Manuel Gándara Pastrana

EXTENSIONES CENTRALES

Y

DOBLES EXTENSIONES

DE

ÁLGEBRAS DE LIE

92

1998

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

EXTENSIONES CENTRALES

Y

DOBLES EXTENSIONES

DE

ÁLGEBRAS DE LIE

Manuel Gándara Pastrana

Memoria realizada en el departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas, bajo la dirección del profesor Fernando Alcalde Cuesta, para obtener el Grado de Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela. Fue presentada el día 26 de octubre de 1998 obteniendo la calificación de Sobresaliente.

Imprime: Imprenta Universitaria

Campus Universitario Sur

Santiago de Compostela

Dep. Legal C-1957-98

ISBN: 84-89390-09-6

Extensiones centrales y dobles extensiones de álgebras de Lie

Manuel Gándara Pastrana

25 Noviembre 1998

Sumario

Introducción

Esta memoria consta de dos partes: en la primera parte, se precisan ciertos aspectos del estudio de las extensiones centrales de grupos y álgebras de Lie desarrollado por G.M. Tuynman y W.A.J.J. Wiegerinck en [TW]; en la segunda parte, se estudia una noción de *doble extensión* de álgebras de Lie que extiende la noción de *doble extensión simpléctica* introducida por J. M. Dardié, A. Medina y P. Revoy en [D], [DM] y [MR].

Dado un grupo de Lie G y un grupo de Lie abeliano A, se dice que un grupo de Lie $\widehat{G}$ es una *extensión central de G por A* si existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

donde A es un subgrupo central de $\widehat{G}$. De forma análoga, dada una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y un álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{a}$, se dice que un álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ es una *extensión central de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{a}$* si existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 1$$

donde $\mathfrak{a}$ es un ideal central de $\widehat{\mathfrak{g}}$.

El objetivo de la primera parte es describir con detalle tanto la clasificación cohomológica de las extensiones centrales de grupos y álgebras de Lie como el morfismo de Lie de las extensiones centrales de grupos de Lie en las extensiones infinitesimales de álgebras de Lie (véanse [B],[H] y [TW]). La realización de una extensión central de álgebras de Lie como la extensión infinitesimal asociada a una extensión central de grupos de Lie se denominará *integración* y constituirá otro objetivo de esta parte.

La clasificación de las extensiones centrales se conoce bien (véanse [B] y [H]): *hay una biyección entre las clases de isomorfía de extensiones centrales y el grupo de cohomología $H^2_{gr}(G, A)$*. Para las álgebras de Lie se tiene un resultado análogo: *hay una biyeción entre las clases de isomorfía de extensiones centrales de álgebras y el grupo de cohomología $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$* Aunque podría pensarse que la cohomología de las cocadenas diferenciables sobre G con valores en A clasifica las extensiones centrales de G por A, esta cohomología sólo clasifica las extensiones *topológicamente triviales*, i.e. cuyo fibrado principal subyacente $p : \widehat{G} \to G$ de grupo estructural A es trivial. Para clasificar las extensiones arbitrarias, G.M. Tuynman y W.A.J.J. Wiegerinck han introducido la *cohomología e-diferenciable* mediante cocadenas que sólo son diferenciables en un entorno del neutro. El siguiente teorema de [TW] explicita la clasificación anunciada:

Teorema 1

Sean G un grupo de Lie y A un grupo de Lie abeliano. Las extensiones centrales de G por A están clasificadas por el grupo de cohomología e-diferenciable $H^2_{es}(G, A)$.

El morfismo de Lie asocia una extensión central de álgebras de Lie a cada extensión central de grupos de Lie. El proceso inverso se denomina *integración* y consta de tres etapas (cf. [AH]):

1) *integración cohomológica*, que se basa en el criterio de integrabilidad de Konstant-Souriau-Weil (véanse [K], [S] y [W]);

2) *integración diferenciable*, que consiste en la construcción de un fibrado principal $p : \widehat{G} \to G$ de grupo estructural $A = \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^q$;

3) *integración algebraica*, en la que se dota a $\widehat{G}$ de estructura de gupo de Lie.

El siguiente resultado de [TW] resuelve el problema de la integración en dimensión finita:

Teorema 2

Sean G un grupo de Lie de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y

$$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

una extensión central de álgebras de Lie cuya clase está representada por una 2-forma cerrada $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{a}$. Sea Ω la 2-forma invariante por la izquierda sobre G con valores en $\mathfrak{a}$ tal que $\Omega_e = \omega$. Entonces existe una extensión central de grupos de Lie

$$0 \to A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G \to 1$$

que integra la extensión central de álgebras de Lie si y sólo si se verifican las dos siguientes condiciones:

i) Condición de integrabilidad de Konstant-Souriau-Weil*: el grupo de períodos de Ω es discreto;*

ii) Existencia de una aplicación momento*: la acción por la izquierda de G sobre (G, Ω) posee una aplicación momento $J : \mathfrak{g} \to C^\infty(G, \mathfrak{a})$ tal que $i_X \Omega = -dJ_X$.*

El problema de la integración de las extensiones centrales infinitesimales está profundamente ligado a la búsqueda de una demostración directa del tercer teorema de Lie que no utilice el teorema de Ado. Como corolario del teorema de integración, G.M. Tuynman ha obtenido una demostración geométrica del tercer teorema de Lie (véase [T]) basada en algunos trabajos previos de W.T. van Est (véase [vE]):

Teorema 3

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces existe un grupo de Lie G cuya álgebra de Lie es isomorfa a $\mathfrak{g}$.

En la segunda parte de la memoria, se define una noción de *doble extensión* de álgebras de Lie que generaliza la noción de *doble extensión simpléctica* introducida por J. M. Dardié en su tesis (véanse [D] y [DM]) a partir de una noción previa de A. Medina y P. Revoy (véase [MR]). Para ello, se abandona el lenguaje de las álgebras simétricas usado en esos trabajos y se da una formulación adecuada de la obstrucción a la doble extensión simpléctica.

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una *doble extensión* de un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ si se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "I"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "i"'] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{I}"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "Q"'] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[d, "q"'] \\
 & \mathbb{R} \arrow[r, equal] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

tal que:

i) las sucesiones horizontales

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{h}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{I}} \mathfrak{g} \xrightarrow{\Pi} \widehat{\mathfrak{g}} \to 0$$

son extensiones centrales cuyas clases están representadas por las 2-formas cerradas $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ y $\Omega \in \bigwedge^2 \widehat{\mathfrak{g}}^*$ definidas por:

$$\iota(\omega(X,Y)) = \theta([X,Y]) - [\theta(X), \theta(Y)]$$

y

$$\mathrm{I}(\Omega(\widehat{X},\widehat{Y})) = \Theta([\widehat{X},\widehat{Y}]) - [\Theta(\widehat{X}), \Theta(\widehat{Y})]$$

donde $X, Y \in \mathfrak{h}$, $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{\mathfrak{g}}$ y las secciones θ de π y Θ de Π están relacionadas por $I \circ \theta = \Theta \circ i$

ii) las sucesiones verticales

$$0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{q} \mathbb{R} \to 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \to \widehat{\mathfrak{h}} \xrightarrow{I} \mathfrak{g} \xrightarrow{Q} \mathbb{R} \to 0$$

son productos semidirectos definidos por secciones j de q y J de Q tales que $j = \Pi \circ J$. Las derivaciones $ad(j(1))$ de $\widehat{\mathfrak{g}}$ y $ad(J(1))$ de $\mathfrak{g}$ inducen sendas derivaciones δ de $\mathfrak{h}$ y Δ de $\widehat{\mathfrak{h}}$. Luego $\widehat{\mathfrak{g}}$ y $\mathfrak{g}$ son isomorfas a los correspondientes productos semidirectos $\mathfrak{h} \rtimes_\delta \mathbb{R}$ y $\widehat{\mathfrak{h}} \rtimes_\Delta \mathbb{R}$.

En estas condiciones, se dirá que $\mathfrak{g}$ es la *doble extensión* de $\mathfrak{h}$ definida por la 2-forma cerrada ω y la derivación δ.

Si $\mathfrak{g}$ es un *álgebra de Lie simpléctica* (i.e. $\mathfrak{g}$ está dotada de una forma simpléctica σ), entonces cualquier ideal central $\mathfrak{i}$ de dimensión 1 define un diagrama de doble extensión (ya que el ortogonal simpléctico $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{i}^\perp$ es un ideal de codimensión 1 de $\mathfrak{g}$ y una extensión central de $\mathfrak{h} = \mathfrak{i}^\perp/\mathfrak{i}$). Por restricción a $\widehat{\mathfrak{h}}$ y reducción simpléctica a $\mathfrak{h}$, la forma simpléctica σ define una forma simpléctica σ_0 sobre $\mathfrak{h}$. En tal caso, se dice que $(\mathfrak{g}, \sigma)$ es una *doble extensión simpléctica* de $(\mathfrak{h}, \sigma_0)$ (véanse [D], [DM] y [MR]).

En la situación general, a cada 2-forma cerrada $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ y a cada derivación $\delta \in Der(\mathfrak{h})$, se les asocia una 2-forma cerrada $\alpha_{\omega,\delta} \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ definida por:

$$\alpha_{\omega,\delta}(X, Y) = \omega(\delta(X), Y) + \omega(X, \delta(Y))$$

para cada par $X, Y \in \mathfrak{h}$. El siguiente teorema de obstrucción precisa y extiende un resultado análogo de J. M. Dardié (véanse [D] y [DM]) en el caso simpléctico:

Teorema 4

Sean $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie, ω una 2-forma cerrada sobre $\mathfrak{h}$ y δ una derivación de $\mathfrak{h}$. Entonces $\mathfrak{h}$ posee una doble extensión $\mathfrak{g}$ definida por ω y δ si y sólo si la obstrucción $[\alpha_{\omega,\delta}] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ es nula.

Por otra parte, privilegiando las extensiones centrales en el diagrama de doble extensión, se puede reformular la obstrucción en términos de la *sucesión espectral de Hochschild-Serre* $E_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathbb{R})$ asociada al producto semidirecto

$$0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{q} \mathbb{R} \to 0.$$

De manera precisa, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5

Sean $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie, ω una 2-forma cerrada sobre $\mathfrak{h}$ y δ una derivación de $\mathfrak{h}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) existe una doble extensión $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{h}$ definida por ω y δ;

ii) la clase $[\omega]$ pertenece a la imagen del morfismo $i^* : H^2(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathbb{R}) \to H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$;

iii) la clase $d_1[\omega] = 0$, donde $d_1 : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ es la diferencial usual del término E_1 de la sucesión espectral de Hochschild-Serre.

Para ilustrar el interés de la noción de doble extensión, se demuestra la siguiente generalización de un resultado de [MR] en el caso simpléctico:

Teorema 6

Cualquier álgebra de Lie nilpotente se obtiene por doble extensión iterada a partir del álgebra de Lie trivial ó de $\mathbb{R}$

De hecho, se tiene un resultado más general:

Teorema 7

Cualquier doble extensión de un álgebra de Lie resoluble es resoluble. Recíprocamente, cualquier álgebra de Lie resoluble de dimensión ≥ 2 con centro no trivial es doble extensión de un álgebra de Lie resoluble con centro trivial ó no.

Este proceso se puede iterar salvo si se obtiene un álgebra con centro trivial ó isomorfa a $\mathbb{R}$. Luego cualquier álgebra de Lie resoluble se obtiene por doble extensión iterada a partir de un álgebra de Lie resoluble con centro trivial ó de $\mathbb{R}$. En particular, se dará una lista de las álgebras de Lie resolubles de dimensión 4 que son doble extensión de un álgebra de Lie de dimensión 2. De hecho, se trata de las álgebras de Lie resolubles que tienen centro no trivial (ya que el álgebra de Lie abeliana $\mathbb{R}^2$ y el álgebra de Lie afín $aff(\mathbb{R})$ son resolubles). Por último, se introducen dos nociones de *isomorfía* e *isomorfía fuerte* de dobles extensiones y se demuestran los correspondientes teoremas de clasificación:

Teorema 8

Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, existe una proyección natural

$$\kappa : \mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}] \longrightarrow (H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h}))_{\overline{\alpha}=0}$$

del conjunto $\mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}]$ de las clases de isomorfía fuerte de dobles extensiones de $\mathfrak{h}$ sobre el conjunto $(H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h}))_{\overline{\alpha}=0}$ de los pares $([\omega],\delta) \in H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h})$ tales que $\overline{\alpha}(\delta)([\omega]) = [\alpha_{\omega,\delta}] = 0$. Para cada par $([\omega],\delta) \in (H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h}))_{\overline{\alpha}=0}$, la fibra $\mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}]$ se identifica con el espacio afín $H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R})/Im\,\overline{\alpha}(\delta)$, donde $Im\,\overline{\alpha}(\delta)$ denota la imagen del endomorfismo $\overline{\alpha}(\delta) : H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \to H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ definido por $\overline{\alpha}(\delta)([\gamma]) = [\gamma \circ \delta]$.

Teorema 9

Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, existe una proyección natural

$$\widehat{\kappa} : \mathcal{D}Ext(\mathfrak{h}) \longrightarrow (H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))_{\widehat{\alpha}=0}$$

del conjunto $\mathcal{D}Ext(\mathfrak{h})$ de las clases de isomorfía de dobles extensiones de $\mathfrak{h}$ sobre el conjunto $(H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))_{\widehat{\alpha}=0}$ de los pares $([\omega],[\delta]) \in H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$ tales que $\widehat{\alpha}([\delta])([\omega]) = [\alpha_{\omega,\delta}] = 0$. Para cada par $([\omega],[\delta]) \in (H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))_{\widehat{\alpha}=0}$, la fibra $\mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h})$ se identifica con el espacio afín $H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R})/Im\,\overline{\alpha}(\delta) + i_{Z(\mathfrak{h})}\omega$, donde $i_{Z(\mathfrak{h})}\omega$ es el espacio vectorial de las 1-formas cerradas $i_Z\omega$ determinadas por los elementos centrales Z de $\mathfrak{h}$.

Aunque a lo largo de la memoria sólo se considerarán álgebras de Lie reales, todos los resultados de la segunda parte seguirán siendo válidos en el caso complejo.

Convenciones

i) Salvo mención explícita de lo contrario, todos los grupos de Lie considerados se supondrán conexos de dimensión finita. De la misma manera, todas las álgebras de Lie consideradas serán reales de dimensión finita.

ii) Sea G un grupo de Lie. Para cada elemento $g \in G$, se denotará L_g (resp. R_g) la traslación por la izquierda (resp. la traslación por la derecha) definida por $L_g(h) = gh$ (resp. definida por $R_g(h) = hg$) para cada $h \in G$.

iii) Para cada grupo de Lie G, se denotará $Aut(G)$ el grupo de los automorfismos de G e $Int(G)$ el grupo de los automorfismo interiores $A_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$. Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G y $Aut(\mathfrak{g})$ es el grupo de los automorfismos de $\mathfrak{g}$, la representación adjunta $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ asocia la aplicación tangente $(A_g)_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ a cada elemento $g \in G$. Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se denotará $Der(\mathfrak{g})$ el álgebra de Lie de las derivaciones y $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ la representación adjunta definida por $ad(X)(Y) = [X, Y]$ para cada par $X, Y \in \mathfrak{g}$. Si $exp : \mathfrak{g} \to G$ y $exp : Der(\mathfrak{g}) \to Aut(\mathfrak{g})$ son las correspondientes aplicaciones exponenciales, entonces las representaciones adjuntas están relacionadas por $exp \circ Ad = ad \circ exp$.

iv) Para cada variedad diferenciable M, los campos de vectores forman un álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$ de dimensión infinita. Por otra parte, el complejo de De Rham de las formas diferenciables se escribirá $(\Omega^*(M), d)$ y la cohomología de De Rham $H^*_{DR}(M)$. Para cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y cada n-forma $\omega \in \Omega^n(M)$, se denotará $i_X\omega$ el producto interior y $L_X\omega$ la derivada de Lie.

Parte I: Extensiones centrales de grupos y álgebras de Lie

1 Extensiones centrales de grupos

En esta sección, se recuerda la definición de las extensiones centrales de grupos y su clasificación cohomológica (véanse [B], [H] y [TW]).

1.1 Extensiones centrales de grupos. Cohomología de grupos

1.1.1 Definición

i) Sean G un grupo y A un grupo abeliano. Se dice que un grupo $\widehat{G}$ es una *extensión central de G por A* si existe una sucesión exacta corta de grupos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

donde A es un subgrupo normal de $\widehat{G}$ contenido en el centro $Z(\widehat{G})$ de $\widehat{G}$.

ii) Dos extensiones centrales de G por A

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1 \quad \text{y} \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \widehat{G}' \xrightarrow{p'} G \longrightarrow 1$$

son *isomorfas* si existe un isomorfismo de grupos $\varphi : \widehat{G} \to \widehat{G}'$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{\quad i \quad} & \widehat{G} & \xrightarrow{\quad p \quad} & G \\
\| & & \Phi \downarrow & & \| \\
A & \xrightarrow{\quad i \quad} & \widehat{G}' & \xrightarrow{\quad p' \quad} & G
\end{array}$$

1.1.2 Definición

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el *n-ésimo grupo de cocadenas de G con valores en A* como el conjunto $C^n_{gr}(G, A)$ de las aplicaciones $\varphi : G \times \overset{n}{\cdots} \times G \to A$ dotado de la estructura de grupo abeliano definida por la suma puntual. Sea

$$\delta = \delta^n : C^n_{gr}(G, A) \longrightarrow C^{n+1}_{gr}(G, A)$$

el operador coborde definido por:

$$\begin{aligned}
(\delta\varphi)(g_1, \ldots, g_{n+1}) &= \varphi(g_2, \ldots, g_{n+1}) \\
&+ \textstyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^j \varphi(g_1, \ldots, g_j g_{j+1}, \ldots, g_n) + (-1)^{n+1} \varphi(g_1, \ldots, g_n)
\end{aligned}$$

para cada $g_1, \ldots, g_{n+1} \in G$.

1.1.3 Lema

El operador δ es un operador diferencial, i.e. $\delta^2 = 0$.

Demostración Para cada $0 \leq i \leq n+1$, se define un operador cara $\varepsilon_i^n : G^{n+1} \to G^n$ por:

$$\varepsilon_i^n(g_1, \dots, g_{n+1}) = \begin{cases} (g_2, \dots, g_{n+1}) & \text{si } i = 0 \\ (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ (g_1, \dots, g_n) & \text{si } i = n+1. \end{cases}$$

El operador coborde $\delta = \delta^n$ se escribe

$$\delta^n \varphi = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \varphi \circ \varepsilon_i^n, \qquad \forall \varphi \in C_{gr}^n(G, A).$$

Puesto que $\varepsilon_i^n \circ \varepsilon_j^{n+1} = \varepsilon_{j-1}^n \circ \varepsilon_i^{n+1}$ para cada $0 \leq i < j \leq n+1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta^{n+1}(\delta^n \varphi) &= \textstyle\sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j (\delta^n \varphi) \circ \varepsilon_j^{n+1} = \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j (\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \varphi \circ \varepsilon_i^n \circ \varepsilon_j^{n+1}) = \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{n+2} \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} \varphi \circ \varepsilon_i^n \circ \varepsilon_j^{n+1} = \\ &= \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \varphi \circ \varepsilon_i^n \circ \varepsilon_j^{n+1} + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \varphi \circ \varepsilon_i^n \circ \varepsilon_j^{n+1} = \\ &= \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \varphi \circ \varepsilon_{j-1}^n \circ \varepsilon_i^{n+1} + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \varphi \circ \varepsilon_i^n \circ \varepsilon_j^{n+1} = \\ &= \textstyle\sum_{i \geq j} (-1)^{i+j+1} \varphi \circ \varepsilon_i^n \circ \varepsilon_j^{n+1} + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j} \varphi \circ \varepsilon_i^n \circ \varepsilon_j^{n+1} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

1.1.4 Definición

La cohomología del complejo de cocadenas $(C_{gr}^n(G, A), \delta^n)$ es la *cohomología $H_{gr}^n(G, A)$ de G con valores en A.*

El segundo grupo de cohomología $H_{gr}^2(G, A)$ clasifica la extensiones centrales de G por A en el siguiente sentido: si $\mathrm{Ext}\,(G, A)$ denota el conjunto de las extensiones centrales de G por A y $\mathcal{E}xt\,(G, A)$ el conjunto de clases de isomorfía de extensiones centrales de G por A, se tiene una aplicación natural $k : \mathrm{Ext}\,(G, A) \mapsto H_{gr}^2(G, A)$ que pasa al cociente en una biyección $\overline{k} : \mathcal{E}xt\,(G, A) \longrightarrow H_{gr}^2(G, A)$. La construcción de ambas aplicaciones constituirá el objetivo de los siguientes párrafos:

1.2 Clase de una extensión central

Sean $A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G$ una extensión central de grupos y s una sección de p (i.e. una aplicación $s : G \to \widehat{G}$ tal que $p \circ s = id_G$) que lleve el elemento neutro e de G en el elemento neutro $\widehat{e}$ de $\widehat{G}$. Para cada par de elementos $g, h \in G$, existe un único elemento $\varphi(g, h) \in A$ (identificado con su imagen $i(\varphi(g, h)) \in \widehat{G}$) tal que

$$s(gh) = s(g)s(h)\varphi(g, h).$$

Como consecuencia de la asociatividad de $\widehat{G}$, se tiene el siguiente resultado:

1.2.1 Lema

La aplicación $\varphi : G \times G \to A$ *es un* 2*-cociclo de* G *con valores en* A*, llamado* cociclo de la extensión central $\widehat{G}$ definido por la sección s.

Demostración Teniendo en cuenta que A es central, las identidades

$$s(ghk) = s(gh)s(k)\varphi(gh,k) = s(g)s(h)\varphi(g,h)s(k)\varphi(gh,k)$$

$$s(ghk) = s(g)s(hk)\varphi(g,hk) = s(g)s(h)s(k)\varphi(h,k)\varphi(g,hk)$$

garantizan que:

$$\varphi(g,h) + \varphi(gh,k) = \varphi(g,hk) + \varphi(h,k)$$

para cada triple $(g,h,k) \in G \times G \times G$. Luego

$$\delta\varphi(g,h,k) = \varphi(h,k) - \varphi(gh,k) + \varphi(g,hk) - \varphi(g,h) = 0. \quad \square$$

Como consecuencia del lema anterior, a cada extensión $\widehat{G}$ y a cada sección s de p, se les asocia una clase de cohomología $[\varphi] \in H^2_{gr}(G,A)$. El siguiente lema prueba que esta clase no depende de s:

1.2.2 Lema

Sean φ *y* φ' *dos cociclos definidos por dos secciones* s *y* s' *de* p*. Entonces*

$$\varphi' - \varphi = -\delta\chi$$

donde $\chi : G \to A$ *es la* 1*-cocadena definida por:*

$$s'(g) = s(g)\chi(g), \quad \forall\, g \in G.$$

Demostración Puesto que A es central, las identidades

$$s'(gh) = s(gh)\chi(gh) = s(g)s(h)\varphi(g,h)\chi(gh)$$

$$s'(gh) = s'(g)s'(h)\varphi'(g,h) = s(g)\chi(g)s(h)\chi(h)\varphi'(g,h)$$

implican que:

$$\varphi'(g,h) - \varphi(g,h) = \chi(gh) - \chi(g) - \chi(h) = -\delta\chi(g,h)$$

para cada $g,h \in G$. $\square$

En otros términos, la aplicación

$$k : \widehat{G} \in \mathrm{Ext}\,(G,A) \to [\varphi] \in H^2_{gr}(G,A)$$

está bien definida. Se dirá que $[\varphi]$ es la *clase* de la extensión central $\widehat{G}$ de G por A.

1.3 Extensión central definida por un cociclo

El propósito de este párrafo es probar que la aplicación $k : \mathrm{Ext}\,(G,A) \to H^2_{gr}(G,A)$ es sobreyectiva, lo que resulta como consecuencia inmediata del siguiente resultado:

1.3.1 Proposición

Para cada 2*-cociclo* φ *de* G *con valores en* A*, existe una extensión central*

$$0 \to A \xrightarrow{i} \widehat{G} = G \times_{\varphi} A \xrightarrow{p} G \to 1$$

y una sección s *de* p *tales que* φ *es el cociclo de* $\widehat{G}$ *definido por* s*. Se dirá que* $G \times_{\varphi} A$ *es la* extensión central de G por A definida por φ.

Demostración Para construir la extension central $\widehat{G} = G \times_{\varphi} A$, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\varphi(e,e) = 0$. En esta situación, el producto cartesiano $G \times A$ es un grupo (que se denotará $G \times_{\varphi} A$) dotado de la multiplicación

$$(g,a)(h,b) = (gh, a + b - \varphi(g,h)), \quad \forall\,(g,a),(h,b) \in G \times A.$$

En efecto, la operación definida sobre $G \times A$ tiene las siguientes propiedades:

i) La propiedad asociativa es una consecuencia de la condición $\delta\varphi = 0$. De forma explícita, se tiene que:

$$\begin{aligned}
(g,a).((h,b).(k,c)) &= (g,a).(hk, b+c-\varphi(h,k)) \\
&= (ghk, a+b+c-\varphi(h,k)-\varphi(g,hk)) \\
&= (ghk, a+b+c-\varphi(g,h)-\varphi(gh,k)) \\
&= (gh, a+b-\varphi(g,h)).(k,c) \\
&= ((g,a).(h,b)).(k,c)
\end{aligned}$$

ii) El elemento neutro es $(e,0)$. En efecto, puesto que φ es un cociclo, se tiene que:

$$0 = \delta\varphi(g,e,e) = \varphi(e,e) - \varphi(g,e) \quad \text{y} \quad 0 = \delta\varphi(e,e,g) = \varphi(e,g) - \varphi(e,e).$$

Luego

$$\varphi(g,e) = \varphi(e,g) = \varphi(e,e) = 0$$

para cada $g \in G$. Se sigue que:

$$(g,a).(e,0) = (g, a - \varphi(g,e)) = (g,a) \quad \text{y} \quad (e,0).(g,a) = (g, a - \varphi(e,g)) = (g,a).$$

En general, debe modificarse la expresión del producto añadiendo $\varphi(e,e)$ a la segunda componente, es decir, se define

$$(g,a).(h,b) = (gh, a + b + \varphi(e,e) - \varphi(g,h)).$$

iii) El elemento inverso de (g,a) es $(g,a)^{-1} = (g^{-1}, -a + \varphi(g,g^{-1})$.

Si se define $i(a) = (e, a)$ y $p(g, a) = g$, entonces $G \times_\varphi A$ es una extensión central de G por A. Por último, sea s la sección nula de p dada por $s(g) = (g, 0)$. Puesto que

$$s(gh) = (gh, 0) \qquad \text{y} \qquad s(g)s(h) = (gh, -\varphi(g, h)),$$

el cociclo definido por s coincide con φ. $\square$

En lo sucesivo, se supondrá que todos los cociclos considerados satisfacen la condición $\varphi(e, e) = 0$ de la proposición anterior.

1.4 Clasificación de las extensiones centrales de grupos

En primer lugar, se prueba que las extensiones centrales $G \times_\varphi A$ constituyen los modelos de las extensiones centrales de G por A:

1.4.1 Lema

Sean $A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G$ una extensión central de grupos y φ el cociclo definido por una sección s de p. Entonces existe un isomorfismo

$$\Phi : G \times_\varphi A \to \widehat{G}$$

que envía la sección nula de $G \times_\varphi A$ en la sección s.

Demostración Cada elemento $\widehat{g} \in \widehat{G}$ se escribe

$$\widehat{g} = s(g)i(a)$$

donde $g = p(\widehat{g})$ y a es el único elemento de A tal que $i(a) = s(p(\widehat{g}))^{-1}\widehat{g}$. El isomorfismo de extensiones centrales $\Phi : G \times_\varphi A \to \widehat{G}$ está definido por $\Phi(g, a) = s(g)i(a)$ para cada $g \in G$ y cada $a \in A$. $\square$

El siguiente lema caracteriza los modelos isomorfos:

1.4.2 Lema

Sean $G \times_\varphi A$ y $G \times_{\varphi'} A$ dos extensiones centrales de G por A definidas por dos cociclos φ y φ' de G con valores en A. Las extensiones $G \times_\varphi A$ y $G \times_{\varphi'} A$ son isomorfas si y sólo si los cociclos φ y φ' representan la misma clase de $H^2_{gr}(G, A)$.

Demostración Un isomorfismo de extensiones centrales

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & G \times_\varphi A & \longrightarrow & G \\ \| & & \Phi \downarrow & & \| \\ A & \longrightarrow & G \times_{\varphi'} A & \longrightarrow & G \end{array} \tag{1.1}$$

viene dado por:

$$\Phi(g,a) = (g, a + \chi(g)), \qquad \forall (g,a) \in G \times_\varphi A$$

donde $\chi : G \to A$ es una cocadena de G con valores en A tal que $\chi(e) = 0$. Para cada par $(g,a),(h,b) \in G \times_\varphi A$, las expresiones

$$\Phi((g,a).(h,b)) = \Phi(gh, a+b-\varphi(g,h)) = (gh, a+b-\varphi(g,h)+\chi(gh))$$

$$\Phi(g,a)\Phi(h,b) = (g, a+\chi(g)).(h, b+\chi(h)) = (gh, a+b-\varphi'(g,h)+\chi(g)+\chi(h))$$

coinciden si y sólo si

$$\varphi(g,h) - \varphi'(g,h) = \chi(h) - \chi(gh) + \chi(g) = \delta\chi(g,h)$$

con lo que queda probado el lema $\square$.

Estos resultados permiten probar el teorema de clasificación anunciado:

1.4.3 Teorema

Las extensiones centrales de G por A están clasificadas por el segundo grupo de cohomología $H^2_{gr}(G,A)$ de G con valores en A, es decir, existe una biyección

$$\overline{k} : \mathcal{E}xt\,(G,A) \longrightarrow H^2_{gr}(G,A).$$

Demostración En primer lugar, la aplicación $k : \mathrm{Ext}\,(G,A) \to H^2_{gr}(G,A)$ pasa al cociente en una aplicación $\overline{k} : \mathcal{E}xt\,(G,A) \to H^2_{gr}(G,A)$. En efecto, dadas dos extensiones centrales isomorfas

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\quad i \quad} & \widehat{G} & \xrightarrow{\quad p \quad} & G \\ \| & & \Phi \downarrow & & \| \\ A & \xrightarrow{\quad i' \quad} & \widehat{G}' & \xrightarrow{\quad p' \quad} & G, \end{array}$$

se consideran secciones s de p y s' de p' tales que $s' = \Phi \circ s$. Por el lema 1.4.1, las extensiones centrales $\widehat{G}$ y $\widehat{G}'$ son isomorfas a los modelos $G \times_\varphi A$ y $G \times_{\varphi'} A$, donde φ y φ' son los cociclos definidos por s y s'. En tal caso, como consecuencia del lema 1.4.2, las clases $k(\widehat{G}) = [\varphi]$ y $k(\widehat{G}') = [\varphi']$ son iguales. Por otra parte, estos mismos argumentos prueban que la aplicación $\overline{k}$ es inyectiva. Además $\overline{k}$ es sobreyectiva, ya que k lo es. Luego $\overline{k}$ es una biyección y las extensiones centrales de G por A están clasificadas por $H^2_{gr}(G,A)$. $\square$

La clase $[\varphi] = k(\widehat{G})$ es nula si y sólo si la extensión central $\widehat{G}$ es *trivial*, es decir, isomorfa al grupo producto $G \times A$.

2 Extensiones centrales de álgebras de Lie

En esta sección, se recuerda la clasificación de las extensiones centrales de álgebras de Lie (véase [TW]).

2.1 Extensiones centrales de álgebras de Lie. Cohomología de álgebras de Lie

2.1.1 Definición

i) Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{a} = \mathbb{R}^n$ un álgebra de Lie abeliana. Un álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ es una *extensión central de* $\mathfrak{g}$ *por* $\mathfrak{a}$ si existe una sucesión exacta corta de álgebras de Lie

$$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

donde $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\widehat{\mathfrak{g}}$ contenido en el centro $Z(\widehat{\mathfrak{g}})$ de $\widehat{\mathfrak{g}}$.

ii) Dos extensiones centrales $\mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{a} \xrightarrow{\iota'} \widehat{\mathfrak{g}}' \xrightarrow{\pi'} \mathfrak{g}$ son *isomorfas* si existe un isomorfismo de álgebras $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, equal] \\
\mathfrak{a} \arrow[r, "\iota'"] & \widehat{\mathfrak{g}}' \arrow[r, "\pi'"] & \mathfrak{g}
\end{tikzcd}$$

2.1.2 Definición

El espacio $\bigwedge^n \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{a}$ de las aplicaciones n-lineales alternadas $\omega : \mathfrak{g} \times \overset{n}{\ldots} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ está dotado de la diferencial $d : \bigwedge^n \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{a} \to \bigwedge^{n+1} \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{a}$ definida por:

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}). \tag{2.1}$$

La cohomología $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ del complejo $(\bigwedge^n \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{a}, d)$ es la *cohomología del álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *con valores en* $\mathfrak{a}$.

Sean G un grupo de Lie, $(\Omega^*(G), d)$ el complejo de De Rham y $(\Omega^*_L(G), d)$ el subcomplejo de las formas *invariantes por la izquierda*, i.e. las formas Ω tales que $L_g^*\Omega = \Omega$ para cada $g \in G$. Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n_L(G) & \longrightarrow & \bigwedge^n \mathfrak{g}^* \\ \Omega & \longmapsto & \omega = \Omega_e \end{array}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además, la diferencial exterior coincide con la diferencial definida en (2.1). En efecto, para cada forma invariante $\Omega \in \Omega^n_L(G)$ y para cada $(n+1)$-pla de campos invariantes $X_1^+, \ldots, X_{n+1}^+$ (definidos por elementos $X_1, \ldots X_n \in \mathfrak{g}$), se tiene que:

$$\begin{aligned}
(d\Omega)_e(X_1^+, \ldots, X_{n+1}^+) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} X_i^+ (\Omega(X_1^+, \ldots, \widehat{X_i^+}, \ldots, X_{n+1}^+))(e) \\
&+ \textstyle\sum_{1 \le i<j \le n+1} (-1)^{i+j} \Omega_e([X_i^+, X_j^+], X_1^+, \ldots, \widehat{X_i^+}, \ldots, \widehat{X_j^+}, \ldots, X_{n+1}^+) \\
&= \textstyle\sum_{1 \le i<j \le n+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}) \\
&= d\omega(X_1, \ldots, X_{n+1}).
\end{aligned}$$

El isomorfismo de complejos $(\Omega^n_L(G), d) \cong (\bigwedge^n \mathfrak{g}^*, d)$ induce un isomorfismo en cohomología

$$H^*_L(G) \cong H^*(\mathfrak{g}, \mathbb{R}).$$

De idéntica forma, se construye un isomorfismo de complejos

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n_L(G, \mathfrak{a}) & \longrightarrow & \bigwedge^n \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{a} \\ \Omega & \longmapsto & \omega = \Omega_e \end{array} \tag{2.2}$$

que induce un isomorfismo en cohomología

$$H^*_L(G, \mathfrak{a}) \cong H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}).$$

Por otra parte, se tiene que $H^*_L(G, \mathfrak{a}) \cong H^*_L(G) \otimes \mathfrak{a}$ y $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \cong H^*(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \otimes \mathfrak{a}$.

Sean $\mathrm{Ext}\,(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ el conjunto de las extensiones centrales de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{a}$ y $\mathcal{E}xt\,(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ el conjunto de clases de isomorfía de extensiones centrales de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{a}$. Como en el caso de los grupos, se definirá una aplicación $\kappa : \mathrm{Ext}\,(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \to H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ que pasará al cociente en una biyección $\overline{\kappa} : \mathcal{E}xt\,(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \to H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

2.2 Forma de curvatura

Sea $\mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}$ una extensión central de álgebras de Lie. Una *sección* σ de π es una aplicación lineal $\sigma : \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ tal que $\pi \circ \sigma = id$ (es decir, una escisión por la derecha de la sucesión exacta corta de espacios vectoriales subyacente). La teoría de Lie para las extensiones centrales de grupos y álgebras de Lie justificará otra denominación: se dirá que σ es una *conexión infinitesimal* de $\widehat{\mathfrak{g}}$. A cada sección σ de π, se le asocia la 2-forma $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ definida por:

$$\omega(X, Y) = \sigma([X, Y]) - [\sigma(X), \sigma(Y)]. \tag{2.3}$$

Obsérvese que $\omega = 0$ si y sólo si σ es un morfismo de álgebras de Lie, es decir, una escisión por la derecha de la sucesión exacta corta de álgebras de Lie.

2.2.1 Definición

Se dirá que ω es la 2-*forma de curvatura* de la conexión infinitesimal σ.

Teniendo en cuenta que $\mathfrak{a}$ es un ideal central de $\widehat{\mathfrak{g}}$, el siguiente resultado es una consecuencia de la identidad de Jacobi:

2.2.2 Lema

La 2-forma de curvatura ω es cerrada.

Demostración Usando la identidad de Jacobi y teniendo en cuenta que $\omega(X, Y)$, $\omega(X, Z)$, $\omega(Y, Z) \in Z(\widehat{\mathfrak{g}})$, se tiene que:

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= -\mathfrak{S}\omega([X, Y], Z) \\ &= -\mathfrak{S}\sigma([[X, Y], Z]) + \mathfrak{S}[\sigma([X, Y]), \sigma(Z)] \\ &= -\sigma(\mathfrak{S}[[X, Y], Z]) + \mathfrak{S}[\sigma([X, Y]), \sigma(Z)] \\ &= \mathfrak{S}[\sigma([X, Y]), \sigma(Z)] \\ &= \mathfrak{S}[\omega(X, Y), \sigma(Z)] = 0 \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{S}$ denota la suma cíclica de los argumentos $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. $\square$

2.2.3 Lema

Sean σ y σ' dos conexiones infinitesimales de $\widehat{\mathfrak{g}}$. Las 2-formas de curvatura ω y ω' están relacionadas por:

$$\omega' - \omega = -d\chi$$

donde $\chi = \sigma' - \sigma$ es una 1-forma sobre $\mathfrak{g}$ con valores en $\mathfrak{a}$.

Demostración Para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\omega'(X,Y) - \omega(X,Y) &= \sigma'([X,Y]) - [\sigma'(X), \sigma'(Y)] - \sigma([X,Y]) + [\sigma(X), \sigma(Y)] \\
&= \chi([X,Y]) - [\sigma(X) + \chi(X), \sigma(Y) + \chi(Y)] + [\sigma(X), \sigma(Y)] \\
&= \chi([X,Y]) - [\sigma(X), \sigma(Y)] + [\sigma(X), \sigma(Y)] \\
&= \chi([X,Y]) \\
&= -d\chi(X,Y)
\end{aligned}$$

ya que $\chi(X)$ y $\chi(Y)$ pertenecen al centro de $\mathfrak{g}$. $\square$

Como consecuencia de los lemas anteriores, la 2-forma de curvatura ω representa una clase de cohomología $[\omega] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, que no depende de la conexión infinitesimal σ. Así pues, la aplicación

$$\kappa : \widehat{\mathfrak{g}} \in \operatorname{Ext}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \mapsto [\omega] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$$

está bien definida y se dice que $[\omega]$ es la *clase* de la extensión central $\widehat{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{a}$.

