Manuel Fernández López

TRANSFORMACIÓNS XEODÉSICAS EN XEOMETRÍA CUATERNIÓNICA

94
1998

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

TRANSFORMACIÓNS XEODÉSICAS EN XEOMETRÍA CUATERNIÓNICA

Manuel Fernández López

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección dos profesores Eduardo García Río e Ramón Vázquez Lorenzo, para obter o grao de Licenciado en Ciencias Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levouse a cabo a súa defensa o día 29 de Outubro de 1998 na Facultade de Matemáticas da dita Universidade, obtendo a cualificación de Sobresaliente.

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 84-89390-11-8

Dep. Leg.: C-2101/98

Á miña nai e ó meu pai.

Agradecementos

Gustaríame darlles as gracias ós directores desta memoria, Eduardo García Río e Ramón Vázquez Lorenzo, por propoñerme o tema do traballo, ensinarme o manexo do LaTeX, resolverme tódalas dúbidas que tiven, facer que traballar con eles sexa moi grato, ... Tamén quero mostrar o meu agradecemento a Luis M. Hervella Torrón pola súa atención constante e os ánimos proporcionados durante a elaboración deste traballo. Desexo facer extensivo este agradecemento a Agustín Bonome Dopico e a Regina Castro Bolaño, pola súa cordialidade e por facilitarme o traballo en canto estivo nas súas mans. Por último, doulles as gracias á tódolos compoñentes do Departamento de Xeometría e Topoloxía polo apoio e ánimos prestados.

Abstract

The notion of a reflection with respect to a point or a linear subspace of the Euclidean space has been generalized to that of a geodesic reflection with respect to a point or a submanifold in Riemannian manifolds. These local transformations have been broadly studied not only in the general case but also in the framework of Hermitian, quaternionic and contact geometry. In many cases, this study leads to nice geometric properties and to characterizations of special classes of Riemannian manifolds or of special classes of submanifolds (see, e.g., [CV1], [KPV], [TV] and [V]). In all these studies Jacobi vector fields and normal and Fermi coordinates are basic tools. Among other properties of the geodesic reflections isometric, volume-preserving, holomorphic, symplectic and harmonic ones received special attention.

However, there are many other important geometric properties which could not be characterized by the properties of geodesic reflections. For example, two-point homogeneous spaces, harmonic spaces, totally umbilical hypersurfaces, Hopf hypersurfaces, etc. With the aim of obtaining characterizations of these properties other types of transformations were generalized to arbitrary Riemannian manifolds. One of such classes of transformations are the homotheties and inversions with respect to spheres of the Euclidean geometry. They have been generalized in [T] to general Riemannian manifolds and further studied in [D], [GV1], [GV5]. In [T] the notions of non-Euclidean similarities and non-Euclidean inversions are introduced in relation with the study of spaces of constant curvature. In [GV1] it is shown that (partially) conformal geodesic transformations are characteristic of real spaces forms.

Our main objective here is to study geometric properties of almost quaternionic manifolds through the investigation of the geodesic transformations. Non-isometric conformal geodesic transformations with respect to a given submanifold may only occur when it is a point or a hypersurface. If there exists a non-isometric geodesic transformation with respect to a point then the Jacobi operators are multiples of the identity at that point. This shows the non existence of conformal geodesic transformations with respect to points in non-flat quaternionic space forms. Moreover, if there exists a non-isometric conformal geodesic transformation with respect to a hypersurface then it must be totally umbilical, which prove that such transformations cannot exist in quaternionic space forms of non-zero constant curvature. These above arguments motivate the study of a weaker property than conformality, leading to be definition of partially conformal geodesic transformations. The study of such kind of transformations is the major concern of this work.

In the first chapter we collect some basic material about Jacobi vector fields, normal and Fermi coordinates and power series expansions, which is needed to describe and study the geodesic transformations. In the second chapter we summarize some known results on the geometry of geodesic transformations. We state the definition and collect some information about conformal, divergence-preserving and holomorphic geodesic transformations. The third chapter is a brief introduction to quaternionic geometry, where we fix

some notation needed further on. Chapter four constitutes the main part of this work. We investigate the relations between the existence of partially conformal geodesic transformations and the geometry of the almost quaternionic manifolds and their submanifolds. We give the definition of a partially conformal geodesic transformation and we derive the first results. One of such results is the determination of the submanifolds with respect to which may exist a partially conformal geodesic transformation (see Theorem 4.2.2). The main result of this section is the Theorem 4.2.3, which states that non-isometric partially conformal geodesic transformations only exist with respect to points or real hypersurfaces. This fact motivates a separate study of the transformations with respect to points and real hypersurfaces. In the first case, we derive necessary and sufficient conditions for the existence of partially conformal geodesic transformations. These conditions are expressed in terms of the Jacobi operators and their covariant derivatives and we derive some conclusions from them (Theorem 4.3.2 and Theorem 4.3.3). We also give the following characterization of quaternionic space forms: *An almost quaternionic manifold is a quaternionic space form of non-zero curvature if and only there exists a strictly partially conformal geodesic transformation with respect to each point of the manifold* (see Theorem 4.3.4). Finally we determine the partially conformal geodesic transformations with respect to points occurring in an almost quaternionic manifold which admits a partially conformal geodesic transformation with respect to each point by showing that only (non)-Euclidean similarities occur. In the last section of this chapter we develop a similar study for partially conformal geodesic transformations with respect to real hypersurfaces. First, we obtain sufficient conditions for the existence of partially conformal geodesic transformations with respect to such submanifolds (see Theorem 4.4.1). These conditions are expressed in terms of the normal Jacobi operator and its covariant derivatives which allow us to give a new characterization of the quaternionic space forms: *An almost quaternionic manifold is a quaternionic space form of non-zero curvature if and only there exists a strictly partially conformal geodesic transformation with respect to each geodesic sphere of sufficiently small radius* (see Theorem 4.4.2). Finally, we give a classification of the partially conformal geodesic transformations with respect to real hypersurfaces occurring in quaternionic space forms. Here, in addition to the (non)-Euclidean inversion, some new kind of geodesic transformations appear associated to horospheres and tubes about totally geodesic submanifolds.

Contidos

Introducción **i**

1 Xeometría en veciñanzas tubulares **1**
1.1 Preliminares xeométricos . . . 1
1.2 Coordenadas de Fermi e coordenadas normais . . . 4
1.3 Ecuacións básicas . . . 8

2 Reflexións e transformacións xeodésicas **11**
2.1 Reflexións xeodésicas . . . 11
2.2 Transformacións xeodésicas . . . 14
2.2.1 Transformacións xeodésicas conformes . . . 16
2.2.2 Transformacións xeodésicas que conservan a diverxencia . . . 16
2.2.3 Transformacións xeodésicas holomorfas . . . 18

3 Variedades cuaterniónicas **19**
3.1 Conceptos básicos . . . 19
3.2 Curvatura de variedades cuaterniónicas . . . 22
3.2.1 Espacios modelos . . . 25

4 Transformacións xeodésicas en xeometría cuaterniónica **27**
4.1 Introducción . . . 27
4.2 Transformacións parcialmente conformes . . . 27
4.3 Transformacións con respecto a puntos . . . 40
4.4 Transformacións con respecto a hipersuperficies . . . 57

Bibliografía **69**

Introducción

No estudio da xeometría de variedades de Riemann é a miúdo útil a consideración de diversos "obxectos xeométricos" asociados de forma natural á variedade considerada (M, g). Este tipo de obxectos xeométricos poden ser clases especiais de hipersuperficies (tales como esferas xeodésicas ou tubos de raio suficientemente pequeno), distintos tipos de espacios fibrados tendo a (M, g) como base (como son o fibrado de referencias, o fibrado tanxente, o fibrado tanxente esférico, etc.), ou determinados tipos de transformacións locais que permitan mostrar simetrías sobre a variedade.

Este último tipo de obxectos xeométricos é o punto de partida deste traballo. Motivado polas propiedades das reflexións (con respecto a puntos ou subespacios) do espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, xeneralizáronse tales transformacións locais á situación xeral de variedades riemannianas [CV1], [TV]. O estudio das propiedades das simetrías xeodésicas (carácter isométrico, conforme, harmónico, holomorfo, simpléctico, etc.) permitiu obter interesantes caracterizacións xeométricas de distintas propiedades: espacios localmente simétricos, de curvatura constante, subvariedades mínimas, subvariedades totalmente xeodésicas, etc.

Sen embargo, existen outros tipos de transformacións de grande importancia que foron escasamente estudiadas en marcos máis xerais. Entre estas transformacións, merecen destacarse as semellanzas e as inversións, que en virtude dun teorema de Liouville proporcionan as únicas transformacións conformes do espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 3)$. Coa intención de xeneralizar as ditas transformacións a variedades riemannianas, Tachibana introduce en [T] o concepto de *transformación xeodésica*. El mesmo e, máis tarde, D'Atri [D] mostran a estreita relación existente entre o carácter constante da curvatura seccional e a existencia de transformacións xeodésicas conformes.

Recentemente, realizouse un estudio sistemático das transformacións xeodésicas en variedades de Riemann. O dito estudio, permitiu caracterizar non só os espacios homoxéneos 2-puntos [GV1], senón tamén determinadas clases especiais de variedades e subvariedades, como son os espacios harmónicos [GV2], as hipersuperficies isoparamétricas [GV3] ou as variedades Kählerianas de curvatura seccional holomorfa constante [GV4].

O obxectivo desta memoria é realizar un estudio do significado xeométrico das transformacións xeodésicas no ámbito de variedades dotadas dunha estructura cuaterniónica. Dado que o estudio das transformacións xeodésicas conformes non presenta un grande interese en xeometría cuaterniónica, en [GV1] fixose unha adaptación da noción de "transformación parcialmente conforme" previamente introducida por Tanno [Ta]. O noso propósito é obter condicións necesarias e suficientes para a existencia de transformacións parcialmente conformes e expresar as ditas condicións en termos dos operadores de Jacobi e as súas derivadas, o que permitirá interpretalas xeometricamente.

De modo breve indicamos a seguir os contidos esenciais desta memoria: nos capítulos primeiro e segundo recóllense distintos preliminares necesarios para o estudio das transformacións xeodésicas en xeometría de Riemann. O capítulo terceiro é unha introducción a nocións básicas de xeometría cuaterniónica. A maior parte do traballo desenvolvido atópase no capítulo cuarto. En primeiro lugar mostramos que as transformacións parcialmente conformes só son de interese cando se consideran con respecto a puntos ou hipersuperficies reais. Posteriormente, obtemos condicións necesarias e suficientes para a existencia de tal tipo de transformacións, o que nos permite obter unha caracterización xeométrica das variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura seccional cuaterniónica constante.

Capítulo 1

Xeometría en veciñanzas tubulares

Neste capítulo recolleremos algúns resultados básicos e ben coñecidos que nos serán útiles ó longo deste traballo. Posto que o noso propósito, neste capítulo, consiste fundamentalmente en fixar a notación que empregaremos ó longo desta memoria, non incluiremos a demostración dos resultados que enunciaremos no que segue. Como referencias básicas pódense consultar [Gr],[V] e [KN].

1.1 Preliminares xeométricos

Sexa (M^n, g) unha variedade de dimensión n, que suporemos conexa e analítica, aínda que ás veces C^∞ será suficiente (o noso interese en que os obxectos cos que traballemos sexan, en ocasións, C^ω débese a que imos traballar con desenvolvementos en serie de potencias e, polo tanto, interésanos ter garantida a converxencia). Sexa ∇ a conexión de Levi Civita asociada á métrica de Riemann g, é dicir, a única conexión libre de torsión con respecto á cal g é un campo de tensores paralelo ($\nabla g = 0$). A dita conexión ∇ está caracterizada por satisfacer a identidade

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]), \end{aligned}$$

para todo X, Y, Z campos de vectores sobre a variedade M. O *tensor curvatura de Riemann de* ∇ está dado, usando o seguinte convenio para o signo, por:

$$R_{XY}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para toda terna X, Y, Z de campos de vectores sobre M. Este satisfai as seguintes identidades

$$R_{XY}Z = -R_{YX}Z, \tag{1.1.1}$$

$$R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0, \tag{1.1.2}$$

$$(\nabla_X R_{YZ})W + (\nabla_Y R_{ZX})W + (\nabla_Z R_{XY})W = 0, \tag{1.1.3}$$

para todo X, Y, Z, W campos de vectores sobre a variedade M. Referirémonos a (1.1.2) e (1.1.3) como *a primeira e a segunda identidade de Bianchi*, respectivamente. Ás veces, denotaremos $R_{XY}Z$ por $R(X,Y)Z$. Tamén escribiremos o tensor curvatura como un campo de tensores de tipo (0,4), definido pola expresión:

$$R(X,Y,Z,W) = g(R_{XY}Z, W),$$

que satisfai, ademais das identidades que se deducen de modo inmediato das que verifica $R_{XY}Z$, as seguintes:

$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z), \tag{1.1.4}$$

$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y). \tag{1.1.5}$$

O tensor curvatura de Riemann dunha variedade parece un concepto abstracto un tanto arbitrario. Sen embargo, o seu significado xeométrico aparece ó estudiar a curvatura seccional. Sexa m un punto da variedade M e denotemos por T_mM o espacio tanxente de M en m. Dado un subespacio bidimensional π de T_mM, defínese a curvatura seccional de π como o número real

$$K(\pi) = K(x,y) = \frac{R(x,y,y,x)}{g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2},$$

onde x e y son dous vectores linealmente independentes de T_mM que xeran π. Das propiedades do tensor curvatura enunciadas anteriormente séguese que $K(\pi) = K(x,y)$ é independente da escolla da base $\{x,y\}$ de π.

Como xa diximos, o concepto de curvatura seccional permite interpretar o significado xeométrico do tensor curvatura de Riemann e, ademais, o coñecemento da curvatura seccional de cada plano contido no espacio tanxente en cada punto da variedade determina completamente o tensor curvatura R.

Pasamos agora a definir dúas contraccións importantes do tensor curvatura, que son o tensor de Ricci e a curvatura escalar. O *tensor de Ricci* Ric está definido por

$$Ric(X,Y) = tr\{Z \rightsquigarrow R_{ZX}Y\},$$

e a *curvatura escalar* Sc está dada por

$$Sc = tr(Ric).$$

Dada unha curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ na variedade, denotaremos por $\frac{d}{dt}$ o campo de vectores paramétrico no intervalo I con respecto ó parámetro t e por $\gamma'(t) = (d\gamma)_t(\frac{d}{dt})$ o vector tanxente da curva γ correspondente ó valor t do parámetro. A derivada covariante dun campo de vectores X ó longo de γ denotarémola abreviadamente por X', é dicir, $X' = \dfrac{DX}{dt} = \nabla_{\gamma'}X$. Aínda que denotemos de igual forma tanto a derivada covariante dun campo de vectores (ou tensores, máis adiante) como o vector tanxente dunha curva, o contexto debería evitar toda posible confusión.

A seguir, defínense dous conceptos importantes da xeometría riemanniana, que serán esenciais ó longo desta memoria.

Definición 1.1.1 *Unha curva γ dise unha xeodésica se satisfai a ecuación diferencial de segunda orde*

$$\frac{D\gamma'}{dt} = \nabla_{\gamma'}\gamma' = 0.$$

O resultado que enunciamos a continuación, garántenos a existencia de xeodésicas nunha variedade diferenciable.

Teorema 1.1.1 *Sexan m un punto dunha variedade diferenciable M e v un vector de T_mM. Entón, existe unha xeodésica $\gamma_v : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$, definida nunha veciñanza I de 0, satisfacendo as condicións iniciais $\gamma_v(0) = m$ e $\gamma_v'(0) = v$. Ademais, esta xeodésica γ_v é única agás o dominio de definición.*

Definición 1.1.2 *Un campo de Jacobi $Y(t)$ ó longo dunha xeodésica γ é un campo de vectores ó longo de γ que satisfai a ecuación diferencial lineal de segunda orde*

$$Y''(t) + R_{Y(t)\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0, \qquad t \in I,$$

chamada ecuación diferencial de Jacobi.

Calquera campo de Jacobi Y está univocamente determinado polas condicións iniciais $Y(0)$ e $Y'(0)$. Isto débese a que a ecuación de Jacobi, $Y'' + R_{Y\gamma'}\gamma' = 0$, escrita en coordenadas locais é un sistema diferencial lineal de segunda orde. Polo tanto, as condicións iniciais $Y(0)$ e $Y'(0)$ determinan totalmente a solución.

Dada unha xeodésica γ, o operador R_γ ó longo de γ definido en $\langle\gamma'(t)\rangle^\perp \subset T_{\gamma(t)}M$, para cada t, por

$$R_{\gamma(t)} : x \in T_{\gamma(t)}M \longrightarrow R_{\gamma(t)}(x) = R_{x\gamma'(t)}\gamma'(t),$$

denomínase o *operador de Jacobi ó longo de* γ. Este operador xoga un papel fundamental no estudio da xeometría intrínseca e extrínseca das esferas xeodésicas, tubos e transformacións xeodésicas con respecto a subvariedades. O estudio destas últimas é o principal obxectivo desta memoria. Séguese das identidades (1.1.4) e (1.1.5) que R_γ é un operador autoadxunto. Polo tanto, $R_{\gamma(t)}$ é diagonalizable con autovalores reais, para todo t.

Os campos de vectores de Jacobi son unha ferramenta moi útil para tratar o problema de medir o cambio de lonxitude do arco dun segmento de xeodésica cando esta se somete a pequenas variacións. Unha curva pode compararse con outras "veciñas" mediante o concepto de *variación*, que nos dá unha idea precisa do que entendemos por "curva veciña" e que definimos a continuación.

Definición 1.1.3 *Sexa* $c : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ *unha curva diferenciable. Unha variación de* c *é unha aplicación diferenciable* $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \longrightarrow M$ *tal que* $f(0,t) = c(t)$, $t \in [a,b]$. *Para cada* $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, *a curva* $f_s(t) = f(s,t)$ *denomínase unha curva de variación e, para cada* $t \in [a,b]$, *a curva* $f_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$, $s \rightsquigarrow f_t(s) = f(s,t)$, *dise unha curva transversal. Os vectores velocidade das curvas transversais en* $s = 0$, $V(t) = \dfrac{\partial f}{\partial s}(0,t)$, *dan lugar a un campo de vectores ó longo de* $c(t)$, *chamado campo variacional de* f.

No caso en que a curva c sexa unha xeodésica e f sexa unha variación xeodésica de c, é dicir, cando cada curva de variación f_s sexa unha xeodésica, o campo de vectores variacional V é un campo de Jacobi, e o termo $R_\gamma V = R_{V\gamma'}\gamma'$ é clave na fórmula da segunda variación da enerxía.

Nós empregaremos os campos de Jacobi para calcular as compoñentes da métrica g ó longo dunha xeodésica nunha variedade de Riemann. Isto será de primordial importancia no Capítulo 4 desta memoria.

1.2 Coordenadas de Fermi e coordenadas normais

Ó longo desta memoria imos necesitar unha boa comprensión da xeometría dunha variedade M nunha veciñanza dunha subvariedade B, para o que precisaremos unha elección axeitada de coordenadas. No caso en que B se reduce a un punto, as coordenadas que nos resultarán máis útiles serán as *coordenadas normais*, e se $dim\, B \geq 1$ as máis convenientes serán as *coordenadas de Fermi*. Estas últimas son unha xeneralización das coordenadas normais e reciben o nome do famoso físico Enrico Fermi, que, orixinalmente, as empregou no caso en que B era unha curva, é dicir, cando B era unha subvariedade de dimensión un.

Posto que as coordenadas de Fermi son unha xeneralización das coordenadas normais, comezamos o estudio de ambas definindo primeiro as normais.

Sexa m un punto da variedade M. Dado un vector $v \in T_mM$ sexa γ_v a única xeodésica determinada polas condicións iniciais $\gamma_v(0) = m$ e $\gamma_v'(0) = v$. Entón, escribimos $exp_m(v) = \gamma_v(1)$, se a curva γ_v está definida para o valor do parámetro $t = 1$. Isto dá lugar a unha aplicación, exp_m, chamada aplicación exponencial de M no punto m, que, en xeral, non está definida en todo T_mM, senón que só está definida nunha veciñanza de $0 \in T_mM$.

Cada espacio tanxente T_mM é un espacio vectorial e, polo tanto, pódese dotar dunha estructura canónica de variedade diferenciable, que fai que T_mM sexa difeomorfo a $\mathbb{R}^n$, onde n é a dimensión da variedade M. Sexa $T_0(T_mM)$ o espacio tanxente de T_mM na orixe $0 \in T_mM$. Verifícase facilmente que a diferencial da aplicación exp_m en $0 \in T_mM$

$$d(exp_m)_0 : T_0(T_mM) \longrightarrow T_mM$$

é a identificación canónica entre T_mM e o seu espacio tanxente en 0. Logo, polo teorema da función inversa, temos que exp_m é un difeomorfismo dunha veciñanza de $0 \in T_mM$ nunha veciñanza de $m \in M$.

Definición 1.2.1 *Sexan (M, g) unha variedade de Riemann, m un punto da variedade M e V unha veciñanza do vector $0 \in T_mM$, tal que a aplicación*

$$exp_{m|_V} : V \longrightarrow U = exp_m(V)$$

é un difeomorfismo. Asociadas a unha base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_mM, defínense as coordenadas normais $(x^1, \ldots, x^n)$ por

$$x^j \left(exp_m \left(\sum_{i=1}^{n} t^i e_i \right) \right) = t^j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Diremos que $U = exp_m(V)$ é unha veciñanza normal do punto $m \in M$, e no caso particular en que V sexa unha bóla de centro $0 \in T_mM$ e raio ε diremos que U é unha bóla normal (ou xeodésica) de centro o punto m e raio ε. Chamarémoslle esfera xeodésica de centro m e raio ε á imaxe por exp_m da esfera de centro $0 \in T_mM$ e raio ε, e denotarémola por $G_m(\varepsilon)$.

Para un sistema de coordenadas normais (x^i), é obvio que $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(m) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Polo tanto, temos que

$$g_{ij}(m) = g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)(m) = \delta_{ij}.$$

Destacamos a existencia dunha estreita relación entre coordenadas normais e campos de Jacobi. En efecto, se $(x^1, \ldots, x^n)$ é un sistema de coordenadas normais asociado a unha base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_mM, entón os campos de vectores $Y_a(r) = r\dfrac{\partial}{\partial x^a}$, $a = 1, \ldots, n-1$, son campos de Jacobi ó longo da xeodésica $\gamma(r) = exp_m(re_n)$. Estes campos verifican as condicións iniciais $Y_a(0) = 0$ e $Y_a'(0) = e_a$. Máis adiante, usaremos estas relacións para calcular as compoñentes da métrica g ó longo da xeodésica γ. Este estudio só o faremos para as coordenadas de Fermi, pois veremos que tamén engloba este caso.

As coordenadas de Fermi son unha xeneralización natural das coordenadas normais, que xorden de considerar unha subvariedade B de M en lugar dun punto $m \in M$. Suporemos que B é unha subvariedade regular de M, é dicir, unha subvariedade topoloxicamente mergullada. Denotaremos por ν o fibrado normal de B en M, é dicir,

$$\nu = \{(m, v) \in TM/m \in B, v \in T_m^{\perp}B\},$$

sendo $T_m^{\perp}B$ o complemento ortogonal de T_mB en T_mM. Temos que ν é un fibrado vectorial sobre a variedade B e, tamén, unha variedade diferenciable. *A aplicación exponencial normal do fibrado normal* ν é a aplicación, que denotaremos por exp_{ν}, definida por

$$exp_{\nu}(m, v) = exp_m(v)$$

sendo $(m, v) \in \nu$. Posto que exp_m non está definida, en xeral, en todo T_mM é evidente que exp_{ν} non ten porque estar definida en todo ν. A pesar diso, ás veces cometeremos un abuso de notación e escribiremos $exp_{\nu} : \nu \to M$, sobreentendendo que non pedimos que a aplicación exp_{ν} estea definida en todo ν.

