Manuel Fernández López

RESULTADOS DE DESCOMPOSICIÓN ASOCIADOS Á ECUACIÓN DE MÖBIUS

96

2002

Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

RESULTADOS DE DESCOMPOSICIÓN ASOCIADOS Á ECUACIÓN DE MÖBIUS

Manuel Fernández López

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección do profesor Eduardo García Río, para obter o grao de Doutor en Ciencias Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 84-89390-13-4

Dep. Leg.: C-168/02

Realizado o acto público da defensa e mantemento desta tese de doutoramento o día 18 de decembro de 2001, na Universidade de Santiago de Compostela, ante o tribunal formado por:

Presidente:

Prof. Dr. D. Manuel Barros Díaz
(Universidade de Granada)

Vocais:

Prof. Dr. D. José Luis Cabrerizo Jaraiz
(Universidade de Sevilla)

Prof. Dr. D. Eugenio Merino Gayoso
(Universidade da Coruña)

Prof. Dr. D. Demir N. Kupeli
(Universidade de Atilim, Ankara)

Secretario:

Prof. Dr. D. Agustín Bonome Dopico
(Universidade de Santiago de Compostela)

obtivo a máxima cualificación, SOBRESALIENTE CUM LAUDE.

Para Ana,

por tantas cousas.

Palabras de agradecemento

Que este traballo chegase a bo fin débese en grande medida á axuda e apoio prestado por varias persoas. Desexo aproveitar esta páxina para expresarlles a miña gratitude.

Quero comezar agradecéndolle ao Profesor Eduardo García Río, quen me iniciou no mundo da investigación codirixindo a miña tesiña de licenciatura e, agora, dirixindo tamén esta memoria, todo o tempo e esforzo empregados no seguimento, revisión e asesoramento do meu traballo, xunto coas importantísimas aportacións realizadas ao mesmo.

Tamén quero expresar o meu agradecemento ao Profesor Demir N. Kupeli polas valiosas aportacións feitas e a colaboración prestada na obtención dalgúns dos resultados recollidos nesta memoria.

Desexo agradecer ao Profesor Luís M. Hervella Torrón o apoio prestado e a confianza e ánimos que sempre me infunde.

Finalmente, quero expresar o meu agradecemento ao resto dos membros do Departamento de Xeometría e Topoloxía, en especial ao Profesor Agustín Bonome Dopico e á Profesora Elena Vázquez Abal, polo bo ambiente de traballo que atopei durante a miña época de bolseiro do dito departamento e durante o resto do tempo que pasei rematando esta memoria.

Abstract

In analysis, mostly the existence of a nontrivial solution to a differential equation on a certain domain is argued. But in geometry, one can also argue the existence of a manifold structure for a differential equation to possess a nontrivial solution. This may be considered as an analytic characterization (or representation) of a manifold structure by a differential equation if this manifold structure serves as a unique domain structure for this differential equation to possess a nontrivial solution in a certain class of manifolds. An example to the previous program is Obata's Theorem, which completely characterizes Euclidean spheres among compact Einstein manifolds by the existence of a solution of the differential equation $\Delta\phi = -nk\phi$, where ϕ is a real-valued function on the manifold M, $n = \dim M$ and k denotes the reduced scalar curvature.

By following the above program, the main goal of this work is to characterize Riemannian manifolds which are locally twisted products by the existence of a solution to the Möbius equation. In doing this, a detailed examination of warped and twisted product structures is needed. Also, different kinds of Möbius equations are studied. More precisely, this work is scheduled as follows.

In Chapter 1 we introduce the basic material and notation used in the sequel. Firstly, twisted and warped product are studied from two different points of view: on one hand, the extrinsic geometry of the leaves of the canonical foliations is considered. This allows a characterization of warped products inside twisted products in terms of the paralelizability in the normal bundle of the mean curvature of the umbilic foliation. On the other hand, the examination of the curvature of a twisted product manifold provides of a characterization of warped products in terms of their Ricci tensor. As a consequence, it follows that any Einstein twisted product manifold can be expressed as a suitable warped product. Also, the classical Möbius equation is introduced. Our motivation comes from the possibility of constructing new examples of pointwise Osserman four-manifolds by conformal deformations. Indeed, it is known that a four-dimensional manifold is pointwise Osserman if and only if it is Einstein and self-dual (or anti-self-dual). Therefore, the Osserman property will be preserved pointwise by any conformal transformation which leaves invariant the eigenspaces of the Ricci tensor. Such conformal transformations are precisely those given by the solutions of the Möbius equation. Since the solutions of the Möbius equation are not easy to determine, we consider the geometry behind such solutions, which decomposes the manifold locally as a warped product. Then, the Möbius equation can be transformed into a much simpler equation which is completely solved. Finally those four-dimensional pointwise Osserman manifolds which are invariant under some conformal deformation are determined.

Chapter 2 is devoted to the study of a generalization of the Möbius equation for spacetimes (i.e., time oriented Lorentzian manifolds). We show that if the time function of a synchronizable reference on a spacetime is a solution of the Möbius equation, then the spacetime has a singularity in the past and moreover, if the spacetime satisfies the Einstein equation for a stress-energy tensor which is a fluid, then it splits locally as a warped product. These two conditions are indeed characteristic of realistic cosmological models. Finally, under some additional conditions on the analytic structure of the spacetime, a characterization of Robertson-Walker spacetimes is obtained.

In Chapter 3 we consider the Schwarzschild solution, which is a spacetime with a structure of warped product with 2-dimensional fibers. This fact shows that a characterization similar to the previous one obtained for Robertson-Walker spacetimes is not possible. Hence, a generalization of the Möbius equation for submersions into the Euclidean plane is presented. The main result shows that the existence of solutions to that equation determines locally the structure of a $2 + 2$-warped product, provided that the spacetime obeys the Einstein equation for a radiation. The rest of this chapter is devoted to the study of the existence of static references.

Finally, Chapter 4 is devoted to the study of the Möbius equation in full generality, which contains the different kinds of Möbius equations considered in chapters 1, 2 and 3. Our main goal is to obtain a relation between the existence of solutions to the Möbius equation and the local structure of the manifold. This is carried out in Theorems 4.3.1 and 4.3.2 by showing that the projection into the first factor of a twisted product (composed with any immersion) is a solution of the Möbius equation and conversely, if a manifold M admits a solution of the Möbius equation, then it is locally a twisted product and the solution factorizes locally through a projection. Then, since warped products are a special case of twisted products, a similar characterization is obtained under some additional conditions on the solutions of the Möbius equation or on the geometry of the manifold. Finally, the product structure corresponds to a direct product if and only if the solution of the Möbius equation is affine. This motivates the investigation of sufficient conditions for a map satisfying the Möbius equation to be totally geodesic. Our approach is based on the use of Bochner tecniques and curvature estimates on the manifold.

Contidos

Introdución

Un problema clásico no eido da Análise Matemática é o estudio da existencia de solucións nun certo dominio para unha ecuación diferencial ou un sistema de ecuacións en derivadas parciais dados. Cando as ditas ecuacións se corresponden con situacións xeométricas relevantes é de esperar que a existencia de solucións das mesmas aporte información xeométrica acerca do dominio subxacente. Ao longo desta memoria centrarémonos no estudio deste tipo de problemas, analizando a información xeométrica que nos proporciona a existencia de solucións da *ecuación de Möbius,* principalmente en termos da posibilidade de descompor localmente a variedade.

O estudio da ecuación de Möbius xorde de forma natural do intento de construír novos exemplos de variedades que satisfagan a condición de Osserman en cada punto. En dimensión catro, a dita condición (establecida en termos da independencia dos autovalores dos operadores de Jacobi con respecto á dirección considerada) é equivalente a que a variedade sexa de Einstein e, ademais, autodual ou antiautodual. Posto que as propiedades de autodualidade e antiautodualidade son invariantes conformes, resulta natural o estudio das transformacións conformes que conservan a dita propiedade de Osserman. Notamos que, debido á anterior caracterización, tales transformacións serán aquelas que conserven a propiedade de Einstein. Diremos que un cambio conforme da métrica ($\tilde{g} = e^{2f} g$) nunha variedade semiriemanniana é unha *transformación de Möbius* se a función f satisfai o sistema de ecuacións en derivadas parciais

$$B_g(f) = H_f - df \otimes df - \frac{1}{n}(\Delta f - g(\nabla f, \nabla f))g = 0,$$

chamado *ecuación de Möbius.* Este tipo de transformacións conformes conservan a propiedade de ser puntualmente Osserman, como poñemos de manifesto no Teorema 1.5.2.