2.3 Extensión central definida por una 2-forma cerrada

Para demostrar que el grupo de cohomología $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ clasifica las extensiones centrales de álgebras de Lie, se procede como en el caso de los grupos abstractos. El primer paso es la realización de cualquier 2-forma cerrada sobre $\mathfrak{g}$ con valores en $\mathfrak{a}$ como 2-forma de curvatura:

2.3.1 Proposición

La aplicación κ es sobreyectiva, es decir, para cada 2-forma cerrada ω sobre $\mathfrak{g}$ con valores en $\mathfrak{a}$, existe una extensión central de álgebras de Lie

$$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to$$

dotada de una conexión infinitesimal $\sigma : \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ cuya 2-forma de curvatura es igual a ω. Se dirá que $\mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a}$ es la extensión central $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{a}$ definida por ω *y σ es la* conexión infinitesimal canónica *de $\mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a}$.*

Demostración Sea $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a}$ el espacio vectorial producto $\mathfrak{g} \times \mathfrak{a}$ dotado del corchete de Lie definido por:

$$[(X,V), (Y,W)] = ([X,Y], -\omega(X,Y)) \tag{2.4}$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$ y para cada $V, W \in \mathfrak{a}$. Puesto que ω es bilineal y alternada, este corchete es bilineal y antisimétrico. Por otra parte, la condición $d\omega = 0$ implica la identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}[[(X,V),(Y,W)],(Z,U)] &= \mathfrak{S}[([X,Y],-\omega(X,Y)),(Z,U)] \\
&= \mathfrak{S}([[X,Y],Z],-\omega([X,Y],Z) \\
&= (\mathfrak{S}[[X,Y],Z],-\mathfrak{S}\omega([X,Y],Z)) \\
&= (0, d\omega(X,Y,Z)) = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, si se define $\iota(V) = (0,V)$ y $\pi(X,V) = X$, la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

es una extensión central de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{a}$. Por último, si $\sigma : \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ es la sección nula definida por $\sigma(X) = (X,0)$, la identidad (2.4) garantiza que la 2-forma de curvatura de σ es igual a ω. $\square$

2.4 Clasificación de las extensiones centrales de álgebras de Lie

La clasificación de las extensiones centrales de álgebras de Lie se basa en los dos siguientes lemas:

2.4.1 Lema

Sean $\mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}$ una extensión central de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{a}$ y ω la 2-forma de curvatura de una conexión infinitesimal σ de $\widehat{\mathfrak{g}}$. Entonces existe un isomorfismo

$$\Phi : \mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}$$

que envía la conexión canónica de $\mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a}$ en la conexión σ.

Demostración Como en el caso de grupos, cada elemento $\widehat{X} \in \widehat{\mathfrak{g}}$ se escribe

$$\widehat{X} = \sigma(X) + \iota(V)$$

donde $X = \pi(\widehat{X})$ y V es el único elemento de $\mathfrak{a}$ tal que $\iota(V) = \widehat{X} - \sigma(\pi(\widehat{X}))$. El isomorfismo $\Phi : \mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ está dado por $\Phi(X,V) = \sigma(X) + \iota(V)$ para cada $X \in \mathfrak{g}$ y para cada $V \in \mathfrak{a}$. Por último, se tiene que $\Phi(X,0) = \sigma(X)$ para cada $X \in \mathfrak{g}$. $\square$

2.4.2 Lema

Sean $\mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{g} \times_{\omega'} \mathfrak{a}$ dos extensiones centrales de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{a}$ definidas por dos 2-formas cerradas ω y ω' sobre $\mathfrak{g}$ con valores en $\mathfrak{a}$. Las extensiones $\mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{g} \times_{\omega'} \mathfrak{a}$ son isomorfas si y sólo si ω y ω' representan la misma clase de $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

Demostración Un isomorfismo de extensiones centrales

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, equal] \\
\mathfrak{a} \arrow[r] & \mathfrak{g} \times_{\omega'} \mathfrak{a} \arrow[r] & \mathfrak{g}
\end{tikzcd}$$

está dado por $\Phi(X,V) = (X, V - \chi(X))$ donde $\chi \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{a}$. Para cada par $(X,V),(Y,W) \in \mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a}$, las expresiones

$$\Phi([(X,V),(Y,W)]) = \Phi([X,Y], -\omega(X,Y)) = ([X,Y], -\omega(X,Y) - \chi([X,Y]))$$

$$[\Phi(X,V), \Phi(Y,W)] = [(X, V - \chi(X)), (Y, W - \chi(Y))] = ([X,Y], -\omega'(X,Y))$$

coinciden si y sólo si

$$\omega'(X,Y) - \omega(X,Y) = \chi([X,Y]) = -d\chi(X,Y). \qquad \square$$

2.4.3 Teorema

Las extensiones centrales de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{a}$ están clasificadas por el segundo grupo de cohomología $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{g}$ con valores en $\mathfrak{a}$, es decir, existe una biyección

$$\overline{\kappa} : \mathcal{E}xt\,(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \longrightarrow H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}).$$

Demostración Dadas dos extensiones centrales isomorfas

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, equal] \\
\mathfrak{a} \arrow[r, "\iota'"] & \widehat{\mathfrak{g}}' \arrow[r, "\pi'"] & \mathfrak{g}
\end{tikzcd}$$

se consideran dos secciones σ de π y σ' de π' tales que $\sigma' = \Phi \circ \sigma$. Sean ω y ω' las 2-formas de curvatura correspondientes. Según el lema 2.4.1, las extensiones centrales $\widehat{\mathfrak{g}}$ y $\widehat{\mathfrak{g}}'$ son isomorfas a los modelos $\mathfrak{g} \times_\omega \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{g} \times_{\omega'} \mathfrak{a}$. Por el lema 2.4.2, las clases $[\omega]$ y $[\omega']$ son iguales. Por tanto, la aplicación $\kappa : \mathrm{Ext}\,(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \to H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ pasa al cociente en una aplicación $\overline{\kappa} : \mathcal{E}xt\,(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \to H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$. Además, la aplicación $\overline{\kappa}$ es sobreyectiva ya que κ lo es. Por otra parte, los lemas 2.4.1 y 2.4.2 prueban que la aplicación $\overline{\kappa}$ es inyectiva. $\square$

2.4.4 Corolario

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semisimple, la única extensión central de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{a}$ es la extensión trivial $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$.

Demostración Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semisimple, entonces $H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) = 0$ (véanse [HS] y [V]). $\square$

2.4.5 Ejemplos

1) Sea $\mathfrak{h}^3$ el álgebra de Lie del grupo de Heisenberg

$$H^3 = \{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,/\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}.$$

Los campos $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$ y $\frac{\partial}{\partial x_3}$ son invariantes por la izquierda y definen una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{h}^3$ tal que $e_3 = [e_1, e_2]$ es central. La clase de la extensión central $\mathfrak{h}^3$ está representada por la 2-forma $\omega = dx_1 \wedge dx_2$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, se denota $\mathfrak{h}^3_\lambda$ el álgebra de Lie cuyo corchete de Lie está determinado por $[e_1, e_2] = \lambda e_3$. Como en el caso anterior, $\mathfrak{h}^3_\lambda$ es una extensión central de $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}$. Resulta claro que $\mathfrak{h}^3_0$ es abeliana e isomorfa a $\mathbb{R}^3$. Si $\lambda \neq 0$, el álgebra de Lie $\mathfrak{h}^3_\lambda$ es isomorfa a $\mathfrak{h}^3$, aunque no lo es como extensión central de $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}$. En efecto, las clases $[\lambda\omega] \in H^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ y $[\omega] \in H^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ son distintas si $\lambda \neq 1$. De hecho, el grupo $H^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ y cualquier extensión central de $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}$ es isomorfa a alguna de estas extensiones centrales.

2) La única extensión central del álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{so}(3)$ por $\mathbb{R}$ es la extensión central trivial $\mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}$.

3 Extensiones centrales de grupos de Lie

Las extensiones centrales de grupos de Lie se introducen de forma análoga a las extensiones centrales de grupos abstractos. De manera precisa, si G es un grupo de Lie y A es un grupo de Lie abeliano, se dirá que un grupo de Lie $\widehat{G}$ es una *extensión central de G por A* si existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

donde A es un subgrupo central de $\widehat{G}$. En lo sucesivo, se supondrá que los grupos G y A son conexos de manera que el grupo $\widehat{G}$ también lo será. En particular, el grupo abeliano A será isomorfo a un producto $T^p \times \mathbb{R}^q$. Obsérvese que el grupo de Lie $\widehat{G}$ admite una estructura natural de fibrado principal sobre G de proyección p y de grupo estructural abeliano A.

Por otra parte, se dirá que dos extensiones centrales de G por A

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i'} \widehat{G}' \xrightarrow{p'} G \longrightarrow 1$$

son *isomorfas* si existe un isomorfismo de grupos de Lie $\Phi : \widehat{G} \to \widehat{G}'$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\quad i \quad} & \widehat{G} & \xrightarrow{\quad p \quad} & G \\ \| & & \Phi \downarrow & & \| \\ A & \xrightarrow{\quad i' \quad} & \widehat{G}' & \xrightarrow{\quad p' \quad} & G \end{array}$$

En esta situación, se denotará $\mathrm{Ext}\,(G, A)$ el conjunto de las extensiones centrales de G por A y $\mathcal{E}xt\,(G, A)$ el conjunto de clases de isomorfía de extensiones centrales de G por A. De manera natural, se plantea el problema de clasificar las extensiones centrales de G por A por medio de una cohomología adaptada a la estructura diferenciable de G y A. La primera idea es emplear cocadenas diferenciables sobre G con valores en A, pero el uso de cociclos diferenciables impone fuertes restricciones topológicas a las extensiones consideradas. Por esta razón, se usará una cohomología menos rígida, llamada *e-diferenciable*, introducida por G.M. Tuynman y W.A.J.J. Wiegerinck en [TW].

3.1 Cohomología diferenciable de grupos de Lie

Sea $C^n_s(G,A)$ el grupo abeliano de las aplicaciones diferenciables $\varphi : G\times\ldots\times G \to A$, dotadas de la suma puntual, llamado *grupo de los n-cociclos diferenciables sobre G con valores en A*. Por restricción del coborde $\delta : C^n_{gr}(G,A) \to C^{n+1}_{gr}(G,A)$, se obtiene un operador diferencial $\delta : C^n_s(G,A) \to C^{n+1}_s(G,A)$. La cohomología $H^*_s(G,A)$ del complejo $(C^*_s(G,A),\delta)$ se denomina *cohomología diferenciable de G con valores en A*.

Aunque cabría pensar que las extensiones centrales de G por A están clasificadas por $H^2_s(G,A)$, una extensión central $A \xrightarrow{i} \widehat{G} = G\times_\varphi A \xrightarrow{p} G$ definida por un cociclo $\varphi \in Z^2_s(G,A)$ es *topológicamente trivial*, i.e. el fibrado principal subyacente $p : \widehat{G} \to G$ es trivial. En efecto, la estructura de variedad producto sobre $\widehat{G} = G\times_\varphi A$ es compatible con la estructura de grupo y hace de $\widehat{G}$ un grupo de Lie. Obviamente $\widehat{G}$ es un fibrado trivial. Recíprocamente, si $A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G$ es una extensión topológicamente trivial, el fibrado subyacente admite una sección diferenciable $s : G \to \widehat{G}$ y el cociclo $\varphi(g,h)$ definido por

$$s(gh) = s(g)s(h)\varphi(g,h)$$

es diferenciable. En resumen, procediendo como en el caso abstracto, se tiene el siguiente resultado:

3.1.1 Proposición

Existe una biyección entre el conjunto $\mathcal{E}xt_0(G,A)$ de las clases de isomorfía de extensiones centrales topológicamente triviales y el grupo de cohomología diferenciable $H^2_s(G,A)$. $\square$

3.1.2 Ejemplos

1) El grupo de Heisenberg H^3 es una extensión central de $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}$. En efecto, la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to & \mathbb{R} & \xrightarrow{i} & H^3 & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}^2 & \to 0 \\ & x_3 & \mapsto & (0,0,x_3) & & & \\ & & & (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (x_1,x_2) & \end{array}$$

es exacta e $i(\mathbb{R}) = Z(H^3)$. Puesto que la proyección p admite una sección diferenciable $s : (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x_1,x_2,0) \in H^3$, se trata de una extensión topológicamente trivial. Por otra parte, teniendo en cuenta que la ley de grupo está dada por:

$$(x_1,x_2,x_3).(y_1,y_2,y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3+x_1y_2),$$

resulta claro que el cociclo φ definido por s está dado por:

$$\varphi((x_1, x_2).(y_1, y_2)) = -x_1 y_2.$$

Luego φ es diferenciable. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, el cociclo diferenciable

$$\varphi_\lambda((x_1, x_2).(y_1, y_2)) = -\lambda x_1 y_2.$$

define una nueva extensión central de $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}$ que se denotará H^3_λ. Si $\lambda = 0$, el grupo H^3_0 es isomorfo a $\mathbb{R}^3$ y la extensión central es trivial. Si $\lambda \neq 0$, el grupo

$$H^3_\lambda = \{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & \lambda x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / \, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}.$$

es isomorfo a H^3, pero no lo es como extensión central de $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}$. Más adelante se comprobará que no hay otras extensiones centrales de $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}$.

2) La extensión central $\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ no es topológicamente trivial (aunque su núcleo no cumple la hipótesis de conexión exigida).

3) La extensión trivial de $SU(2) \cong S^3$ por S^1 determina por paso al cociente una extensión central de $SO(3)$ por S^1. En efecto, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\{-1, 1\} \arrow[d] & \{(-1, -I), (1, I)\} \arrow[d] & \{-I, I\} \arrow[d] \\
S^1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_0"'] & S^1 \times SU(2) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & SU(2) \arrow[d, "\overline{\pi}"'] \\
S^1 \arrow[r] & \widehat{G} \arrow[r, "\overline{p}"] & SO(3)
\end{tikzcd}$$

donde $\pi_0 : S^1 \to S^1$, $\pi : S^1 \times SU(2) \to \widehat{G}$ y $\overline{\pi} : SU(2) \to SO(3)$ son cubiertas regulares de grupo $\mathbb{Z}_2$. Puesto que el generador $(-1, -I)$ de $\{(-1, -I), (1, I)\}$ opera de manera no trivial sobre los dos factores de $S^1 \times SU(2)$, la extensión central $\widehat{G}$ no es topológicamente trivial. Más adelante se probará que $SO(3)$ sólo admite dos extensiones centrales por S^1: la extensión trivial $S^1 \times SO(3)$ y la extensión $\widehat{G}$.

3.2 Cohomología e-diferenciable y clase de una extensión central de grupos de Lie.

Como consecuencia del ejemplo anterior, será necesario introducir una nueva cohomología adaptada a los grupos de Lie que permita clasificar las extensiones centrales. En este párrafo, se recuerda la construcción de la *cohomología e-diferenciable* de [TW].

Sea $C^n_{es}(G, A)$ el grupo abeliano de las n-cocadenas $\varphi : G \times \ldots \times G \to A$ que son diferenciables en un entorno del elemento neutro $(e, \ldots, e)$ de $G \times \ldots \times G$. Procediendo como en los casos anteriores, se define la *cohomología e-diferenciable* $H^n_{es}(G, A)$ *de* G *con valores en* A (véase [TW]). La inclusión del complejo diferenciable $(C^*_s(G, A), \delta)$ en el complejo e-diferenciable $(C^*_{es}(G, A), \delta)$ y la inclusión de éste en el complejo abstracto $(C^*_{gr}(G,A),\delta)$ inducen sendos morfismos en cohomología

$$H^n_s(G,A) \longrightarrow H^n_{es}(G,A) \longrightarrow H^n_{gr}(G,A).$$

Sea $A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G$ una extensión central de grupos de Lie. Según se ha observado, el grupo de Lie $\widehat{G}$ es un fibrado principal sobre G con grupo estructural A. Por tanto, existe una sección $s : G \to \widehat{G}$ diferenciable en un entorno del elemento neutro. Luego el cociclo $\varphi \in Z^2_{gr}(G,A)$ definido por s es diferenciable en un entorno de $(e,e) \in G\times G$. En resumen, $\varphi \in Z^2_{es}(G,A)$ representa una clase $[\varphi] \in H^2_{es}(G,A)$, llamada *clase de la extensión central* $\widehat{G}$ *de* G *por* A, y se define una aplicación

$$k : \mathrm{Ext}\,(G,A) \longrightarrow H^2_{es}(G,A).$$

3.3 Extensión central definida por un cociclo e-diferenciable.

El objetivo de este párrafo es probar que la aplicación k es sobreyectiva: *para cada cociclo* $\varphi \in Z^2_{es}(G,A)$*, existe una extensión central* $\widehat{G}$ *de* G *por* A *tal que* $k([\varphi]) = \widehat{G} \in H^2_{es}(G,A)$.

Sea $\widehat{G} = G \times_\varphi A$ el grupo abstracto definido por el cociclo φ, es decir, dotado de la multiplicación

$$(g,a).(h,b) = (gh, a+b-\varphi(g,h)), \qquad \forall (g,a),(h,b) \in G\times_\varphi A.$$

En primer lugar, se le dota una estructura de grupo topológico. Sean W un entorno abierto del elemento neutro e de G tal que $\varphi|_{W\times W}$ es diferenciable y $\{V\}$ una base de entornos de e contenidos en W que verifique las dos siguientes condiciones:

i) para cada entorno básico V, existe un entorno básico U tal que $UU^{-1} \subset V$;

ii) para cada entorno básico V y cada elemento $g \in G$, existe un entorno básico U tal que $gUg^{-1} \subset V$.

Los abiertos $V \times A$ forman una base de entornos de $(e,0)$ y definen una estructura de grupo topológico sobre $\widehat{G}$. Para comprobar que $\widehat{G}$ admite una estructura de grupo de Lie, se aplicará el lema 2.6.1 de [V]:

3.3.1 Lema

Sea G *un grupo topológico* 2*-numerable y conexo. Sean* U *y* V *dos entornos abiertos del elemento neutro de* G *tales que:*

a) V *está dotado de una estructura de variedad analítica;*

b) $UU^{-1} \subset V$ *y la aplicación* $(u,v) \in U \times U \mapsto uv^{-1} \in V$ *es analítica.*

Entonces existe una única estructura analítica en G *tal que:*

i) algún entorno abierto de e *es una subvariedad abierta de* V *y de* G*;*

ii) para cada $g \in G$*, la traslación por la izquierda* L_g *es un difeomorfismo analítico de* G *en sí mismo.*

En particular, G *es un grupo de Lie analítico.* $\square$

Puesto que G es un grupo de Lie, existen entornos básicos U y V de e que cumplen las condiciones (a) y (b) del lema anterior. Por otra parte, puesto que A es un grupo de Lie, los abiertos básicos $U \times A$ y $V \times A$ y de $\widehat{G}$ admiten estructuras de variedad analítica. La condición $UU^{-1} \subset V$ implica que:

$$(U \times A)(U \times A)^{-1} \subset V \times A.$$

Además, la aplicación de división

$$\begin{array}{ccc} (U \times A) \times (U \times A) & \longrightarrow & V \times A \\ ((g,a),(h,b)) & \longrightarrow & (g,a).(h,b)^{-1} \end{array}$$

definida por:

$$(g,a).(h,b)^{-1} = (gh^{-1}, a - b + \varphi(h,h^{-1}) - \varphi(g,h^{-1}))$$

es analítica. Luego $\widehat{G} = G \times_\varphi A$ es un grupo de Lie.

3.4 Clasificación de las extensiones centrales de grupos de Lie.

Antes de demostrar el teorema de clasificación, conviene adaptar los lemas 1.4.1 y 1.4.2 al caso diferenciable:

3.4.1 Lema

Sean $A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G$ una extensión central de grupos de Lie y φ el cociclo e-diferenciable definido por una sección $s : G \to \widehat{G}$ diferenciable en un entorno del neutro. Entonces existe un isomorfismo de grupos de Lie $\Phi : G \times_\varphi A \to \widehat{G}$ que envía la sección nula de $G \times_\varphi A$ sobre la sección s.

Demostración Según el lema 1.4.1, se tiene un isomorfismo de grupos abstractos $\Phi : G \times_\varphi A \to \widehat{G}$ dado por $\Phi(g,a) = s(g)i(a)$ para cada $g \in G$ y cada $a \in A$. Puesto que la sección s es diferenciable en un entorno de $e \in G$, la aplicación Φ también es diferenciable en un entorno de $(e,0) \in G \times_\varphi A$. Ahora bien, como consecuencia de la propiedad (ii) del lema 3.3.1, Φ es diferenciable. $\square$

En general, la sección nula de $G \times_\varphi A$ sólo es diferenciable en un entorno del elemento neutro: la estructura diferenciable de $G \times_\varphi A$ se construye mediante traslaciones por la izquierda, pero nada asegura que éstas dejen invariante la sección nula.

3.4.2 Lema

Sean $G \times_\varphi A$ y $G \times_{\varphi'} A$ dos extensiones centrales de G por A definidas por dos cociclos e-diferenciables φ y φ'. Las extensiones $G \times_\varphi A$ y $G \times_{\varphi'} A$ son isomorfas si y sólo si φ y φ' representan la misma clase de $H^2_{es}(G,A)$.

Demostración La condición necesaria es idéntica a la condición necesaria del lema 1.4.2. En cuanto a la condición suficiente, la existencia de $\chi \in C^1_{es}(G, A)$ tal que $\varphi - \varphi' = \delta\chi$ permite construir un isomorfismo de grupos $\Phi : G \times_\varphi A \to G \times_{\varphi'} A$ dado por $\Phi(g, a) = (g, a + \chi(g))$ para cada $g \in G$ y para cada $a \in A$. Los mismos argumentos del lema anterior prueban que Φ es diferenciable. $\Box$.

Por tanto, la aplicación sobreyectiva $k : \mathrm{Ext}\,(G, A) \to H^2_{es}(G, A)$ pasa al cociente en una aplicación biyectiva $\overline{k} : \mathcal{E}xt\,(G, A) \to H^2_{es}(G, A)$ y queda probado el siguiente teorema de clasificación (véase [TW]):

3.4.3 Teorema

Las extensiones centrales de un grupo de Lie G por un grupo de Lie abeliano A están clasificadas por el segundo grupo de cohomología e-diferenciable $H^2_{es}(G, A)$ de G con valores en A. $\Box$

4 Teoría de Lie: extensiones centrales de grupos y álgebras de Lie.

En esta sección, se estudia la relación que existe entre extensiones centrales de grupos de Lie y extensiones centrales de álgebras de Lie (véase [TW]).

4.1 Morfismo de Lie: extensiones de grupos de Lie y extensiones finitesimales de álgebras de Lie

Sea

$$0 \to A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G \to 1 \tag{4.1}$$

una extensión central de grupos de Lie. Las aplicaciones tangentes en el elemento neutro definen una extensión infinitesimal de álgebras de Lie

$$0 \to \mathfrak{a} = T_e(A) \xrightarrow{i_*} \widehat{\mathfrak{g}} = T_e(\widehat{G}) \xrightarrow{p_*} \mathfrak{g} = T_e(G) \to 0 \tag{4.2}$$

identificadas con las respectivas álgebras de campos invariantes por la izquierda. De esta forma, se obtiene una aplicación

$$\mathcal{L} : \mathcal{E}xt\ (G, A) \longrightarrow \mathcal{E}xt\ (\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \tag{4.3}$$

llamada *morfismo de Lie*. Según una construcción de [TW], este morfismo se traduce en un morfismo

$$\mathcal{L}^{\#} : H^2_{es}(G, A) \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}). \tag{4.4}$$

De hecho, se plantean dos problemas distintos:

1) identificar e interpretar la clase de la extensión infinitesimal (4.2);

2) determinar la clase de la extensión infinitesimal (4.2) en función de la clase de la extensión de grupos de Lie (4.1), es decir, describir la traducción cohomológica (4.4) del morfismo de Lie.

Estos serán los ingredientes esenciales para proceder en sentido inverso y realizar cualquier extensión central de álgebras de Lie como extensión infinitesimal asociada a una extensión central de grupos de Lie. Este proceso se denominará *integración* y permitirá dar una demostración simple del tercer teorema de Lie (véanse §5 y §5.5).

4.1.1 Clase de una extensión infinitesimal y su interpretación geométrica

Cada base $\{V_1, \ldots, V_n\}$ de $\mathfrak{a}$ se completa en una base $\{V_1, \ldots, V_n, \widehat{X}_1, \ldots, \widehat{X}_m\}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}$ y ésta se proyecta en una base $\{X_1, \ldots, X_m\}$ de $\mathfrak{g}$ (i.e. $X_r = p_* \widehat{X}_r$ para cada $1 \leq r \leq m$). La base dual $\{\omega^1, \ldots, \omega^m\}$ se levanta en una familia $\{p^*\omega^1, \ldots, p^*\omega^m\}$ de 1-formas sobre $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ y ésta se completa en una base $\{\theta^1, \ldots, \theta^n, p^*\omega^1, \ldots, p^*\omega^m\}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}^*$. Sean $\{V_1^+, \ldots, V_n^+, \widehat{X}_1^+, \ldots, \widehat{X}_m^+\}$ los campos invariantes por la izquierda y $\{\theta^1, \ldots, \theta^n, p^*\omega^1, \ldots, p^*\omega^m\}$ las 1-formas invariantes por la izquierda determinados por las bases de $\widehat{\mathfrak{g}}$ y $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ respectivamente.

Puesto que el álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ es central, se tiene que $[V_i, V_j] = [V_i, \widehat{X}_j] = 0$ y

$$[\widehat{X}_r, \widehat{X}_s] = \sum c_{rs}^t \widehat{X}_t + \sum d_{rs}^i V_i$$

donde c_{rs}^t son las constantes de estructura de G. De este modo, se tiene que:

$$d\theta^i(\widehat{X}_r, \widehat{X}_s) = -\widehat{\theta}([\widehat{X}_r, \widehat{X}_s]) = -d_{rs}^i$$

y

$$d\theta^i = -\frac{1}{2}\sum d_{rs}^i p^*\omega^r \wedge p^*\omega^s = p^*(-\frac{1}{2}\sum d_{rs}^i \omega^r \wedge \omega^s) = p^*\Omega^i.$$

La 1-forma invariante por la izquierda $\theta = \sum \theta^i \otimes V_i \in \Omega_L^1(\widehat{G}, \mathfrak{a})$ es una 1-forma de conexión sobre el fibrado principal $p : \widehat{G} \to G$ de grupo estructural A. En efecto,

a) $\theta(V_i^+) = V_i$ para cada campo vertical V_i^+;

b) $R_a^*\theta = \theta$ para cada $a \in A$.

El núcleo de θ es un subfibrado $\mathcal{H}$ de $T(\widehat{G})$ generado por los campos $\widehat{X}_1^+, \ldots, \widehat{X}_m^+$. En este sentido, se dirá que los campos $\widehat{X}_1^+, \ldots, \widehat{X}_m^+$ definen una conexión sobre $\widehat{G}$ y que θ es la 1-forma de conexión correspondiente. El subfibrado horizontal $\mathcal{H}$ está completamente determinado por la fibra $\mathcal{H}_e$ del elemento neutro $e \in G$ (es decir, por la imagen de $\sigma : \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$) y la 2-forma de curvatura $\Omega = \sum \Omega^i \otimes V_i \in \Omega_L^2(G, \mathfrak{a})$ lo está por su restricción $\omega = \Omega_e$. Esto justifica las denominaciones de *conexión infinitesimal* y 2-*forma de curvatura* dadas a σ y ω en §2.2.

4.1.2 Proposición

El morfismo $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \xrightarrow{\cong} H_L^2(G, \mathfrak{a}) \longrightarrow H_{DR}^2(G, \mathfrak{a})$ *envía la clase* $[\omega] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ *de la extensión infinitesimal (4.2) en la clase de Chern* $[\Omega] \in H_{DR}^2(G, \mathfrak{a})$ *del fibrado principal* $p : \widehat{G} \to G$ *de grupo estructural abeliano* A.

Demostración Sea $\sigma : \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ la conexión infinitesimal definida por $\sigma(X_r) = \widehat{X}_r$. El isomorfismo (2.2) permite identificar la 2-forma de curvatura ω de la conexión infinitesimal σ con la 2-forma de curvatura Ω de la 1-forma de conexión θ. En efecto, la 2-forma de curvatura ω está dada por:

$$\begin{aligned}\omega(X_r, X_s) &= \sigma([X_r, X_s]) - [\sigma(X_r), \sigma(X_s)] \\ &= \sum c^t_{rs} \widehat{X}_t - [\widehat{X}_r, \widehat{X}_s] \\ &= -\sum d^i_{rs} V_i.\end{aligned}$$

Luego, para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiene que:

$$\omega^i = -\frac{1}{2} \sum d^i_{rs} \omega^r \wedge \omega^s = \Omega^i_e. \qquad \square$$

4.2 Descripción cohomológica del morfismo de Lie

La clasificación de las extensiones centrales de grupos y álgebras de Lie proporciona una traducción cohomológica del morfismo de Lie:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}xt\,(G, A) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathcal{E}xt\,(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^2_{es}(G, A) & \xrightarrow{\mathcal{L}^\#} & H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \end{array}$$

A continuación, se describe explícitamente el morfismo $\mathcal{L}^\#$ (véase [TW]):

4.2.1 Proposición

Sea $A \to \widehat{G} \to G$ una extensión central de grupos de Lie de clase $[\varphi] \in H^2(G, A)$. Entonces la clase $\mathcal{L}^\#[\varphi] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ de la extensión infinitesimal $\mathfrak{a} \to \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ está representada por la 2-forma $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{a}$ definida por:

$$\omega(X, Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \frac{d}{ds}|_{s=0}\ (\varphi(exp\, tX, exp\, sY) - \varphi(exp\, sY, exp\, tX)), \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g},$$

donde la notación φ designa un levantamiento del cociclo $\varphi : G \times G \to A$ a la cubierta universal $\mathfrak{a}$ de A definido en un entorno de (e, e) en $G \times G$.

Demostración Por el teorema 3.4.3, la extensión central $\widehat{G}$ es isomorfa a la extensión central $G \times_\varphi A$ cuya ley de grupo está dada por:

$$(g, a).(h, b) = (gh, a + b - \varphi(g, h))$$

Para describir la 2-forma de curvatura ω de la extensión infinitesimal $\mathcal{L}(\widehat{G}) = \widehat{\mathfrak{g}}$, basta restringirse a un entorno $p^{-1}(U)$ de la fibra $p^{-1}(e)$ del elemento neutro e de G. Puesto que este entorno es difeomorfo a $U \times A$, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\widehat{G}$ es difeomorfo a $G \times A$ y A es isomorfo a $\mathfrak{a}$. En esta situación, los campos invariantes por la izquierda sobre $\widehat{G}$ satisfacen la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}(X, V)^+_{(g,a)} &= (L_{(g,a)})_{*(e,e)}(X, V) \\ &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\ (g, a).(exp\, tX, exp\, tV) \\ &= \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\ (g.exp\, tX, a + exp\, tV - \varphi(g, exp\, tX)).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Por otra parte, para determinar el corchete de Lie

$$[(X,V)^+,(Y,W)^+]_{(e,e)} = (X,V)^+_{(e,e)}(Y,W)^+ - (Y,W)^+_{(e,e)}(X,V)^+,$$

basta considerar una función diferenciable $f : G \times A \to \mathbb{R}$ sobre $G \times A$ y calcular su derivada:

$$\begin{array}{l} (X,V)^+_{(e,e)}((Y,W)^+(f)) = \\ \frac{d}{dt}|_{t=0}\ (Y,W)^+(f)(exp\,tX, exp\,tV) = \\ \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \frac{d}{ds}|_{s=0}\ f(exp\,tX.exp\,sY, exp\,tV\ +\ exp\,sW\ -\ \varphi(exp\,tX, exp\,sY)). \end{array}$$

Por simetría, se tiene que la derivada $[(X,V)^+,(Y,W)^+]_{(e,e)}(f)$ está dada por:

$$\begin{array}{rl} & \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \frac{d}{ds}|_{s=0}\ f(exp\,tX.exp\,sY, exp\,tV\ +\ exp\,sW\ -\ \varphi(exp\,tX, exp\,sY)) \\ - & \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \frac{d}{ds}|_{s=0}\ f(exp\,sY.exp\,tX, exp\,sW\ +\ exp\,tV\ -\ \varphi(exp\,sY, exp\,tX)). \end{array}$$

Por fin, puesto que

$$[(X,V)^+,(Y,W)^+]_{(e,e)} = ([X,Y],[V,W] - \omega(X,Y)) = ([X,Y], -\omega(X,Y)),$$

se deduce que:

$$\omega(X,Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \frac{d}{ds}|_{s=0}\ (\varphi(exp\,tX, exp\,sY) - \varphi(exp\,sY, exp\,tX)). \qquad \square$$

4.3 Resumen

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^2_s\,(G,A) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, leftrightarrow, "(3)"'] & H^2_{es}\,(G,A) \arrow[r, "\mathcal{L}^{\#}"] \arrow[d, leftrightarrow, "(4)"'] & H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \arrow[d, leftrightarrow, "(5)"] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{E}xt_0(G,A) \arrow[r, "(2)"'] & \mathcal{E}xt\,(G,A) \arrow[r, "\mathcal{L}"] & \mathcal{E}xt\,(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \end{tikzcd}$$

donde

(1) es el morfismo inducido por la inclusión del complejo diferenciable $\Omega_s(G,A)$ en el complejo e-diferenciable $\Omega_{es}(G,A)$;

(2) es la inclusión natural;

(3) es la equivalencia entre las clases de cociclos diferenciables y las clases de extensiones centrales topológicamente triviales;

(4) es la equivalencia entre las clases de cociclos e-diferenciables y las clases de extensiones centrales;

(5) es la equivalencia entre clases de las 2-formas cerradas sobre $\mathfrak{g}$ con valores en $\mathfrak{a}$ y las clases de extensiones de álgebras de Lie.

Por otra parte, $\mathcal{L}$ es el morfismo de Lie que asocia la extensión infinitesimal $\mathfrak{a} \to \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ a cada extensión de grupos de Lie $A \to \widehat{G} \to G$ y $\mathcal{L}^{\#}$ es la traducción del morfismo de Lie en cohomología.

En general, las aplicaciones (1), (2), $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^{\#}$ no son biyectivas. Puesto que la aplicación (2) es claramente inyectiva, la aplicación (1) lo es también. Pero no son sobreyectivas ya que existen extensiones centrales de grupos de Lie que no son topológicamente triviales. En cuanto a las aplicaciones $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^{\#}$, éstas no son inyectivas, ya que diferentes extensiones centrales de grupos de Lie pueden tener la misma extensión infinitesimal. Más adelante se comprobará que tampoco son sobreyectivas. Sin embargo, todas las aplicaciones serán biyectivas si el grupo de Lie G es 1-conexo.

4.4 Aplicaciones momento

Para cada extensión central de grupos de Lie $A \to \widehat{G} \to G$, se ha construido una 1-forma de conexión $\theta \in \Omega^1(\widehat{G}, \mathfrak{a})$ sobre el fibrado principal subyacente $p : \widehat{G} \to G$ de grupo estructural A. No se trata de una 1-forma de conexión cualquiera, sino invariante por la izquierda. Antes de caracterizar la invarianza de θ (véase §4.5), hay que recordar la noción de *aplicación momento* introducida en [TW]:

4.4.1 Definición

Sea Ω una n-forma real o vectorial sobre una variedad M. Se dice que un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ es una *simetría infinitesimal* de (M, Ω) si verifica las siguientes condiciones equivalentes:

i) $L_X\Omega = 0$;

ii) el flujo local Φ_t de X deja invariante Ω, i.e. $\Phi_t^*\Omega = \Omega$.

Las simetrías infinitesimales forman un subálgebra de Lie $\mathfrak{S}(M, \Omega)$ de $\mathfrak{X}(M)$.

Sea $p : P \to M$ un fibrado principal de grupo abeliano A. Sean $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{a})$ una 1-forma de conexión sobre P y $\Omega \in \Omega^2(M, \mathfrak{a})$ la 2-forma de curvatura tal que $d\theta = p^*\Omega$. Un campo de vectores $\widehat{X}$ sobre P es *proyectable* si existe un campo de vectores X sobre M tal que $p_{u*}\widehat{X}_u = X_{p(u)}$ para cada $u \in P$. En tal caso, se escribe $p_*\widehat{X} = X$. Evidentemente, un campo de vectores $\widehat{X}$ es proyectable si y sólo si es *invariante por la acción de* A, i.e. $R_{a*}\widehat{X} = \widehat{X}$ para cada $a \in A$. Si $\mathfrak{X}_R(P)$ denota el álgebra de Lie de los campos proyectables (o invariantes por la acción de A) y $\mathfrak{X}_V(P)$ es la subálgebra de Lie generada por los campos fundamentales de la acción de A sobre P, se tiene una sucesión exacta corta de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow \mathfrak{X}_V(P) \longrightarrow \mathfrak{X}_R(P) \xrightarrow{p_*} \mathfrak{X}(M) \longrightarrow 0, \tag{4.6}$$

llamada *sucesión de Atiyah* (véanse [AM] y [At]).

4.4.2 Definición

Una simetría infinitesimal $\widehat{X}$ de (P, θ) es *proyectable* si existe una simetría infinitesimal X de (M, Ω) tal que $p_*\widehat{X} = X$. En tal caso, se dice que $\widehat{X}$ es un *levantamiento de* X.

Las simetrías infinitesimales proyectables forman un subálgebra de Lie $\mathfrak{S}_R(P, \theta) = \mathfrak{S}(P, \theta) \cap \mathfrak{X}_R(P)$ de $\mathfrak{S}(P, \theta)$. Puesto que los campos fundamentales de la acción de A

sobre P son simetrías infinitesimales de (P,θ) que se proyectan sobre el campo nulo, se comprueba de manera inmediata que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{X}_V(P) \longrightarrow \mathfrak{S}_R(P,\theta) \xrightarrow{p_*} \mathfrak{S}(M,\Omega).$$

El siguiente resultado caracteriza las simetrías infinitesimales de (M,Ω) que poseen un levantamiento:

4.4.3 Proposición

Una simetría infinitesimal $X \in \mathfrak{S}(M,\Omega)$ posee un levantamiento $\widehat{X} \in \mathfrak{S}_R(P,\theta)$ si y sólo si existe una función $f : G \to \mathfrak{a}$ tal que $i_X\Omega + df = 0$.