Identificando B coa sección cero do fibrado ν temos a inclusión natural $T_mB \subset T_{(m,0)}\nu$, sendo $T_{(m,0)}\nu$ o espacio tanxente da variedade ν no punto $(m, 0)$. Ademais, como pola definición de ν se verifica $T_m^{\perp}B \subset T_{(m,0)}\nu$, resulta que

$$T_{(m,0)}\nu = T_mB \oplus T_m^{\perp}B.$$

Empregando a anterior descomposición de $T_{(m,0)}\nu$, é fácil probar o seguinte:

Lema 1.2.1 *Sexa m un punto da subvariedade B. Logo:*

(i) A restricción de $d(exp_{\nu})_{(m,0)}$ a $T_0(T_m^{\perp}B)$ é a identificación canónica de $T_0(T_m^{\perp}B)$ con $T_m^{\perp}B$.

(ii) A restricción de $d(exp_{\nu})_{(m,0)}$ a $T_0(T_mB)$ é a inclusión canónica de T_mB en T_mM.

Utilizando o resultado anterior, pódese probar o seguinte:

Lema 1.2.2 *Sexan (M, g) unha variedade de Riemann e B unha subvariedade regular. Entón, a aplicación $exp_{\nu} : \nu \to M$ é un difeomorfismo dunha veciñanza de $B \subset \nu$ nunha veciñanza de $B \subset M$.*

O lema previo permítenos definir as coordenadas de Fermi.

Definición 1.2.2 *Sexan Θ_B unha veciñanza da sección cero de ν tal que $exp_{\nu} : \Theta_B \to exp_{\nu}(\Theta_B)$ é un difeomorfismo, q a dimensión da subvariedade B, $(y^1, \ldots, y^q)$ un sistema de coordenadas arbitrario definido nunha veciñanza $V \subset B$ dun punto $m \in B$, e $E_{q+1}, \ldots, E_n$ seccións ortonormais da restricción do fibrado ν a V. Entón, o sistema de coordenadas de Fermi $(x^1, \ldots, x^n)$ de $B \subset M$ centrado en $m \in B$ (relativo ó sistema de coordenadas $(y^1, \ldots, y^q)$ e as seccións ortonormais $E_{q+1}, \ldots, E_n$) está definido polas funcións coordenadas*

$$(1.2.1)\qquad x^j\left(exp_\nu\left(\sum_{i=q+1}^{n} t^i E_i(m')\right)\right) = y^j(m'), \qquad j = 1,\ldots,q,$$

$$(1.2.2)\qquad x^a\left(exp_\nu\left(\sum_{i=q+1}^{n} t^i E_i(m')\right)\right) = t^a, \qquad a = q+1,\ldots,n,$$

onde $m' \in V$ e os t^i se consideran suficientemente pequenos para que $\sum_{i=q+1}^{n} t^i E_i(m') \in \Theta_B$.

Observamos que as aplicacións (1.2.1) e (1.2.2) definen realmente un sistema de coordenadas, debido a que $exp_\nu : \Theta_B \to exp_\nu(\Theta_B)$ é un difeomorfismo, polo Lema 1.2.2. Tamén vemos que as coordenadas normais son un caso particular das coordenadas de Fermi, correspondente ó caso en que $q = 0$, i.e., cando a subvariedade B é un punto.

Para un sistema de coordenadas de Fermi $(x^1,\ldots,x^n)$, é obvio que $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(m) \in T_m B$, $i = 1,\ldots,q$, e $\dfrac{\partial}{\partial x^a}(m) = E_a(m)$, $a = q+1,\ldots,n$. Polo tanto, temos que

$$g_{ia}(m) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^a}\right)(m) = 0,$$

para $i = 1,\ldots,q$ e $a = q+1,\ldots,n$, e tamén,

$$g_{ab}(m) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}\right)(m) = \delta_{ab},$$

$a, b = q+1,\ldots,n$.

Como era de esperar, por analoxía coas coordenadas normais, tamén están fortemente relacionadas as coordenadas de Fermi cos campos de Jacobi. Esta relación pona de manifesto o feito de que $Y_i(r) = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1,\ldots,q = dim B$, e $Y_a(r) = r\dfrac{\partial}{\partial x^a}$, $a = q+1,\ldots,n-1$, son campos de Jacobi ó longo da xeodésica $\gamma(r) = \exp_\nu(rE_n(m))$. Estes campos de Jacobi verifican as condicións iniciais $Y_i(0) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)(m)$, $Y_i'(0) = \left(\nabla_{\gamma'}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)(m)$ e $Y_a(0) = 0$, $Y_a'(0) = E_a(m)$, respectivamente. Empregaremos estas relacións para calcular as compoñentes da métrica ó longo de γ. Este estudio farémolo na seguinte sección deste capítulo.

Como vemos, as coordenadas de Fermi describen a xeometría da variedade riemanniana M nunha veciñanza da subvariedade B. Nós estaremos principalmente interesados en como varían as coordenadas $(x^j)_{1\le j\le q}$ e $(x^a)_{q+1\le a\le n}$ ó longo dunha xeodésica normal a B. Observamos tamén que a escolla do sistema de coordenadas na subvariedade B non é importante e, polo tanto, poderiamos elixir un sistema de coordenadas normais, se fose necesario.

Agora, imos definir o análogo das veciñanzas normais para as coordenadas de Fermi. Dado $\varepsilon > 0$, sexa

$$\widetilde{U}_B(\varepsilon) = \{u \in \nu_m(B)/m \in B, ||u|| < \varepsilon\}.$$

Se exp_ν aplica difeomorficamente $\widetilde{U}_B(\varepsilon)$ sobre un subconxunto aberto

$$U_B(\varepsilon) = exp_\nu(\widetilde{U}_B(\varepsilon))$$

de M, entón $U_B(\varepsilon)$ dise *unha veciñanza tubular de raio ε de B*.

Observamos que $U_B(\varepsilon)$ tamén se pode describir do seguinte xeito:

$$\begin{aligned} U_B(\varepsilon) = \{ & m \in M \ / \ \text{Existe unha xeodésica } \gamma \text{ con lonxitude} \\ & \qquad l(\gamma) < \varepsilon \text{ de } m \text{ a } B, \text{ cortando ortogonalmente a } B \ \} \\ = & \textstyle\bigcup_{m \in B} \ \{exp_m(v) \ / \ v \in \nu_m(B), \ ||v|| < \varepsilon \ \}. \end{aligned}$$

Denotaremos por $P_B(\varepsilon)$ o *tubo de raio ε arredor de B*, dado por

$$P_B(\varepsilon) = \{m \in U_B(\varepsilon)/d(m, B) = \varepsilon\},$$

onde $d(\ ,\ )$ denota a distancia inducida pola métrica g. Nótese que é unha hipersuperficie diferenciable.

1.3 Ecuacións básicas

Durante toda esta memoria necesitaremos coñecer as funcións compoñentes do tensor métrico

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \qquad g_{ia} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^a}\right), \qquad g_{ab} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}\right),$$

onde $i, j = 1, \ldots, q$ e $a, b = q+1, \ldots, n$, ó longo dunha xeodésica $\gamma(r)$ normal á subvariedade B. Para obter as fórmulas desexadas procedemos como segue. Sexa $u \in T_m^\perp B$ un vector unitario e denotemos por $\gamma : r \longmapsto \gamma(r) = exp_m(ru)$ a xeodésica normal pasando polo punto $m = \gamma(0)$. Eliximos un campo de referencias $\{E_1, \ldots, E_n\}$ ortonormal ó longo de B que verifique a condición $E_n(m) = \gamma'(0) = u$. Consideremos as coordenadas de Fermi que se obteñen de pór na Definición 1.2.2 os campos de referencias $\{E_{q+1}, \ldots, E_n\}$ e tomar en B as coordenadas normais asociadas a $\{E_1(m), \ldots, E_q(m)\}$. Agora, sexa $\{F_1(r), \ldots, F_n(r)\}$ o campo de referencias ó longo de $\gamma(r)$ obtido por transporte paralelo de $\{E_1(m), \ldots, E_n(m)\}$, con respecto á conexión de Levi Civita ∇ de (M, g). Imos considerar outro campo de referencias ó longo de γ, o formado polos $n-1$ campos de Jacobi $\{Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}$ determinados polas condicións iniciais

$$Y_i(0) = E_i(m), \quad Y_i'(0) = \left(\nabla_{\gamma'} \frac{\partial}{\partial x^i}\right)(m), \quad i =, 1, \dots, q,$$

$$Y_a(0) = 0, \qquad Y_a'(0) = E_a(m), \qquad a = q+1, \dots, n-1.$$

Observamos que para r suficientemente pequeno, os vectores $Y_\alpha(r)$, $\alpha = 1, \dots, n-1$, determinan unha base do espacio $\langle \gamma'(r) \rangle^\perp$.

Para determinar as relacións entre os campos de vectores $\{F_\alpha(r)\}$ e $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\right\}$, $\alpha = 1, \dots, n-1$, poñemos

$$Y_\alpha(r) = D_u(r) F_\alpha(\gamma(r)), \qquad \alpha = 1, \dots, n-1.$$

Cada $D_u(r)$ é un endomorfismo do espacio $\langle \gamma'(r) \rangle^\perp$ e estes espacios poden ser identificados mediante transporte paralelo ó longo de γ usando a base $\{F_\alpha(r)\}$, $\alpha = 1, \dots, n$. Isto farase en varias ocasións, aínda que non se mencione explicitamente. Por outra parte, é fácil ver que

$$\begin{aligned} Y_i(r) &= \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad i = 1, \dots, q \\ Y_a(r) &= r\frac{\partial}{\partial x^a}, \qquad a = q+1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Entón, tendo en conta como son os campos $\{Y_\alpha\}$, a ecuación de Jacobi dá lugar á ecuación

$$D_u'' + R \circ D_u = 0, \tag{1.3.2}$$

onde $R(r)$ denota o operador de Jacobi ó longo de γ. Para obter as condicións iniciais que satisfai o campo de endomorfismos $D_u(r)$, usaremos as ecuacións de Gauss e Weingarten para a subvariedade B:

$$\nabla_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + T_X Y,$$

$$\nabla_X \xi = T(\xi) X + \nabla_X^\perp \xi,$$

onde X, Y son campos de vectores tanxentes a B e ξ é un campo de vectores (local) normal a B. $\widetilde{\nabla}$ denota a conexión de Levi Civita da métrica inducida en B, T é a segunda forma fundamental, $T(\xi)$ o operador de configuración con respecto a ξ e $\nabla^\perp$ é a conexión normal. T e $T(\xi)$ están relacionados pola igualdade $g(T(\xi)X, Y) = -g(T_X Y, \xi)$, válida para todo par de campos de vectores X, Y tanxentes a B. Agora, usando as condicións iniciais para os campos de Jacobi Y_α, obtemos

$$D_u(0) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_u'(0) = \begin{pmatrix} T(u) & 0 \\ -{}^t\!\perp(u) & I_{n-q-1} \end{pmatrix},$$

onde

$$T(u)_{ij} = g(T(u)E_i, E_j)(m),$$
$$\perp(u)_{ia} = g(\perp_{E_i} E_a, E_n)(m),$$

e onde $\perp$ é un operador, definido en [GrV2], que satisfai $(\perp_X N)(m) = (\nabla^{\perp}_X N)(m)$, para todo campo de vectores X tanxente a B.

Como aplicación das fórmulas obtidas anteriormente, imos calcular as compoñentes da métrica de Riemann ó longo dunha xeodésica normal a B. Sexan m un punto da subvariedade B e $p = exp_m(ru)$. Usando o lema de Gauss xeneralizado (ve [Gr]), obtemos que

$$g_{in} = g_{an} = 0, \qquad g_{nn} = 1. \tag{1.3.3}$$

Agora, usando (1.3.1), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g_{ij}(p) & = & \left({}^t D_u D_u\right)_{ij}(r), \\ g_{ia}(p) & = & \dfrac{1}{r}\left({}^t D_u D_u\right)_{ia}(r), \\ g_{ab}(p) & = & \dfrac{1}{r^2}\left({}^t D_u D_u\right)_{ab}(r), \end{array} \right. \tag{1.3.4}$$

para $i, j = 1, \ldots, q$, e $a, b = q+1, \ldots, n-1$.

Imos aludir en bastantes ocasións ó longo desta memoria ás expresións que escribimos a seguir. Estas dannos os primeiros termos do desenvolvemento en serie de potencias das compoñentes da métrica de Riemann g ó longo da xeodésica $\gamma(r) = exp_m(ru)$.

$$\begin{array}{rcl} g_{ij}(p) & = & g(E_i, E_j)(m) + 2rg(T(u)E_i, E_j)(m) \\ & & +r^2\left\{-g(R_u E_i, E_j) + g(T(u)^2 E_i, E_j)\right. \\ & & \qquad \left. + g({}^t\perp(u)E_i, {}^t\perp(u)E_j)\right\}(m) + O(r^3), \end{array} \tag{1.3.5}$$

$$g_{ia}(p) = -rg({}^t\perp(u)E_i, E_a)(m) - \frac{2r^2}{3} g(R_u E_i, E_a)(m) + O(r^3), \tag{1.3.6}$$

$$\begin{array}{rcl} g_{ab}(p) & = & g(E_a, E_b)(m) - \dfrac{r^2}{3} g(R_u E_a, E_b)(m) \\ & & -\dfrac{r^3}{6} g(R'_u E_a, E_b)(m) + O(r^4), \end{array} \tag{1.3.7}$$

onde $R_u(x) = R_{ux}u$ e $R'_u(x) = (\nabla_u R)_{ux}u$, para todo vector $x \in \langle u\rangle^{\perp} \subset T_m M$.

Capítulo 2

Reflexións e transformacións xeodésicas

Unha aplicación F definida nunha variedade de Riemann (M, g) dirase unha *isometría* se $F^*g = g$. Debido a que o carácter isométrico é unha propiedade excesivamente ríxida para determinadas aplicacións, estudiáronse certas xeneralizacións. A modo de exemplo, citemos as aplicacións *conformes*, caracterizadas por verificar $F^*g = e^{2\sigma}g$, para algunha función σ con valores reais. Outras xeneralizacións das isometrías están dados polas aplicacións *harmónicas* e as *totalmente xeodésicas*.

Se (M, g, J) é unha variedade case hermitiana, son especialmente interesantes as aplicacións que conservan a estructura case complexa ou a 2-forma de Kähler $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$. Así, dirase que F é *holomorfa* se a súa diferencial conmuta coa estructura case complexa, i.e., $F_*J = JF_*$ e dirase que F é simpléctica se $F^*\Omega = \Omega$. Cando a forma de volume dunha variedade orientable se conserve (salvo o signo) por F^*, dirase que a aplicación F *conserva o volume*, e dirase que F *conserva a diverxencia* de (M, g) se F conserva o volume salvo un factor constante [DN1].

2.1 Reflexións xeodésicas

As reflexións con respecto a puntos ou subespacios do espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ son isometrías. As simetrías con respecto a puntos son facilmente xeneralizables á situación de variedades riemannianas, dando lugar ás simetrías xeodésicas. É ben coñecido que as propiedades de tales simetrías locais restrinxen fortemente as propiedades xeométricas do espacio considerado e reciprocamente. Citemos a modo de exemplo un resultado clásico de Cartan: *unha variedade de Riemann* (M, g) *é localmente simétrica se e soamente se as simetrías xeodésicas son isometrías.*

Unha propiedade estrictamente máis débil que o carácter isométrico das simetrías xeodésicas foi estudiado por D'Atri e Nickerson: variedades con simetrías que conservan o volume, ([DN1], [DN2], [KPV]).

Recentemente, as reflexións con respecto a subespacios de $\mathbb{R}^n$ foron xeneralizadas a reflexións xeodésicas con respecto a subvariedades. Tales transformacións locais poden ser vistas como aquelas que inverten a situación dos puntos en veciñanzas tubulares da subvariedade, manténdoos na mesma xeodésica normal. Un novo factor intervén, así, no estudio das reflexións con respecto a subvariedades: a xeometría tanto intrínseca como extrínseca da subvariedade. A modo de exemplo, sinalemos o seguinte resultado

Teorema 2.1.1 [CV1] *Sexa (M,g) unha variedade de Riemann e B unha subvariedade. Entón, a reflexión φ_B é unha isometría local se e soamente se*

(i) B é totalmente xeodésica,

(ii) $(\nabla^{2k}_{u,\dots,u}R)_{uv}u$ *é ortogonal a B,*
$(\nabla^{2k+1}_{u,\dots,u}R)_{uv}u$ *é tanxente a B e*
$(\nabla^{2k+1}_{u,\dots,u}R)_{ux}u$ *é ortogonal a B,*

para calquera par de vectores $u,v\in T^{\perp}B$, $x\in TB$ e calquera valor de $k\in\mathbb{N}$.

Nótese que (i) é claramente unha condición necesaria, ó ser B o conxunto de puntos fixos dunha isometría.

A seguir enumeramos unha serie de propiedades xeométricas da variedade ambiente relacionadas co comportamento das reflexións xeodésicas:

- (M,g) é unha variedade de Riemann localmente simétrica

  $\Longleftrightarrow$ As simetrías xeodésicas con respecto a puntos son isometrías

  $\Longleftrightarrow$ As reflexións xeodésicas con respecto a curvas conservan o volume [VW]

- (M,g) é un espacio de curvatura seccional constante

  $\Longleftrightarrow$ As reflexións xeodésicas con respecto a xeodésicas son isometrías [VW]

- (M,g,J) é unha variedade localmente simétrica hermitiana

  $\Longleftrightarrow$ (M,g,J) é unha variedade case hermitiana e as reflexións xeodésicas con respecto a puntos son holomorfas [SV]

  $\Longleftrightarrow$ (M,g,J) é unha variedade case hermitiana e as reflexións xeodésicas con respecto a puntos son simplécticas [SV]

- (M,g,J) é unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante

  $\Longleftrightarrow$ (M,g,J) é unha variedade hermitiana e as reflexións xeodésicas con respecto a superficies holomorfas son simplécticas [CV2]

Así mesmo, importantes propiedades xeométricas das subvariedades poden ser detectadas mediante as propiedades das reflexións xeodésicas.

- Unha subvariedade B nun espacio de curvatura constante é totalmente xeodésica
  $\Longleftrightarrow$ A reflexión xeodésica con respecto a B é unha isometría [CV1]
- Unha superficie B nun espacio de curvatura constante é mínima
  $\Longleftrightarrow$ A reflexión xeodésica con respecto a B conserva o volume [TV]
- Unha subvariedade B nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante é holomorfa
  $\Longleftrightarrow$ A reflexión xeodésica con respecto a B é simpléctica [CV1]

Como mostran os exemplos anteriores, moitas propiedades importantes poden ser caracterizadas xeometricamente mediante o uso das reflexións xeodésicas. Sen embargo, existen moitas outras propiedades importantes acerca das cales non foi posible obter información mediante o uso de tales transformacións. A modo de exemplo, citemos as seguintes:

- Subvariedades totalmente umbílicas
- Hipersuperficies de curvatura media constante
- Hipersuperficies de Hopf
- Caracterización dos espacios homoxéneos dous puntos
- Caracterización dos espacios harmónicos

Tendo en conta a relación existente entre as subvariedades totalmente umbílicas e os conxuntos de puntos fixos de aplicacións conformes, un primeiro achegamento ós problemas anteriores foi o estudio do carácter conforme das reflexións xeodésicas.

Teorema 2.1.2 *A reflexión xeodésica é conforme se e soamente se é unha isometría.*

Outro achegamento, sempre mediante o estudio de condicións máis débiles que o carácter isométrico das reflexións xeodésicas, foi o estudio da súa harmonicidade [DVV].

Teorema 2.1.3 [DGV] *A reflexión xeodésica é harmónica se e soamente se é unha isometría.*

Outra idea coa cal se abordaron os problemas anteriores foi o uso de transformacións máis xerais que as reflexións. Así, é conveniente lembrar que as semellanzas ($s = Cr$) e as inversións con respecto a esferas ($(s+\alpha)(r+\alpha) = \alpha^2$) do espacio euclidiano proporcionan aplicacións conformes. Ademais, un resultado clásico de Liouville asegura que calquera transformación conforme de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) é unha composición de inversións e semellanzas.

A xeneralización deste tipo de transformacións á xeometría riemanniana fíxose en dúas etapas. A primeira das mesmas foi levada a cabo por Tachibana [T] e D'Atri [D], que puxeron de manifesto que o carácter conforme de tales transformacións permite caracterizar os espacios de curvatura constante. Ademais, Tachibana obtén unha interesante interpretación xeométrica das inversións e semellanzas en esferas mediante o uso da proxección estereográfica. A segunda etapa foi desenvolvida recentemente por García Río e Vanhecke [GV1], [GV2], [GV3], os cales modifican lixeiramente a definición orixinal de Tachibana, permitindo así realizar un tratamento unificado de distintas transformacións.

2.2 Transformacións xeodésicas

Sexa B unha subvariedade topoloxicamente mergullada nunha variedade de Riemann (M, g). Unha *transformación xeodésica* con respecto a B é un difeomorfismo local φ_B definido nunha veciñanza tubular suficientemente pequena arredor de B mediante

$$\varphi_B : p = \exp_\nu(ru) \mapsto \varphi_B(p) = \exp_\nu(s(r)u),$$

onde $\exp_\nu$ é a aplicación exponencial do fibrado normal, u denota un vector unitario normal a B e $s(r)$ é unha función analítica da distancia normal r de tal forma que $s(0) = 0$.

A condición $s(0) = 0$ ten como consecuencia que a subvariedade B sexa o conxunto de puntos fixos de φ_B. Como se porá de manifesto máis adiante, tal condición non é unha restricción con respecto á definición orixinal de Tachibana, xa que permite interpretar como transformacións con respecto a puntos e hipersuperficies as orixinalmente consideradas en [T].

A modo de exemplo, sinalemos algunhas transformacións xeodésicas de especial interese:

(i) A *identidade* ($s(r) = r$) e a *reflexión xeodésica con respecto a B* ($s(r) = -r$) son os exemplos máis sinxelos de transformacións xeodésicas.

Ademais, como se porá de manifesto no Capítulo 4 desta memoria (ver tamén [GV2], [GV3]), en moitas ocasións as propiedades consideradas sobre as transformacións xeodésicas restrinxen a súa posible existencia ó único caso non trivial da reflexión xeodésica.

(ii) As *semellanzas euclidianas* ($s(r) = Cr$, $C^2 \neq 0, 1$) son transformacións homotéticas en $\mathbb{R}^n$ con respecto á orixe.

(iii) A *inversión euclidiana* ($(s(r) + \alpha)(r + \alpha) = \alpha^2$) é unha transformación xeodésica conforme no espacio euclidiano con respecto á esfera de centro a orixe e raio α.

(iv) As *semellanzas non euclidianas*

$$\tan s\frac{\sqrt{c}}{2} = C \tan r\frac{\sqrt{c}}{2}, \quad C^2 \neq 0, 1,$$

son transformacións xeodésicas conformes con respecto a puntos en espacios de curvatura seccional constante $c > 0$. Cando o signo da curvatura seccional é $-c > 0$, as semellanzas non euclidianas son da forma

$$\tanh s\frac{\sqrt{-c}}{2} = C\tanh r\frac{\sqrt{-c}}{2}, \quad C^2 \neq 0, 1.$$

(v) As *inversións non euclidianas*

$$\tan(s+\alpha)\frac{\sqrt{c}}{2}\tan(r+\alpha)\frac{\sqrt{c}}{2} = \left(\tan\alpha\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2$$

son transformacións xeodésicas conformes con respecto a esferas xeodésicas $G_m(\alpha)$ en espacios de curvatura seccional constante $c > 0$. Ó igual que no caso anterior, se o signo da curvatura seccional é $-c > 0$, as inversións non euclidianas obtéñense substituindo as funcións trigonométricas polas hiperbólicas correspondentes,

$$\tanh(s+\alpha)\frac{\sqrt{-c}}{2}\tanh(r+\alpha)\frac{\sqrt{-c}}{2} = \left(\tanh\alpha\frac{\sqrt{-c}}{2}\right)^2.$$

Para poder realizar un tratamento analítico das propiedades das transformacións xeodésicas, é necesario expresar tales transformacións en sistemas de coordenadas adaptados á situación considerada. Tales sistemas de coordenadas serán os proporcionados polas coordenadas de Fermi en veciñanzas tubulares da subvariedade B considerada. Así, se $(x^1, \ldots, x^q; x^{q+1}, \ldots, x^n)$ é un sistema de coordenadas de Fermi tal como se describiu no Capítulo 1, a transformación xeodésica φ_B exprésase como

$$\varphi_B : (x^1, \ldots, x^q; x^{q+1}, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^q; \rho(r)x^{q+1}, \ldots, \rho(r)x^n),$$

onde $\rho(r)$ é a función dada por $s(r) = \rho(r)r$.

