Ana Rodríguez Fernández

COHOMOLOXIA DAS FOLIACIÓNS RIEMANNIANAS CON FOLLAS DENSAS

COHOMOLOXIA DE ALEXANDER-SPANIER DE FOLIACIÓNS COMPACTAS HAUSDORFF

95

2001

Publicacións do Departamento de Xeometría e Topoloxía

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

COHOMOLOXIA DAS FOLIACIÓNS RIEMANNIANAS CON FOLLAS DENSAS

COHOMOLOXIA DE ALEXANDER-SPANIER DE FOLIACIÓNS COMPACTAS HAUSDORFF

Ana Rodríguez Fernández

Imprime: Imprenta Universitaria
Campus Universitario Sur
Santiago de Compostela

Dep. Legal C-986/2001
ISBN 84-89390-12-6

Moitas grácias.

Xosé por ser tan amável, por contestar as miñas perguntas, por estar sempre disposto a atender-me.

Ana, Enrique, Fernando e Suso por ler a memória, por formar parte do tribunal.

Manolo por axudar-me con todos os meus problemas co ordenador e o Latex, por ...

Chus, Lucia, mamá e papá por soportar os meus enfados e agobios cando algo me sae mal, polo apoio.

LIMIAR

No estudio de variedades foliadas a cohomoloxia é unha ferramenta que ten sido de grande utilidade. A unha foliación pode-se-lle asociar unha sucesión de primeiro cuadrante que converxe à cohomoloxia da variedade, de forma análoga a como ocorre coa sucesión espectral de Serre para unha fibración. A cohomoloxia da base, neste caso, pode-se interpretar como unha cohomoloxia do "espacio das follas"; denomina-se *cohomoloxia básica*. Aparece tamén, en correspondéncia coa cohomoloxia das fibras, a *cohomoloxia foliada*. Coñecen-se diversas aproximacións a estas teorias. A máis estudiada é a que parte do complexo de de Rham. Os primeiros traballos nesta liña remontan-se a Reinhart, no ano 1958, que considera a cohomoloxia básica no caso particular no que existen duas foliacións complementárias [14]. Outras referéncias tempranas son Vaisman [17], que estudia cohomoloxia en variedades dotadas dunha estructura case-produto e Masa [8], que considera a sucesión espectral definida polo feixe diferencial de formas básicas. Unha aproximación alternativa, pouco desenvolta, debe-se a Shikata [15] que emprega cubos singulares adaptados à foliación. Tamén a de Mostow [12] en cohomoloxia contínua pero na situación máis xeral de espácios con duas topoloxias. Entre os resultados obtidos con estes métodos poden-se citar os relativos a deformacións de foliacións [5] ou de caracterización de foliacións que admiten unha métrica que minimaliza as follas [10]. Nesta publicación recollen-se dous traballos. O primeiro descreve a sucesión espectral de cohomoloxia de de Rham dunha foliación riemanniana con follas densas, en función da sua álxebra estructural e da cohomoloxia foliada. O segundo, parte da consideración doutros métodos para definir cohomoloxias asociadas à foliación. En particular emprega o método e a sucesión de Alexander-Spanier [11]. Demostra que para foliacións compactas Hausdorff esta sucesión coincide coa de de Rham a partir do segundo termo; construindo ademais un isomorfismo explícito.

COHOMOLOXIA DAS FOLIACIÓNS RIEMANNIANAS CON FOLLAS DENSAS

Sexan M unha variedade diferenciável, $(M, \mathcal{F})$ unha foliación riemanniana con follas densas de codimensión n e $\mathfrak{g}$ a álxebra de Lie estructural da foliación. No *fibrado de referéncias ortogonais transversas* P_O de $(M, \mathcal{F})$ consideramos a foliación levantada, $\widetilde{\mathcal{F}}$. Chamamos P à adheréncia dunha folla desta foliación. $\widetilde{\mathcal{F}}$ induce nesta adheréncia unha foliación de Lie con follas densas e álxebra $\mathfrak{g}$ que seguimos denotando $\widetilde{\mathcal{F}}$. Verifica-se que P é un subfibrado principal de P_O con grupo estructural K, subgrupo compacto de $O(n, \mathbb{R})$. Sexa $H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ a cohomoloxia foliada de $\widetilde{\mathcal{F}}$, ou sexa, a cohomoloxia de P con coeficientes no feixe de xermes de funcións localmente constantes ao longo das follas de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Na variedade M define-se, asociada à foliación $\mathcal{F}$, unha filtración do complexo de de Rham que dá lugar a unha sucesión espectral que converxe à cohomoloxia de de Rham da variedade. Sexa ${}_{dR}E_2(\mathcal{F})$ o segundo termo desta sucesión espectral. Neste traballo imos provar que o termo ${}_{dR}E_2(\mathcal{F})$ da sucesión espectral é isomorfo ao módulo de cohomoloxia, relativa ao grupo K, da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ con coeficientes no $(\mathfrak{g}, K)$-módulo $H_{\widetilde{\mathcal{F}}}$,

$$\boxed{{}_{dR}E_2^{p,q}(\mathcal{F}) \cong H^p(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}})\,,}$$

onde a estructura de $(\mathfrak{g}, K)$-módulo de $H_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ ven inducida pola derivada de Lie e a acción de K sobre P. No caso particular no que K fose conexo, teria-se:

$$\boxed{{}_{dR}E_2^{r,s}(\mathcal{F}) = H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, H^q_{\mathcal{F}})\,,}$$

con $H^q_{\mathcal{F}}$ a cohomoloxia foliada de $\mathcal{F}$ e sendo $\mathfrak{k}$ a álxebra de Lie do grupo K. Os elementos da álxebra de Lie $\mathfrak{k}$ son campos de vectores foliados de $\widetilde{\mathcal{F}}$, asi $\mathfrak{k}$ é unha subálxebra de Lie de $\mathfrak{g}$. No caso xeral, existe un revestimento finito $\widetilde{M}_0$ de M, de fibra K/K_0, tal que, para a foliación $\mathcal{F}_0$, levantada de $\mathcal{F}$ a $\widetilde{M}_0$, ten-se:

$$\boxed{\begin{aligned} {}_{dR}E_2^{r,s}(\mathcal{F}_0) &= H^p(\mathfrak{g}, K_0, H^q_{\mathcal{F}_0})\,, \\ {}_{dR}E_2^{r,s}(\mathcal{F}) &= H^p(\mathfrak{g}, K_0, H^q_{\mathcal{F}_0})^{K/K_0}\,, \end{aligned}}$$

onde K_0 é a compoñente conexa do elemento neutro de K.

Estructura das foliacións riemannianas

Nesta sección imos expoñer, seguindo a P. Molino [13], a estructura das foliacións riemannianas. Sexan M unha variedade diferenciavél C^∞ de dimensión m, $\mathcal{F}$ unha foliación de codimensión n en M e $T\mathcal{F}$ a distribución $(m-n)$-dimensional completamente integrável correspondente a $\mathcal{F}$. Denotamos por $\mathcal{X}(M)$ a álxebra de campos de vectores de M, por $\Gamma(\mathcal{F})$ a subálxebra de Lie de campos de vectores tanxentes à foliación e por $\mathcal{X}(M, \mathcal{F})$ a álxebra de campos de vectores foliados, é dicer, o normalizador de $\Gamma(\mathcal{F})$ en $\mathcal{X}(M)$. Chamamos Q ao fibrado vectorial cociente $TM/T\mathcal{F}$ de fibra $\mathbb{R}^n$. As seccións deste fibrado son os campos de vectores transversos da foliación. Unha base transversa nun ponto

$x \in M$ é unha base $(\bar{X}_{1x}, \ldots, \bar{X}_{nx})$ de Q_x que podemos ver como un isomorfismo linear $z : Q_x \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Chamamos B ao conxunto destas bases e $p : B \longrightarrow M$ à aplicación que a cada base nun ponto leva-a nese mesmo ponto. B dota-se dunha estructura de variedade diferenciável de xeito que $(B, M, p, Gl(n, \mathbb{R}))$ é un fibrado principal, o fibrado de referéncias transversas. Por ser B un fibrado de referéncias pode-se definir nel unha 1-forma Θ^1 con valores en $\mathbb{R}^n$:

$$\Theta^1(X_z) = z^{-1}(\overline{p_{*z}(X_z)}),\ z \in B,\ X_z \in T_z B$$

onde $\overline{p_{*z}(X_z)}$ denota o campo de vectores transverso asociado ao campo de vectores foliado $(p_{*z}(X_z))$. Θ^1 é a 1-forma fundamental de B. Define-se a distribución

$$T_z\widetilde{\mathcal{F}} = \{X_z \in T_z B / i_{X_z}\Theta^1 = i_{X_z} d\Theta^1 = 0\}$$

para z $\in B$. Esta distribución é completamente integrável e define unha foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$ invariante por traslacións pola dereita en B. É a foliación levantada ao fibrado de referéncias transversas. As suas follas proxectan-se por p en follas de M. Se $\widetilde{L}$ é unha folla de $\widetilde{\mathcal{F}}$ e $L = p(\widetilde{L})$ a folla proxectada en M entón $p : \widetilde{L} \longrightarrow L$ é un revestimento. Unha estructura transversa sobre M é un subfibrado principal E de B tal que en cada ponto $z \in E$ o subespazo $T_z E$ contén a $T_z\widetilde{\mathcal{F}}$. As estructuras transversas son unión de follas da foliación levantada a B. Se consideramos a reducción a $O(n, \mathbb{R})$, a estructura transversa chama-se riemanniana. Unha foliación que admite unha $O(n, \mathbb{R})-$estructura transversa é unha foliación de Riemann. Denotamos por P_O esta estructura riemanniana transversa e $\widetilde{\mathcal{F}}$ a foliación levantada a P_O. Existe unha única conexión linear ω en B livre de torsión adaptada à estructura riemanniana transversa P_O, chama-se conexión transversa de Levi-Civita da foliación riemanniana. $T\widetilde{\mathcal{F}}$ é horizontal para esta conexión. Coa axuda desta conexión e da 1-forma fundamental transversa define-se o paralelismo canónico transverso: para $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n(n-1)/2}\}$ e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ bases de $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente consideran-se os campos de vectores transversos $\bar{\lambda}_i, i = 1, \ldots, n(n-1)/2$ e $\bar{u}_i, i = 1, \ldots, n$ dados por:

$$\begin{cases} \omega(\bar{u}_i) = 0, & \Theta^1(\bar{u}_i) = u_i \\ \\ \omega(\bar{\lambda}_i) = \lambda_i, & \Theta^1(\bar{\lambda}_i) = 0 \end{cases}$$

Un campo de vectores transverso Y di-se completo se existe un campo de vectores foliado completo X que o admite como campo de vectores transverso asociado, $\overline{X} = Y$. A foliación riemanniana di-se completa se o paralelismo canónico transverso é completo, é dicer, cando son completos os campos de vectores $\{\bar{\lambda}_1, \ldots , \bar{\lambda}_{n(n-1)/2}\}$, $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$. Se M é unha variedade compacta entón a foliación riemanniana vai ser completa. Unha foliación $(N, \mathcal{F})$ di-se transversalmente completa se en cada ponto a família de campos de vectores globais foliados xeran todo o espazo tanxente. Asociada a unha foliación transversalmente completa define-se unha variedade W, a *variedade básica*, sobre a que fibra N. Existe unha proxección $\pi_b : N \longrightarrow W$ que é un fibrado localmente trivial chamado *fibración básica*. As fibras desta fibración, $\pi_b^{-1}(y)$, $y \in W$, son as adheréncias das follas da foliación. Restrixindo $\mathcal{F}$ a cada unha destas fibras obten-se unha nova foliación. Esta foliación restrinxida é unha $\mathfrak{g}$-foliación de Lie con $\mathfrak{g}$ xerada polos campos de vectores transversos a $\mathcal{F}$ en $\pi_b^{-1}(y)$. $\mathfrak{g}$ é un invariante da foliación. Verifica-se ademais que estas fibras, as adheréncias das follas, son as órbitas do feixe de comutadores $C(N, \mathcal{F})$ de xermes de campos de vectores locais transversos que comutan con todos os campos de vectores globais transversos. Este feixe ten fibra tipo a álxebra de Lie oposta da *álxebra de Lie estructural* da foliación, $\mathfrak{g}^-$. No caso dunha foliación riemanniana nunha variedade compacta M a estructura ortogonal transversa correspondente $(P_O, \widetilde{\mathcal{F}})$ é transversalmente paralelizável e completa. Polo tanto, a adheréncia de cada unha das follas desta foliación é unha $\mathfrak{g}$-foliación de Lie. $\mathfrak{g}$ non depende da estructura ortogonal transversa elixida sobre M, é un invariante de $(M, \mathcal{F})$, a álxebra de Lie estructural. O feixe dos comutadores $C(P_O, \widetilde{\mathcal{F}})$ estende-se a todo B nun feixe $C(B, \widetilde{\mathcal{F}})$ e, polo tanto, as adheréncias das follas de $\widetilde{\mathcal{F}}$ son as órbitas de $C(B, \widetilde{\mathcal{F}})$. As follas $\widetilde{L}$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$ son invariantes por traslacións pola dereita en B, asi cada traslación R_g, onde $g \in O(n, \mathbb{R})$ proxecta-se por π_b nun difeomorfismo de W, variedade básica asociada a $(P_O, \widetilde{\mathcal{F}})$. Ten-se entón unha acción diferenciável de $O(n, \mathbb{R})$ na variedade básica, $R : W \times O(n, \mathbb{R}) \longrightarrow W$. Cada folla $\widetilde{L}$ de $\widetilde{\mathcal{F}}$ proxecta-se nunha folla $L = p(\widetilde{L})$ de $\mathcal{F}$. Verifica-se tamén que a adheréncia $\overline{\widetilde{L}}$ de $\widetilde{L}$ proxecta-se na adheréncia $\overline{L}$ de L. Asi as adheréncias das follas de $\mathcal{F}$ forman unha partición $\overline{\mathcal{F}}$ de M en subvariedades mergulladas que son as subvariedades maximais integrais dunha distribución integrável de dimensión variável. O espazo das adheréncias das follas $W' = M/\overline{\mathcal{F}}$ de $(M, \mathcal{F})$ dotado coa topoloxia cociente é homeomorfo ao espazo de órbitas dado pola acción de $O(n, \mathbb{R})$ sobre W xa que a imaxen inversa da adheréncia de cada folla de $\mathcal{F}$ proxecta-se pola fibración básica nunha órbita. A adheréncia $\overline{\widetilde{L}}$ é unha folla da foliación definida en $p^{-1}(\overline{L})$ polas adheréncias das follas de $\widetilde{\mathcal{F}}$. A foliación está formada por $\overline{\widetilde{L}}$ e as suas imaxes por traslacións à dereita. Obviamente esta foliación é invariante por taslacións à dereita e asi $\overline{\widetilde{L}}$ é un subfibrado principal de $p^{-1}(\overline{L})$. O grupo estructural K deste fibrado é un subgrupo fechado de $O(n, \mathbb{R})$ xa que $\overline{\widetilde{L}}$ é compacto. A álxebra de Lie $\mathfrak{k}$ asociada ao grupo de Lie K corresponde-se cos campos de vectores fundamentais tanxentes a $\overline{\widetilde{L}}$ en cada ponto isto é:

$$\mathfrak{k} = \{\lambda \in \mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) \,/\, \tilde{\lambda}_z \in T_z \overline{\widetilde{L}}\}$$