Demostración Si una simetría infinitesimal $\widehat{X} \in \mathfrak{S}_R(P,\theta)$ se proyecta sobre una simetría infinitesimal $X \in \mathfrak{S}(M,\Omega)$, entonces

$$0 = i_{\widehat{X}}d\theta + d(\theta(\widehat{X})) = p^*(i_X\Omega) + d(\alpha(\widehat{X})).$$

Puesto que la función $\alpha(\widehat{X}) : P \to \mathfrak{a}$ es invariante por la acción de A, existe una función $f : M \to \mathfrak{a}$ tal que $\alpha(\widehat{X}) = p^*f = f \circ p$. Por tanto, la simetría infinitesimal $X \in \mathfrak{S}(M,\Omega)$ verifica que $i_X\Omega + df = 0$. Recíprocamente, si $X \in \mathfrak{S}(M,\Omega)$ verifica que $i_X\Omega + df = 0$, se denotan $f_1,\ldots,f_n$ las componentes de la función $f : M \to \mathfrak{a}$ respecto de una base $V_1,\ldots,V_n$ de $\mathfrak{a}$ y se define un campo de vectores

$$\widehat{X} = \widetilde{X} + \sum_{i=1}^{n} (p^*f_i)\, V_i^*$$

donde $\widetilde{X}$ es el levantamiento horizontal de X y V_i^* es el campo fundamental asociado a V_i. Las identidades

$$\begin{aligned} L_{\widetilde{X}}\theta &= i_{\widetilde{X}}d\theta + d i_{\widetilde{X}}\theta = i_{\widetilde{X}}p^*\Omega = p^*(i_X\Omega) = -p^*df \\ L_{(p^*f_i)\,V_i^*}\theta &= i_{(p^*f_i)\,V_i^*}d\theta + d i_{(p^*f_i)\,V_i{}^*}\theta = (p^*df_i)\, i_{V_i^*}\theta = (p^*df_i)\, V_i \end{aligned}$$

garantizan que:

$$L_{\widehat{X}}\theta = L_{\widetilde{X}}\theta + \sum_{i=1}^{n} L_{(p^*f_i)\,V_i^*} = -p^*df + p^*(\sum_{i=1}^{n} df_i\, V_i) = -p^*df + p^*df = 0.$$

Obsérvese que $\widehat{X}$ está completamente determinado por la función f. $\square$

Las simetrías infinitesimales de (M,Ω) que satisfacen la condición de la proposición forman una subálgebra de Lie $\mathfrak{S}'(M,\Omega)$ de $\mathfrak{S}(M,\Omega)$ tal que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathfrak{X}_V(P) \longrightarrow \mathfrak{S}_R(P,\theta) \xrightarrow{p_*} \mathfrak{S}'(M,\omega) \longrightarrow 0 \tag{4.7}$$

es exacta.

4.4.4 Definición

Sea Ω una n-forma diferenciable real ó vectorial sobre una variedad M. Sean G un grupo de Lie $\phi : G \times M \to M$ una acción por la izquierda. Se dice que G es un *grupo de simetrías de* (M, Ω) si Ω es invariante por la acción de G, i.e. $L_g^*\Omega = \Omega$ para cada $g \in G$. La acción de G sobre M induce un morfismo de álgebras de Lie $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$, llamado *acción infinitesimal*, que envía cada elemento $X \in \mathfrak{g}$ en el campo fundamental asociado $X^* \in \mathfrak{X}(M)$. Si G es un grupo de simetrías de (M, Ω), entonces ϕ_* se factoriza a través de $\mathfrak{S}(M, \Omega)$ en un morfismo de álgebras de Lie $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}(M, \Omega)$.

Volviendo a la situación en la que M es la base de un fibrado principal $p : P \to M$ de grupo estructural A y $\Omega \in \Omega^2(M, \mathfrak{a})$ es la 2-forma de curvatura de una conexión $\theta \in \Omega^1(P, \mathfrak{a})$, se plantea de manera natural el problema de la factorización de una acción infinitesimal $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}(M, \Omega)$ a través del subálgebra de Lie $\mathfrak{S}'(M, \Omega)$ de las simetrías infinitesimales de (M, Ω) que admiten un levantamiento a (P, θ). Para responder a esta cuestión, se introduce el siguiente concepto (véase [TW]):

4.4.5 Definición

Si G un grupo de simetrías de (M, Ω), se denomina *aplicación momento* (relativa a la acción de G sobre (M, Ω)) a una aplicación lineal J del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G en el espacio $\mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{a})$ de las funciones diferenciables sobre M con valores en $\mathfrak{a}$ tal que $i_{X^*}\Omega + dJ_X = 0$ para cada $X \in \mathfrak{g}$.

Como consecuencia de la proposición 4.4.3, se tiene el siguiente resultado:

4.4.6 Proposición

Sean $p : P \to M$ un fibrado principal de grupo estructural abeliano A, θ una 1*-forma de conexión sobre P con* 2*-forma de curvatura Ω y G un grupo de simetrías de* (M, Ω). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) la acción de G sobre M posee una aplicación momento $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{a})$;

ii) la acción infinitesimal $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}(M, \Omega)$ se factoriza a través de $\mathfrak{S}'(M, \Omega)$.

iii) la acción infinitesimal $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}(M, \Omega)$ se levanta en una aplicación lineal $\widehat{\phi}_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}_R(P, \theta)$.

Demostración $(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(M)$ una aplicación momento relativa a la acción de G sobre M. Para cada $X \in \mathfrak{g}$, el campo fundamental $X^* = \phi_* X$ es una simetría infinitesimal de (M, Ω) tal que $i_{X^*}\Omega + dJ_X = 0$. Luego X^* se levanta en una simetría infinitesimal de (P, θ) según la proposición 4.4.3. Es decir, la acción infinitesimal $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}(M, \Omega)$ se factoriza a través de $\mathfrak{S}'(M, \Omega)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea $\widehat{\phi}_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}_R(P, \theta)$ la aplicación lineal que asocia el levantamiento $\widehat{X^*}$ del campo fundamental $X^* = \phi_*(X)$ a cada elemento $X \in \mathfrak{g}$. Resulta claro que $\phi_* = p_* \circ \widehat{\phi}_*$.

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)* Por proyección, la imagen de la acción infinitesimal $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}(M, \Omega)$ está contenida en $\mathfrak{S}'(M, \Omega)$. $\square$

4.4.7 Observaciones

1) Si la sucesión exacta corta (4.7) escinde por la derecha, cualquier acción infinitesimal $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}'(M, \Omega)$ se levanta en una acción infinitesimal $\widehat{\phi}_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}_R(P, \theta)$. Obsérvese que la sucesión de Atiyah (4.6) también escinde por la derecha en restricción a las órbitas de la acción de G. Luego los fibrados inducidos poseen 1-formas de conexión sin curvatura.

2) En general, la aplicación $\widehat{\phi}_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}_R(P, \theta)$ no es un morfismo de álgebras de Lie. Suponiendo que la acción es transitiva para simplificar, la aplicación momento J se identifica con una 1-forma diferenciable sobre M con valores en $\mathfrak{a}$. En tal caso, la acción infinitesimal $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}(M, \Omega)$ se levanta en un morfismo de álgebras de Lie $\widehat{\phi}_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}_R(P, \theta)$ si y sólo si la aplicación momento J es una primitiva de la 2-forma de curvatura Ω, i.e. $\Omega(X, Y) = XJ_Y - YJ_X - J_{[X,Y]}$ para cada par $X, Y \in \mathfrak{g}$. Ambas condiciones equivalen a la escisión por la derecha de la sucesión exacta corta (4.7).

3) Si los campos fundamentales X^* son completos (por ejemplo, si la variedad M es compacta), los campos levantados $\widehat{X^*}$ lo son también y la acción $\phi : G \times M \to M$ se levanta en una acción por la izquierda $\widetilde{\phi} : G \times P \to P$ que conmuta con la acción por la derecha de A sobre P y que deja invariante la 1-forma de conexión θ. Luego G es un grupo de simetrías de (P, θ).

4.5 Formas de conexión invariantes y aplicaciones momento

Sean

$$0 \to A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G \to 1 \tag{4.8}$$

una extensión central de grupos de Lie y

$$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0 \tag{4.9}$$

la extensión infinitesimal asociada. Sean $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{a}$ la curvatura de una conexión infinitesimal $\sigma : \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ de la extensión central (4.9) y $\Omega \in \Omega^2_L(G, \mathfrak{a})$ la 2-forma invariante por la izquierda tal que $\Omega_e = \omega$. Sea $\theta \in \Omega^1(\widehat{G}, \mathfrak{a})$ una 1-forma de conexión sobre el fibrado principal subyacente a la extensión central (4.8) cuya 2-forma de curvatura sea igual a Ω. El propósito de este párrafo es probar que la invarianza de θ garantiza la existencia de una aplicación momento $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{G}^\infty(G, \mathfrak{a})$ relativa a la acción natural por la izquierda del grupo de Lie G sobre sí mismo. De hecho, la condición recíproca también será cierta y constituirá una etapa esencial de la *integración* de las extensiones centrales de álgebras de Lie (véase §5).

Sea $\phi : G \times G \to G$ la acción natural de G sobre sí mismo. Puesto que la 2-forma de curvatura Ω es invariante por ϕ, el grupo de Lie G es un grupo de simetrías de (G, Ω) e induce una acción infinitesimal $\phi_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{S}(G, \Omega)$ que envía cada elemento $X \in \mathfrak{g}$ en el campo invariante por la derecha X^- sobre G. Por otra parte, la acción natural $\widehat{\phi}: \widehat{G} \times \widehat{G} \to \widehat{G}$ se proyecta sobre la acción $\phi : G \times G \to G$ de manera que la acción infinitesimal $\widehat{\phi}_* : \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{X}(\widehat{G})$ está relacionada con la anterior mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\widehat{\phi}_*} & \mathfrak{X}(\widehat{G}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_* \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\phi_*} & \mathfrak{S}(G, \Omega). \end{array}$$

4.5.1 Proposición

Si $\widehat{G}$ es un grupo de simetrías de $(\widehat{G}, \theta)$, entonces existe una aplicación momento $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(G, \mathfrak{a})$ relativa a la acción natural por la izquierda de G sobre (G, Ω) como grupo de simetrías.

Demostración Por hipótesis, la acción infinitesimal $\widehat{\phi}_* : \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{X}(\widehat{G})$ se factoriza a través del álgebra de simetrías $\mathfrak{S}(\widehat{G}, \theta)$. Por composición con la conexión infinitesimal $\sigma : \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$, se obtiene un levantamiento $\widehat{\phi}_* \circ \sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}(\widehat{G}, \theta)$ de la acción infinitesimal $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{S}(G, \Omega)$. Como consecuencia de la proposición 4.4.3, la acción de G sobre (G, Ω) posee una aplicación momento $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(G, \mathfrak{a})$. De hecho, la aplicación momento puede obtenerse de manera explícita como sigue: para cada $\widehat{X} \in \widehat{\mathfrak{g}}$, el campo invariante por la derecha $\widehat{X}^-$ es una simetría infinitesimal de $(\widehat{G}, \theta)$ que se proyecta sobre el campo invariante por la derecha X^- asociado a $X = \pi(\widehat{X})$. Luego

$$0 = L_{\widehat{X}^-}\theta = i_{\widehat{X}^-}d\theta + di_{\widehat{X}^-}\theta = p^*(i_{X^-}\Omega) + d\theta(\widehat{X}^-).$$

Puesto que la función $\theta(\widehat{X}^-) : \widehat{G} \to \mathfrak{a}$ es invariante por la acción de A, se proyecta en una función $J_X : G \to \mathfrak{a}$ tal que $i_{X^-}\Omega = -dJ_X$. En resumen, se tiene una aplicación momento J definida por $p^*J_X = \theta(\widehat{X}^-)$ para cada $X \in \mathfrak{g}$. $\square$

4.5.2 Relación entre el cociclo φ y la aplicación momento J

Sean $\theta \in \Omega^1_L(\widehat{G}, \mathfrak{a})$ una 1-forma de conexión y $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(G, \mathfrak{a})$ una aplicación momento tal que $i_{X^-}\Omega = -dJ_X$ para cada $X \in \mathfrak{g}$. Si $\widetilde{X}^-$ denota el levantamiento horizontal del campo invariante por la derecha X^-, $J^1_X, \ldots, J^n_X$ las componentes de J_X respecto de una base $\{V_1, \ldots, V_n\}$ de $\mathfrak{a}$ y $V_1^+, \ldots, V_n^+$ los campos invariantes por la izquierda asociados, entonces el campo

$$\widehat{X}^- = \widetilde{X}^- + \sum_{i=1}^{n} (p^*J^i_X)V_i^+ \tag{4.10}$$

es una simetría infinitesimal de $(\widehat{G}, \theta)$ según la proposición 4.4.3. Puesto que el campo invariante por la derecha X^- es completo, el campo $\widehat{X}^-$ también lo es y su flujo Φ^X_t se proyecta sobre el flujo $L_{exp\,tX}$ de X^-, i.e. $p \circ \Phi^X_t = L_{exp\,tX} \circ p$. Luego Φ^X_t deja invariantes las 1-formas $p^*\omega^1, \ldots, p^*\omega^m$, ya que las 1-formas $\omega^1, \ldots, \omega^m$ son invariantes por la izquierda. Por otra parte, la condición $L_{\widehat{X}^-}\theta = 0$ garantiza que Φ^X_t deja invariantes las 1-formas$\theta^1, \ldots, \theta^n$. Se deduce que Φ^X_t es una traslación por la izquierda y $\widehat{X}^-$ es un campo invariante por la derecha.

Como consecuencia de esta observación, se puede obtener una descripción explícita de Φ_t^X en restricción a cartas de trivialidad $U \times A$ de $\widehat{G}$. Puesto que se trata de un cálculo local, se puede suponer que la extensión central $\widehat{G}$ es topológicamente trivial (i.e. $\widehat{G} = G \times A$ salvo un isomorfismo de fibrados principales) y se puede sustituir A por $\mathfrak{a}$ como en el enunciado de la proposición 4.2.1. En tal caso, la 1-forma $\Theta = s^*\theta \in \Omega^1(G, \mathfrak{a})$ es una primitiva de la 2-forma $\Omega \in \Omega^1(G, \mathfrak{a})$ (siendo s la sección nula de $\widehat{G}$) y el levantamiento horizontal $\widetilde{X}^-$ de X^- está dado por:

$$\widetilde{X}^- = X^- - \sum_{i=1}^{n} (p^*\Theta^i(X^-))V_i^+$$

donde X^- denota la extensión a $\widehat{G} = G \times A$ del campo X^- sobre G. Por tanto, la simetría infinitesimal $\widehat{X}^-$ está dada por:

$$\widehat{X}^- = X^- + \sum_{i=1}^{n} (p^*(J_X^i - \Theta^i(X^-)))\, V_i^+$$

y su flujo Φ_t^X de $\widehat{X}^-$ está dado por:

$$\Phi_t^X(g, a) = ((exp\, tX).g, a + \int_0^t (J_X - \Theta(X^-))(exp\, sX.g)\, ds).$$

Puesto que Φ_t^X es una traslación por la izquierda, se tiene la siguiente escritura del cociclo φ definido por s:

4.5.3 Lema

$$\varphi(exp\, tX, g) = -\int_0^t (J_X - \Theta(X^-))(exp\, sX.g)\, ds. \qquad \square$$

De manera equivalente, si se define $\varphi_g(h) = \varphi(g, h)$, entonces se tiene que:

$$J_X - \Theta(X^-) = -\frac{d}{dt}|_{t=0}\ \varphi_{exp\, tX}.$$

Por otra parte, la condición $i_{X^-}\Omega = -dJ_X$ garantiza que:

$$\omega(X, Y) = (X^-(J_Y - \Theta(Y^-)) - Y^-(J_X - \Theta(X^-)))(e)$$

para cada par $X, Y \in \mathfrak{g}$. Estas dos ecuaciones permiten recuperar la identidad

$$\omega(X, Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\ \frac{d}{ds}|_{s=0}\ (\varphi(exp\, tX, exp\, sY) - \varphi(exp\, sY, exp\, tX)).$$

de la proposición 4.2.1.

4.5.4 Caso particular: grupos 1-conexos

Si G es un grupo de Lie 1-conexo, la acción de G sobre (G, Ω) posee una aplicación momento J y resulta mucho más fácil describir el cociclo φ (véase también [N]):

4.5.5 Lema

Si G es un grupo de Lie 1-conexo, la acción de G sobre (G,Ω) posee una aplicación momento $J:\mathfrak{g}\to\mathcal{C}^\infty(G,\mathfrak{a})$.

Demostración Si G es 1-conexo, entonces $H^1_{DR}(G,\mathfrak{a})=0$. Luego, para cada $X\in\mathfrak{g}$, la 1-forma $-i_{X^-}\,\Omega$ posee una primitiva J_X. Por tanto, $J:X\in\mathfrak{g}\mapsto J_X\in\mathcal{C}^\infty(G,\mathfrak{a})$ es una aplicación momento. $\square$

La 1-forma de conexión $\theta\in\Omega^1_L(\widehat{G},\mathfrak{a})$ es invariante por la izquierda, pero la primitiva $\Theta=s^*\theta\in\Omega^1(G,\mathfrak{a})$ de la 2-forma de curvatura $\Omega\in\Omega^1_L(G,\mathfrak{a})$ no tiene por qué serlo. Teniendo en cuenta que el cociclo φ mide el defecto de invarianza de Θ, cabe esperar recuperar φ a partir de Θ. De forma precisa, se tiene el siguiente resultado:

4.5.6 Lema

Para cada $g\in G$, se tiene que $\Theta\,-\,L_g^*\Theta=d\varphi_g$.

Demostración La expresión (4.5) de la derivada de una función respecto de un campo sobre $G\times_\varphi A$ permite probar que:

$$\Theta_g(X_g^+)=\theta_{(g,0)}(X_g^+,0)=-\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\;\varphi(g,exp\,tX),$$

para cada $g\in G$ y para cada $X\in\mathfrak{g}$. Por tanto, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl}(\Theta-L_g^*\Theta)_e(X) & = & \Theta_e(X_e^+)-\Theta_g(X_g^+)\\ & = & -\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\;\varphi(e,exp\,tX)+\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\;\varphi(g,exp\,tX)\\ & = & \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\;\varphi(g,exp\,tX)=(d\varphi_g)_e(X).\end{array}\qquad\square$$

La función φ_g está definida por:

$$\varphi_g(h)=\int_\gamma\Theta-L_g^*\Theta$$

donde $\gamma:[0,1]\to G$ es un camino que une e con h. Puesto que G es 1-conexo y la 1-forma $L_g^*\Theta-\Theta$ es cerrada, el teorema de Stokes garantiza que esta integral no depende del camino elegido. Este procedimiento de integración se usará más adelante para probar el tercer teorema de Lie (véase §5.5).

5 Integración de extensiones centrales de álgebras de Lie

El problema de la *integración* de las extensiones centrales de álgebras de Lie ha sido planteado y resuelto por G. Tuynman y y W.A.J.J. Wiegerinck en [TW].

5.1 Integración: formulación y enunciado.

Sean

$$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0 \tag{5.1}$$

una extensión central de álgebras de Lie y G un grupo de Lie de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se denomina *integración* de la extensión central (5.1) a su realización como extensión infinitesimal asociada a una extensión central de grupos de Lie

$$0 \to A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G \to 1 \tag{5.2}$$

donde $A \cong \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ es un grupo de Lie abeliano de álgebra de Lie $\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}^n$. Sean $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{a}$ la 2-forma de curvatura de una conexión infinitesimal $\sigma : \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ de la extensión central (5.1) y $\Omega \in \Omega^2_L(G, \mathfrak{a})$ la 2-forma invariante por la izquierda determinada por la condición $\Omega_e = \omega$. El morfismo $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \to H^2_L(G, \mathfrak{a}) \to H^2_{DR}(G, \mathfrak{a})$ envía la clase $[\omega] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ de la extensión central (5.1) en la clase de cohomología de De Rham $[\Omega] \in H^2_{DR}(G, \mathfrak{a})$. Dependiendo del contexto, la notación $\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}^n$ se referirá al álgebra de Lie, al espacio vectorial subyacente o al grupo de Lie 1-conexo correspondiente.

Para resolver el problema de la integración de las extensiones centrales de álgebras de Lie, hay que reconstruir en sentido inverso el proceso (descrito en §4) que asocia una extensión infinitesimal de álgebras de Lie a cada extensión central de grupos de Lie. De forma precisa, la integración de (5.1) constará de tres etapas diferentes:

1) Integración cohomológica. La primera etapa consistirá en la construción de un subgrupo discreto $D \cong \mathbb{Z}^d$ de $\mathbb{R}^n$ y de una clase de cohomología singular

$$\mathcal{E} \in H^2(G, D) \cong H^2(G, \mathbb{Z}^d)$$

tal que $J(\mathcal{E}) = [\Omega] \in H^2_{DR}(G, \mathfrak{a}) \cong H^2_{DR}(G, \mathbb{R}^n)$. El morfismo

$$J = I \circ j : H^2(G, D) \longrightarrow H^2(G, \mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} H^2_{DR}(G, \mathbb{R}^n)$$

es la composición del morfismo $j : H^2(G, D) \to H^2(G, \mathbb{R}^n)$ inducido por la inclusión de D en $\mathbb{R}^n$ y del isomorfismo de De Rham $I : H^2(G, \mathbb{R}^n) \to H^2_{DR}(G, \mathbb{R}^n)$.

2) Integración diferenciable. La segunda etapa consistirá en la construcción de un fibrado principal $p : \widehat{G} \to G$ de grupo estructural $A = \mathbb{R}^n/D = \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ y de una 1-forma de conexión θ tal que Ω es la 2-forma de curvatura de θ.

3) Integración algebraica. En la última etapa, se definirá una estructura de grupo de Lie sobre $\widehat{G}$ de manera que $\widehat{G}$ será una extensión central de G por A y la extensión infinitesimal asociada será isomorfa a la extensión central (5.1).

La integración cohomológica y la integración diferenciable forman parte de un problema clásico propuesto y resuelto por A. Weil (véase [W]): la realización de una 2-forma cerrada con valores reales o vectoriales como 2-forma de curvatura de una conexión sobre un fibrado principal con grupo estructural abeliano. Por otra parte,

B. Kostant (véase [K]) y J. M. Souriau (véase [S]) han estudiado este problema en el contexto de la *precuantificación* de las variedades simplécticas. Por esta razón, la condición necesaria y suficiente para la integrabilidad cohomológica y diferenciable se denominará *condición de integrabilidad de Kostant-Souriau-Weil*. Para enunciar esta condición, hay que recordar la siguiente definición:

5.1.1 Definición

i) Se denomina *morfismo de períodos de* Ω al morfismo de grupos abelianos

$$Per_\Omega : H_2(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathfrak{a} = \mathbb{R}^n$$

definido por:

$$Per_\Omega([z]) = \int_z \Omega$$

para cada 2-ciclo singular z de G. Puesto que la 2-forma Ω es cerrada, el teorema de Stokes prueba que la integral $\int_z \Omega$ sólo depende de la clase de homología de z.

ii) La imagen de Per_Ω es un subgrupo

$$Per(\Omega) = \{ \int_z \Omega \,/\, [z] \in H_2(G, \mathbb{Z}) \}$$

de $\mathbb{R}^n$, llamado *grupo de períodos de* Ω.

iii) Se dice que Ω satisface la *condición de Kostant-Souriau-Weil* si el grupo de períodos $Per(\Omega)$ es discreto.

Los restantes preliminares sobre fibrados principales con grupo estructural abeliano se incluyen en el apéndice B. En cuanto a la integración algebraica, habrá que imponer una segunda condición: la existencia de una aplicación momento relativa a la acción de G sobre (G, Ω). En resumen, se probará el siguiente resultado:

5.1.2 Teorema de integración

Sea G un grupo de Lie de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Una extensión central de álgebras de Lie

$$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

se integra en una extensión central de grupos de Lie

$$0 \to A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G \to 1$$

si y sólo si verifica las dos siguientes condiciones:

i) Condición de integrabilidad de Kostant-Souriau-Weil*: el grupo de períodos $Per(\Omega)$ es discreto;*

ii) Existencia de una aplicación momento*: la acción por la izquierda de G sobre (G, Ω) admite una aplicación momento $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(G, \mathfrak{a})$.*

5.1.3 Ejemplo

El grupo de Lie abeliano $G = \mathbb{R}^2$ está dotado de la 2-forma invariante por la izquierda $\Omega = dx_1 \wedge dx_2$ y el álgebra de Lie $\mathfrak{h}^3$ es una extensión central de $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$ definida por la 2-forma $\omega = \Omega_{(0,0)}$. Puesto que el grupo de períodos $Per(\Omega) = 0$ (ya que Ω es exacta) y la acción de G sobre (G, Ω) posee una aplicación momento (ya que las 1-formas $i_{\frac{\partial}{\partial x_1}}\Omega = dx_2$ y $i_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\Omega = -dx_1$ son exactas), el álgebra de Lie $\mathfrak{h}^3$ se integra en la extensión central H^3 de $G = \mathbb{R}^2$. Ahora bien, si se dota a $G = S^1 \times \mathbb{R}$ de la 2-forma invariante por la izquierda inducida (que se seguirá denotando $\Omega = dx_1 \wedge dx_2$), el grupo de períodos $Per(\Omega) = 0$, pero no existe ninguna aplicación momento para la acción de G sobre (G, Ω). En efecto, la 1-forma $i_{\frac{\partial}{\partial x_2}}\Omega = -dx_1$ es cerrada, pero no es exacta. Luego no existe ninguna extensión central de $G = S^1 \times \mathbb{R}$ que integre la extensión central $\mathfrak{h}^3$ de $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$. En otros términos, el morfismo de Lie $\mathcal{L} : \mathcal{E}xt(G, A) \to \mathcal{E}xt(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ no siempre es sobreyectivo.

5.2 Integración cohomológica

La siguiente proposición prueba que la integración cohomológica es una consecuencia de la condición de integrabilidad de Kostant-Souriau-Weil:

5.2.1 Proposición

La extensión central (5.1) es cohomológicamente integrable si y sólo si satisface la condición de integrabilidad de Kostant-Souriau-Weil, i.e. el grupo de períodos $Per(\Omega)$ es discreto.

Demostración Para cada subgrupo D de $\mathbb{R}^n$, se denota

$$< , >: H^2(G, D) \otimes H_2(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow D$$

el acoplamiento de Kronecker. Como consecuencia del teorema de coeficientes universales, la parte libre de $H^2(G, D)$ se identifica con los homomorfismos de $H_2(G, \mathbb{Z})$ en D. Sean D un subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{E} \in H^2(G, D)$ una clase de cohomología singular tales que $J(\mathcal{E}) = [\Omega]$. Para cada 2-ciclo z de G, se tiene que:

$$\int_z \Omega =< \mathcal{E}, [z] >\in D.$$

Luego el grupo de períodos $Per(\Omega) \subset D$ es discreto. Recíprocamente, si el grupo de períodos $Per(\Omega)$ es discreto, se define $D = Per(\omega)$. De acuerdo con el teorema de coeficientes universales, la condición

$$< \mathcal{E}, [z] >= \int_z \Omega \in D$$

determina una clase de cohomología $\mathcal{E} \in H^2(G, D)$ tal que $J(\mathcal{E}) = [\Omega]$. $\square$

Según se ha formulado el problema de la integración, existe completa libertad para elegir el grupo abeliano A. Por esta razón, la condición de integrabilidad cohomológica coincide con la condición clásica de Weil: el grupo de períodos $Per(\Omega)$ debe ser discreto (véase [W]). Ahora bien, si se fija el grupo abeliano $A = \mathbb{R}^n/D$, la condición de integrabilidad cohomológica es más restrictiva: el grupo de períodos $Per(\Omega)$ debe estar contenido en D (véase [TW]). Se trata de la generalización natural de la condición clásica de Kostant y Souriau (véanse [K] y [S]): una 2-forma cerrada Ω es la 2-forma de curvatura de una 1-forma de conexión θ sobre un fibrado principal $p : P \to M$ de grupo estructural $\mathbb{R}/2\pi\hbar\mathbb{Z}$ si y sólo si $Per(\Omega) \subset 2\pi\hbar\mathbb{Z}$, donde $\hbar$ es la constante de Planck.

5.3 Integración diferenciable

Si $D = Per(\Omega)$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$, entonces $D = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z}e_i$ respecto de una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y se dice que d es el *rango de* D. En tal caso, el cociente $A = \mathbb{R}^n/D$ es un grupo de Lie abeliano isomorfo a $T^d \times \mathbb{R}^{n-d}$. La integración diferenciable consiste en la construcción de un fibrado principal $p : \widehat{G} \to G$ de grupo estructural A y una 1-forma de conexión θ con 2-forma de curvatura Ω. Para ello, se procede en tres nuevas etapas:

i) En primer lugar, la cohomología singular $H^*(G, D)$ es isomorfa a la cohomología de Čech $\check{H}^*(G, D)$. Si $\mathcal{U} = \{U_i\}$ es un buen recubrimiento localmente finito de G, la cohomología de Čech $\check{H}^*(G, D)$ es isomorfa a la cohomología de Čech $\check{H}^*(\mathcal{U}, D)$ (véase el apéndice A). Identificando las tres cohomologías, se tiene que la clase $\mathcal{E} \in \check{H}^2(\mathcal{U}, D)$ está representada por un 2-cociclo $\varepsilon = \{\varepsilon_{ijk}\} \in \check{C}^2(\mathcal{U}, D)$.

ii) Por otra parte, los prehaces de funciones diferenciables sobre G con valores en D, $\mathbb{R}^n$ y A forman una sucesión exacta corta

$$0 \to D \to \mathcal{C}^\infty(G, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(G, A) \to 0$$

en el siguiente sentido: para cada abierto 1-conexo U de G, la sucesión

$$0 \to D \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(U, A) \to 0$$

es exacta (véase el apéndice B.5). Esta sucesión exacta corta induce una sucesión exacta larga de cohomología de $\mathcal{U}$

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \to \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(G, \mathbb{R})) \to \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(G, S^1)) \to \check{H}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

y por paso al limite, se obtiene una sucesión exacta larga de cohomología:

$$\check{H}^n(G, \mathbb{Z}) \to \check{H}^n(G, \mathcal{C}^\infty(G, \mathbb{R})) \to \check{H}^n(G, \mathcal{C}^\infty(G, S^1)) \to \check{H}^{n+1}(G, \mathbb{Z}).$$

Según el lema B.5.1, el morfismo de conexión

$$\delta_* : \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(G, A)) \longrightarrow \check{H}^2(\mathcal{U}, D)$$

es un isomorfismo. Luego la clase $\delta_*^{-1}(\mathcal{E}) \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(G,A))$ está representada por un 1-cociclo $\tau = \{\tau_{ij}\}$, es decir, por una familia de aplicaciones diferenciables $\tau_{ij} : U_{ij} \to A$ tales que $(\delta\tau)_{ijk} = \tau_{ij} + \tau_{jk} - \tau_{ik} = 0$. El cociclo fibrado $(\{U_i\}, \{\tau_{ij}\})$ define un fibrado principal fibrado principal $p : \widehat{G} \to G$ de grupo estructural A (véase el apéndice B).

iii) La clase de Euler $\mathcal{E}(\widehat{G}) \in H^2(G,A)$ coincide con la clase $\mathcal{E} \in H^2(G,D)$ (véanse la definición B.4.1 y el teorema B.5.3). Como consecuencia del teorema B.6.1, la clase $[\Omega] = J(\mathcal{E}) \in H^2_{DR}(G,\mathfrak{a})$ es la clase de Chern del fibrado principal $\widehat{G}$. Luego existe una 1-forma de conexión θ sobre $\widehat{G}$ cuya 2-forma de curvatura es igual a Ω.

5.4 Integración algebraica

Sea $p : (\widehat{G}, \theta) \to (G, \Omega)$ el fibrado principal de grupo estructural abeliano$A$ construido en la etapa anterior. La integración algebraica consiste en la construcción de una estructura de grupo de Lie sobre $\widehat{G}$ de manera que $A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G$ es una extensión central y la extensión infinitesimal asociada es isomorfa a (5.1).

Según la proposición 4.4.6, si la acción natural de G sobre sí mismo posee una aplicación momento $J : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(G,\mathfrak{a})$, cada elemento $X \in \mathfrak{g}$ determina un campo de vectores $\widehat{X^-} \in \mathfrak{X}(\widehat{G})$ tal que:

a) el campo $\widehat{X^-}$ se proyecta sobre el campo invariante por la derecha X^- sobre G asociado a X;

b) el campo $\widehat{X^-}$ es una simetría infinitesimal de $(\widehat{G}, \theta)$, i.e. $L_{\widehat{X^-}}\,\theta = 0$.

La condición (a) garantiza que el campo $\widehat{X^-}$ es completo y su flujo Φ_t^X se proyecta sobre el flujo $L_{exp\,tX}$ de X^-, i.e.

$$\Phi_t^X \circ p = p \circ L_{exp\,tX} \tag{5.3}$$

La condición (b) garantiza que:

$$(\Phi_t^X)^*\,\theta = \theta \tag{5.4}$$

5.4.1 Construcción de la estructura de grupo

Sean $\theta^1, \ldots, \theta^n$ (resp. $\Omega^1, \ldots, \Omega^n$) las componentes de la 1-forma de conexión θ (resp. la 2-forma de curvatura Ω) respecto de una base $V_1, \ldots, V_n$ de $\mathfrak{a}$ y $\omega^1, \ldots, \omega^m$ las 1-formas invariantes por la izquierda sobre G determinadas por una base de $\mathfrak{g}^*$. Las 1-formas $\theta^1, \ldots, \theta^n, p^*\omega^1, \ldots, p^*\omega^m$ sobre $\widehat{G}$ constituyen una base de secciones del fibrado cotangente $T^*(\widehat{G})$ que verifica:

$$d\theta^i = p^*\Omega^i = -\frac{1}{2}\sum d^i_{rs} p^*\omega^r \wedge p^*\omega^s$$
$$d\omega^t = -\frac{1}{2}\sum c^t_{rs}\omega^r \wedge \omega^s$$

donde $\{c_{rs}^t\}$ son las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ y $\{c_{rs}^t, d_{rs}^i\}$ son las constantes de estructura no nulas de $\widehat{\mathfrak{g}}$. En esta situación, se dice que $\widehat{G}$ es una $\widehat{\mathfrak{g}}$-*variedad* en el sentido de E. Cartan (véanse [vE] y [TW]). Las condiciones (5.3) y (5.4) implican que:

$$(\Phi_t^X)^*\,\theta^i = \theta^i \qquad \text{y} \qquad (\Phi_t^X)^*\,p^*\omega^r = p^*\omega^r$$

para cada $i = 1, \ldots, n$ y cada $r = 1, \ldots, m$. De acuerdo con la terminología de [vE], cada difeomorfismo $\Phi_t^X : \widehat{G} \to \widehat{G}$ es un $\widehat{\mathfrak{g}}$-*automorfismo de* $\widehat{G}$ (véase también [TW]). Para concluir, se aplicará el siguiente resultado de E. Cartan (véanse [vE] y [TW]):

5.4.2 Teorema

Una $\widehat{\mathfrak{g}}$-variedad $\widehat{G}$ admite una estructura de grupo de Lie de álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ si y sólo si la acción del grupo de los $\widehat{\mathfrak{g}}$-automorfismos de $\widehat{G}$ es transitiva. En tal caso, el grupo de los $\widehat{\mathfrak{g}}$-automorfismos de $\widehat{G}$ se identifica con las traslaciones por la izquierda. □

Puesto que G es conexo, la imagen de la aplicación exponencial genera G. Para cada elemento $g = (exp\, X_1) \ldots (exp\, X_n)$ de G, el $\widehat{\mathfrak{g}}$-automorfismo $\Phi_1^{X_1} \circ \ldots \Phi_1^{X_n}$ envía la fibra $p^{-1}(e)$ de e en la fibra $p^{-1}(g)$ de g. Teniendo en cuenta que los flujos $R_{exp\,tV}$ de los campos verticales V^* asociados a los elementos V de $\mathfrak{a}$ son también $\widehat{\mathfrak{g}}$-automorfismos de $\widehat{G}$, se deduce que la acción del grupo de los $\widehat{\mathfrak{g}}$-automorfismos de $\widehat{G}$ es transitiva. Como consecuencia del teorema anterior, $\widehat{G}$ admite una estructura de grupo de Lie de álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$. Puesto que los difeomorfismos $R_{exp\,tV} : \widehat{G} \to \widehat{G}$ y $\Phi_t^X : \widehat{G} \to \widehat{G}$ son traslaciones por la izquierda, se sigue que:

$$0 \to A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G \to 1 \tag{5.5}$$

es una extensión de grupos de Lie. Por fin, según la proposición 4.4.3, cada campo de vectores $\widehat{X^-}$ se escribe:

$$\widehat{X^-} = \widetilde{X^-} + \sum_{i=1}^{n} (p^* J_X^i) V_i^*$$

donde $\widetilde{X^-}$ denota el levantamiento horizontal del campo invariante por la derecha X^-, $J_X^1, \ldots, J_X^n$ las componentes de J_X respecto de la base $\{V_1, \ldots, V_n\}$ de $\mathfrak{a}$ y $V_1^*, \ldots, V_n^*$ los campos verticales asociados. Por tanto, para cada $V \in \mathfrak{a}$, se tiene que:

$$[V^*, \widehat{X^-}] = [V^*, \widetilde{X^-}] + \sum_{i=1}^{n} (p^* J_X^i)[V^*, V_i^*] + \sum_{i=1}^{n} V^*(p^* J_X^i) V_i^* = 0.$$

Luego $R_{exp\,tV} \circ \Phi_t^X = \Phi_t^X \circ R_{exp\,tV}$ y la extensión (5.5) es central.

5.4.3 Extensión infinitesimal asociada

Para probar que la extensión central de álgebras de Lie (5.1) es isomorfa a la extensión infinitesimal asociada a la extensión central de grupos de Lie (5.5), bastará comprobar que ambas poseen conexiones infinitesimales con 2-forma de curvatura $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{a}$.

De nuevo, puesto que se trata de una comprobación local, se puede suponer que $\widehat{G} = G \times A$. El campo $\widetilde{X}^-$ está dado por:

$$\widehat{X}^- = X^- + \sum_{i=1}^{n} \{p^*(J_X^i - \Theta^i(X^-))\} V_i^+$$

donde X^- denota la extensión a $\widehat{G} = G \times A$ del campo X^- sobre G y Θ la 1-forma sobre G con valores en $\mathfrak{a}$ inducida por θ. Su flujo Φ_t^X está dado por:

$$\Phi_t^X(g,a) = ((exp\, tX).g, a + \int_0^t (J_X - \Theta(X^-))(exp\, sX.g)\, ds).$$

Puesto que Φ_t^X es una traslación por la izquierda, la extensión central está definida por el siguiente cociclo (véase el lema 4.5.3):

$$\varphi(exp\, tX, g) = -\int_0^t (J_X - \Theta(X^-))(exp\, sX.g)\, ds.$$

Como consecuencia de la proposición 4.2.1, la clase de la extensión infinitesimal está representada por la 2-forma $\omega_\varphi \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{a}$ dada por:

$$\begin{array}{rcl} \omega_\varphi(X,Y) & = & \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{d}{ds}|_{s=0} (\varphi(exp\, tX, exp\, sY) - \varphi(exp\, sY, exp\, tX)) \\ & = & (X^-(J_Y - \Theta(Y^-)) - Y^-(J_X - \Theta(X^-)))(e) \end{array}$$

para cada par $X, Y \in \mathfrak{g}$. Ahora bien, según se ha indicado en §4.5.2, la condición $i_{X^-}\Omega = -dJ_X$ implica que $\omega_\varphi = \omega$. $\square$

La integración algebraica admite una prueba basada en el *criterio de integrabilidad de Cartan-Smith* (véase [vE]). Sean O un entorno de 0 en $\mathfrak{g}$ y V un entorno de e en G tales que la aplicación exponencial $exp : O \subset \mathfrak{g} \to V \subset G$ es un difeomorfismo. La aplicación momento J y una primitiva Θ de Ω sobre V definen por integración una aplicación diferenciable $\varphi : V \times V \to A$. Si U es un entorno simétrico de e tal que $U.U.U \subset V$, se comprueba fácilmente que $\varphi : U \times U \to A$ satisface la condición de cociclo $\delta\varphi = 0$. Sea

$$m : (U \times A) \times (U \times A) \to V \times A$$

la aplicación diferenciable definida por:

$$m((g,a),(h,b)) = (g,a).(h,b) = (gh, a + b - \varphi(g,h))$$

para cada par $(g,a),(h,b) \in U \times A$. Esta multiplicación local define una estructura de *grupo de Lie local* sobre $V \times A$ (que se denotará $V \times_\varphi A$) tal que

$$A \xrightarrow{i} V \times_\varphi A \xrightarrow{p} V \tag{5.6}$$

es una *extensión central de grupos de Lie locales*. Las definiciones precisas pueden verse en [vE]. Por otra parte, los difeomorfismos $\Phi_t^X : \widehat{G} \to \widehat{G}$ pueden pensarse como traslaciones por la izquierda de esta estructura local. Para cada elemento $g \in U$, existe un único elemento $X \in \mathfrak{g}$ tal que $exp\, X = g$ y el difeomorfismo Φ_1^X se denota Φ_g. Por construcción, se tiene que:

$$\Phi_g(h,b) = (g.h, b - \varphi(g,h)) = (g,0).(h,b)$$

para cada $(h,b) \in U \times A$. Por otra parte, los difeomorfismos Φ_g verifican que:

$$\Phi_{gh} = \Phi_1^{X+Y} = \Phi_1^X \circ \Phi_1^Y = \Phi_g \circ \Phi_h$$

si $g = exp\, X$ y $h = exp\, Y$. Obsérvese que las tres siguientes condiciones:

a) $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$, para cada par $g, h \in U$;

b) $R_a \circ R_b = R_{a+b}$, para cada par $a, b \in A$;

c) $\Phi_g \circ R_a = R_a \circ \Phi_g$, para cada $g \in U$ y para cada $a \in A$;

garantizan que la ley de multiplicación local definida sobre $V \times A$ satisface la propiedad asociativa, la existencia elemento neutro y la existencia de elementos inversos (para los elementos de $U \times A$ que se pueden componer). El criterio de integrabilidad de Cartan-Smith afirma que *la extensión central de grupos de Lie locales (5.6) se integra en una extensión central de grupos de Lie* $A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G$ *si y sólo si el grupo de períodos de* $\Omega|_V$ *es trivial* (véase [vE]). Ahora bien, cualquier período

$$\int_z \Omega|_V = \int_z d\Theta|_V = \int_{\partial z} \Theta|_V = 0$$

ya que $H^1_{DR}(V) = 0$. Por tanto, la estructura de grupo de Lie local sobre $V \times A$ se extiende en una estructura de grupo de Lie sobre $\widehat{G}$. Pese a todo, sería interesante disponer de una prueba directa de la integración algebraica que no emplee ni el teorema de Cartan, ni el criterio de integrabilidad de Cartan-Smith.