Debemos observar que o sistema de ecuacións $B_g(f) = 0$ está, en xeral, sobredeterminado e non posúe solucións non-constantes (ver [43] e [55]). Ademais, a dificultade intrínseca da súa manipulación suxire un estudio do mesmo a través da súa influencia xeométrica. Deste xeito, tendo en conta que a existencia de solucións implica unha descomposición local da variedade como un produto warped, é posible transformar o sistema nunha ecuación diferencial ordinaria en termos da función de deformación e, finalmente, resolver o mesmo.

Esta idea motivou o noso estudio de certos sistemas (que tamén denominamos como ecuación de Möbius) que, presentando un grande interese físico e xeométrico, permiten obter información local sobre a estrutura da variedade (como produto directo, warped ou twisted) a partir da existencia de solución dos mesmos.

Dun xeito máis preciso, detallamos a continuación os contidos desta memoria.

No Capítulo 1 presentamos algúns resultados xa coñecidos coa idea de fixar a notación para o resto do traballo. Introdúcese a curvatura dunha variedade semiriemanniana prestando especial atención ao comportamento dos operadores de Jacobi e á condición de Osserman puntual. Estudiamos a influencia na xeometría (i.e., na curvatura) da variedade inducida por unha transformación conforme da métrica presentando o concepto de transformación de Möbius. Dedicamos especial atención ao estudio das estruturas de produto directo, warped e twisted de variedades semiriemannianas, obtendo a expresión explícita da conexión de Levi Civita, dos tensores curvatura de Riemann e de Ricci e, finalmente, da curvatura escalar dos ditos espacios. Como aplicación destes resultados, obtemos unha caracterización daqueles produtos twisted que se poden expresar como un produto warped en termos da curvatura da variedade. Máis exactamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.3.1 [18] *Sexa $M_1 \times_\lambda M_2$ un produto twisted con $\dim M_2 > 1$. Entón, $Ric(X,V) = 0$ para todo par de campos de vectores $X \in \mathcal{L}(M_1)$ e $V \in \mathcal{L}(M_2)$ se e soamente se $M_1 \times_\lambda M_2$ pode ser expresado como un produto warped $M_1 \times_\mu M_2$ de (M_1, g_1) e $(M_2, \widetilde{g_2})$, sendo $\widetilde{g_2}$ unha métrica conformemente equivalente a g_2.*

Como consecuencia inmediata do anterior resultado obtemos que todo produto twisted de Einstein é necesariamente un produto warped. Obtemos ademais (véxase o Teorema 1.5.3) que, en dimensión catro, un produto twisted de Einstein é unha variedade de curvatura constante.

Rematamos o Capítulo 1 estudiando as variedades puntualmente Osserman nas que a dita propiedade é invariante por transformacións de Möbius, obtendo que ou ben a variedade ten curvatura seccional constante ou ben a transformación de Möbius conserva os operadores de Jacobi. Expresamos o dito anteriormente no seguinte resultado.

Teorema 1.5.4 *Sexa (M,g) unha variedade puntualmente Osserman e consideremos en M a métrica $\tilde{g} = e^{2f}g$, onde $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función non-constante satisfacendo a ecuación de Möbius. Entón, cada punto p dun conxunto aberto denso en M ten unha veciñanza U tal que:*

i) (M,g) *ten curvatura seccional constante en U, ou*

ii) os operadores de Jacobi de (M,g) e $(M,\tilde{g})$ coinciden en U.

No Capítulo 2 introducimos algúns conceptos empregados na teoría xeral da relatividade e que necesitaremos no desenvolvemento deste capítulo e do posterior.

Tamén describimos os modelos espacio-tempo de Robertson-Walker, que constitúen un punto de partida natural para a comprensión da cosmoloxía, dos que obteremos unha caracterización neste mesmo capítulo.

Posteriormente, estudiamos unha modificación da ecuación de Möbius, introducida no Capítulo 1, en xeometría de Lorentz. Como un primeiro resultado, obtemos que se unha función tempo dunha referencia sincronizable satisfai a dita ecuación, entón pódese deformar conformemente a métrica de Lorentz de tal forma que se manteñan invariantes os autoespacios do operador de Ricci no espacio transverso ao tempo. Por outra parte, a existencia de solucións da dita ecuación permite obter información xeométrica de especial relevancia sobre o espacio-tempo considerado, como pode ser a existencia de singularidades no pasado e, con hipóteses adicionais, no futuro. En efecto:

Teorema 2.3.3 [16] *Sexa* $f : M \to \mathbb{R}$ *unha función tempo dunha referencia sincronizable* $Z = -h\nabla f$ *no espacio-tempo* (M, g). *Supoñamos que* f *é solución da ecuación de Möbius* $\hat{B}_+^{\perp}(f) = 0$. *Entón* (M, g) *é xeodesicamente temporalmente incompleto no pasado.*

Ademais, se $Ric(Z, Z) \geq 0$ *e* $(\Delta f + g(\nabla f, \nabla f))(p) > 0$ *nalgún punto* $p \in M$ *entón* (M, g) *tamén é xeodesicamente temporalmente incompleto no futuro.*

Ademais, tamén probamos que a existencia dunha solución da ecuación de Möbius nun fluído permite descompor o espacio-tempo como un produto warped dun intervalo da recta real e un factor riemanniano, estrutura que posúen a maioría dos espacio-tempo realistas considerados na teoría xeral da relatividade.

Teorema 2.4.1 [16] *Sexa* $f : M \to \mathbb{R}$ *unha función tempo dunha referencia sincronizable* $Z = -h\nabla f$ *no espacio-tempo* n*-dimensional* (M, g), $(n \geq 3)$. *Supoñamos que* f *satisfai a ecuación de Möbius* $\hat{B}_+^{\perp}(f) = 0$ *e que* (M, g) *cumpre a ecuación de Einstein para un tensor tensión-enerxía* T *con fluxo o campo de vectores* Z.

Entón (M, g) *é temporalmente xeodesicamente incompleta no pasado e é localmente un produto warped* $((a, b) \times N, -dt^2 \oplus \lambda^2 g_N)$, *onde* t *é a coordenada usual en* (a, b).

Ademais, se $\dim M = n \geq 4$ *e* T *é un tensor tensión-enerxía asociado a un fluído perfecto con fluxo o campo de vectores* Z *entón o factor riemanniano* (N, g_N) *da anterior descomposición en produto warped é Einstein e as funcións densidade de enerxía e presión,* ρ *e* ϱ, *de* T *son constantes en cada folla de* $Z^{\perp}$.

Baixo condicións adicionais sobre a estrutura analítica global do espacio-tempo, e facendo uso dun resultado de Obata que dá unha condición suficiente para que unha variedade riemanniana sexa isométrica a unha esfera, obtemos unha caracterización dos modelos espacio-tempo de Robertson-Walker no Teorema 2.4.2.

Cando se consideran aplicacións con rango en variedades de dimensión maior que un, a ecuación de Möbius admite unha xeneralización en termos da segunda forma fundamental da aplicación. Esta ecuación, que será estudiada no caso xeral no Capítulo 4, é primeiramente considerada nun caso particular no Capítulo 3, cando o rango da aplicación é o plano euclidiano. A existencia de solucións da dita ecuación dá lugar a resultados de descomposición como produto warped de tipo $2+2$ do espacio-tempo, o que permite caracterizar os modelos gravitatorios das estrelas estáticas. Os ditos modelos son descritos pola solución de Schwarzschild das ecuacións de Einstein, que describimos ao comezo do capítulo. O primeiro resultado de descomposición do espacio-tempo que obtemos é o seguinte.

Teorema 3.3.1 [19] *Sexan* (M,g) *un espacio-tempo* 4*-dimensional e* $f=(f_1,f_2):(M,g)\to(\mathbb{R}^2,\sum_{i=1}^2 dx^i\otimes dx^i)$ *unha submersión con fibras riemannianas en* (M,g). *Supoñamos que* (M,g) *satisfai a ecuación de Einstein para un tensor tensión-enerxía da forma*

$$T=\rho\left(-g_{|_{(kerf_*)^\perp}}\oplus g_{|_{(kerf_*)}}\right),$$

e que f *satisfai a ecuación local de Möbius en* (M,g).