Supoñamos agora que $(M, \mathcal{F})$ ten follas densas. Neste caso a estructura ortogonal transversa é única baixo conxugación en B. Isto é asi xa que as adheréncias das follas da foliación levantada en P_O e as suas traslacións pola dereita en B son subfibrados principais de B sendo duas calquera delas conxugadas entre si. Ademais se P'_O é outra estructura transversa adaptada sobre M é unha unión das adheréncias das follas da foliación levantada a P_O. Asi P'_O obten-se por traslacións en B das follas de $\widetilde{\mathcal{F}}$. Neste sentido ten-se a unicidade. As adheréncias das follas de $\widetilde{\mathcal{F}}$ son as órbitas do feixe dos comutadores. Este feixe está formado por levantamentos de xermes de campos de vectores de Killing transversos locais en $(M, \mathcal{F})$. Asi nunha viciñanza de cada ponto de M ten-se unha álxebra de Lie de campos de vectores de Killing transversos locais. Esta álxebra de Lie é isomorfa à fibra do feixe $C(P_O, \widetilde{\mathcal{F}})$, é dicer, à álxebra de Lie oposta da álxebra de Lie estructural da foliación. Polo tanto $(M, \mathcal{F})$ di-se unha foliación localmente transversalmente homoxénea con álxebra de Killing $\mathfrak{g}^{-}$. Existen ademais unha variedade P, unha proxección $\pi : P \longrightarrow M$ e unha acción $R : P \times K \longrightarrow P$ con K subgrupo de Lie compacto do grupo $O(n, \mathbb{R})$ tal que (P, M, π, K) é un fibrado principal de grupo K. P é a adheréncia dunha folla $\widetilde{L}$ da foliación levantada ao fibrado de referéncias ortogonais transversas P_O. É un fibrado pois se L é a folla proxectada por p de $\widetilde{L}$ en M entón $\overline{\widetilde{L}} \longrightarrow \overline{L}$ é un fibrado principal e neste caso $\overline{L} = M$.

Cohomoloxia

Nesta sección imos descrever a cohomoloxia dunha foliación mediente a sucesión espectral de de Rham asociada à foliación e veremos, no caso dunha $\mathfrak{g}$-foliación de Lie, como se caracteriza o segundo termo desta sucesión empregando a cohomoloxia da álxebra $\mathfrak{g}$. As principais referéncias son [4], [9]. Denotamos por $\Lambda(M)$ a álxebra de formas diferenciais en M e por d a diferencial exterior $d : \Lambda^i(M) \longrightarrow \Lambda^{i+1}(M)$. En $\Lambda(M)$ definimos unha filtración. Unha forma diferencial de grao i di-se de grao filtrante $\geq p$ se é nula cando actua sobre $i - p + 1$ campos de vectores tanxentes à foliación. Denotamos por $F^p\Lambda(M)$ o ideal das formas de grao filtrante $\geq p$. Esta filtración verifica tres condicións:

- $F^0\Lambda(M) = \Lambda(M)$,
- É decrecente, é dicer, $F^p\Lambda(M) \supset F^{p+1}\Lambda(M)$,
- É estável para a diferencial, isto é: $d(F^p\Lambda(M)) \subset F^p\Lambda(M)$.

Temos asi o seguinte complexo filtrado:

$$\Lambda(M) = F^0\Lambda(M) \supset F^1\Lambda(M) \supset \ldots \supset F^n\Lambda(M) \supset F^{n+1}\Lambda(M) = 0.$$

Este complexo diferencial graduado filtrado vai definir unha sucesión espectral $E_r(\mathcal{F})$ que converxe à cohomoloxia de de Rahm de M:

$$_{dR}E_2^{r,s}(\mathcal{F}) \Rightarrow \ H^{p+q}_{DR}(M).$$

Unha forma di-se básica se satisfai:

$$\begin{cases} i_Y \alpha = 0 \\ \\ i_Y d\alpha = 0 \end{cases}$$

para todo campo de vectores Y que sexa tanxente à foliación, onde i_Y denota o produto interior por un campo de vectores. Denotamos por $\Lambda_B(\mathcal{F})$ o conxunto das formas básicas. Este constitue un subcomplexo diferencial do complexo de de Rahm e, polo tanto, pode-se calcular a sua cohomoloxia, chamada cohomoloxia básica. Denotamo-la por $H_B(\mathcal{F})$. Temos definida a sucesión espectral da foliación que converxe à cohomoloxia de de Rahm da variedade. Imos identificar os seus primeiros termos. O primeiro termo dunha sucesión espectral é o grupo graduado asociado à filtración, asi

$$_{dR}E_0^{r,s}(\mathcal{F}) = F^p\Lambda^{p+q}(M)/F^{p+1}\Lambda^{p+q}(M).$$

Como $d(F^p\Lambda(M)) \subset F^p\Lambda(M)$, a diferencial exterior induce unha aplicación no cociente $F^p\Lambda^{p+q}(M)/F^{p+1}\Lambda^{p+q}(M)$

$$d_{\mathcal{F}} : {}_{dR}E_0^{r,s}(\mathcal{F}) = \frac{F^p\Lambda^{p+q}}{F^{p+1}\Lambda^{p+q}} \longrightarrow {}_{dR}E_0^{p,q+1}(\mathcal{F}) = \frac{F^p\Lambda^{p+q+1}}{F^{p+1}\Lambda^{p+q+1}}.$$

Asi, $({}_{dR}E_0^{r,*}(\mathcal{F}), d_{\mathcal{F}})$ é un complexo diferencial. O termo ${}_{dR}E_1^{r,s}(\mathcal{F})$ é a cohomoloxia deste complexo.

$${}_{dR}E_1^{r,s}(\mathcal{F}) = H^q({}_{dR}E_0^{r,*}(\mathcal{F}), d_{\mathcal{F}}) = H^q(F^p\Lambda^{p+*}(M)/F^{p+1}\Lambda^{p+*}(M)).$$

Induce-se ademais unha diferencial

$$d_1 :_{dR} E_1^{r,s}(\mathcal{F}) \longrightarrow_{dR} E_1^{p+1,q}(\mathcal{F}),$$

que é o homomorfismo de conexión dado pola sucesión exacta curta

$$0 \to F^{p+1}\Lambda/F^{p+2}\Lambda \to F^p\Lambda/F^{p+2}\Lambda \to F^p\Lambda/F^{p+1}\Lambda \to 0.$$

O termo ${}_{dR}E_2^{r,s}(\mathcal{F})$ é a cohomoloxia do complexo $({}_{dR}E_1(\mathcal{F}), d_1)$,

$${}_{dR}E_2^{r,s}(\mathcal{F}) = H^p({}_{dR}E_1^{*,s}(\mathcal{F}), d_1) = H^p(, H^q(F^*\Lambda^*(M)/F^{*+1}\Lambda^*(M))).$$

A sucesión espectral permite tamén coñecer outros elementos importantes asociados à foliación. Para cada q existe un isomorfismo entre a cohomoloxia foliada $H^q_{\mathcal{F}}$ e o termo ${}_{dR}E_1^{0,q}(\mathcal{F})$ da sucesión espectral anterior; $H^q_{\mathcal{F}} \cong_{dR} E_1^{0,q}(\mathcal{F})$ A cohomoloxia básica tamén se identifica cun termo da sucesión espectral, para cada p, o termo ${}_{dR}E_2^{p,0}(\mathcal{F})$ é isomorfo ao módulo de cohomoloxia básica de grao p; ${}_{dR}E_2^{p,0}(\mathcal{F}) \cong H^p_B(\mathcal{F})$. Consideramos agora os feixes de xermes de formas básicas $\Lambda^i_{\mathcal{F}}, i \in \mathbb{N}$. A diferencial exterior induce aplicacións $d : \Lambda^i_{\mathcal{F}} \longrightarrow \Lambda^{i+1}_{\mathcal{F}}$ que verifican $d^2 = 0$. Asi $(\Lambda_{\mathcal{F}}, d)$ é un feixe diferencial. Ademais verifica-se que este feixe diferencial constitue unha resolución do feixe constante $\mathbb{R}_M$ en M de tallo $\mathbb{R}$, é dicer, a sucesión de feixes

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_M \longrightarrow \Lambda^0_{\mathcal{F}} \longrightarrow \Lambda^1_{\mathcal{F}} \longrightarrow \dots$$

é exacta. Existe unha sucesión espectral asociada a esta resolución cuxo segundo termo é:

$$\overline{E}_2^{r,s}(\mathcal{F}) = H^pH^q(M, \Lambda^*_{\mathcal{F}}).$$

Esta sucesión espectral e a obtida pola filtración dada anteriormente son isomorfas a partir do primeiro termo. Para comprova-lo, introducimos unha bigraduación en $\Lambda^*(M)$ asociada a unha descomposición $TM = \mathcal{V}\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}$ do fibrado tanxente à variedade. A bigraduación ven dada por $\Lambda^{r,s}(M) = \Gamma(\bigwedge^r(\mathcal{VF})^* \otimes \bigwedge^s(T\mathcal{F})^*)$. Sexan $\Lambda^{r,s}$ os feixes de xermes de formas de tipo (r,s). A sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Lambda^p_{\mathcal{F}} \longrightarrow \Lambda^{p,0} \longrightarrow \Lambda^{p,1} \longrightarrow \dots$$

é unha resolución frouxa de $\Lambda^p_{\mathcal{F}}$. Entón por [8] podemos concluir que as sucesións espectrais son isomorfas a partir do primeiro termo.

Cohomoloxia das foliacións de Lie

Sexa $(M, \mathcal{F})$ unha $\mathfrak{g}$-foliación de Lie. Imos ver que o segundo termo da sucesión espectral de cohomoloxia asociada ven dado pola cohomoloxia da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ con coeficientes na cohomoloxia foliada $H_{\mathcal{F}}$. Asociada a unha $\mathfrak{g}$-foliación de Lie define-se unha 1-forma en M con valores na álxebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\Theta : T_xP \longrightarrow \mathfrak{g}$, que verifica:

a) $\Theta_x : T_xM \longrightarrow \mathfrak{g}$ é sobrexectiva, $\forall x \in M$,

b) $d\Theta - \Theta \wedge \Theta = 0$.

Esta forma caracteriza completamente à foliación xa que o núcleo de Θ é a distribución $T\mathcal{F}$ tanxente às follas da foliación $\mathcal{F}$. Consideramos unha base de $\mathfrak{g}$, $\{\ \xi_1, \dots, \xi_n\}$. Entón podemos escrever

$$\Theta = \sum_{k=1}^{n} \Theta^k \otimes \xi_k$$

onde Θ^k, $k = 1, \dots, n$, son 1-formas usuais en M. Asi a distribución tanxente às follas ven dada por $T\mathcal{F} = \bigcap_{k=1}^{n} \ker\, \Theta^k$. Consideramos $\{X_1, \dots, X_n\}$ campos de vectores en M duais das formas $\{\Theta^1, \dots, \Theta^n\}$, isto é : $\Theta^i(X_j) = \delta^i_j$. A realización xeométrica do fibrado normal à foliación definida por estes campos de vectores denota-se por $\mathcal{VF}$. Asi temos a descomposición $TM = \mathcal{VF} \oplus T\mathcal{F}$ que dá lugar a unha bigraduación de $\Lambda(M)$, $\Lambda^i(M) = \sum_{r+s=i} \Lambda^{r,s}(M)$.Asi, unha forma $\omega \in \Lambda^i(M)$ descompon-se na soma $\omega = \sum_{r+s=i} \omega^{r,s}$ con $\omega^{r,s} \in \Lambda^{r,s}(M)$. Verifica-se ademais que $\omega^{r,s} = \sum_I \Theta^I \wedge i_I \omega$ onde I denota un conxunto crecente de índices $\{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}$, $\Theta^I = \Theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \Theta^{i_r}$ e $i_I = i_{X_{i_r}} \circ \dots \circ i_{X_{i_1}}$. Isto permite definir o isomorfimo:

$$\bigwedge^r \mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^{0,s}(M) \longrightarrow \Lambda^{r,s}$$

$$\xi_I^* \otimes \Lambda \longrightarrow \Theta^I \wedge \Lambda.$$

Esta aplicación é obviamente inxectiva e o caracter sobrexectivo deduce-se da anterior expresión para as formas de tipo (r,s). Entón, neste caso, os feixes $\Lambda^i_{\mathcal{F}}$ de xermes de formas básicas son isomorfos aos feixes $\wedge^i \mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^0_{\mathcal{F}}$, interpretando $\wedge^i \mathfrak{g}^*$ como feixe constante. Asi:

$${}_{dR}E_2^{r,s}(\mathcal{F}) = H^pH^q(M, \Lambda^*_{\mathcal{F}}) = H^pH^q(M, \wedge^* \mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^0_{\mathcal{F}})$$

$$= H^p(\wedge^*\mathfrak{g}^* \otimes H^q(M, \Lambda^0_{\mathcal{F}})) =$$
$$H^p(\wedge^*\mathfrak{g}^* \otimes H^q_{\mathcal{F}}) = H^p(\mathfrak{g}, H^q_{\mathcal{F}}).$$

A acción de $\mathfrak{g}$ sobre $H^*_{\mathcal{F}}$, inducida pola diferencial exterior, corresponde-se coa que define a derivada de Lie de campos de vectores actuado sobre as formas diferenciais. Vemos asi que o segundo termo da sucesión espectral é a cohomoloxia da álxebra $\mathfrak{g}$ con coeficientes en $H^*_{\mathcal{F}}$.