5.4.4 Corolario

Sea G un grupo de Lie 1-conexo de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Cualquier extensión central de álgebras de Lie

$$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

se integra en una extensión central de grupos de Lie 1-conexos

$$0 \to A \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{p} G \to 1.$$

Demostración Si G es 1-conexo, el teorema de Cartan-Hopf (véase [vE]) prueba que el segundo grupo de cohomología de de Rham $H^2_{DR}(G) = 0$. De hecho, puesto que

$$H^2_{DR}(G) \cong H^2(G, \mathbb{R}) \cong Hom(\pi_2(G), \mathbb{R}),$$

el teorema de Cartan-Hopf es un corolario del siguiente resultado: *para cualquier grupo de Lie G, el segundo grupo de homotopía $\pi_2(G) = 0$.* Luego la 2-forma Ω es exacta y el grupo de períodos $Per(\Omega) = 0$. $\square$

Según se ha probado en §4.5.4, la integración cohomológica y diferenciable es particularmente simple en el caso 1-conexo. De hecho, en este caso, la integración de las extensiones centrales de álgebras de Lie es una consecuencia fácil del tercer teorema de Lie. A partir de esta observación, K. H. Need resalta en [N] que la condición de integrabilidad de Kostant-Souriau-Weil no es necesaria para resolver el problema de la integración. Sin embargo, junto al interés intrínseco de las extensiones centrales de álgebras de Lie y de su relación con la precuantificación de las variedades simplécticas (véase [TW]), el problema de la integración está profundamente ligado a la búsqueda de una demostración directa del tercer teorema de Lie (véanse [T] y [vE]). Por otra parte, excepto en el caso de las álgebras de Lie-Banach, el tercer teorema de Lie no siempre es cierto en dimensión infinita (véanse [A] y [AH]). De hecho, la condición de integrabilidad de Kostant-Souriau-Weil es esencial para entender el problema de la integración en dimensión finita o infinita y explica la razón profunda del tercer teorema de Lie: si G es un grupo de Lie de dimensión finita, entonces $\pi_2(G) = 0$.

5.5 Tercer teorema de Lie

En este párrafo, se da una prueba geométrica del tercer teorema de Lie que se debe a G.M. Tuynmann (véase [T]) y se basa en una idea previa de W.T. van Est (véase [vE]):

5.5.1 Tercer teorema de Lie

Cualquier álgebra de Lie de dimensión finita $\widehat{\mathfrak{g}}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie 1-conexo $\widehat{G}$.

Demostración Para cada álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$, se tiene una extensión central canónica

$$0 \to Z(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{g}}/Z(\mathfrak{g}) \to 1. \tag{5.7}$$

Puesto que la representación adjunta $ad : \widehat{\mathfrak{g}} \to End(\widehat{\mathfrak{g}})$ pasa al cociente en una representación inyectiva $\overline{ad} : \mathfrak{g} \to End(\widehat{\mathfrak{g}})$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un álgebra de Lie de matrices. Luego $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de matrices G. Sustituyendo G por su cubierta universal, se puede suponer que G es 1-conexo.

La construcción del grupo de Lie $\widehat{G}$ se reduce a la integración de la sucesión exacta de álgebras de Lie (5.7). Esta integración se puede obtener como corolario del teorema de integración 5.1.2 o mediante una prueba directa basada en este resultado (véase §4.5.4). En efecto, como consecuencia del teorema 5.1.2, la extensión central de álgebras de Lie (5.7) se integra en una extensión central $\widehat{G}$ de G por $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}^n$. Por otra parte, de manera directa, la construcción de $\widehat{G}$ se reduce a una doble integración:

i) Sean $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{R}^n$ la curvatura de una conexión infinitesimal $\sigma : \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ de la extensión central (5.7) y $\Omega \in \Omega^2_L(G, \mathbb{R}^n)$ la 2-forma invariante por la izquierda tal que $\Omega_e = \omega$. En primer lugar, se tiene que $H^1_{DR}(G) = 0$ ya que G es 1-conexo. Como consecuencia del teorema de coeficientes universales y del teorema de De Rham, se deduce que $H^2_{DR}(G) \cong Hom(\pi_2(G), \mathbb{R})$. Por tanto, la condición $\pi_2(G) = 0$ implica que $H^2_{DR}(G) = 0$. De manera análoga, se tiene que $H^1_{DR}(G, \mathbb{R}^n) = H^2_{DR}(G, \mathbb{R}^n) = 0$. Luego existe una 1-forma $\Theta \in \Omega^1(G, \mathbb{R}^n)$ tal que $d\Theta = \Omega$. También se puede suponer que $\Theta_e = 0$. Entonces

$$\theta = p^*\Theta + \sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes e_i$$

es una 1-forma de conexión sobre el fibrado trivial $\widehat{G} = G \times \mathbb{R}^n$ y Ω es la 2-forma de curvatura de θ.

ii) Para dotar al producto $\widehat{G} = G \times \mathbb{R}^n$ de una estructura de grupo, se construye un cociclo $\varphi : G \times G \to \mathbb{R}^n$ por integración de la 1-forma $\Theta - L_g^*\Theta$. En efecto, se define

$$\varphi(g, h) = \varphi_g(h) = \int_\gamma \Theta - L_g^*\Theta \tag{5.8}$$

donde γ es un camino en G que une e con g. Puesto que G es 1-conexo y la 1-forma $\Theta - L_g^*\Theta$ es cerrada, el teorema de Stokes garantiza que la integración no depende del camino elegido. Un cálculo explícito de la integral (5.8) prueba que φ es un 2-cociclo diferenciable. En efecto, si $h = exp(X)$, entonces

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto exp(tX) \in G$$

es un camino que une e con h y se tiene que:

$$\begin{aligned} \varphi_g(h) &= \textstyle\int_{[0,1]} (\Theta - L_g^*\Theta)(\gamma_* \frac{d}{dt}) dt \\ &= \textstyle\int_{[0,1]} (\Theta - L_g^*\Theta)(X_{\gamma(t)}) dt \\ &= \textstyle\int_0^1 (\Theta_{exp(tX)}(X_{exp(tX)}) - \Theta_{g.exp(tX)}(X_{g.exp(tX)})) dt. \end{aligned}$$

Luego φ depende diferenciablemente de $(g, h) \in G \times exp(\mathfrak{g})$. En general, puesto que G es conexo, G está generado por $exp(\mathfrak{g})$ y se deduce de lo anterior que φ es diferenciable. Por otra parte, la condición $L_{gh} = L_g \circ L_h$ garantiza que $\delta\varphi = 0$. En resumen, $\widehat{G} = G \times_\varphi \mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie.

Para probar que $\widehat{\mathfrak{g}}$ es el álgebra de Lie de $\widehat{G}$, basta comprobar que

$$\omega(X, Y) = \frac{d}{ds}|_{s=0} \, \frac{d}{dt}|_{t=0} \, (\varphi(exp\, sY, exp\, tX) - \varphi(exp\, tX), exp\, sY)) \tag{5.9}$$

para cada par $X, Y \in \mathfrak{g}$. En efecto, la derivada

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{ds}|_{s=0} \, \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \, \varphi(exp\, sY, exp\, tX) &= \tfrac{d}{ds}|_{s=0} \, (\Theta(X^+) - L^*_{exp\, sY}\Theta(X^+))(e) \\ &= -Y^+\Theta(X^+)(e) \end{aligned}$$

y el segundo término de la identidad (5.9) es igual a

$$X^+\Theta(Y^+) - Y^+\Theta(X^+))(e) = \Omega_e(X^+, Y^+) + \Theta_e([X^+, Y^+]) = \omega(X, Y)$$

ya que $\Theta_e = 0$. $\square$

La demostración del tercer teorema de Lie es constructiva y proporciona un método de integración de las álgebras de Lie de dimensión finita. El siguiente ejemplo ilustra este método:

5.5.2 Ejemplo

Sea $\mathfrak{g} = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ el álgebra de Lie cuyo corchete de Lie está determinado por:

$$\begin{array}{l}[e_4, e_2] = e_1 \\ [e_4, e_3] = e_2\end{array}$$

Para integrar este álgebra de Lie, se considera la extensión central

$$\langle e_1 \rangle = Z(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) = \langle \widehat{e}_2, \widehat{e}_3, \widehat{e}_4 \rangle \tag{5.10}$$

donde $\widehat{e}_i$ es la clase de e_i módulo $Z(\mathfrak{g})$. El corchete de Lie sobre $\widehat{\mathfrak{g}}$ está dado por:

$$[\widehat{e}_4, \widehat{e}_3] = \widehat{e}_2.$$

La clase de la extensión central (5.10) está representada por la 2-forma $\widehat{\omega}$ definida por:

$$\begin{array}{rclcl}\widehat{\omega}(\widehat{e}_2, \widehat{e}_3) & = & \widehat{\sigma}([\widehat{e}_2, \widehat{e}_3]) - [e_2, e_3] & = & 0 \\ \widehat{\omega}(\widehat{e}_2, \widehat{e}_4) & = & \widehat{\sigma}([\widehat{e}_2, \widehat{e}_4]) - [e_2, e_4] & = & e_1 \\ \widehat{\omega}(\widehat{e}_3, \widehat{e}_4) & = & \widehat{\sigma}([\widehat{e}_3, \widehat{e}_4]) - [e_3, e_4] & = & 0\end{array}$$

donde $\widehat{\sigma}(\widehat{e}_i) = e_i$. Si $\{\widehat{\Theta}_2, \widehat{\Theta}_3, \widehat{\Theta}_4\}$ denota la base dual de $\{\widehat{e}_2, \widehat{e}_3, \widehat{e}_4\}$, se tiene que:

$$\widehat{\omega} = \widehat{\Theta}_2 \wedge \widehat{\Theta}_4. \tag{5.11}$$

Para integrar la extensión central (5.10) es necesario integrar el álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$. Para ello, se considera la extensión central

$$\langle \widehat{e}_2 \rangle = Z(\widehat{\mathfrak{g}}) \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \widehat{\widehat{\mathfrak{g}}} = \widehat{\mathfrak{g}}/Z(\widehat{\mathfrak{g}}) = \langle \widehat{\widehat{e}}_3, \widehat{\widehat{e}}_4 \rangle \tag{5.12}$$

donde $\widehat{\widehat{e}}_i$ es la clase de $\widehat{e}_i$ módulo $Z(\widehat{\mathfrak{g}})$. La clase de la extensión central (5.12) está representada por la 2-forma $\widehat{\widehat{\omega}}$ definida por:

$$\widehat{\widehat{\omega}}(\widehat{\widehat{e}}_3, \widehat{\widehat{e}}_4) = \widehat{\widehat{\sigma}}([\widehat{\widehat{e}}_3, \widehat{\widehat{e}}_4]) - [\widehat{e}_3, \widehat{e}_4] = \widehat{e}_2$$

donde $\widehat{\widehat{\sigma}}(\widehat{\widehat{e}}_i) = \widehat{e}_i$. Por tanto,

$$\widehat{\widehat{\omega}} = \widehat{\widehat{\Theta}}_3 \wedge \widehat{\widehat{\Theta}}_4$$

donde $\{\widehat{\widehat{\Theta}}_3, \widehat{\widehat{\Theta}}_4\}$ es la base dual de $\{\widehat{\widehat{e}}_3, \widehat{\widehat{e}}_4\}$. Resulta claro que el álgebra de Lie abeliana $\widehat{\widehat{\mathfrak{g}}}$ se integra en el grupo de Lie abeliano $\mathbb{R}^2$ dotado de las coordenadas canónica (x_3, x_4). Respecto de la base de 1-formas invariantes por la izquierda $\{dx_3, dx_4\}$, la 2-forma invariante por la izquierda $\widehat{\widehat{\Omega}}$ (determinada por la condición $\widehat{\widehat{\Omega}}_e = \widehat{\widehat{\omega}}$) se escribe

$$\widehat{\widehat{\Omega}} = dx_3 \wedge dx_4$$

y se integra en una 1-forma

$$\widehat{\widehat{\Theta}} = x_3 dx_4.$$

Para obtener un 2-cociclo $\widehat{\widehat{\varphi}}$ e integrar la extensión central (5.12), basta construir una primitiva de la 1-forma

$$\widehat{\widehat{\Theta}} - L^*_{(y_3,y_4)}\widehat{\widehat{\Theta}} = x_3 dx_4 - (y_3 + x_3)dx_4 = -y_3 dx_4.$$

El 2-cociclo

$$\widehat{\widehat{\varphi}}((y_3, y_4), (x_3, x_4)) = -y_3 x_4$$

define un grupo de Lie $\widehat{G} = \widehat{\widehat{G}} \times_{\widehat{\widehat{\varphi}}} \mathbb{R}^2$ que integra el álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$. Se trata del grupo de Heisenberg

$$\widehat{G} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & x_3 & x_2 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si se considera la base de 1-formas invariantes por la izquierda

$$\{dx_2 - x_3 dx_4, dx_3, dx_4\},$$

la 2-forma invariante por la izquierda $\widehat{\Omega}$ está dada por

$$\widehat{\Omega} = (dx_2 - x_3 dx_4) \wedge dx_4 = dx_2 \wedge dx_4$$

y se integra en la 1-forma

$$\widehat{\Theta} = x_2 dx_4.$$

Para obtener el 2-cociclo $\widehat{\varphi}$, basta integrar la 1-forma

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\Theta} - L^*_{(y_2,y_3,y_4)}\widehat{\Theta} & = & x_2 dx_4 - (y_2 + x_2 + y_3 x_4)dx_4 \\ & = & -(y_2 + y_3 x_4)dx_4. \end{array}$$

El 2-cociclo

$$\widehat{\varphi}((y_2, y_3, y_4), (x_2, x_3, x_4)) = -y_2 x_4 - \frac{1}{2} y_3 {x_4}^2$$

define un grupo de Lie $G = \widehat{G} \times_{\widehat{\varphi}} \mathbb{R}$ que integra el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. En este caso, G es el grupo de Heisenberg

$$H^4 = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & x_4 & \frac{1}{2}x_4^2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_4 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) / x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Luego $\mathfrak{g}$ es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{h}^4$ de H^4.

Apéndice A: Cohomología de Čech

A.1 Prehaces

Un *prehaz* $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X es una función que asigna a cada abierto U de X un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ y a cada inclusión $i_{VU} : V \to U$ un homomorfismo de grupos $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, llamado *homomorfismo de restricción*, que satisface las siguientes propiedades:

a) para cada abierto V de X, la aplicación ρ_{VV} es la identidad;

b) para cada triple $W \subset V \subset U$, se verifica que $\rho_{WV} \circ \rho_{VU} = \rho_{WU}$.

Un *homomorfismo de prehaces* $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una familia de homomorfismos de grupos abelianos $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ que conmutan con los homomorfismos de restricción:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_{VU}"'] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\rho_{VU}"] \\ \mathcal{G}(V) \arrow[r, "f_V"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd} \tag{1.13}$$

A.1.1 Ejemplos

i) Para cada espacio topológico X, se denota $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ el prehaz de las funciones reales continuas sobre X que asigna a cada abierto U de X el grupo abeliano $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ de las funciones reales continuas sobre U. Sustituyendo $\mathbb{R}$ por un grupo topológico abeliano G, se obtiene el prehaz $\mathcal{C}(X, G)$ de las aplicaciones continuas de X en G.

ii) De idéntica forma, si X es una variedad y G es un grupo de Lie abeliano, se define el prehaz $\mathcal{C}^\infty(X, G)$ de las aplicaciones diferenciables de X en G.

A.1.2 Definición

Un prehaz $\mathcal{F}$ se dice

i) *trivial* de fibra G si $\mathcal{F}(U)$ es un grupo abeliano G para cada abierto conexo U de X y $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ es la identidad para cada inclusión $V \subset U$;

ii) *constante* si $\mathcal{F}$ es isomorfo a un prehaz trivial;

iii) *localmente constante* si $\mathcal{F}$ es localmente isomorfo a un prehaz trivial: cada punto de X posee un entorno U tal que el prehaz $\mathcal{F}|_U : V \subset U \mapsto \mathcal{F}(V)$ es constante.

A.1.3 Ejemplo

Para cada espacio topológico conexo X, sea $p : \widetilde{X} \to X$ una cubierta regular de grupo G. Si el grupo G es abeliano, las secciones continuas $s : U \to \widetilde{X}$ de $p : \widetilde{X} \to X$ forman un grupo abeliano para cada abierto U de X y se obtiene un prehaz $\mathcal{S}(\widetilde{X})$, llamado *prehaz de las secciones locales de* $\widetilde{X}$. Si $\widetilde{X}$ es la cubierta trivial $X \times G$, el prehaz $\mathcal{S}(\widetilde{X})$ es constante. En general, la trivialidad local de p garantiza que el prehaz $\mathcal{S}(\widetilde{X})$ es localmente constante.

A.2 Cohomología de Čech

Sean X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X. Para cada $(n+1)$-pla $(i_0, \ldots, i_n)$, se denota $U_{i_0\ldots i_n} = U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_n}$.

A.2.1 Definición

Sea $\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Pi\, \mathcal{F}(U_{i_0\ldots i_n})$ el grupo de las *n-cocadenas de $\mathcal{U}$ con valores en el prehaz $\mathcal{F}$*, es decir, las funciones ω que asignan a cada $(n+1)$-pla $(i_0, \ldots, i_n)$ un elemento de $\omega_{i_0\ldots i_n} \in \mathcal{F}(U_{i_0\ldots i_n})$. Se define un operador coborde $\delta : \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ por:

$$(\delta\omega)_{i_0\ldots i_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \omega_{i_0\ldots\widehat{i_j}\ldots i_{n+1}} \tag{1.14}$$

donde $\omega_{i_0\ldots\widehat{i_j}\ldots i_{n+1}}$ denota abusivamente la imagen de $\omega_{i_0\ldots\widehat{i_j}\ldots i_{n+1}} \in \mathcal{F}(U_{i_0\ldots\widehat{i_j}\ldots i_{n+1}})$ por el homomorfismo de restricción $\rho : \mathcal{F}(U_{i_0\ldots\widehat{i_j}\ldots i_{n+1}}) \to \mathcal{F}(U_{i_0\ldots\ldots i_{n+1}})$. La cohomología del complejo $(\check{C}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \delta)$ se denota $\check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y se denomina *cohomología de Čech del recubrimiento $\mathcal{U}$ con valores en el prehaz $\mathcal{F}$* (véase [BT]).

Un recubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ es un *refinamiento* de $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ y se escribe $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ si existe una aplicación $\phi : J \to I$ tal que $V_j \subset U_{\phi(j)}$. Esta aplicación induce una aplicación de cadenas $\phi^\# : \check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{C}^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ definida por:

$$(\phi^\#\omega)_{j_0\ldots j_n} = \omega_{\phi(j_0)\ldots\phi(j_n)}$$

donde $\omega_{\phi(j_0)\ldots\phi(j_n)}$ denota abusivamente la imagen de $\omega_{\phi(j_0)\ldots\phi(j_n)} \in \mathcal{F}(U_{\phi(j_0)\ldots\phi(j_n)})$ por el homomorfismo de restricción $\rho : \mathcal{F}(U_{\phi(j_0)\ldots\phi(j_n)}) \to \mathcal{F}(V_{j_0\ldots j_n})$. Según puede comprobarse en [BT], la aplicación de cadenas $\phi^\#$ induce un homomorfismo en cohomología $\rho_{\mathcal{V}\mathcal{U}} : \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ que no depende de la aplicación de refinamiento ϕ. Obsérvese que la relación de refinamiento es una relación de orden parcial sobre el conjunto de los recubrimientos abiertos de X. Puesto que dos recubrimientos abiertos de X admiten un refinamiento común, se trata de un conjunto dirigido. En esta situación, para cada $n \in \mathbb{N}$, los grupos de cohomología $\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y los homomorfismos $\rho_{\mathcal{V}\mathcal{U}} : \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^n(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ forman un sistema directo de grupos abelianos.

A.2.2 Definición

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el n-ésimo grupo de *cohomología de Čech de X con valores en el prehaz $\mathcal{F}$* como el límite directo $\check{H}^n(X, \mathcal{F}) = \varinjlim \check{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

A.2.3 Definición

Sea X una variedad diferenciable de dimensión n. Un *buen recubrimiento* $\mathcal{U}$ de X es un recubrimiento abierto localmente finito de X tal que cada intersección finita $U_{i_0\ldots i_n}$ es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$. No sólo toda variedad X admite un buen recubrimiento formado por bolas geodésicas abiertas, sino que los buenos recubrimientos son cofinales en la familia de los recubrimientos abiertos, es decir, cualquier recubrimiento abierto de M admite un buen refinamiento (véase [BT]). Gracias a esta propiedad, se tiene el siguiente resultado (véase [BT]):

A.2.4 Teorema

Sean X una variedad diferenciable, $\mathcal{U}$ un buen recubrimiento de X y G un grupo abeliano. La cohomología de Čech $\check{H}^*(\mathcal{U}, G)$ de $\mathcal{U}$ con valores en G es isomorfa a la cohomología singular $H^*(X, G)$. Por paso al límite, la cohomología de Čech $\check{H}^*(X, G)$ es isomorfa a la cohomología singular $H^*(X, G)$. $\square$

Apéndice B: Fibrados principales de grupo S^1

En este apéndice, se recuerdan algunas definiciones y resultados clásicos sobre fibrados principales de grupo estructural S^1 (véanse [A], [BT], [KN] y [TW]) válidos para todos los fibrados principales de grupo estructural abeliano.

B.1 Atlas fibrados

Un *fibrado principal* $S^1 \to P \xrightarrow{p} M$ *de grupo estructural* S^1 está formado por una variedad diferenciable P, llamada *espacio total*, una variedad diferenciable M, llamada *base*, y una aplicación $p : P \to M$, llamada *proyección*, tales que:

i) existe un *atlas fibrado* $\{(U_i, \psi_i)\}$ formado por un recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de M y una familia de difeomorfismos $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times S^1$, llamados *cartas de trivialidad local*, que hacen conmutativos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times S^1 \arrow[dl, "p_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

ii) para cada par $(i, j) \in I$ tal que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, el cambio de carta

$$\psi_{ij} = \psi_i \circ \psi_j^{-1} : U_{ij} \times S^1 \longrightarrow U_{ij} \times S^1$$

está dado por:

$$\psi_{ij}(x, z) = (x, \tau_{ij}(x).z)$$

donde $\tau_{ij} : U_{ij} \longrightarrow S^1$ es una aplicación diferenciable, llamada *función de transición.*

La acción natural por la derecha de S^1 sobre sí mismo define una acción por la derecha de S^1 sobre cada producto $U_i \times S^1$. La trivialidad local de P permite trasladar esta acción a cada abierto $p^{-1}(U_i)$ de manera que la carta de trivialidad local $\psi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times S^1$ es *equivariante* por la acción de S^1, i.e. $\psi_i(u.z) = \psi_i(u).z$ para cada $u \in p^{-1}(U_i)$ y para cada $z \in S^1$. Puesto que las funciones de transición actúan por la izquierda en cada cambio de carta, estas acciones locales se pegan en una acción libre por la derecha $\varphi : P \times S^1 \to P$. Por compacidad de S^1, la acción φ es propia. Según el criterio de Godement (véase [tD]), el espacio de órbitas P/S^1 está dotado de una estructura de variedad difeomorfa a M y la fibración p se identifica con la proyección canónica de P sobre M. En resumen, se tiene el siguiente resultado:

B.1.1 Proposición

Las estructuras de S^1-fibrado principal sobre P son equivalentes a las acciones libres de S^1 sobre P. $\square$

En general, una acción libre y propia de un grupo de Lie G sobre una variedad P define una estructura de G-fibrado principal sobre P (véanse [A] ó [tD]).

B.1.2 Definición

Un S^1-fibrado principal $p : P \to M$ se dice *trivial* si existe un difeomorfismo equivariante $\psi : P \to M \times S^1$ tal que $p_1 \circ \psi = p$ (donde $p_1 : M \times S^1 \to M$ es la proyección sobre el primer factor). Por otra parte, dos S^1-fibrados principales $p : P \to M$ y $p' : P' \to M$ son *equivalentes* si existe un difeomorfismo equivariante $\psi : P \to P'$ tal que $p' \circ \psi = p$.

B.1.3 Lema

Un S^1-fibrado principal $p : P \to M$ es trivial si y sólo si posee una sección global $s : M \to P$.

Demostración Puesto que la acción de S^1 es libre, la aplicación

$$\Phi : (u, z) \in P \times S^1 \mapsto (u, u.z) \in P \times P$$

es una inmersión inyectiva. Por compacidad de S^1, la imagen $\mathcal{G} = Im\,\Phi$ es una subvariedad embebida cerrada de $P \times P$. En particular, la *aplicación de división* $\delta : (u, u.z) \in \mathcal{G} \mapsto z \in S^1$ es diferenciable. Por tanto, dada una sección global $s : M \to P$, la biyección equivariante $\psi : P \to M \times S^1$ definida por:

$$\psi(u) = (p(u), \delta(s(p(u)), u), \qquad \forall\, u \in P$$

es diferenciable. La inversa

$$\psi^{-1}(x, z) = s(x).z, \qquad \forall\, (x, z) \in M \times S^1$$

también es diferenciable. $\square$

Como consecuencia del lema, las cartas de trivialidad $\psi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times S^1$ están determinadas por secciones locales $s_i : U_i \to P$ y las funciones de transición $\tau_{ij} : U_{ij} \to S^1$ están definidas por:

$$\tau_{ij}(x) = \delta(s_i(x), s_j(x)), \quad \forall\, x \in U_{ij}.$$

Es decir, las funciones de transición está caracterizadas por la condición:

$$s_j(x) = s_i(x).\tau_{ij}(x), \quad \forall\, x \in U_{ij}.$$

B.2 Cociclos fibrados

En la situación anterior, las funciones de transición $\tau_{ij} : U_{ij} \to S^1$ satisfacen las dos siguientes condiciones:

i) para cada $i \in I$, la función $\tau_{ii} = 1$;

ii) si $U_{ijk} \neq \emptyset$, entonces

$$\tau_{ij}(x).\tau_{jk}(x).\tau_{ik}(x)^{-1} = 1 \qquad (2.15)$$

para cada $x \in U_{ijk}$.

B.2.1 Definición

El par $(\{U_i\}, \{\tau_{ij}\})$ se llama *cociclo fibrado* definido por el atlas fibrado $\{(U_i, \psi_i)\}$.

Cualquier cociclo fibrado permite reconstruir el fibrado principal de partida: el espacio total P es el cociente de la unión disjunta $\coprod U_i \times S^1$ por la relación de equivalencia que identifica $(x, z) \in U_i \times S^1$ con $(x, \tau_{ij}.z) \in U_j \times S^1$ y la proyección $p : P \to M$ se obtiene por paso al cociente a partir de la fibración trivial $p_1 : \coprod U_i \times S^1 \to \coprod U_i$.

Sea $\mathcal{C}^\infty(M, S^1)$ el prehaz de las aplicaciones diferenciables de M en S^1. Dado un recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de M por abiertos de trivialidad de p, las funciones de transición τ_{ij} definen una 1-cocadena

$$\tau = \{\tau_{ij}\} \in \Pi\mathcal{C}^\infty(U_{ij}, S^1) = \check{C}^1(\mathcal{U}, S^1)$$

de $\mathcal{U}$ con valores en $\mathcal{C}^\infty(M, S^1)$. La condición (2.15) significa que τ es un 1-cociclo:

$$(\delta\tau)_{ijk} = \tau_{ij}(x).\tau_{jk}(x).\tau_{ik}(x)^{-1} = 1$$

donde la notación multiplicativa sustituye a la notación aditiva de la identidad (1.14). Esto justifica la denominación de cociclo fibrado. En particular, cada cociclo fibrado $(\{U_i\}, \{\tau_{ij}\})$ representa una clase $[\tau] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, S^1))$. Por paso al límite, ésta determina una clase $[\tau] \in \check{H}^1(M, \mathcal{C}^\infty(M, S^1))$.

B.3 Fibrados equivalentes

En este párrafo, se recuerda la clasificación de los fibrados principales de grupo S^1.

B.3.1 Lema

Un S^1-fibrado principal $p : P \to M$ es trivial si y sólo si existen funciones $\mu_i : U_i \to S^1$ tales que:

$$\tau_{ij}(x) = \mu_i(x).\mu_j(x)^{-1}, \qquad \forall\, x \in U_{ij}.$$

Demostración Si $s : M \to P$ es una sección global, las funciones $\mu_i : U_i \to S^1$

$$\psi_i(s(x)) = (x, \mu_i(x)), \quad \forall\, x \in U_i$$

satisfacen la condición:

$$\mu_i(x) = \tau_{ij}(x).\mu_j(x), \quad \forall\, x \in U_{ij}.$$

Recíprocamente, las secciones locales $s_i : U_i \to P$ definidas por

$$s_i(x) = \psi_i^{-1}(x, \mu_i(x)), \quad \forall\, x \in U_i$$

se pegan en una sección global $s : M \to P$. $\Box$

La funciones $\mu_i : U_i \to S^1$ definen una 0-cocadena $\mu = \{\mu_i\} \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, S^1))$ tal que $\delta\mu = \tau$. En otros términos, un S^1-fibrado principal $p : P \to M$ es trivial si y sólo si la clase $[\tau] \in \check{H}^1(M, \mathcal{C}^\infty(M, S^1))$ es nula

B.3.2 Lema

Sean $p : P \to M$ y $p' : P' \to M$ dos S^1-fibrados principales sobre M. Sean $\{\tau_{ij}\}$ y $\{\tau'_{ij}\}$ las funciones de transición relativas a un recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ por abiertos de trivialidad. Entonces los fibrados $p : P \to M$ y $p' : P' \to M$ son equivalentes si y sólo si existen funciones $\mu_i : U_i \to S^1$ tales que:

$$\tau_{ij} = \mu_i(x).\tau'_{ij}(x).\mu_j(x)^{-1}, \qquad \forall\, x \in U_{ij}.$$

Demostración Si $\psi : P \to P'$ es un isomorfismo entre P y P', las funciones $\mu_i : U_i \to S^1$ están determinadas por la condición:

$$s'_i(x) = \psi(s_i(x).\mu_i(x)), \qquad \forall\, x \in U_i$$

donde $s_i : U_i \to P$ y $s'_i : U_i \to P'$ están definidas por $s_i(x) = \psi_i^{-1}(x, 1)$ y $s'_i(x) = (\psi'_i)^{-1}(x, 1)$. Puesto que

$$\begin{aligned} s_j(x) &= \psi^{-1}(s'_j(x)).\mu_j(x)^{-1} \\ &= \psi^{-1}(s'_i(x).\tau'_{ij}(x)).\mu_j(x)^{-1} \\ &= \psi^{-1}(s'_i(x)).\tau'_{ij}(x).\mu_j(x)^{-1} \\ &= s_i(x).(\mu_i(x).\tau'_{ij}(x).\mu_j(x)^{-1}) \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\tau_{ij} = \mu_i(x).\tau'_{ij}(x).\mu_j(x)^{-1}$$

para cada $x \in U_{ij}$. Recíprocamente, las funciones $\mu_i : U_i \to S^1$ permiten definir una equivalencia $\psi : P \to P'$ por:

$$\psi(x, z) = (\psi'_i)^{-1}(x, z.\mu_i(x)^{-1})$$

para cada $(x, z) \in U_i \times S^1$. $\Box$

En las condiciones del lema anterior, los S^1-fibrados principales $p : P \to M$ y $p' : P' \to M$ son equivalentes si y sólo si los 1-cociclos τ y τ' representan una misma clase de $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, S^1))$. Teniendo en cuenta que dos atlas fibrados admiten un refinamiento común, se deduce la siguiente proposición:

B.3.3 Proposición

Los fibrados principales de grupo estructural S^1 y de base M están clasificados por el grupo de cohomología de Čech $\check{H}^1(M, \mathcal{C}^\infty(M, S^1))$. $\square$

Este resultado es válido para cualquier otro grupo de Lie abeliano $G = T^d \times \mathbb{R}^{n-d}$.

B.4 Clase de Euler

Sea $p : P \to M$ un S^1-fibrado principal definido por un cociclo fibrado $(\{U_i\}, \{\tau_{ij}\})$. Sustiyendo el recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ por un buen refinamiento, se puede suponer que las intersecciones finitas de los abiertos U_i son contráctiles. En tal caso, las funciones de transición $\tau_{ij} : U_ij \to S^1$ se levantan en funciones $\widetilde{\tau}_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{R}$ que hacen conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "exp"] \\ U_{ij} \arrow[ur, "\widetilde{\tau}_{ij}"] \arrow[r, "\tau_{ij}"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Para cada $x \in U_{ij}$, el número real $\widetilde{\tau}_{ij}(x)$ es la *coordenada angular* de $\tau_{ij}(x)$ definida módulo $\mathbb{Z}$. Sea

$$\widetilde{\tau} = \{\widetilde{\tau}_{ij}\} \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}))$$

la 1-cocadena de $\mathcal{U}$ con valores en el prehaz $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ definida por estas funciones. La condición de cociclo

$$(\delta\tau)_{ijk} = \tau_{ij}(x), \tau_{jk}(x).\tau_{ik}(x)^{-1} = 1, \quad \forall\, x \in U_{ijk}$$

implica que:

$$(\delta\widetilde{\tau})_{ijk} = \widetilde{\tau}_{ij}(x) + \widetilde{\tau}_{jk}(x) - \widetilde{\tau}_{ik}(x) \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, x \in U_{ijk}.$$

Por tanto,

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{ijk}\} = \{\widetilde{\tau}_{ij} + \widetilde{\tau}_{jk} - \widetilde{\tau}_{ik}\} \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

es un 2-cociclo de $\mathcal{U}$ con valores en el prehaz constante $\mathbb{Z}$. Como consecuencia del lema (B.3.2) y de la definición de $\widetilde{\tau}$, se tiene que la clase $[\varepsilon] \in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ no depende de las diferentes elecciones. Por paso al límite, la clase $[\varepsilon] \in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ determina una clase $\mathcal{E}(P) \in \check{H}^2(M, \mathbb{Z})$. Teniendo en cuenta que la cohomología de Čech $H^2(M, \mathbb{Z})$ es isomorfa a la cohomología singular $H^2(M, \mathbb{Z})$, se tiene la siguiente definición:

B.4.1 Definición

La clase $\mathcal{E}(P) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ se denomina *clase de Euler* del fibrado principal $p : P \to M$ de grupo estructural S^1.

B.4.2 Proposición

Un fibrado principal $p : P \to M$ de grupo estructural S^1 es trivial si y sólo si la clase de Euler $\mathcal{E}(P) = 0$.

Demostración La condición necesaria resulta evidente, ya que la trivialidad del fibrado permite elegir funciones de transición τ_{ij} constantes e idénticas al elemento neutro 1. Recíprocamente, si la clase de Euler $\mathcal{E}(P)$ es nula, la clase $[\varepsilon] \in \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ lo es también para algún recubrimiento $\mathcal{U}$ de M. Por tanto, existe una 1-cocadena $\lambda = \{\lambda_{ij}\} \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ tal que

$$\varepsilon_{ijk} = \widetilde{\tau}_{ij} + \widetilde{\tau}_{jk} - \widetilde{\tau}_{ik} = \lambda_{ij} + \lambda_{jk} - \lambda_{ik} = (\delta\lambda)_{ijk}.$$

Luego la 1-cocadena

$$\widehat{\tau} = \widetilde{\tau} - \lambda = \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}))$$

satisface la condición de cociclo:

$$\delta\widehat{\tau} = \delta\widetilde{\tau} - \delta\lambda = \varepsilon - \delta\lambda = 0.$$

Por tanto, el par $(\mathcal{U}, \{\widehat{\tau}_{ij}\})$ es un cociclo fibrado y define un fibrado principal $\widehat{p} : \widehat{P} \to M$ de grupo estructural $\mathbb{R}$. Puesto que $exp \circ \widehat{\tau}_{ij} = \tau_{ij}$, el morfismo de fibrados principales triviales $id \times exp : \coprod U_i \times \mathbb{R} \to \coprod U_i \times S^1$ pasa al cociente en un morfismo de fibrados principales

$$\begin{tikzcd} \widehat{P} \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\widehat{p}"'] & & P \arrow[dl, "p"] \\ & M. & \end{tikzcd}$$

Ahora bien, el fibrado principal $\widehat{P}$ posee una sección global $\widehat{s} : M \to \widehat{P}$ ya que su grupo estructural $\mathbb{R}$ es contráctil. Por fin, la sección global $s = q \circ \widehat{s} : M \to P$ trivializa el fibrado principal $p : P \to M$. $\square$

B.5 Clasificación de los fibrados principales de grupo S^1

En este párrafo, se recuerda que la clase de Euler clasifica los fibrados principales de grupo estructural S^1. La demostración es análoga a la demostración de la proposición anterior, aunque el argumento final se sustituirá por un argumento directo de carácter cohomológico.