Entón (M,g) *é localmente un produto warped* $(M_1\times M_2, g_1\oplus\psi^2 g_2)$, *onde* (M_1,g_1) *é unha superficie de Lorentz e* (M_2,g_2) *unha superficie riemanniana de curvatura constante.*

Impoñendo condicións adicionais sobre a estrutura analítica global do espacio-tempo, e facendo novamente uso do resultado de Obata mencionado anteriormente, obtemos no Teorema 3.3.2 unha descomposición análoga á do resultado anterior, onde as fibras son isométricas á esfera euclidiana 2-dimensional.

Finalmente, dedicamos a sección §3,3,2 a estudiar a construción de referencias estáticas asociadas á descomposición do espacio-tempo previamente obtida. Obtemos así, como consecuencia dos resultados obtidos neste capítulo, unha caracterización das métricas de Schwarzschild.

O Capítulo 4 da presente memoria céntrase no estudio do caso máis xeral da ecuación de Möbius para aplicacións entre variedades. Esta ecuación exprésase en termos da segunda forma fundamental da aplicación. Polo tanto, dedicamos a primeira sección do capítulo a dar as definicións necesarias para a súa lectura e ao estudio da segunda forma fundamental dunha aplicación e dalgunha das súas propiedades. Na sección §4,2 definimos a ecuación de Möbius e un caso particular, que denominamos ecuación especial de Möbius, e obtemos algunhas propiedades básicas das aplicacións que satisfán a dita ecuación.

Na sección §4,3 estudiamos a relación existente entre as solucións da ecuación de Möbius e a estrutura do dominio de tales aplicacións. Comezamos probando que a existencia de solucións da dita ecuación é característica dos produtos twisted. Máis exactamente:

Teorema 4.3.1 [17] *Sexan* $(M_1, g_1) = (N_1 \times N_2, h_1 + \lambda^2 h_2)$ *un produto twisted e* $i : (N_1, h_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ *unha inmersión. Entón,* $f = i \circ \pi$ *satisfai a ecuación de Möbius. Ademais,* f *satisfai a ecuación especial de Möbius se e soamente se* i *é harmónica.*

Reciprocamente, obtemos que a existencia de solucións da ecuación de Möbius nunha variedade supón que esta teña estrutura local de produto twisted.

Teorema 4.3.2 [17] *Sexa* $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ *unha aplicación de rango constante satisfacendo a ecuación de Möbius. Entón, temos a seguinte descomposición (local)*

$$(M_1, g_1) = (N_1 \times N_2, h_1 + \lambda^2 h_2)$$

como un produto twisted, onde N_1 *e* N_2 *cumpren que* $TN_1 = ker f_*^{\perp}$ *e* $TN_2 = ker f_*$. *Ademais a aplicación* f *factorízase localmente,*

$$\begin{tikzcd}
M_1 = N_1 \times N_2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M_2 \\
& N_1 \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

onde π *é a proxección canónica e* i *é unha inmersión.*

Baixo condicións adicionais sobre a segunda forma fundamental dunha submersión, obtemos unha relación análoga a expresada nos dous resultados anteriores entre a existencia de solucións da ecuación de Möbius e a estrutura local do dominio de produto warped (ver Teoremas 4.3.4 e 4.3.5).

Finalmente, na sección §4,4 estudiamos condicións baixo as cales unha aplicación que satisfai a ecuación de Möbius é totalmente xeodésica. Estas condicións obtéñense mediante a aplicación de técnicas de Bochner e son válidas tan só no caso riemanniano. Un exemplo dos resultados obtidos é o seguinte.

Teorema 4.4.1 *Sexa* $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ *unha aplicación de rango constante satisfacendo a ecuación de Möbius. Supoñamos que* (M_1, g_1) *é orientable, compacta* *e ten curvatura de Ricci non-negativa e que* (M_2, g_2) *ten curvatura seccional non-positiva. Se*

$$r g_2(\xi, \xi) + div(\tau(f)) \geq 0,$$

onde $r = dim\, ker f_* \geq 2$, *entón* f *é unha aplicación afín.*

Capítulo 1

Transformacións de Möbius

Neste primeiro capítulo introducimos algún material básico e notación que empregaremos ao longo de toda esta memoria. Na sección §1 recordamos definicións ben coñecidas, como os conceptos de conexión de Levi Civita, tensor curvatura, etc. dunha variedade semiriemanniana. Tamén tratamos brevemente a condición de que unha variedade sexa puntualmente Osserman. Máis tarde, na sección §5, estudiaremos con maior detalle esta condición en dimensión catro. Na sección §2 introducimos a ecuación de Möbius, sendo ela e diversas modificacións súas o principal obxecto de estudio deste traballo. A sección §3 está dedicada ao estudio dos produtos warped e twisted. Nesta sección damos explicitamente as fórmulas da conexión de Levi Civita, o tensor curvatura, o tensor de Ricci e a curvatura escalar dos produtos warped e twisted en función dos correspondentes dos factores e das funcións de deformación. Tamén obtemos un resultado que caracteriza, usando unha condición sobre o tensor de Ricci, aqueles produtos twisted que se poden expresar como un produto warped. Este é o principal resultado desta sección. Na sección §4 mencionamos dous resultados que mostran a influencia que ten a existencia dunha solución da ecuación de Möbius sobre a estrutura da variedade. Estes resultados empregarémolos na sección §5, onde estudiaremos a posibilidade de obter novos exemplos de variedades puntualmente Osserman, mediante transformacións de Möbius da métrica, a partir doutros xa coñecidos. O principal resultado desta sección, o Teorema 1.5.4, caracteriza as transformacións de Möbius dunha métrica puntualmente Osserman que se poden presentar en dimensión catro.

1.1. Preliminares

1.1.1. Curvatura de variedades semiriemannianas

Sexa (M, g) unha variedade semiriemanniana de dimensión n con métrica semiriemanniana g de signatura arbitraria (p, q), sendo p e q maiores ou iguais que 0.

Denotamos por ∇ a *conexión de Levi Civita* de g, que é a única conexión libre de torsión con respecto á cal g é paralela, é dicir, verifícase $\nabla g = 0$. Esta conexión queda determinada pola *fórmula de Koszul,*

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\
&\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]),
\end{aligned} \tag{1.1.1}
$$

válida para toda terna X, Y, Z de campos de vectores sobre a variedade M. O *tensor curvatura de Riemann de* ∇ está dado, usando o seguinte convenio para o signo, por:

$$
R_{XY}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{1.1.2}
$$

sendo X, Y, Z campos de vectores calquera sobre a variedade M. O dito tensor satisfai as seguintes identidades

$$
R_{XY}Z = -R_{YX}Z, \tag{1.1.3}
$$

$$
R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0, \tag{1.1.4}
$$

$$
(\nabla_X R_{YZ})W + (\nabla_Y R_{ZX})W + (\nabla_Z R_{XY})W = 0, \tag{1.1.5}
$$

para calquera X, Y, Z, W campos de vectores sobre a variedade M. Referirémonos a (1.1.4) e (1.1.5) como a *primeira* e a *segunda identidade de Bianchi*, respectivamente. Ás veces, denotaremos $R_{XY}Z$ por $R(X,Y)Z$. Tamén escribiremos o tensor curvatura como un campo de tensores de tipo (0,4), definido pola expresión

$$
R(X,Y,Z,W) = g(R_{XY}Z, W),
$$

que satisfai, ademais das identidades que se seguen de modo inmediato das que verifica $R_{XY}Z$, as seguintes:

$$
R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z), \tag{1.1.6}
$$

$$
R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y). \tag{1.1.7}
$$

Dedúcese de (1.1.1) e (1.1.2) que o tensor curvatura é un invariante local da estrutura semiriemanniana, é dicir, dúas variedades semiriemannianas localmente isométricas teñen o mesmo tensor curvatura. Sen embargo, o recíproco non é certo. Dúas variedades semiriemannianas poden ter o mesmo tensor curvatura e non ser localmente isométricas. Determinar as condicións máis débiles que permitan garantir que dúas variedades coa mesma curvatura sexan localmente isométricas permanece como un interesante problema aínda sen resolver (ver [6]).