Cohomoloxia dunha foliación riemanniana con follas densas

Sexa agora $(M, \mathcal{F})$ unha foliación riemanniana con follas densas. Sexa $(P, \widetilde{\mathcal{F}})$ a $\mathfrak{g}$-foliación de Lie de codimensión q' tal que P é a adheréncia dunha folla da foliación levantada ao fibrado de $O(n,\mathbb{R})-$referéncias transversas. Sabemos que P fibra sobre M, isto é: existen unha proxección $\pi : P \longrightarrow M$ e unha acción pola dereita $R : P \times K \longrightarrow P$ con K un subgrupo compacto de $O(n, \mathbb{R})$ tal que (P, π, M, K) é un fibrado principal. $(P, \widetilde{\mathcal{F}})$ é unha $\mathfrak{g}$-foliación de Lie e, polo tanto, existe unha 1-forma con valores en $\mathfrak{g}$, $\Theta : T_xP \longrightarrow \mathfrak{g}$, tal que o núcleo de Θ é a distribución $T\widetilde{\mathcal{F}}$ tanxente às follas da foliación $\widetilde{\mathcal{F}}$. Se $\{\xi_1, \ldots, \xi_{q'}\}$ é unha base de $\mathfrak{g}$, entón Θ escreve-se

$$\Theta = \sum_{k=1}^{q'} \Theta^k \otimes \xi_k$$

con Θ^k, $k = 1, \ldots, q'$, 1-formas usuais en P. Sexan $X_1, \ldots, X_{q'}$ uns campos de vectores duais de $\Theta^1, \ldots, \Theta^k$ e $\mathcal{V}\widetilde{\mathcal{F}}$ o fibrado normal à foliación que xeneran. Temos entón a seguinte descomposición do espazo tanxente á variedade P :

$$TP = \mathcal{V}\widetilde{\mathcal{F}} \oplus T\widetilde{\mathcal{F}}.$$

Para facilitar os cálculos posteriores imos retomar a bigraduación da álxebra de formas diferenciais introducida no apartado anterior. Esta bigraduación pode-se considerar para calquera variedade foliada na que se dá unha descomposición do espazo tanxente à variedade na soma do espazo tanxente à foliación e un espazo normal a esta. Para cada $i \in \mathbb{N}$

$$\Lambda^i(P) \cong \sum_{r+s=i} \Lambda^{r,s}(P) \cong \sum_{r+s=i} \Gamma(\bigwedge^r (\mathcal{V}\widetilde{\mathcal{F}})^* \otimes \bigwedge^s (T\widetilde{\mathcal{F}})^*).$$

Esta bigraduación en $\Lambda(P)$ dá lugar a unha descomposición da diferencial exterior na soma de tres operadores homoxéneos $d_{\widetilde{\mathcal{F}}}, d_B, d^\perp$, de bigraos (0,1), (1,0), (2,-1) respeitivamente. Estes operadores satisfán as relacións:

$$\begin{cases} d^2_{\widetilde{\mathcal{F}}} = 0, \\ d_B d_{\widetilde{\mathcal{F}}} + d_{\widetilde{\mathcal{F}}} d_B = 0, \\ d_B d^\perp + d^\perp d_B = 0, \\ d^2_B + d_{\widetilde{\mathcal{F}}} d^\perp + d^\perp d_{\widetilde{\mathcal{F}}} = 0. \end{cases}$$

Tendo en conta a bigraduación introducida, a filtración do complexo de de Rham pode-se ver como

$$F^p\Lambda^i(P) = \sum_{r+s=i, r\geq p} \Lambda^{r,s}(P).$$

O subcomplexo das formas básicas identifica-se coas formas de tipo $(s,0)$ que son $d_{\widetilde{\mathcal{F}}}$−fechadas.

$$\Lambda^p_B(\widetilde{\mathcal{F}}) = \Lambda^{s,0}(P) \cap \mathrm{Ker}\, d_{\widetilde{\mathcal{F}}}.$$

As formas de tipo $(0,s)$ obteñen-se a partir da filtración como cociente de $\Lambda^s(P)$ polo ideal das formas de grao filtrante un. É dicer, estabelece-se o isomorfismo

$$\Lambda^{0,s}(P) \longrightarrow \Lambda^s(P)/F^1\Lambda^s(P)$$

$$\omega \longrightarrow \overline{\omega},$$

onde $\overline{\omega}$ denota a clase definida por ω. Os primeiros termos da sucesión espectral identifican-se con:

$${}_{dR}E_0^{r,s}(\widetilde{\mathcal{F}}) = \Lambda^{r,s}(P)$$

$${}_{dR}E_1^{r,s}(\widetilde{\mathcal{F}}) = H^q(\Lambda^{r,*}(P), d_{\widetilde{\mathcal{F}}})$$

$${}_{dR}E_2^{r,s}(\widetilde{\mathcal{F}}) = H^p({}_{dR}E_1^{*,s}, d_1) = H^pH^q(\Lambda^{*,*}(P)).$$

Unha forma $\omega \in \Lambda(P)$ di-se K-invariante se $(R_k)^*\omega = \omega, \forall k \in K$, onde $R_k : P \longrightarrow P$ está definida por $R_k(z) = R(z,k)$ con R a acción do fibrado $\pi : P \longrightarrow M$. Denotamos por $\Lambda(P)^K$ às formas K-invariantes. Unha forma $\omega \in \Lambda(P)$ di-se horizontal se $i_\xi\omega = 0$, $\forall \xi \in \mathfrak{k}$, onde $\mathfrak{k}$ é a álxebra de Lie asociada ao grupo K e i_ξ denota o produto interior por un campo de vectores fundamental. Denotamos por $\Lambda(P)_K$ as formas horizontais. A aplicación do fibrado $\pi : P \longrightarrow M$ induce un morfismo inxectivo entre as formas diferenciais $\pi^* : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(P)$. Verifica-se que a imaxen de π^* son as formas invariantes e horizontais de P. Asi, temos a identificación

$$\Lambda(M) \cong \pi^*\Lambda(M) \cong \Lambda(P)^K_K.$$

Ademais

$$F^p\Lambda^i(M) = F^p\Lambda^i(P)^K_K = \sum_{r+s=i, r\geq p} \Lambda^{r,s}(P)^K_K.$$

$\Lambda(P)^K_K$ caracteriza-se coas álxebras de lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ e as formas de tipo (o,s) como vemos no seguinte

Lema 1.1 *Verifica-se que:*

$$\Lambda^i(P)^K_K \cong \sum_{r+s=i} Hom_K(\bigwedge^r(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \Lambda^s(P)/F^1\Lambda^s(P)),$$

onde a acción de K en $\bigwedge^r(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ ven dada pola representación adxunta e en $\Lambda^s(P)/F^1\Lambda^s(P)$ é a imaxen pola aplicación inducida pola acción do fibrado R_K en $\Lambda^s(P)/F^1\Lambda^s(P)$.

□

A demostración deste lema fai-se na última sección xunto con outros resultados técnicos. Tendo en conta o resultado anterior podemos ver o ideal das formas de grao filtrante maior ou igual que p como

$$F^p\Lambda^i(M) = \sum_{i\geq p, i+s=i} Hom_K(\bigwedge^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \Lambda^{0,s}(P))$$

Define-se o complexo $C^*(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}})$, para $p \geq 0$, $C^p(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}})$ está formado polas aplicacións p-lineares alternadas de $\mathfrak{g}$ con valores en $H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}$, $\varphi : \bigwedge^p \mathfrak{g} \longrightarrow H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ que verifican:

a) $i_k\varphi = 0, \forall k \in \mathfrak{k}$ con $i_k\varphi(g_1, \ldots, g_{p-1}) = \varphi(k, g_1, \ldots, g_{p-1})$,

b) φ é K-invariante con K actuando pola representación adxunta en $\mathfrak{g}$ e pola aplicación inducida por R en $H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}$.

Asi podemos identificar:

$$C^p(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}) = Hom_K(\bigwedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}). \tag{1}$$

A diferencial deste complexo ven dada por: se $\varphi \in C^p(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}})$ entón

$$d\varphi(g_0, \ldots, g_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i g_i(\varphi(g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_p))$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\varphi([g_i, g_j], g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, \hat{g}_j, \ldots, g_p),$$

onde $g_i\varphi(g_0, \ldots, g_p)$ é a imaxen de $\varphi(g_0, \ldots, g_p)$ pola acción $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}})$ definida para $g \in \mathfrak{g}$ e $\bar{\alpha} \in H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ por

$$\Phi_g\bar{\alpha} = \overline{i_g d_B\alpha}.$$

Φ é unha representación. A demostración atopa-se na sección catro. O complexo (1) é isomorfo ao complexo $(\bigwedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \otimes H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}, \overline{d})$ onde a diferencial está definida como $\overline{d} = d \otimes id + \sum_k \xi_k^* \wedge \Phi_{\xi_k}$.

$C^*(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}})$ é isomorfo ao termo ${}_{dR}E_1^{*,s}(\mathcal{F})$ da sucesión espectral. En efecto:

$${}_{dR}E_1^{r,s}(\mathcal{F}) = H^q(\Lambda^{r,*}, d_{\mathcal{F}}) = H^q(\bigwedge^p (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \otimes \Lambda^{0,s}, 1 \otimes d_{\widetilde{\mathcal{F}}})$$

$$= \bigwedge^p (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \otimes H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}} = Hom_K(\bigwedge^p (\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}})$$

$$= C^p(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}).$$

Sexan $\bar{\alpha} \in_{dR} E_1^{r,s}(\mathcal{F})$, $\bar{\alpha} = \sum_I \Theta^I \wedge \overline{i_I\alpha}$ e $\varphi \in C^p(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}})$ é a sua imaxen polo isomorfismo anterior. $\bar{\alpha} = \sum_I \Theta^I \wedge \overline{i_I\alpha}$ identifica-se con $\sum_I \xi_I^* \otimes \overline{i_I\alpha} \in \bigwedge^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \otimes H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ e $\varphi(g_1, \ldots, g_p) = \sum_I \xi_I^*(g_1, \ldots, g_p)\overline{i_I\alpha}$. Entón:

$$
\begin{aligned}
&d_1[\alpha] = [d_B\alpha] = [d_B(\textstyle\sum_I \Theta^I \wedge i_I\alpha)] \\
&= \textstyle\sum_I d\Theta^I \wedge [i_I\alpha] + (-1)^p \sum_I \Theta^I \wedge [d_B i_I \alpha] \\
&= \textstyle\sum_I d\Theta^I \wedge [i_I\alpha] + (-1)^p \sum_I \Theta^I \wedge [\sum_k \Theta^k \wedge [i_{X_k} d_B i_I \alpha]] \\
&= \textstyle\sum_I d\Theta^I \wedge [i_I\alpha] + \sum_I \sum_k \Theta^k \wedge \Theta^I \wedge [i_{X_k} d_B i_I \alpha].
\end{aligned}
$$

Podemos identificar este último sumando mediante os isomorfismos establecidos antes con

$$\sum_I d\xi_I^* \otimes [i_I\alpha] + \sum_I \sum_k \xi_k^* \wedge \xi_I^* \otimes [i_{X_k} d_B i_I \alpha]$$

que é igual a $\overline{d}(\sum_I \xi_I^* \otimes \overline{i_I\alpha})$. Asi,

$$d_1[\alpha] \equiv \overline{d}(\sum_I \xi_I^* \otimes \overline{i_I\alpha}) \equiv d\varphi.$$

Como as diferenciais tamén se corresponden, os complexos $(C^*(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}), d)$ e $({}_{dR}E_1^{*,s}(\mathcal{F}), d_1)$ son isomorfos. Entón temos:

$${}_{dR}E_2^{p,q}(\mathcal{F}) = H^p({}_{dR}E_1^{*,s}(\mathcal{F}), d_1) = H^p(C^*(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}})) = H^p(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}).$$

Temos asi demostrado o seguinte

Teorema 1.2 *O termo ${}_{dR}E_2(\mathcal{F})$ da sucesión espectral é isomorfo à cohomoloxia relativa ao grupo K da álxebra de Lie $\mathfrak{g}$ con coeficientes en $H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}$.*

$${}_{dR}E_2^{r,s}(\mathcal{F}) = H^p(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}})$$

□

Sexa K_0 a compoñente conexa do elemento neutro do grupo de Lie K. Sabemos que P é un $K-$fibrado principal sobre M, polo que existe unha acción pola dereita R de K en P. Restrinxindo-a a K_0 obtemos unha nova acción

$$R_{|K_0} : P \times K_0 \longrightarrow P$$

Sexa $\widetilde{M_0}$ o espazo de órbitas desta acción. Verifica-se que $P \longrightarrow \widetilde{M_0}$ é un K_0-fibrado principal. O diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "K_0"'] \arrow[d, "K"] \\ \widetilde{M_0} \; = \; P/K_0 \arrow[r, "K/K_0"] & M \end{tikzcd}$$

Asi, podemos ver M como o cociente de $\widetilde{M_0}$ polo grupo discreto K/K_0. A foliación levantada $\mathcal{F}_0$ a $\widetilde{M_0}$ é unha foliación riemanniana con follas densas. Provaria-se do mesmo xeito que para a foliación $\mathcal{F}$ que a sucesión espectral de cohomoloxia asociada à foliación $\mathcal{F}_0$ ten como termo ${}_{dR}E_2$:

$${}_{dR}E_2^{r,s}(\mathcal{F}_0) = H^p(\mathfrak{g}, K_0, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}).$$

Como K_0 é conexo entón $H^q_{\mathcal{F}_0}$ é isomorfo a $H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ e ademais

$$H^p(\mathfrak{g}, K_0, H^q_{\mathcal{F}_0}) = H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, H^q_{\mathcal{F}_0}).$$

Asi, ${}_{dR}E_2^{r,s}(\mathcal{F}_0) = H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, H^q_{\mathcal{F}_0})$. Verifica-se tamén que

$$H^p(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}) = H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}})^{K/K_0}.$$

Entón podemos ver o segundo termo da sucesión espectral da foliación $\mathcal{F}$ en M como:

$${}_{dR}E_2^{r,s}(\mathcal{F}) = H^p(\mathfrak{g}, K, H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}) = H^p(\mathfrak{g}, K, H^q_{\mathcal{F}_0}) = H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, H^q_{\mathcal{F}_0})^{K/K_0}.$$

Demostracións dos resultados técnicos.