La sucesión exacta corta

$$0 \to \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{exp} S^1 \to 1$$

induce una *sucesión exacta corta de prehaces*

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M, S^1).$$

Si $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un buen recubrimiento de M, se obtiene una sucesión exacta larga de cohomología

$$\ldots \to \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \to \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})) \to \check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, S^1)) \to \check{H}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \to \ldots$$

Por paso al limite, se obtiene una nueva sucesión exacta larga de cohomología

$$\ldots \to \check{H}^n(M, \mathbb{Z}) \to \check{H}^n(M, \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})) \to \check{H}^n(M, \mathcal{C}^\infty(M, S^1)) \to \check{H}^{n+1}(M, \mathbb{Z}) \to \ldots$$

B.5.1 Proposición

El morfismo de conexión delta$_*$: $\check{H}^1(M, \mathcal{C}^\infty(M, S^1)) \to \check{H}^2(M, \mathbb{Z})$ es un isomorfismo.

Demostración De hecho, para cada buen recubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de M, el morfimo de conexión

$$\delta_* : \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, S^1)) \longrightarrow \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

es un isomorfismo.

1) El morfismo δ_* es sobreyectivo. La inclusión de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ permite identificar cada 2-cociclo $\varepsilon = \{\varepsilon_{ijk}\}$ de $\mathcal{U}$ con valores en el prehaz $\mathbb{Z}$ con un 2-cociclo de $\mathcal{U}$ con valores en el prehaz $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Dada una partición de la unidad $\{\rho_i\}$ subordinada al recubrimiento $\mathcal{U}$, se define una 1-cocadena $\widetilde{\tau} = \{\widetilde{\tau}_{ij}\} \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}))$ por:

$$\widetilde{\tau}_{ij} = \sum_k \rho_k \varepsilon_{ijk}.$$

La condición $(\delta\varepsilon)_{ijkh} = \varepsilon_{jkh} - \varepsilon_{ikh} + \varepsilon_{ijh} - \varepsilon_{ijk} = 0$ implica que:

$$\begin{array}{rcl} (\delta\widetilde{\tau})_{ijk} & = & \widetilde{\tau}_{ij} - \widetilde{\tau}_{ik} + \widetilde{\tau}_{jk} \\ & = & \sum_h \rho_h(\varepsilon_{ijh} - \varepsilon_{ikh} + \varepsilon_{jkh}) \\ & = & \sum_h \rho_h \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \end{array}$$

La 1-cocadena $\tau = \{\tau_{ij}\} \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, S^1))$ definida por

$$\tau_{ij} = exp\circ\widetilde{\tau}_{ij}$$

es un 1-cociclo ya que

$$(\delta\tau)_{ijk} = exp\circ(\delta\widetilde{\tau})_{ijk} = exp\circ\varepsilon_{ijk} = 1.$$

Por fin, la clase $[\tau] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, S^1))$ verifica que:

$$\delta_*[\tau] = [\delta\widetilde{\tau}] = [\varepsilon].$$

2) El morfismo δ_* es inyectivo. Si una clase $[\tau] \in \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, S^1))$ verifica que $\delta_*[\tau] = [\varepsilon] = 0$, entonces existe una 1-cocadena $\lambda = \{\lambda_{ij}\} \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$ tal que $\varepsilon = \delta\lambda$. Por tanto, la 1-cocadena

$$\widehat{\tau} = \widetilde{\tau} - \lambda \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}))$$

es un 1-cociclo que se proyecta sobre τ. Ahora bien, dada una partición de la unidad $\{\rho_i\}$ subordinada a $\mathcal{U} = \{U_i\}$, la 0-cocadena $\widehat{\mu} = \{\widehat{\mu}_i\} \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}))$ definida por:

$$\widehat{\mu}_i = -\sum_j \rho_j \widehat{\tau}_{ij}.$$

verifica que $\delta\widehat{\mu} = \widehat{\tau}$. En efecto, la condición

$$0 = (\delta\widehat{\tau})_{ijk} = \widehat{\tau}_{ij} - \widehat{\tau}_{ik} + \widehat{\tau}_{jk}$$

implica que:

$$\begin{array}{rcl}(\delta\widehat{\mu})_{ij} & = & \widehat{\mu}_j - \widetilde{\mu}_i \\ & = & \sum_k \rho_k(-\widehat{\tau}_{jk} + \widehat{\tau}_{ik}) \\ & = & \sum_k \rho_k \widehat{\tau}_{ij} = \widehat{\tau}_{ij}.\end{array}$$

Por tanto, la 0-cocadena $\mu = \{\mu_i\} \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{C}^\infty(M, S^1))$ definida por

$$\mu_i = exp \circ \widehat{\mu}_i$$

verifica que $\delta\mu = \tau$ y el morfismo δ_* es inyectivo. $\square$

B.5.2 Observación

En general, para cada $n \in \mathbb{N}$, el morfismo de conexión

$$\delta_* : \check{H}^n(M, \mathcal{C}^\infty(M, S^1)) \longrightarrow \check{H}^{n+1}(M, \mathbb{Z})$$

es un isomorfismo. En la prueba habitual de la proposición B.5.1 (véase [A]), los prehaces $\mathbb{Z} \to \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(M, S^1)$ se sustituyen por los haces de gérmenes correspondientes

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{C}}^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{C}}^\infty(M, S^1).$$

Estos inducen una sucesión exacta larga de cohomología

$$\check{H}^n(M, \mathbb{Z}) \to \check{H}^n(M, \underset{\sim}{\mathcal{C}}^\infty(M, \mathbb{R})) \to \check{H}^n(M, \underset{\sim}{\mathcal{C}}^\infty(M, S^1)) \to \check{H}^{n+1}(M, \mathbb{Z})$$

En el lenguaje de haces, el pegado de funciones locales mediante una partición de la unidad se traduce de la siguiente forma: el haz $\underset{\sim}{\mathcal{C}}^\infty(M, \mathbb{R})$ es *blando* ("*soft*"en inglés y "*mou*"en francés). En este caso, la cohomología $\check{H}^n(M, \underset{\sim}{\mathcal{C}}^\infty(M, \mathbb{R}))$ es trivial y el morfismo $\delta_* : \check{H}^n(M, \mathcal{C}^\infty(M, S^1)) \to \check{H}^{n+1}(M, \mathbb{Z})$ es un isomorfismo.

B.5.3 Teorema

Dos fibrados principales $p : P \to M$ y $p' : P' \to M$ de estructural grupo S^1 son equivalentes si y sólo las clases de Euler $\mathcal{E}(P)$ y $\mathcal{E}(P')$ son iguales. Es decir, los S^1-fibrados principales sobre M está clasificados por $H^2(M, \mathbb{Z})$.

Demostración Como consecuencia de la proposición B.3.3, los fibrados $p : P \to M$ y $p' : P' \to M$ son equivalentes si y sólo si las clases $[\tau]$ y $[\tau']$ representadas por dos cociclos fibrados (relativos a un mismo recubrimiento como en el lema B.3.2) coinciden en $\check{H}^1(M,\mathcal{C}^\infty(M,S^1))$. Según la construcción de la clase de Euler, el morfismo de conexión

$$\delta_* : \check{H}^1(M,\mathcal{C}^\infty(M,S^1)) \longrightarrow \check{H}^2(M,\mathbb{Z}) \cong H^2(M,\mathbb{Z})$$

envía $[\tau]$ y $[\tau']$ sobre $\mathcal{E}(P)$ y $\mathcal{E}(P')$ respectivamente. Ahora bien, puesto que δ_* es un isomorfismo, los fibrados $p : P \to M$ y $p' : P' \to M$ son equivalentes si y sólo si las clases $\mathcal{E}(P)$ y $\mathcal{E}(P')$ son iguales. $\square$

B.6 Clase de Euler y clase de Chern

Sean $p : P \to M$ un S^1-fibrado principal y $\theta \in \Omega^1(P)$ una 1-forma de conexión sobre P. La 2-forma de curvatura $\Omega \in \Omega^2(M)$ es cerrada y representa una clase de cohomología de De Rham $c(P) = [\Omega] \in H^2_{DR}(M)$, llamada *clase de Chern* del S^1-fibrado principal $p : P \to M$.

La composición del morfismo $j : H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^2(M,\mathbb{R})$ inducido por la inclusión de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ y del isomorfismo de De Rham $I : H^2(M,\mathbb{R}) \to H^2_{DR}(M)$ proporciona un morfismo

$$J = I \circ j : H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^2_{DR}(M).$$

En [BT], se demuestra el siguiente teorema:

B.6.1 Teorema

Sea $p : P \to M$ un fibrado principal de grupo estructural S^1. El morfismo

$$J : H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_{DR}(M)$$

envía la clase de Euler $\mathcal{E}(P)$ en la clase de Chern $c(P)$. $\square$

En lugar de recordar la prueba, se describe la construcción de $c(P)$ a partir de $\mathcal{E}(P)$. Para ello, se consideran las cartas de trivialidad local $\psi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times S^1$. Si dz denota la forma angular sobre S^1 definida por $exp^*dz = dt$ (en otros términos, la forma de Maurer-Cartan de S^1), se consideran las formas angulares $d\alpha_i = \psi_i^*(dz)$. La clase de Euler $\mathcal{E}(P) \in H^2(M,\mathbb{Z}) \cong \check{H}^2(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ está representada por el 2-cociclo

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{ijk}\} = \{\widetilde{\tau}_{ij} + \widetilde{\tau}_{jk} - \widetilde{\tau}_{ik}\}$$

donde $\widetilde{\tau}_{ij}$ es la función coordenada angular asociada a la función de transición τ_{ij}. Las 1-formas $\theta_i \in \Omega^1(U_i)$ definidas por

$$\theta_i = -\sum_j \rho_j d\widetilde{\tau}_{ij}$$

satisfacen la siguiente condición:

$$\theta_j - \theta_i = d\widetilde{\tau}_{ij} = \tau_{ij}^* dz. \tag{2.16}$$

Luego las 2-formas $\Omega_i = d\theta_i$ sobre U_i se pegan en una 2-forma Ω sobre M tal que $J(\mathcal{E}(P)) = [\Omega] \in H^2_{DR}(M)$. Por otra parte, la identidad (2.16) implica que:

$$p^*\theta_j - p^*\theta_i = d\alpha_i - d\alpha_j.$$

Por tanto, las 1-formas de conexión $d\alpha_i + p^*\theta_i$ sobre $p^{-1}(U_i)$ se pegan en una 1-forma de conexión θ sobre P tal que

$$d\theta = d(d\alpha_i + p^*\theta_i) = p^*d\theta_i = \pi^*\Omega.$$

Es decir, la clase $[\Omega] = J(\mathcal{E}(P))$ es la clase de Chern del fibrado principal $p : P \to M$.

B.7 Condición de integrabilidad de Kostant-Soriau-Weil

Una 2-forma cerrada Ω sobre una variedad diferenciable M satisface la *condición de integrabilidad de Kostant-Souriau-Weil* si verifica una de las siguientes condiciones equivalentes:

i) existe un S^1-fibrado principal $p : P \to M$ y una 1-forma de conexión θ sobre P tal que Ω es la 2-forma de curvatura de θ, i.e. $p^*\Omega = d\theta$;

ii) la clase $[\Omega] \in H^2_{DR}(M)$ pertenece a la imagen del morfismo

$$J : H^2(M;\mathbb{Z}) \to H^2_{DR}(M)$$

iii) el *grupo de períodos*

$$Per(\Omega) = \{ \int_z \Omega \,/\, [z] \in H_2(M,\mathbb{Z}) \}$$

es un subgrupo de $\mathbb{Z}$.

La ultima condición de integrabilidad corresponde a la normalización usual de la longitud de S^1. La escritura $Per(\Omega) \subset 2\pi\hbar\mathbb{Z}$ de [K] y [S] corresponde a la elección de círculos de longitud $2\pi\hbar$. Ahora bien, si se puede elegir libremente la longitud de la fibra (incluyendo el caso de longitud infinita), basta que el grupo de períodos $Per(\Omega)$ sea discreto para poder realizar Ω como 2-forma de curvatura de una conexión sobre un fibrado principal de grupo estructural $\mathbb{R}/Per(\Omega)$.

Parte II: Dobles extensiones de álgebras de Lie

1 Doble extensión simpléctica

En esta sección, se describe un procedimiento de construcción de álgebras de Lie simplécticas, llamado *doble extensión simpléctica*, que se debe a A. Medina y J. M. Dardié (véanse [D] y [DM]) y se basa en una construcción previa de A. Medina y P. Revoy (véase [MR]). Eliminando el lenguaje de las álgebras simétricas, se introduce una noción más general de *doble extensión* de un álgebra de Lie.

1.1 Algebras de Lie simplécticas

Un *álgebra de Lie simpléctica* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ es un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión par $2n$ dotada de una forma simpléctica σ, es decir, una 2-forma $\sigma \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$ cerrada y no degenerada (i.e. $d\sigma = 0$ y $\bigwedge^n \sigma \neq 0$). Un *grupo de Lie simpléctico* (G, Σ) es un grupo de Lie G dotado de una forma simpléctica $\Sigma \in \Omega^2_L(G)$ invariante por la izquierda.

1.1.1 Ejemplos

1) El grupo de Lie abeliano $\mathbb{R}^{2n}$ es un grupo de Lie simpléctico dotado de la forma simpléctica usual $\Sigma = \Sigma_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{i+n}$ (respecto del sistema de coordenadas canónico de $\mathbb{R}^{2n}$). El álgebra de Lie $\mathbb{R}^{2n}$ dotada de la forma simpléctica $\sigma = \Sigma_e$ es un álgebra de Lie simpléctica. En general, las álgebras de Lie de los grupos de Lie simplécticos son simplécticas.

2) El grupo $Aff(\mathbb{R})$ de las tranformaciones afines $z \mapsto yz+x$ de $\mathbb{R}$ se identifica con el grupo de las matrices $\left(\begin{smallmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ donde $y \in \mathbb{R}^*$ y $x \in \mathbb{R}$. Si se dota de la forma simpléctica

$$\Sigma = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy,$$

el grupo $Aff(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie simpléctico y su álgebra de Lie $aff(\mathbb{R})$ es un álgebra de Lie simpléctica.

3) El grupo de Heisenberg

$$H^4 = \{ \begin{pmatrix} 1 & x_4 & \frac{1}{2}x_4^2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_4 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / \, x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \, \}$$

dotado de la forma simpléctica

$$\Sigma = (dx_1 - x_4 dx_2 + \frac{1}{2} x_4^2 dx_3) \wedge (dx_2 - x_4 dx_3) + dx_3 \wedge dx_4,$$

es un grupo de Lie simpléctico. Su álgebra de Lie $\mathfrak{h}^4$ es un álgebra de Lie simpléctica dotada de la forma simpléctica $\sigma = \Sigma_e$.

1.1.2 Lema

Sea $(\mathfrak{g}, \sigma)$ un álgebra de Lie simpléctica. Si $\mathfrak{i}$ es un ideal central de $\mathfrak{g}$, el ortogonal simpléctico $\mathfrak{i}^{\perp}$ de $\mathfrak{i}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.

Demostración Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $Z \in \mathfrak{i}$, se tiene que:

$$0 = d\sigma(X, Y, Z) = -\sigma([X, Y], Z) + \sigma([X, Z], Y) - \sigma([Y, Z], X) = -\sigma([X, Y], Z),$$

ya que Z es central y σ es cerrada. Luego $\mathfrak{i}^{\perp}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, ya que el ideal derivado $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ está contenido en $\mathfrak{i}^{\perp}$. $\square$

1.2 Doble extensión simpléctica

Sea $(\mathfrak{g}, \sigma)$ un álgebra de Lie simpléctica. Sean $\mathbb{R}a$ un ideal central de $\mathfrak{g}$ de dimensión 1 y $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathbb{R}a^{\perp}$ su ortogonal simpléctico. Según el lema 1.1.2, $\widehat{\mathfrak{h}}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Puesto que la forma simpléctica σ es no degenerada, existe $b \in \mathfrak{g}$ tal que $\sigma(a, b) = 1$ y $\widehat{\mathfrak{h}}$ es un ideal de codimensión 1. De forma precisa, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}a \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "I"'] & \mathfrak{h} = \mathbb{R}a^{\perp}/\mathbb{R}a \arrow[d, "i"'] \\
\mathbb{R}a \arrow[r, "\mathrm{I}"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "Q"'] & \widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathbb{R}a \arrow[d, "q"'] \\
 & \mathbb{R}b \arrow[r, equal] & \mathbb{R}b.
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Para simplificar las notaciones, las subálgebras de Lie $\mathbb{R}a$ y $\mathbb{R}b$ de $\mathfrak{g}$ se sustituirán por el álgebra de Lie $\mathbb{R}$ de manera que $\mathbb{R}a$ denotará la imagen del morfismo I tal que $\mathrm{I}(1) = a$ y $\mathbb{R}b$ dénotará la imagen de la sección $J : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ tal que $J(1) = b$. Teniendo en cuenta esta modificación, se tienen las siguientes propiedades:

i) la sucesión exacta corta $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{I}} \mathfrak{g} \xrightarrow{\Pi} \widehat{\mathfrak{g}} \to 0$ es una extensión central y su clase está representada por la 2-forma cerrada $\Omega \in \bigwedge^2 \widehat{\mathfrak{g}}^*$ definida por

$$\mathrm{I}(\Omega(V, W)) = \Theta([V, W]) - [\Theta(V), \Theta(W)], \qquad \forall\, V, W \in \widehat{\mathfrak{g}}$$

donde Θ es una sección de Π;

ii) la sucesión exacta corta $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{h}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{h} \to 0$ es una extensión central y su clase está representada por la 2-forma cerrada $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ definida por

$$\iota(\omega(X, Y)) = \theta([X, Y]) - [\theta(X), \theta(Y)], \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{h}$$

donde θ es la sección de π tal que $I\circ\theta = \Theta\circ i$;

iii) la sucesión exacta corta $0 \to \widehat{\mathfrak{h}} \xrightarrow{I} \mathfrak{g} \xrightarrow{Q} \mathbb{R} \to 0$ es un producto semidirecto definido por la sección J de Q (ya que J es un morfismo de álgebras de Lie por razones de dimensión);

iv) la sucesión exacta corta $0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{q} \mathbb{R} \to 0$ es un producto semidirecto definido por la sección $j = \Pi\circ J$ de q.

Por otra parte, el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ está dotada de la forma simpléctica σ_0 que se obtiene por restricción de σ a $\widehat{\mathfrak{h}}$ y reducción simpléctica a $\mathfrak{h}$ (o de manera equivalente, por reducción simpléctica a $\widehat{\mathfrak{g}}$ y restricción a $\mathfrak{h}$). En efecto, la aplicación lineal $I\circ\theta = \Theta\circ i : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo del espacio vectorial subyacente a $\mathfrak{h}$ sobre el ortogonal simpléctico $< a, b >^{\perp}$ del plano simpléctico $< a, b >$ generado por a y b. Luego σ_0 es la restricción de σ a $< a, b >^{\perp}$, i.e. $\sigma_0 = (I\circ\theta)^*\sigma = (\Theta\circ i)^*\sigma$.

1.2.1 Definición

En las condiciones anteriores, se dice que $(\mathfrak{g}, \sigma)$ es una *doble extensión simpléctica* de $(\mathfrak{h}, \sigma_0)$ (véanse [D] y [DM]).

El proceso inverso constituye un método interesante de construcción de nuevas álgebras de Lie simplécticas, llamado *doble extensión simpléctica*. Antes de determinar bajo qué condiciones resulta posible, conviene precisar la doble estructura de extensión central y producto semidirecto de $\mathfrak{g}$.

1.2.2 Descripción de la doble estructura de $\mathfrak{g}$

Una vez fijada la sección θ de π, cada elemento $\widehat{X}$ de $\widehat{\mathfrak{h}}$ admite una única escritura $\widehat{X} = \theta(X) + \iota(t)$ donde $X \in \mathfrak{h}$ y $t \in \mathbb{R}$. De esta manera, se obtiene un isomorfismo de álgebras de Lie entre $\widehat{\mathfrak{h}}$ y la extensión central $\mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbb{R}$ definida por ω (véase § I.2.3). Este isomorfismo permite identificar $\widehat{X} = \theta(X) + \iota(t)$ con el par (X, t). Así pues, el corchete de Lie sobre $\widehat{\mathfrak{h}}$ está dado por:

$$[(X, t), (Y, s)] = ([X, Y], -\omega(X, Y))$$

para cada par $(X, t), (Y, s) \in \widehat{\mathfrak{h}}$.

Por otra parte, una vez fijada la sección j de q, cada elemento V de $\widehat{\mathfrak{g}}$ admite una única escritura $V = i(X) + j(\lambda)$ donde $X \in \mathfrak{h}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. En esta situación, se obtiene un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\widehat{\mathfrak{g}}$ y $\mathfrak{h} \times \mathbb{R}$ que envía $V = i(X) + j(\lambda)$ en el par (X, λ). La estructura de producto semidirecto sobre $\widehat{\mathfrak{g}}$ está definida por la sección j, es decir, por la representación $\rho : \mathbb{R} \to Der(\mathfrak{h})$ dada por:

$$i(\rho(1)(X)) = [j(1), i(X)] = (ad\circ j)(1)(i(X))$$

para cada $X \in \mathfrak{h}$. Ahora bien, esta representación está completamente determinada por la derivación $\delta = \rho(1)$ de $\mathfrak{h}$. Luego $\widehat{\mathfrak{g}}$ es isomorfa al *producto semidirecto* $\mathfrak{h} \rtimes_{\delta} \mathbb{R}$

definido por δ, i.e. el espacio vectorial producto $\mathfrak{h} \times \mathbb{R}$ dotado del corchete de Lie definido por:

$$[(X,\lambda),(Y,\mu)] = ([X,Y] + \lambda\delta(Y) - \mu\delta(X), 0)$$

para cada par $X, Y \in \mathfrak{h}$ y para cada par $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Por último, una vez fijadas las secciones Θ de Π y J de Q, la estructura de extensión central sobre $\mathfrak{g}$ está determinada por la 2-forma cerrada Ω asociada a Θ y la estructura de producto semidirecto sobre $\mathfrak{g}$ está determinada por la representación $\mathrm{R} : \mathbb{R} \to Der(\widehat{\mathfrak{h}})$ dada por:

$$I(\mathrm{R}(1)(\widehat{X})) = [b, I(\widehat{X})] = (ad{\circ}J)(1)(I(\widehat{X}))$$

para cada $\widehat{X} \in \widehat{\mathfrak{h}}$. Como en los casos anteriores, $\mathfrak{g}$ es isomorfa a la extensión central $\widehat{\mathfrak{g}} \times_\Omega \mathbb{R}$ definida por Ω y al producto semidirecto $\widehat{\mathfrak{h}} \rtimes_\Delta \mathbb{R}$ definido por la derivación $\Delta = \mathrm{R}(1)$ de $\widehat{\mathfrak{h}}$. Identificando cada elemento de $\mathfrak{g}$ con un triple (X, t, λ), se tiene que el corchete de Lie sobre $\mathfrak{g}$ admite una doble expresión:

$$[(X,t,\lambda),(Y,s,\mu)] = ([(X,\lambda),(Y,\mu)], -\Omega((X,\lambda),(Y,\mu)))$$

y

$$[(X,t,\lambda),(Y,s,\mu)] = ([(X,t),(Y,s)] + \lambda\Delta(Y,s) - \mu\Delta(X,t), 0).$$

1.3 Representaciones de álgebras de Lie y cohomología

El objetivo del §1.4 es introducir una obstrucción a la existencia de una doble extensión. Como paso previo, será conveniente recordar algunas nociones relacionadas con la cohomología de las álgebras de Lie (véase [G]).

Sean $\mathfrak{a}$ un algébra de Lie y E un $\mathfrak{a}$-módulo, i.e. un espacio vectorial E dotado de una representación de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{a} \to End(E)$. Para cada $X \in \mathfrak{a}$ y para cada $e \in E$, se denota $X \cdot e = \rho(X)(e)$. El espacio $\bigwedge^n \mathfrak{a}^* \otimes E$ de las aplicaciones n-lineales alternadas $\eta : \mathfrak{a} \times \overset{n}{\cdots} \times \mathfrak{a} \to E$ está dotado de una estructura de $\mathfrak{a}$-módulo

$$L : \mathfrak{a} \longrightarrow End(\bigwedge{}^n \mathfrak{a}^* \otimes E) \tag{1.2}$$

definida por:

$$L_X\eta(X_1, \ldots X_n) = X \cdot \eta(X_1, \ldots X_n) - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \eta([X, X_i], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_n).$$

Por analogía con las formas usuales, se define un operador diferencial

$$d : \bigwedge{}^n \mathfrak{a}^* \otimes E \longrightarrow \bigwedge{}^{n+1} \mathfrak{a}^* \otimes E$$

por:

$$\begin{aligned} d\eta(X_1, \ldots, X_n) = \ & \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} X_i \cdot \eta(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{n+1}) \\ & + \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \eta([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.3.1 Definición

El complejo diferencial $(\bigwedge^n \mathfrak{a}^* \otimes E, d)$ se llama *complejo de las formas diferenciales sobre* $\mathfrak{a}$ *con valores en el* $\mathfrak{a}$*-módulo* E y su cohomología $H^n(\mathfrak{a}, E)$ se llama *cohomología de* $\mathfrak{a}$ *con valores en el* $\mathfrak{a}$*-módulo* E. La estructura de $\mathfrak{a}$-módulo sobre $\bigwedge^n \mathfrak{a}^*$ pasa al cociente en una estructura de $\mathfrak{a}$-módulo sobre $H^n(\mathfrak{a}, E)$. El $\mathfrak{a}$-módulo $H^0(\mathfrak{a}, E)$ coincide con el $\mathfrak{a}$*-módulo de los elementos* $\mathfrak{a}$*-invariantes* $E^{\mathfrak{a}} = \{e \in E / X \cdot e$ para cada $X \in \mathfrak{a}\}$.

1.3.2 Ejemplos

1) Si la estructura de $\mathfrak{a}$-módulo sobre E es trivial (i.e. la representación ρ es trivial), entonces la cohomología $H^n(\mathfrak{a}, E)$ coincide con la cohomología de $\mathfrak{a}$ con valores en E definida en § I.2.1.2.

2) Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, la representación adjunta $ad : \mathfrak{h} \to Der(\mathfrak{h})$ define una estructura natural de $\mathfrak{h}$-módulo sobre $\mathfrak{h}$. Sea $H^n(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$ la cohomología del complejo diferencial $(\wedge^* \mathfrak{h}^* \otimes \mathfrak{h}, d)$. Usando la definición, se comprueba fácilmente que:

$$H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \cong Der(\mathfrak{h})/ad(\mathfrak{h}).$$

Cada representación $\rho : \mathbb{R} \to Der(\mathfrak{h})$ define una estructura de $\mathbb{R}$-módulo sobre $\mathfrak{h}$. Ahora bien, según se ha indicado en el párrafo anterior, esta estructura está completamente determinada por la derivación $\delta = \rho(1)$. En esta situación, cada derivación $\delta \in Der(\mathfrak{h})$ define una estructura de $\mathbb{R}$-módulo sobre $\bigwedge^n \mathfrak{h}^*$. En efecto, sea

$$\rho : \mathbb{R} \longrightarrow End(\bigwedge^n \mathfrak{h}^*) \tag{1.4}$$

la representación generada por el endomorfismo $\rho(1) : \bigwedge^n \mathfrak{h}^* \to \bigwedge^n \mathfrak{h}^*$ dado por:

$$\rho(1)(\eta)(X_1, \ldots, X_n) = -\sum_{i=1}^{n} \eta(X_1, \ldots, \delta(X_i), \ldots, X_n)$$

para cada $\eta \in \bigwedge^n \mathfrak{h}^*$ y cada $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{h}$. De hecho, $\rho(1)$ conmuta con la diferencial usual y la representación (1.4) pasa al cociente en una representación

$$\overline{\rho} : \mathbb{R} \longrightarrow End(H^n(\mathfrak{h}, \mathbb{R})) \tag{1.5}$$

que define una estructura de $\mathbb{R}$-módulo sobre $H^n(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$. El siguiente resultado prueba que esta estructura sólo depende de la clase de δ en $H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$:

1.3.3 Lema

Sean $\overline{\rho} : \mathbb{R} \to End(H^n(\mathfrak{h}, \mathbb{R}))$ *y* $\overline{\rho}' : \mathbb{R} \to End(H^n(\mathfrak{h}, \mathbb{R}))$ *las representaciones definidas por dos derivaciones* δ *y* δ' *de* $\mathfrak{h}$. *Si* δ *y* δ' *representan una misma clase de* $H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$, *entonces las representaciones* $\overline{\rho}$ *y* $\overline{\rho}'$ *son iguales.*

Demostración Si $\delta' - \delta = ad(H)$ para algún elemento $H \in \mathfrak{h}$, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} \rho'(1)(\eta) - \rho(1)(\eta) & = & -\sum_{i=1}^{n} \eta(X_1, \ldots, ad(H)(X_i), \ldots, X_n) \\ & = & \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \eta([H, X_i], X_1, \ldots, \ldots, X_n) \\ & = & d\eta(H, X_1, \ldots, X_n) \\ & - & \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \eta([X_i, X_j], H, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots X_n) \\ & = & \sum_{i<j} (-1)^{i+j} i_H \eta([X_i, X_j], \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots X_n) \\ & = & d(i_H\eta)(X_1, \ldots, X_n) \end{array}$$

para cada n-forma cerrada $\eta \in \bigwedge^n \mathfrak{h}^*$. Esto garantiza que $\overline{\rho}'(1) = \overline{\rho}(1)$. $\square$

Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, se define una representación

$$\alpha : Der(\mathfrak{h}) \longrightarrow End(\bigwedge^{n} \mathfrak{h}^*) \tag{1.6}$$

dada por:

$$\alpha(\delta)(\eta) = -\rho(1)(\eta)$$

para cada $\delta \in Der(\mathfrak{h})$ y cada $\eta \in \bigwedge^n \mathfrak{h}^*$. En grado $n = 1$,

$$\alpha(\delta)(\eta) = \eta \circ \delta$$

y en grado $n = 2$,

$$\alpha(\delta)(\eta)(X, Y) = \eta(\delta(X), Y) + \eta(X, \delta(Y))$$

para cada $X, Y \in \mathfrak{h}$. Por otra parte, la representación (1.6) induce una representación

$$\overline{\alpha} : Der(\mathfrak{h}) \to End(H^n(\mathfrak{h}, \mathbb{R})) \tag{1.7}$$

tal que $\overline{\alpha}(\delta)([\eta]) = [\alpha(\delta)(\eta)] = -\overline{\rho}(1)([\eta])$. Como consecuencia del lema 1.3.3, la representación (1.7) pasa al cociente en una nueva representación

$$\widehat{\alpha} : H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \to End(H^n(\mathfrak{h}, \mathbb{R})). \tag{1.8}$$

1.4 Obstrucción a la doble extensión simpléctica

Para caracterizar la existencia de una doble extensión simpléctica, será necesario estudiar algunas propiedades de las extensiones centrales y de los productos semidirectos que intervienen en el diagrama (1.1):

1.4.1 Relación entre las 2-formas ω y Ω

Las extensiones centrales $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{g}} \times_\Omega \mathbb{R}$ y $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R}$ están relacionadas por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r, shift right, "\pi"'] \arrow[d, "I"'] & \mathfrak{h} \arrow[l, shift right, "\theta"'] \arrow[d, "i"'] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{I}"] & \mathfrak{g} \arrow[r, shift right, "\Pi"'] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[l, shift right, "\Theta"'] \end{tikzcd}$$

La elección de las secciones θ y Θ garantiza que $\omega = i^*\Omega$.

1.4.2 Relación entre las derivaciones δ y Δ

Los productos semidirectos $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{h}} \rtimes_{\Delta} \mathbb{R}$ y $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \rtimes_{\delta} \mathbb{R}$ están definidos por sendas derivaciones Δ de $\widehat{\mathfrak{h}}$ y δ de $\mathfrak{h}$. Ambas están relacionadas por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R} & \xrightarrow{\iota} & \widehat{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{h} \\
\| & & \Delta \downarrow & & \delta \downarrow \\
\mathbb{R} & \xrightarrow{\iota} & \widehat{\mathfrak{h}} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{h}.
\end{array}$$

Luego existe una aplicación lineal $\varphi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Delta(X, t) = (\delta(X), \varphi(X))$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ y para cada $X \in \mathfrak{h}$. En particular,

$$\Delta(\theta(X)) = \Delta(X, 0) = (\delta(X), \varphi(X)) = \theta(\delta(X)) + \iota(\varphi(X)).$$

1.4.3 Relación entre las 2-formas ω y σ_0

La representación $\rho : \mathbb{R} \to Der(\mathfrak{h})$ está completamente determinada por la derivación $\delta = \rho(1)$. Según se ha indicado en §1.3, la derivación δ define una nueva representación $\rho : \mathbb{R} \to \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ tal que:

$$\rho(1)(\eta)(X, Y) = -\eta(\delta(X), Y) - \eta(X, \delta(Y))$$

para cada 2-forma $\eta \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ y para cada par $X, Y \in \mathfrak{h}$. Puesto que la 2-forma $\rho(1)(\eta)$ es cerrada (resp. exacta) si η lo es, el espacio vectorial $H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ hereda esta estructura de $\mathbb{R}$-módulo. De esta manera, se definen dos representaciones

$$\alpha : Der(\mathfrak{h}) \to End(\bigwedge^2 \mathfrak{h}^*) \qquad \text{y} \qquad \overline{\alpha} : Der(\mathfrak{h}) \to End(H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}))$$

dadas por:

$$\alpha(\delta)(\eta)(X, Y) = \eta(\delta(X), Y) + \eta(X, \delta(Y)) \qquad \text{y} \qquad \overline{\alpha}(\delta)([\eta]) = [\alpha(\delta)(\eta)]$$

respectivamente. El siguiente resultado precisa la relación existente entre ω y σ_0:

1.4.4 Lema

Sean ω la 2-forma cerrada que define la extensión central $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbb{R}$ y σ_0 la forma simpléctica sobre $\mathfrak{h}$. Entonces se tiene que $\omega = \alpha(\delta)(\sigma_0)$.

Demostración En primer lugar, la imagen de la aplicación lineal $\Theta \circ i : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ coincide con el ortogonal simpléctico del plano simpléctico $< a, b >$ tal que $\sigma(a, b) = 1$. Luego, para cada par $X, Y \in \mathfrak{h}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\omega(X,Y) &= \Omega(i(X),i(Y)) \\
&= \sigma(\Omega(i(X),i(Y))a,b) \\
&= \sigma(\mathrm{I}(\Omega(i(X),i(Y))),b) \\
&= \sigma(\Theta([i(X),i(Y)]) - [\Theta(i(X)),\Theta(i(Y))],b) \\
&= -\sigma([\Theta{\circ}i(X),\Theta{\circ}i(Y)],b) \\
&= \sigma([b,\Theta{\circ}i(X)],\Theta{\circ}i(Y)) + \sigma(\Theta{\circ}i(X),[b,\Theta{\circ}i(Y)]) \\
&= \sigma([b,I{\circ}\theta(X)],I{\circ}\theta(Y)) + \sigma(I{\circ}\theta(X),[b,I{\circ}\theta(Y)])
\end{aligned}$$

ya que $d\sigma = 0$ y $\Theta{\circ}i = I{\circ}\theta$. Teniendo en cuenta la definición de Δ, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\omega(X,Y) &= \sigma(I(\Delta(\theta(X)),I{\circ}\theta(Y)) + \sigma(I{\circ}\theta(X),I(\Delta(\theta(Y))) \\
&= \sigma(I{\circ}\theta{\circ}\delta(X) + I{\circ}\iota{\circ}\varphi(X),I{\circ}\theta(Y)) + \sigma(I{\circ}\theta(X),I{\circ}\theta{\circ}\delta(Y) + I{\circ}\iota{\circ}\varphi(Y)) \\
&= \sigma(I{\circ}\theta(\delta(X)),I{\circ}\theta(Y)) + \sigma(I{\circ}\theta(X),I{\circ}\theta(\delta(Y))) \\
&= (I{\circ}\theta)^*\sigma(\delta(X),Y) + (I{\circ}\theta)^*\sigma(X,\delta(Y)) \\
&= \sigma_0(\delta(X),Y) + \sigma_0(X,\delta(Y)) \\
&= \alpha(\delta)(\sigma_0)(X,Y).
\end{aligned}$$

ya que la imagen de $I{\circ}\theta$ está contenida en el ortogonal simpléctico de la imagen de $I{\circ}\iota{\circ}\varphi$. $\square$

1.4.5 Lema

Un endomorfismo $\Delta : \widehat{\mathfrak{h}} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{h}}$ *definido por* $\Delta(X,t) = (\delta(X),\varphi(X))$ *es una derivación si y sólo si* $d\varphi = \alpha(\delta)(\omega)$.

Demostración Según la definición del corchete de Lie sobre $\widehat{\mathfrak{h}}$, se tiene que:

$$\Delta([(X,t),(Y,s)]) = \Delta([X,Y],-\omega(X,Y)) = (\delta([X,Y]),\varphi([X,Y]))$$

para cada $X,Y \in \mathfrak{h}$ y cada $t,s \in \mathbb{R}$. De la misma forma, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&[\Delta(X,t),(Y,s)] + [(X,t),\Delta(Y,s)] = \\
&[(\delta(X),\varphi(X)),(Y,s)] + [(X,t),(\delta(Y),\varphi(Y))] = \\
&([\delta(X),Y],-\omega(\delta(X),Y)) + ([X,\delta(Y)],-\omega(X,\delta(Y))) = \\
&([\delta(X),Y] + [X,\delta(Y)],-\omega(\delta(X),Y) - \omega(X,\delta(Y))).
\end{aligned}$$

Puesto que δ es una derivación, se deduce que Δ es una derivación si y sólo si

$$d\varphi(X,Y) = -\varphi([X,Y]) = \omega(\delta(X),Y) + \omega(X,\delta(Y)) = \alpha(\delta)(\omega)(X,Y). \qquad \square$$

1.4.6 Definición

En la situación del diagrama (1.1), se dirá que $(\mathfrak{g},\sigma)$ es la *doble extensión simpléctica de* $(\mathfrak{h},\sigma_0)$ *definida por la derivación* δ. La 2-forma cerrada

$$\alpha_\delta = \alpha(\delta)(\omega) = \alpha(\delta)^2(\sigma_0)$$

representa una clase de cohomología

$$[\alpha_\delta] = \overline{\alpha}(\delta)([\omega]) = \overline{\alpha}(\delta)^2([\sigma_0]) \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$$

llamada *obstrucción a la doble extensión simpléctica* de $(\mathfrak{h}, \sigma_0)$ (véanse [D] y [DM]). Por dualidad simpléctica, la derivación $\delta : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ define un endomorfismo $\delta^* : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ tal que

$$\sigma_0(X, \delta(Y)) = \sigma_0(\delta^*(X), Y)$$

para cada par $X, Y \in \mathfrak{h}$. La expresión

$$\alpha_\delta(X, Y) = \alpha(\delta)(\sigma_0)(\delta(X), Y) + \alpha(\delta)(\sigma_0)(X, \delta(Y)) = \sigma_0((\delta + \delta^*)(X), (\delta + \delta^*)(Y))$$

corresponde a la formulación original de [D].

1.4.7 Teorema

Sea $(\mathfrak{h}, \sigma_0)$ un álgebra de Lie simpléctica y δ una derivación de $\mathfrak{h}$. Entonces existe una doble extensión simpléctica $(\mathfrak{g}, \sigma)$ de $(\mathfrak{h}, \sigma_0)$ definida por δ si y sólo si la obstrucción $[\alpha_\delta] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ es nula.

