : B_1 \longrightarrow A_1$ y $f_2 : B_2 \longrightarrow A_2$ las aplicaciones inducidas por f, siendo B_0 el p.f.h. de f y de $\mu_1 \circ \mu$; B_1 el p.f.h. de f y de μ_1; B_2 el p.f.h. de f y de μ_2. Es decir, tenemos un cubo conmutativo salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "f_0"] & & B_2 \arrow[dr] \arrow[dd, "f_2"] & \\ & B_1 \arrow[rr] \arrow[dd, "f_1"] & & B \arrow[dd, "f"] \\ A_0 \arrow[rr, "\mu'"] \arrow[dr, "\mu"] & & A_2 \arrow[dr, "\mu_2"] & \\ & A_1 \arrow[rr, "\mu_1"] & & A \end{tikzcd}$$

Se tiene que la cara superior del cubo es una s.a.h.

Presentamos a continuación una construcción combinando *las tres s.a.h.* y el *axioma del cubo.*

Proposición 6.14 *El cubo triple.*

Consideremos una suma amalgamada homotópica de homotopía H:

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\mu_0"] & A_2 \arrow[d, "\mu_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\mu_1"] & A \end{tikzcd}$$

Sea $F \longrightarrow B \xrightarrow{f} A$ una fibración homotópica, sea C la cofibra homotópica de la inclusión $F \longrightarrow B$. Denotemos $f_0 : B_0 \longrightarrow A_0$, $f_1 : B_1 \longrightarrow A_1$ y $f_2 : B_2 \longrightarrow A_2$ las aplicaciones inducidas por f, siendo B_0, B_1 y B_2 el producto fibrado homotópico de f y $\mu_1 \circ \mu_0$, μ_1 y μ_2 respectivamente. Obsérvese que la fibra homotópica de las aplicaciones f_r es F para $r = 0, 1, 2$. Denotemos B_r/F la cofibra homotópica de la inclusión $F \hookrightarrow B_r$ para $r = 0, 1, 2$. Se tiene que

$$\begin{tikzcd}
B_0/F \arrow[r] \arrow[d] & B_2/F \arrow[d] \\
B_1/F \arrow[r] & B/F
\end{tikzcd}$$

es una suma amalgamada homotópica.

Demostración. Consideremos el siguiente cubo conmutativo salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd}
B_0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & B_2 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& B_1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \arrow[dd] \\
A_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & A_2 \arrow[dr] & \\
& A_1 \arrow[rr] & & A
\end{tikzcd}$$

Las caras laterales son p.f.h., la cara inferior es una s.a.h.., por el *axioma del cubo* se tiene que la cara superior es una s.a.h. La fibra homotópica de las aplicaciones verticales es F, construyamos un cubo doble que conmuta salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & F \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& F \arrow[rr] \arrow[dd] & & F \arrow[dd] \\
B_0 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & B_2 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& B_1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \arrow[dd] \\
B_0/F \arrow[rr] \arrow[dr] & & B_2/F \arrow[dr] & \\
& B_1/F \arrow[rr] & & B/F
\end{tikzcd}$$

Las caras superior e intermedia del cubo doble son s.a.h., utilizando la proposición sobre las tres s.a.h. obtendremos que la cara inferior es una s.a.h. $\square$

Bibliografía

[1] M. Arkowitz, *The generalized Whitehead Product,* Pacific J. Math. **12** (1962), pp. 6-23.

[2] H. Baues, *Commutator calculus and groups of homotopy classes*, London Math. Soc., Lecture Notes Series **50**, Cambridge University Press 1981.

[3] A. Bassi, *Su alcuni nuovi invarianti delle varieta topologiche*, Ann. Mat. Pura Appli., IV. Ser. **16** (1937), pp. 275-297.

[4] I. Berstein, *A note on spaces with non-associative comultiplication*, Proc. Camb. Phil. Soc. **60** (1964), pp. 353-354.

[5] I. Berstein y J.R. Harper *Cogroups wich are not suspensions*, in **Algebraic Topology**, Lecture Notes in Math. **1370** (1989), pp. 63-86.

[6] I. Bernstein y P.J. Hilton *Category and Generalized Hopf invariants*, Illinois J. Math. **4**, (1960), pp. 437-451.

[7] O. Cornea, *Cone-length and Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **33** (1994), pp. 95-111.