Nesta sección imos demostrar dous resultados empregados ao longo do traballo. Comenzamos coa demostración do Lema

Lema 1.3 *Verifica-se que:*

$$\Lambda^i(P)^K_K \cong \sum_{r+s=i} Hom_K(\bigwedge^r(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \Lambda^s(P)/F^1\Lambda^s(P)),$$

onde a acción de K en $\bigwedge^r(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ ven dada pola representación adxunta e en $\Lambda^s(P)/F^1\Lambda^s(P)$ é a imaxen pola aplicación inducida pola acción do fibrado R_K en $\Lambda^s(P)/F^1\Lambda^s(P)$.

Demostración. Sabemos que

$$\Lambda^{0,s}(P) \cong \Lambda^s(P)/F^1\Lambda(P)$$

asi,

$$\Lambda^i(P) \cong \sum_{r+s=i} \bigwedge^r \mathfrak{g}^* \otimes \Lambda^{0,s}(P) \cong \sum_{r+s=i} Hom(\bigwedge^r \mathfrak{g}, \Lambda^{0,s}(P))$$

Entón dada $\omega \in \Lambda^i(P)$, ω escreve-se como $\omega = \sum_{r+s=i} \omega^{r,s}$ con $\omega^{r,s} = \sum_I \Theta^I \wedge i_I\omega$, onde I é un multi-índice de lonxitude r, $|I| = r$. Asi, ω identifica-se con

$$\varphi = \sum_{r+s=i} \varphi^{r,s}, \text{ onde } \varphi^{r,s} \in Hom(\bigwedge^r \mathfrak{g}, \Lambda^{0,s}(P))$$

está definido por:

$$\varphi^{r,s}(g_1, \dots, g_r) = \sum_I \xi_I^*(g_1, \dots, g_r) i_I\omega$$

sendo ξ_I^* o dual de ξ_I. Ten-se

$$\omega \in \Lambda(P)^K \iff \varphi^{r,s} \in Hom_K(\bigwedge^r \mathfrak{g}, \Lambda^{0,s}(P)).$$

Vexamos isto:

$$\omega \in \Lambda(P)^K \iff (R_k)^*\omega = \omega, \qquad \forall k \in K.$$

Se $g_1, \dots, g_r \in \mathfrak{g}$ e $Y_{1_p}, \dots, Y_{s_p} \in T_pP$ con $k \in K$, entón:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{r,s}((g_1, \dots, g_r)k)(p)(Y_{1p}, \dots, Y_{sp}) \\
&= \varphi^{r,s}(Ad_k g_1, \dots, Ad_k g_r)(p)(Y_{1p}, \dots, Y_{sp}) \\
&= \textstyle\sum_I \xi_I^*(Ad_k g_1, \dots, Ad_k g_r) i_I\omega(p)(Y_{1p}, \dots, Y_{sp}) \\
&= \textstyle\sum_I \Theta^I(p)((R_{k^{-1}})_{*pk} g_1, \dots, (R_{k^{-1}})_{*pk} g_r) i_I\omega(p)(Y_{1p}, \dots, Y_{sp}) \\
&= \omega^{r,s}(p)((R_{k^{-1}})_{*pk} g_1, \dots, (R_{k^{-1}})_{*pk} g_r, Y_{1p}, \dots, Y_{sp}) \\
&= \omega^{r,s}(pk)((R_k)_{*p}(R_{k^{-1}})_{*pk} g_1, \dots, (R_k)_{*p}(R_{k^{-1}})_{*pk} g_r, \\
&\qquad\qquad (R_k)_{*p} Y_{1p}, \dots, (R_k)_{*p} Y_{sp}) \\
&= \textstyle\sum_I \Theta^I(pk)(g_1, \dots, g_r) i_I\omega(pk)((R_k)_{*p} Y_{1p}, \dots, (R_k)_{*p} Y_{sp}) \\
&= \textstyle\sum_I \xi_I^*(g_1, \dots, g_r)(R_k)^*(p) i_I\omega(Y_{1p}, \dots, Y_{sp}) \\
&= (R_k)^*(\varphi^{r,s}(g_1, \dots, g_r))(p)(Y_{1p}, \dots, Y_{sp}) \\
&= (\varphi^{r,s}(g_1, \dots, g_r))k(p)(Y_{1p}, \dots, Y_{sp}).
\end{aligned}$$

Polo tanto,

$$\varphi^{r,s}((g_1,\ldots,g_r)k)=\varphi^{r,s}(g_1,\ldots,g_r)k,\ \text{ é dicer}, \varphi^{r,s}\in Hom_K(\bigwedge^r\mathfrak{g},\Lambda^{0,s}(P)).$$

Analogamente vemos que se $\varphi^{r,s}\in Hom_K(\bigwedge^r\mathfrak{g},\Lambda^{0,s}(P))$ entón

$$(R_K)^*\omega=\omega$$

xa que

$$\begin{aligned}
&\omega^{r,s}(pk)((R_k)_{*p}g_1,\ldots,(R_k)_{*p}g_r,(R_k)_{*p}Y_{1p},\ldots,(R_k)_{*p}Y_{sp})\\
&=(\varphi^{r,s}((R_k)_{*p}g_1,\ldots,(R_k)_{*p}g_r))k(p)(Y_{1p},\ldots,Y_{sp})\\
&=(\varphi^{r,s}((R_k)_{*p}g_1,\ldots,(R_k)_{*p}g_r)k)(p)(Y_{1p},\ldots,Y_{sp})\\
&=(\varphi^{r,s}(g_1,\ldots,g_r))(p)(Y_{1p},\ldots,Y_{sp})\\
&=\omega^{r,s}(p)(g_1,\ldots,g_r,Y_{1p},\ldots,Y_{sp})
\end{aligned}$$

Entón:

$$\begin{aligned}
(R_k)^*\omega=(R_k)^*(\sum_{r+s=n}\omega^{r,s})&=\sum_{r,s}(R_k)^*\omega^{r,s}\\
&=\sum_{r,s}\omega^{r,s}=\omega.
\end{aligned}$$

Temos que ver agora que se $\omega\in\Lambda^n(P)^K_K$ entón

$$\varphi^{r,s}\in Hom_K(\bigwedge^r(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}),\Lambda^{0,s}(P)).$$

Primeiro observamos que $(R_{k^{-1}})_*\mathfrak{k}\subset\mathfrak{k}$ e, polo tanto, a acción está ben definida. Sabemos que ω se identifica con

$$\varphi=\sum_{r+s=i}\varphi^{r,s}\ \text{ onde }\ \varphi^{r,s}\in Hom_K(\bigwedge^r\mathfrak{g},\Lambda^{0,s}(P)).$$

Imos ver entón que $\varphi^{r,s}$ pasa ao cociente $\bigwedge^r(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$, isto é: se

$$(g_1,\ldots,g_r)\sim(g'_1,\ldots,g'_r)\ \text{ entón }\ \varphi^{r,s}(g_1,\ldots,g_r)=\varphi^{r,s}(g'_1,\ldots,g'_r),$$

é dicer, $\varphi^{r,s}(p(g_1,\ldots,g_r))=\varphi^{r,s}(g_1,\ldots,g_r)$ onde p é a proxección no cociente

$$p:\bigwedge^r\mathfrak{g}\longrightarrow\bigwedge^r(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}).$$

$$p(g_1,\dots,g_r)=p(g'_1,\dots,g'_r)\Longleftrightarrow(g'_1,\dots,g'_r)\text{ é da forma }(g_1+k_1,\dots,g_r+k_r)$$

con $k_i\in\mathfrak{k}, i=1,\dots,r$. Asi

$$\begin{aligned}
&\varphi^{r,s}(g'_1,\dots,g'_r)(p)(Y_{1p},\dots,Y_{sp})\\
&=\textstyle\sum_I \xi_I^*(g'_1,\dots,g'_r)i_I\omega(p)(Y_{1p},\dots,Y_{sp})\\
&=\omega^{r,s}(p)(g'_1,\dots,g'_r,Y_{1p},\dots,Y_{sp})\\
&=\omega^{r,s}(p)(g_1+k_1,\dots,g_r+k_r,Y_{1p},\dots,Y_{sp})\\
&=\omega^{r,s}(p)(g_1,\dots,g_r,Y_{1p},\dots,Y_{sp})\\
&=\varphi^{r,s}(p)(g_1,\dots,g_r)(p)(Y_{1p},\dots,Y_{sp}).
\end{aligned}$$

Verifica-se a igualdade

$$\omega^{r,s}(g_1+k_1,\dots,g_r+k_r,Y_{1p},\dots,Y_{sp})=\omega^{r,s}(g_1,\dots,g_r,Y_{1p},\dots,Y_{sp})$$

xa que os outros sumandos que aparecen valen cero pois ω é unha forma horizontal, polo tanto anula-se cando un dos campos de vectores sobre os que actua é fundamental. Analogamente ve-se que se $\varphi^{r,s}\in Hom_K(\bigwedge^r(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}),\Lambda^{0,s}(P))$ entón ω é horizontal e invariante. $\square$ A diferencial do complexo (1) viña dada por unha acción $\Phi:\mathfrak{g}\longrightarrow \mathrm{End}\,(H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}})$, definida para $g\in\mathfrak{g}$ e $\bar\alpha\in H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ por

$$\Phi_g\bar\alpha=\overline{i_g d_B\alpha}.$$

Imos ver agora que Φ é unha representación, isto é:

$$\Phi[\xi,\eta]=[\Phi_\xi,\Phi_\eta]=\Phi_\xi\Phi_\eta-\Phi_\eta\Phi_\xi.$$

Basta vé-lo para ξ,η elementos da base de $\mathfrak{g}$, é dicer:

$$\overline{i_{[\xi_l,\xi_s]}d_B\alpha}=\overline{i_{\xi_l}d_B i_{\xi_s}d_B\alpha}-\overline{i_{\xi_s}d_B i_{\xi_l}d_B\alpha}.$$

Chamamos $Y_{ij}=[X_i,X_j]-\sum_k C_{ij}^k X_k$ onde C_{ij}^k son as constantes de estructura de $\mathfrak{g}$. Para $\bar{\alpha} \in H^q_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ verifica-se:

$$
\begin{aligned}
d_B^2\alpha &= -d_{\widetilde{\mathcal{F}}} d^\perp \alpha \\
&= -d_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\textstyle\sum_{i<j} \Theta^i \wedge \Theta^j \wedge i_{X_j} i_{X_i} d^\perp \alpha) \\
&= -d_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\textstyle\sum_{i<j} \Theta^i \wedge \Theta^j \wedge i_{X_j} \mathcal{L}_{X_i} \alpha) \\
&= -d_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\textstyle\sum_{i<j} \Theta^i \wedge \Theta^j \wedge (-i_{[X_j, X_i]} \alpha)) \\
&= -d_{\widetilde{\mathcal{F}}}(\textstyle\sum_{i<j} \Theta^i \wedge \Theta^j \wedge i_{Y_{ij}} \alpha) \\
&= -\textstyle\sum_{i<j} \Theta^i \wedge \Theta^j \wedge d_{\widetilde{\mathcal{F}}}(i_{Y_{ij}} \alpha).
\end{aligned}
$$

Por outra parte ten-se:

$$
\begin{aligned}
d_B^2\alpha &= d_B(\textstyle\sum_k \Theta^k \wedge i_{X_k} d_B \alpha) \\
&= \textstyle\sum_k (d\Theta^k \wedge i_{X_k} d_B \alpha - \Theta^k \wedge d_B i_{X_k} d_B \alpha) \\
&= \textstyle\sum_k (\sum_{i<j} \Theta^i \wedge \Theta^j \wedge i_{X_k} d_B \alpha - \Theta^k \wedge (\sum_i \Theta^j \wedge i_{X_j} d_B i_{X_k} d_B \alpha)) \\
&= -\textstyle\sum_{i<j} \Theta^i \wedge \Theta^j \wedge (\sum_k C^k_{ij} i_{X_k} d_B \alpha) \\
&\quad -\textstyle\sum_k \Theta^k \wedge (\sum_{j<k} \Theta^j \wedge i_{X_j} d_B i_{X_k} d_B \alpha + \sum_{j>k} \Theta^j \wedge i_{X_j} d_B i_{X_k} d_B \alpha) \\
&= \textstyle\sum_{i<j} \Theta^i \wedge \Theta^j \wedge (-\Phi_{[\xi_i, \xi_j]} \alpha - i_{X_i} d_B i_{X_j} d_B \alpha - i_{X_j} d_B i_{X_i} d_B \alpha) \\
&= \textstyle\sum_{i<j} \Theta^i \wedge \Theta^j \wedge (-\Phi_{[\xi_i, \xi_j]} \alpha + [\Phi_{\xi_i}, \Phi_{\xi_j}] \alpha).
\end{aligned}
$$