Agora, un cálculo sinxelo permite obter a expresión da matriz Jacobiana da transformación φ_B:

$$\begin{cases} \varphi_{B*}\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \\ \varphi_{B*}\dfrac{\partial}{\partial x^a} = \rho\dfrac{\partial}{\partial x^a} + \rho'\dfrac{\partial r}{\partial x^a}\displaystyle\sum_{b=q+1}^{n} x^b\dfrac{\partial}{\partial x^b}, \end{cases}$$

onde $i \in \{1, \ldots, q\}$, $a \in \{q+1, \ldots, n\}$.

Unha consecuencia inmediata do anterior está formulada no seguinte

Teorema 2.2.1 *Unha transformación xeodésica é unha isometría se e soamente se é a identidade ou a reflexión xeodésica.*

Sen embargo, o interese das transformacións xeodésicas ponse de manifesto cando se consideran propiedades máis xerais que o carácter isométrico. A modo de exemplo, sinalaremos as seguintes.

2.2.1 Transformacións xeodésicas conformes

As transformacións xeodésicas conformes foron estudiadas inicialmente por Tachibana [T] e D'Atri [D], os cales puxeron de manifesto a conexión existente entre tal propiedade e o carácter constante da curvatura seccional.

Como mostra o seguinte teorema, unicamente poden existir transformacións xeodésicas conformes (non isométricas) con respecto a puntos e hipersuperficies.

Teorema 2.2.2 *Sexa* (M^n, g) *unha variedade de Riemann e* B *unha subvariedade con* $1 \leq dim\, B \leq n-1$*. Se* φ_B *é unha transformación xeodésica conforme con respecto a* B*, entón é a identidade ou a reflexión xeodésica.*

Ademais, cando o espacio ambiente sexa unha variedade de curvatura seccional constante, é posible determinar as posibles transformacións xeodésicas conformes con respecto a puntos e hipersuperficies.

Teorema 2.2.3 *Sexa* (M, g) *unha variedade de Riemann e sexa* $m \in M$ *un punto arbitrario. Entón existe unha transformación xeodésica conforme (non isométrica) con respecto a* m *se e soamente se a curvatura seccional é constante no punto* m*.*

Teorema 2.2.4 *Sexa* (M, g) *unha variedade de Riemann e* B *unha subvariedade. Se existe unha transformación xeodésica conforme (non isométrica) con respecto a* B*, entón* B *é unha subvariedade totalmente umbílica. Ademais, se* M *é un espacio de curvatura constante, a anterior é unha condición suficiente.*

Os teoremas anteriores mostran, ademais, unha xeneralización do Teorema de Liouville, poñendo de manifesto que as transformacións xeodésicas son composición de semellanzas e inversións non euclidianas.

Sinalemos, por último, que os dous teoremas anteriores poñen de manifesto a non existencia de transformacións xeodésicas conformes (non isométricas) en espacios homoxéneos dous puntos que non teñan curvatura seccional constante. (Nótese a non existencia de hipersuperficies reais totalmente umbílicas, tanto en variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante $c \neq 0$ como en variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura seccional cuaterniónica constante $c \neq 0$). Este feito motivou o estudio das transformacións xeodésicas "parcialmente conformes", como aquelas que cumpren unha propiedade de invariancia conforme nun certo subespacio do espacio tanxente en cada punto [GV1].

Dado que o estudio deste tipo de transformacións é un dos obxectivos prioritarios desta memoria, remitímonos ó Capítulo 4 desta para máis información.

2.2.2 Transformacións xeodésicas que conservan a diverxencia

De igual xeito que sucede coas propiedades anteriores, o feito de conservar a diverxencia restrinxe as posibles transformacións xeodésicas, de acordo co seguinte

Teorema 2.2.5 *Sexa (M^n, g) unha variedade de Riemann e B unha subvariedade con $0 \leq dim\, B \leq n - 2$. Se φ_B é unha transformación xeodésica con respecto a B que conserva o volume, entón é a identidade ou a reflexión xeodésica.*

Como consecuencia, dedicouse especial atención ó estudio das transformacións xeodésicas que conservan a diverxencia, obténdose a seguinte caracterización dos espacios harmónicos:

Teorema 2.2.6 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann. Entón as seguintes condicións son equivalentes:*

(1) (M, g) é un espacio harmónico.

(2) Para cada punto $m \in M$ existe unha transformación xeodésica (distinta da reflexión xeodésica) con respecto a m que conserva a diverxencia.

(3) Para cada esfera xeodésica $G_m(r)$ existe unha transformación xeodésica (distinta da reflexión xeodésica) con respecto a $G_m(r)$ que conserva a diverxencia.

Ademais, o carácter constante da curvatura seccional pode ser caracterizado pola existencia de transformacións xeodésicas (distintas da reflexión xeodésica) con respecto a calquera xeodésica conservando a diverxencia.

Como xa se puxo de manifesto, o feito de que a reflexión xeodésica con respecto a unha subvariedade conserve o volume implica a minimalidade desta. Sen embargo, a existencia de transformacións xeodésicas distintas da reflexión que conserven a diverxencia permite caracterizar determinadas propiedades relativas á xeometría da subvariedade, especialmente no caso das hipersuperficies reais ou complexas:

Teorema 2.2.7 *Sexa B unha hipersuperficie nunha variedade (M, g) de curvatura constante. Logo existe unha transformación xeodésica (distinta da reflexión xeodésica) con respecto a B que conserva a diverxencia se e soamente se B é unha hipersuperficie isoparamétrica.*

Teorema 2.2.8 *Sexa B unha hipersuperficie complexa con dúas curvaturas principais distintas nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante. Entón son equivalentes:*

(1) B é unha hipersuperficie de Einstein

(2) Existe unha transformación xeodésica (distinta da reflexión xeodésica) con respecto a B que conserva a diverxencia.

Cómpre sinalar finalmente que, como situación xeral, a existencia dunha transformación xeodésica (distinta da reflexión xeodésica) con respecto a unha subvariedade implica a minimalidade desta, se a súa codimensión é maior que un, e o carácter constante da curvatura media, cando nos restrinximos a hipersuperficies.

2.2.3 Transformacións xeodésicas holomorfas

O estudio das transformacións xeodésicas holomorfas permitiu obter unha caracterización das variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante. Ademais, permitiu pór de manifesto a existencia de numerosas transformacións xeodésicas harmónicas non isométricas.

Teorema 2.2.9 *Sexa (M, g, J) unha variedade case hermitiana. Entón as seguintes condicións son equivalentes:*

(1) (M, g, J) é unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante.

(2) Para cada punto $m \in M$ existe unha transformación xeodésica (distinta da reflexión xeodésica) con respecto a m holomorfa.

Ademais, tense a seguinte clasificación das transformacións xeodésicas holomorfas, o que permite mostrar exemplos de transformacións xeodésicas harmónicas non isométricas nin conformes (nótese que toda aplicación holomorfa entre variedades Kählerianas é har mónica).

Teorema 2.2.10 *Sexa (M, g, J) unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante c e sexa φ_m unha transformación xeodésica holomorfa con respecto a un punto $m \in M$. Entón*

(1) φ_m é a reflexión xeodésica (ou equivalentemente, unha isometría).

(2) φ_m está dada por $s(r) = Cr$, $C \in \mathbb{R}$, $C^2 \neq 0, 1$, se $c = 0$.

(3) φ_m está dada por

$$\tan s \frac{\sqrt{c}}{2} = C \tan r \frac{\sqrt{c}}{2}, \qquad C \in \mathbb{R},\ C^2 \neq 0, 1$$

se $c > 0$.

(4) φ_m está dada por

$$\tanh s \frac{\sqrt{-c}}{2} = C \tanh r \frac{\sqrt{-c}}{2}, \qquad C \in \mathbb{R},\ C^2 \neq 0, 1$$

se $-c > 0$.

Capítulo 3

Variedades cuaterniónicas

Neste capítulo estudiaremos algúns conceptos e resultados básicos sobre xeometría cuaterniónica, que serán utilizados no Capítulo 4 deste traballo. Como referencias básicas que tratan o estudio de variedades cuaterniónicas sinalamos [I] e [YK].

3.1 Conceptos básicos

Neste apartado imos definir as variedades case cuaterniónicas e as cuaterniónicas Kähler, así como establecer algunhas das súas propiedades, que empregaremos máis adiante.

Definición 3.1.1 *Chamaremos variedade case cuaterniónica a unha variedade M de dimensión $n = 4k$ cun fibrado vectorial 3-dimensional V formado por tensores de tipo $(1,1)$ sobre M satisfacendo a seguinte condición: en calquera aberto coordenado U de M, existe unha base local $\{J_1,\ J_2,\ J_3\}$ do fibrado vectorial V tal que*

$$\begin{aligned} &J_1^2 = -I, && J_2^2 = -I, && J_3^2 = -I, \\ &J_2 J_3 = -J_3 J_2 = J_1, && J_3 J_1 = -J_1 J_3 = J_2, && J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

onde I denota o campo de tensores identidade de tipo $(1,1)$ sobre M.

Unha base local $\{J_1, J_2, J_3\}$ de V satisfacendo (3.1.1) dise unha base canónica local do fibrado vectorial V en U. Logo, o fibrado vectorial V dise unha estructura case cuaterniónica en M, e M con V dise unha variedade case cuaterniónica, que denotaremos por (M, V). Unha variedade case cuaterniónica ten dimensión $n = 4k$, $k \geq 1$.

Consideremos, nunha variedade case cuaterniónica M, dous abertos coordenados U e U' tal que $U \cap U' \neq \emptyset$, e sexan $\{J_1, J_2, J_3\}$ e $\{J'_1, J'_2, J'_3\}$ bases canónicas locais de V en U e U' respectivamente. Logo, J'_1, J'_2 e J'_3 son combinacións lineais de J_1, J_2 e J_3 en $U \cap U'$, é dicir,

$$
\begin{aligned}
J_1' &= s_{11}J_1 + s_{12}J_2 + s_{13}J_3, \\
J_2' &= s_{21}J_1 + s_{22}J_2 + s_{23}J_3, \qquad (3.1.2) \\
J_3' &= s_{31}J_1 + s_{32}J_2 + s_{33}J_3,
\end{aligned}
$$

onde s_{ij} $(1 \leq i,j \leq 3)$ son funcións definidas en $U \cap U'$. Da condición (3.1.1) que satisfan as bases locais do fibrado vectorial V deducimos que $(s_{ij}(m))$ é un elemento de $SO(3)$, para todo punto $m \in U \cap U'$. Polo tanto, toda variedade case cuaterniónica é orientable.

Se, nunha variedade case cuaterniónica (M,V), existe unha base global $\{J_1,J_2,J_3\}$ de V que satisfai a condición (3.1.1), entón (M,V) é o que tradicionalmente se denominaba variedade case cuaterniónica. Unha tal base global $\{J_1,J_2,J_3\}$ de V denomínase unha base canónica global de V.

Sexa (M,V) unha variedade case cuaterniónica, e $\{J_1,J_2,J_3\}$ unha base canónica local de V nunha veciñanza coordenada U de M. Supoñamos que en cada aberto coordenado U hai un sistema de coordenadas (x^i) con respecto ó cal os campos de tensores (1,1) locais J_1, J_2 e J_3 teñen compoñentes numéricas da forma

$$
J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \ J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

onde I denota a matriz identidade de $\mathbb{R}^k$ $(dim\ M = 4k)$. Neste caso, a estructura case cuaterniónica V ou a base local $\{J_1,J_2,J_3\}$ dise integrable.

Nunha variedade case cuaterniónica (M,V) existen métricas de Riemann g tales que $g(\phi X,Y) + g(X,\phi Y) = 0$, para calquera sección do fibrado vectorial V e campos de vectores arbitrarios X e Y sobre M. Este par (g,V) dise unha estructura métrica case cuaterniónica sobre M, e a terna (M,g,V) dise unha *variedade métrica case cuaterniónica.*

Sexa $\{J_1,J_2,J_3\}$ unha base canónica local de V nunha veciñanza coordenada dunha variedade métrica case cuaterniónica (M,g,V). Posto que a métrica g é case hermitiana con respecto a cada estructura case complexa (local) J_i, $i = 1,2,3$, definindo

$$\Phi_i(X,Y) = g(J_iX,Y), \qquad i = 1,2,3,$$

onde X e Y son campos de vectores calquera en U, vemos que Φ_1, Φ_2 e Φ_3 son 2-formas locais. Entón,

$$\Omega = \Phi_1 \wedge \Phi_1 + \Phi_2 \wedge \Phi_2 + \Phi_3 \wedge \Phi_3$$

é unha 4-forma definida globalmente en M.

Sexa (M,g,V) unha variedade métrica case cuaterniónica e sexa ∇ a conexión de Levi Civita asociada á métrica g. Logo, como consecuencia directa de (3.1.1), vemos que a condición

($*$) Se ϕ é unha sección (local ou global) do fibrado vectorial V, entón $\nabla_X \phi$ é tamén unha sección de V, sendo X un campo de vectores arbitrario sobre M,

é equivalente á condición

($**$) Se J_1, J_2, J_3 é unha base canónica local de V, entón

$$\begin{array}{rcrcrcr} \nabla_X J_1 & = & & & r(X)J_2 & - & q(X)J_3, \\ \nabla_X J_2 & = & -r(X)J_1 & & & + & p(X)J_3, \\ \nabla_X J_3 & = & q(X)J_1 & - & p(X)J_3, & & \end{array} \tag{3.1.3}$$

para calquera campo de vectores X, onde p, q e r son certas 1-formas locais sobre M.

Entón, temos a seguinte

Definición 3.1.2 *Unha variedade métrica case cuaterniónica* (M, g, V) *satisfacendo a condición* ($*$) *ou* ($**$) *dise que é unha variedade cuaterniónica Kähler, e o par* (g, V) *dise unha estructura cuaterniónica Kähler.*

Sexa (M, g, V) unha variedade cuaterniónica Kähler. Entón, usando (3.1.3), compróbase facilmente que $\nabla\Omega = 0$. Reciprocamente, se (M, g, V) é unha variedade métrica case cuaterniónica e se verifica $\nabla\Omega = 0$, entón é unha variedade cuaterniónica Kähler. É dicir, temos o seguinte

Teorema 3.1.1 *Unha variedade métrica case cuaterniónica é cuaterniónica Kähler se e soamente se* $\nabla\Omega = 0$.

O teorema anterior pon de manifesto que, se $dim\ M = 4$, toda variedade orientable é cuaterniónica Kähler. Tamén nos di que Ω é unha 4-forma harmónica non nula, de onde se segue que Ω^p é unha $4p$-forma harmónica non nula, $1 \leq p \leq k$, sendo $dim\ M = 4k$.

A seguir, imos enunciar un resultado probado recentemente en [S]. Este dános unha condición necesaria para que unha variedade case cuaterniónica sexa cuaterniónica Kähler. Necesitamos a seguinte

Definición 3.1.3 *Unha variedade case cuaterniónica* (M, g, V) *dise nearly-cuaterniónica se* $\nabla_X \Omega(X, Y, Z, W) = 0$*, para calquera campos de vectores* X, Y, Z *e* W *sobre a variedade* M.

Agora, damos o resultado anteriormente mencionado.

Teorema 3.1.2 *Unha variedade nearly-cuaterniónica de dimensión* $n > 4$ *é necesariamente cuaterniónica Kähler.*

3.2 Curvatura de variedades cuaterniónicas

Sexa (M, g, V) unha variedade cuaterniónica Kähler de dimensión $n = 4k$ e sexa $\{J_1, J_2, J_3\}$ unha base canónica local de V. Denotemos por R o tensor curvatura de Riemann de M. Entón, temos que

$$
\begin{aligned}
&g(R_{XY}J_1Z, J_1W) - g(R_{XY}Z, W) \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{k+2}\{g(Z, J_3W)Ric(X, J_3Y) + g(Z, J_2W)Ric(X, J_2Y)\} \\
&g(R_{XY}J_2Z, J_2W) - g(R_{XY}Z, W) \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{k+2}\{g(Z, J_1W)Ric(X, J_1Y) + g(Z, J_3W)Ric(X, J_3Y)\} \\
&g(R_{XY}J_3Z, J_3W) - g(R_{XY}Z, W) \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{k+2}\{g(Z, J_2W)Ric(X, J_2Y) + g(Z, J_1W)Ric(X, J_1Y)\}
\end{aligned}
\tag{3.2.1}
$$

onde Ric denota o tensor de Ricci da variedade M. Este resultado ímolo utilizar para definir a curvatura Q-seccional dunha variedade cuaterniónica Kähler, o que faremos un pouco máis adiante.

Agora, imos enunciar, sen demostración, algúns resultados ben coñecidos relativos ás variedades cuaterniónicas Kähler:

Teorema 3.2.1 *Toda variedade cuaterniónica Kähler de dimensión maior que catro é unha variedade de Einstein.*

Teorema 3.2.2 *Unha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura seccional constante* $c \neq 0$ *ten necesariamente dimensión* 4.

Posto que polo Teorema 3.2.1 calquera variedade cuaterniónica Kähler M é unha variedade de Einstein, se M é conformemente cha, entón ten curvatura seccional constante. Logo, do Teorema 3.2.2 dedúcese o seguinte

Teorema 3.2.3 *Se unha variedade cuaterniónica Kähler de dimensión maior que catro é conformemente cha, entón ten curvatura seccional constante cero.*

Tendo en conta o que afirma o último teorema citado, vemos que a noción de curvatura seccional para variedades cuaterniónicas Kähler non é esencial. Polo tanto, introdúcese a noción de curvatura Q-seccional, que xoga un papel importante ó longo desta memoria.

Sexan (M, g, V) unha variedade cuaterniónica Kähler, m un punto de M e x un vector non nulo de T_mM. Entón, o subespacio 4-dimensional $Q(x)$ do espacio tanxente de M en m xerado por $\{x, J_1x, J_2x, J_3x\}$ denomínase a *Q-sección determinada polo vector x.*

Denotaremos por $K(x,y)$ a curvatura seccional da variedade M con respecto á sección xerada polos vectores linealmente independentes x e y de T_mM. Posto que M é unha variedade de Einstein, usando (3.2.1), obtemos, para un vector unitario x, as igualdades seguintes

$$\begin{aligned}
K(x,J_1x) &= g(R(x,J_1x)J_1x,x)\\
&= \frac{Sc}{4k(k+2)} - g(R(x,J_1x)J_2x,J_3x),\\
K(x,J_2x) &= g(R(x,J_2x)J_2x,x)\\
&= \frac{Sc}{4k(k+2)} - g(R(x,J_2x)J_3x,J_1x),\\
K(x,J_3x) &= g(R(x,J_3x)J_3x,x)\\
&= \frac{Sc}{4k(k+2)} - g(R(x,J_3x)J_1x,J_2x),
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

onde Sc denota a curvatura escalar de M e $R(x,J_ix)J_ix = R_{xJ_ix}J_ix$, $i=1,2,3$.

Supoñamos que para cada par de vectores linealmente independentes $y,z\in Q(x)$ a curvatura seccional $K(x,y)$ é unha constante $\kappa(x)$. A esta constante, $\kappa(x)$, chamarémoslle a *curvatura* Q*-seccional de* M *con respecto a* x *en* $m\in M$. Entón, poñendo $y=x$, $z=J_1x$; $y=x$, $z=J_2x$; $y=x$, $z=J_3x$; temos respectivamente que

$$K(x,J_1x) = K(x,J_2x) = K(x,J_3x) = \kappa(x). \tag{3.2.3}$$

Tendo en conta a primeira identidade de Bianchi, a partir de (3.2.2) obtemos

$$\kappa(x) = \frac{Sc}{4k(k+2)}, \tag{3.2.4}$$

e

$$\begin{aligned}
0 &= g(R(x,J_1x)J_2x,J_3x)\\
&= g(R(x,J_2x)J_3x,J_1x) = g(R(x,J_3x)J_1x,J_2x).
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Da hipótese $K(x,aJ_1x+bJ_2x)=\kappa(x)$, sendo $a^2+b^2\neq 0$, xunto con (3.2.3), chegamos a que $g(R(x,J_1x)x,J_2x)=0$. Analogamente obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= g(R(x,J_1x)x,J_2x)\\
&= g(R(x,J_2x)x,J_3x) = g(x,J_3x)x,J_1x).
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

De (3.2.5) e (3.2.6), seguimos que

$$R(y,z)y - \kappa(x)z \in Q^{\perp}(x), \tag{3.2.7}$$

para calquera par de vectores $y, z \in Q(x)$, onde $Q^{\perp}(x)$ denota o complemento ortogonal de $Q(x)$ en T_mM.

Reciprocamente, se supoñemos que se cumpre (3.2.7) para todo par de vectores $y, z \in Q(x)$, onde $x \in T_mM$, entón a curvatura seccional $K(y, z)$ é constante. En tal caso, $\kappa(x)$ chámase a curvatura Q-seccional de M con respecto a x no punto m, e dise que a Q-sección $Q(x)$ ten curvatura Q-seccional $\kappa(x)$.

Imos necesitar nalgunha ocasión o seguinte

Teorema 3.2.4 *Sexa (M, g, V) unha variedade cuaterniónica Kähler de dimensión maior que catro que ten curvatura Q-seccional constante, $\omega(m)$, en cada punto $m \in M$. Logo, M ten curvatura Q-seccional constante, i.e., a función $\omega : M \to \mathbb{R}$ é constante.*

Observamos que o anterior resultado tamén é válido para $dim\ M = 4$, porque en tal caso a curvatura Q-seccional é constante en cada punto se e soamente se o é a curvatura seccional. Entón, se se satisfai a hipótese do teorema, polo Lema de Schur (ver [YK]) tense que a curvatura seccional é constante en M. Polo tanto, tamén o é a curvatura Q-seccional .

Agora, enunciamos un resultado que nos dá a expresión do tensor curvatura de Riemann nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante.

Teorema 3.2.5 *Sexan (M^n, g, V) unha variedade cuaterniónica Kähler de dimensión $n \geq 8$ e m un punto de M. Entón, a curvatura Q-seccional de M é constante c no punto m se e soamente se o tensor curvatura de Riemann en m ten a seguinte expresión:*

$$\begin{aligned} R(x, y)z = \frac{c}{4} \Bigg\{ & g(y, z)x - g(x, z)y \\ & - \sum_{i=1}^{3} \{ g(J_i x, z) J_i y - g(J_i y, z) J_i x + 2g(J_i x, y) J_i z \} \Bigg\}, \end{aligned}$$

para calquera terna de vectores x, y, z tanxentes a M en m e calquera base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ de V.

Enunciamos tamén un resultado que dá unha caracterización das variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura Q-seccional constante, e que precisaremos máis adiante.