Como mencionamos no parágrafo anterior o tensor curvatura é un invariante local da estrutura métrica e, polo tanto, tamén o son os tensores que se obteñen como contraccións del. Dúas contraccións importantes do tensor curvatura son o tensor de

Ricci e a curvatura escalar. Debido ás propiedades de simetría do tensor curvatura estas contraccións son as únicas non triviais. O *tensor de Ricci,* que denotaremos por Ric, está definido por

$$Ric(X,Y) = tr\{Z \rightsquigarrow R_{ZX}Y\},$$

e a *curvatura escalar,* denotada por Sc, está dada por

$$Sc = tr(Ric).$$

Se $\{E_1, \cdots, E_n\}$ denota unha referencia local ortonormal de campos de vectores sobre M, entón o tensor de Ricci e a curvatura escalar exprésanse do seguinte xeito:

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i R(E_i, X, Y, E_i),$$

$$Sc = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i Ric(E_i, E_i) = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j R(E_i, E_j, E_j, E_i),$$

onde $\varepsilon_k = g(E_k, E_k)$, $k = 1, \cdots, n$.

A definición do tensor curvatura dunha variedade pode parecer un concepto bastante artificial. Sen embargo, non é así. A noción de curvatura nunha variedade riemanniana foi introducida por Riemann dun xeito totalmente xeométrico. O concepto de curvatura seccional, que se define a partir do tensor curvatura de Riemann, dános a interpretación xeométrica orixinal da curvatura. Dado un punto p nunha variedade riemanniana (M, g) o conxunto de xeodésicas que son tanxentes a un plano nese punto definen unha superficie. A curvatura seccional da variedade na dirección do plano dado coincidirá co concepto de curvatura de Gauss da superficie construída no punto p.

Sexa p un punto da variedade M e denotemos por T_pM o espacio tanxente de M en p. Dado un subespacio bidimensional non-dexenerado $\pi = \langle\{x, y\}\rangle$ de T_pM (é dicir, $g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2 \neq 0$), defínese a curvatura seccional de π como o número real

$$K(\pi) = K(x,y) = \frac{R(x,y,y,x)}{g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2}.$$

Das propiedades do tensor curvatura enunciadas anteriormente tense que $K(\pi) = K(x,y)$ é independente da escolla da base $\{x, y\}$ de π.

A continuación definimos o concepto de operador de Jacobi, o cal é unha ferramenta moi útil para describir a curvatura dunha variedade ao longo dunha xeodésica en xeometría de Riemann.

Sexa (M, g) unha variedade semiriemanniana e x un vector tanxente a M nun punto p. Defínese o operador de Jacobi asociado ao vector x como a aplicación linear $R_x : T_pM \longrightarrow T_pM$ dada por

$$R_x(y) = R(y, x)x,$$

para calquera vector $y \in T_pM$.

Usando as propiedades do tensor curvatura é fácil comprobar que o operador de Jacobi R_x é autoadxunto, é dicir, $g(R_x(y), z) = g(y, R_x(z))$ para todo $y, z \in T_pM$. Cando a métrica g sexa definida positiva os operadores de Jacobi serán diagonalizables con autovalores reais, que son os valores extremos da curvatura seccional no punto p. Sen embargo, se a métrica g non é definida positiva non podemos garantir que o operador de Jacobi R_x sexa diagonalizable, podendo incluso presentar autovalores complexos (ver [2], [7] e [29]). Ademais, o significado xeométrico dos autovalores non pode establecerse en termos dos valores extremos da curvatura seccional (ver [27]).

1.1.2. Condición de Osserman puntual

Dise que unha variedade semiriemanniana (M, g) satisfai a *condición de Osserman* se os autovalores (posiblemente complexos) dos operadores de Jacobi R_x son independentes do vector unitario $x \in T_pM$ e do punto $p \in M$. Sábese que toda variedade isotrópica é Osserman. O recíproco é certo en xeometría de Lorentz e en múltiples dimensións e casos especiais en xeometría de Riemann. Sen embargo, a existencia de variedades Osserman non simétricas é un feito destacable en xeometría semiriemanniana (ver [10], [11], [12] e [27]).

O estudio e a caracterización das variedades de Osserman, nos casos resoltos, fíxose en dúas etapas. A primeira delas, é a obtención dos posibles tensores curvatura alxébricos que verifiquen a condición de Osserman mentres que na segunda, baseada no uso da segunda identidade de Bianchi, obtense información sobre a xeometría local da variedade. Este achegamento ao problema deu lugar a dous novos problemas: o problema de Osserman alxébrico e o problema de Osserman puntual (ver [29]).

Un tensor curvatura alxébrico nun espacio vectorial V cun produto interior $\langle\ ,\ \rangle$ é un campo de tensores F de tipo $(1, 3)$ (ou equivalentemente un tensor de tipo $(0, 4)$) verificando as condicións análogas a (1.1.3), (1.1.4), (1.1.6) e (1.1.7). Dirase que F verifica a *condición alxébrica de Osserman* se os autovalores dos operadores de Jacobi F_x asociados a F son independentes da dirección espacial ou temporal indicada polo vector unitario x. A dita condición correspóndese coa xeometría das variedades semiriemannianas que verifican a condición de Osserman nun punto $p \in M$.

Cando a condición de Osserman se verifique en cada punto $p \in M$, permitindo que os autovalores difiran dun punto a outro, dirase que (M, g) é *puntualmente Osserman.*

Sábese que toda variedade puntualmente Osserman é necesariamente de Einstein e, polo tanto, de curvatura constante se dim $M = 3$. Ademais, como consecuencia inmediata do lema de Schur, toda variedade puntualmente Osserman na que os operadores de Jacobi teñan un único autovalor é Osserman. Este resultado pode ser xeneralizado ao caso en que o número de autovalores distintos dos operadores de Jacobi sexa dous e a dimensión da variedade sexa estritamente maior que catro (ver [27]).

A xeometría das variedade de Osserman presenta particularidades apreciables cando a dimensión da variedade é catro. Esta non só é a dimensión máis baixa na que o problema de Osserman é non-trivial, senón que ademais existe unha grande cantidade de exemplos de variedades que son puntualmente Osserman e que non son Osserman (espacios complexos xeneralizados, variedades hiper-Kähler, etc.). Para os nosos obxectivos será de especial interese a seguinte caracterización das variedades puntualmente Osserman.

Teorema 1.1.1 [1] *Sexa (M, g) unha variedade semiriemanniana de dimensión catro. Entón, as seguintes afirmacións son equivalentes:*

a) (M, g) *é puntualmente Osserman,*

b) (M, g) *é de Einstein e, ademais, autodual ou antiautodual.*

De feito, o resultado anterior é estritamente puntual e permite caracterizar os tensores curvatura alxébricos en dimensión catro que verifican a condición de Osserman.

Un aspecto destacable é que a propiedade de autodualidade (resp. antiautodualidade) é un invariante conforme da métrica. Isto motiva o estudio da posible obtención de novos exemplos de variedades puntualmente Osserman realizando transformacións conformes das métricas doutros espacios puntualmente Osserman xa coñecidos.

1.1.3. Deformación conforme de métricas semiriemannianas

Comezamos esta sección definindo os conceptos de *gradiente, hessiano* e *laplaciano* dunha función definida nunha variedade, que aparecerán en múltiples ocasións ao longo desta memoria.

Sexan (M, g) unha variedade semiriemanniana de dimensión n e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función diferenciable. Denotamos por TM o fibrado tanxente da variedade e por ΓTM as seccións do dito fibrado, é dicir, o conxunto dos campos de vectores sobre M.

Definición 1.1.1 O *gradiente* de f, que se denotará por ∇f, é o único campo de vectores sobre a variedade M que satisfai a condición

$$g(\nabla f, X) = Xf$$

para todo $X \in \Gamma TM$.