Entón para $\xi_l, \xi_s \in \mathfrak{g}$

$$i_{\xi_l} d_B i_{\xi_s} d_B \alpha - i_{\xi_s} d_B i_{\xi_l} d_B \alpha$$

$$= (i_{\xi_l} i_{\xi_s}) d_B^2 \alpha - (i_{\xi_s} i_{\xi_l}) d_B^2 \alpha$$

$$= (i_{\xi_l} i_{\xi_s})(-\textstyle\sum_{i<j} \Theta^i \wedge \Theta^j \wedge d_{\widetilde{\mathcal{F}}}(i_{Y_{ij}} \alpha))$$

$$-(i_{\xi_s} i_{\xi_l})(-\textstyle\sum_{i<j} \Theta^i \wedge \Theta^j \wedge -d_{\widetilde{\mathcal{F}}}(i_{Y_{ij}} \alpha))$$

$$= -d_{\widetilde{\mathcal{F}}}(i_{Y_{ls}} \alpha) - d_{\widetilde{\mathcal{F}}}(i_{Y_{ls}} \alpha)$$

$$= -2 d_{\widetilde{\mathcal{F}}}(i_{Y_{ls}} \alpha).$$

Por outra parte:

$$i_{\xi_l} d_B i_{\xi_s} d_B \alpha - i_{\xi_s} d_B i_{\xi_l} d_B \alpha$$

$$= (-\Phi_{[\xi_l, \xi_s]} \alpha + [\Phi_{\xi_l}, \Phi_{\xi_s}] \alpha) - (\Phi_{[\xi_l, \xi_s]} \alpha - [\Phi_{\xi_l}, \Phi_{\xi_s}] \alpha)$$

$$= -2 \Phi_{[\xi_l, \xi_s]} \alpha + 2 [\Phi_{\xi_l}, \Phi_{\xi_s}] \alpha.$$

Asi

$$\overline{i_{[\xi_l, \xi_s]} d_B \alpha} = \overline{i_{\xi_l} d_B i_{\xi_s} d_B \alpha} - \overline{i_{\xi_s} d_B i_{\xi_l} d_B \alpha}.$$

COHOMOLOXIA DE ALEXANDER-SPANIER DE FOLIACIÓNS COMPACTAS HAUSDORFF

Memória realizada baixo a dirección do Prof. Xosé M. Masa Vázquez para optar ao título de Grao de Licenciatura pola Universidade de Santiago de Compostela.

Defendida esta Memória na Universidade de Santiago de Compostela ante o Tribunal formado polos Profesores

Dr. Dn. Enrique Macias Virgós	Presidente
Dr. Dn. Fernando Alcalde Cuesta	Vocal
Dra. Dna. Ana Jeremías López	Vocal-Secretária

o dia 16 de xuño de 2000, obtivo a máxima calificación de ***Sobresaliente***.

Sexa $(M, \mathcal{F})$ unha variedade foliada. Para a foliación $\mathcal{F}$ definen-se as cohomoloxias e as sucesións espectrais de de Rham e Alexander-Spanier. Estas sucesións converxen à cohomoloxia de M con coeficientes no feixe constante $\mathbb{R}$. O obxecto deste capítulo é demostrar que, para unha foliación compacta Hausdorff, estas duas sucesións son isomorfas a partir do segundo termo. Construiremos ademais un isomorfismo explícito entre estes dous espazos.

Cohomoloxia de Alexander-Spanier

Sexa M un espazo topolóxico. Para i maior ou igual que cero sexa $C^i(M)$ o conxunto de aplicacións $\varphi : M^{i+1} \longrightarrow \mathbb{R}$. $C^i(M)$ ten estructura de espazo vectorial coa soma e produto por escalares definidos ponto a ponto, é dicer:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x_0, \ldots, x_i) = \varphi_1(x_0, \ldots, x_i) + \varphi_2(x_0, \ldots, x_i),$$

$$(\lambda \cdot \varphi)(x_0, \ldots, x_i) = \lambda \cdot \varphi(x_0, \ldots, x_i),$$

con $\varphi_1, \varphi_2, \varphi \in C^i(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O morfismo bordo $\delta : C^i(M) \longrightarrow C^{i+1}(M)$ define-se do seguinte xeito, para $\varphi \in C^i(M)$

$$\delta\varphi(x_0, \ldots, x_{i+1}) = \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \varphi(x_0, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_{i+1}),$$

onde o símbolo $\widehat{x_k}$ indica que o elemento x_k non aparece na anterior expresión. Como $\delta^2 = 0, \{C^*(M), \delta\}$ constitue un complexo de cocadeas sobre $\mathbb{R}$. O complexo anterior aumenta-se co morfismo $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow C^0(M)$ dado, para $\lambda \in \mathbb{R}$, pola aplicación constante $\eta(\lambda)(x) = \lambda$, $\forall x \in M$. Este complexo non dá nengunha información do espazo topolóxico M, pois a sua cohomoloxia é trivial. Para ver isto fixamos un ponto $\overline{x} \in M$ e definimos a homotopia de cadeas $D : C^i(M) \longrightarrow C^{i-1}(M)$,

$$D\varphi(x_0, \ldots, x_i) = \varphi(\overline{x}, x_0, \ldots, x_i),$$

con $i \geq 0$ e $x_k \in M, k = 0, \ldots, i$. Sexa agora $\tau : C^*(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tau(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{se grao de } \varphi > 0, \\ \varphi(\overline{x}), & \text{se grao de } \varphi = 0. \end{cases}$$

Verifica-se que $\tau \circ \eta = I_{\mathbb{R}}$, onde $I_{\mathbb{R}}$ denota a aplicación identidade, e D é unha equivaléncia de homotopia entre a identidade de $C^*(M)$ e $\eta \circ \tau$. Obtemos asi que a cohomoloxia é trivial. A definición do complexo anterior é formal e non fai uso da estructura topolóxica. A topoloxia de M vai-se empregar para definir un subcomplexo do anterior. Asi, un elemento $\varphi \in C^i(M)$ di-se que é *localmente cero* se existe unha cobertura aberta de M, que denotaremos por $\mathcal{U}$, tal que φ é nula en cada $(i+1)-$upla de M que estexa nalgun elemento de $\mathcal{U}$. Se definimos $\mathcal{U}^{i+1} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^{i+1}$, entón φ é nula en $\mathcal{U}^{i+1}$. Chamamos às aplicacións que cumpren esta condición elementos localmente cero e denotamos $C_0^i(M)$ o subespazo vectorial que forman. Verifica-se ademais que $\delta(C_0^i(M)) \subset C_0^{i+1}(M)$, xa que se

φ é nula en $\mathcal{U}^{i+1}$ entón $\delta\varphi$ é nula en $\mathcal{U}^{i+2}$. Polo tanto, $\{C_0^*(M), \delta\}$ constitue un subcomplexo de $C^*(M)$. O complexo cociente, $\overline{C}^*(M) = C^*(M)/C_0^*(M)$, co morfismo bordo inducido, é o *complexo de Alexander-Spanier* do espazo topolóxico M. A aplicación composición

$$\eta : \mathbb{R} \longrightarrow C^*(M) \longrightarrow \overline{C}^*(M)$$

é un morfismo de aumentación para $\overline{C}^*(M)$. A cohomoloxia de $\{\overline{C}^*(M), \delta\}$ é a *cohomoloxia de Alexander-Spanier* de M, denotamo-la ${}_{AS}H(M)$. Verifica-se que $H^{i+1}(C_0^*(M)) \cong H^i(\overline{C}^*(M))$, para todo $i \geq 1$, xa que a sucesión exacta curta

$$0 \longrightarrow C_0^*(M) \longrightarrow C^*(M) \longrightarrow \overline{C}^*(M) \longrightarrow 0,$$

induce unha sucesión exacta longa en cohomoloxia

$$\cdots \longrightarrow H^i(C_0^*) \longrightarrow H^i(C^*) \longrightarrow H^i(\overline{C}^*) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{i+1}(C_0^*) \longrightarrow H^{i+1}(C^*) \longrightarrow H^{i+1}(\overline{C}^*) \longrightarrow \cdots$$

Como $H^i(C^*(M)) = 0$, para todo $i > 0$, temos que $H^{i+1}(C_0^*(M))$ e $H^i(\overline{C}^*(M))$ son isomorfos. Se nas definicións anteriores tomamos aplicacións continuas entón obtemos a *cohomoloxia de Alexander-Spanier contínua.* Se M é unha variedade diferenciável podemos definir a *cohomoloxia de Alexander-Spanier diferenciável* tomando cocadeas diferenciáveis. Supoñamos agora que M é un espazo topolóxico paracompacto. Imos definir en M un feixe diferencial que vai constituir unha resolución fina do feixe constante $\mathbb{R}_M$ de tallo $\mathbb{R}$ en M. Para isto introduciremos primeiro uns prefeixes que denotaremos AS^*. Para $U \subset M$ aberto e $i \geq 0$, veñen dados por

$$AS^i(U) = C^i(U),$$

é dicer, $AS^i(U)$ é o espazo vectorial de aplicacións $\varphi : U^{i+1} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se U, V son abertos de M con $V \subset U$, o morfismo restriccion $\rho_V^U : AS^i(U) \longrightarrow AS^i(V)$ está definido por $\rho_V^U(\varphi) = \varphi_{|V^{i+1}}$. Estes prefeixes non constituen feixes xa que non verifican a condición de extensión única. Isto é: dado $U \subset M$ con $U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ sendo U_α abertos de M, sexan φ e $\varphi' \in AS^i(U)$ verificando $\rho_{U_\alpha}^U(\varphi) = \rho_{U_\alpha}^U(\varphi')$. Non ten porqué suceder que $\varphi = \varphi'$ xa que $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha^{i+1} \subsetneq U^{i+1}$. Chamamos AS_M^* aos feixes asociados aos prefeixes AS^*, é dicer, aos feixes de xermes na diagonal de aplicacións $\varphi : M^{i+1} \longrightarrow \mathbb{R}$. Para ver que AS_M^* é un feixe diferencial imos definir morfismos entre os prefeixes AS^i e AS^{i+1} que van inducir as aplicacións diferenciais $\delta : AS_M^i \longrightarrow AS_M^{i+1}$. Para cada aberto $U \subset M$,define-se $\delta(U) : AS^i(U) \longrightarrow AS^{i+1}(U)$ como o morfismo bordo $\delta : C^i(U) \longrightarrow C^{i+1}(U)$. Verifica-se que $\delta(V) \circ \rho_U^V = \rho_U^V \circ \delta(U)$, polo que temos definidas aplicacións de prefeixes $\delta : AS^i \longrightarrow AS^{i+1}$. Ademais ten-se $\delta^2 = 0$. Estas aplicacións inducen morfismos entre os feixes $AS_M^i \longrightarrow AS_M^{i+1}$, que seguiremos denotando δ. Obviamente seguen verificando $\delta^2 = 0$. Temos definido entón o feixe diferencial $\{AS_M^*, \delta\}$. Os morfismos aumentación $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow C^0(U)$

sendo $U \subset M$ aberto inducen unha aplicación de feixes $\mathbb{R}_M \longrightarrow AS_M^0$. Temos asi a sucesión de feixes

$$AS_M^0 \longrightarrow AS_M^1 \longrightarrow AS_M^2 \longrightarrow \cdots$$

Esta sucesión é unha resolución xa que a sucesión

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R}_M)_x \longrightarrow (AS_M^0)_x \longrightarrow (AS_M^1)_x \longrightarrow (AS_M^2)_x \longrightarrow \cdots$$

é exacta $\forall x \in M$, pois

- η é obviamente inxectiva.
- $\ker \delta = \operatorname{Im} \eta$ $\varphi \in \ker \delta \Longrightarrow \delta\varphi = 0 \Longleftrightarrow (\delta\varphi)(x_0, x_1) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x_1) - \varphi(x_0) = 0, \forall x_0, x_1 \in M \Longrightarrow \varphi$ é constante. $\varphi \in \operatorname{Im} \eta \Longrightarrow \varphi$ é constante $\Longrightarrow \delta\varphi = 0$.
- $\ker \delta = \operatorname{Im} \delta$ Como $\delta^2 = 0$, $\operatorname{Im} \delta \subset \ker \delta$. Se $\varphi \in \ker \delta$, entón $\varphi = \delta\varphi'$ con $\varphi'(x_0, \ldots, x_{i-1}) = \varphi(x, x_0, \ldots, x_{i-1})$ con $x \in M$ o ponto onde consideramos os tallos.

Ademais, ao seren finos os feixes AS_M^*, a cohomoloxia $H^*(M, \mathbb{R}_M)$ pode-se definir en función deles, é dicer,

$$H^*(M, \mathbb{R}_M) = H^*(\Gamma(M, AS_M^*)),$$

onde $\Gamma(M, AS_M^*)$ denota as seccións globais. Para provar que AS_M^* son finos, ou sexa, que dada unha cobertura aberta e localmente finita $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de M, AS_M^* admite unha partición da identidade subordinada, consideramos $\{f_\alpha\}$ unha partición da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$ e definimos as aplicacións entre os prefeixes:

$$\Phi_\alpha : AS^*(U) \longrightarrow AS^*(U)$$
$$\Phi_\alpha(\varphi)(x_0, \ldots, x_i) = f_\alpha(x_0)\varphi(x_0, \ldots, x_i),$$

$\varphi \in AS^*(U)$, $x_0, \ldots, x_i \in U$. Estas aplicacións inducen morfismos de feixes $\widetilde{\Phi}_\alpha : AS_M^* \longrightarrow AS_M^*$. Ademais como $\{f_\alpha\}$ é unha partición da unidade verifica-se que

$$\operatorname{sop}(\widetilde{\Phi}_\alpha) = \overline{\{x \in M / \widetilde{\Phi}_\alpha|_{(AS_M)_x}\}} \subset U_\alpha$$

e $\sum_{\alpha\in\Lambda}(\widetilde{\Phi}_\alpha) = Id$. Obtemos asi a partición da identidade buscada.