Teorema 3.2.6 [PSU] *Sexa (M^n, g, V) unha variedade cuaterniónica Kähler. Logo, M ten curvatura Q-seccional constante se e soamente se para calquera base local adaptada $\{J_1,\ J_2,\ J_3\}$ do fibrado vectorial V cúmprese que $R(x, J_i x,\ x,\ J_i y) = 0$, para algún índice $i \in \{1, 2, 3\}$ e para calquera par de vectores unitarios x, y tanxentes á variedade, con $y \in Q(x)^{\perp}$.*

3.2.1 Espacios modelos

Os tres espacios modelos en xeometría cuaterniónica están dados polo seguinte

Teorema 3.2.7 *Sexa (M, g, V) unha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante c de dimensión $n = 4k$. Se M é completa e simplemente conexa, entón é isométrica*

(i) Ó espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, se $c = 0$,

(ii) Ó espacio proxectivo complexo cuaterniónico $\mathbb{H}\mathbf{P}^{\mathbf{k}} = \dfrac{Sp(n+1)}{Sp(n)\cdot Sp(1)}$, se $c > 0$, ou

(iii) Ó espacio hiperbólico cuaterniónico $\mathbb{H}\mathbf{H}^{\mathbf{k}} = \dfrac{Sp^1(n+1)}{Sp(n)\cdot Sp(1)}$, se $c < 0$.

É fácil comprobar que cando multiplicamos unha métrica de Riemann g por unha constante positiva τ, entón a curvatura Q-seccional multiplícase por $\frac{1}{\tau}$. Logo, salvo por unha semellanza, podemos supor que a curvatura Q-seccional constante dunha variedade é 4, 0 ou -4.

Capítulo 4

Transformacións xeodésicas en xeometría cuaterniónica

4.1 Introducción

Este capítulo constitúe a parte central deste traballo. Nel estudiamos o significado xeométrico das transformacións xeodésicas parcialmente conformes en xeometría cuaterniónica. Primeiro, na seguinte sección, definimos estas transformacións e mostramos que o estudio delas só é interesante se a subvariedade é un punto ou unha hipersuperficie real. Cando a subvariedade é un punto obtemos condicións necesarias e suficientes para a existencia de transformacións xeodésicas parcialmente conformes, caracterizamos as variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura seccional constante a través da existencia das ditas transformacións e, ademais, damos unha clasificación delas. Finalmente facemos un estudio análogo para as transformacións xeodésicas parcialmente conformes con respecto a hipersuperficies. Damos condicións suficientes para a súa existencia, caracterizamos as variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura seccional constante por medio destas e damos unha clasificación deste tipo de transformacións.

Ó longo de todo este capítulo, chamaremos variedade case cuaterniónica a unha variedade métrica case cuaterniónica.

4.2 Transformacións parcialmente conformes

Nesta sección definimos o concepto de *transformación xeodésica parcialmente conforme*, que será o obxecto de estudio de todo este capítulo. O resultado principal desta sección, o Teorema 4.2.3, di que se $dim\ B \geq 1$ e $codim\ B > 1$, entón a identidade e a reflexión xeodésica son as únicas transformacións xeodésicas parcialmente conformes que hai con respecto á subvariedade B. Isto indícanos que para estudiar transformacións xeodésicas parcialmente conformes non isométricas con respecto a subvariedades debemos restrinxirnos ó caso de puntos e hipersuperficies. Este estudio farase nas seccións §3 e §4 deste capítulo.

Definición 4.2.1 *Sexa (M, g, V) unha variedade case cuaterniónica e sexa B unha subvariedade. Unha transformación xeodésica φ_B con respecto a B dise parcialmente conforme se*

$$\varphi_B^* g = e^{2\sigma} g + f \sum_{t=1}^{3} \eta_t \otimes \eta_t,$$

para algunha función f dependendo só da distancia normal r á subvariedade.

Da definición de transformación xeodésica séguese de forma inmediata a seguinte

Proposición 4.2.1 *Sexa (M^n, g, V), $n > 4$, unha variedade case cuaterniónica. Se existe unha transformación xeodésica φ_B parcialmente conforme con respecto a unha subvariedade B de codimensión maior que un, entón f é unha función par e s é unha función impar.*

Proba. A transformación xeodésica está definida por

$$\varphi_B : p = exp_\nu(ru) \longmapsto \varphi_B(p) = exp_\nu(s(r)u).$$

Como $p = exp_\nu(ru) = exp_\nu((-r)(-u))$, temos que

$$\varphi_B(p) = exp_\nu(s(r)u) = exp_\nu(s(-r)(-u)) = exp_\nu(-s(-r)u).$$

Desta última igualdade deducimos que $s(-r) = -s(r)$, é dicir, s é unha función impar. Probemos agora que f é par. Por ser φ_B unha transformación xeodésica parcialmente conforme, verifica

$$\varphi_B^* g(J_1\gamma', J_1\gamma') = e^{2\sigma} g(J_1\gamma', J_1\gamma') + f \sum_{t=1}^{3} (\eta_t \otimes \eta_t)(J_1\gamma', J_1\gamma'),$$

onde $\gamma(r) = exp_\nu(ru)$. Avaliando a anterior expresión en $p = exp_\nu(ru) = exp_\nu((-r)(-u))$ obtemos a igualdade $s'(r)^2 + f(r) = s'(-r)^2 + f(-r)$. Tendo en conta que s é unha función impar, obtemos que $f(r) = f(-r)$, é dicir, f é unha función par. □

Da anterior proposición deducimos que as derivadas pares da función s en 0 e as derivadas impares da función f en 0 son todas nulas, é dicir, $s^{(2k)}(0) = f^{(2k+1)}(0) = 0$, para todo $k \geq 0$.

O anterior resultado non se verifica se a codimensión de B é un, é dicir, se B é unha hipersuperficie. Isto pono de manifesto o feito de que a inversión con respecto á esfera de centro a orixe e raio α en $\mathbb{R}^n$ é unha transformación xeodésica conforme e, polo tanto, parcialmente conforme. Para esta transformación, a función s está dada por $s(r) = \dfrac{-\alpha r}{\alpha + r}$, que obviamente non é impar.

O seguinte resultado dá unha condición necesaria e suficiente para a existencia de transformacións xeodésicas parcialmente conformes. Esta condición é a que se obtén de escribir que φ_B é parcialmente conforme nun sistema adaptado de coordenadas de Fermi, como o descrito no Capítulo 1 deste traballo.

Lema 4.2.1 *Sexa (M^n, g, V) unha variedade case cuaterniónica. Unha transformación xeodésica φ_B con respecto a unha subvariedade B é parcialmente conforme se e só se se verifican as seguintes condicións:*

$$g_{ij}(\varphi_B(p)) = e^{2\sigma} g_{ij}(p) + f(r) \sum_{t=1}^{3} (\eta_t \otimes \eta_t)_{ij}(p), \tag{4.2.1}$$

$$\rho g_{ia}(\varphi_B(p)) = e^{2\sigma} g_{ia}(p) + f(r) \sum_{t=1}^{3} (\eta_t \otimes \eta_t)_{ia}(p), \tag{4.2.2}$$

$$\rho^2 g_{ab}(\varphi_B(p)) = e^{2\sigma} g_{ab}(p) + f(r) \sum_{t=1}^{3} (\eta_t \otimes \eta_t)_{ab}(p), \tag{4.2.3}$$

$$e^{2\sigma} = \left(\frac{ds}{dr}\right)^2, \tag{4.2.4}$$

para cada punto $p = exp_m(ru)$, onde $i, j = 1, \dots, q$, $a, b = q+1, \dots, n-1$ e ρ denota a función $\rho(r) = \dfrac{s(r)}{r}$.

A partir da igualdade (4.2.4), as expresións anteriores, (4.2.1), (4.2.2) e (4.2.3), pódense interpretar como un sistema de ecuacións diferenciais, dependente da función f. As solucións deste sistema, caso de existiren, definirán as transformacións xeodésicas parcialmente conformes con respecto á subvariedade B. Nesta sección poremos de manifesto as fortes restriccións xeométricas que impón a existencia de solucións do dito sistema. Así, en primeiro lugar, veremos que soamente son factibles os casos en que a subvariedade se reduza a un punto (ecuacións (4.2.3) e (4.2.4)) e cando a subvariedade é unha hipersuperficie real (ecuacións (4.2.1) e (4.2.4)). As condicións iniciais vense afectadas pola dimensión da subvariedade, como mostra o Lema 4.2.2, que aparece máis adiante. Ademais, cando se impón a condición inicial $s'(0) = 1$, esta determina a transformación identidade de modo único. Isto dedúcese do Teorema 4.2.1, para $dim\, B \geq 1$, e do Teorema 4.3.1, cando B é un punto.

Lema 4.2.2 *Sexa (M^n, g, V), $n > 4$, unha variedade case cuaterniónica. Se existe unha transformación xeodésica φ_B parcialmente conforme con respecto a unha subvariedade B entón $f(0) = 0$. Ademais, se $dim\, B \geq 1$, entón $s'(0)^2 = 1$.*

Proba. Sexa $u \in T_m^{\perp}B$ un vector unitario. Os vectores $J_t u$, $t = 1, 2, 3$, pódense escribir nunha base adaptada $\{E_1, \dots, E_n\}$ da forma seguinte:

$$\begin{cases} J_1 u &= d_1 E_q &+ c_1 E_{q+1}, \\ J_2 u &= d_2 E_{q-1} &+ c_2 E_{q+2}, \\ J_3 u &= d_3 E_{q-2} &+ c_3 E_{q+3}, \end{cases}$$

onde $c_t^2 + d_t^2 = 1$ e $c_t d_t = 0$, para $t = 1, 2, 3$.

Tendo en conta estas expresións, distinguimos os seguintes casos:

CASO 1: $d_\nu = 0$ **para algún** $\nu \in \{1, 2, 3\}$

Nótese que este caso se dá cando a subvariedade B é un punto, pois logo tense que $d_1 = d_2 = d_3 = 0$. A expresión (4.2.3) do Lema 4.2.1 para os índices $a = b = q + \nu$ dános a igualdade

$$\rho^2 g_{q+\nu,q+\nu}(s(r)) = e^{2\sigma} g_{q+\nu,q+\nu}(r) + f(r) \sum_{t=1}^{3} (\eta_t \otimes \eta_t)_{q+\nu,q+\nu}(r).$$

Calculando o límite cando r tende a cero temos

$$s'(0)^2 = s'(0)^2 + f(0) \sum_{t=1}^{3} (\eta_t \otimes \eta_t)_{q+\nu,q+\nu}(0),$$

e tendo en conta que

$$\sum_{t=1}^{3} (\eta_t \otimes \eta_t)_{q+\nu,q+\nu}(0) = \sum_{t=1}^{3} g(E_{q+\nu}, J_t u) g(E_{q+\nu}, J_t u) = 1,$$

da expresión anterior obtemos $s'(0)^2 = s'(0)^2 + f(0)$, de onde se segue que $f(0) = 0$.

CASO 2: $d_\nu \neq 0$ **para todo** $\nu \in \{1, 2, 3\}$

Supoñamos primeiro que *dim* $B \geq 4$. A expresión (4.2.1) do Lema 4.2.1 dános a igualdade

$$g_{ij}(s(r)) = e^{2\sigma} g_{ij}(r) + f(r) \sum_{t=1}^{3} (\eta_t \otimes \eta_t)_{ij}(r),$$

e calculando o límite cando r tende a cero temos que

$$\delta_{ij} = s'(0)^2 \delta_{ij} + f(0) \left\{ \delta_{iq}\delta_{jq} + \delta_{i,q-1}\delta_{j,q-1} + \delta_{i,q-2}\delta_{j,q-2} \right\}.$$

Como $dim\ B \geq 4$, existe $l \notin \{q, q-1, q-2\}$. Poñendo os índices $i = j = l$ na expresión anterior obtemos $s'(0)^2 = 1$. Agora, tomando os índices $i = j = q$ na mesma expresión, vemos que $s'(0)^2 + f(0) = 1$, de onde $f(0) = 0$.

Se $dimB \leq 3$, como $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ten que ser $dimB = 3$. Posto que $dimM \geq 8$ tense que $codimB \geq 5$, e entón existe $v \in T_m^\perp B$ vector unitario tal que $v \in \langle\{u, J_1u, J_2u, J_3u\}\rangle^\perp$. Polo tanto $J_1v, J_2v, J_3v \in T_m^\perp B$, e así para algunha base $\{E_1', \ldots, E_n'\}$ adaptada ó vector v os vectores J_tv veñen dados por

$$J_1v = E'_{q+1}, \quad J_2v = E'_{q+2}, \quad J_3v = E'_{q+3}.$$

Logo, polo caso 1, tense que $f(0) = 0$, pois os d_t de v son todos cero.

Para concluír a proba, falta ver que se $dim\ B \geq 1$ entón $s'(0)^2 = 1$. Para ver isto, na igualdade

$$g_{ij}(s(r)) = e^{2\sigma} g_{ij}(r) + f(r) \sum_{t=1}^{3} (\eta_t \otimes \eta_t)_{ij}(r)$$

poñemos $i = j = 1$ e calculamos o límite cando r tende a cero. Así, tendo en conta que $f(0) = 0$, obtemos finalmente $s'(0)^2 = 1$. (Observemos que utilizamos o feito de que sexa $dim\ B \geq 1$ para probar esta última afirmación). □

Imos ver agora un exemplo dunha variedade case cuaterniónica de dimensión catro e dunha transformación xeodésica parcialmente conforme que non verifican a conclusión do lema previo.

Exemplo 4.2.1 *Variedade case cuaterniónica de dimensión catro que non satisfai a afirmación do Lema* 4.2.2.

Sexan $M = \mathbb{R}^4$ e $B = \mathbb{R}^3 \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ a estructura de variedade case cuaterniónica dada pola métrica euclidiana e polos campos de tensores:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definimos a transformación xeodésica con respecto á subvariedade B

$$\varphi_B(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, cx_4),$$

sendo $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. É inmediato comprobar que φ_B é unha transformación xeodésica parcialmente conforme, sendo $s(r) = cr$ e $f(r) = 1 - c^2$. Sen embargo, non se verifica a primeira afirmación do Lema 4.2.2, pois $f(0) = 1 - c^2 \neq 0$. Se escollemos a constante c tal que $c^2 \neq 1$, entón tampouco se verificará a outra afirmación do lema, $s'(0)^2 = 1$, xa que $s'(0)^2 = c^2 \neq 1$.

Este exemplo pon de manifesto que a hipótese *dim* $M \geq 8$ non se pode suprimir no Lema 4.2.2 e, polo tanto, de agora en adiante sempre sobreentenderemos que falamos de variedades de dimensión ≥ 8, aínda que non o digamos explicitamente. A razón desta suposición radica en que imos usar ó longo de todo o traballo o feito de que $f(0) = 0$.

Exemplo 4.2.2 *Transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a un punto dunha variedade case cuaterniónica de dimensión maior que catro, que non verifica* $s'(0)^2 = 1$.

Sexa $M = \mathbb{R}^{4k}$, onde k é calquera número natural maior que un, coa estructura de variedade case cuaterniónica dada pola métrica euclidiana e polos campos de tensores

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \; J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde I denota a matriz identidade de $\mathbb{R}^k$. Consideremos a subvariedade $B = \{0\}$ e a transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a B dada por

$$\varphi_B(x_1, ..., x_{4k}) = \left(\frac{1}{2}x_1, ..., \frac{1}{2}x_{4k} \right).$$

Para esta transformación é $s(r) = \frac{1}{2}\,r$, e entón, tense que $s'(0)^2 = \frac{1}{4} \neq 1$.

Observación 4.2.1 *De agora en diante, imos utilizar a seguinte notación para os desenvolvementos en serie de potencias das compoñentes da métrica* g *e das 1-formas* η_t, $t = 1, 2, 3$, *ó longo dunha xeodésica normal á subvariedade* B, $\gamma(r) = exp_\nu(ru)$, *e da función* $s(r)$:

$$s(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k r^k, \tag{4.2.5}$$

$$g_{\lambda\mu}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(m, u, \lambda, \mu) r^k, \tag{4.2.6}$$

$$\eta_t \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right)(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^t(m, u, a) r^k. \tag{4.2.7}$$

Esta notación manterémola ó longo de toda este capítulo, aínda que ás veces non faremos mención explícita dela.

No seguinte teorema mostramos que a única transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a unha subvariedade B de dimensión ≥ 1 verificando $s'(0) = 1$ é a identidade. O caso en que *dim* $B = 0$ será tratado máis adiante, probando no Teorema 4.3.1 que a mesma afirmación é igualmente válida para o caso en que B é un punto.

Teorema 4.2.1 *Sexa (M^n, g, V), $n > 4$, unha variedade case cuaterniónica. Se existe unha transformación xeodésica φ_B parcialmente conforme con respecto a unha subvariedade B e dim $B \geq 1$, entón $s(r) = r$ ou $s'(0) = -1$.*

Proba. Polo Lema 4.2.2 tense que $s'(0)^2 = 1$. O que imos facer é supor que $s'(0) = 1$ e ver que nese caso ten que ser necesariamente $s(r) = r$. Farémolo por inducción, probando que os coeficientes β_k da serie de potencias da función $s(r)$ son cero para todo $k \geq 2$. Unha vez probado isto, como $s(r)$ é analítica, teremos

$$s(r) = \beta_1 r + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k r^k = \beta_1 r = s'(0) r = r.$$

Pola Proposición 4.2.1 temos que $f'(0) = 0$ e $s''(0) = 0$. Supoñamos que se verifica

$$\begin{cases} \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_{k-1} = 0, \\ f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(k-2)}(0) = 0, \end{cases}$$

e probemos que $\beta_k = f^{(k-1)}(0) = 0$. Posto que $\beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_{k-1} = 0$, a función $s(r)$ verifica

$$s(r) = r + \beta_k r^k + O(r^{k+1}),$$

de onde se obtén

$$\begin{array}{rcccccc} \rho(r) & = & 1 & + & \beta_k r^{k-1} & + & O(r^k), \\ \rho(r)^2 & = & 1 & + & 2\beta_k r^{k-1} & + & O(r^k), \\ s'(r) & = & 1 & + & k\beta_k r^{k-1} & + & O(r^k), \\ s'(r)^2 & = & 1 & + & 2k\beta_k r^{k-1} & + & O(r^k). \end{array} \tag{4.2.8}$$

Utilizando (4.2.8) na expresión (4.2.3) que nos dá o Lema 4.2.1, e tendo en conta que

$$\begin{aligned} (\eta_t \otimes \eta_t)_{ab}(r) &= (\eta_t \otimes \eta_t)_{ab}(0) + O(r) \\ &= g(E_a, J_t u) g(E_b, J_t u) + O(r) \\ &= c_t^2 \delta_{a,q+t} \delta_{b,q+t} + O(r), \qquad t \in \{1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

obtemos a igualdade

$$\left\{1 + 2\beta_k r^{k-1} + O(r^k)\right\} \left\{\delta_{ab} + \sum_{l=1}^{k-2} \alpha_l(m,u,a,b) r^l \right.$$
$$\left. + \alpha_{k-1}(m,u,a,b) r^{k-1} + O(r^k) \right\}$$
$$= \left\{1 + 2k\beta_k r^{k-1} + O(r^k)\right\} \left\{\delta_{ab} + \sum_{l=1}^{k-2} \alpha_l(m,u,a,b) r^l \right.$$
$$\left. + \alpha_{k-1}(m,u,a,b) r^{k-1} + O(r^k) \right\}$$
$$+ \left\{ \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} r^{k-1} + O(r^k) \right\} \left\{ \sum_{t=1}^{3} c_t^2 \delta_{a,q+t} \delta_{b,q+t} + O(r) \right\}.$$

Igualando os coeficientes dos termos de grao $k-1$, vemos que

$$\begin{aligned} 2\beta_k \delta_{ab} + \alpha_{k-1}(m,u,a,b) &= 2k\beta_k \delta_{ab} + \alpha_{k-1}(m,u,a,b) \\ &\quad + \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \sum_{t=1}^{3} c_t^2 \delta_{a,q+t} \delta_{b,q+t}, \end{aligned}$$

de onde se segue a identidade

$$2(1-k)\beta_k \delta_{ab} = \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \sum_{t=1}^{3} c_t^2 \delta_{a,q+t} \delta_{b,q+t}. \tag{4.2.9}$$

Substituíndo (4.2.8) na expresión (4.2.1) que nos dá o Lema 4.2.1 obtense a expresión

$$\delta_{ij} + \sum_{l=1}^{k-2} \alpha_l(m,u,i,j) r^l + \alpha_{k-1}(m,u,i,j) r^{k-1} + O(r^k)$$
$$= \left\{1 + 2k\beta_k r^{k-1} + O(r^k)\right\} \left\{\delta_{ij} + \sum_{l=1}^{k-2} \alpha_l(m,u,i,j) r^l \right.$$
$$\left. + \alpha_{k-1}(m,u,i,j) r^{k-1} + O(r^k) \right\}$$
$$+ \left\{ \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} r^{k-1} + O(r^k) \right\} \left\{ \sum_{t=1}^{3} d_t^2 \delta_{i,q+1-t} \delta_{j,q+1-t} + O(r) \right\},$$

e igualando os coeficientes dos termos de grao $k-1$ obtemos

$$2k\beta_k\delta_{ij} = -\frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\sum_{t=1}^{3} d_t^2\delta_{i,q+1-t}\delta_{j,q+1-t}. \tag{4.2.10}$$

Usando as expresións (4.2.9) e (4.2.10), que acabamos de obter, imos probar que $\beta_k = f^{(k-1)}(0) = 0$. Para facelo, distinguimos os seguintes casos:

$\boxed{\textbf{CASO 1: } d_\nu = 0 \textbf{ para algún } \nu \in \{1,2,3\}}$

Primeiro, supoñamos que $dim\, B \geq 3$. Tomando os índices $i = j = q+1-\nu$ en (4.2.10) tense $2k\beta_k = 0$, é dicir, $\beta_k = 0$. Poñendo $a = b = q+\nu$ en (4.2.9) obtense $f^{(k-1)}(0) = 0$.

Agora, se $dim\ B \leq 2$, como $dim\ M \geq 8$ tense que $codim\ B \geq 6$ e, polo tanto, existe $l \notin \{q+1, q+2, q+3\}$. Poñendo os índices $a = b = l$ en (4.2.9) vese que $2(1-k)\beta_k = 0$, é dicir, $\beta_k = 0$ (pois $k \geq 2$). Por outra parte, considerando $a = b = q+\nu$ en (4.2.9) obtense $\frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}c_\nu^2 = 0$ e, tendo en conta que $c_\nu = 1$ por ser $d_\nu = 0$, vemos que $f^{(k-1)}(0) = 0$.

$\boxed{\textbf{CASO 2: } c_\nu = 0 \textbf{ para todo } \nu \in \{1,2,3\}}$

Supoñamos que $codim\ B \geq 2$. Poñendo en (4.2.9) os índices $a = b = q+1$ tense $2(1-k)\beta_k = 0$, é dicir, $\beta_k = 0$. Agora, poñendo $i = j = q$ en (4.2.10) obtense $f^{(k-1)}(0) = 0$.

Se $codim\ B = 1$, como $dim\ M \geq 8$, ten que ser $dim\ B \geq 7$. Polo tanto, existe $l \leq q$, $l \notin \{q, q-1, q-2\}$. Poñendo os índices $i = j = l$ en (4.2.10) tense $\beta_k = 0$. Agora, considerando $i = j = q$ en (4.2.10), obtense $f^{(k-1)}(0) = 0$.

Polo tanto, vimos que $\beta_k = 0$, para todo $k \geq 2$. Isto, xunto co feito de que $s(0) = 0$ e $s'(0) = 1$, en virtude da analiticidade de $s(r)$, dános que $s(r) = r$, que era o que queriamos demostrar. □

O Lema 4.2.2 pon de manifesto que a dimensión da subvariedade inflúe na transformación xeodésica. Reciprocamente, a existencia de transformacións xeodésicas parcialmente conformes inflúe na xeometría da subvariedade, como mostra o seguinte

Teorema 4.2.2 *Sexa (M^n, g, V), $n > 4$, unha variedade case cuaterniónica e B unha subvariedade regular de dimensión maior ou igual que un. Se existe unha transformación xeodésica φ_B parcialmente conforme con respecto a B, non trivial, entón verifícase unha das seguintes afirmacións:*

(i) B é totalmente xeodésica, se $codim\, B > 1$,

(ii) B é unha hipersuperficie totalmente umbílica, ou

(iii) B é unha hipersuperficie de Hopf.