Demostración Si $(\mathfrak{g}, \sigma)$ es una doble extensión simpléctica de $(\mathfrak{h}, \sigma_0)$ definida por δ, la obstrucción $[\alpha_\delta] = 0$ según el lema 1.4.5. Recíprocamente, si la obstruccción $[\alpha_\delta] = 0$, existe una 1-forma $\varphi \in \mathfrak{h}^*$ tal que $d\varphi = \alpha_\delta$. Sean

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{h}} = \mathbb{R} \times_\omega \mathfrak{h} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{h} \to 0$$

la extensión central definida por la 2-forma cerrada ω,

$$0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \rtimes_\delta \mathbb{R} \xrightarrow{q} \mathbb{R} \to 0$$

el producto semidirecto definido por la derivación δ y

$$0 \to \widehat{\mathfrak{h}} \xrightarrow{I} \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \rtimes_\Delta \mathbb{R} \xrightarrow{Q} \mathbb{R} \to 0$$

el producto semidirecto definido por la derivación

$$\Delta(X, t) = (\delta(X), \varphi(X)).$$

Así pues, se tiene un diagrama conmutativo conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "I"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "i"'] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{I}"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "Q"'] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[d, "q"'] \\
& \mathbb{R} \arrow[r, equal] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

donde la sucesión horizontal $\mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{I}} \mathfrak{g} \xrightarrow{\Pi} \widehat{\mathfrak{g}}$ es exacta (ya que las restantes sucesiones horizontales o verticales lo son) y central (ya que Δ se anula sobre $Ker\,\pi$). Por último, suponiendo que $\mathfrak{h}$ es ortogonal al plano simpléctico $< a, b >$, las identidades $\sigma(X, Y) = \sigma_0(X, Y)$ si $X, Y \in \mathfrak{h}$ y $\sigma(a, b) = 1$ definen una 2-forma simpléctica σ sobre $\mathfrak{g}$. En resumen, $(\mathfrak{g}, \sigma)$ es una doble extensión simpléctica de $(\mathfrak{h}, \sigma_0)$. $\square$

1.5 Algebras de Lie nilpotentes

En primer lugar, se caracterizan las dobles extensiones simplécticas nilpotentes. Este resultado se usará para probar que cualquier álgebra de Lie simpléctica nilpotente se obtiene por doble extensión simpléctica iterada a partir del álgebra de Lie trivial (véanse [MR] y [DM]).

1.5.1 Proposición

Sea $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *una doble extensión simpléctica de* $(\mathfrak{h}, \sigma_0)$ *definida por una derivación* δ *de* $\mathfrak{h}$*. Entonces* $\mathfrak{g}$ *es nilpotente si y sólo si* $\mathfrak{h}$ *y* δ *son nilpotentes.*

Demostración Para probar la condición necesaria, se comienza por observar que $\mathfrak{h}$ es nilpotente si $\mathfrak{g}$ lo es. Por otra parte, $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si $ad(Z)$ es un endomorfismo nilpotente para cada $Z \in \mathfrak{g}$ (véase el corolario 11.12 de [SW]). Para simplificar la escritura, cada elemento $X \in \mathfrak{h}$ se identificará con su imagen $(\Theta \circ i)(X) \in \mathfrak{g}$ y se escribirá $Z = X + ta + \lambda b$ en lugar de $Z = (\Theta \circ i)(X) + \mathrm{I}(t) + J(\lambda) = (\Theta \circ i)(X) + ta + \lambda b$. De manera análoga, se escribirá abusivamente $X + \lambda b$ en lugar de $i(X) + j(\lambda)$ para designar a cada elemento de $\widehat{\mathfrak{g}}$. Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces $ad(b)$ es nilpotente, es decir, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $ad(b)^m = 0$. En particular, se tiene que:

$$0 = ad(b)^m(X) = \varphi(\delta^{m-1}(X))a + \delta^m(X)$$

para cada $X \in \mathfrak{h}$. Luego $\delta^m = 0$ y δ es nilpotente. Recíprocamente, hay que probar que $ad(Z)$ es nilpotente para cada $Z \in \mathfrak{g}$. Para eso, se procede en dos etapas:

1) Para cada $X + \lambda b \in \widehat{\mathfrak{g}}$, $ad(X + \lambda b)$ es un endomorfismo nilpotente de $\widehat{\mathfrak{g}}$. Este endomorfismo está dado por:

$$ad(X + \lambda b)(Y + \mu b) = ad(X)(Y) + \lambda\delta(Y) - \mu\delta(X).$$

Puesto que $ad(X + \lambda b)$ toma valores en $\mathfrak{h}$, bastará probar que la restrición

$$ad(X + \lambda b)\,|_{\mathfrak{h}} = ad(X) + \lambda\delta$$

es nilpotente. Ahora bien, puesto que $\mathfrak{h}$ es nilpotente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$ad(X_1) \dots ad(X_n) = 0$$

para cada n-pla $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{h}$. Por otra parte, la derivación δ es nilpotente y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\delta^m = 0$. De ambas condiciones, se deduce que:

$$(ad(X) + \lambda\delta)^{nm} = 0.$$

En efecto, puesto que δ es una derivación, se tiene que:

$$\delta \circ ad(X) = ad(X) \circ \delta + ad(\delta(X))$$

y $(ad(X) + \lambda\delta)^{nm}$ es una suma de términos del tipo

$$\lambda^{nm-q} ad(\delta^{i_1}(X)) \circ \dots \circ ad(\delta^{i_q}(X))\delta^p \tag{1.9}$$

donde $i_1 + \ldots + i_q = nm - p - q$. Además, cada término (1.9) verifica:

a) si $p \geq m$, entonces $\delta^p = 0$;

b) si $q \geq n$, entonces $ad(\delta^{i_1}(X)) \circ \ldots \circ ad(\delta^{i_q}(X)) = 0$;

c) si $p < m$ y $q < n$, entonces $i_1 + \ldots + i_q > (n-1)(m-1) \geq q(m-1)$ y $\delta^{i_j} = 0$ para algún exponente i_j.

En resumen, los términos (1.9) son nulos y $(ad(X) + \lambda\delta)^{nm} = 0$.

2) Para cada $Z = X + ta + \lambda b \in \mathfrak{g}$, $ad(Z)$ es un endomorfismo es nilpotente de $\mathfrak{g}$. Este endomorfismo está dado por:

$$ad(X + ta + \lambda b)(Y + sa + \mu b) = ad(X + \lambda b)(Y + \mu b) - B(X + \lambda b, Y + \mu b)a.$$

Puesto que $ad(X + \lambda b)$ es un endomorfismo nilpotente y b es central, se tiene que:

$$\begin{aligned} &ad(X + ta + \lambda b)^{p+1}(Y + sa + \mu b) = \\ &ad(X + \lambda b)^{p+1}(Y + \mu b) - B(X + \lambda b, ad(X + \lambda b)^p(Y + \mu b)) = 0, \end{aligned}$$

para algún $p \in \mathbb{N}$. $\square$

1.5.2 Teorema

Cualquier álgebra de Lie simpléctica nilpotente $(\mathfrak{g}, \sigma)$ se obtiene por doble extensión iterada a partir del álgebra de Lie trivial.

Demostración Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, el centro $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$ y $\mathfrak{g}$ contiene un ideal central de dimension 1. La construcción del §1.1 proporciona un álgebra de Lie simpléctica $(\mathfrak{h}, \sigma_o)$ de dimensión $dim\ \mathfrak{g} - 2$. Según la proposición anterior, $\mathfrak{h}$ es nilpotente (y la derivación δ también lo es). Reiterando este proceso, se obtendrá un álgebra de Lie trivial en un número finito de pasos (igual a $dim\ \mathfrak{g}/2$). $\square$

1.6 Casos particulares

En primer lugar, se caracterizan las álgebras de Lie simplécticas que son doble extensión simpléctica de un álgebra de Lie simpléctica abeliana (véanse [D] y [DM]):

1.6.1 Proposición

Sea $(\mathfrak{g}, \sigma)$ una doble extensión simpléctica de $(\mathbb{R}^{2n}, \sigma_0)$ definida por una derivación δ de $\mathbb{R}^{2n}$. Entonces el ideal $\widehat{\mathfrak{h}}$ es isomorfo al álgebra abeliana $\mathbb{R}^{2n+1}$ (resp. al álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}^{2n+1}$) si y sólo si $\delta \in Sp(\mathbb{R}^{2n}, \sigma_0)$, es decir, si δ es un endomorfismo de $\mathbb{R}^{2n}$ que conserva la forma simpléctica σ_0 (resp. $\delta + \delta^*$ es un endomorfismo inversible de $\mathbb{R}^{2n}$). Además $(\mathfrak{g}, \sigma)$ verifica una de estas dos condiciones. Por otra parte, si un álgebra de Lie simpléctica $(\mathfrak{g}, \sigma)$ contiene un ideal abeliano $\widehat{\mathfrak{h}}$ (resp. un ideal $\widehat{\mathfrak{h}}$ isomorfo a un álgebra de Heisenberg) de codimensión 1 cuyo ortogonal simpléctico $\widehat{\mathfrak{h}}^\perp$ es central, entonces $(\mathfrak{g}, \sigma)$ es una doble extensión simpléctica de $(\mathbb{R}^{2n}, \sigma_0)$ definida por un endomorfismo simpléctico $\delta \in Sp(\mathbb{R}^{2n}, \sigma_0)$ (resp. un endomorfismo δ de $\mathbb{R}^{2n}$ tal que $\delta + \delta^*$ es inversible).

Demostración Sea $(\mathfrak{g}, \sigma)$ un álgebra de Lie simpléctica que contiene un ideal $\widehat{\mathfrak{h}}$ de codimension 1. El ortogonal simpléctico $\widehat{\mathfrak{h}}^{\perp}$ es un ideal de dimensión 1 contenido en $\widehat{\mathfrak{h}}$. Si $\widehat{\mathfrak{h}}^{\perp}$ es un ideal central de $\mathfrak{g}$, entonces $(\mathfrak{g}, \sigma)$ admite una estructura de doble extensión simpléctica.

i) Si $\widehat{\mathfrak{h}}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{2n+1}$, la estructura de doble extensión simpléctica está dada por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{R}^{2n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d] \\
\mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[d] \\
& \mathbb{R} \arrow[r, equal] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

En este caso, la 2-forma cerrada $\omega = \alpha(\delta)(\sigma_0) = 0$. Por otra parte, si σ_0 y $\omega = \alpha(\delta)(\sigma_0)$ se expresan en forma matricial respecto de una base simpléctica de $\mathbb{R}^{2n}$, se tiene una expresión

$$\omega = \alpha(\delta)(\sigma_0) = \delta^t \sigma_0 + \sigma_0 \delta = \delta^t J + J\delta = J(\delta + \delta^*)$$

donde $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix} \right)$ y $\delta^* = J\delta^t J^t$. Luego $\delta^t J + J\delta = 0$, es decir, $\delta \in Sp(\mathbb{R}^{2n}, \sigma_0)$. Procediendo en sentido inverso, se deduce que cualquier doble extensión simpléctica $(\mathfrak{g}, \sigma)$ de $(\mathbb{R}^{2n}, \sigma_0)$ definida por un endomorfismo simpléctico $\delta \in Sp(\mathbb{R}^{2n}, \sigma_0)$ contiene un ideal abeliano $\widehat{\mathfrak{h}}$ de codimensión 1 (cuyo ortogonal simpléctico $\widehat{\mathfrak{h}}^{\perp}$ es un ideal central de dimensión 1).

ii) Si $\widehat{\mathfrak{h}}$ es isomorfo a un álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}^{2n+1}$, la estructura de doble extensión simpléctica viene dada por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{h}^{2n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d] \\
\mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[d] \\
& \mathbb{R} \arrow[r, equal] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

En este caso, la 2-forma cerrada $\omega = \alpha(\delta)(\sigma_0)$ es no degenerada. La expresión $\omega = J(\delta + \delta^*)$ garantiza que esto ocurre si y sólo el endomorfismo $\delta + \delta^*$ es inversible.

Por último, como consecuencia de la clasificación de las extensiones centrales de $\mathbb{R}^{2n}$, cualquier doble extensión simpléctica de $(\mathbb{R}^{2n}, \sigma_0)$ es de uno de los dos tipos descritos. □

Por otra parte, la obstrucción a la doble extensión simpléctica admite una formulación bastante simple en dimension 2:

1.6.2 Lema

Sean $(\mathfrak{h}, \sigma_0)$ *un álgebra de Lie simpléctica de dimensión* 2 *y* δ *una derivación de* $\mathfrak{h}$. *Si* $tr(\delta)$ *denota la traza de* δ, *entonces la* 2*-forma cerrada* $\alpha_\delta = tr(\delta)^2\sigma_0$ *representa la obstrucción a la doble extensión simpléctica de* $(\mathfrak{h}, \sigma_0)$.

Demostración Sea $\{X, Y\}$ una base simpléctica de $\mathfrak{h}$. La identidad

$$\omega(X, Y) = \sigma_0(\delta(X), Y) + \sigma_0(X, \delta(Y)) = tr(\delta)$$

garantiza que $\omega = \alpha(\delta)(\sigma_0) = tr(\delta)\sigma_0$. De la misma forma, se tiene que:

$$\alpha_\delta = \alpha(\delta)(\omega) = tr(\delta)\omega = tr(\delta)^2\sigma_0. \quad \square$$

1.6.3 Proposición

Sean $(\mathfrak{h}, \sigma_0)$ *un álgebra de Lie simpléctica de dimensión 2 y* δ *una derivación de* $\mathfrak{h}$. *Si* $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^2$, *la obstrucción a la doble extensión simpléctica es nula si y sólo si* $tr(\delta) = 0$. *Si* $\mathfrak{h} = aff(\mathbb{R})$, *la obstrucción es nula.*

Demostración Según el lema anterior, la clase $tr(\delta)^2[\sigma_0] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ es la obstrucción a la doble extensión simpléctica. Si $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^2$, la clase $[\sigma_0] \neq 0$ y la obstrucción es nula si y sólo si $tr(\delta) = 0$. Si $\mathfrak{h} = aff(\mathbb{R})$, la forma simpléctica $\sigma_0 = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy$ posee una primitiva invariante por la izquierda $\frac{1}{y} dx$. Luego la clase $[\sigma_0] = 0$. De hecho, se tiene que $H^2(aff(\mathbb{R}), \mathbb{R}) = 0$. $\square$

Ninguna doble extensión simpléctica de $(\mathbb{R}^2, \sigma_0)$ contiene un ideal de codimensión 1 isomorfo al álgebra de Lie de Heisenberg. En caso contrario, como consecuencia de la proposición 1.6.1, el endomorfismo $\delta + \delta^*$ sería inversible. Sin embargo, según la proposición 1.6.3, el endomorfismo $\delta + \delta^*$ es nulo .

2 Doble extensión de álgebras de Lie

En esta sección, se introduce una noción de *doble extensión* para las álgebras de Lie abstractas que generaliza la noción de doble extensión simpléctica definida en [D] y [DM]. También se dará una nueva formulación de la obstrucción a la doble extensión en términos de sucesión espectral de Hochschild-Serre.

2.1 Doble extensión algebraica

La siguiente definición extiende la definición de [D] y [DM] al caso de las álgebras de Lie arbitrarias:

2.1.1 Definición

Se dirá que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una *doble extensión* de un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ si se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "I"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "i"'] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{I}"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "Q"'] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[d, "q"'] \\
& \mathbb{R} \arrow[r, equal] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

donde las sucesiones exactas cortas

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{h}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{h} \to 0 \tag{2.1}$$

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{I}} \mathfrak{g} \xrightarrow{\Pi} \widehat{\mathfrak{g}} \to 0 \tag{2.2}$$

son extensiones centrales y las sucesiones exactas cortas

$$0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{q} \mathbb{R} \to 0$$

$$0 \to \widehat{\mathfrak{h}} \xrightarrow{I} \mathfrak{g} \xrightarrow{Q} \mathbb{R} \to 0$$

son productos semidirectos. Si Θ es una sección de Π y θ es la sección de π tal que $I \circ \theta = \Theta \circ i$, la 2-forma cerrada $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ definida por:

$$\iota(\omega(X,Y)) = \theta([X,Y]) - [\theta(X), \theta(Y)], \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{h},$$

y la 2-forma cerrada $\Omega \in \bigwedge^2 \widehat{\mathfrak{g}}^*$ definida por:

$$\mathrm{I}(\Omega(V,W)) = \Theta([V,W]) - [\Theta(V), \Theta(W)], \qquad \forall\, V, W \in \widehat{\mathfrak{g}}$$

representan las clases de las extensiones centrales (2.1) y (2.2) respectivamente. Es decir, las álgebras de Lie $\widehat{\mathfrak{h}}$ y $\mathfrak{g}$ son isomorfas a los modelos $\mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R}$ y $\widehat{\mathfrak{g}} \times_\Omega \mathbb{R}$ respectivamente. Las álgebras de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ y $\mathfrak{g}$ son isomorfas a los productos semidirectos $\mathfrak{h} \rtimes_\delta \mathbb{R}$ y $\widehat{\mathfrak{h}} \rtimes_\Delta \mathbb{R}$ definidos por las derivaciones δ y Δ dadas por:

$$i(\delta(X)) = [j(1), i(X)], \qquad \forall, X \in \mathfrak{h}$$

y

$$I(\Delta(\widehat{X})) = [J(1), I(\widehat{X})], \qquad \forall\, \widehat{X} \in \widehat{\mathfrak{h}}$$

donde J es una sección de Q y j es la sección $\Pi \circ J$ de q. En esta situación, se dirá que $\mathfrak{g}$ es una *doble extensión de* $\mathfrak{h}$ *definida por* ω *y* δ.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie tal que $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$, cualquier ideal central de dimensión 1 determina una extensión central

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{I}} \mathfrak{g} \xrightarrow{\Pi} \widehat{\mathfrak{g}} \to 0$$

Por otra parte, el ideal derivado de $\widehat{\mathfrak{g}}$ determina una nueva extensión

$$0 \to [\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{g}}] \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}/[\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{g}}] \to 0$$

donde $\widehat{\mathfrak{g}}/[\widehat{\mathfrak{g}},\widehat{\mathfrak{g}}]$ es un álgebra de Lie abeliana. Si $\widehat{\mathfrak{g}}/[\widehat{\mathfrak{g}},\widehat{\mathfrak{g}}] \neq 0$, entonces existe un morfismo sobreyectivo de álgebras de Lie $q : \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathbb{R}$ y se obtiene un producto semidirecto

$$0 \to \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{q} \mathbb{R} \to 0.$$

Estas dos sucesiones exactas cortas se completan en una doble extensión:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "I"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "i"'] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{I}"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "Q"'] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[d, "q"'] \\
 & \mathbb{R} \arrow[r, equal] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

donde $Q = q \circ \Pi$ y $\widehat{\mathfrak{h}} = Ker\, Q$. Puesto que cualquier doble extensión verifica ambas condiciones, se tiene el siguiente resultado:

2.1.2 Proposición

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ posee una estructura de doble extensión si y sólo si el centro $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$ y el álgebra de Lie abeliana $\widehat{\mathfrak{g}}/[\widehat{\mathfrak{g}},\widehat{\mathfrak{g}}] \neq 0$ donde $\widehat{\mathfrak{g}}$ es el cociente de $\mathfrak{g}$ por algún ideal central de dimensión 1. $\square$

En estas condiciones, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no puede ser semisimple ya que su centro $Z(\mathfrak{g})$ no es trivial. Tampoco el álgebra de Lie cociente $\widehat{\mathfrak{g}}$ puede ser semisimple ya que $\widehat{\mathfrak{g}} \neq [\widehat{\mathfrak{g}},\widehat{\mathfrak{g}}]$. Más adelante, se probará que cualquier álgebra de Lie resoluble de dimensión ≥ 2 con centro no trivial se obtiene por doble extensión iterada a partir de un álgebra de Lie resoluble con centro trivial o de $\mathbb{R}$ (véase §2.3).

2.2 Obstrucción a la doble extensión algebraica

En este párrafo, se construye una obstrucción a la doble extensión por medio de la 2-forma cerrada ω y la derivación δ. Sea $\rho : \mathbb{R} \to Der(\mathfrak{h})$ la representación definida por $\rho(1) = \delta$. Como en el caso simpléctico, esta estructura de $\mathbb{R}$-módulo sobre $\mathfrak{h}$ induce una estructura de $\mathbb{R}$-módulo sobre $\bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$. En efecto, sea $\rho : \mathbb{R} \to \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ la representación definida por:

$$\rho(1)(\omega)(X,Y) = -\omega(\delta(X),Y) - \omega(X,\delta(Y))$$

para cada 2-forma $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ y para cada par $X, Y \in \mathfrak{h}$. Puesto que $\rho(1)$ conmuta con la diferencial, la estructura de $\mathbb{R}$-módulo sobre $\bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ pasa al cociente en una estructura de $\mathbb{R}$-módulo sobre $H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ (véase §1.3). Así pues, se tienen dos representaciones

$$\alpha : Der(\mathfrak{h}) \to End(\bigwedge^2 \mathfrak{h}^*) \qquad \text{y} \qquad \overline{\alpha} : Der(\mathfrak{h}) \to End(H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}))$$

dadas por:

$$\alpha(\delta)(\omega)(X,Y) = -\rho(1)(\omega)(X,Y) = \omega(\delta(X),Y) + \omega(X,\delta(Y))$$

y

$$\overline{\alpha}([\omega]) = [\alpha(\delta)(\omega)].$$

2.2.1 Definición

Sean $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie, ω una 2-forma cerrada sobre $\mathfrak{h}$ y δ una derivación de $\mathfrak{h}$. La 2-forma cerrada $\alpha_{\omega,\delta} = \alpha(\delta)(\omega)$ representa una clase

$$[\alpha_{\omega,\delta}] = \overline{\alpha}(\delta)([\omega]) \in H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R})$$

llamada *obstrucción a la doble extensión* de $\mathfrak{h}$ definida por ω y δ.

2.2.2 Teorema

Un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ admite una doble extensión $\mathfrak{g}$ si y sólo si existe una 2-forma cerrada ω sobre $\mathfrak{h}$ y una derivación δ de $\mathfrak{h}$ tales que la obstrucción $[\alpha_{\omega,\delta}] \in H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ es nula.

Demostración Sea $\mathfrak{g}$ una doble extensión de $\mathfrak{h}$ definida por una 2-forma cerrada ω sobre $\mathfrak{h}$ y por una derivación δ de $\mathfrak{h}$. Luego $\mathfrak{g}$ es isomorfa al producto semidirecto $\widehat{\mathfrak{h}} \rtimes_\Delta \mathbb{R}$ definido por una derivación Δ de $\widehat{\mathfrak{h}}$. Como en el caso simpléctico (véase §1.4.2), la derivación Δ está dada por

$$\Delta(X,t) = (\delta(X),\varphi(X)), \qquad \forall\,(X,t) \in \widehat{\mathfrak{h}},$$

donde φ es una 1-forma sobre $\mathfrak{h}$. Teniendo en cuenta que el lema 1.4.5 sigue siendo válido en este caso, se deduce que $\alpha_{\omega,\delta} = d\varphi$ y la obstrucción $[\alpha_{\omega,\delta}] \in H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ es nula. Recíprocamente, si la obstrucción es nula, la construcción del teorema 1.4.7 permite dotar a $\mathfrak{g}$ de una estructura de doble extensión de $\mathfrak{h}$ definida por ω y δ. $\square$

2.3 Algebras de Lie resolubles

Tal y como sucede en el caso simpléctico, se tiene la siguiente caracterización:

2.3.1 Proposición

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie obtenida por doble extensión de un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{h}$ definida por una derivación δ de $\mathfrak{h}$. Entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si δ es nilpotente. $\square$

2.3.2 Teorema

Toda álgebra de Lie nilpotente se obtiene por doble extensión iterada a partir del álgebra de Lie trivial o de $\mathbb{R}$.

Demostración De la misma manera que en el caso simpléctico, cualquier álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ se obtiene por doble extensión a partir de un álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{h}$ de dimensión $dim\ \mathfrak{g} - 2$ (véase el teorema 1.5.2). Sólo hay una diferencia: $\mathfrak{g}$ es una doble extensión iterada de $\{0\}$ si la dimensión de $\mathfrak{g}$ es par y una doble extensión iterada de $\mathbb{R}$ si la dimensión de $\mathfrak{g}$ es impar. $\square$

2.3.3 Ejemplo

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de dimensión 5 generada por una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y dotada del corchete de Lie

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_2] = e_3\\
&[e_1, e_3] = e_4\\
&[e_5, e_1] = e_2 + e_3 + e_4\\
&[e_5, e_2] = e_3 + e_4\\
&[e_5, e_3] = e_4.
\end{aligned}$$

donde e_4 es un elemento central de $\mathfrak{g}$. Resulta claro que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente cuyo centro $Z(\mathfrak{g})$ está generado por e_4. Se considera la extensión central

$$\mathbb{R} =< e_4 >\longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}} =< \widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_3, \widehat{e}_5 >$$

tal que:

$$\begin{aligned}
&[\widehat{e}_1, \widehat{e}_2] = \widehat{e}_3\\
&[\widehat{e}_5, \widehat{e}_1] = \widehat{e}_2 + \widehat{e}_3\\
&[\widehat{e}_5, \widehat{e}_2] = \widehat{e}_3.
\end{aligned}$$

El ideal derivado $[\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{g}}]$ está generado por $\widehat{e}_2$ y $\widehat{e}_3$ y el álgebra de Lie abeliana $\widehat{\mathfrak{g}}/[\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{g}}]$ está generada por dos elementos $\widehat{\widehat{e}}_1$ y $\widehat{\widehat{e}}_5$. De hecho, el álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ es isomorfa al producto semidirecto del álgebra de Heisenberg $\mathfrak{h}^3 =< \widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_3 >$ por $\mathbb{R} =< \widehat{\widehat{e}}_5 >$ definido por la derivación

$$\begin{array}{rclcl}
\delta(\widehat{e}_1) & = & [\widehat{e}_5, \widehat{e}_1] & = & \widehat{e}_2 + \widehat{e}_3\\
\delta(\widehat{e}_2) & = & [\widehat{e}_5, \widehat{e}_2] & = & \widehat{e}_3.
\end{array}$$

De esta manera, se tiene el siguiente diagrama de doble extensión:

$$\begin{tikzcd}
< e_4 > = \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{h}} = <e_1,e_2,e_3,e_4> \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{h}^3 = <\widehat{e}_1,\widehat{e}_2,\widehat{e}_3> \arrow[d] \\
< e_4 > = \mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathfrak{g}} = <\widehat{e}_1,\widehat{e}_2,\widehat{e}_3,\widehat{e}_5> \arrow[d] \\
 & \mathbb{R} = <\widehat{\widehat{e}}_5> \arrow[r, equal] & \mathbb{R} = <\widehat{\widehat{e}}_5>
\end{tikzcd}$$

Puesto que $\widehat{e}_3$ un elemento central de $\mathfrak{h}^3$, la sucesión exacta corta

$$< \widehat{e}_3 >= \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{h}^3 \longrightarrow \mathfrak{h}^3/\mathbb{R} =< \widehat{\widehat{e}}_1, \widehat{\widehat{e}}_2 >$$

es una extensión central del álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{h}^3/\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$. Así pues, se tiene un nuevo diagrama de doble extensión:

$$\begin{tikzcd}
<\widehat{e}_3> = \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{R} = <\widehat{e}_1,\widehat{e}_3> \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} = <\widehat{\widehat{e}}_1> \arrow[d] \\
<\widehat{e}_3> = \mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{h}^3 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}^2 = <\widehat{\widehat{e}}_1,\widehat{\widehat{e}}_2> \arrow[d] \\
 & \mathbb{R} = <\widehat{\widehat{e}}_2> \arrow[r, equal] & \mathbb{R} = <\widehat{\widehat{e}}_2>
\end{tikzcd}$$

Luego $\mathfrak{g}$ es una doble extensión iterada de $\mathbb{R}$.

2.3.4 Teorema

Cualquier doble extensión de un álgebra de Lie resoluble es resoluble. Recíprocamente, cualquier álgebra de Lie resoluble de dimensión ≥ 2 con centro no trivial se obtiene por doble extensión a partir de un álgebra de Lie resoluble con centro trivial o no.

Demostración La primera afirmación es evidente. En cuanto a la segunda, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie resoluble y el centro $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$, entonces el cociente de $\mathfrak{g}$ por un ideal central de dimensión 1 es un álgebra de Lie resoluble $\widehat{\mathfrak{g}}$ de dimensión $dim\ \widehat{\mathfrak{g}} = dim\ \mathfrak{g} - 1 \geq 1$. Luego $\widehat{\mathfrak{g}}/[\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{g}}]$ es no trivial. Según la proposición 2.1.2, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una doble extensión de un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Este álgebra de Lie también es resoluble, ya que se trata de un ideal de $\widehat{\mathfrak{g}}$. $\square$

2.3.5 Observación

Este proceso se puede iterar salvo si $Z(\mathfrak{h}) = 0$ ó $\mathfrak{h} = \mathbb{R}$. Luego cualquier álgebra de Lie resoluble de dimensión ≥ 2 con centro no trivial se obtiene por doble extensión iterada a partir de un álgebra de Lie resoluble con centro trivial o de $\mathbb{R}$.

2.4 Sucesión espectral de Hochschild-Serre

El objetivo de los siguientes párrafos es reformular la obstrucción a la doble extensión algebraica por medio de la sucesión espectral de Hochschild-Serre (véase [HS]) asociada a una sucesión exacta corta de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow \mathfrak{i} \xrightarrow{i} \mathfrak{a} \xrightarrow{q} \mathfrak{b} = \mathfrak{a}/\mathfrak{i} \longrightarrow 0.$$

Para cada $\mathfrak{a}$-módulo E (i.e. un espacio vectorial E dotado de una representación $\rho : \mathfrak{a} \to End(E)$ tal que $\rho(X)(e) = X \cdot e$), se considera el complejo $(\bigwedge^n \mathfrak{a}^* \otimes E, d)$ de las formas diferenciales sobre $\mathfrak{a}$ con valores en E y la cohomología $H^n(\mathfrak{a}, E)$ de $\mathfrak{a}$ con valores en E (véase §1.3).

2.4.1 Definición

La filtración

$$F^r(\bigwedge^n \mathfrak{a}^* \otimes E) = \{\, \omega \in \bigwedge^n \mathfrak{a}^* \otimes E \,/\, \omega \text{ se anula sobre } n-r+1 \text{ elementos de } \mathfrak{i} \,\}$$

define una sucesión espectral $E_2^{r,s} \Rightarrow H^n(\mathfrak{a}, E)$, llamada *sucesión espectral de Hochschild-Serre* (véase [HS]). Luego se tiene una descomposición $H^n(\mathfrak{a}, E) = \bigoplus_{n=r+s} E_\infty^{r,s}$ y una filtración $F^r(H^n(\mathfrak{a}, E)) = \bigoplus_{t\geq r} E_\infty^{t,n-t}$.

2.4.2 Término E_0

Por definición, el término E_0 está dado por:

$$E_0^{r,s} = \frac{F^r(\bigwedge^{r+s}\mathfrak{a}^* \otimes E)}{F^{r+1}(\bigwedge^{r+s}\mathfrak{a}^* \otimes E)}.$$

Si j es una sección del morfismo de fibrados vectorial subyacente a $q : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$, se define un morfismo de $\mathfrak{a}$-módulos

$$\theta_{r,s} : F^r(\bigwedge^{r+s} \mathfrak{a}^* \otimes E) \longrightarrow \bigwedge^s \mathfrak{i}^* \otimes (\bigwedge^r \mathfrak{b}^* \otimes E)$$

por

$$\theta_{r,s}(\omega)(X_1, \ldots, X_s)(Y_1, \ldots, Y_r) = \omega(i(X_1), \ldots, i(X_s), j(Y_1), \ldots, j(Y_r))$$

para cada $X_1, \ldots, X_q \in \mathfrak{i}$ y para cada $Y_1, \ldots Y_r \in \mathfrak{b}$. Puesto que $\mathfrak{i}$ es un ideal de $\mathfrak{a}$, el espacio vectorial $\bigwedge^r \mathfrak{b}^* \otimes E$ de las r-formas η sobre $\mathfrak{b}$ con valores en E está dotado de una estructura de $\mathfrak{i}$ -módulo definida por:

$$L_X \eta(Y_1, \ldots, Y_r) = X \cdot \eta(Y_1, \ldots, Y_r) \tag{2.3}$$

para cada $X \in \mathfrak{i}$ y para cada $Y_1, \ldots Y_r \in \mathfrak{b}$. Por paso al cociente, se obtiene un isomorfismo de complejos

$$\theta_{r,s} : (E_0^{r,s}, d_0) \longrightarrow (\bigwedge^s \mathfrak{i}^* \otimes (\bigwedge^r \mathfrak{b}^* \otimes E), d_\mathfrak{i})$$

donde $d_\mathfrak{i} : \bigwedge^s \mathfrak{i}^* \otimes (\bigwedge^r \mathfrak{b}^* \otimes E) \to \bigwedge^{q+1} \mathfrak{i}^* \otimes (\bigwedge^r \mathfrak{b}^* \otimes E)$ es la diferencial relativa a la estructura de $\mathfrak{i}$-módulo sobre $\bigwedge^r \mathfrak{b}^* \otimes E$ (véase §1.3).

2.4.3 Término E_1

Según la observación anterior, el término E_1 está dado por:

$$E_1^{r,s} = H^s(\mathfrak{i}, \bigwedge^r \mathfrak{b}^* \otimes E).$$

Ahora bien, existe un isomorfismo natural de espacios vectoriales

$$\bigwedge^s \mathfrak{i}^* \otimes (\bigwedge^r \mathfrak{b}^* \otimes E) \cong \bigwedge^r \mathfrak{b}^* \otimes (\bigwedge^s \mathfrak{i}^* \otimes E)$$

donde $\bigwedge^s \mathfrak{i}^* \otimes E$ está dotado de la estructura de $\mathfrak{a}$-módulo definida por:

$$L_X \omega(X_1, \ldots, X_s) = X \cdot \omega(X_1, \ldots, X_s) \tag{2.4}$$

para cada $X \in \mathfrak{a}$ y para cada $X_1, \ldots X_s \in \mathfrak{i}$. Puesto que $\mathfrak{i}$ es un ideal de $\mathfrak{a}$, se comprueba fácilmente que:

$$L_X \circ d_{\mathfrak{i}} = d_{\mathfrak{i}} \circ L_X, \qquad \forall X \in \mathfrak{a}.$$

Luego $H^s(\mathfrak{i}, E)$ está dotado de una estructura de $\mathfrak{a}$-módulo definida por:

$$L_X[\omega] = [L_X \omega] \tag{2.5}$$

para cada $X \in \mathfrak{a}$ y para cada $[\omega] \in H^s(\mathfrak{i}, E)$. Ahora bien, puesto que $L_X\omega = di_X\omega$, la clase $L_X[\omega] = 0$ para cada $X \in \mathfrak{i}$. Por tanto, el espacio vectorial $H^s(\mathfrak{i}, E)$ es un $\mathfrak{b}$-módulo. En resumen, se tiene un isomorfismo de complejos

$$(E_1^{r,s}, d_1) \cong (\bigwedge\nolimits^r \mathfrak{b}^* \otimes H^s(\mathfrak{i}, E)), (-1)^s d_{\mathfrak{b}})$$

donde $d_{\mathfrak{b}} : \bigwedge^r \mathfrak{b}^* \otimes H^s(\mathfrak{i}, E)) \to \bigwedge^{r+1} \mathfrak{b}^* \otimes H^s(\mathfrak{i}, E))$ es la diferencial relativa a la estructura de $\mathfrak{b}$-módulo sobre $H^s(\mathfrak{i}, E)$ (véase §1.3).

2.4.4 Término E_2

Por fin, el término E_2 está dado por:

$$E_2^{r,s} = H^r(\mathfrak{b}, H^s(\mathfrak{i}, E)).$$

En particular, se tiene que:

$$\begin{aligned} E_2^{r,0} &= H^r(\mathfrak{b}, E^{\mathfrak{i}}) \\ E_2^{0,s} &= H^s(\mathfrak{i}, E)^{\mathfrak{b}} = H^s(\mathfrak{i}, E)^{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$

2.4.5 Formas puras y componentes puras

En la situación anterior, la descomposición del espacio vectorial $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{b}$ induce una descomposición

$$\bigwedge\nolimits^n \mathfrak{a}^* \otimes E = \bigoplus_{r+s=n} \bigwedge\nolimits^r \mathfrak{b}^* \otimes \bigwedge\nolimits^r \mathfrak{i}^* \otimes E = \bigoplus_{r+s=n} \bigwedge\nolimits^{r,s} \mathfrak{a}^* \otimes E$$

donde $\bigwedge^{r,s} \mathfrak{a}^* \otimes E = \bigwedge^r \mathfrak{b}^* \otimes \bigwedge^s \mathfrak{i}^* \otimes E$ se denomina *espacio de las formas puras de tipo* (r, s). A su vez, la diferencial d se descompone en *componentes puras*

$$d = d_{0,1} + d_{1,0} + d_{2,-1}$$

de bigrado $(0, 1), (1, 0)$ y $(2, -1)$ que verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} &d_{0,1}^2 = d_{2,-1}^2 = 0 \\ &d_{0,1}d_{1,0} + d_{1,0}d_{0,1} = 0 \\ &d_{1,0}^2 + d_{2,-1}d_{0,1} + d_{0,1}d_{2,-1} = 0 \\ &d_{1,0}d_{2,-1} + d_{2,-1}d_{1,0} = 0. \end{aligned}$$

Gracias a la descomposición en formas puras, se tiene que:

i) El término E_0 está definido por:

$$(E_0^{r,s}, d_0) = (\bigwedge^{r,s} \mathfrak{a}^* \otimes E, d_{0,1}).$$

ii) El término E_1 está definido por:

$$E_1^{r,s} = H^{r,s}(\mathfrak{a}, E) = H^s(\bigwedge^{r,*} \mathfrak{a}^* \otimes E, d_{0,1})$$

y la diferencial $d_1 : E_1^{r,s} \to E_1^{r+1,s}$ está inducida por $d_{1,0}$: para cada forma pura $\omega \in \bigwedge^{r,s}\mathfrak{a}^* \otimes E$ tal que $d_{0,1}\omega = 0$, se define

$$d_1[\omega] = [d_{1,0}\omega].$$

iii) El término E_2 está dado por:

$$E_2^{r,s} = H^r(E_1^{*,s}, d_1)$$

y la diferencial

$$d_2 : E_2^{r,s} \longrightarrow E_1^{r+2,s-1}$$

está definida de la siguiente manera: si $[\omega] \in E_1^{r,s}$ verifica que $d_1[\omega] = [d_{1,0}\omega] = 0$, entonces existe $\theta \in \bigwedge^{r+1,s-1}\mathfrak{a}^* \otimes E$ tal que $d_{1,0}\omega = d_{0,1}\theta$ y se define

$$d_2[[\omega]] = [[d_{2,-1}\omega - d_{1,0}\theta]].$$

2.4.6 Proposición

Una clase $[\omega] \in E_1^{0,s} = H^s(\mathfrak{i}, E)$ *pertenece a la imagen del morfismo*

$$i^* : H^s(\mathfrak{a}, E) \longrightarrow H^s(\mathfrak{i}, E)$$

si y sólo si las clases

$$d_1[\omega] = d_2[[\omega]] = \ldots = d_{s+1}[..[\omega]..] = 0.$$

Demostración El término $E_\infty^{0,s} = E_{s+2}^{0,s}$ es igual a la imagen del morfismo i^*. Luego la afirmación es una consecuencia inmediata de la definición del término $E_{i+1}^{0,s}$ como núcleo de la diferencial $d_i : E_i^{0,s} \to E_i^{i,s-i+1}$ para $1 \le i \le s+1$. $\square$

2.4.7 Definición

Una clase $[\omega] \in E_1^{0,s} = H^s(\mathfrak{i}, E)$ se dice $\mathfrak{b}$-*invariante* si $[\omega] \in E_2^{0,s} = H^s(\mathfrak{i}, E)^{\mathfrak{b}}$. Evidentemente $[\omega]$ es $\mathfrak{b}$-invariante si y sólo si $d_1[\omega] = 0$.