Temos definida a cohomoloxia do espazo topolóxico M con coeficientes no feixe $\mathbb{R}_M$ en función da resolución de feixes de Alexander-Spanier. Definimos tamén ao comezo a cohomoloxia de Alexander-Spanier do espazo topolóxico M, ${}_{AS}H(M)$. Empregaremos a seguinte proposición ([18, Prop. 5.27]) para ver que os espazos vectoriais $H^q(M, \mathbb{R}_M)$ e ${}_{AS}H^q(M)$ son isomorfos para todo $q \geq 0$.

Proposición 2.1 *Sexa $\{S(U), \rho_V^U\}$ un prefeixe nun espazo topolóxico M satisfacendo:*

$$U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \textit{ aberto en } M \textit{ e } f_\alpha \in S(U_\alpha) \textit{ para cada } \alpha \in \Lambda \textit{ tal que } \rho^{U_\alpha}_{U_\alpha\cap U_\beta}(f_\alpha) = \rho^{U_\beta}_{U_\alpha\cap U_\beta}(f_\beta),\ \forall \alpha, \beta, \textit{ entón existe } f \in S(U) \textit{ tal que } \rho^U_{U_\alpha}(f) = f_\alpha, \textit{ para cada } \alpha \in \Lambda. \tag{1}$$

Sexa $S(M)_0 = \{s \in S(M)/\rho_x^M(s) = 0, \forall x \in M\}$ *onde* ρ_x^M *denota o morfismo que asigna a cada elemento de* $S(M)_0$ *o seu xerme no tallo* $\mathcal{S}_x, x \in M$ *do feixe* $\mathcal{S}$ *asociado a S. Entón a sucesión:*

$$0 \longrightarrow S(M)_0 \longrightarrow S(M) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{S}) \longrightarrow 0$$

é exacta.

O prefeixe AS^i verifica a condición (1) xa que dado $U = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ aberto de M e $\varphi_\alpha \in AS^i(U_\alpha)$ tal que $\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha\cap U_\beta}(\varphi_\alpha) = \rho^{U_\beta}_{U_\alpha\cap U_\beta}(\varphi_\beta)$ define-se $\varphi : U^{i+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x_0,\dots,x_i) = \begin{cases} \varphi_\alpha(x_0,\dots,x_i), & \exists \alpha \in \Lambda, (x_0,\dots,x_i) \in U_\alpha \\ 0, & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Ademais:

$$\begin{aligned} (AS^i(M))_0 &= \{\varphi \in AS^i(M)/\rho_x^M(\varphi) = 0, \forall x \in M\} \\ &= \{\varphi \in AS^i(M)/ \text{ o xerme } \varphi_x \text{ de } \varphi \text{ é cero }, \forall x \in M\} \\ &= \{\varphi \in AS^i(M)/ \ \varphi \text{ é localmente cero}\} = C^i_0(M). \end{aligned}$$

Entón

$$\Gamma(M, AS^i_M) \cong AS^i(M)/C^i_0(M) \cong C^i(M)/C^i_0(M).$$

Asi

$$H^*(M,\mathbb{R}) = H^*(\Gamma(M, AS^i_M)) \cong H^*(C^i(M)/C^i_0(M)) =$$
$$H^*(\overline{C}^i(M)) = {}_{AS}H^*(M).$$

O resultado anterior tamén é certo se consideramos cadeas contínuas ou diferenciáveis. A demostración anterior tamén é válida para estes casos.

Cohomoloxia de Alexander-Spanier dunha foliación compacta Hausdorff

Dada unha variedade diferenciável M, cunha foliación $\mathcal{F}$, definen-se as sucesións espectrais de de Rham e Alexander-Spanier da foliación que converxen à cohomoloxia de M con valores en $\mathbb{R}_M$, feixe constante de tallo $\mathbb{R}$.([11], Preprint.) Se a foliación é compacta Hausdorff, é dicer, se ven dada por un fibrado de Seifert $\pi : M \longrightarrow B$, veremos que os segundos termos destas sucesións son isomorfos e descreveremos un isomorfismo entre eles. Sexa B un espazo topolóxico conexo, Hausdorff e paracompacto. Diremos que B é unha *variedade de Satake* ou unha V*-variedade* de dimensión n se verifica:

a) Cada ponto $x \in B$ admite unha viciñanza aberta U que é homeomorfa a un cociente dun aberto $\widetilde{U}$ de $\mathbb{R}^n$ por un grupo finito de automorfismos C^∞ de U. Sexa $f : \widetilde{U}/G \longrightarrow U$ este isomorfismo. Os sistemas $\{\widetilde{U}, G, f\}$ chaman-se sistemas locais uniformizantes para a variedade de Satake e os abertos $U = \widetilde{U}/G$ abertos uniformizados.

b) Dados dous abertos uniformizados $\widetilde{U}/G \subset \widetilde{V}/H$ existe un difeomorfismo de $\widetilde{U}$ nun aberto de $\widetilde{V}$ que fai comutativo o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \longrightarrow & \widetilde{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{U}/G & \longrightarrow & \widetilde{V}/H \end{array}$$

c) Os abertos uniformizados forman unha base da topoloxia de B.

Se B é unha variedade diferenciável e (U, ψ) é unha carta local de B, entón tomando $\{\widetilde{U} = \psi(U), G = \{Id\}, \psi^{-1}\}$ temos un sistema de viciñanzas uniformizadas e, polo tanto, as variedades diferenciáveis son variedades de Satake. Dadas duas variedades de Satake B, B' define-se aplicación diferenciável de B a B' como un sistema de aplicacións $\{h_{\widetilde{U}}\}$ para cada aberto uniformizado $\widetilde{U}/G$ de B que verifica as seguintes condicións:

a) Existe unha correspondéncia $h_{\widetilde{U}} : \{\widetilde{U}, G, f\} \longrightarrow \{\widetilde{U'}, G', f'\}$ tal que $h_{\widetilde{U}}$ é unha aplicación C^∞ de $\widetilde{U}$ en $\widetilde{U'}$ que pasa ao cociente.

b) Se $\widetilde{U}/G$ e $\widetilde{V}/H$ son abertos uniformizados de B e $\widetilde{U'}/G'$ e $\widetilde{V'}/H'$ son os abertos correspondentes de B', dada unha inxección $\widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{V}$ existe outra $\widetilde{U'} \longrightarrow \widetilde{V'}$ tal que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \longrightarrow & \widetilde{V} \\ {\scriptstyle h_{\widetilde{U}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_{\widetilde{V}}} \\ \widetilde{U'} & \longrightarrow & \widetilde{V'} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{U}/G & \longrightarrow & \widetilde{V}/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{U'}/G' & \longrightarrow & \widetilde{V'}/H' \end{array}$$

son comutativos.

Dada unha aplicación C^∞, $\{h_{\widetilde{U}}\}$, entre duas variedades de Satake existe unha única aplicación contínua $h : B \longrightarrow B'$ tal que para cada aberto uniformizado $\widetilde{U}/G$ en B e o seu correspondente $\widetilde{U'}/G'$ en B' ten-se $f_2 \circ h_{\widetilde{U}} = h \circ f_1$ con $f_1 : \widetilde{U} \longrightarrow U$ e $f_2 : \widetilde{U'} \longrightarrow U'$ os pasos ao cociente. Consideramos agora un exemplo que vai caracterizar a estructura local dun fibrado de Seifert. Sexan $D \subset \mathbb{R}^n$ o disco aberto, $G \subset O(n)$ un subgrupo finito e L unha variedade compacta. Supoñamos que existe unha acción livre de G en L pola dereita. Consideremos a acción de G en $L \times D$ dada por $g \cdot (p, x) = (p \cdot g^{-1}, g \cdot x)$. Sexa $L \times_G D$ o cociente desta acción dotado coa topoloxia cociente. $L \times_G D$ ten estructura de variedade diferenciável. Tomamos en $L \times D$ a foliación con follas $L \times \{d\}, d \in D$. Esta foliación é invariante pola acción de G polo que induce unha foliación no cociente $L \times_G D$. As follas desta foliación son as fibras da aplicación $L \times_G D \longrightarrow D/G$. A variedade $L \times_G D$ xunto con esta foliación chama-se produto de Seifert. Unha foliación $\mathcal{F}$ nunha variedade M de codimensión n di-se *compacta*

Hausdorff se todas as follas son compactas e o espazo cociente $M/\mathcal{F}$ é Hausdorff. Se unha variedade está dotada cunha foliación compacta Hausdorff entón existe unha folla xenérica L coa propriedade de que existe un subconxunto denso e aberto de M onde as follas son todas difeomorfas a L. Ademais dada unha folla L_0 hai un subgrupo finito G de $O(n)$, unha acción de G en L pola dereita, unha viciñanza aberta V de L_0 e un difeomorfismo $L\times_G D \longrightarrow V$ que leva follas en follas, tomando en $L\times_G D$ a foliación do exemplo anterior. Verifica-se ademais que G é o subgrupo de holonomia de L_0. ([3, Teor. 4.1]). Ten-se tamén que a variedade cociente $B = M/\mathcal{F}$, dotada coa topoloxia cociente, ten estructura de variedade de Satake de dimensión n. Os sistemas uniformizados locais para esta variedade son da forma $\{D', G, \pi\circ\phi\circ S_p\}$ onde D' é o disco aberto de ráio $1/2$, G é un subgrupo finito de $O(n)$ e $S_p : D \longrightarrow L\times_G D$ ven dada por $S_p(x) = \overline{(p,x)}$ e ϕ é o difeomorfismo $\phi : L\times_G D \longrightarrow V$. Entón, dada unha variedade M cunha foliación compacta e Hausdorff, a proxección $\pi : M \longrightarrow B = M/\mathcal{F}$ é un fibrado de Seifert. Imos ver agora que se temos un feixe $\mathcal{A}$ en M podemos definir un feixe en B e unha sucesión espectral asociada que converxe à cohomoloxia de M con coeficientes en $\mathcal{A}$. Sexa entón $\mathcal{A}$ un feixe en M. O feixe de Leray en B asociado a π e $\mathcal{A}$ define-se como o feixe asociado ao prefeixe que nos abertos U de B está dado por

$$U \longrightarrow H^*(\pi^{-1}(U), \mathcal{A}/\pi^{-1}(U)).$$

Denotamo-lo por $\mathcal{H}(\pi,\mathcal{A})$. O feixe de Leray pode-se obter tamén como o feixe de cohomoloxia asociado a unha resolución frouxa (flasque) de $\mathcal{A}$. Se

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{R}^0 \longrightarrow \mathcal{R}^1 \longrightarrow \cdots$$

é unha resolución frouxa de $\mathcal{A}$ entón

$$\mathcal{H}(\pi,\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\pi(\mathcal{R}^*)),$$

onde $\pi(\mathcal{R}^*)$ denota a imaxen directa dos feixes $\mathcal{R}^*$. O feixe $\mathcal{H}(\pi(\mathcal{R}^*))$ está xerado polo prefeixe

$$U \longrightarrow H^*(\pi(\mathcal{R}^*)(U)) = H^*(\mathcal{R}^*(\pi^{-1}(U))) = H^*(\pi^{-1}(U), \mathcal{A}/\pi^{-1}(U))$$

con $U \subset B$ aberto. Para obter a cohomoloxia de M con coeficientes en $\mathcal{A}$ define-se a sucesión espectral de Leray cuxo segundo termo é a cohomoloxia da base con coeficientes no feixe de Leray. Converxe à cohomoloxia de M, isto é:

$${}_L E_2^{r,s} = H^r(B, \mathcal{H}^s(\pi,\mathcal{A})) \Longrightarrow H^{r+s}(M,\mathcal{A}).$$

Esta sucesión espectral é a primeira asociada ao feixe diferencial $\widetilde{\mathcal{L}^*}$ con $\widetilde{\mathcal{L}^0} = \pi_*(\mathcal{A})$ e $\widetilde{\mathcal{L}^i} = \pi_*(\mathcal{R}^i)$. A partir deste momento imos considerar $\mathcal{A} = \mathbb{R}_M$. Sexa

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_M \longrightarrow \mathcal{L}^0 \longrightarrow \mathcal{L}^1 \longrightarrow \cdots \tag{2}$$

unha resolución deste feixe. Existe entón unha sucesión espectral $\{E_r\}$ que converxe à cohomoloxia de M con coeficientes en $\mathbb{R}_M$.

$$E_2^{r,s} = H^r H^s(M, \mathcal{L}^*) \Longrightarrow H^{r+s}(M, \mathbb{R}_M).$$

Consideremos agora o feixe en B, $\mathbb{R}_B$, constante de tallo $\mathbb{R}$ e os feixes en B, $\mathcal{S}^i$ que verifican que $\mathcal{L}^i = \pi^*(\mathcal{S}^i)$ e ademais

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_B \longrightarrow \mathcal{S}^0 \longrightarrow \mathcal{S}^1 \longrightarrow \cdots$$

é resolución fina. Neste caso a sucesión espectral definida por (2) é isomorfa a partir do segundo termo à sucesión espectral de Leray asociada a π e $\mathbb{R}_B$. Para ver isto empregaremos a seguinte [1]

Proposición 2.2 *Sexa $f : X \longrightarrow Y$ unha aplicación fechada tal que cada $f^{-1}(y), y \in Y$ é compacta e relativamente Hausdorff en X. Sexan $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ feixes en X e Y respectivamente tal que $\mathcal{A}\widehat{*}\mathcal{B} = 0$ e $H^r(f^{-1}(y), \mathcal{A}) * \mathcal{B}_y = 0$, $\forall y \in Y$. Entón $\mathcal{H}^s(f, \mathcal{A}) \otimes \mathcal{B}$ e $\mathcal{H}^s(f, \mathcal{A} \otimes f^*(\mathcal{B}))$ son isomorfos.*