Antes de pasar á proba deste teorema imos definir o concepto hipersuperficie de Hopf que, ademais de aparecer no anterior teorema, tamén o fará en máis ocasións neste capítulo.

Definición 4.2.2 *Chamaremos hipersuperficie de Hopf a unha hipersuperficie con dúas curvaturas principais constantes distintas, onde unha delas ten multiplicidade tres e corresponde ás direccións principais* J_1N, J_2N, J_3N*, sendo* N *o gradiente da función distancia normal a* B*.*

Proba. Como $dim\ B \geq 1$ e φ_B non é a identidade, polo Teorema 4.2.1 verifícase $s'(0) = -1$, e así $s(r) = -r + \beta_2 r^2 + O(r^3)$. A partir da expresión (4.2.1) do Lema 4.2.1 e usando (1.3.5), deducimos a igualdade

$$\begin{aligned}
&\delta_{ij} - 2rT_{ij} + O(r^2) \\
&\quad = \left\{1 - 4\beta_2 r + O(r^2)\right\}\left\{\delta_{ij} + 2rT_{ij} + O(r^2)\right\} \\
&\quad\quad + \left\{rf'(0) + O(r^2)\right\}\left\{\sum_{t=1}^{3} d_t^2 \delta_{i,q+1-t}\delta_{j,q+1-t} + O(r)\right\}.
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes dos termos de grao un obtemos

$$-2T_{ij} = -4\beta_2\delta_{ij} + 2T_{ij} + f'(0)\sum_{t=1}^{3} d_t^2 \delta_{i,q+1-t}\delta_{j,q+1-t},$$

é dicir,

$$g(T(u)E_i, E_j) = T_{ij} = \frac{1}{2}\left\{s''(0)\delta_{ij} - \frac{1}{2}f'(0)\sum_{t=1}^{3} d_t^2 \delta_{i,q+1-t}\delta_{j,q+1-t}\right\}.$$

Así, o operador de configuración vén dado pola expresión

$$T(u) = \frac{1}{2}\left\{s''(0)I - \frac{1}{2}f'(0)\sum_{t=1}^{3}\eta_t \otimes J_t u\right\}.$$

Imos empregar a anterior expresión de $T(u)$ para probar o resultado. Primeiro, supoñamos que $codim\ B = 1$. Logo B é unha hipersuperficie real e, polo tanto, tense que $d_t = 1$ para $t \in \{1, 2, 3\}$. Logo, o operador de configuración está dado pola igualdade

$$T(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s''(0)I_{n-4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left\{s''(0) - \frac{1}{2}f'(0)\right\} I_3 \end{pmatrix}.$$

Así, se $f'(0) = 0$ entón $T(u) = \frac{1}{2}s''(0)I$ e, polo tanto, B é totalmente umbílica (totalmente xeodésica se $s''(0) = 0$). Se $f'(0) \neq 0$, entón B é unha hipersuperficie con dúas curvaturas principais constantes distintas, $\kappa_1 = \frac{1}{2}s''(0)$ con multiplicidade $n-4$ e $\kappa_2 = \frac{1}{2}\{s''(0) - \frac{1}{2}f'(0)\}$ con multiplicidade tres, correspondente esta última ás direccións principais J_1u, J_2u, J_3u, é dicir, é unha hipersuperficie de Hopf.

Vexamos agora que se $codim B \geq 2$ entón B é unha subvariedade totalmente xeodésica. A Proposición 4.2.1 dános que $s''(0) = f'(0) = 0$. Entón,

$$T(u) = \frac{1}{2}\left\{s''(0)I - \frac{1}{2}f'(0)\sum_{t=1}^{3}\eta_t \otimes J_t u\right\} = 0,$$

é dicir, B é totalmente xeodésica. □

Imos agora co resultado central desta sección, que nos di que se $dim B \geq 1$ e $codim B > 1$ entón a identidade e a reflexión xeodésica son as únicas transformacións xeodésicas parcialmente conformes que hai con respecto a B.

Teorema 4.2.3 *Sexa (M^n, g, V) unha variedade case cuaterniónica e B unha subvariedade q-dimensional de M. Se φ_B é unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a B e $0 < q < n-1$, entón φ_B é necesariamente a identidade ou a reflexión xeodésica.*

Proba. Supoñamos que φ_B non é a identidade e vexamos que ten que ser a reflexión xeodésica, i.e., que $s(r) = -r$. Farémolo por inducción, probando que $s^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \geq 2$. Posto que *codim* $B \geq 2$, a Proposición 4.2.1 dános que $s''(0) = f'(0) = 0$. Supoñamos que se verifica

$$\begin{cases} \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_{k-1} = 0, \\ f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(k-2)}(0) = 0, \end{cases}$$

e probemos que $\beta_k = f^{(k-1)}(0) = 0$. Pola hipótese de inducción, a función $s(r)$ verifica

$$s(r) = -r + \beta_k r^k + O(r^{k+1}),$$

de onde se seguen as igualdades

$$\begin{array}{rcrcrcl} \rho(r) & = & -1 & + & \beta_k r^{k-1} & + & O(r^k), \\ \rho(r)^2 & = & 1 & - & 2\beta_k r^{k-1} & + & O(r^k), \\ s'(r) & = & -1 & + & k\beta_k r^{k-1} & + & O(r^k), \\ s'(r)^2 & = & 1 & - & 2k\beta_k r^{k-1} & + & O(r^k). \end{array} \tag{4.2.11}$$

Substituíndo (4.2.11) na expresión (4.2.1) que nos dá o Lema 4.2.1, tense que

$$\delta_{ij} + \sum_{l=1}^{k-2}(-1)^l \alpha_l(m,u,i,j)r^l + (-1)^{k-1}\alpha_{k-1}(m,u,i,j)r^{k-1} + O(r^k)$$

$$= \left\{1 - 2k\beta_k r^{k-1} + O(r^k)\right\}\left\{\delta_{ij} + \sum_{l=1}^{k-2}\alpha_l(m,u,i,j)r^l\right.$$

$$\left. + \alpha_{k-1}(m,u,i,j)r^{k-1} + O(r^k)\right\}$$

$$+ \left\{\frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}r^{k-1} + O(r^k)\right\}\left\{\sum_{t=1}^{3} d_t^2 \delta_{i,q+1-t}\delta_{j,q+1-t} + O(r)\right\},$$

e igualando os coeficientes dos termos de grao $k-1$ obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} 2k\beta_k\delta_{ij} &= (1-(-1)^{k-1})\alpha_{k-1}(m,u,i,j) \\ &\quad + \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\sum_{t=1}^{3} d_t^2 \delta_{i,q+1-t}\delta_{j,q+1-t}. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Substituíndo (4.2.11) na expresión (4.2.3) que nos dá o Lema 4.2.1, obtense a igualdade

$$\left\{1 - 2\beta_k r^{k-1} + O(r^k)\right\}\left\{\delta_{ab} + \sum_{l=1}^{k-2}(-1)^l\alpha_l(m,u,a,b)r^l\right.$$

$$\left. + (-1)^{k-1}\alpha_{k-1}(m,u,a,b)r^{k-1} + O(r^k)\right\}$$

$$= \left\{1 - 2k\beta_k r^{k-1} + O(r^k)\right\}\left\{\delta_{ab} + \sum_{l=1}^{k-2}\alpha_l(m,u,a,b)r^l\right.$$

$$\left. + \alpha_{k-1}(m,u,a,b)r^{k-1} + O(r^k)\right\}$$

$$+ \left\{\frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}r^{k-1} + O(r^k)\right\}\left\{\sum_{t=1}^{3} c_t^2 \delta_{a,q+t}\delta_{b,q+t} + O(r)\right\}.$$

Igualando os coeficientes dos termos de grao $k-1$ obtemos a expresión

$$-2\beta_k\delta_{ab} + (-1)^{k-1}\alpha_{k-1}(m,u,a,b)$$

$$= -2k\beta_k\delta_{ab} + \alpha_{k-1}(m,u,a,b) + \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\sum_{t=1}^{3} c_t^2 \delta_{a,q+t}\delta_{b,q+t},$$

da que se segue a identidade

$$
\begin{aligned}
2(k-1)\beta_k\delta_{ab} &= (1-(-1)^{k-1})\alpha_{k-1}(m,u,a,b) \\
&\quad + \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\sum_{t=1}^{3} c_t^2\delta_{a,q+t}\delta_{b,q+t}.
\end{aligned} \tag{4.2.13}
$$

Agora, imos probar que $\beta_k = f^{(k-1)}(0) = 0$. Para facelo, distinguimos os seguintes casos:

CASO 1: Existe $u \in T_m^\perp B$ con $d_1 = d_2 = d_3 = 0$

De (4.2.12) obtense a igualdade $2k\beta_k = (1-(-1)^{k-1})\alpha_{k-1}(m,u,i,i)$. Se k é impar é obvio que $\beta_k = 0$. Supoñamos, polo tanto, que k é par, i.e., $k = 2l$. Logo, temos a expresión

$$\beta_{2l} = \frac{1}{2l}\alpha_{2l-1}(m,u,i,i).$$

Posto que β_{2l} é independente do vector u e do índice i, a anterior igualdade verifícase calquera que sexa o vector unitario $v \in T_m^\perp B$ que consideremos. En particular, a igualdade é válida para $v = -u$, é dicir, verifícase

$$\beta_{2l} = \frac{1}{2l}\alpha_{2l-1}(m,-u,i,i).$$

Pero como $\alpha_{2l-1}(m,-u,i,i) = -\alpha_{2l-1}(m,u,i,i)$, vemos que $\beta_{2l} = 0$. Establezamos agora que $f^{(k-1)}(0) = 0$. De (4.2.13), tendo en conta que $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, séguese que

$$((-1)^{k-1}-1)\alpha_{k-1}(m,u,q+1,q+1) = \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.$$

Se k é impar verifícase que $f^{(k-1)}(0) = 0$ e, se k é par, debido ó carácter par da función f, tamén se ten $f^{(k-1)}(0) = 0$.

CASO 2: Existe $u \in T_m^\perp B$ con $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Neste caso, ó poñer na igualdade (4.2.13) os índices $a = b = q+1$, obtemos $2(k-1)\beta_k = (1-(-1)^{k-1})\alpha_{k-1}(m,u,q+1,q+1)$. Obviamente, se k é impar tense que $\beta_k = 0$. Supoñamos, polo tanto, que k é un número par. Entón, $k = 2l$ e tense a expresión

$$\beta_{2l} = \frac{1}{2l-1}\alpha_{2l-1}(m,u,q+1,q+1).$$

Tendo en conta que a anterior igualdade se dá para todo vector unitario $v \in T_m^\perp B$ e razoando como no caso anterior chegamos a que $\beta_{2l} = 0$. Vese que $f^{(k-1)}(0) = 0$ procedendo de modo idéntico a como se fixo no caso anterior, a partir da igualdade

$$((-1)^{k-1}-1)\alpha_{k-1}(m,u,i,i) = \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}.$$

CASO 3: Se $u \in T_m^{\perp}B$ existen $\mu, \nu \in \{1,2,3\}$ con $d_\mu = 1, d_\nu = 0$

Supoñamos primeiro que *codim* $B \geq 3$. De (4.2.13) obtense a igualdade

$$2(k-1)\beta_k = (1-(-1)^{k-1})\alpha_{k-1}(m,u,q+\mu,q+\mu).$$

Distinguindo se k é par ou impar, e procedendo como antes, obtemos que $\beta_k = 0$. Para ver que $f^{(k-1)}(0) = 0$, usamos a expresión

$$((-1)^{k-1}-1)\alpha_{k-1}(m,u,\mu,\mu) = \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!},$$

que obtemos de (4.2.12) poñendo os índices $i = j = \mu$, e concluímos de forma totalmente análoga a como se fixo en casos anteriores.

Agora, se *codim* $B < 3$ tense que *dim* $B \geq 6$. Así, poñendo $i = \nu$ en (4.2.12) obtense a igualdade $2k\beta_k = (1-(-1)^{k-1})\alpha_{k-1}(m,u,\nu,\nu)$, de onde se conclúe que $\beta_k = 0$. Considerando os índices $i = j = q+\nu$ en (4.2.13) tense

$$((-1)^{k-1}-1)\alpha_{k-1}(m,u,q+\nu,q+\nu) = \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\ .$$

A partir da anterior igualdade obtense $f^{(k-1)}(0) = 0$ de forma totalmente análoga a como se veu facendo durante toda a demostración deste teorema. □

Do anterior teorema séguese de modo inmediato o resultado que formulamos no seguinte

Corolario 4.2.1 *Sexa (M^n, g, V) unha variedade case cuaterniónica e B unha subvariedade de M de dimensión q, onde $0 < q < n-1$. Entón, a reflexión xeodésica é unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a B se e só se é unha isometría.*

Proba. Supoñamos que a reflexión xeodésica é unha isometría, é dicir, $\varphi_B^* g = g$. Entón, é obvio que φ_B é unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a B. Reciprocamente, se a reflexión xeodésica, φ_B, é unha transformación xeodésica parcialmente conforme, tense que $f \equiv 0$, de onde se segue que $\varphi_B^* g = g$, i.e., a reflexión xeodésica é unha isometría. □

4.3 Transformacións con respecto a puntos

Iniciamos esta sección probando que a identidade e a reflexión xeodésica son as únicas transformacións xeodésicas parcialmente conformes isométricas que existen con respecto a un punto. Este resultado afirma algo análogo ó último corolario da sección anterior no caso en que a subvariedade B se reduce a un punto.

Teorema 4.3.1 *Sexa (M, g, V) unha variedade case cuaterniónica e φ_m unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a un punto $m \in M$. Logo:*

(i) $s'(0) = 1$ *se e só se* $s(r) = r$ *e* $s'(0) = -1$ *se e só se* $s(r) = -r$.

(ii) φ_m *é unha isometría se e soamente se* $s'(0)^2 = 1$.

Proba. É obvio que se φ_m é a identidade ou a reflexión xeodésica entón $s'(0) = 1$ ou $s'(0) = -1$. Para establecer o recíproco demóstrase cada unha das dúas implicacións seguintes:

$$s'(0) = 1 \Rightarrow s(r) = r, \qquad s'(0) = -1 \Rightarrow s(r) = -r.$$

Supoñendo que $s'(0) = 1$ ou $s'(0) = -1$ vese que φ_m ten que ser necesariamente a identidade ou a reflexión xeodésica. O proceso de demostración é totalmente idéntico ó que se seguiu nos Teoremas 4.2.1 e 4.2.3, vendo que tódolos coeficientes da serie de potencias da función $s(r)$ son nulos, a partir do segundo. Así, pola analiticidade de $s(r)$ conclúese que o resultado é certo. □

Do anterior teorema dedúcese de xeito inmediato o seguinte

Corolario 4.3.1 *Sexa (M, g, V) unha variedade case cuaterniónica e sexa $m \in M$. En tón, unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto ó punto m é unha isometría se e só se é a identidade ou a reflexión xeodésica.*

O seguinte resultado establece as relacións que implica a existencia de transformacións xeodésicas parcialmente conformes con respecto a puntos entre os coeficientes do desenvolvemento en serie de potencias das compoñentes da métrica $g_{ab}(r)$, $a, b = 1, \ldots, n-1$, das 1-formas η_t, $t = 1, 2, 3$, e das funcións $s(r)$ e $f(r)$.

Lema 4.3.1 *Sexa (M, g, V) unha variedade case cuaterniónica e φ_m unha transformación xeodésica con respecto a un punto $m \in M$. Entón, φ_m é unha transformación xeodésica parcialmente conforme se e soamente se os coeficientes da serie de potencias da función $s(r)$ satisfan a seguinte fórmula de recorrencia:*

$$\beta_1^2(1-\beta_1^k)\alpha_k(m,u,a,b) = \delta_{ab}\sum_{p+q=k+2}(1-pq)\beta_p\beta_q$$

$$+\sum_{\substack{i+j=k+2\\ i\geq 3, j\geq 2}}\left(\sum_{p+q=i}\beta_p\beta_q\right)\left(\sum_{l\leq j}\alpha_l(m,u,a,b)\left(\sum_{p_1+\ldots+p_l=j}\beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l}\right)\right)$$

$$(4.3.1)\quad -\sum_{l=2}^{k-1}\alpha_l(m,u,a,b)\left(\sum_{p+q=k+2-l}pq\beta_p\beta_q\right)$$

$$+\beta_1^2\sum_{l=2}^{k-1}\alpha_l(m,u,a,b)\left(\sum_{p_1+\ldots+p_l=k}\beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l}\right)$$

$$-\sum_{i+c+d=k}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}\left(\sum_{t=1}^{3}\eta_c^t(m,u,a)\eta_d^t(m,u,b)\right)$$

onde $a,b\in\{1,\ldots,n-1\}$ *e* $k\geq 1$.

Proba. Imos probar o resultado empregando a fórmula

$$\rho^2 g_{ab}(s) = e^{2\sigma}g_{ab}(r) + f(r)\sum_{t=1}^{3}(\eta_t\otimes\eta_t)_{ab}(r),$$

que nos dá o Lema 4.2.1. Multiplicando ámbolos termos da igualdade por r^2, e tendo en conta que $e^{2\sigma}=s'(r)^2$, obtemos

$$(4.3.2)\qquad r^2\rho^2 g_{ab}(s) = r^2 s'(r)^2 g_{ab}(r) + r^2 f(r)\sum_{t=1}^{3}(\eta_t\otimes\eta_t)_{ab}(r).$$

O que imos a facer é desenvolver ámbolos lados da anterior identidade en serie de potencias. Despois, igualando os coeficientes que acompañan a cada potencia da variable r, obteremos a expresión do enunciado do Lema.

A partir do desenvolvemento en serie de potencias da función s, (4.2.5), tense

$$
\begin{aligned}
r^2\rho^2(r) &= \sum_{i\geq 2}\left(\sum_{p+q=i}\beta_p\beta_q\right)r^i,\\
r^2 s'(r)^2 &= \sum_{i\geq 2}\left(\sum_{p+q=i}pq\beta_p\beta_q\right)r^i, \qquad (4.3.3)\\
s(r)^l &= \sum_{j\geq l}\left(\sum_{p_1+\ldots+p_l=j}\beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l}\right)r^j.
\end{aligned}
$$

Substituíndo (4.3.3), (4.2.6) e (4.2.7) en (4.3.2), obtense

$$
\begin{aligned}
&\left\{\sum_{i\geq 2}\left(\sum_{p+q=i}\beta_p\beta_q\right)r^i\right\}\left\{\delta_{ab}\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{l\geq 2}\alpha_l(m,u,a,b)\left(\sum_{j\geq l}\left(\sum_{p_1+\ldots+p_l=j}\beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l}\right)r^j\right)\right\}\\
&= \left\{\sum_{i\geq 2}\left(\sum_{p+q=i}pq\beta_p\beta_q\right)r^i\right\}\left\{\delta_{ab}+\sum_{l\geq 2}\alpha_l(m,u,a,b)r^l\right\}\\
&+\left\{\sum_{i\geq 1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}r^{i+2}\right\}\left\{\sum_{t=1}^{3}\left(\sum_{c\geq 0}\eta_c^t(m,u,a)r^c\right)\left(\sum_{d\geq 0}\eta_d^t(m,u,b)r^d\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Igualando os coeficientes dos termos de grao $k+2$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{i+j=k+2\\ i,j\geq 2}}\left\{\left(\sum_{p+q=i}\beta_p\beta_q\right)\left(\sum_{l\leq j}\alpha_l(m,u,a,b)\left(\sum_{p_1+\ldots+p_l=j}\beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l}\right)\right)\right\}\\
&\quad+\delta_{ab}\sum_{p+q=k+2}\beta_p\beta_q\\
&\qquad= \sum_{\substack{i+l=k+2\\ i,l\geq 2}}\left(\sum_{p+q=i}pq\beta_p\beta_q\right)\alpha_l(m,u,a,b)+\delta_{ab}\sum_{p+q=k+2}pq\beta_p\beta_q\\
&\qquad\quad+\sum_{i+c+d=k}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}\left(\sum_{t=1}^{3}\eta_c^t(m,u,a)\eta_d^t(m,u,b)\right).
\end{aligned}
$$

Separando $\alpha_k(m,u,a,b)$ nas sumas da anterior expresión obtemos

$$\sum_{\substack{i+j=k+2\\ i\geq 3,\, j\geq 2}} \left\{ \left(\sum_{p+q=i} \beta_p\beta_q \right) \left(\sum_{l\leq j} \alpha_l(m,u,a,b) \left(\sum_{p_1+\ldots+p_l=j} \beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l} \right)\right)\right\}$$
$$+\beta_1^2 \sum_{l=2}^{k-1} \alpha_l(m,u,a,b) \left(\sum_{p_1+\ldots+p_l=k} \beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l} \right)$$
$$+\beta_1^{k+2}\alpha_k(m,u,a,b) + \delta_{ab} \sum_{p+q=k+2} \beta_p\beta_q$$
$$= \sum_{\substack{i+l=k+2\\ i\geq 3,\, l\geq 2}} \left(\sum_{p+q=i} pq\beta_p\beta_q \right) \alpha_l(m,u,a,b) + \beta_1^2\alpha_k(m,u,a,b)$$
$$+\delta_{ab} \sum_{p+q=k+2} pq\beta_p\beta_q + \sum_{i+c+d=k} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \left(\sum_{t=1}^{3} \eta_c^t(m,u,a)\eta_d^t(m,u,b) \right).$$

Entón, despexando $\alpha_k(m,u,a,b)$ obtemos o resultado. □

Probamos a continuación a influencia que exerce a existencia dunha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a un punto sobre o tensor curvatura de Riemann nese punto.

Proposición 4.3.1 *Sexan* (M^n, g, V) *unha variedade case cuarterniónica e* $m \in M$. *Se existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme* φ_m *con respecto ó punto* m, *entón o tensor curvatura de Riemann verifica*

$$R_{uaub}(m) = \frac{3}{\beta_1^2(\beta_1^2-1)} \left\{ 4\beta_1\beta_3\delta_{ab} + \frac{f''(0)}{2} \sum_{t=1}^{3} \delta_{at}\delta_{bt} \right\},$$

para $a, b = 1, \ldots, n-1$.

Proba. Pola Proposición 4.2.1 tense $f'(0) = 0$ e $\beta_2 = s''(0) = 0$, e por (1.3.7) tense $\alpha_2(m,u,a,b) = \frac{1}{3}R_{uaub}(m)$, $a, b = 1, \ldots, n-1$. Tendo en conta o anterior, a expresión (4.3.1) do Lema 4.3.1 para $k = 2$ dános a identidade

$$\frac{1}{3}\beta_1^2(\beta_1^2-1)R_{uaub}(m) = 4\beta_1\beta_3\delta_{ab} + \frac{f''(0)}{2} \sum_{t=1}^{3} \delta_{at}\delta_{bt}.$$

Despexando $R_{uaub}(m)$ nesta última expresión chegamos a

$$R_{uaub}(m) = \frac{3}{\beta_1^2(\beta_1^2-1)} \left\{ 4\beta_1\beta_3\delta_{ab} + \frac{f''(0)}{2} \sum_{t=1}^{3} \delta_{at}\delta_{bt} \right\}$$

$(a, b = 1, \ldots, n-1)$, que era o que queriamos demostrar. $\square$

Unha consecuencia inmediata da proposición anterior está formulada no seguinte

Corolario 4.3.2 *Sexa (M, g, V) unha variedade case cuaterniónica e sexa m un punto de M. Se existe unha transformación xeodésica φ_m parcialmente conforme con respecto ó punto m, entón verifícase:*

(i) $f''(0) = 0$ *se e soamente se* $R_u(m)$ *ten un único autovalor.*

(ii) $f''(0) \neq 0$ *se e soamente se* $R_u(m)$ *ten dous autovalores distintos, un con multiplicidade tres correspondente ós autovectores* J_1u, J_2u, J_3u.