[8] O. Cornea, *Strong LS-category equals cone-length*, Topology **34** (1995), pp. 377-381.

[9] J.P. Doeraene, *LS-category in a model category*, Journal of Pure and Appl. Algebra **84** (1993), pp. 215-261.

[10] C.H. Dowker,*Topology of metric complexes*, Amer. J. Math. 74 (1952), pp. 555-577.

[11] N. Dupont, *A counterexample to the Lemaire-Sigrist conjecture*, Preprint.

[12] Y. Félix, S. Halperin y J.M. Lemaire, *The Ganea Conjecture and the Lusternik-Schnirelmann category of Poincaré duality complexes*, Preprint

[13] Y. Félix y J.-C. Thomas, *Sur la structure des espaces de LS-catégorie deux*, Illinois J. Math. **30** (1986), pp. 574-593.

[14] R. H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Annals of Mathematics **42** (1941), pp. 333-370.

[15] T. Ganea, *Upper estimates for the Lusternik-Schnirelmann category*, Dokl. Arad. Nauk SSSR, vol **136** (1961), pp. 1273-1276.

[16] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*, Illinois J. Math. **11** (1967), pp. 417-427.

[17] T. Ganea, *Some Problems on Numerical Homotopy Invariants*, Lecture Notes in Mathematics **249** (1971), pp. 23-30.

[18] W.J. Gilbert, *Some examples for weak category and conilpotency*, Illinois J. of Math. **12** Ê(1968), pp. 421-432

[19] S. Halperin, *Finitess in the minimal models of Sullivan*, Trans. Amer. Math. Soc. **230** (1977), pp.173-199.

[20] J. Harper, comunicación privada.

[21] H.W. Henn, *On almost rational co-H-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), pp. 164-168.

[22] K. Hess *A proof of Ganea's conjecture for rational spaces*, Topology **30** (1991), pp. 205-214

[23] P.J. Hilton *On the homotopy groups of the union of spheres*, J. London Math. Soc. **30** (1955), pp. 154-172.

[24] P.J. Hilton, G. Mislin, J. Roitberg **Localization of Nilpotent Groups and Spaces** *North-Holland Mathematics Studies* Vol.**15**, North-Holland, 1975

[25] N. Iwase, *Ganea's Conjecture on Lusternik-Schnirelmann Category*, Preprint

[26] I.M. James, *On category, in sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), pp. 331-348.

[27] L. Lusternik y L. Schnirelmann, *Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels*, Hermann (1934), Paris.

[28] J.M. Lemaire y F. Sigrist, *Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la LS-catégorie*, Comment. Math. Helvetici **56** (1981), pp. 103-122.

[29] M. Mather, *Pull-backs in homotopy theory*, Canadian J. of Math. **28** (1976), pp. 225-263.

[30] C.A. McGibbon and C.W. Wilkerson, *Loop spaces of finite complexes at large primes*, Proc. Amer. Math. Soc., **96** (1986), pp. 698-702.

[31] J.W. Milnor, *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. **90** (1959), pp.. 272-280

[32] G.J. Porter, *Higher order Whitehead Products*, Topology, vol. **3** (1965), pp. 123-135

[33] D. Puppe, *Homotopiemengen und ihre induzierten Abbdildungen.I* Math. Zeitschr. Bd.**69** (1958), pp. 299-344

[34] J.W. Rutter, *A Derived Homotopy Product*, Math. Z., **133** (1973), pp. 343-356.

[35] J. W. Rutter, *A coclassifying map for the inclusion of the wedge in the product*, Math. Z. **129** (1972), pp. 173-183.

[36] H. Scheerer, *On rationalizaded H and co-H-spaces*, Manuscripta Math. **51** (1984), pp. 63-87.

[37] H. Scheerer, *On decomposable H and co-H-spaces*, Topology **25**, (1986), pp. 565-574.

[38] A. Strøm *Note on cofibrations I* Math. Scand.**19** (1966), pp.10-14

[39] F. Takens, *The Lusternik Schnirelmann categories of a product space*, Comp. Math. **22** (1970), pp. 175-180.

[40] H. Toda, *Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres*, Princeton University Press (1962)

[41] A.A. Viruel Arbaízar, *La categoría de Lusternik y Schnirelmann*, Tesina, Universitat Autònoma de Barcelona, 1992

[42] G. W. Whitehead, *The homology suspension*, Colloque de Topologie algébrique tenu à Louvain, (1956), pp. 89-95.