Definición 1.1.2 A aplicación linear $h_f : \Gamma TM \longrightarrow \Gamma TM$ definida por

$$h_f(X) = \nabla_X \nabla f$$

chámase o *hessiano* de f en (M, g). Tamén chamaremos *hessiano* de f en (M, g) á aplicación linear $H_f : \Gamma TM \times \Gamma TM \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H_f(X, Y) = g(h_f(X), Y).$$

Definición 1.1.3 O *laplaciano* da función f en (M, g) está definido por

$$\Delta f = traza\{X \rightsquigarrow h_f(X)\}.$$

Se $\{E_1, \cdots, E_n\}$ denota unha referencia ortonormal local de campos de vectores sobre M entón o laplaciano da función f exprésase como segue:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i H_f(E_i, E_i),$$

onde $\epsilon_i = g(E_i, E_i)$, $i = 1, \cdots, n$.

A continuación damos un resultado que relaciona as conexións de Levi Civita, os tensores curvatura e os tensores de Ricci de dúas métricas definidas nunha mesma variedade que sexan conformemente equivalentes. Este resultado seranos de utilidade máis adiante cando estudiemos deformacións conformes dunha métrica de Osserman.

Teorema 1.1.2 [48] *Sexa (M, g) unha variedade semiriemanniana de dimensión n. Dada unha función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ consideremos en M a métrica $\widetilde{g} = e^{2f} g$. Entón temos as seguintes relacións entre:*

i) As conexión de Levi Civita ∇ e $\widetilde{\nabla}$ de g e $\widetilde{g}$

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)\nabla f. \tag{1.1.8}$$

ii) Os tensores curvatura R e $\widetilde{R}$ de g e $\widetilde{g}$

$$\widetilde{R} = e^{2f}\left\{R + \left(H_f - df \otimes df + \frac{1}{2}g(\nabla f, \nabla f)g\right) \odot g\right\}, \qquad (1.1.9)$$

onde para dous tensores α *e* β *de tipo* $(0,2)$ *se ten*

$$\begin{aligned}(\alpha \odot \beta)(x,y,z,w) &= \alpha(x,z)\beta(y,w) + \alpha(y,w)\beta(x,z)\\ &\quad -\alpha(x,w)\beta(y,z) - \alpha(y,z)\beta(x,w).\end{aligned}$$

iii) Os tensores de Ricci Ric *e* $\widetilde{Ric}$ *de* g *e* $\widetilde{g}$

$$\widetilde{Ric} = Ric - (n-2)(H_f - df \otimes df) - (\Delta f + (n-2)g(\nabla f, \nabla f))g. \qquad (1.1.10)$$

1.2. Transformacións de Möbius

Sexa (M,g) unha variedade de Riemann de dimensión n. Dada unha función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, seguindo a Osgood e Stowe [43], defínese o campo de tensores

$$B_g(f) \stackrel{def}{=} H_f - df \otimes df - \frac{1}{n}(\triangle f - g(\nabla f, \nabla f))g,$$

onde H_f, ∇f e $\triangle f$ denotan respectivamente o hessiano, o gradiente e o laplaciano da función f. Así, para cada par de campos de vectores X, Y sobre M tense

$$B_g(f)(X,Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)f - (Xf)Yf - \frac{1}{n}(\triangle f - g(\nabla f, \nabla f))g(X,Y).$$

Cando non haxa confusión posible respecto da métrica g denotaremos $B_g(f)$ por $B(f)$. Este é un campo de tensores de tipo $(0,2)$, simétrico e de traza nula. O noso interese céntrase no estudio da ecuación diferencial $B(f) = 0$, chamada *ecuación de Möbius.*

Nota 1.2.1 Imos dar unha breve explicación xustificativa do nome que recibe a anterior ecuación. Dada unha función holomorfa localmente inxectiva $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{C}$, definida nun dominio do plano complexo, a derivada de Schwarz de φ está definida por

$$\mathbf{S}(\varphi) = \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2.$$

Usando este funcional pódense caracterizar completamente as transformacións de Möbius do plano complexo: *φ é unha transformación de Möbius se e soamente se* $\mathbf{S}(\varphi) = 0$.

Supoñamos agora que $\varphi : (M,g) \longrightarrow (M',g')$ é unha transformación conforme con $\widetilde{g} = e^{2f}g = \varphi^* g'$, onde $f = log\|d\varphi\|$ e $\varphi^* g'$ denota o "pullback"da métrica

g'. Defínese o tensor de Schwarz de φ como $S(\varphi) = B(f)$. Se $(M, g) = (M', g')$, sendo M a esfera euclidiana 2-dimensional $\mathbb{S}^2$ e g é a métrica euclidiana, e φ é unha función holomorfa, con $\varphi'(z) \neq 0$, entón $S(f) = 0$ se e soamente se $\mathbf{S}(f) = 0$, é dicir, $S(\varphi) = 0$ se e só se φ é unha transformación de Möbius da esfera $\mathbb{S}^2$.

Xeneralizando o caso anterior, dise que unha transformación conforme entre dúas variedades $\varphi : (M, g) \longrightarrow (M', g')$ é unha *transformación de Möbius* se $B(f) = 0$, onde $f = log\|d\varphi\|$. Cando consideramos nunha variedade de Riemann (M, g) a métrica $\widetilde{g} = e^{2f} g$, sendo $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función diferenciable, dise que fixemos un *cambio de Möbius da métrica* se $B_g(f) = 0$.

O significado xeométrico da ecuación de Möbius porase de manifesto na sección §1,5, onde veremos a estreita relación existente entre a invarianza dos autoespacios do operador de Ricci e as transformacións de Möbius.

1.3. Estruturas locais de produtos semiriemannianos

1.3.1. Produtos Warped e Twisted

R. L. Bishop e B. O'Neill introduciron en [5] a noción de produto warped de dúas variedades semiriemannianas, que é unha xeneralización do produto usual. Este novo concepto resultou ser de tremenda utilidade e púxolle nome a moitos exemplos ben coñecidos existentes na literatura física e matemática: os modelos espacio-tempo estándar do universo e os modelos máis sinxelos de veciñanzas de estrelas e buratos negros son produtos warped, as coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$ pódense ver como un produto warped, as superficies de revolución tamén son produtos warped, etc.

R. Ponge e H. Reckziegel introduciron en [46] unha xeneralización dos produtos warped, que denominaron produtos twisted. Tanto os produtos warped como os produtos twisted son amplamente empregados en xeometría para construír novos exemplos de variedades semiriemannianas que teñan tensores curvatura con propiedades interesantes (ver [4], [23] e [41]). Os produtos twisted tamén resultan útiles no estudio de varios aspectos da teoría de subvariedades. Por exemplo, aparecen no estudio de hipersuperficies de variedades complexas de curvatura seccional holomorfa constante (ver [37]), no estudio de subvariedades lagrangianas (ver [8]), etc.

A continuación, definimos as distintas estruturas de produto nunha variedade que utilizaremos ao longo desta memoria. (Outras estruturas, como os produtos dobre-twisted ou dobre-warped poden consultarse en [18], [46], [51] e [52].)

Definición 1.3.1 Sexan (M_1, g_1) e (M_2, g_2) dúas variedades semiriemannianas, $\lambda : M_1 \times M_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función positiva e $\pi_i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$ a proxección canónica $(i = 1, 2)$. Entón, *o produto twisted* de (M_1, g_1) e (M_2, g_2), que denotaremos por

$M_1 \times_\lambda M_2$, é a variedade diferenciable $M_1 \times M_2$ dotada da métrica semiriemanniana g definida por

$$g(X,Y) = g_1((\pi_1)_*X, (\pi_1)_*Y) + \lambda^2 g_2((\pi_2)_*X, (\pi_2)_*Y)$$

para todo par de campos de vectores X e Y sobre $M_1 \times M_2$. Á función λ chamarémola *función de deformación.*

Se a función de deformación $\lambda : M_1 \times M_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cumpre que para todo $p_1 \in M_1$ a función $\lambda(p_1, \cdot) : M_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é constante, entón $M_1 \times_\lambda M_2$ é, por definición, un *produto warped*.

Se a función λ é constante, entón temos un produto directo de dúas variedades semiriemannianas.

A continuación imos describir a xeometría dos produtos twisted e warped en función da xeometría dos seus factores (ver [18], [41] e [46] para máis información).