Vexamos que estamos nas condicións da proposición. Por ser $\mathbb{R}_M$ un feixe sen torsión entón $\mathbb{R}_M\widehat{*}\mathcal{S}^i = 0$. Ademais, como $H^*(\pi^{-1}(b), \mathbb{R}_M) =_{dR} H^*(\pi^{-1}(b))$ son espazos vectoriais $\forall b \in B$ entón $H^r(\pi^{-1}(b), \mathbb{R}_M) * \mathcal{S}^i_b = 0$. Por último $\pi : M \longrightarrow B$ é fechada xa que se $F \subset M$ é fechado entón $\pi^{-1}(\pi(F))$ é fechado. Se x non pertence a $\pi^{-1}(\pi(F))$ entón $L_x \cap F = \emptyset$, onde L_x é a folla que pasa por x. Existe unha viciñanza U de L_x, tal que U e $Fr(U)$ son compactas e $U \cap F = \emptyset$. Por ser $Fr(U)$ un compacto e B Hausdorff $\pi(Fr(U))$ é fechado. Sexa $W = U - \pi^{-1}(\pi(Fr(U)))$. W é aberto, $L_x \subset W$ e $W \cap F = \emptyset$ pois $U \cap F = \emptyset$. Ademais $W \subset \pi^{-1}(\pi(U)) - \pi^{-1}(\pi(Fr(U)))$. Se $y \in \pi^{-1}(\pi(U)) - \pi^{-1}(\pi(Fr(U)))$ entón L_y corta a U pero non a $Fr(U)$, por ser L_y conexa, $L_y \subset U$ e $y \in U$. Entón $\pi^{-1}(\pi(U)) - \pi^{-1}(\pi(Fr(U)))$ é saturado e como $W \cap F = \emptyset$ temos $W \cap \pi^{-1}(\pi(F)) = \emptyset$. Asi x non pertence a $\overline{\pi^{-1}(\pi(F))}$. É dicer $\pi^{-1}(\pi(F))$ é fechado. Verifican-se as condicións da proposición, polo que temos:

$$\mathcal{H}^q(\pi, \mathbb{R}_M) \otimes \mathcal{S}^i \cong \mathcal{H}^q(\pi, \pi^*(\mathcal{S}^i)) \cong \mathcal{H}^q(\pi, \mathcal{L}^i).$$

Ademais, $H^p(B, \mathcal{H}^q(\pi, \mathcal{L}^i)) = 0, \forall p > 0$, xa que ao ser $\mathcal{S}^i$ finos tamén o son os feixes $\mathcal{H}^s(\pi, \mathbb{R}_M) \otimes \mathcal{S}^i$. O único termo non trivial é $H^0(B, \mathcal{H}^q(\pi, \mathbb{R}_M) \otimes \mathcal{S}^i) = \Gamma(B, \mathcal{H}^q(\pi, \mathbb{R}_M) \otimes \mathcal{S}^i)$. Logo, aplicando estes resultados, temos

$$\Gamma(B, \mathcal{H}^q(\pi, \mathbb{R}_M) \otimes \mathcal{S}^i) = \Gamma(B, \mathcal{H}^q(\pi, \pi^*(\mathcal{S}^i)))$$

$$= \Gamma(B, \mathcal{H}^q(\pi, \pi^*(\mathcal{S}^i))) = H^r(M, \mathcal{L}^i).$$

Podemos concluir que $E_2^{r,s} \cong_L E_2^{r,s}$, pois ao ser

$$\mathcal{S}^0 \longrightarrow \mathcal{S}^1 \longrightarrow \cdots$$

unha resolución fina de $\mathbb{R}_B$ entón

$$\mathcal{H}^s(\pi, \mathbb{R}_M) \otimes \mathcal{S}^0 \longrightarrow \mathcal{H}^s(\pi, \mathbb{R}_M) \otimes \mathcal{S}^1 \longrightarrow \cdots$$

é resolución fina de $\mathcal{H}^s(\pi, \mathbb{R}_M) \otimes \mathbb{R}_B \cong \mathcal{H}^s(\pi, \mathbb{R}_M)$. Asi

$$E_2^{r,s} = H^r H^s(M, \mathcal{L}^*) \cong H^r(\Gamma(B, \mathcal{H}^s(\pi, \mathbb{R}_M) \otimes \mathcal{S}^*)$$

$$\cong H^r(B, \mathcal{H}^s(\pi, \mathbb{R}_M)) =_L E_2^{r,s}.$$

Imos particularizar o resultado anterior vendo que as resolucións de de Rham e de Alexander-Spanier asociadas à foliación compacta Hausdorff da variedade M poden-se obter como levantamentos de resolucións finas do feixe $\mathbb{R}_B$. Asi as sucesións espectrais de de Rham e Alexander-Spanier son isomorfas a partir do segundo termo. Sexa $\widetilde{U}/G$ un aberto uniformizado da variedade de Satake B. Define-se $\Lambda(\widetilde{U}/G)$ como o módulo de i-formas en $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ invariantes pola acción de G. Se $\widetilde{U}/G$ e $\widetilde{V}/H$ son dous abertos uniformizados tal que $\widetilde{U}/G \subset \widetilde{V}/H$, a inxección entre os abertos $\widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{V}$ que fai comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \longrightarrow & \widetilde{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{U}/G & \longrightarrow & \widetilde{V}/H \end{array}$$

induce un morfismo $\Lambda(\widetilde{V}/H) \longrightarrow \Lambda(\widetilde{U}/G)$. Determinan-se asi os morfismos restricción e xa que os abertos uniformizados forman unha base da topoloxia de B quedan definidos os prefeixes $\Lambda^i, i \geq 0$. Sexan Λ^i_B os feixes asociados, é dicer, os feixes de xermes de formas diferenciais sobre B. Estes feixes son finos. Dada unha cobertura aberta $\{U_i\}_{i\in I}$ de B existe unha partición da unidade subordinada [3, Teor. 2.1] $\{f_i\}_{i\in I}$. Os morfismos de feixes inducidos polos morfismos de prefeixes dados nos abertos por

$$\Lambda(\widetilde{U}/G) \longrightarrow \Lambda(\widetilde{U}/G)$$

$$\Lambda \longrightarrow (f_i)|U \cdot \Lambda$$

definen unha partición da identidade. Para cada aberto uniformizado $\widetilde{U}/G$ define-se a aplicación

$$d : \Lambda^i(\widetilde{U}/G) \longrightarrow \Lambda^{i+1}(\widetilde{U}/G)$$

como o paso ao cociente da aplicación diferencial exterior $d : \Lambda^i(\widetilde{U}) \longrightarrow \Lambda^{i+1}(\widetilde{U})$. Estas aplicacións comutan cos morfismos restricción polo que inducen aplicacións entre os feixes Λ^i_B e Λ^{i+1}_B. Temos asi a sucesión

$$0 \longrightarrow \Lambda^0_B \longrightarrow \Lambda^1_B \longrightarrow \cdots$$

que é resolución polo lema de Poincaré. Sexan $\Lambda^i_{\mathcal{F}}$ os feixes en M de formas básicas. Verifica-se que $\Lambda^i_{\mathcal{F}} = \pi^*(\Lambda^i_B)$. A aplicación diferenciável $\pi : M \longrightarrow B$ induce unha aplicación $\pi^* : \Lambda^*(B) \longrightarrow \Lambda^*(M)$ que determina o morfismo entre feixes

$$\pi^*(\Lambda^i_B) \longrightarrow \Lambda^i_{\mathcal{F}}.$$

Localmente $\pi : M \longrightarrow B$ é da forma $\pi : L\times_G D \longrightarrow D/G$ con L unha folla de M, D o disco aberto unidade de $\mathbb{R}^n$, $G \subset O(n)$ un grupo finito e $L\times_G D \cong V$ un aberto de M. Temos entón:

$$\Lambda^i_{\mathcal{F}}(L \times_G D) = H^0(L \times_G D, \Lambda^i_{\mathcal{F}}) = H^0(L \times D, \Lambda^i_{L\times D})^G =$$

$$(H^0(L)\otimes\Lambda^i(D))^G=(\mathbb{R}\otimes\Lambda^i(D))^G\cong(\Lambda^i(D))^G=\Lambda^i(D/G),$$

pois $\Lambda^i_{L\times D}=p^*\Lambda^i_{\mathcal{F}}$ con $p:L\times D\longrightarrow L\times_G D$. Estas igualdades determinan o morfismo nos abertos que é un isomorfismo nos tallos. Consideremos agora un aberto uniformizado $\widetilde{U}/G$ de B e definamos $AS^i(\widetilde{U}/G)$ como o módulo de funcións $\varphi:\widetilde{U}^{i+1}\longrightarrow\mathbb{R}$ diferenciáveis e alternadas que son invariantes pola acción de G definida por:

$$(g\cdot\varphi)(x_0,\dots,x_i)=\varphi(g^{-1}\cdot x_0,\dots,g^{-1}\cdot x_i).$$

Dado outro aberto uniformizado $\widetilde{U}/G\subset\widetilde{V}/H$ e $\lambda:\widetilde{U}\longrightarrow\widetilde{V}$ a inxección correspondente, sexa $\varphi\in AS^i(\widetilde{V}/H)$. Entón a aplicación $\varphi'=\varphi\circ\lambda^{i+1}\in AS^i(\widetilde{U}/G)$ xa que polo [3, Corol., páx. 255] existe un único morfismo $\eta:G\longrightarrow H$ tal que $\lambda\circ\sigma=\eta(\sigma)\circ\lambda,\forall\sigma\in G$. Asi temos definidos os morfismos restricción. Sexan AS^i_B os feixes de xermes de funcións de Alexander-Spanier. Estes feixes son finos xa que o feixe AS^0_B é brando pois se F é un conxunto fechado de B, a aplicación restricción $AS^0_B\longrightarrow AS^0_B(F)$ é sobrexectiva, onde $AS^0_B(F)=\Gamma(AS^0_B|F)$. Sexa $\varphi:F\longrightarrow\mathbb{R}$ diferenciável e $\{U_i\}_{i\in I}$ unha cobertura aberta de F. Sexan $\varphi_i:U_i\longrightarrow\mathbb{R}$ funcións que estenden localmente a φ. Sexa $\{f_i\}$ a partición da unidade subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i\in I}\bigcup\{B-F\}$ de B. A función $\overline{\varphi}=\sum_{i\in I}f_i\cdot\varphi_i$ é diferenciável e $\overline{\varphi}|F=\varphi$. AS^0_B é un feixe de aneis con unidade e AS^i_B son AS^0_B-módulos e, polo tanto, finos. Sexan $AS^i_{\mathcal{F}}$ os xermes de formas de Alexander-Spanier básicas, é dicer, os xermes de funcións φ diferenciáveis e alternadas tal que φ e $d\varphi$ son nulas se dous pontos están na mesma placa (ver [11]). Se V é un aberto difeomorfo a un produto de Seifert $V\cong L\times_G D$ entón:

$$AS^i_{\mathcal{F}}(V)=AS^i_{\mathcal{F}}(L\times_G D)=H^0(L\times_G D,AS^i_{\mathcal{F}})=H^0(L\times D,AS^i_{\mathcal{F}'})^G=$$

$$({}_{AS}H^0(L)\otimes AS^i(D))^G=(\mathbb{R}\otimes AS^i(D))^G\cong(AS^i(D))^G=AS^i(D/G)$$

onde $\mathcal{F}'=p^*\mathcal{F}^i$ con $p:L\times D\longrightarrow L\times_G D$ e $AS_{\mathcal{F}'}=AS_{\mathcal{F}}$. Estas igualdades inducen aplicacións

$$\pi^*AS^i_B\longrightarrow AS^i_{\mathcal{F}}$$

que nos tallos son isomorfismos xa que, dada $\varphi\in(\pi^*AS^i_B)_x$, é da forma $\varphi=\varphi'\circ\pi$ con $\varphi':B^{i+1}\longrightarrow\mathbb{R}$, alternada. Se dous pontos y_k,y_j están na mesma folla entón $\pi(y_k)=\pi(y_j)$ e asi:

$$\varphi(y_0,\dots,y_k,\dots,y_j,\dots,y_i)=\varphi'(\pi(y_0),\dots,\pi(y_k),\dots,\pi(y_j),\dots,\pi(y_i))=0.$$

Analogamente provaria-se que $d\varphi=0$ se dous pontos están na mesma folla. Se $\varphi\in AS^i_{\mathcal{F}}$ entón $\varphi=\varphi'\circ\pi$ onde $\varphi'(\pi(y_0),\dots,\pi(y_k),\dots,\pi(y_j),\dots,\pi(y_i)=\varphi(y_0,\dots,y_k,\dots,y_j,\dots,y_i)$ está ben definida e é alternada. Temos entón:

$${}_{AS}E_2(\mathcal{F})\cong_L E_2\cong_{dR}E_2(\mathcal{F}).$$

Cálculo dun isomorfismo entre as sucesións de de Rham e Alexander-Spanier dunha foliación compacta Hausdorff

A seguir descreveremos o isomorfismo entre as sucesións espectrais explicitamente e para isto construiremos duas aplicacións $\Phi : \Lambda^i_{\mathcal{F}} \longrightarrow AS^i_{\mathcal{F}}$ e $\Psi : AS^i_{\mathcal{F}} \longrightarrow AS^i_{\mathcal{F}}$ que verifiquen $\Psi \circ \Phi = Id$. Estas duas aplicacións van inducir o isomorfismo entre os segundos termos das sucesións espectrais. Os feixes $\Lambda^i_{\mathcal{F}}$ e $AS^i_{\mathcal{F}}$ son feixes levantados por π dos feixes en B de formas diferenciais Λ^i_B e de xermes de aplicacións diferenciáveis e alternadas AS^i_B respeitivamente. Imos definir aplicacións $\Phi' : \Lambda^i_B \longrightarrow AS^i_B$ e $\Psi' : AS^i_B \longrightarrow \Lambda^i_B$. As aplicacións levantadas $\Phi = \pi^*\Phi'$ e $\Psi = \pi^*\Psi'$ serán os morfismos buscados. Comezamos definindo $\Phi' : \Lambda^i_B \longrightarrow AS^i_B$ e para isto consideramos a base da topoloxia de B definida polos abertos uniformizados, $V = \widetilde{V}/G$. Supoñemos ademais que $f : \widetilde{V} \longrightarrow V$ é unha carta local para a variedade de Satake B con $\widetilde{V}$ un aberto convexo de $\mathbb{R}^n$ e G a restrición a $\widetilde{V}$ dun grupo de transformacións ortogonais. A existéncia destas cartas demostra-se en [13, Lema3.6, páx. 90]. Sexa entón $\omega \in \Lambda^i(\widetilde{V})$. Fixamos unha cobertura localmente finita $\mathcal{U}$ de abertos convexos de $\widetilde{V}$ e funcións $\chi_i : \widetilde{V}^{i+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifican:

a) χ_i son funcións diferenciáveis con soporte en $\mathcal{U}^{i+1}$ e identicamente igual a un nunha viciñanza da diagonal de $\widetilde{V}^{i+1}$,

b) $\chi_i(x_{\tau(0)}, \ldots, x_{\tau(i)}) = \chi_i(x_0, \ldots, x_i)$, para toda permutación τ,

c) $g\dot{\chi}_i(x_0, \ldots, x_i) = \chi_i(g^{-1} \cdot x_0, \ldots, g^{-1} \cdot x_i) = \chi_i(x_0, \ldots, x_i), \forall g \in G$.