O Teorema 4.3.2 dá condicións necesarias para a existencia dunha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a un punto. As ditas condicións, expresadas en termos das derivadas dos operadores de Jacobi, serán unha xeneralización do corolario anterior. Para obter o resultado mencionado, comezamos co seguinte

Lema 4.3.2 *Sexa (M^n, g, V) unha variedade case cuaterniónica e sexa m un punto de M. Se existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme φ_m con respecto ó punto m, que non sexa unha isometría, entón os coeficientes da serie de potencias da función*

$$g_{ab}(r) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k(m, u, a, b) r^k$$

son independentes do vector u, e ademais satisfan

$$\Big(\alpha_k(m, u, a, b)\Big)_{1 \leq a, b \leq n-1} = \begin{pmatrix} \zeta_k(m) I_3 & 0 \\ 0 & \xi_k(m) I_{n-4} \end{pmatrix}, \tag{4.3.4}$$

onde $\zeta_k(m)$ e $\xi_k(m)$ son números reais, para todo $k \geq 0$.

Proba. O que temos que demostrar é que os coeficientes $\alpha_k(m, u, a, b)$ son independentes do vector u e que verifican

$$\begin{cases} \alpha_k(m, u, a, b) = 0, & a, b \in \{1, \ldots, n-1\},\ a \neq b, \\ \alpha_k(m, u, a, a) = \alpha_k(m, u, b, b), & a, b \in \{1, 2, 3\}, \text{ ou} \\ & a, b \in \{4, \ldots, n-1\}, \end{cases} \tag{4.3.5}$$

para todo $k \geq 0$. Primeiro, imos ver que se cumpre

$$\begin{cases} \alpha_k(m, u, a, b) = 0, & a \in \{1, 2, 3\},\ b \in \{4, \ldots, n-1\}, \text{ ou} \\ & a, b \in \{4, \ldots, n-1\},\ a \neq b, \\ \alpha_k(m, u, a, a) = \alpha_k(m, u, b, b), & a, b \in \{4, \ldots, n-1\}, \end{cases} \tag{4.3.6}$$

e que $\alpha_k(m,u,a,b)$ é independente de u para os índices indicados e para todo valor de k. A partir de (1.3.7) tense que (4.3.6) se satisfai para $k=0$ e $k=1$, e obviamente os $\alpha_k(m,u,a,b)$ son independentes de u, pois son constantes. Sexa k_0 o menor enteiro tal que $f^{(k_0)}(0)$ é non nula. Séguese, de modo inmediato, da expresión (4.3.1) que nos dá o Lema 4.3.1 que $\alpha_k(m,u,a,b)$ é independente do vector u e satisfai (4.3.6) para $k=0,1,\dots,k_0-1$. Recorrendo novamente á expresión (4.3.1) obtemos que $\alpha_{k_0}(m,u,a,b)$ é independente de u e cumpre (4.3.6). Agora, para establecer (4.3.6) para valores de k maiores que k_0, imos proceder por inducción. Admitamos que os $\alpha_k(m,u,a,b)$ son independentes do vector u, que verifican (4.3.6) para $k=0,\dots,l+k_0$ e que se ten

$$\eta_0^t(m,u,a)=\cdots=\eta_l^t(m,u,a)=0, \qquad t\in\{1,2,3\},\ a\in\{4,\dots,n-1\}.$$

A condición pedida para os η_j^t verificase trivialmente para $j=0$, pois $\eta_0^t(m,u,a)=g(E_a,J_tu)(m)=g(E_a,E_t)(m)=\delta_{at}$, $a\in\{1,\dots,n-1\}$, $t\in\{1,2,3\}$. Imos probar que

$$\begin{cases} \alpha_{l+k_0+1}(m,u,a,b) = 0, & a\in\{1,2,3\},\ b\in\{4,\dots,n-1\},\ \text{ou} \\ & a,b\in\{4,\dots,n-1\},\ a\neq b, \\ \alpha_{l+k_0+1}(m,u,a,a) = \alpha_{l+k_0+1}(m,u,b,b), & a,b\in\{4,\dots,n-1\}, \\ \eta_{l+1}^t(m,u,a) = 0, & t\in\{1,2,3\},\ a\in\{4,\dots,n-1\}, \end{cases}$$

e que $\alpha_{l+k_0+1}(m,u,a,b)$ é independente do vector u. Sexan $a\in\{1,2,3\}$ e $b\in\{4,\dots,n-1\}$. A expresión (4.3.1) do Lema 4.3.1 para $k=l+k_0+1$ dános a igualdade

$$\beta_1^2(\beta_1^{l+k_0+1}-1)\alpha_{l+k_0+1}(m,u,b,a)=\frac{f^{(k_0)}(0)}{k_0!}\eta_{l+1}^a(m,u,b). \tag{4.3.7}$$

Consideremos a familia de vectores unitarios $z_{\lambda\mu}=\frac{1}{\lambda^2+\mu^2}(\lambda u+\mu J_a u)$, onde λ e μ son números reais, algún deles non nulo. Posto que E_b é ortogonal ós vectores $z_{\lambda\mu}$, $J_a z_{\lambda\mu}$, tense que a anterior igualdade tamén se dá cando substituímos o vector u por calquera dos vectores $z_{\lambda\mu}$. Así, temos que

$$\beta_1^2(\beta_1^{l+k_0+1}-1)\alpha_{l+k_0+1}(m,z_{\lambda\mu},b,J_a z_{\lambda\mu})=\frac{\left(\nabla^{(k_0)}_{z_{\lambda\mu},\dots,z_{\lambda\mu}}f\right)(0)}{k_0!}\eta_{l+1}^a(m,z_{\lambda\mu},b).$$

Os dous termos da anterior igualdade son funcións alxébricas nas variables λ e μ. Desenvolvendo a anterior expresión e igualando os coeficientes que acompañan á maior potencia de λ, obtemos que

$$\beta_1^2(\beta_1^{l+k_0+1}-1)\alpha_{l+k_0+1}(m,u,b,J_a u)=0.$$

Como $\beta_1^{l+k_0+1}\neq 1$, posto que φ_m non é unha isometría, e $\beta_1^2=e^{2\sigma(0)}\neq 0$, podemos concluír que $\alpha_{l+k_0+1}(m,u,b,J_a u)=\alpha_{l+k_0+1}(m,u,b,a)=0$. Debido a que $f^{(k_0)}(0)\neq 0$, séguese de (4.3.7) que $\eta_{l+1}^a(m,u,b)=0$. A partir da expresión (4.3.1) do Lema 4.3.1 e tendo en conta o que acabamos de probar, é inmediato que (4.3.6) se verifica, e que os $\alpha_{l+k_0+1}(m,u,a,b)$ son independentes do vector u, para os índices $a,b \in \{4,\ldots,n-1\}$, $a \neq b$. Tamén se deduce que $\alpha_{l+k_0+1}(m,u,a,a) = \alpha_{l+k_0+1}(m,u,b,b)$ para $a,b \in \{4,\ldots,n-1\}$, e que son independentes de u.

Resumindo, o que vimos ata agora foi que as matrices dos coeficientes do desenvolvemento en serie de potencias da métrica aplicada os campos de vectores coordenados, ó longo da xeodésica $\gamma(r) = exp_m(ru)$, son da forma

$$\Big(\alpha_k(m,u,a,b)\Big)_{1\leq a,b\leq n-1} = \begin{pmatrix} A_k(m,u) & 0 \\ 0 & \xi_k(m) I_{n-4} \end{pmatrix},$$

onde $A_k(m,u) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Imos ver que para todo k a matriz $A_k(m,u)$ é un múltiplo da matriz identidade I_3, $A_k(m,u) = \zeta_k(m,u) I_3$, sendo a constante de multiplicidade $\zeta_k(m,u)$ independente do vector u. Primeiro, vexamos que a matriz $A_k(m,u)$ é diagonal, é dicir, comprobemos que

$$\alpha_k(m,u,a,b) = 0, \qquad a,b \in \{1,2,3\},\ a \neq b.$$

Fixemos un índice $b \in \{1,2,3\}$. Posto que acabamos de probar que se verifica

$$\begin{cases} \eta_t\left(\dfrac{\partial}{\partial x^a}\right)(r) & = & 0, \quad t \in \{1,2,3\},\ a \in \{4,\ldots,n-1\}, \\[2ex] g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^t}, \dfrac{\partial}{\partial x^a}\right)(r) & = & 0, \quad t \in \{1,2,3\},\ a \in \{4,\ldots,n-1\}, \end{cases}$$

e sabemos que

$$\begin{cases} \eta_t\left(\gamma'\right)(r) & = & 0, \quad t \in \{1,2,3\}, \\[2ex] g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^t}, \gamma'\right)(r) & = & 0, \quad t \in \{1,2,3\}, \end{cases}$$

tense que

$$\langle J_1\gamma', J_2\gamma', J_3\gamma'\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^4}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}, \gamma' \right\rangle^{\perp} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\rangle,$$

ó longo de $\gamma(r) = exp_m(ru)$. Polo tanto, podemos facer un cambio de base, rotando os campos de tensores J_1, J_2, J_3 ó longo da xeodésica $\gamma(r) = exp_m(ru)$, para conseguir que a nova base do fibrado vectorial V sobre M, J_1', J_2', J_3', verifique

$$J_b'\gamma' \in \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle^{\perp},$$

onde os índices i, j elíxense distintos en $\{1, 2, 3\}$, diferentes de b. Observamos que se verifica $\eta'_b\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)(r) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, J'_b u\right)(r) = 0$, para $a \in \{1, \ldots, n-1\}$, $a \neq b$, pola propia construcción dos J'_t.

Cabe observar que este cambio de base que acabamos de facer non afecta en nada ó calculado ata agora. Isto débese a que só consideramos os $\alpha_k(m, u, a, b)$ para o conxunto de índices $a, b \in \{4, \ldots, n-1\}$, $a \neq b$, e $a \in \{1, 2, 3\}$, $b \in \{4, \ldots, n-1\}$, e os $\eta_t(m, u, a)$, $t = 1, 2, 3$, para os índices $a \in \{4, \ldots, n-1\}$, e para os índices considerados téñense as identidades $\eta_t\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, J_t u\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^a}, J'_t u\right) = \eta'_t\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)$. Polo tanto, podemos supoñer que levamos traballando dende o principio coa base dada polos campos de tensores J'_1, J'_2, J'_3, a cal denotaremos sen as primas, pois isto non debe conducirnos a ningún tipo de confusión.

Continuamos agora coa demostración de que a matriz $A_k(m, u)$ é diagonal. Empezamos vendo que

$$\alpha_k(m, u, a, b) = 0, \qquad a \in \{1, 2, 3\},\ a \neq b, \tag{4.3.8}$$

onde b é o índice que fixamos anteriormente. A partir de (1.3.7) tense que (4.3.8) se satisfai para os índices $k = 0$ e $k = 1$. Por recorrencia na expresión (4.3.1) do Lema 4.3.1, obtemos que (4.3.8) se verifica para $k = 0, \ldots, k_0 - 1$. Para $k = k_0$ tense que $\alpha_k(m, u, a, b) = 0$ se $a \in \{1, 2, 3\}$, $a \neq b$, e tamén se ten $\eta^t_0(m, u, a) = 0$ para $a, t \in \{1, 2, 3\}$, $a \neq t$. Agora, procedemos por inducción, supoñendo que

$$\begin{cases} \alpha_k(m, u, a, b) = 0, \quad k = 0, \ldots, l + k_0, \\ \eta^t_0(m, u, b) = \cdots = \eta^t_l(m, u, b) = 0, \quad t \in \{1, 2, 3\},\ t \neq b, \end{cases}$$

e vendo que

$$\begin{cases} \alpha_{l+k_0+1}(m, u, a, b) = 0, \quad a \in \{1, 2, 3\},\ a \neq b, \\ \eta^t_{l+1}(m, u, b) = 0, \quad t \in \{1, 2, 3\},\ t \neq b. \end{cases} \tag{4.3.9}$$

Usando a hipótese de inducción e o feito de que $\eta_b\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right) = 0$, para todo índice $a \in \{1, \ldots, n-1\}$, $a \neq b$, a expresión (4.3.1) para $k = l + k_0 + 1$ dános a igualdade

$$\beta_1^2(\beta_1^{l+k_0+1} - 1)\alpha_{l+k_0+1}(m, u, a, b) = \frac{f^{(k_0)}(0)}{k_0!}\eta^a_{l+1}(m, u, b). \tag{4.3.10}$$

Novamente, consideremos a familia de vectores unitarios $z_{\lambda\mu} = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2}(\lambda u + \mu J_a u)$. Posto que E_b é ortogonal a $z_{\lambda\mu}$ e a $J_a z_{\lambda\mu}$, tense que, ó susbtituír u por $z_{\lambda\mu}$ na igualdade (4.3.10), esta séguese dando. Procedendo de forma totalmente análoga a como se fixo antes, i.e., desenvolvendo a expresión e igualando coeficientes, chegamos a que se cumpre

(4.3.9), como queriamos ver. Como consecuencia disto, temos que $g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^b}, J_a\gamma'\right)(r) = 0$ para $a \in \{1,2,3\}$, $a \neq b$, é dicir, verifícase que $\dfrac{\partial}{\partial x^b}$ é paralelo a $J_b\gamma'$.

Fixemos agora un índice $a \in \{1,2,3\}, a \neq b$. Posto que $J_b\gamma'$ é paralelo a $\dfrac{\partial}{\partial x^b}$ e ortogonal a $\langle J_i\gamma', J_j\gamma'\rangle$, tense que $\langle J_i\gamma', J_j\gamma'\rangle = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle$, onde $i, j \in \{1,2,3\}$ son distintos de b. Logo, podemos facer outro cambio de base do fibrado vectorial V, para conseguir que o novo $J_a\gamma'$ sexa paralelo a $\dfrac{\partial}{\partial x^a}$. Isto non afecta a nada do que fixemos durante a proba deste teorema, pois os novos η_t coinciden cos anteriores cando os aplicamos ós campos de vectores coordenados $\dfrac{\partial}{\partial x^a}$, salvo quizais $\eta_t(\dfrac{\partial}{\partial x^t})$, pero nunca utilizamos o seu valor. Polo tanto, podemos supor que traballamos con esta base dende o inicio da proba do teorema, pois todo o que fixemos ata aquí é igualmente válido.

Sexa c o único índice en $\{1,2,3\}$ distinto de a e de b. Vexamos que $\dfrac{\partial}{\partial x^c}$ é paralelo a $J_c\gamma'$. Para iso mostraremos que $\dfrac{\partial}{\partial x^c} \in \langle J_a\gamma', J_b\gamma'\rangle^\perp$. Para probar que $\dfrac{\partial}{\partial x^c}$ é ortogonal a $J_a\gamma'$, veremos que se verifica $\alpha_k(m,u,c,a) = 0$ para todo $k \geq 0$. É certo para $k = 0$ e $k = 1$, por (1.3.7). Por recorrencia na expresión (4.3.1) que nos dá o Lema 4.3.1 obtemos que $\alpha_k(m,u,c,a) = 0$ para $k = 0, \ldots, k_0 - 1$. Para $k = k_0$ tense que $\alpha_k(m,u,c,a) = 0$ e $\eta_0^t(m,u,c) = 0$, se $t \neq c$. Agora, procedemos por indución, supoñendo que

$$\begin{cases} \alpha_k(m,u,c,a) = 0, \quad k = 0, \ldots, l + k_0, \\ \eta_0^t(m,u,c) = \cdots = \eta_l^t(m,u,c) = 0, \quad t \neq c, \end{cases}$$

e vendo que

$$\begin{cases} \alpha_{l+k_0+1}(m,u,c,a) = 0, \\ \eta_{l+1}^t(m,u,c) = 0, \quad t \neq c. \end{cases}$$

A partir da hipótese de indución e tendo en conta que $\dfrac{\partial}{\partial x^a}$ é ortogonal a $J_c\gamma'$, a expresión (4.3.1) para $k = l + k_0 + 1$ queda reducida á identidade

$$\beta_1^2(\beta_1^{l+k_0+1} - 1)\alpha_{l+k_0+1}(m,u,c,a) = \frac{f^{(k_0)}}{k_0!}\eta_{l+1}^c(m,u,a).$$

Procedendo de forma totalmente análoga a como se fixo anteriormente chegamos a que $\alpha_k(m,u,c,a) = \eta_{l+1}^a(m,u,c) = 0$.

Agora, imos probar que se verifica $\alpha_k(m,u,a,a) = \alpha_k(m,u,b,b)$ se $a, b \in \{1,2,3\}$. Para $k = 0$ temos que $\alpha_0(m,u,a,a) = 1$ e para $k = 1$ é $\alpha_1(m,u,a,a) = 0$, sendo a calquera índice de $\{1,2,3\}$. Por recorrencia na expresión (4.3.1), obtemos que a igualdade $\alpha_k(m,u,a,a) = \alpha_k(m,u,b,b)$ se dá para $k < k_0$. Tendo en conta que $\eta_0^a(m,u,a) = 1$, para $a = 1,2,3$, e recorrendo novamente á expresión (4.3.1), vemos que $\alpha_{k_0}(m,u,a,a) = \alpha_{k_0}(m,u,b,b)$. Para probar que a anterior igualdade se dá para índices maiores que k_0 imos proceder por inducción. Supoñamos que

$$\begin{cases} \alpha_k(m,u,a,a) = \alpha_k(m,u,b,b), \ \ k = 0,\dots,l+k_0, \\ \eta_t^a(m,u,a) = \eta_t^b(m,u,b), \quad t = 0,\dots,l, \end{cases}$$

e probemos que se verifica $\alpha_{k_0+l+1}(m,u,a,a) = \alpha_{k_0+l+1}(m,u,b,b)$ e $\eta_{l+1}^a\ (m,\ u,\ a) = \eta_{l+1}^b(m,u,b)$. Para iso, recorremos novamente á expresión (4.3.1). A partir dela e usando a hipótese de inducción, obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} &\beta_1^2(1-\beta_1^{k_0+l+1})\left\{\alpha_{k_0+l+1}(m,u,a,a) - \alpha_{k_0+l+1}(m,u,b,b)\right\} \\ &\qquad = 2\frac{f^{(k_0)}}{k_0!}\left\{\eta_{l+1}^b(m,u,b) - \eta_{l+1}^a(m,u,a)\right\} \end{aligned}$$

Posto que a igualdade anterior é válida para a familia de vectores unitarios $z_{\lambda\mu} = \frac{1}{\lambda^2+\mu^2}$ $(\lambda u + \mu J_a u)$, obtemos, polo procedemento habitual, que se verifica $\alpha_{k_0+l+1}(m,u,a,a) = \alpha_{k_0+l+1}(m,u,b,b)$ e $\eta_{l+1}^a(m,u,a) = \eta_{l+1}^b(m,u,b)$.

Resumindo todo o anterior, vimos que $g_{ab}(r) = 0$ se $a \neq b$, e que os $\alpha_k(m,u,a,b)$ son independentes do vector u se $a \neq b$ ou $a,b \in \{4,\dots,n-1\}$, e tamén vimos que se verificaba (4.3.5). Polo tanto, para rematar a proba deste teorema, o que nos falta por ver é que $\alpha_k(m,u,a,b)$ é independente do vector u se $a,b \in \{1,2,3\}$, o cal é obvio se $a \neq b$, pois nese caso $\alpha_k(m,u,a,b) = 0$. Así, só nos falta ver que $\alpha_k(m,u,a,a)$ é independente de u, para $a = 1,2,3$, que é o que imos mostrar a seguir. Para $k = 0$ e $k = 1$ é evidente pois, por (1.3.7), $\alpha_0(m,u,a,a) = 1$ e $\alpha_1(m,u,a,a) = 0$. Para $k < k_0$ obtemos que $\alpha_k(m,u,a,a)$ é independente do vector u por recorrencia na expresión (4.3.1). Para $k = k_0$, tendo en conta que $\eta_0^a(m,u,a) = 1$, a fórmula (4.3.1) dános que $\alpha_{k_0}(m,u,a,a)$ é independente de u. Agora, imos proceder por inducción. Supoñamos que $\alpha_k(m,u,a,a)$ e $\eta_t^a(m,u,a)$ son independentes de u, para $k = 0,\dots,k_0+l$, $t = 0,\dots,l$ e $a \in \{1,2,3\}$, e probemos que $\alpha_{k_0+l+1}(m,u,a,a)$ e $\eta_{l+1}^a(m,u,a)$ son independentes de u. Usando a hipótese de inducción, da expresión (4.3.1) deducimos que

$$\beta_1^2(1-\beta_1^{k_0+l+1})\alpha_{k_0+l+1}(m,u,a,a) - 2\frac{f^{(k_0)}}{k_0!}\eta_{l+1}^a(m,u,a)$$

é independente de u. Considerando de novo a familia de vectores unitarios $z_{\lambda\mu} = \frac{1}{\lambda^2+\mu^2}$ $(\lambda u + \mu J_a u)$, da igualdade

$$\begin{aligned}\beta_1^2(1-\beta_1^{k_0+l+1})\alpha_{k_0+l+1}(m,z_{\lambda\mu},a,a) - 2\frac{f^{(k_0)}}{k_0!}\eta^a_{l+1}(m,z_{\lambda\mu},a)\\ = \beta_1^2(1-\beta_1^{k_0+l+1})\alpha_{k_0+l+1}(m,z_{\mu\lambda},a,a) - 2\frac{f^{(k_0)}}{k_0!}\eta^a_{l+1}(m,z_{\mu\lambda},a)\end{aligned}$$

obtemos, polo procedemento habitual, o resultado requirido. $\square$

Utilizando a demostración do lema anterior, probamos o seguinte

Corolario 4.3.3 *Sexa (M,g,V) unha variedade case cuaterniónica e sexa m un punto de M. Supoñamos que existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme φ_m con respecto a m, que non é unha isometría. Entón, para todo vector unitario $u\in T_mM$ existe unha base canónica $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ do fibrado vectorial V ó longo de $\gamma(t)=exp_m(tu)$ tal que $J_1(t)\gamma'(t)$, $J_2(t)\gamma'(t)$ e $J_3(t)\gamma'(t)$ son campos de vectores paralelos ó longo de γ.*

Agora, imos relacionar a existencia de transformacións xeodésicas parcialmente conformes con respecto a un punto co operador de Jacobi e as súas derivadas de orde superior nese mesmo punto. Primeiro, no seguinte teorema, vemos a influencia que ten a existencia dunha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a un punto sobre as derivadas do operador de Jacobi no punto e, máis adiante, no Teorema 4.3.3, vemos que certas condicións sobre o operador de Jacobi e as súas derivadas nun punto garántennos a existencia dunha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a ese punto.

Teorema 4.3.2 *Sexa (M^n,g,V) unha variedade case cuaterniónica e sexa m un punto de M. Se existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme φ_m con respecto ó punto m, que non sexa unha isometría, entón o operador de Jacobi e as súas derivadas no punto m satisfan*

$$\left\{\begin{array}{lcl} R^{(2k+1)}(m) & = & 0, \\ R^{(2k)}(m) & = & \begin{pmatrix} c_1(m,k)I_3 & 0 \\ 0 & c_2(m,k)I_{n-4}\end{pmatrix},\end{array}\right. \tag{4.3.11}$$

para todo $k\geq 0$, onde $c_1(m,k)$ e $c_2(m,k)$ son números reais que só dependen do punto m e da orde k da derivada que esteamos a considerar. Ademais, φ_m é conforme se e soamente se $c_1(m,k)=c_2(m,k)$, para todo $k\geq 0$.

Proba. A última afirmación deste teorema está probada en [GV5]. Supoñamos, polo tanto, que φ_m non é conforme. Logo, por ser f unha función analítica non nula, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que $f^{(k_0)}(0)\neq 0$. Admitamos que k_0 é o menor número natural que o verifica.