Sexan (M_1, g_1) e (M_2, g_2) dúas variedades semiriemannianas con conexións de Levi Civita ∇^{M_1} e ∇^{M_2} respectivamente, denotemos por ∇ a conexión de Levi Civita e o gradiente no produto twisted (ou warped, segundo o caso) $M_1 \times_\lambda M_2$ e sexa $\zeta = log\, \lambda$. Denotemos por $\mathcal{L}(M_i)$ o conxunto dos campos de vectores sobre M_i levantados a $M_1 \times M_2$, $i = 1, 2$.

Proposición 1.3.1 [46] *Sexa $M_1 \times_\lambda M_2$ un produto twisted e consideremos os campos de vectores $X, Y \in \mathcal{L}(M_1)$ e $U, V \in \mathcal{L}(M_2)$. Entón, a conexión de Levi Civita vén dada polas expresións*

$$\begin{aligned} &\nabla_X Y = \nabla_X^{M_1} Y, \\ &\nabla_X U = X(\zeta)U, \\ &\nabla_U V = \nabla_U^{M_2} V + U(\zeta)V + V(\zeta)U - g(U,V)\nabla\zeta. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

No caso particular dun produto warped, e tendo en conta que a función ζ non depende das segundas variables (as de M_2), temos o seguinte resultado.

Proposición 1.3.2 [41, Páx. 206] *Sexa $M_1 \times_\lambda M_2$ un produto warped. Dados os campos de vectores $X, Y \in \mathcal{L}(M_1)$ e $U, V \in \mathcal{L}(M_2)$, a conexión de Levi Civita satisfai*

$$\begin{aligned} &\nabla_X Y = \nabla_X^{M_1} Y, \\ &\nabla_X U = X(\zeta)U, \\ &\nabla_U V = \nabla_U^{M_2} V - g(U,V)\nabla\zeta. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Como aplicación das expresións que aparecen nas dúas proposicións anteriores obtense un resultado que permite caracterizar a xeometría dun produto twisted $M_1 \times_\lambda M_2$ a través da xeometría das foliacións canónicas L_1 e L_2 (aquelas que teñen por follas $M_1 \times \{p_2\}$ e $\{p_1\} \times M_2$). De (1.3.1) dedúcese que a foliación L_1 é totalmente xeodésica en calquera dos casos considerados. No caso dun produto twisted (1.3.1) dános tamén que L_2 é unha foliación totalmente umbílica. Para un produto warped (1.3.2) afirma que L_2 é esférica. Tendo en conta que un produto usual se pode pensar como un produto warped con función λ constante séguese de (1.3.2) que L_2 é unha foliación totalmente xeodésica. Así, tense

Proposición 1.3.3 [46, Prop. 3] *Sexa g unha métrica semiriemanniana definida nunha variedade $M = M_1 \times M_2$ e supoñamos que as foliacións canónicas, que denotamos por L_1 e L_2, se cortan perpendicularmente en todo punto de $M_1 \times M_2$. Entón g é a métrica de*

i) un produto twisted $M_1 \times_\lambda M_2$ se e só se L_1 é unha foliación totalmente xeodésica e L_2 é totalmente umbílica,

ii) un produto warped $M_1 \times_\lambda M_2$ se e soamente se L_1 é totalmente xeodésica e L_2 é esférica,

iii) un produto usual de variedades semiriemannianas se e só se L_1 e L_2 son foliacións totalmente xeodésicas.

Damos agora unha breve indicación de como se demostran as implicacións recíprocas. Para un punto arbitrario $(p_0, q_0) \in M_1 \times M_2$ definimos as métricas semiriemannianas $g_1 = (j_{q_0})^* g$ e $g_2 = (i_{p_0})^* g$ en M_1 e M_2 respectivamente, onde $i_{p_0} : M_2 \longrightarrow M_1 \times M_2$ e $j_{q_0} : M_1 \longrightarrow M_1 \times M_2$ denotan as inclusións canónicas. Entón, usando que a foliación L_1 é totalmente xeodésica e L_2 é totalmente umbílica, obtense a seguinte expresión para a métrica: $g = g_1 + \lambda^2 g_2$, sendo λ unha función definida en $M_1 \times M_2$. Estudiando a implicación de que a foliación L_2 sexa esférica ou totalmente xeodésica tense que a función λ só depende dos puntos de M_1 ou é constante, respectivamente. É dicir, resulta que $M_1 \times_\lambda M_2$ é un produto warped ou un produto directo, respectivamente.

Os seguintes resultados proporciónannos as expresións dos tensores curvatura e de Ricci dos produtos twisted e warped. As ditas expresións séguense das definicións dadas na sección §1,1 e as fórmulas para a conexión de Levi Civita dadas anteriormente. Aínda que os cálculos son longos non supoñen ningunha dificultade engadida, polo que os omitiremos.

Proposición 1.3.4 [46] *Sexa $M_1 \times_\lambda M_2$ un produto twisted e consideremos os campos de vectores $X, Y, Z \in \mathcal{L}(M_1)$ e $U, V, W \in \mathcal{L}(M_2)$. Entón, as compoñentes nonnulas do tensor curvatura son:*

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= R_{M_1}(X,Y)Z,\\
R(X,U)Y &= (H_\zeta(X,Y)+X(\zeta)Y(\zeta))U,\\
R(U,X)V &= g(U,V)(X(\zeta)\nabla\zeta+h_\zeta(X))-XV(\zeta)U,\\
R(U,V)X &= XU(\zeta)V-XV(\zeta)U,\\
R(U,V)W &= R_{M_2}(U,V)W+g(\nabla\zeta,\nabla\zeta)(g(V,W)U-g(U,W)V)\\
&\quad +H_\zeta(U,W)V-H_\zeta(V,W)U\\
&\quad +g(U,W)h_\zeta(V)-g(V,W)h_\zeta(U)\\
&\quad +W(\zeta)(U(\zeta)V-V(\zeta)U)\\
&\quad +(V(\zeta)g(U,W)-U(\zeta)g(V,W))\nabla\zeta,
\end{aligned}
\tag{1.3.3}
$$

sendo R_{M_1} *e* R_{M_2} *os tensores curvatura das variedades* (M_1, g_1) *e* (M_2, g_2) *respectivamente.*

Como caso particular, para os produtos warped, obtéñense as expresións dadas por O'Neill.

Proposición 1.3.5 [41, Páx. 210] *Sexa* $M_1 \times_\lambda M_2$ *un produto warped. Dados os campos de vectores* $X, Y, Z \in \mathcal{L}(M_1)$ *e* $U, V, W \in \mathcal{L}(M_2)$*, as compoñentes non-nulas do tensor curvatura son:*

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= R_{M_1}(X,Y)Z,\\
R(X,U)Y &= (H_\zeta(X,Y)+X(\zeta)Y(\zeta))U,\\
R(U,X)V &= g(U,V)(X(\zeta)\nabla\zeta+h_\zeta(X))\\
R(U,V)W &= R_{M_2}(U,V)W+g(\nabla\zeta,\nabla\zeta)(g(U,W)V-g(V,W)U),
\end{aligned}
\tag{1.3.4}
$$

onde R_{M_1} *e* R_{M_2} *denotan os tensores curvatura das variedades* (M_1, g_1) *e* $(M_2,\, g_2)$ *respectivamente.*

A Proposición 1.3.3 proporciónanos unha diferenciación entre os produtos twisted e os warped en termos da xeometría das follas das foliacións canónicas. Sen embargo, en moitas ocasións resulta útil ter unha caracterización daqueles produtos twisted que se poden expresar como un produto warped en termos da xeometría (é dicir, da curvatura) da variedade. Como poremos de manifesto no Teorema 1.3.1, unha posible caracterización vén dada pola posibilidade de diagonalizar en dous bloques o tensor de Ricci do produto twisted, de modo que os termos cruzados se anulen. Antes de chegar ao dito resultado, imos obter a expresión do tensor de Ricci dun produto twisted e dun produto warped.