2.5 Formulación de la obstrucción por medio de la sucesión espectral

En este párrafo, se reformula la obstrucción a la doble extensión por medio de la sucesión espectral de Hochschild-Serre asociada al producto semidirecto $\mathfrak{h} \rtimes_\delta \mathbb{R}$. Dada una doble extensión

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "I"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "i"'] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{I}"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "Q"'] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[d, "q"'] \\
& \mathbb{R} \arrow[r, equal] & \mathbb{R},
\end{tikzcd}
\tag{2.6}
$$

se privilegiará la extensión central

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{I}} \mathfrak{g} \xrightarrow{\Pi} \widehat{\mathfrak{g}} \to 0 \tag{2.7}$$

de clase $[\Omega] \in H^2(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathbb{R})$ (en lugar del producto semidirecto $0 \to \widehat{\mathfrak{h}} \xrightarrow{I} \mathfrak{g} \xrightarrow{Q} \mathbb{R} \to 0$ usado en §1.4 y 2.2). En tal caso, la 2-forma $\omega = i^*\Omega$ representa la clase de la extensión central

$$0 \to \mathbb{R} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{h}} \longrightarrow \mathfrak{h} \to 0. \tag{2.8}$$

Luego $i^* : H^2(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathbb{R}) \to H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ envía la clase $[\Omega] \in H^2(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathbb{R})$ de la extensión central (2.7) en la clase $[\omega] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ de la extensión central (2.8). Esto prueba la parte directa del siguiente resultado:

2.5.1 Lema

Sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie, ω una 2-forma cerrada sobre $\mathfrak{h}$ con valores en $\mathbb{R}$ y δ una derivación de $\mathfrak{h}$. Sea $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \rtimes_\delta \mathbb{R}$ el producto semidirecto de $\mathfrak{h}$ por $\mathbb{R}$ definido por δ. Entonces existe una doble extensión $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{h}$ definida por ω y δ si y sólo si la clase $[\omega] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ pertenece a la imagen del morfismo $i^* : H^2(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathbb{R}) \to H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$.

Demostración Sea $[\Omega] \in H^2(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathbb{R})$ una clase tal que $i^*[\Omega] = [\omega]$. Entonces las extensiones centrales

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\iota} \widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{h} \to 0 \qquad \text{y} \qquad 0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{I}} \mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{g}} \times_\Omega \mathbb{R} \xrightarrow{\Pi} \widehat{\mathfrak{g}} \to 0$$

están relacionadas por el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "I"] & \mathfrak{h} \arrow[d, "i"] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\mathrm{I}"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\Pi"] & \widehat{\mathfrak{g}}
\end{tikzcd}
$$

Ahora bien, puesto que $\mathfrak{g}$ es un producto semidirecto $\widehat{h} \rtimes_\delta \mathbb{R}$, resulta evidente que se trata de una doble extensión de $\mathfrak{h}$. $\square$

2.5.2 Lema

Una clase $[\omega] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ pertenece a la imagen del morfismo i^* y sólo si $d_1[\omega] = 0$.

Demostración Como consecuencia de la proposición 2.4.6, la clase $[\omega]$ pertenece a la imagen de i^* si y sólo si $d_1[\omega] = d_2[[\omega]] = d_3[[\omega]] = 0$. Por razones de dimensión, las diferenciales $d_2 = d_3 = 0$ y la condición se reduce a $d_1[\omega] = 0$. $\square$

Combinando los lemas 2.5.1 y 2.5.2, se tiene el siguiente teorema de obstrucción:

2.5.3 Teorema

Sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie, ω una 2-forma cerrada sobre $\mathfrak{h}$ con valores en $\mathbb{R}$ y δ una derivación de $\mathfrak{h}$. Sea $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \rtimes_\delta \mathbb{R}$ el producto semidirecto de $\mathfrak{h}$ por $\mathbb{R}$ definido por δ. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) existe una doble extensión $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{h}$ definida por ω y por δ;

ii) la clase $[\omega] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ pertenece a la imagen del morfismo

$$i^* : H^2(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathbb{R}) \to H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R});$$

iii) la clase $[\omega]$ es $\mathbb{R}$-invariante, i.e. la clase $[\omega]$ pertenece a $H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})^{\mathbb{R}}$;

iv) la obstrucción $d_1[\omega] = 0$. $\square$

Puesto que la estructura de $\mathbb{R}$-módulo sobre $H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ está generada por el endomorfismo $\overline{\alpha}(\delta) : H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \to H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ definido por $\overline{\alpha}(\delta)([\omega]) = [\alpha_{\omega,\delta}]$, la clase $[\omega] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})^{\mathbb{R}}$ si y sólo si la obstrucción $[\alpha_{\omega,\delta}]$ es nula.

2.5.4 Clase de la extensión central $\mathfrak{g}$

Dada una doble extensión (2.6), la clase de la extensión central (2.7) está representada por una 2-forma cerrada Ω que se descompone en la suma $\Omega = \Omega_{0,2} + \Omega_{1,1}$ de dos componentes de tipo $(0,2)$ y $(1,1)$. La primera componente $\Omega_{0,2}$ se identifica con la 2-forma cerrada ω (propiamente $\Omega_{0,2}$ es la 2-forma pura $\widehat{\omega}$ de tipo $(0,2)$ tal que $i^*\widehat{\omega} = \omega$). La segunda componente $\Omega_{1,1}$ es igual a la 2-forma pura ζ_φ de tipo $(1,1)$ definida por:

$$\zeta_\varphi((X,\lambda),(Y,\mu)) = \mu\varphi(X) - \lambda\varphi(Y), \qquad \forall (X,\lambda),(Y,\mu) \in \widehat{\mathfrak{g}}$$

donde $\varphi \in \mathfrak{h}^*$ es la primitiva de $\alpha_{\omega,\delta}$ que define la doble extensión.

La condición $d_1[\omega] = 0$ permite reconstruir la 2-forma cerrada Ω tal que $i^*\Omega = \omega$. En efecto, si la clase $d_1[\omega] = [d_{1,0}\omega] \in E_1^{1,2}$ es nula, entonces existe una 2-forma pura $\zeta \in \bigwedge^{1,1} \widehat{\mathfrak{g}}^*$ tal que $d_{1,0}\omega = -d_{0,1}\zeta$. Teniendo en cuenta que ω y $\widehat{\omega}$ están identificadas, se sigue que la 2-forma $\Omega = \omega + \zeta$ es cerrada. En efecto,

$$d\Omega = d_{0,1}\omega + d_{1,0}\omega + d_{0,1}\zeta + d_{2,-1}\omega + d_{1,0}\zeta + d_{2,-1}\zeta = 0$$

ya que $d_{0,1}\omega = 0$, $d_{1,0}\omega + d_{0,1}\zeta = 0$ y $d_{2,-1}\omega = d_{1,0}\zeta = d_{2,-1}\zeta = 0$.

3 Clasificación de las dobles extensiones

El objetivo de esta sección es clasificar las dobles extensiones de un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ (usando dos definiciones diferentes de isomorfismo).

3.1 Dobles extensiones isomorfas

3.1.1 Definición

Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ dos dobles extensiones de $\mathfrak{h}$ definidas por dos 2-formas cerradas ω y ω' sobre $\mathfrak{h}$ con valores en $\mathbb{R}$ y dos derivaciones δ y δ' de $\mathfrak{h}$ respectivamente.

i) Se dice que las dobles extensiones $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son *isomorfas* si existe un isomorfismo de álgebras de Lie

$$\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$$

que verifica las siguientes condiciones:

a) el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\Phi_0"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Phi"] & \mathbb{R} \arrow[d, equal] \\
\widehat{\mathfrak{h}}' \arrow[r, "\iota'"] & \mathfrak{g}' \arrow[r, "\pi'"] & \mathbb{R}.
\end{tikzcd}$$

donde $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \times_{\omega} \mathbb{R}$ y $\widehat{\mathfrak{h}}' = \mathfrak{h} \times_{\omega'} \mathbb{R}$ son las extensiones centrales de $\mathfrak{h}$ definidas por las 2-formas cerradas ω y ω' respectivamente y el isomorfismo Φ_0 inducido por Φ es un isomorfismo de extensiones centrales

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Phi_0"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "\iota'"] & \widehat{\mathfrak{h}}' \arrow[r, "\pi'"] & \mathfrak{h};
\end{tikzcd}$$

b) el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "I"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{g} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\Phi"'] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[d, "\overline{\Phi}"'] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "I'"] & \mathfrak{g}' \arrow[r, "Q'"] & \widehat{\mathfrak{g}}'.
\end{tikzcd}$$

donde $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \rtimes_{\delta} \mathbb{R}$ y $\widehat{\mathfrak{g}}' = \mathfrak{h} \rtimes_{\delta'} \mathbb{R}$ son los productos semidirectos de $\mathfrak{h}$ por $\mathbb{R}$ definidos por las derivaciones δ y δ' respectivamente y el isomorfismo $\overline{\Phi}$ inducido por Φ es un isomorfismo de productos semidirectos:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r, "I"] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\overline{\Phi}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, equal] \\
\mathfrak{h} \arrow[r, "I'"] & \widehat{\mathfrak{g}}' \arrow[r, "Q'"] & \mathbb{R}.
\end{tikzcd}$$

Las extensiones centrales $\widehat{\mathfrak{h}}$ y $\widehat{\mathfrak{h}}'$ son isomorfas si y sólo si las 2-formas cerradas ω y ω' representan la misma clase de $H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ (véase § I.2.4). Por otra parte, los productos semidirectos $\widehat{\mathfrak{g}}$ y $\widehat{\mathfrak{g}}'$ son isomorfos si y sólo si las derivaciones δ y δ' representan la misma clase de $H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$, i.e. $\delta' - \delta = ad(H)$ para algún elemento $H \in \mathfrak{h}$.

ii) Si los productos semidirectos $\widehat{\mathfrak{g}}$ y $\widehat{\mathfrak{g}}'$ coinciden (i.e. si $\overline{\Phi}$ es la identidad), se dice que las dobles extensiones $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son *fuertemente isomorfas*. En tal caso, las derivaciones δ y δ' son iguales.

Los dos siguientes resultados precisan la descripción de los isomorfismos e isomorfismos fuertes de dobles extensiones:

3.1.2 Lema

Sea $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un isomorfismo fuerte entre dos dobles extensiones $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ definidas por dos 2-formas cerradas ω y ω' y una derivación δ. Para cada elemento $(X,t,\lambda) \in \mathfrak{g}$, se tiene que:

$$\Phi(X,t,\lambda) = (X, t + \chi(X), \lambda) \tag{3.1}$$

donde $\chi \in \mathfrak{h}^*$ verifica $d\chi = \omega' - \omega$. En particular, $d\chi = 0$ si y sólo si $\omega = \omega'$.

Demostración Por definición, se tiene que $\Phi(X,t,\lambda) = (\Phi_0(X,t),\lambda)$ y $\Phi_0(X,t) = (X, t+\chi(X))$ para cada elemento $(X,t,\lambda) \in \mathfrak{g}$. Ahora bien, según la descripción de los isomorfismos de extensiones centrales (véase el lema I.2.4.2), la 1-forma $\chi \in \mathfrak{h}^*$ verifica que $d\chi = \omega' - \omega$. $\square$

3.1.3 Lema

Sea $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un isomorfismo entre dos dobles extensiones $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ definidas por dos 2-formas cerradas ω y ω' y dos derivaciones δ y δ'. Para cada elemento $(X,t,\lambda) \in \mathfrak{g}$, se tiene que:

$$\Phi(X,t,\lambda) = (X + \varepsilon(\lambda), t + \chi(X), \lambda) \tag{3.2}$$

donde $\chi \in \mathfrak{h}^*$ verifica $d\chi = \omega' - \omega$ y $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathfrak{h}$ es una aplicación lineal tal que $\delta' - \delta = -ad(\varepsilon(1))$. En particular, $d\chi = 0$ si y sólo si $\omega = \omega'$ y $\varepsilon(1) \in Z(\mathfrak{h})$ si y sólo si $\delta = \delta'$.

Demostración Para cada $(X,t,\lambda) \in \mathfrak{g}$, se tiene que $\Phi_0(X,t) = (X, t+\chi(X))$ y $\overline{\Phi}(X,\lambda) = (X+\varepsilon(\lambda),\lambda)$. Como en el caso anterior, según el lema I.2.4.2, el isomorfismo Φ_0 es un isomorfismo de extensiones centrales si y sólo si la 1-forma $\chi \in \bigwedge^1 \mathfrak{h}^*$ es una primitiva de $\omega' - \omega$. Por otra parte, el isomorfismo $\overline{\Phi}$ es un isomorfismo de productos semidirectos si y sólo si

$$\overline{\Phi}([(X,0),(0,1)]) = \overline{\Phi}(-\delta(X),0) = (-\delta(X),0)$$

es igual a

$$[\overline{\Phi}(X,0),\overline{\Phi}(0,1)] = [(X,0),(\varepsilon(1),1)] = ([X,\varepsilon(1)] - \delta'(X),0),$$

es decir, si $\delta'(X) - \delta(X) = -ad(\varepsilon(1))(X)$ para cada $X \in \mathfrak{h}$. $\square$

3.2 Clases de isomorfía e isomorfía fuerte

Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, se denota $\mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}]$ el conjunto de las clases de isomorfía fuerte de dobles extensiones de $\mathfrak{h}$ y $\mathcal{D}Ext(\mathfrak{h})$ el conjunto de las clases de isomorfía de dobles extensiones de $\mathfrak{h}$. De manera evidente, se tiene una proyección natural

$$p : \mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}] \longrightarrow \mathcal{D}Ext(\mathfrak{h}).$$

Como consecuencia de los lemas 3.1.2 y 3.1.3, las aplicaciones

$$\kappa \ : \ [\mathfrak{g}] \in \mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}] \ \mapsto \ ([\omega], \delta) \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h})$$

y

$$\widehat{\kappa} \ : \ [\mathfrak{g}] \in \mathcal{D}Ext(\mathfrak{h}) \ \mapsto \ ([\omega], [\delta]) \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$$

están bien definidas y hacen conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}] & \xrightarrow{\kappa} & H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h}) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id \times p_0} \\ \mathcal{D}Ext(\mathfrak{h}) & \xrightarrow{\widehat{\kappa}} & H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \end{array}$$

donde p_0 denota la proyección canónica de $Der(\mathfrak{h})$ sobre $H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) = Der(\mathfrak{h})/ad(\mathfrak{h})$. Las fibras $\kappa^{-1}([\omega], \delta)$ y $\widehat{\kappa}^{-1}([\omega], [\delta])$ se denotarán $\mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}]$ y $\mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h})$.

Sean

$$\alpha : Der(\mathfrak{h}) \to End(\bigwedge^2 \mathfrak{h}^*) \qquad \text{y} \qquad \overline{\alpha} : Der(\mathfrak{h}) \to End(H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}))$$

las representaciones (1.6) y (1.7) del §1.3. Por construcción, la clase

$$\overline{\alpha}(\delta)([\omega]) = [\alpha(\delta)(\omega)] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$$

es la obstrucción a la doble extensión de $\mathfrak{h}$ definida por ω y δ. Además, según el lema 1.3.3, la representación $\overline{\alpha}$ pasa al cociente en una representación

$$\widehat{\alpha} : H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \to End(H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})).$$

Si

$$(H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h}))_{\overline{\alpha}=0} = \{\, ([\omega], \delta) \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h}) \,/\, \overline{\alpha}(\delta)([\omega]) = 0 \,\}$$

y

$$(H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}))_{\widehat{\alpha}=0} = \{\, ([\omega], [\delta]) \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \,/\, \widehat{\alpha}([\delta])([\omega]) = 0 \,\},$$

el teorema de obstrucción 2.2.2 garantiza que las aplicaciones

$$\kappa : \mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}] \longrightarrow (H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h}))_{\overline{\alpha}=0}$$

y

$$\widehat{\kappa} : \mathcal{D}Ext(\mathfrak{h}) \longrightarrow (H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}))_{\widehat{\alpha}=0}$$

están bien definidas y son sobreyectivas. Estas aplicaciones se usarán para reducir la clasificación de las dobles extensiones de $\mathfrak{h}$ a la clasificación de las dobles extensiones definidas por una 2-forma cerrada $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ y una derivación $\delta \in Der(\mathfrak{h})$.

3.2.1 Espacios de primitivas

Sea $\mathcal{P}_{\omega,\delta}$ el conjunto de las primitivas de la 2-forma cerrada $\alpha_{\omega,\delta} = \alpha(\delta)(\omega)$ que representa la obstrucción a la doble extensión de $\mathfrak{h}$ definida por ω y δ. Según el teorema 2.2.2, cada primitiva $\varphi \in \mathcal{P}$ determina un doble extensión $\mathfrak{g}_\varphi$ de $\mathfrak{h}$ definida por ω y δ. Por tanto, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\varphi \in \mathcal{P}_{\omega,\delta} \arrow[r, "D_{\omega,\delta}"] \arrow[dr, "\widehat{D}_{\omega,\delta}"'] & {[\mathfrak{g}_\varphi] \in \mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}]} \arrow[d, "p"] \\
 & {[\mathfrak{g}_\varphi] \in \mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h}).}
\end{tikzcd}$$

Si las 2-formas cerradas ω y ω' representan una misma clase de $H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$, entonces existe una 1-forma $\chi \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\omega' - \omega = d\chi$. Esto permite definir una biyección $c_\chi : \mathcal{P}_{\omega,\delta} \to \mathcal{P}_{\omega',\delta}$ por:

$$c_\chi(\varphi) = \varphi + \alpha(\delta)(\chi) = \varphi + \chi\circ\delta$$

para cada $\varphi \in \mathcal{P}_{\omega,\delta}$. En efecto, la identidad

$$\alpha(\delta)(\omega') - \alpha(\delta)(\omega) = \alpha(\delta)(d\chi) = d(\alpha(\delta)(\chi)) = d(\chi\circ\delta)$$

garantiza que $\varphi + \chi\circ\delta$ pertenece a $\mathcal{P}_{\omega',\delta}$. Por otra parte, las dobles extensiones $\mathfrak{g}_\varphi$ (definida por ω y δ) y $\mathfrak{g}_{\varphi+\chi\circ\delta}$ (definida por ω' y δ) son fuertemente isomorfas: según el lema 3.1.2, la aplicación $\Phi : \mathfrak{g}_\varphi \to \mathfrak{g}_{\varphi+\chi\circ\delta}$ definida por

$$\Phi(X, t, \lambda) = (X, t + \chi(X), \lambda), \qquad \forall (X, t, \lambda) \in \mathfrak{g}_\varphi$$

es un isomorfismo fuerte de dobles extensiones. Por tanto, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{\omega,\delta} \arrow[rr, "c_\chi"] \arrow[dr, "D_{\omega,\delta}"'] & & \mathcal{P}_{\omega',\delta} \arrow[dl, "D_{\omega',\delta}"] \\
 & \mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}] &
\end{tikzcd}$$

y las aplicaciones $D_{\omega,\delta}$ son sobreyectivas.

De forma análoga, si las derivaciones δ y δ' representan una misma clase de $H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$, entonces existe un elemento $H \in \mathfrak{h}$ tal que $\delta' - \delta = ad(H)$. En este caso, se define una biyección $c_H : \mathcal{P}_{\omega,\delta} \to \mathcal{P}_{\omega,\delta'}$ por:

$$c_H(\varphi) = \varphi - i_H\omega$$

para cada $\varphi \in \mathcal{P}_{\omega,\delta}$. En efecto, la identidad

$$\alpha(\delta')(\omega) - \alpha(\delta)(\omega) = \alpha(ad(H))(\omega) = -d(i_H\omega)$$

(véase la prueba del lema 1.3.3) garantiza que $\varphi - i_H\omega$ pertenece a $\mathcal{P}_{\omega,\delta'}$. Por otra parte, las dobles extensiones $\mathfrak{g}_\varphi$ (definida por ω y δ) y $\mathfrak{g}_{\varphi - i_H\omega}$ (definida por ω y δ) son fuertemente isomorfas: según el lema 3.1.3, la aplicación $\Phi : \mathfrak{g}_\varphi \to \mathfrak{g}_{\varphi - i_H\omega}$ definida por $\Phi(X, t, \lambda) = (X - \lambda H, t, \lambda)$ es un isomorfismo de dobles extensiones. Por tanto, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{\omega,\delta} \arrow[rr, "c_H"] \arrow[dr, "\widehat{D}_{\omega,\delta}"'] & & \mathcal{P}_{\omega,\delta'} \arrow[dl, "\widehat{D}_{\omega,\delta'}"] \\
& \mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h}) &
\end{tikzcd}$$

Por otra parte, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{\omega,\delta} \arrow[r, "c_\chi"] \arrow[d, "c_H"'] & \mathcal{P}_{\omega',\delta} \arrow[d, "c_H"] \\
\mathcal{P}_{\omega,\delta'} \arrow[r, "c_\chi"] & \mathcal{P}_{\omega',\delta'}.
\end{tikzcd}$$

En efecto, para cada $\varphi \in \mathcal{P}_{\omega,\delta}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
c_\chi \circ c_H(\varphi) - c_H \circ c_\chi(\varphi) &= \varphi - i_H\omega + \chi\circ\delta' - (\varphi + \chi\circ\delta - i_H\omega') \\
&= \chi\circ(\delta' - \delta) - i_H(\omega' - \omega) \\
&= \chi\circ ad(H) - i_H d\chi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Combinando los dos diagramas anteriores, se obtiene un nuevo diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{\omega,\delta} \arrow[rr, "c_H \circ c_\chi"] \arrow[dr, "\widehat{D}_{\omega,\delta}"'] & & \mathcal{P}_{\omega',\delta'} \arrow[dl, "\widehat{D}_{\omega',\delta'}"] \\
& \mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h}) &
\end{tikzcd}$$

De nuevo, se deduce que las aplicaciones $\widehat{D}_{\omega,\delta}$ son sobreyectivas.

3.3 Teorema de clasificación salvo isomorfismo fuerte

El conjunto $\mathcal{P}_{\omega,\delta}$ está dotado de una acción natural

$$H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \times \mathcal{P}_{\omega,\delta} \longrightarrow \mathcal{P}_{\omega,\delta}$$

definida por:

$$[\gamma].\varphi = \varphi + \gamma$$

donde cada clase $[\gamma] \in H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ se identifica con la 1-forma cerrada $\gamma \in \mathfrak{h}^*$. Puesto que esta acción es libre y transitiva, el conjunto $\mathcal{P}_{\omega,\delta}$ está dotado de una estructura de espacio afín sobre $H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$. La acción de $H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ sobre $\mathcal{P}_{\omega,\delta}$ pasa al cociente una acción transitiva

$$H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times \mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}] \to \mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}]$$

definida por:

$$[\gamma].[\mathfrak{g}_\varphi] = [\mathfrak{g}_{\varphi+\gamma}]$$

y $\mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}]$ hereda una estructura de espacio afín.

3.3.1 Proposición

Sean $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie, ω un 2-forma cerrada sobre $\mathfrak{h}$ con valores en $\mathbb{R}$ y δ una derivación de $\mathfrak{h}$. El espacio afín $\mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}]$ de las clases de isomorfía fuerte de dobles extensiones de $\mathfrak{h}$ definidas por ω y δ es isomorfo al espacio afín

$$\frac{H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R})}{Im\,\overline{\alpha}(\delta)}$$

donde $Im\,\overline{\alpha}(\delta)$ es la imagen del endomorfismo $\overline{\alpha}(\delta) : H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \to H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ definido por $\overline{\alpha}(\delta)([\gamma]) = [\gamma\circ\delta]$.

Demostración Puesto que la aplicación $D_{\omega,\delta} : \mathcal{P}_{\omega,\delta} \to \mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}]$ es sobreyectiva, la prueba se reduce a determinar cuándo dos dobles extensiones $\mathfrak{g}_\varphi$ y $\mathfrak{g}_{\varphi+\gamma}$ definidas por dos elementos φ y $\varphi+\gamma$ de $\mathcal{P}_{\omega,\delta}$ son fuertemente isomorfas. Ahora bien, como consecuencia del lema 3.1.2, se tiene que $\mathfrak{g}_\varphi$ y $\mathfrak{g}_{\varphi+\gamma}$ son fuertemente isomorfas si y sólo si $\gamma = \chi\circ\delta$ para alguna 1-forma cerrada $\chi \in \mathfrak{h}^*$. Por tanto, la isotropía de la acción de $H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ sobre $\mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}]$ coincide con la imagen del endomorfismo $\overline{\alpha}(\delta)$ de $H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R})$. $\square$

Combinando las observaciones iniciales sobre $\mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}]$ y la proposición 3.3.1, se tiene el siguiente resultado:

3.3.2 Teorema

Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, se tiene una proyección natural

$$\kappa : \mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}] \longrightarrow (H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h}))_{\overline{\alpha}=0}$$

del conjunto $\mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}]$ de las clases de isomorfía fuerte de dobles extensiones de $\mathfrak{h}$ sobre el conjunto $(H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h}))_{\overline{\alpha}=0}$ de los pares $([\omega],\delta) \in H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h})$ tales que $\overline{\alpha}(\delta)([\omega]) = [\alpha_{\omega,\delta}] = 0$. Para cada par $([\omega],\delta) \in (H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times Der(\mathfrak{h}))_{\overline{\alpha}=0}$, la fibra $\mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}]$ es isomorfa al espacio afín $H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R})/Im\,\overline{\alpha}(\delta)$. $\square$

3.3.3 Corolario

Si la derivación δ es inversible, entonces $\mathfrak{h}$ posee una única doble extensión definida por δ salvo isomorfismo fuerte. $\square$

Sea $\Phi : \mathfrak{g}_\varphi \to \mathfrak{g}_{\varphi'}$ un isomorfismo fuerte entre dos dobles extensiones de $\mathfrak{h}$ definidas por dos 2-formas cerradas ω y ω' y una derivación δ. Según la proposición 3.3.1, se tiene que:

$$\varphi' - \varphi = \alpha(\delta)(\chi) = \chi \circ \delta$$

donde $\chi \in \mathfrak{h}^*$ verifica $d\chi = \omega' - \omega$. Por definición, $\mathfrak{g}_\varphi$ y $\mathfrak{g}_{\varphi'}$ son productos semidirectos definidos por dos derivaciones Δ_φ y $\Delta_{\varphi'}$ de una misma álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{h}}$. Estas dos derivaciones están relacionadas por $\Delta_{\varphi'} \circ \Phi_0 = \Phi_0 \circ \Delta_\varphi$.

Por otra parte, $\mathfrak{g}_\varphi$ y $\mathfrak{g}_{\varphi'}$ son extensiones centrales de una misma álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ definidas por dos 2-formas cerradas Ω_φ y $\Omega_{\varphi'}$. Estas dos formas se descomponen en formas puras

$$\Omega_\varphi = \widehat{\omega} + \zeta_\varphi \qquad \text{y} \qquad \Omega_{\varphi'} = \widehat{\omega}' + \zeta_{\varphi'}$$

donde las componentes puras de tipo $(0,2)$ se identifican con ω y ω' y las componentes puras de tipo $(1,1)$ están definidas por:

$$\zeta_\varphi((X,\lambda),(Y,\mu)) = \mu\varphi(X) - \lambda\varphi(Y) \quad \text{y} \quad \zeta_{\varphi'}((X,\lambda),(Y,\mu)) = \mu\varphi'(X) - \lambda\varphi'(Y)$$

para cada par $X, Y \in \mathfrak{h}$ y cada par $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se sigue que:

$$\begin{array}{rcl} \Omega_{\varphi'} - \Omega_\varphi & = & \widehat{\omega}' + \zeta_{\varphi'} - (\widehat{\omega} + \zeta_\varphi) \\ & = & \widehat{\omega}' - \widehat{\omega} + \zeta_{\varphi'} - \zeta_\varphi \\ & = & d_{0,1}\widehat{\chi} + \zeta_{\varphi' - \varphi} \\ & = & d_{0,1}\widehat{\chi} + \zeta_{\chi \circ \delta} \\ & = & d_{0,1}\widehat{\chi} + d_{1,0}\widehat{\chi} = d\widehat{\chi} \end{array}$$

donde $\widehat{\chi} \in \bigwedge^{0,1} \widehat{\mathfrak{g}}^*$ y $d_{0,1}\widehat{\chi} \in \bigwedge^{0,2} \widehat{\mathfrak{g}}^*$ se identifican con $\chi \in \mathfrak{h}^*$ y $d\chi \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ respectivamente. Obsérvese que esta aproximación proporciona una prueba alternativa de la proposición 3.3.1.

3.4 Teorema de clasificación salvo isomorfismo

Como en el apartado anterior, la acción de $H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ sobre $\mathcal{P}_{\omega,\delta}$ pasa al cociente en una acción de $H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ sobre el conjunto $\mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h})$ de las clases de isomorfía de dobles extensiones de $\mathfrak{h}$ definidas por ω y δ. La demostración del siguiente resultado es análoga a la demostración de la proposición 3.3.1:

3.4.1 Proposición

Sean $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie, ω un 2-forma cerrada sobre $\mathfrak{h}$ con valores en $\mathbb{R}$ y δ una derivación de $\mathfrak{h}$. Entonces existe una biyección entre el conjunto $\mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h})$ de las clases de isomorfía de dobles extensiones de $\mathfrak{h}$ definidas por ω y δ y el espacio afín

$$\frac{H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R})}{Im\,\overline{\alpha}(\delta) \,+\, i_{Z(\mathfrak{h})}\omega}$$

donde $i_{Z(\mathfrak{h})}\omega$ es el espacio vectorial de las 1-formas cerradas $i_Z\omega$ determinadas por los elementos Z de $Z(\mathfrak{h})$.

Demostración De nuevo, puesto que la aplicación $\widehat{D}_{\omega,\delta} : \mathcal{P}_{\omega,\delta} \to \mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h})$ es sobreyectiva, la prueba se reduce a caracterizar los elementos φ y $\varphi + \gamma$ de $\mathcal{P}_{\omega,\delta}$ que definen dobles extensiones $\mathfrak{g}_\varphi$ y $\mathfrak{g}_{\varphi+\gamma}$ isomorfas. En este caso, como consecuencia del lema 3.1.3, se tiene que $\mathfrak{g}_\varphi$ y $\mathfrak{g}_{\varphi+\gamma}$ son isomorfas si y sólo si $\gamma = \chi\circ\delta - i_H\omega$ para alguna 1-forma cerrada $\chi \in \mathfrak{h}^*$ y algún elemento $H \in Z(\mathfrak{h})$. Por tanto, la isotropía de la acción de $H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R})$ sobre $\mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h})$ es igual a la suma de $Im\,\overline{\alpha}(\delta)$ y de $i_{Z(\mathfrak{h})}\omega$. $\square$

3.4.2 Teorema

Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, se tiene una proyección natural

$$\kappa : \mathcal{D}Ext(\mathfrak{h}) \longrightarrow (H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))_{\widehat{\alpha}=0}$$

del conjunto $\mathcal{D}Ext(\mathfrak{h})$ de las clases de isomorfía de dobles extensiones de $\mathfrak{h}$ sobre el conjunto $(H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R})\times H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))_{\widehat{\alpha}=0}$ de los pares $([\omega],[\delta]) \in H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R})\times H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$ tales que $\widehat{\alpha}([\delta])([\omega]) = [\alpha_{\omega,\delta}] = 0$. Para cada par $([\omega],[\delta]) \in (H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))_{\widehat{\alpha}=0}$, la fibra $\mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h})$ es isomorfa al espacio afín $H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R})/Im\,\overline{\alpha}(\delta) + i_{Z(\mathfrak{h})\omega}$. Si la derivación δ es cohomóloga a una derivación inversible, entonces el espacio $\mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h})$ se reduce a una única clase de isomorfía de dobles extensiones. $\square$

Sea $\Phi : \mathfrak{g}_\varphi \to \mathfrak{g}_{\varphi'}$ un isomorfismo entre dos dobles extensiones de $\mathfrak{h}$ definidas por dos 2-formas cerradas ω y ω' y dos derivaciones δ y δ'. En este caso, se tiene que:

$$\varphi' - \varphi = \overline{\alpha}(\delta)(\chi) - i_H\omega' = \chi\circ\delta - i_H\omega'$$

donde $d\chi = \omega' - \omega$ y $ad(H) = \delta' - \delta$. Las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_\varphi$ y $\mathfrak{g}_{\varphi'}$ son las extensiones centrales de dos álgebras de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}_\varphi$ y $\widehat{\mathfrak{g}}_{\varphi'}$ definidas por dos 2-formas cerradas Ω_φ y $\Omega_{\varphi'}$. El isomorfismo Φ induce un isomorfismo $\overline{\Phi} : \widehat{\mathfrak{g}}_\varphi \to \widehat{\mathfrak{g}}_{\varphi'}$ tal que $\overline{\Phi}(X,\lambda) = (X - \lambda H, \lambda)$ para cada $X \in \mathfrak{h}$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego las 2-formas cerradas Ω_φ y $\overline{\Phi}^*\Omega_{\varphi'}$ representan una misma clase de $H^2(\widehat{\mathfrak{g}}_\varphi,\mathbb{R})$. Como en el caso de los isomorfismos fuertes, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}^*\Omega_{\varphi'} - \Omega_\varphi &= \overline{\Phi}^*(\widehat{\omega}' + \zeta_{\varphi'}) - (\widehat{\omega} + \zeta_\varphi) \\
&= \overline{\Phi}^*\widehat{\omega}' - \widehat{\omega} + \overline{\Phi}^*\zeta_{\varphi'} - \zeta_\varphi \\
&= \widehat{\omega}' - \widehat{\omega} + \overline{\Phi}^*\widehat{\omega}' - \widehat{\omega}' + \overline{\Phi}^*\zeta_{\varphi'} - \zeta_\varphi \\
&= d_{0,1}\widehat{\chi} + \zeta_{i_H\omega'} + \zeta_{\varphi'-\varphi} \\
&= d_{0,1}\widehat{\chi} + \zeta_{\chi\circ\delta} \\
&= d_{0,1}\widehat{\chi} + d_{1,0}\widehat{\chi} = d\widehat{\chi}.
\end{aligned}$$

donde $\widehat{\omega}'$, $\widehat{\omega}$ y $\widehat{\chi}$ son las 1-formas puras de tipo $(0,1)$ definidas por ω', ω y χ.

3.5 Dobles extensiones e isomorfismos de álgebras de Lie

Resulta natural preguntarse qué álgebras de Lie se pueden obtener por doble extensión a partir de un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. En la siguiente sección, se dará una solución completa en el caso particular de dimensión 4. Aunque es posible resolver el problema general (y de hecho, se indicará cómo hacerlo), este caso particular será resuelto de manera más simple por medio de la acción del grupo $Aut(\mathfrak{h})$ de los automorfismos de $\mathfrak{h}$ sobre los espacios $\mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}]$ y $\mathcal{D}Ext(\mathfrak{h})$.

Cada automorfismo $\psi \in Aut(\mathfrak{h})$ induce un automorfismo ψ^* del complejo $(\wedge^n \mathfrak{h}^*, d)$ (resp. $(\wedge^n \mathfrak{h}^* \otimes \mathfrak{h}, d)$) y éste induce un automorfismo ψ^* de la cohomología $H^n(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ (resp. $H^n(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$). Para cada $\omega \in \bigwedge^n \mathfrak{h}^*$ (resp. $\omega \in \bigwedge^n \mathfrak{h}^* \otimes \mathfrak{h}$), se define $\psi^*\omega(X_1, \ldots, X_k) = \omega(\psi(X_1), \ldots, \psi(X_k))$ (resp. $\psi^*\omega(X_1, \ldots, X_k) = \psi^{-1}(\omega(\psi(X_1), \ldots, \psi(X_k)))$ para cada $X_1, \ldots X_k \in \mathfrak{h}$. De esta manera, se obtienen dos acciones

$$Aut(\mathfrak{h}) \times H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \to H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R}) \qquad \text{y} \qquad Aut(\mathfrak{h}) \times H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}) \to H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}).$$

La segunda acción está inducida por la acción de $Aut(\mathfrak{h})$ sobre $Der(\mathfrak{h})$ definida por conjugación, i.e. $\psi^*(\delta) = \psi^{-1} \circ \delta\psi$ para cada $\psi \in Aut(\mathfrak{h})$ y cada $\delta \in Der(\mathfrak{h})$.

Dada una doble extensión

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{h} \arrow[d] \\
\mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[d] \\
 & \mathbb{R} \arrow[r, equal] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

definida por una 2-forma cerrada $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}$ y una derivación $\delta \in Der(\mathfrak{h})$, el automorfismo $\psi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ induce una doble extensión

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \psi^*\widehat{\mathfrak{h}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{h} \arrow[d] \\
\mathbb{R} \arrow[r] & \psi^*\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & \psi^*\widehat{\mathfrak{g}} \arrow[d] \\
 & \mathbb{R} \arrow[r, equal] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

donde $\psi^*\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \times_{\psi^*\omega} \mathbb{R}$ es la extensión central definida por la 2-forma cerrada $\psi^*\omega$ y $\psi^*\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \rtimes_{\psi^*\delta} \mathbb{R}$ es el producto semidirecto definido por la derivación $\psi^*(\delta) = \psi^{-1} \circ \delta\psi$. Obsérvese que la obstrucción a la doble extensión $\psi^*[\alpha_{\omega,\delta}] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ es nula, ya que la obstrucción $[\alpha_{\omega,\delta}] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ es nula. Por otra parte, se consideran los isomorfismos de álgebras de Lie

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_0"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{h} \times_{\psi^*\omega} \mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{h}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & \mathfrak{h} \rtimes_\delta \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\Psi}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, equal] \\
\mathfrak{h} \arrow[r] & \mathfrak{h} \rtimes_{\psi^*\delta} \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

definidos por $\Psi_0(X, t) = (\psi(X), t)$ y $\overline{\Psi}(X, \lambda) = (\psi(X), \lambda)$ donde $X \in \mathfrak{h}$ y $t, \lambda \in \mathbb{R}$. El isomorfismo Ψ_0 se extiende en un isomorfismo de álgebras de Lie $\Psi : \mathfrak{g} \to \psi^*\mathfrak{g}$ que se proyecta sobre $\overline{\Psi}$.