Nótese que k_0 ten que ser maior ou igual que dous, pois pola Proposición 4.2.1 temos que $f'(0) = 0$.

Por (1.3.4), os coeficientes do desenvolvemento en serie de potencias das funcións $g_{ab}(r)$ satisfan

$$\alpha_k(m, u, a, b) = \frac{1}{(k+2)!} \left({}^t D_u D_u\right)_{ab}^{(k+2)} (0).$$

Pola Proposición 4.3.1, o operador de Jacobi $R_u(m)$ é diagonal con, ó máximo, dous autovalores distintos e independentes da dirección dada polo vector $u \in T_m M$, un dos cales corresponde ós autovectores $J_1 u$, $J_2 u$, $J_3 u$. D_u é solución da ecuación de Jacobi, é dicir, $D_u'' + R \circ D_u = 0$, e verifica as condición iniciais $D_u(0) = 0$ e $D_u'(0) = I$. Logo, $D_u''(0) = 0$ e $D_u'''(0) = -R_u(m)$. Temos que as matrices $R_u(m)$ e $D_u'''(0) = -R_u(m)$ son diagonais, con autovalores independentes do vector u. Supoñamos que as matrices

$$\begin{cases} D_u'''(0), \dots, D_u^{(k+1)}(0), \\ R_u(m), \dots, R_u^{(k-2)}(m), \end{cases}$$

son diagonais con, ó máximo, dous autovalores distintos, independentes de u e un deles correspondente ós autovectores $J_1 u$, $J_2 u$, $J_3 u$. Probemos que entón as matrices $D_u^{(k+2)}(0)$ e $R_u^{(k-1)}(m)$ verifican o anterior. A partir da relación

$$D_u^{(k+2)}(0) = -\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} R_u^{(k-l)}(m) D_u^{(l)}(0), \tag{4.3.12}$$

usando a hipótese de inducción e o feito de que a matriz $R_u^{(k-l)}(m)$ é simétrica, vemos que $D_u^{(k+2)}(0)$ é unha matriz simétrica. Debido a que

$$\alpha_k(m, u, a, b) = \frac{1}{(k+2)!} \left({}^t D_u D_u\right)_{ab}^{(k+2)} (0),$$

tense que $D_u^{(k+2)}(0)$ é unha matriz diagonal, con dous autovalores independentes de u, un dos cales corresponde ós autovectores $J_1 u$, $J_2 u$, $J_3 u$. De (4.3.12) deducimos que a matriz $R_u^{(k-1)}(m)$ é diagonal con dous autovalores independentes de u, onde un corresponde ós autovectores $J_1 u$, $J_2 u$, $J_3 u$. Polo tanto, temos que

$$R_u^{(k)}(m) = \begin{pmatrix} d_1(m,k) I_3 & 0 \\ 0 & d_2(m,k) I_{n-4} \end{pmatrix}$$

para todo $k \geq 0$. Finalmente, como os autovalores de $R_u^{(k)}(m)$ son independentes da dirección dada por $u \in T_m M$, temos que $R_u^{(2k+1)}(m) = 0$ para todo $k \geq 0$. $\square$

Imos establecer agora o recíproco do teorema anterior, o que constituirá unha condición suficiente para a existencia de transformacións xeodésicas parcialmente conformes con respecto a un punto.

Teorema 4.3.3 *Sexa (M^n, g, V) unha variedade case cuaterniónica e sexa $m \in M$. Supoñamos que o operador de Jacobi e as súas derivadas verifican*

$$(4.3.13) \qquad \begin{cases} R^{(2k+1)}(m) = 0, \\ R^{(2k)}(m) = \begin{pmatrix} c_1(m,k)I_3 & 0 \\ 0 & c_2(m,k)I_{n-4} \end{pmatrix} \end{cases}$$

para todo $k \geq 0$. Logo, tense que

(i) Se $c_1(m,k) = c_2(m,k)$ para todo $k \geq 0$, entón existen infinitas transformacións xeodésicas conformes con respecto a m.

(ii) Se M é cuaterniónica Kähler e existe un número natural k tal que $c_1(m,k) \neq c_2(m,k)$, entón existen infinitas transformacións xeodésicas parcialmente conformes, non conformes, con respecto a m.

Proba. A afirmación (i) está probada en [GV5]. A continuación probamos a segunda afirmación. Sexa $\{F_1(r), \ldots, F_{n-1}(r)\}$ o campo de referencias ortonormal paralelo obtido mediante o transporte paralelo ó longo de $\gamma(r) = exp_m(ru)$ dunha base ortonormal de T_mM da forma $\{J_1u, J_2u, J_3u, E_4, \ldots, E_{n-1}\}$. Por ser M cuaterniónica Kähler, podemos supor que $F_{n-t}(r) = J_t\gamma'(r)$, $t = 1, 2, 3$. Primeiro, vexamos que a función matricial $D_u(r)$ é diagonal con dous autovalores distintos, un deles con multiplicidade tres, é dicir, mostremos que

$$D_u(r) = \begin{pmatrix} d_1(r)I_3 & 0 \\ 0 & d_2(r)I_{n-4} \end{pmatrix},$$

onde $d_1(r)$ e $d_2(r)$ son dúas funcións distintas.

De forma totalmente idéntica a como fixemos en teoremas anteriores obtense que as derivadas da función $D_u(r)$ son da forma

$$D_u^{(k)}(0) = \begin{pmatrix} d_1(m,k)I_3 & 0 \\ 0 & d_2(m,k)I_{n-4} \end{pmatrix}.$$

Xa que estamos supoñendo que existe k_0 tal que $c_1(m,k_0) \neq c_2(m,k_0)$, ten que ser $d_1(m,k_0) \neq d_2(m,k_0)$, como facilmente se deduce da igualdade (4.3.12). Logo, tense que a función $d_1(r) = \sum_{k\geq 0} d_1(m,k)r^k$ é distinta da función $d_2(r) = \sum_{k\geq 0} d_2(m,k)r^k$.

Debido a que os autovalores do operador de Jacobi e das súas derivadas son independentes do vector u, temos que os $d_i(m,k)$ e, por conseguinte, as funcións $d_i(r)$, tamén o son. Da igualdade

$$\alpha_k(m,u,a,b) = \frac{1}{(k+2)!}\left({}^tD_uD_u\right)^{(k+2)}(0)$$

séguese que

$$\begin{cases} \alpha_k(m,u,a,b) &= 0, \quad a,b = 1,\dots,n-1, \ a \neq b, \\ \\ \alpha_k(m,u,a,a) &= \alpha_k(m,u,b,b), \quad \begin{array}{l} a,b \in \{1,2,3\}, \text{ ou} \\ a,b \in \{4,\dots,n-1\}. \end{array} \end{cases}$$

Vexamos agora que a fórmula de recorrencia (4.3.1) do Lema 4.3.1 nos define unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto ó punto $m \in M$, para cada valor inicial $\beta_1 = s'(0) \neq 0$. Supoñamos dado o valor β_1 e obtidos $\beta_2,\dots,\beta_k$ e $f'(0),\dots,f^{(k-1)}(0)$. Calculemos entón β_{k+1} e $f^{(k)}(0)$. Para obter β_{k+1}, na expresión (4.3.1) poñemos calquera índice $a \in \{4,\dots,n-1\}$, e despexamos β_{k+1}. Podemos elixir un índice a arbitrario, pois polo Lema 4.3.2 temos as igualdades $\alpha_j(m,u,a,a) = \alpha_j(m,u,b,b)$, $a,b \in \{4,\dots,n-1\}$. Obtense que

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} = \frac{1}{2k\beta_1}\Bigg\{ & \beta_1^2(\beta_1^k - 1)\alpha_k(m,u,a,a) + \sum_{\substack{p+q=k+2 \\ p,q>1}} (1-pq)\beta_p\beta_q \\ & + \sum_{\substack{i+j=k+2 \\ i\geq 3, j\geq 2}} \left(\sum_{p+q=i}\beta_p\beta_q\right)\left(\sum_{l\leq j}\alpha_l(m,u,a,a)\sum_{p_1+\dots+p_l=j}\beta_{p_1}\dots\beta_{p_l}\right) \\ & - \sum_{l=2}^{k-1}\alpha_l(m,u,a,a)\left(\sum_{p+q=k+2-l} pq\beta_p\beta_q\right) \\ & + \beta_1^2\sum_{l=2}^{k-1}\alpha_l(m,u,a,a)\left(\sum_{p_1+\dots+p_l=k}\beta_{p_1}\dots\beta_{p_l}\right) \\ & - \sum_{i+c+d=k}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}\sum_{t=1}^{3}\eta_c^t(m,u,a)\eta_d^t(m,u,a) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Observemos que na anterior igualdade non aparece o termo $f^{(k)}(0)$, xa que

$$\sum_{t=1}^{3} \eta_0^t(m,u,a)\eta_0^t(m,u,a) = 0,$$

para todo índice $a \in \{4,\ldots,n-1\}$. Vexamos agora quén é $f^{(k)}(0)$. Recorrendo novamente á igualdade (4.3.1) e escollendo un índice $a \in \{1,2,3\}$ calquera, obtemos

$$
\begin{aligned}
f^{(k)}(0) = k! \Bigg\{ & \beta_1^2(\beta_1^k - 1)\alpha_k(m,u,a,a) + \sum_{\substack{p+q=k+2 \\ p,q>1}} (1-pq)\beta_p\beta_q \\
& + \sum_{\substack{i+j=k+2 \\ i\geq 3, j\geq 2}} \left(\sum_{p+q=i} \beta_p\beta_q \right) \left(\sum_{l\leq j} \alpha_l(m,u,a,a) \sum_{p_1+\ldots+p_l=j} \beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l} \right) \\
& - \sum_{l=2}^{k-1} \alpha_l(m,u,a,a) \left(\sum_{p+q=k+2-l} pq\beta_p\beta_q \right) \\
& + \beta_1^2 \sum_{l=2}^{k-1} \alpha_l(m,u,a,a) \left(\sum_{p_1+\ldots+p_l=k} \beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l} \right) \\
& - \sum_{i+c+d=k} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \sum_{t=1}^{3} \eta_c^t(m,u,a)\eta_d^t(m,u,a) \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{4.3.15}
$$

Así, obtemos β_{k+1} de (4.3.14) e $f^{(k)}(0)$ de (4.3.15) para todo $k \geq 0$, os cales nos definen unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a m. □

Usando o Teorema 3.2.6, estamos en condicións de caracterizar as variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura Q-seccional constante a través da existencia de trasformacións xeodésicas parcialmente conformes con respecto a puntos. Facémolo no seguinte

Teorema 4.3.4 *Sexa (M^n, g, V) unha variedade case cuaterniónica. Entón, M é cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante $c \neq 0$ se e soamente se para todo punto $m \in M$ existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a m, non conforme.*

Proba. Primeiro, supoñamos que M é cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante $c \neq 0$. En [GV1] próbase que as aplicacións

$$\begin{aligned}\tan s\frac{\sqrt{c}}{2} &= C\tan r\frac{\sqrt{c}}{2}, \quad C\in\mathbb{R},\ C^2\neq 0,1, \quad se\ c>0,\\ \tanh s\frac{\sqrt{-c}}{2} &= C\tanh r\frac{\sqrt{-c}}{2}, \quad C\in\mathbb{R},\ C^2\neq 0,1, \quad se\ c<0,\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

determinan transformacións xeodésicas parcialmente conformes, non conformes, con respecto a cada punto $m \in M$. Ademais, (4.3.16) son tódalas transformacións xeodésicas estrictamente parcialmente conformes con respecto a un punto calquera de $M = M(c)$. Supoñamos agora que para todo punto da variedade M existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme, non conforme. Probemos primeiro que M é cuaterniónica Kähler e vexamos despois que ten curvatura Q-seccional constante. Sexan U un aberto de M, $\{J_1, J_2, J_3\}$ unha base local do fibrado vectorial V en U, $m \in U$ e $u \in T_mM$. Na demostración do Lema 4.3.2 probamos que

$$\begin{aligned}0 &= \eta_t\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\right)(exp_m(ru)) = \delta_{at}\\ &\quad +r\left\{g\left((\nabla_u J_t)u, \frac{\partial}{\partial x^a}\right) + g\left(\nabla_u\frac{\partial}{\partial x^a}, J_tu\right)\right\}(m) + O(r^2),\end{aligned}$$

para $t = 1,2,3$ e $a = 4,\ldots,n-1$. Da anterior igualdade, deducimos que

$$\left\{g\left((\nabla_u J_t)u, \frac{\partial}{\partial x^a}\right) + g\left(\nabla_u\frac{\partial}{\partial x^a}, J_tu\right)\right\}(m) = 0. \tag{4.3.17}$$

Como $\frac{\partial}{\partial x^a}(exp_m(ru)) = \frac{\partial}{\partial x^a}(m) + r\left(\nabla_u\frac{\partial}{\partial x^a}\right)(m) + O(r^2)$ e $0 = g\left(J_t\gamma', \frac{\partial}{\partial x^a}\right)$, obtemos $g\left(\nabla_u\frac{\partial}{\partial x^a}, J_tu\right)(m) = 0$. Entón, de (4.3.17), séguese que $g\left((\nabla_u J_t u)u, \frac{\partial}{\partial x^a}\right)(m) = 0$, para $t = 1,2,3$ e $a = 4,\ldots,n-1$. Logo, probamos que $(\nabla_u J_t)u \in \langle u,\ J_1u,\ J_2u,\ J_3u\rangle$, para todo punto $m \in U$ e para todo $u \in T_mM$. É dicir, vimos que $(\nabla_X J_t)X \in \langle X, J_1X, J_2X, J_3X\rangle$, para todo campo de vectores X sobre o aberto U. Así, (M,g,V) é unha variedade nearly-cuaterniónica. Polo Teorema 3.1.2 temos que M é cuaterniónica Kähler. Para rematar a proba deste teorema só nos falta demostrar que M ten curvatura Q-seccional constante. Tendo en conta que na Proposición 4.3.1 se proba que $R(u,J_tu)u \sim J_tu$, para $t = 1,2,3$, polo Teorema 3.2.6, obtemos que a variedade M é unha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante. □

Imos dar agora unha clasificación das transformacións xeodésicas parcialmente conformes que teñen lugar nunha variedade case cuaterniónica, na cal existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a cada punto.

Teorema 4.3.5 *Sexa (M^n,g,V) unha variedade case cuaterniónica tal que existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a cada punto m de M. Entón, M é unha variedade localmente simétrica e ademais:*

(i) A transformación xeodésica é a reflexión local e, polo tanto, unha isometría.

(ii) M é un espacio de curvatura seccional constante $c = 0$ se e soamente se existe unha transformación xeodésica conforme con respecto a cada punto $m \in M$. Neste caso, só se poden dar as homotecias

$$s = Cr, \qquad C^2 \neq 0, 1.$$

(iii) M é un espacio de curvatura seccional constante $c > 0$ se e soamente se existe unha transformación xeodésica conforme con respecto a cada punto $m \in M$. Neste caso, só se poden dar as semellanzas non euclidianas

$$\tan s\frac{\sqrt{c}}{2} = C \tan r\frac{\sqrt{c}}{2}, \qquad C^2 \neq 0, 1.$$

(iv) M é un espacio de curvatura seccional constante $c < 0$ se e soamente se existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a cada punto $m \in M$. Neste caso, só se poden dar as semellanzas non euclidianas

$$\tanh s\frac{\sqrt{-c}}{2} = C \tanh r\frac{\sqrt{-c}}{2}, \qquad C^2 \neq 0, 1.$$

(v) M é cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante $c > 0$ se e soamente se existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme φ_m, non conforme, con respecto a cada punto $m \in M$. Neste caso, as transformacións xeodésicas deben ser as semellanzas non euclidianas

$$\tan s\frac{\sqrt{c}}{4} = C \tan r\frac{\sqrt{c}}{4}, \qquad C^2 \neq 0, 1.$$

(vi) M é cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante $c < 0$ se e soamente se existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme, non conforme, con respecto a cada punto m de M. Neste caso, só se poden dar as semellanzas non euclidianas

$$\tanh s\frac{\sqrt{-c}}{4} = C \tanh r\frac{\sqrt{-c}}{4}, \qquad C^2 \neq 0, 1.$$

4.4 Transformacións con respecto a hipersuperficies

Comezamos esta sección probando o resultado análogo do Lema 4.3.1 para o caso de hipersuperficies.

Lema 4.4.1 *Sexan (M^n, g, V) unha variedade case cuaterniónica e φ_B unha transformación xeodésica non trivial con respecto a unha hipersuperficie B de M. Entón, φ_B é* *parcialmente conforme se e soamente se os coeficientes da serie de potencias da función* $s(r)$ *satifan a seguinte relación de recorrencia*

$$
\begin{aligned}
&2(k+1)\beta_{k+1}\delta_{ij} + ((-1)^k - 1)\alpha_k(m,u,i,j) - \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\sum_{t=1}^{3}\delta_{i,n-t}\delta_{j,n-t} \\
&= \delta_{ij} \sum_{\substack{p+q=k+2 \\ p,q\geq 2}} pq\beta_p\beta_q \\
&\quad + \sum_{l=1}^{k-1}\alpha_l(m,u,i,j)\left(\sum_{p+q=k+2-l} pq\beta_p\beta_q - \sum_{p_1+\ldots+p_l=k}\beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l}\right) \\
&\quad + \sum_{\substack{a+c+d=k \\ a<k}} \frac{f^{(a)}(0)}{a!}\left\{\sum_{t=1}^{3}\eta_c^t(m,u,i)\eta_d^t(m,u,j)\right\},
\end{aligned} \tag{4.4.1}
$$

para todo $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, *e para todo* $k \geq 1$.

Proba. Imos obter a anterior identidade a partir da fórmula (4.2.1),

$$
g_{ij}(s(r)) = e^{2\sigma}g_{ij}(r) + f(r)\sum_{t=1}^{3}(\eta_t \otimes \eta_t)_{ij}(r),
$$

que nos dá o Lema 4.2.1. Tendo en conta que $e^{2\sigma} = s'(r)^2$, a anterior igualdade queda da forma

$$
g_{ij}(s(r)) = s'(r)^2 g_{ij}(r) + f(r)\sum_{t=1}^{3}(\eta_t \otimes \eta_t)_{ij}(r). \tag{4.4.2}
$$

A partir do desenvolvemento en serie de potencias da función s, (4.2.5), temos que

$$
\begin{cases}
s'(r) = \displaystyle\sum_{a\geq 1} a\beta_a r^{a-1}, \\[2ex]
s'(r)^2 = \displaystyle\sum_{a\geq 0}\left(\sum_{p+q=a+2} pq\beta_p\beta_q\right) r^a, \\[2ex]
s(r)^l = \displaystyle\sum_{b\geq l}\left(\sum_{p_1+\ldots+p_l=b}\beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l}\right) r^b.
\end{cases}
$$

Substituíndo o anterior en (4.4.2) e tendo en conta os desenvolvementos en serie de potencias (4.2.6) e (4.2.7), obtemos a expresión

$$\delta_{ij} + \sum_{l\geq 1} \alpha_l(m,u,i,j) \left\{ \sum_{b\geq l} \left(\sum_{p_1+\ldots+p_l=b} \beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l} \right) r^b \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{a\geq 0} \left(\sum_{p+q=a+2} pq\beta_p\beta_q \right) r^a \right\} \left\{ \delta_{ij} + \sum_{l\geq 1} \alpha_l(m,u,i,j) r^l \right\}$$

$$+ \left\{ \sum_{a\geq 1} \frac{f^{(a)}(0)}{a!} r^a \right\} \left\{ \sum_{t=1}^{3} \left(\sum_{c\geq 0} \eta_c^t(m,u,i) r^c \right) \left(\sum_{d\geq 0} \eta_d^t(m,u,j) r^d \right) \right\}.$$

Igualando os coeficientes dos termos de grao k, chegamos á identidade

$$\sum_{l\leq k} \alpha_l(m,u,i,j) \left(\sum_{p_1+\ldots+p_l=k} \beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l} \right)$$

$$= \delta_{ij} \sum_{p+q=k+2} pq\beta_p\beta_q + \sum_{\substack{a+l=k \\ l\geq 1}} \alpha_l(m,u,i,j) \left(\sum_{p+q=a+2} pq\beta_p\beta_q \right)$$

$$+ \sum_{a+c+d=k} \frac{f^{(a)}(0)}{a!} \left(\sum_{t=1}^{3} \eta_c^t(m,u,i)\eta_d^t(m,u,j) \right).$$

Reordenando os termos e destacando algún deles, vemos que

$$(\beta_1^k - \beta_1^2)\alpha_k(m,u,i,j) - 2(k+1)\beta_1\beta_{k+1}\delta_{ij} - \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \sum_{t=1}^{3} \delta_{i,n-t}\delta_{j,n-t}$$

$$= \delta_{ij} \sum_{\substack{p+q=k+2 \\ p,q\geq 2}} pq\beta_p\beta_q$$

$$+ \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l(m,u,i,j) \left(\sum_{p+q=k+2-l} pq\beta_p\beta_q - \sum_{p_1+\ldots+p_l=k} \beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l} \right)$$

$$+ \sum_{\substack{a+c+d=k \\ a<k}} \frac{f^{(a)}(0)}{a!} \left\{ \sum_{t=1}^{3} \eta_c^t(m,u,i)\eta_d^t(m,u,j) \right\}.$$

Como φ_B non é a identidade, polo Teorema 4.2.1 temos que $s'(0) = -1$, é dicir, $\beta_1 = -1$. Poñendo $\beta_1 = -1$ na última igualdade obtemos a expresión (4.4.1). $\square$

Teorema 4.4.1 *Sexan (M^n, g, V) unha variedade case cuaterniónica e B unha hipersuperficie. Se o operador de Jacobi normal satisfai a condición*

$$R^{(k)}(m) = \begin{pmatrix} c_1(k,u)I_{n-4} & 0 \\ 0 & c_2(k,u)I_3 \end{pmatrix} \tag{4.4.3}$$

para todo $k \geq 0$, onde $c_1(k,u), c_2(k,u)$ son funcións constantes en B, tense que

(i) Se $c_1(k,u) = c_2(k,u)$ para todo $k \geq 0$ e B é totalmente umbílica, entón existe unha transformación xeodésica conforme con respecto a B.

(ii) Se $c_1(k,u) \neq c_2(k,u)$ para algún $k \geq 0$, B é unha hipersuperficie de Hopf e M é cuaterniónica Kähler, entón existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a B, non conforme.

Proba. A primeira afirmación do teorema está probada en [GV5]. Probemos, polo tanto, a segunda afirmación. Sabemos que $D_u(0) = I$ e que $D'_u(0) = T(u)$, sendo $T(u)$ o operador de configuración da subvariedade B. Posto que B ten dúas curvaturas principais distintas, temos que $D'_u(0) = T(u)$ é diagonalizable, con respecto a unha base ortonormal de T_mB da forma $\{E_1, \ldots, E_{n-4}, J_1u, J_2u, J_3u\}$. De (4.4.3) dedúcese que $D''_u(0) = -R(m)$ tamén é diagonalizable con respecto á mesma base. Agora, a partir de (4.4.3) e da relación (4.3.12), procedendo por indución, obtemos que $D_u^{(k)}(0)$ é unha matriz diagonal con dous autovalores, un deles con multiplicidade tres correspondente ós autovectores J_1u, J_2u, J_3u. Posto que as curvaturas principais de B son constantes e as funcións $c_1(k,u)$, $c_2(k,u)$ son independentes do punto $m \in B$ considerado, temos que os autovalores de $D_u^{(k)}(0)$ son constantes en B.