Proposición 1.3.6 *Sexa $M_1 \times_\lambda M_2$ un produto twisted. Dados os campos de vectores $X, Y, Z \in \mathcal{L}(M_1)$ e $U, V, W \in \mathcal{L}(M_2)$, temos as identidades*

$$
\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= Ric_{M_1}(X,Y) - n_2(X(\zeta)Y(\zeta) + H_\zeta(X,Y)), \\
Ric(X,V) &= (1-n_2)XV(\zeta), \\
Ric(V,W) &= Ric_{M_2}(V,W) + (2-n_2)(V(\zeta)W(\zeta) + H_\zeta(V,W)) \\
&\qquad +(n_2-2)g(V,W)g(\nabla\zeta,\nabla\zeta) - g(V,W)\Delta\zeta,
\end{aligned}
\tag{1.3.5}
$$

sendo Ric_{M_1} e Ric_{M_2} os tensores de Ricci de (M_1, g_1) e (M_2, g_2) respectivamente.

Proba.
Sexan $\{X_1, \cdots, X_{n_1}\}$ e $\{U_1, \cdots, U_{n_2}\}$ dúas referencias locais ortonormais de TM_1 e TM_2 respectivamente. Entón, $\{X_1, \cdots, X_{n_1}, U_1, \cdots, U_{n_2}\}$ é unha referencia local ortonormal de TM. Logo, para $X, Y \in \Gamma TM_1$

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n_1} g(X_i,X_i)R(X_i,X,Y,X_i) + \sum_{j=1}^{n_2} g(U_j,U_j)R(U_j,X,Y,U_j).$$

Da Proposición 1.3.4 séguese que

$$R(X_i,X,Y,X_i) = R_{M_1}(X_i,X,Y,X_i)$$

e

$$R(U_j,X,Y,U_j) = -g(U_j,U_j)(H_\zeta(X,Y) + X(\zeta)Y(\zeta)).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n_1} g(X_i,X_i)R_{M_1}(X_i,X,Y,X_i) - \sum_{j=1}^{n_2}(H_\zeta(X,Y) + X(\zeta)Y(\zeta)) \\
&= Ric_{M_1}(X,Y) - n_2(H_\zeta(X,Y) + X(\zeta)Y(\zeta)).
\end{aligned}
$$

Agora, para $X \in \Gamma TM_1$ e $V \in \Gamma TM_2$, é

$$Ric(X,V) = \sum_{i=1}^{n_1} g(X_i,X_i)R(X_i,X,V,X_i) + \sum_{j=1}^{n_2} g(U_j,U_j)R(U_j,X,V,U_j).$$

Recorrendo ás fórmulas da Proposición 1.3.4 obtemos

$$R(X_i,X,V,X_i) = 0$$

e

$$R(U_j, X, V, U_j) = g(U_j, V)(X(\zeta)g(U_j, \nabla\zeta) + H_\zeta(U_j, X)) - XV(\zeta)g(U_j, U_j).$$

Daquela,

$$\begin{aligned} Ric(X,V) &= \sum_{j=1}^{n_2} X(\zeta)g(U_j,U_j)g(U_j,V)g(U_j,\nabla\zeta) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_2} g(U_j,V)H_\zeta(U_j,V) - n_2XV(\zeta) \\ &= X(\zeta)V(\zeta) + H_\zeta(X,V) - n_2XV(\zeta). \end{aligned}$$

Agora, séguese de (1.3.1) que $H_\zeta(X,V) = XV(\zeta) - (\nabla_X V)(\zeta) = XV(\zeta) - X(\zeta)V(\zeta)$. Logo, obtemos a igualdade

$$Ric(X,V) = (1 - n_2)XV(\zeta),$$

o que proba a segunda ecuación en (1.3.5).

Finalmente, dados $V, W \in \Gamma TM_2$ tense que

$$Ric(V,W) = \sum_{i=1}^{n_1} g(X_i,X_i)R(X_i,V,W,X_i) + \sum_{j=1}^{n_2} g(U_j,U_j)R(U_j,V,W,U_j).$$

Da Proposición 1.3.4 séguese que

$$R(X_i,V,W,X_i) = -g(V,W)(g(X_i,\nabla\zeta)g(X_i,\nabla\zeta) + H_\zeta(X_i,X_i))$$

e

$$\begin{aligned} R(U_j,V,W,U_j) &= R_{M_2}(U_j,V,W,U_j) \\ &\quad + g(\nabla\zeta,\nabla\zeta)(g(V,W)g(U_j,U_j) - g(U_j,W)g(U_j,V)) \\ &\quad + H_\zeta(U_j,W)g(U_j,V) - H_\zeta(V,W)g(U_j,U_j) \\ &\quad + g(U_j,W)H_\zeta(U_j,V) - g(V,W)H_\zeta(U_j,U_j) \\ &\quad + W(\zeta)(g(U_j,\nabla\zeta)g(U_j,V) - V(\zeta)g(U_j,U_j)) \\ &\quad + (V(\zeta)g(U_j,W) - g(U_j,\zeta)g(V,W))g(U_j,\nabla\zeta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
Ric(V,W) &= -g(V,W)\sum_{i=1}^{n_1} g(X_i,X_i)g(X_i,\nabla\zeta)g(X_i,\nabla\zeta)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{n_1} g(X_i,X_i)H_\zeta(X_i,X_i) + Ric_{M_2}(V,W)\\
&\quad +(n_2-1)g(V,W)g(\nabla\zeta,\nabla\zeta) + (1-n_2)H_\zeta(V,W)\\
&\quad +H_\zeta(V,W) - g(V,W)\sum_{j=1}^{n_2} g(U_j,U_j)H_\zeta(U_j,U_j)\\
&\quad +(1-n_2)V(\zeta)W(\zeta) + V(\zeta)W(\zeta)\\
&\quad -g(V,W)\sum_{j=1}^{n_2} g(U_j,U_j)g(U_j,\nabla\zeta)g(U_j,\nabla\zeta)\\
&= Ric_{M_2}(V,W) - g(V,W)\Delta\zeta + (n_2-2)g(V,W)g(\nabla\zeta,\nabla\zeta)\\
&\qquad\qquad +(2-n_2)(V(\zeta)W(\zeta) + H_\zeta(V,W)).
\end{aligned}$$

□

Agora, particularizando as ecuacións obtidas no resultado anterior para o caso en que a función de deformación λ só depende das variables de M_1, obtemos a expresión do tensor de Ricci dun produto warped.

Proposición 1.3.7 [41, Páx. 211] *Sexan $M_1 \times_\lambda M_2$ un produto warped e $X, Y, Z \in \mathcal{L}(M_1)$ e $U, V, W \in \mathcal{L}(M_2)$. Logo,*

$$\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= Ric_{M_1}(X,Y) - n_2(X(\zeta)Y(\zeta) + H_\zeta(X,Y)),\\
Ric(X,U) &= 0, \qquad\qquad (1.3.6)\\
Ric(U,V) &= Ric_{M_2}(V,W) - g(V,W)\Delta\zeta.
\end{aligned}$$

onde Ric_{M_1} e Ric_{M_2} denotan os tensores de Ricci das variedades (M_1, g_1) e (M_2, g_2) respectivamente.

Proba.
A demostración deste resultado séguese da da proposición anterior, sen máis que ter en conta que a función ζ só depende dos puntos de M_1. A fórmula para $Ric(X,Y)$ é a mesma e a igualdade $Ric(X,V) = 0$ dedúcese do feito de que ζ non depende dos puntos de M_2 e, polo tanto, $V(\zeta) = 0$. Calculamos a continuación a fórmula correspondente para $Ric(V,W)$. Temos que $V(\zeta) = W(\zeta) = 0$ e $H_\zeta(V,W) = -(\nabla_V W)(\zeta)$,

de onde, usando (1.3.2), obtemos $H_\zeta(V,W) = -g(V,W)g(\nabla\zeta,\nabla\zeta)$. Do anterior, concluímos que $Ric(V,W) = Ric_{M_2}(V,W) - g(V,W)\Delta\zeta$. □

A continuación obtemos a expresión da curvatura escalar dos produtos twisted e warped. Antes de facelo, necesitamos introducir a seguinte notación.