Definimos $\Phi'(\omega)$ como a clase da aplicación:

$$\Phi'(\omega)(x_0, \ldots, x_i) = \chi_i(x_0, \ldots, x_i) \cdot \int_{\Delta[x_0, \ldots, x_i]} \omega$$

onde $\Delta[x_0, \ldots, x_i]$ é o simplex que $x_0, \ldots, x_i \in \widetilde{V}$ determinan([2].) A aplicación $\Phi'(\omega)$ é claramente alternada xa que ao facer unha permutación τ nos pontos $x_0, \ldots, x_i$, estamos permutando os vértices do simplex e, polo tanto, invertindo a sua orientación se a permutación é impar e mantendo-a se é par. Asi, como $\chi_i(x_{\tau(0)}, \ldots, x_{\tau(i)}) = \chi_i(x_0, \ldots, x_i)$, temos $\Phi'(\omega)(x_{\tau(0)}, \ldots, x_{\tau(i)}) = sig(\tau)\Phi'(\omega)(x_0, \ldots, x_i)$. Consideremos agora $\omega \in \Lambda^i(\widetilde{V})^G = \Lambda^i_B(V)$ e vexamos que a sua imaxen por Φ' é invariante por G. Ten-se que

$$g \cdot \Phi'(\omega)(x_0, \ldots, x_i) = \Phi'(\omega)(g^{-1} \cdot x_0, \ldots, g^{-1} \cdot x_i) =$$

$$\chi_i(g^{-1} \cdot x_0, \ldots, g^{-1} \cdot x_i) \cdot \int_{\Delta[(g^{-1} \cdot x_0, \ldots, g^{-1} \cdot x_i]} \omega =$$

$$\chi_i(x_0, \ldots, x_i) \cdot \int_{\Delta[(g^{-1} \cdot x_0, \ldots, g^{-1} \cdot x_i]} \omega.$$

Os elementos de G son transformacións ortogonais e, polo tanto, isometrias. Asi

$$\Delta[(g^{-1} \cdot x_0, \ldots, g^{-1} \cdot x_i)] = g^{-1}(\Delta[x_0, \ldots, x_i])$$

e

$$\int_{\Delta[(g^{-1}\cdot x_0,\ldots,g^{-1}\cdot x_i]}\omega=\int_{\Delta[x_0,\ldots,x_i]}(g^{-1})^*\omega=\int_{\Delta[x_0,\ldots,x_i]}\Lambda,$$

por ser ω invariante. Estas aplicacións asi definidas comutan cos morfismos restricción e, como os abertos uniformizados forman unha base da topoloxia, temos entón definido o morfismo de feixes $\Phi':\Lambda^i_B\longrightarrow AS^i_B$. Definamos agora $\Psi':AS^i_B\longrightarrow\Lambda^i_B$. Para $\varphi\in AS^i(\widetilde{V})$,

$$\Psi'(\varphi)_x(v^1,\ldots,v^i)$$

$$=\frac{1}{i!}\sum_{\tau\in S_i}sig(\tau)\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\ldots\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}\varphi(x,exp_x(\epsilon_1 v^{\tau(1)}),\ldots,exp_x(\epsilon_i v^{\tau(i)}))|_{\epsilon_k=0},$$

onde $v^k\in T_x(\widetilde{V}),k=1,\ldots,i,$ e $x\in(\widetilde{V})$ Se $\varphi\in AS^i_B(V)=AS^i(\widetilde{V})^G$ entón a forma $\Psi'(\varphi)$ é invariante xa que por ser os elementos de G isometrias temos:

$$g\circ exp_x(v)=exp_{g(x)}(g_*(v)),\ \ v\in T_x(\widetilde{V}),g\in G.$$

Entón:

$$g^*(\Psi'(\varphi))_x(v^1,\ldots,v^i))$$

$$=\frac{1}{i!}\sum_{\tau\in S_i}sig(\tau)\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\ldots\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}\varphi(g(x),exp_{g(x)}(\epsilon_1 v^{\tau(1)}),\ldots,exp_{g(x)}(\epsilon_i v^{\tau(i)}))|_{\epsilon_k=0}$$

$$=\frac{1}{i!}\sum_{\tau\in S_i}sig(\tau)\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\ldots\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}\varphi(g(x),g(exp_x(\epsilon_1 v^{\tau(1)})),\ldots,g(exp_x(\epsilon_i v^{\tau(i)})))|_{\epsilon_k=0}$$

$$=\frac{1}{i!}\sum_{\tau\in S_i}sig(\tau)\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}g^{-1}(\varphi(x,exp_x(\epsilon_1 v^{\tau(1)}),\ldots,exp_x(\epsilon_i v^{\tau(i)})))|_{\epsilon_k=0}$$

$$=\frac{1}{i!}\sum_{\tau\in S_i}sig(\tau)\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}\varphi(x,exp_x(\epsilon_1 v^{\tau(1)}),\ldots,exp_x(\epsilon_i v^{\tau(i)}))|_{\epsilon_k=0}$$

$$=\Psi'(\varphi))_x(v^1,\ldots,v^i).$$

É dicer, $\Psi'(\varphi)\in\Lambda^i_B(V)$. De novo, por ser base da topoloxia a formada polos abertos uniformizados e comutar cos morfismos restricción, temos definido o morfismo de feixes $\Psi':AS^i_B\longrightarrow\Lambda^i_B$. As aplicacións Φ' e Ψ' verifican $\Psi'\circ\Phi'=Id$. Sexan V un aberto uniformizado, $\omega\in\Lambda^i_B(V)$ e $v^1,\ldots,v^i\in T_x(V)$, entón:

$$\Psi'\circ\Phi'(\omega)_x(v^1,\ldots,v^i)$$

$$=\frac{1}{i!}\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}\Phi'(\omega)(x,exp_x(\epsilon_1 v^{\tau(1)}),\ldots,exp_x(\epsilon_i v^{\tau(i)}))|_{\epsilon_k=0},$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}\Phi'(\omega)(x, exp_x(\epsilon_1 v^{\tau(1)}),\ldots,exp_x(\epsilon_i v^{\tau(i)}))|_{\epsilon_k=0}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}\int_{\Delta[(x,exp_x(\epsilon_1 v^{\tau(1)}),\ldots,exp_x(\epsilon_i v^{\tau(i)}))]}\omega|_{\epsilon_k=0}.$$

Imos considerar agora no aberto $\widetilde{V}$ coordenadas normais $(u_1,\ldots,u_n)$. Poñemos $\omega = f(u)du_{j_1}\wedge\ldots\wedge du_{j_i}$ en $\widetilde{V}$. Os simplex

$$\Delta[(x, exp_x(\epsilon_1 v^{\tau(1)}),\ldots,exp_x(\epsilon_i v^{\tau(i)}))]$$

poden-se ver como aplicacións

$$\Delta:\Sigma^i\longrightarrow\widetilde{V}$$

definidas para $(t_0,\ldots,t_i)\in\Sigma^i=\{(t_0,\ldots,t_i)\in[0,1]^{i+1}/\sum_{k=0}^i t_k = 1\}$, polo ponto $y\in\widetilde{V}$ onde a función $\sum_k t_k d^2(x_k,y)$ alcanza o mínimo. Temos logo

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}\int_{\Delta[(x,exp_x(\epsilon_1 v^{\tau(1)}),\ldots,exp_x(\epsilon_i v^{\tau(i)}))]}f(u)du_{j_1}\wedge\ldots\wedge du_{j_i}|_{\epsilon_k=0}=$$

$$\int_{t_1+\cdots+t_i\leq 1}\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}(f(u(t,\epsilon))\cdot\det(\frac{\partial u_{i_a}}{\partial t_b}(t,\epsilon)))|_{\epsilon_k=0}dt_1\wedge\ldots\wedge dt_i,$$

onde $u(t,\epsilon)=\Delta[(x,exp_x(\epsilon_1 v^{\tau(1)}),\ldots,exp_x(\epsilon_i v^{\tau(i)}))](t_0,\ldots,t_i)$. Ademais analogamente que en [2, Lema 1.5] ve-se que

$$u_i(t,\epsilon)=\sum_{a=1}^n t_a(\epsilon_a v_i^{\tau(a)}+O(\epsilon_a^2)),$$

e entón

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}\int_{\Delta[(x,exp_x(\epsilon_1 v^{\tau(1)}),\ldots,exp_x(\epsilon_i v^{\tau(i)}))]}f(u)du_{j_1}\wedge\ldots\wedge du_{j_i}|_{\epsilon_k=0}=$$

$$\int_{t_1+\ldots t_i\leq 1}f(x)det(v_{i_a}^{\tau(b)})dt_1\wedge\ldots\wedge dt_i=$$

$$\frac{1}{i!}f(x)det(du_{i_a}(v^{\tau(b)}))=\omega_x(v^{\tau(1)},\ldots,v^{\tau(i)}).$$

Polo que teríamos

$$\Psi'(\Phi'(\omega)_x)(v^1,\ldots,v^i)=\frac{1}{i!}\sum_{\tau\in S_i}sig(\tau)\omega_x(v^{\tau(1)},\ldots,v^{\tau(i)})=\omega_x(v^1,\ldots,v^i).$$

Isto é: $\Psi' \circ \Phi' = Id$. Sexan $\Phi = \pi^*\Phi'$ e $\Psi = \pi^*\Psi'$ as aplicacións levantadas a M de Φ' e Ψ'. Por ser π^* un funtor exacto temos:

$$\Psi \circ \Phi = \pi^*\Phi' \circ \pi^*\Psi' = \pi^*(\Psi' \circ \Phi') = \pi^*(Id) = Id.$$

Temos definidos logo os morfismos $\Phi : \Lambda^i_{\mathcal{F}} \longrightarrow AS^i_{\mathcal{F}}$ e $\Psi : AS^i_{\mathcal{F}} \longrightarrow AS^i_{\mathcal{F}}$ tal que $\Psi \circ \Phi = Id$. Estas aplicacións entre feixes inducen morfismos

$$\overline{\Phi} : H^*H^*(M, \Lambda^i_{\mathcal{F}}) \longrightarrow H^*H^*(M, AS^i_{\mathcal{F}})$$

e

$$\overline{\Psi} : H^*H^*(M, AS^i_{\mathcal{F}}) \longrightarrow H^*H^*(M, AS^i_{\mathcal{F}})H^*H^*(M, \Lambda^i_{\mathcal{F}}),$$

que seguen verificando $\overline{\Psi} \circ \overline{\Phi} = Id$. Como os termos ${}_{dR}E_2^{r,s} = H^rH^s(M, \Lambda^*_{\mathcal{F}})$ e ${}_{AS}E_2^{r,s} = H^rH^s(M, AS^*_{\mathcal{F}})$ son isomorfos e de dimensión finita, temos que $\overline{\Phi}$ é o isomorfimo buscado e $\overline{\Psi}$ o seu inverso.

Bibliografia

[1] Bredon, G. E. *Sheaf Theory,* Springer Verlag, 1997.

[2] Connes, A., Moscovici, H. Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups, *Topology* **29** (1990), 345 – 388.

[3] Girbau, J., Nicolau, M. Pseudo-differential operators on V-manifolds and folitations I; II *Collectanea Mathematica* **30** (1979), 247 – 265; **31** (1980), 63 – 95.

[4] Haefliger, A. *Differentiable cohomology,* Cours donné au C.I.M.E., 1976.

[5] Heitsch, J.L. *A cohomology for foliated manifolds,* Comment. Math. Helv. **50** (1975), 197 – 218.

[6] Macías, E. *Las cohomologías diferenciable, continua y discreta de una variedad foliada,* Publ. del Dpto. de Geometría y Topología de Santiago de Compostela, **60** 1983.

[7] Macías, E., Masa, X. *Cohomologías diferenciable, continua y discreta asociadas a una variedad foliada,* Actas de las IX Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas, Salamanca **II** (1983) 537 – 540.

[8] Masa, X. *Sucesión espectral de cohomología asociada a variedades foliadas. Aplicaciones,* Publ. Dpto. Geom. Top. **19** (1973).

[9] Masa, X. *Cohomology of Lie Foliations,* Differential Geometry, Research Notes in Math. vol. 131 (1985), Pitman Advanced Publishing Program, 211 – 214.

[10] Masa, X. *Duality and minimality in Riemannian Foliations,* Comment. Math. Helv. **67** (1992), 17 – 27.

[11] Masa, X. *Cohomoloxía de Alexander-Spanier dunha foliación,* Preprint.

[12] Mostow, M. A. *Continous cohomology of spaces with two topologies,* Memoirs of the AMS, vol. 7 **175** (1976).

[13] Molino, P. *Riemannian Foliations,* Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1988.

[14] Reinhart, B.L. *Harmonic integrals on almost product manifolds,* Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958), 243 – 275.

[15] Shikata, Y. *On a homology theory associated to foliations,* Nagoya Math. J. **38** (1970), 53 – 61.

[16] Spanier, E. *Algebraic Topology,* McGraw-Hill, New York, 1966.

[17] Vaisman, I. *Variétés riemanniannes feuillétées,* Czechosl. Math. J., **21** (1971), 46 – 75.

[18] Warner, F. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.,* Scott, Foresman & Co., Glenview, Illinois, 1971.

Índice alfabético