Sexa $\{F_1, \ldots, F_{n-4}\}$ o campo de referencias ó longo da xeodésica $\gamma(r) = exp_m(ru)$, obtido por transporte paralelo de $\{E_1, \ldots, E_{n-4}\}$. Debido a que M é cuaterniónica Kähler, podemos supor que a base $\{J_1, J_2, J_3\}$ do fibrado V é tal que os campos de vectores $J_1\gamma'$, $J_2\gamma'$, $J_3\gamma'$ son paralelos ó longo da xeodésica γ. Comprobemos que, en efecto, podemos facer esta suposición. Por ser M cuaterniónica Kähler, verifícase (3.1.3). Por conseguinte,

$$\eta_t(F_i)(r) = g(F_i, J_t\gamma')(r) = g(E_i, J_tu)(m) + rg(E_i, (\nabla_{\gamma'}J_t)\gamma') + O(r^2) = 0,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n-4\}$ e para todo $t \in \{1,2,3\}$. Logo, temos que $\langle\{J_1\gamma', J_2\gamma', J_3\gamma'\}\rangle = \langle\{F_1, \ldots, F_{n-4}, \gamma'\}\rangle^{\perp}$. Sexan P_1, P_2, P_3 os campos de vectores obtidos por transporte paralelo ó longo de γ de J_1u, J_2u, J_3u, e consideremos o cambio de base do fibrado V que se obtén rotando os J_t ó longo de γ para conseguir que sexa $J_t\gamma' = P_t$, para $t = 1,2,3$. Suporemos, polo tanto, que traballamos cunha base do fibrado vectorial V tal que o campo de referencias $\{F_1, \ldots, F_{n-4}, J_1\gamma', J_2\gamma', J_3\gamma'\}$ é paralelo ó longo da xeodésica γ. Con respecto ó dito campo de referencias os coeficientes da métrica g ó longo de γ veñen dados pola relación $g_{ij}(r) = ({}^tD_uD_u)_{ij}(r)$, $i,j = 1\ldots, n-1$. De aquí deducimos que os coeficientes do desenvolvemento en serie de potencias da función $g_{ij}(r)$ son constantes na subvariedade B e, tamén, que satisfan

$$\begin{cases} \alpha_k(m,u,i,j) = 0, & i,j \in \{1,\dots,n-1\},\ i \neq j, \\ \alpha_k(m,u,i,i) = \alpha_k(m,u,j,j), & i,j \in \{1,2,3\}, \text{ ou} \\ & i,j \in \{4,\dots,n-1\}. \end{cases}$$

Pola forma de elixir a base do fibrado vectorial V temos que $\eta_t\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = 0$ ó longo de γ, para todo par de índices $i \in \{1,\dots,n-1\}$, $t \in \{1,2,3\}$, tal que $i \neq n-t$. Logo, por recorrencia na fórmula (4.4.1) que nos dá o Lema 4.4.1 obtemos os coeficientes do desenvolvemento en serie de potencias das funcións $s(r)$ e $f(r)$. Estas funcións determinan unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto á subvariedade B. En efecto, en (4.4.1) poñemos $\beta_1 = -1$, para ter unha transformación xeodésica distinta da identidade. Supostos calculados os termos $\beta_2,\dots,\beta_k$ e $f'(0),\dots,f^{(k-1)}(0)$, obtemos β_{k+1} e $f^{(k)}(0)$ a partir de (4.4.1), quedándonos

$$\begin{aligned} \beta_{k+1} = \frac{1}{2(k+1)} \Bigg\{ & (1-(-1)^k)\alpha_k(m,u,i,i) + \sum_{\substack{p+q=k+2 \\ p,q\geq 2}} pq\beta_p\beta_q \\ & + \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l(m,u,i,i) \left(\sum_{p+q=k+2-l} pq\beta_p\beta_q - \sum_{p_1+\ldots+p_l=k} \beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l} \right) \\ & + \sum_{\substack{a+c+d=k \\ a<k}} \frac{f^{(a)}(0)}{a!} \left(\sum_{t=1}^{3} \eta_c^t(m,u,i)\eta_d^t(m,u,i) \right) \Bigg\} \end{aligned}$$

para calquera índice $i \in \{1,\dots,n-4\}$. Observamos que na anterior igualdade non aparece $f^{(k)}(0)$ pois $\sum_{t=1}^{3} \eta_0^t(m,u,i)\eta_0^t(m,u,i) = 0$, para $i \in \{1,\dots,n-4\}$. Unha vez calculado β_{k+1}

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(k)}(0)}{k!} &= 2(k+1)\beta_{k+1} + ((-1)^k - 1)\alpha_k(m,u,j,j) \\
&- \sum_{\substack{p+q=k+2 \\ p,q\geq 2}} pq\beta_p\beta_q \\
&- \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l(m,u,j,j) \left(\sum_{p+q=k+2-l} pq\beta_p\beta_q - \sum_{p_1+\ldots+p_l=k} \beta_{p_1}\ldots\beta_{p_l} \right) \\
&- \sum_{\substack{a+c+d=k \\ a<k}} \frac{f^{(a)}(0)}{a!} \left\{ \sum_{t=1}^{3} \eta_c^t(m,u,j)\eta_d^t(m,u,j) \right\}
\end{aligned}$$

para calquera $j \in \{n-3, n-2, n-1\}$. □

Agora, imos caracterizar o feito de que unha variedade cuaterniónica Kähler teña curvatura Q-seccional constante a través da existencia de transformacións xeodésicas parcialmente conformes con respecto a esferas xeodésicas suficientemente pequenas. Facémolo no seguinte

Teorema 4.4.2 *Sexa (M^n, g, V) unha variedade case cuaterniónica. Entón, M é cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante c se e soamente se existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme, non isométrica, con respecto a cada esfera xeodésica de raio suficientemente pequeno. Ademais, $c \neq 0$ se e só se as transformacións xeodésicas son parcialmente conformes non conformes.*

Proba. Supoñamos primeiro que M ten curvatura Q-seccional constante c. Temos tres posibilidades: $c > 0$, $c < 0$ e $c = 0$. Sexa $G_m(\alpha)$ a esfera xeodésica de centro o punto m e raio α. Temos que as aplicacións

$$\begin{aligned}
(s+\alpha)(r+\alpha) &= \alpha^2, & &\textit{se } c = 0, \\
\tan(s+\alpha)\frac{\sqrt{c}}{4}\tan(r+\alpha)\frac{\sqrt{c}}{4} &= \left(\tan\alpha\frac{\sqrt{c}}{4}\right), & &\textit{se } c > 0, \\
\tanh(s+\alpha)\frac{\sqrt{-c}}{4}\tanh(r+\alpha)\frac{\sqrt{-c}}{4} &= \left(\tanh\alpha\frac{\sqrt{-c}}{4}\right), & &\textit{se } c < 0,
\end{aligned}$$

definen transformacións xeodésicas parcialmente conformes con respecto á hipersuperficie $G_m(\alpha)$. Ademais, son as únicas transformacións xeodésicas non isométricas que hai con respecto a cada esfera xeodésica. (Ver [GV5]).

Supoñamos agora que, para todo punto $m \in M$ e todo número real α, suficientemente pequeno, existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto á esfera xeodésica de centro m e raio α, que denotaremos por $\varphi_{G_m(\alpha)}$. A partir da igualdade (4.2.1) próbase que M é nearly-cuaterniónica. Recorrendo novamente ó Teorema 3.1.2, obtemos que M é unha variedade cuaterniónica Kähler. Probemos agora que ten curvatura Q-seccional constante. Polo Teorema 4.2.2, as esferas xeodésicas teñen que ser totalmente umbílicas ou hipersuperficies de Hopf, é dicir, o operador de configuración de $G_m(\alpha)$ é da forma

$$T(u) \;=\; \begin{pmatrix} c_1(m,u,\alpha)I_{n-4} & 0 \\ 0 & c_2(m,u,\alpha) \end{pmatrix}$$

onde $c_i(m,u,\alpha)$, $i=1,2$, é constante ó longo de $G_m(\alpha)$ e u é un vector unitario de T_mM. Que $c_i(m,u,\alpha)$, $i=1,2$, sexa constante sobre $G_m(\alpha)$ significa que $c_i(m,u,\alpha)$, $i=1,2$, é independente do vector unitario u, é dicir, $c_i(m,u,\alpha)=c_i(m,\alpha)$, $i=1,2$. Nótese que estamos facendo identificacións de vectores ó longo das xeodésicas $\gamma_u(r)=exp_m(ru)$ a través do transporte paralelo. Por ser (M,g,V) cuaterniónica Kähler podemos considerar unha base local $\{J_1,J_2,J_3\}$ do fibrado V tal que $J_t\gamma'$ sexa un campo de vectores paralelo ó longo de $\gamma(r)=exp_m(ru)$, $t=1,2,3$. Logo, temos que

$$g(T(u)J_t\gamma',x)=0 \qquad \text{para todo } x\in Q(\gamma')^{\perp},$$

de onde, tendo en conta que

$$T_{exp_m(ru)}(u)=\frac{1}{r}I-\frac{r}{2}R_u-\frac{r^2}{4}R'_u+O(r^3),$$

para todo r suficientemente pequeno (ver [V]), deducimos que

$$g(R_uJ_t\gamma',x)=0 \qquad \text{para todo } x\in Q(\gamma')^{\perp}.$$

Isto equivale á condición (3.2.7). Polo tanto, (M,g,V) ten curvatura Q-seccional constante. $\square$

Teorema 4.4.3 *Sexan (M^n,g,V) unha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante c e B unha hipersuperficie real. Entón, B é totalmente umbílica ($c=0$) ou unha hipersuperficie de Hopf ($c\neq 0$) se e soamente se existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a ela. Ademais,*

(i) M é localmente cha, B é localmente isométrica a unha esfera xeodésica de raio α e a transformación xeodésica é a inversión euclidiana

$$(s+\alpha)(r+\alpha)=\alpha^2.$$

(ii) *B é localmente isométrica a unha esfera xeodésica de raio α no espacio proxectivo cuaterniónico $\mathbb{H}\mathbf{P^k}$ de curvatura Q-seccional constante $c = 4$ e a transformación xeodésica é a inversión non euclidiana*

$$\tan\frac{(s+\alpha)}{2}\tan\frac{(r+\alpha)}{2} = \tan^2\frac{\alpha}{2}.$$

(iii) *B é localmente isométrica a unha esfera xeodésica de raio α no espacio cuaterniónico hiperbólico $\mathbb{H}\mathbf{H^k}$ de curvatura Q-seccional constante $c = -4$ e a transformación xeodésica é a inversión non euclidiana*

$$\tanh\frac{(s+\alpha)}{2}\tanh\frac{(r+\alpha)}{2} = \tanh^2\frac{\alpha}{2}.$$

(iv) *B é localmente isométrica a un tubo arredor de $\mathbb{H}\mathbf{P^{k-1}}$ no espacio proxectivo cuaterniónico $\mathbb{H}\mathbf{P^k(4)}$ e a transformación xeodésica está dada por*

$$\tan\frac{(s+\alpha+\frac{\pi}{2})}{2}\tan\frac{(r+\alpha+\frac{\pi}{2})}{2} = \tan^2\frac{(\alpha+\frac{\pi}{2})}{2}.$$

(v) *B é localmente isométrica a un tubo arredor de $\mathbb{H}\mathbf{H^{k-1}}$ no espacio cuaterniónico hiperbólico $\mathbb{H}\mathbf{H^k(-4)}$ e a transformación xeodésica está dada por*

$$\arctan\operatorname{senh}(s+\alpha) + \arctan\operatorname{senh}(r+\alpha) = 2\arctan\operatorname{senh}\alpha.$$

(vi) *B é localmente isométrica a unha horosfera no espacio cuaterniónico hiperbólico $\mathbb{H}\mathbf{H^k(-4)}$ e a transformación xeodésica está definida por*

$$e^{-s} + e^{-r} = 2.$$

Proba. Se existe unha transformación xeodésica parcialmente conforme con respecto a B, o Teorema 4.2.2 dinos que B é unha hipersuperficie totalmente umbílica ou unha hipersuperficie de Hopf. Reciprocamente, supoñamos que B ten dúas curvaturas principais constantes. Se son iguais, é dicir, se B é totalmente umbílica, entón é $c = 0$, pois nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante non nula non existen hipersuperficies totalmente umbílicas. En tal caso, B é localmente isométrica a unha esfera xeodésica dun certo raio α e a inversión non euclidiana $(s+\alpha)(r+\alpha) = \alpha^2$ define unha transformación xeodésica conforme con respecto a B. Supoñamos agora que B é unha hipersuperficie de Hopf, con curvaturas principais c_1, de multiplicidade $n-4$, e c_2, de multiplicidade tres. Pola observación anterior, estamos supoñendo implicitamente que

$c \neq 0$. Polo tanto, imos distinguir dous casos: $c = 4$ e $c = -4$. Fixar un valor concreto para c non supón perda de xeneralidade, pois simplemente supón cambiar a métrica g por un múltiplo. O operador de configuración de B, en calquera punto da hipersuperficie, é da forma

$$T(u) = \begin{pmatrix} c_1 I_{n-4} & 0 \\ 0 & c_2 I_3 \end{pmatrix},$$

onde u é un vector unitario normal a B. Como M ten curvatura Q-seccional constante c, o operador de Jacobi normal asociado ó vector unitario $u \in T_m^{\perp} B$ está dado por

$$R_u(m) = \begin{pmatrix} \frac{c}{4} I_{n-4} & 0 \\ 0 & c I_3 \end{pmatrix}.$$

Consideremos a ecuación diferencial matricial $D_u'' + RD_u = 0$, suxeita ás condicións iniciais $D_u(0) = I$, $D_u'(0) = T(u)$. Primeiro analicemos o caso $c = 4$. Estudiando as ecuacións $(D_u'')_{ij} + (RD_u)_{ij} = 0$ coas condicións iniciais respectivas, para $i, j = 1, \ldots, n-1$, obtemos

$$\begin{cases} (D_u)_{ii}(r) = \cos r + c_1 \operatorname{sen} r, & i = 1, \ldots, n-4 \\ (D_u)_{ii}(r) = \cos 2r + \dfrac{c_2}{2} \operatorname{sen} r, & i = n-3, n-2, n-1 \\ (D_u)_{ij}(r) = 0, \quad \text{se } i \neq j. & \end{cases}$$

De $g_{ij}(r) = ({}^t D_u D_u)_{ij}(r)$ obtemos que

$$\begin{cases} g_{ii}(r) = (\cos r + c_1 \operatorname{sen} r)^2, & i = 1, \ldots, n-4 \\ g_{ii}(r) = (\cos 2r + \dfrac{c_2}{2} \operatorname{sen} r)^2, & i = n-3, n-2, n-1 \\ g_{ij}(r) = 0, \quad \text{se } i \neq j. & \end{cases}$$

Teñamos en conta que se verifica

$$\begin{aligned} \eta_t \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) &= g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, J_t N \right) \\ &= g_{n-t,n-t}^{\frac{-1}{2}} g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^{n-t}} \right) = \delta_{i,n-t} g_{n-t,n-t}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

A partir de (4.2.1) e (4.2.4), obtemos as igualdades

$$\begin{cases} \left(\cos 2s + \dfrac{c_2}{2} \operatorname{sen} 2s \right)^2 = (s'(r)^2 + f(r)) \left(\cos 2s + \dfrac{c_2}{2} \operatorname{sen} 2s \right)^2, \\ (\cos s + c_1 \operatorname{sen} s)^2 = s'(r)^2 (\cos r + c_1 \operatorname{sen} r)^2, \end{cases}$$

de onde temos

$$\frac{ds}{dr} = \pm\frac{\cos s + c_1 \operatorname{sen} s}{\cos r + c_1 \operatorname{sen} r}, \tag{4.4.5}$$

e

$$f(r) = \left(\frac{2\cos 2s + c_2 \operatorname{sen} 2s}{2\cos 2r + c_2 \operatorname{sen} 2r}\right)^2 - \left(\frac{\cos s + c_1 \operatorname{sen} s}{\cos r + c_1 \operatorname{sen} r}\right)^2.$$

Integrando a ecuación diferencial (4.4.5) coa condición inicial $s(0) = 0$ obtemos dúas transformacións xeodésicas parcialmente conformes con respecto a B. Só é interesante a solución correspondente a tomar en (4.4.5) o signo $-$, pois cando consideramos o signo $+$ obtemos $s(r) = r$.

Agora, estudiemos o caso $c = -4$. Considerando as ecuacións $(D''_u)_{ij} + (RD_u)_{ij} = 0$ coas condicións iniciais respectivas, para $i, j = 1, \ldots, n-1$, obtemos

$$\begin{cases} (D_u)_{ii}(r) = \dfrac{1+c_1}{2}\, e^{r} + \dfrac{1-c_1}{2}\, e^{-r}, & i = 1, \ldots, n-4, \\ (D_u)_{ii}(r) = \dfrac{2+c_1}{4}\, e^{2r} + \dfrac{2-c_1}{4}\, e^{-2r}, & i = n-3, n-2, n-1, \\ (D_u)_{ij}(r) = 0, \qquad \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

De $g_{ij}(r) = ({}^tD_u D_u)_{ij}(r)$ obtemos que

$$\begin{cases} g_{ii}(r) = \left(\dfrac{1+c_1}{2}\, e^{r} + \dfrac{1-c_1}{2}\, e^{-r}\right)^2, & i = 1, \ldots, n-4, \\ g_{ii}(r) = \left(\dfrac{2+c_1}{4}\, e^{2r} + \dfrac{2-c_1}{4}\, e^{-2r}\right)^2, & i = n-3, n-2, n-1 \\ g_{ij}(r) = 0, \qquad \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Tendo en conta (4.4.4), a partir de (4.2.1) e (4.2.4), obtemos as igualdades

$$\begin{cases} ((1+c_1)\, e^{s} + (1-c_1)\, e^{-s})^2 = s'(r)^2((1+c_1)\, e^{r} + (1-c_1)\, e^{-r})^2, \\ ((2+c_2)\, e^{2s} + (2-c_2)\, e^{-2s})^2 \\ \qquad\qquad = (s'(r)^2 + f(r))((2+c_2)\, e^{2r} + (2-c_2)\, e^{-2r})^2, \end{cases}$$

de onde temos

$$\frac{ds}{dr} = \pm\frac{(1+c_1)\, e^{s} + (1-c_1)\, e^{-s}}{(1+c_1)\, e^{r} + (1-c_1)\, e^{-r}}, \tag{4.4.6}$$

e

$$f(r) = \left(\frac{(2+c_2)\, e^{2s} + (2-c_2)\, e^{-2s}}{(2+c_2)\, e^{2r} + (2-c_2)\, e^{-2r}}\right)^2 - \left(\frac{(1+c_1)\, e^{s} + (1-c_1)\, e^{-s}}{(1+c_1)\, e^{r} + (1-c_1)\, e^{-r}}\right)^2.$$

Integrando a ecuación diferencial (4.4.6) co signo $-$ e considerando a condición inicial $s(0) = 0$ obtemos unha transformación xeodésica parcialmente conforme, non trivial, con respecto a B.

Os casos (*ii*), (*iii*), (*iv*), (*v*) e (*vi*) séguense directamente da clasificación de hipersuperficies con dúas curvaturas principais constantes, unha con multiplicidade tres, dunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante dada en [B]). Nese traballo aparece unha lista de hipersuperficies, nas anteriores condicións, coas curvaturas principais correspondentes. Integrando a ecuación diferencial que corresponda a cada caso, (4.4.5) ou (4.4.6), obtemos o afirmado en (*ii*), (*iii*), (*iv*), (*v*) e (*vi*). $\square$

aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa

Bibliografía

[B] J. Berndt; Real hypersurfaces in quaternionic space forms, *J. Reine Angew. Math.*, **419** (1991), 9 – 26.

[CV1] B. Y. Chen, L. Vanhecke; Isometric, holomorphic and symplectic reflections, *Geom. Dedicata*, **29** (1989), 259 – 277.

[CV2] B. Y. Chen, L. Vanhecke; Symplectic reflections in complex space forms, *Ann. Global Anal. Geom.*, **9** (1991), 205 – 210.

[D] J. E. D'Atri; Geodesic conformal transformations and symmetric spaces, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **26** (1975), 201 – 203.

[DN1] J. E. D'Atri, H. K. Nickerson; Divergence-preserving geodesic symmetries, *J. Differential Geom.*, **3** (1969), 467 – 476.

[DN2] J. E. D'Atri, H. K. Nickerson; Geodesic symmetries in spaces with special curvature tensor, *J. Differential Geom.*, **9** (1974), 251 – 262.

[DVV] C. T. J. Dodson, L. Vanhecke, M. E. Vázquez-Abal; Harmonic geodesic symmetries *C. R. Acad. Sci. Canada*, **9** (1987), 231 – 235.

[DGV] S. Donnini, G. Gigante, L. Vanhecke; Harmonic reflections with respect to submanifolds, *Illinois J. Math.*, **34** (1990), 78 – 86.

[GV1] E. García Río, L. Vanhecke; Geodesic transformations and space forms, *Math. J. Toyama Univ.*, **20** (1997), 57 – 77.

[GV2] E. García Río, L. Vanhecke; Geodesic transformations and harmonic spaces, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, a aparecer.

[GV3] E. García Río, L. Vanhecke; Divergence-preserving geodesic transformations and isoparametric hypersurfaces, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, a aparecer.

[GV4] E. García Río, L. Vanhecke; Holomorphic geodesic transformations, *Kōdai Math. J.*, **21** (1998), 46 – 60.

[GV5] E. García Río, L. Vanhecke; Conformal geodesic transformations, *Arab J. Math. Sc.*, **2** (1997), 13 – 36.

[Gr] A. Gray; *Tubes*, Addison–Wesley, Redwood City, 1990.

[GrV1] A. Gray, L. Vanhecke; Riemannian geometry as determined by the volumes of small geodesic balls, *Acta Math.*, **142** (1979), 157 – 198.

[GrV2] A. Gray, L. Vanhecke; The volume of tubes about curves in a Riemannian manifold, *Proc. London Math. Soc.*, **44** (1982), 215 – 243.

[I] S. Ishihara; Quaternion Kählerian manifolds, *J. Diff. Geom.*, **9** (1974), 483 – 500.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu; *Foundations of differential geometry I, II*, Interscience Pub., New York, 1963, 1969.

[Kn] M. Konishi; On Jacobi fields in quaternion Kähler manifolds with constant Q–sectional curvature, *Hokkaido Math. J.*, **4** (1975), 169–178.

[MV] M. D. Monar, L. Vanhecke; Locally symmetric quaternionic Kähler manifolds *Differential Geom. Sappl.*, **4** (1994), 127–149.

[PSU] J. D. Pérez, F. G. Santos, F. Urbano; On the axioms of planes in quaternionic geometry, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **130** (1982), 215–221.

[KPV] O. Kowalski, F. Prüfer, L. Vanhecke; D'Atri spaces, *Topics in Geometry: In Memory of Joseph D'Atri* (Ed. S. Gindikin), Progress in Nonlinear Diff. Eq. **20**, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1996, 241 – 284.

[SV] K. Sekigawa, L. Vanhecke; Symplectic geodesic symmetries on Kähler manifolds, *Quart. J. Math. Oxford*, **37** (1986), 95–103.

[S] A. Swann; Some remarks on Quaternion-Hermitian manifolds, *Arch. Math. (Brno)*, **33** (1997), 349–354.

[T] S. Tachibana; On Riemannian spaces admitting geodesic conformal transformations, *Tensor (N. S.)*, **25** (1972), 323 – 331.

[Ta] S. Tanno; Partially conformal transformations with respect to a $(m-1)$-dimensonal distributions on m-dimensional Riemannian manifolds, *Tohoku Math. J.*, **17** (1988), 176 – 183.

[TV] Ph. Tondeur, L. Vanhecke; Reflections in submanifolds, *Geom. Dedicata*, **28** (1988), 77 – 85.

[V] L. Vanhecke; Geometry in normal and tubular neighborhoods, *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, supplemento al vol. **58** (1988), 73 – 176.

[VW] L. Vanhecke, T. J. Willmore; Interaction of tubes and spheres, *Math. Ann.*, **263** (1983), 31 – 42.

[YK] K. Yano, M. Kon; *Structures on Manifolds*, Series in Pure Math., **3**, World Scientific, Singapore, 1984.