Como consecuencia de lo anterior, se tiene una acción

$$Aut(\mathfrak{h}) \times \mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}] \longrightarrow \mathcal{D}Ext[\mathfrak{h}]$$

definida por $\psi.[\mathfrak{g}] = [\psi^*\mathfrak{g}]$, donde $[\psi^*\mathfrak{g}] \in \mathcal{D}Ext_{(\psi^*[\omega],\psi^*\delta)}[\mathfrak{h}]$ si $[\mathfrak{g}] \in \mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}]$. De manera análoga, se tiene una acción

$$Aut(\mathfrak{h}) \times \mathcal{D}Ext(\mathfrak{h}) \longrightarrow \mathcal{D}Ext(\mathfrak{h})$$

definida por $\psi.[\mathfrak{g}] = [\psi^*\mathfrak{g}]$, donde $[\psi^*\mathfrak{g}] \in \mathcal{D}Ext_{(\psi^*[\omega],\psi^*[\delta])}(\mathfrak{h})$ si $[\mathfrak{g}] \in \mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h})$. Entonces la proyección

$$\widehat{\kappa} : \mathcal{D}Ext(\mathfrak{h}) \longrightarrow (H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h}))_{\widehat{\alpha}=0}$$

es equivariante respecto de la acción de $Aut(\mathfrak{h})$ sobre $\mathcal{D}Ext(\mathfrak{h})$ y $H^2(\mathfrak{h},\mathbb{R}) \times H^1(\mathfrak{h},\mathfrak{h})$. Puesto que las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\psi^*\mathfrak{g}$ son isomorfas, queda probado el siguiente resultado:

3.5.1 Proposición

Sea $\mathcal{D}Alg(\mathfrak{h})$ el conjunto de las clases de isomorfía de álgebras de Lie que son doble extensión de $\mathfrak{h}$. Entonces existe una aplicación sobreyectiva de $\mathcal{D}Ext(\mathfrak{h})/Aut(\mathfrak{h})$ en $\mathcal{D}Alg(\mathfrak{h})$. $\square$

Como consecuencia de la equivarianza de $\widehat{\kappa}$, se tiene el siguiente resultado:

3.5.2 Corolario

Si $\mathfrak{g}$ es una doble extensión de $\mathfrak{h}$ definida por una 2-forma cerrada $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}$ y una derivación $\delta \in Der(\mathfrak{h})$, el álgebra de Lie subyacente sólo depende (salvo isomorfismo) de la clase de conjugación de δ por los automorfismos de $\mathfrak{h}$. $\square$

Si la doble extensión $\mathfrak{g}$ está definida por una primitiva φ de $\alpha_{\omega,\delta}$, entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa al producto semidirecto $\widehat{\mathfrak{h}} \rtimes_\Delta \mathbb{R}$ donde

$$\Delta(X,t) = (\delta(X), \varphi(X)), \qquad \forall\, X \in \mathfrak{h}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cada automorfismo $\psi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ se levanta en un isomorfismo de álgebras de Lie $\Psi_0 : \mathfrak{h} \times_{\psi^*\omega} \mathbb{R} \to \mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R}$ cuya restricción a $\mathbb{R}$ es la identidad. De manera análoga, $\psi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ se extiende en un isomorfismo de álgebras de Lie $\overline{\Psi} : \mathfrak{h} \rtimes_{\psi^*\delta} \mathbb{R} \to \mathfrak{h} \rtimes_\delta \mathbb{R}$ que se proyecta en la identidad sobre $\mathbb{R}$. De hecho, según la prueba del teorema 3.5.1, estos isomorfismos provienen de un isomorfismo de álgebras de Lie $\Psi : \psi^*\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. El álgebra de Lie $\psi^*\mathfrak{g}$ es isomorfa al producto semidirecto $\widehat{\mathfrak{h}} \rtimes_{\Psi_0^*\Delta} \mathbb{R}$ y la derivación $\Psi_0^*\Delta = \Psi_0^{-1} \circ \Delta \circ \Psi_0$ está dada por $\Psi_0^*\Delta(X,t) = (\psi^*\delta(X), \psi^*\varphi(X))$ para cada $X \in \mathfrak{h}$ y cada $t \in \mathbb{R}$. En resumen, se tiene el siguiente resultado:

3.5.3 Corolario

En las condiciones anteriores, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *sólo depende de la clase de conjugación de* Δ *por los automorfismos de* $\widehat{\mathfrak{h}}$. $\square$

Para caracterizar las álgebras de Lie que se obtienen por doble extensión a partir de $\mathfrak{h}$, se precisan los dos siguientes resultados:

3.5.4 Proposición

Sean $\mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R}$ *y* $\mathfrak{h} \times_{\omega'} \mathbb{R}$ *dos extensiones centrales de* $\mathfrak{h}$. *Un automorfismo* $\psi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ *se levanta en un isomorfismo*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_0"'] & \mathfrak{h} \times_\omega \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_0"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{h} \times_{\omega'} \mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{h}
\end{tikzcd}$$

si y sólo la clase $[\omega] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ *es un múltiplo de la clase* $\psi^*[\omega'] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ *donde el factor de multiplicidad es igual a* $a = \psi_0(1)$. $\square$

3.5.5 Proposición

Sean $\mathfrak{h} \rtimes_\delta \mathbb{R}$ *y* $\mathfrak{h} \rtimes_{\delta'} \mathbb{R}$ *dos productos semidirectos de* $\mathfrak{h}$ *por* $\mathbb{R}$. *Un automorfismo* $\psi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *se extiende en un isomorfismo*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & \mathfrak{h} \rtimes_\delta \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\Psi}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\overline{\psi}_0"] \\
\mathfrak{h} \arrow[r] & \mathfrak{h} \rtimes_{\delta'} \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

si y sólo si la clase $[\delta] \in H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$ *es un múltiplo de la clase* $\psi^*[\delta'] \in H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$ *donde el factor de multiplicidad es igual a* $b = \overline{\psi}_0(1)$. $\square$

Una doble extensión $\mathfrak{g}$ definida por una 2-forma cerrada $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}$ y una derivación $\delta \in Der(\mathfrak{h})$ es simultáneamente una extensión central $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{g}} \times_\Omega \mathbb{R}$ y un producto semidirecto $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{h}} \rtimes_\Delta \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que los factores de multiplicidad corresponden a la elección de dos bases a y b de $\mathbb{R}$, las proposiciones 3.5.4 y 3.5.5 garantizan que el álgebra de Lie subyacente está completamente determinada por las órbitas de $[\Omega] \in H^2(\widehat{\mathfrak{g}}, \mathbb{R})$ y de $[\Delta] \in H^1(\widehat{\mathfrak{h}}, \widehat{\mathfrak{h}})$ por las acciones de $Aut(\widehat{\mathfrak{g}})$ y de $Aut(\widehat{\mathfrak{h}})$ respectivamente.

4 Dobles extensiones de dimensión 4

El objetivo de esta sección es dar una lista de las álgebras de Lie de dimensión 4 que admiten una estructura de doble extensión y describir dichas estructuras salvo isomorfismo fuerte.

4.1 Algebras de Lie de dimensión ≤ 4

Para determinar qué álgebras de Lie poseen una estructura de doble extensión, se recuerda la lista de las álgebras de Lie de dimensión ≤ 4 (véase [OV]):

Dimensión 1. La única álgebra de Lie es el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}$ que se integra en el grupo de Lie $\mathbb{R}$.

Dimensión 2. En este caso, las únicas álgebras de Lie son:

i) el álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{g}_1^2 = \mathbb{R}^2$ que se integra en el grupo de Lie $\mathbb{R}^2$;

ii) el álgebra de Lie afín $\mathfrak{g}_2 = aff(\mathbb{R})$ que se integra en el grupo afín $Aff^+(\mathbb{R})$.

Puesto que las álgebras de Lie de dimensión 2 son resolubles, las dobles extensiones de dimensión 4 son resolubles según el teorema 2.3.4 (véase también la proposición 4.2.1). Así pues, las listas de dimensión 3 y 4 se limitarán a las álgebras de Lie resolubles.

Dimensión 3. A continuación, se da una lista de las álgebras de Lie resolubles de dimensión 3 que excluye las extensiones triviales de $\mathbb{R}^2$ y $aff(\mathbb{R})$. Para ello, se seguirá usando la notación de [Ve]. Junto con los grupos de Lie 1-conexos que integran estas álgebras de Lie, se explicitan las posibles estructuras de extensión central o de producto semidirecto:

i) El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,1}$ es el álgebra de Lie $\mathfrak{h}^3$ del grupo de Heisenberg H^3 (descrito en §2.4.5) determinada por el corchete $[e_1, e_2] = e_3$. Se trata de la única extensión central no trivial de $\mathbb{R}^2$. La descripción del corchete de Lie prueba también que $\mathfrak{g}_{3,1}$ es el producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_\delta \mathbb{R}$ definido por la derivación

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,2}(\alpha)$ está determinada por los corchetes de Lie no nulos:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_2 \\ [e_1, e_3] &= \alpha e_3, \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,2}(0)$ es isomorfa al producto $\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1 = aff(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Si $\alpha \neq 0$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,2}(\alpha)$ es el producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_\delta \mathbb{R}$ definido por la derivación

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Obsérvese que los paramétros α y $\frac{1}{\alpha}$ determinan álgebras de Lie isomorfas. Este álgebra de Lie se integra en el producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_\rho \mathbb{R}$ definido por la representación $\rho : \mathbb{R} \to Aut(\mathbb{R}^2)$ dada por:

$$\rho(t) = e^{t\delta} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{pmatrix}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = -1$, este grupo se denota Sol^3 y su álgebra de Lie sol^3.

iii) El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,3}$ está determinada por los corchetes de Lie no nulos:

$$\begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & e_2 + e_3 \\ [e_1, e_3] & = & e_3 \end{array}$$

Se trata del producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_\delta \mathbb{R}$ definido por la derivación

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El grupo de Lie 1-conexo que integra este álgebra de Lie es el producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_\rho \mathbb{R}$ definido por la representación $\rho : \mathbb{R} \to Aut(\mathbb{R}^2)$ dada por:

$$\rho(t) = e^{t\delta} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

iv) El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,4}(\alpha)$ está determinada por los corchetes de Lie no nulos:

$$\begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & \alpha e_2 - e_3 \\ [e_1, e_3] & = & e_2 + \alpha e_3, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

Se trata del producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_\delta \mathbb{R}$ definido por la derivación

$$\delta = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

que se integra en el producto semidirecto $\mathbb{R}^2 \rtimes_\rho \mathbb{R}$ definido por la representación $\rho : \mathbb{R} \to Aut(\mathbb{R}^2)$ dada por:

$$\rho(t) = e^{t\delta} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} cos\, t & -sen\, t \\ sen\, t & cos\, t \end{pmatrix}$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{3,4}(0)$ es el álgebra de Lie del grupo de las isometrías del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ que conservan la orientación. Este grupo es el producto semidirecto de $\mathbb{C}$ por S^1 respecto de la acción natural de S^1 sobre $\mathbb{C}$.

Para completar esta lista, hay que añadir las álgebras semisimples $\mathfrak{s}u(2)$ y $\mathfrak{s}l(2, \mathbb{R})$. La primera es el álgebra de Lie de $SU(2) \cong S^3$ y la segunda es el álgebra de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$ o del grupo $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{I, -I\}$ de las transformaciones lineales fraccionales

$$z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{H}, \qquad ad - bc = 1$$

es decir, las isometrías del plano hiperbólico $\mathbb{H} = \{\, z \in \mathbb{C} \,/\, Imz > 0 \,\}$ que conservan la orientación.

Dimensión 4. Como en el caso anterior, sólo se da una lista de las álgebras de Lie resolubles de dimensión 4 (véase [Ve], págs. 180-182) de la que se excluyen las extensiones triviales de las álgebras de Lie resolubles de dimensión ≤ 3:

Algebra de Lie	Corchete de Lie	Parámetros
$\mathfrak{g}_{4,1}$	$[e_1,e_3]=e_3$ $[e_1,e_4]=e_4$ $[e_2,e_3]=e_4$	
$\mathfrak{g}_{4,2}$	$[e_1,e_3]=e_3$ $[e_1,e_4]=e_4$ $[e_2,e_3]=-e_4$ $[e_2,e_4]=e_3$	
$\mathfrak{g}_{4,3}=\mathfrak{h}^4$	$[e_1,e_2]=e_3$ $[e_1,e_3]=e_4$	
$\mathfrak{g}_{4,4}$	$[e_1,e_2]=e_3$ $[e_1,e_4]=e_4$	
$\mathfrak{g}_{4,5}(\alpha,\beta)$	$[e_1,e_2]=e_2$ $[e_1,e_3]=\alpha e_3$ $[e_1,e_4]=\beta e_4$	$-1<\alpha\leq\beta<0$ $-1\leq\alpha<0<\beta\leq 1$ $0<\alpha\leq\beta<1$
$\mathfrak{g}_{4,6}(\alpha)$	$[e_1,e_2]=\alpha e_2$ $[e_1,e_3]=e_3+e_4$ $[e_1,e_4]=e_4$	$\alpha\neq 0$
$\mathfrak{g}_{4,7}$	$[e_1,e_2]=e_2+e_3$ $[e_1,e_3]=e_3+e_4$ $[e_1,e_4]=e_4$	
$\mathfrak{g}_{4,8}(\alpha,\beta)$	$[e_1,e_2]=\alpha e_2$ $[e_1,e_3]=\beta e_3-e_4$ $[e_1,e_4]=e_3+\beta e_4$	$\alpha>0$
$\mathfrak{g}_{4,9}(\alpha)$	$[e_2,e_3]=e_4$ $[e_1,e_2]=(\alpha-1)e_2$ $[e_1,e_3]=e_3$ $[e_1,e_4]=\alpha e_4$	$0\leq\alpha\leq 2,\ \alpha\neq 1$
$\mathfrak{g}_{4,10}$	$[e_2,e_3]=e_4$ $[e_1,e_2]=e_2+e_3$ $[e_1,e_3]=e_3$ $[e_1,e_4]=2e_4$	
$\mathfrak{g}_{4,11}(\alpha)$	$[e_2,e_3]=e_4$ $[e_1,e_2]=\alpha e_2-e_3$ $[e_1,e_3]=e_2+\alpha e_3$ $[e_1,e_4]=2\alpha e_4$	$\alpha\geq 0$

Tabla 1. Algebras de Lie resolubles de dimensión 4

4.2 Condiciones necesarias y suficientes en dimensión 4

En este párrafo, se agrupan diferentes condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una estructura de doble extensión sobre un álgebra de Lie de dimensión 4. En primer lugar, se precisa la naturaleza de las álgebras de Lie de dimensión 4 que son doble extensión de algún álgebra de Lie de dimensión 2:

4.2.1 Proposición

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión 4 es doble extensión de un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de dimensión 2 si y sólo si $\mathfrak{g}$ es resoluble con centro no trivial.

Demostración Si $\mathfrak{g}$ es una doble extensión de $\mathbb{R}^2$ ó de $aff(\mathbb{R})$, entonces $\mathfrak{g}$ es resoluble. Además $\mathfrak{g}$ contiene un ideal central. Recíprocamente, según el teorema 2.3.4, un álgebra de Lie resoluble con centro no trivial es una doble extensión de $\mathbb{R}^2$ ó de $aff(\mathbb{R})$. $\square$

Por analogía con las dobles extensiones simplécticas (véase la proposición 1.6.3), se tiene el siguiente resultado:

4.2.2 Proposición

Sean $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie de dimensión 2, ω una 2-forma cerrada sobre $\mathfrak{h}$ con valores en $\mathbb{R}$ y δ una derivación de $\mathfrak{h}$. Entonces la obstrucción $[\alpha_{\omega,\delta}] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ es nula si y sólo si la clase $[\omega] \in H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ es nula ó la traza $tr(\delta)$ de δ es nula. De manera precisa,

i) si $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^2$, la obstrucción $[\alpha_{\omega,\delta}] = 0$ si y sólo si $\omega = 0$ ó $tr(\delta) = 0$;

ii) si $\mathfrak{h} = aff(\mathbb{R})$, la obstrucción $[\alpha_{\omega,\delta}] = 0$.

Demostración Procediendo de la misma manera que en el caso simpléctico (véase la prueba del lema 1.6.2), se tiene que $\alpha_{\omega,\delta} = tr(\delta)\omega$. Luego la obstrucción $[\alpha_{\omega,\delta}] = tr(\delta)[\omega]$ y la primera afirmación resulta evidente. En el caso (i), basta observar que las clases de $H^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ se identifican con las 2-formas cerradas sobre $\mathbb{R}^2$. En el caso (ii), la afirmación es una consecuencia de la condición $H^2(aff(\mathbb{R}), \mathbb{R}) = 0$. $\square$

Si $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^2$, las 2-formas cerradas sobre $\mathfrak{h}$ son múltiplos reales de la forma simpléctica canónica y las derivaciones de $\mathfrak{h}$ son endomorfismos de $\mathbb{R}^2$. Además las 2-formas cerradas y las derivaciones se identifican con las respectivas clases en $H^2(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ y $H^1(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$. El siguiente resultado constituye una adaptación de los corolarios 3.5.2 y 3.5.3:

4.2.3 Proposición

Sea $\mathfrak{g}$ una doble extensión de $\mathbb{R}^2$ definida por una 2-forma cerrada ω y un endomorfismo

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$$

Entonces el álgebra de Lie subyacente sólo depende (salvo isomorfismo) de la condición $\omega = 0$ ó $\omega \neq 0$ y de la forma canónica de Jordan del endomorfismo δ. Si $\omega = 0$, entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un producto semidirecto $\mathbb{R}^3 \rtimes_{\Delta_\varphi} \mathbb{R}$ definido por un endomorfismo

$$\Delta_\varphi = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathbb{R}^3$ y está completamente determinada (salvo isomorfismo) por la forma canónica de Jordan de Δ_φ. $\square$

Para determinar las álgebras de Lie de dimensión 4 que son doble extensión de $\mathbb{R}^2$, se puede reducir cada derivación δ a su forma canónica de Jordan, es decir, basta considerar las siguientes derivaciones (que son precisamente las que aparecen en la lista de dimensión 3):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha' & -1 \\ 1 & \alpha' \end{pmatrix}$$

donde $|\,\alpha\,| \leq 1$ y $\alpha' \geq 0$. En el caso $\mathfrak{h} = aff(\mathbb{R})$, la caracterización es más simple, ya que $H^2(aff(\mathbb{R}), \mathbb{R}) = 0$ y $H^1(aff(\mathbb{R}), aff(\mathbb{R})) = Der(aff(\mathbb{R}))/ad(aff(\mathbb{R})) = 0$.

4.3 Dobles extensiones de dimensión 4

El objetivo de este párrafo es describir las álgebras de dimensión 4 que se pueden obtener por doble extensión a partir de $\mathfrak{g}_1^2 = \mathbb{R}^2$ ó de $\mathfrak{g}_2 = aff(\mathbb{R})$. A lo largo del párrafo, se usará la notación de [Ve] (en particular, la escritura $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}$). De acuerdo con la proposición 4.2.1, se trata de las álgebras de Lie resolubles con centro no trivial. Antes de dar una lista, se dan dos tablas preliminares: la primera incluye las álgebras de Lie de dimensión 3 que admiten una estructura de extensión central y la segunda aquellas que admiten una estructura de producto semidirecto:

	$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1^2$	$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_2$
$\omega = 0$	$\mathfrak{g}_1^3$	$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$
$\omega \neq 0$	$\mathfrak{g}_{3,1}$	$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$

Tabla 2 Algebras de Lie $\widehat{\mathfrak{h}} \cong \mathfrak{h} \times_\omega \mathfrak{g}_1$

	$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1^2$	$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_2$
$\delta = 0$	$\mathfrak{g}_1^3$	$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$
$\delta = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	$\mathfrak{g}_{3,1}$	$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$
$\delta = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ $0 \leq \lvert\alpha\rvert \leq 1$	$\mathfrak{g}_{3,2}(\alpha)$	$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$
$\delta = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$	$\mathfrak{g}_{3,3}$	$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$
$\delta = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ $\alpha \geq 0$	$\mathfrak{g}_{3,4}(\alpha)$	$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$

Tabla 3. Algebras de Lie $\widehat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{h} \rtimes_\delta \mathfrak{g}_1$

La siguiente tabla incluye las álgebras de Lie de dimensión 4 que se obtienen por doble extensión a partir de $\mathfrak{g}_1^2 = \mathbb{R}^2$ ó de $\mathfrak{g}_2 = aff(\mathbb{R})$. Cada fila corresponde a la extensión central de partida que se denota $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \times_\omega \mathfrak{g}_1$ y se indica en la columna situada a la izquierda. Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1^2$, entonces el álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{h}}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_1^3$ ó $\mathfrak{g}_{3,1}$ dependiendo de la condición $\omega = 0$ ó $\omega \neq 0$. Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_2$, entonces el álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{h}}$ es isomorfa a la extensión trivial $\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$. Las columnas indican el producto semidirecto de partida que se denota $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \rtimes_\delta \mathfrak{g}_1$ y se indica en la fila superior. En el caso $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1^2$, esta lista tiene en cuenta la reducción de la derivación δ a su forma canónica de Jordan. Por último, fijada una base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathfrak{h}$ y la base dual $\{e_1^*, e_2^*\}$ de $\mathfrak{h}^*$, se denota $\varphi = \varphi_1 e_1^* + \varphi_2 e_2^*$ la primitiva de $\alpha_{\omega,\delta}$ que define la doble extensión.

		.1	.2	.3	.4	.5	.6
		$\mathfrak{g}_1^3$	$\mathfrak{g}_{3,1}$	$\mathfrak{g}_{3,2}(\alpha)$ $0\leq\lvert\alpha\rvert\leq 1$	$\mathfrak{g}_{3,3}$	$\mathfrak{g}_{3,4}(\alpha)$ $0\leq\alpha$	$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$
1	$\mathfrak{g}_1^3$	$\mathfrak{g}_1^4$ si $\varphi=0$ $\mathfrak{g}_{3,1} \times \mathfrak{g}_1$ si $\varphi\neq 0$	$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,1}$ si $\varphi_1=0$ $\mathfrak{g}_{4,3}$ si $\varphi_1\neq 0$	$\mathfrak{g}_{3,2}(0) \times \mathfrak{g}_1$ si $\alpha=0$ y $\varphi=0$ $\mathfrak{g}_{4,4}$ si $\alpha=0$ y $\varphi\neq 0$ $\mathfrak{g}_{3,2}(\alpha) \times \mathfrak{g}_1$ si $\alpha\neq 0$	$\mathfrak{g}_{3,3} \times \mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_{3,4}(\alpha) \times \mathfrak{g}_1$	
2	$\mathfrak{g}_{3,1}$	$\mathfrak{g}_{3,1} \times \mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_{4,3}$	$\mathfrak{g}_{4,9}(0)$ si $\alpha=-1$		$\mathfrak{g}_{4,11}(0)$ si $\alpha=0$	
3	$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$						$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1^2$ si $\varphi_1=0$ $\mathfrak{g}_{4,4}$ si $\varphi_1\neq 0$

Tabla 4. Dobles extensiones de dimensión 4

1. Caso $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}_1^3$

Según la proposición 4.2.2, la obstrucción a la doble extensión es nula, ya que el álgebra de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1^2$ y la 2-forma cerrada $\omega = 0$. Cualquier doble extensión $\mathfrak{g}$ es isomorfa a un producto semidirecto $\mathfrak{g}_1^3 \rtimes_{\Delta_\varphi} \mathfrak{g}_1$ definido por un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$

$$\Delta_\varphi = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix}$ es un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ y $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ es un elemento de $\mathbb{R}^2$ que se identifica con una 1-forma cerrada sobre $\mathfrak{g}_1^2$. Esto significa que $\mathfrak{g}$ posee una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tal que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de $\mathfrak{g}_1^3$ y los corchetes de Lie $[e_4, e_i] = \Delta_\varphi(e_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Para determinar qué álgebras de Lie se obtienen de esta manera, el endomorfismo Δ_φ se puede reducir a su forma canónica de Jordan.

Subcaso 1.1

La doble extensión $\mathfrak{g}$ está definida por un endomorfismo

$$\Delta_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\varphi = 0$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_1^4$. Si $\varphi \neq 0$, la forma canónica de Jordan de Δ_φ es igual a

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa al producto semidirecto $\mathfrak{g}_1^3 \rtimes_\Delta \mathfrak{g}_1$. Puesto que el único corchete de Lie no nulo está dado por $[e_4, e_2] = e_3$, se tiene que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,1}$.

Subcaso 1.2

En este caso, la doble extensión $\mathfrak{g}$ está definida por un endomorfismo

$$\Delta_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\varphi_1 = 0$, la forma canónica de Jordan de Δ_φ es igual a

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y de nuevo $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_{3,1} \times \mathfrak{g}_1$. Si $\varphi_1 \neq 0$, la forma canónica de Jordan de Δ_φ es igual a

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ya que los autovalores de Δ_φ son nulos y la dimensión del núcleo es 1. Por tanto, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa al producto semidirecto $\mathfrak{g}_1^3 \rtimes_\Delta \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_{4,3}$ (ya que los únicos corchetes de Lie no nulos son $[e_4, e_1] = e_2$ y $[e_4, e_2] = e_3$).

Subcaso 1.3

La doble extensión $\mathfrak{g}$ está definida por un endomorfismo

$$\Delta_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\mid \alpha \mid \leq 1$. Si $\alpha = 0$, entonces los autovalores de Δ_φ son 1, 0 y 0. En esta situación, hay dos casos posibles:
i) si $\varphi_2 = 0$, la forma canónica de Jordan de Δ_φ es igual a:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_1^3 \rtimes_\Delta \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_{3,2}(0) \times \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1^2$ (ya que el único corchete de Lie no nulo es $[e_4, e_1] = e_1$);
ii) si $\varphi_2 \neq 0$, la forma canónica de Jordan de Δ_φ está dada por:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_1^3 \rtimes_\Delta \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_{4,4}$ (ya que los únicos corchetes de Lie no nulos son $[e_4, e_1] = e_1$ y $[e_4, e_2] = e_3$).
Si $\alpha \neq 0$, el endomorfismo δ es inversible. Según el corolario 3.3.3, la doble extensión es única. De esta forma, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_{3,2}(\alpha) \times \mathfrak{g}_1$ (ya que $\varphi = 0$ es una primitiva de la obstrucción a la doble extensión).

Subcaso 1.4

De nuevo, la derivación $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es inversible y sólo existe una doble extensión $\mathfrak{g}$. Por la misma razón que en el caso anterior, el álgebra de Lie $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_{3,3} \times \mathfrak{g}_1$.

Subcaso 1.5

En este caso, la derivación $\delta = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ también es inversible y la única doble extensión es isomorfa a $\mathfrak{g}_{3,4}(\alpha) \times \mathfrak{g}_1$.

2. Caso $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}_{3,1}$

Puesto que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1^2$ y la 2-forma cerrada $\omega \neq 0$, la obstrucción a la doble extensión es nula si y sólo si la traza $tr(\delta) = 0$ según la proposición 4.2.2. En tal caso, cualquier doble extensión $\mathfrak{g}$ es isomorfa al producto semidirecto $\mathfrak{g}_{3,1} \rtimes_{\Delta_\varphi} \mathfrak{g}_1$ definido por una derivación Δ_φ de $\mathfrak{g}_{3,1}$. Este álgebra de Lie posee una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tal que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de $\mathfrak{g}_{3,1}$ (donde $\{e_1, e_2\}$ es una base de $\mathfrak{g}_1^2$ y e_3 es un elemento central) y los corchetes de Lie $[e_4, e_i] = \Delta_\varphi(e_i)$ para cada $i = 1, 2, 3$. En función de esta base, la derivación $\Delta\varphi$ se expresa:

$$\Delta_\varphi = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Subcaso 2.1

Si $\delta = 0$, entonces $tr(\delta) = 0$ y se puede construir una doble extensión $\mathfrak{g}$. La derivación $\Delta\varphi$ que define esta doble extensión está dada por

$$\Delta_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego los corchetes de Lie no nulos están dados por:

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -\omega(e_1, e_2)e_3 \\ [e_4, e_1] &= \varphi_1 e_3 \\ [e_4, e_2] &= \varphi_2 e_3. \end{aligned}$$

Sustituyendo e_4 por $e_4 + \frac{\varphi_2}{\omega(e_1,e_2)}e_1 - \frac{\varphi_1}{\omega(e_1,e_2)}e_2$ y e_3 por $-\omega(e_1, e_2)e_3$, se obtiene una nueva base (denotada de la misma manera) tal que

$$[e_1, e_2] = e_3$$

es el único corchete de Lie no trivial. Por tanto, el álgebra de Lie $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_{3,1} \times \mathfrak{g}_1$.

Subcaso 2.2

Puesto que la traza de la derivación $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es nula, la obstrucción a la doble extensión es nula. Una doble extensión $\mathfrak{g}$ está determinada por una derivación

$$\Delta_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

y los únicos corchetes de Lie no nulos son

$$\begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & -\omega(e_1, e_2)e_3 \\ [e_4, e_1] & = & \varphi_1 e_3 \\ [e_4, e_2] & = & e_1 + \varphi_2 e_3. \end{array}$$

Sustituyendo e_4 por $e_4 + \frac{\varphi_2}{\omega(e_1,e_2)}e_1 - \frac{\varphi_1}{\omega(e_1,e_2)}e_2$ y e_3 por $\widetilde{e_3} = -\omega(e_1, e_2)e_3$, los corchetes de Lie no nulos se reducen a los corchetes:

$$\begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & e_3 \\ [e_4, e_2] & = & e_1. \end{array}$$

Se sigue que $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_{4,3}$.

Subcaso 2.3

La traza de la derivación $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ es nula si y sólo si $\alpha = -1$. Luego la obstrucción a la doble extensión es nula si y sólo si

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En tal caso, existe una única doble extensión $\mathfrak{g}$, ya que la derivación es inversible. Además, como en los casos anteriores, se puede suponer que $\varphi = 0$. Por tanto, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa al producto semidirecto $\mathfrak{g}_{3,1} \rtimes_{\Delta_0} \mathfrak{g}_1$ definido por la derivación

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este álgebra de Lie es isomorfa a $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$.

Subcaso 2.4

En este caso, no existe ninguna doble extensión ya que la traza de $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es nula.

Subcaso 2.5

La traza de la derivación $\delta = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ es nula si y sólo si $\alpha = 0$. Además δ es inversible y existe una única doble extensión $\mathfrak{g}$. Como en el caso 2.3, el álgebra de Lie obtenida es isomorfa al producto semidirecto $\mathfrak{g}_{3,1} \rtimes_{\Delta_0} \mathfrak{g}_1$, donde

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_{4,11}(0)$.

3. Caso $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$

Puesto que $H^2(\mathfrak{g}_2, \mathbb{R}) = 0$, la obstrucción a la doble extensión es siempre nula. Por otra parte, se puede suponer que la derivación δ es nula, ya que $H^1(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2) = Der(\mathfrak{g}_2)/ad(\mathfrak{g}_2) = 0$. En cuanto a las primitivas de $\alpha_{\omega,\delta}$, las únicas 1-formas cerradas sobre $\mathfrak{g}_2$ son los múltiplos $\varphi = \varphi_1 e_1^*$ de e_1^* (donde $\{e_1, e_2\}$ es una base de $\mathfrak{g}_2$ tal que $[e_1, e_2] = e_2$). Por tanto, una doble extensión $\mathfrak{g}$ es isomorfa al producto semidirecto $(\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1) \rtimes_{\Delta_\varphi} \mathfrak{g}_1$ definido por la deriviación

$$\Delta_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\varphi_1 = 0$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1^2$; si $\varphi_1 \neq 0$, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_{4,4}$.

4.4 Dimensión de los espacios de dobles extensiones

En el párrafo anterior, se han descrito las álgebras de Lie de dimensión 4 que se pueden obtener por doble extensión a partir de un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de dimensión 2. Ahora bien, cada una de estas álgebras puede admitir distintas estructuras de doble extensión. Si se fija una 2-forma cerrada $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}^*$ y una derivación $\delta \in Der(\mathfrak{h})$, el espacio afín de las clases de isomorfía fuerte

$$\mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}] \cong H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R})/Im\,\overline{\alpha}(\delta)$$

según el teorema 3.3.2 y el espacio afín de las clases de isomorfía

$$\mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h}) \cong H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R})/Im\,\overline{\alpha}(\delta) + i_{Z(\mathfrak{h})}\omega.$$

según el teorema 3.4.2. Obsérvese que la dimensión del espacio $\mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}]$ es igual al número de componentes de $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ que intervienen en la descripción de la doble extensión. Por otra parte, si la 2-forma cerrada ω no es nula, entonces $i_{Z(\mathfrak{h})}\omega = H^1(\mathfrak{h}, \mathbb{R})$ y el álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ posee una única doble extensión salvo isomorfismo. En las dos siguientes tablas, se describe de manera explícita la dimensión de los espacios afines $\mathcal{D}Ext_{([\omega],\delta)}[\mathfrak{h}]$ y $\mathcal{D}Ext_{([\omega],[\delta])}(\mathfrak{h})$:

		.1	.2	.3	.4	.5	.6
		$\mathbb{R}^3$ δ=0	$\mathfrak{g}_{3,1}$ $\delta=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathfrak{g}_{3,2}(\alpha)$ $\delta=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $0\leq\lvert\alpha\rvert\leq 1$	$\mathfrak{g}_{3,3}$ $\delta=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathfrak{g}_{3,4}(\alpha)$ $\delta=\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ $0\leq\alpha$	$\mathfrak{g}_2\times\mathbb{R}$ δ=0
1	$\mathbb{R}^3$	2	1	1 si $\alpha=0$ 0 si $\alpha\neq 0$	0	0	
2	$\mathfrak{g}_{3,1}$	2	1	0 si $\alpha=-1$		0	
3	$\mathbb{R}\times\mathfrak{g}_2$						1

Tabla 5. Dimensión de $H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R})/Im\,\overline{\alpha}(\delta)$

		.1	.2	.3	.4	.5	.6
		$\mathbb{R}^3$ δ=0	$\mathfrak{g}_{3,1}$ $\delta=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathfrak{g}_{3,2}(\alpha)$ $\delta=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $0\leq\lvert\alpha\rvert\leq 1$	$\mathfrak{g}_{3,3}$ $\delta=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathfrak{g}_{3,4}(\alpha)$ $\delta=\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ $0\leq\alpha$	$\mathfrak{g}_2\times\mathbb{R}$ δ=0
1	$\mathbb{R}^3$ $\omega=0$	2	1	1 si $\alpha=0$ 0 si $\alpha\neq 0$	0	0	
2	$\mathfrak{g}_{3,1}$ $\omega\neq 0$	0	0	0 si $\alpha=-1$		0	
3	$\mathbb{R}\times\mathfrak{g}_2$ $\omega=0$						1

Tabla 6. Dimensión de $H^1(\mathfrak{h},\mathbb{R})/Im\,\overline{\alpha}(\delta)+i_{Z(\mathfrak{h})}\omega$.

4.5 Dobles extensiones simplécticas

En este párrafo, se describen las álgebras de Lie simplécticas de dimensión 4 que se obtienen por doble extensión a partir de $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1^2$ ó de $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_2$ dotadas de las estructuras simplécticas canónicas. Según la proposición 1.6.3, la obstrucción a la doble extensión simpléctica admite una formulación particularmente simple en ambos casos. Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1^2$, la obstrucción a la doble extensión simpléctica es nula si y sólo si la traza de la derivación δ es nula. Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_2$, la obstrucción a la doble extensión es nula. La siguiente tabla resume el caso simpléctico:

		.1	.2	.3	.4	.5	.6
		$\mathfrak{g}_1^3$	$\mathfrak{g}_{3,1}$	$\mathfrak{g}_{3,2}(\alpha)$ $0\leq\lvert\alpha\rvert\leq 1$	$\mathfrak{g}_{3,3}$	$\mathfrak{g}_{3,4}(\alpha)$ $0\leq\alpha$	$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$
1	$\mathfrak{g}_1^3$	$\mathfrak{g}_1^4$ si $\varphi=0$ $\mathfrak{g}_{3,1} \times \mathfrak{g}_1$ si $\varphi\neq 0$	$\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{3,1}$ si $\varphi_1=0$ $\mathfrak{g}_{4,3}$ si $\varphi_1\neq 0$	$\mathfrak{g}_{3,2}(-1) \times \mathfrak{g}_1$		$\mathfrak{g}_{3,4}(\alpha) \times \mathfrak{g}_1$	
2	$\mathfrak{g}_{3,1}$						
3	$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1$						$\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{g}_1^2$ si $\varphi_1=0$ $\mathfrak{g}_{4,4}$ si $\varphi_1\neq 0$

Tabla 7. Dobles extensiones simplécticas de dimensión 4

Bibliografía

[A] F. Alcalde Cuesta, *Integración simpléctica de las variedades de Poisson riemannianas*. Tesis, Santiago de Compostela, 1991.

[AH] F. Alcalde Cuesta et G. Hector, Intégration symplectiques des variétés de Poisson régulières. *Israel J. Math.*, **90** (1995), 125-165.

[AM] R. Almeida et P. Molino, Suites d'Atiyah, feuilletages et quantification. *Séminaire Gaston Darboux de Géométrie et Topologie Différentielle*, Université de Montpellier, 1984-1985.

[At] M.F. Atiyah, Complex analytic connections in fibre bundles. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85** (1957), 181-207.

[BT] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in Algebraic Topology.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[B] K. S. Brown, *Cohomology of groups.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[D] J. M. Dardié, *Groupes de Lie symplectiques ou kahlériens et double extension.* Thèse, Université de Montpellier II, 1993.

[DM] J. M. Dardié et A. Medina, Double extension symplectique d'un groupe de Lie symplectique. *Adv. Math.*, **117** (1996), 208-227.

[tD] tom Diek, *Transformations groups.* Walter de Gruyter, Berlin, 1987.

[vE] W.T. van Est, Groupes locaux analytiques et abstraits. *Séminaire Gaston Darboux de Géométrie et Topologie*, Université de Montpellier, 1987, 19-42.

[G] A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie.* Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1980.

[H] G. Hochschild, Group extensions of Lie groups I & II. *Ann. of Math.*, **54** (1951), 96-109 & 537-551.

[HS] G. Hochschild and J. P. Serre, Cohomology of Lie algebras. *Ann. of Math.*, **57** (1953), 591-603.

[KN] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry.* Interscience, New York, 1963.

[K] B. Kostant, Quantization and unitary representations, in *Lectures in modern analysis and applications*, Springer L.N.M.170. Springer, Berlin, 1970.

[MR] A. Medina et Ph. Revoy, Groupes de Lie à structure Symplectique invariante (en *Symplectic Geometry, Grupoids and Integrable Systems*, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie à Berkeley). *Springer Math. Sc. Res. Inst. Publ.*, **20** (1991), 247-266.

[N] K. H. Need, A note on central extensions of Lie groups. *Journal of Lie Theory*, **6** (1966), 207-213.

[OV] A. L. Onishchik and E. B. Vingerg Eds., Lie Groups and Lie Algebras III. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer, Berlin, 1994.

[SW] A. A. Sagle, R. E. Walde, *Introduction to Lie groups and Lie algebras*. Academic Press, New York, 1973.

[S] J. M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod, Paris, 1970.

[T] G.M. Tuynman, *An elementary proof of Lie's third theorem*. Publ. IRMA. Lille, vol. **34** (1994).

[TW] G.M. Tuynman and W.A.J.J. Wiegerinck, Central extensions and physics. *J. Geom. Physics*, **4** (1987), 207-258.

[V] V.S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Prentice-Hall, 1974.

[Ve] M. Vergne, Construction de représentations irréductibles des groupes de Lie résolubles (en *Représentations des groupes de Lie résolubles*). Monographies de la Société Mathétmatique de France, **4** (1972), 177-216.

[W] A. Weil, *Variétés Kähleriennes*. Hermann, Paris, 1958.