Sexa $\{E_1, \cdots, E_{n_1}, E_{n_1+1}, \cdots, E_n = E_{n_1+n_2}\}$ unha referencia ortonormal local da variedade $M = M_1 \times M_2$, onde $E_1, \cdots, E_{n_1}$ son tanxentes a M_1 e $E_{n_1+1}, \cdots, E_n = E_{n_1+n_2}$ son tanxentes a M_2. Escribimos

$$\tilde{\Delta}_{M_1}\zeta = \sum_{i=1}^{n_1} g(E_i,E_i)H_\zeta(E_i,E_i)$$

e

$$\tilde{\Delta}_{M_2}\zeta = \sum_{i=1}^{n_2} g(E_{n_1+i},E_{n_1+i})H_\zeta(E_{n_1+i},E_{n_1+i}).$$

Sinalemos que con esta notación podemos expresar o laplaciano $\Delta\zeta$ da función ζ como

$$\Delta\zeta = \tilde{\Delta}_{M_1}\zeta + \tilde{\Delta}_{M_2}\zeta.$$

Denotamos por Sc_{M_i} a curvatura escalar de M_i e $\pi_i : M = M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$ denota a proxección i-ésima, $i = 1, 2$. Comezamos expresando a curvatura escalar dun produto twisted.

Proposición 1.3.8 *Sexa $M_1 \times_\lambda M_2$ un produto twisted. Entón, a curvatura escalar vén dada pola seguinte expresión:*

$$\begin{aligned} Sc = {} & Sc_{M_1} + \frac{1}{\lambda^2}Sc_{M_2} - n_2\tilde{\Delta}_{M_1}\zeta + (2-n_2)\tilde{\Delta}_{M_2}\zeta \\ & + n_2(n_2-2)g_1(\nabla\zeta,\nabla\zeta) - n_2\Delta\zeta \\ & - n_2 g_1((\pi_1)_*\nabla\zeta,(\pi_1)_*\nabla\zeta) + (2-n_2)\lambda^2 g_2((\pi_2)_*\nabla\zeta,(\pi_2)_*\nabla\zeta). \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Do anterior resultado séguese de xeito inmediato o seguinte.

Proposición 1.3.9 *Sexa $M_1 \times_\lambda M_2$ un produto warped. Logo,*

$$Sc = Sc_{M_1} + \frac{1}{\lambda^2}Sc_{M_2} + (n_2^2 - 3n_2 + 2)g(\nabla\zeta,\nabla\zeta) - 2n_2\Delta\zeta. \tag{1.3.8}$$

Máis adiante, no Capítulo 3, precisaremos a expresión do tensor de Ricci e da curvatura escalar dun produto warped expresados directamente en termos da función de deformación λ. Aínda que o dito resultado se segue de xeito inmediato da Proposición 1.3.7, incluímolo a continuación para facilitar a lectura.

Proposición 1.3.10 *Sexan $M_1 \times_\lambda M_2$ un produto warped e $X, Y, Z \in \mathcal{L}(M_1)$ e $U, V, W \in \mathcal{L}(M_2)$. Logo, as compoñentes non nulas do tensor de Ricci están dadas por*

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= Ric_{M_1}(X,Y) - \frac{n_2}{\lambda} H_\lambda(X,Y), \\ Ric(U,V) &= Ric_{M_2}(V,W) + g(V,W)\left\{\frac{1}{\lambda^2} g(\nabla\lambda,\nabla\lambda) - \frac{1}{\lambda}\Delta\lambda\right\}. \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Proba.
Da relación entre as funcións ζ e λ dedúcense de forma inmediata as seguintes relacións entre os seus gradientes, os seus hessianos e os seus laplacianos:

$$\begin{aligned} &\nabla\zeta = \frac{1}{\lambda}\nabla\lambda, \\ &H_\zeta(X,Y) = \frac{1}{\lambda} H_\lambda(X,Y) - \frac{1}{\lambda^2} X(\lambda) Y(\lambda), \\ &\Delta\zeta = \frac{1}{\lambda}\Delta\lambda - \frac{1}{\lambda^2} g(\nabla\lambda,\nabla\lambda), \end{aligned}$$

onde $X, Y \in \Gamma TM$ son dous campos de vectores calquera. Agora, tendo en conta as anteriores igualdades en (1.3.6) obtemos o resultado. $\square$

Proposición 1.3.11 *Sexan $M_1 \times_\lambda M_2$ un produto warped. Logo,*

$$Sc = Sc_{M_1} + \frac{1}{\lambda^2} Sc_{M_2} + \frac{n_2^2 - n_2 + 2}{\lambda^2} g(\nabla\lambda,\nabla\lambda) - \frac{2n_2}{\lambda}\Delta\lambda. \tag{1.3.10}$$

Proba.
O resultado séguese de forma inmediata das relacións obtidas na demostración da proposición anterior e de (1.3.8). $\square$

Como consecuencia dos resultados anteriores, obtemos unha caracterización en termos do tensor de Ricci daqueles produtos twisted que se poden expresar como produtos warped. Expresamos a dita caracterización, que constitúe o principal resultado desta sección, como segue.

Teorema 1.3.1 *Sexa $M_1 \times_\lambda M_2$ un produto twisted con $dim M_2 > 1$. Entón, $Ric(X,V) = 0$ para todo par de campos de vectores $X \in \mathcal{L}(M_1)$ e $V \in \mathcal{L}(M_2)$ se e soamente se $M_1 \times_\lambda M_2$ pode ser expresado como un produto warped $M_1 \times_\mu M_2$ de (M_1, g_1) e $(M_2, \widetilde{g}_2)$, sendo $\widetilde{g}_2$ unha métrica conformemente equivalente a g_2.*

Proba.
Supoñamos que $Ric(X, V) = 0$ para todo $X \in \mathcal{L}(M_1)$ e $V \in \mathcal{L}(M_2)$. Lembramos que ζ denota a función $log(\lambda)$. Como $n_2 = \dim M_2 > 1$, séguese de (1.3.5) que $XV(\zeta) = 0$, e como $[X, V] = 0$ tense que $VX(\zeta) = 0$. Agora, de $VX(\zeta) = 0$ dedúcese que $X(\zeta)$ só depende dos puntos de M_1, e de $XV(\zeta) = 0$ obtense que $V(\zeta)$ soamente depende dos puntos de M_2.

Polo tanto, ζ pódese expresar como a suma de dúas funcións ζ_1 e ζ_2 definidas en M_1 e M_2 respectivamente. É dicir, para todo punto $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ verifícase que $\zeta(p) = \zeta_1(p_1) + \zeta_2(p_2)$. Daquela, temos que $\lambda = e^{\zeta} = e^{\zeta_1}e^{\zeta_2}$, ou sexa, $\lambda(p_1, p_2) = \lambda_1(p_1)\lambda_2(p_2)$, onde $\lambda_i = e^{\zeta_i}$, $i = 1, 2$. Polo tanto, podemos escribir $g = g_1 \oplus \lambda^2 g_2 = g_1 \oplus \lambda_1^2 \widetilde{g_2}$, onde $\widetilde{g_2} = \lambda_2^2 g_2$, e λ_1 só depende dos puntos de M_1. É dicir, o produto twisted $M_1 \times_\lambda M_2$ pode ser expresado como un produto warped $M_1 \times_{\lambda_1} M_2$. O recíproco é consecuencia de 1.3.6. $\square$

Ademais do propio interese xeométrico do resultado anterior, este tamén presenta un interese engadido desde o punto de vista da formulación matemática da relatividade xeral. A maioría dos modelos espacio-tempo, como os de Robertson-Walker (ver Capítulo 2) ou os de Schwarzschild (ver Capítulo 3), son produtos warped. En vista do anterior teorema, vemos que esta é a máxima xeneralidade que se pode presentar, pois considerar produtos twisted non aportaría nada novo. Isto débese a que o tensor tensión-enerxía (por exemplo, cando está asociado a un fluído) induce no espacio-tempo a condición sobre o tensor de Ricci que figura nas hipóteses do Teorema 1.3.1 e, en consecuencia, o espacio-tempo pódese expresar como un produto warped.

Como consecuencia do anterior resultado obtemos de forma inmediata o seguinte.

Corolario 1.3.1 *Sexa* $(M, g) = (M_1 \times M_2, g_1 + \lambda^2 g_2)$ *un produto twisted tal que* $\dim M_2 > 1$. *Se* (M, g) *é de Einstein entón* (M, g) *pódese expresar como un produto warped.*

Proba.
Supoñamos que o produto twisted $M_1 \times_\lambda M_2$ é unha variedade de Einstein. Entón, $Ric(X, U) = \frac{Sc}{n} g(X, U) = 0$, para todo par de campos de vectores $X \in \Gamma T M_1$, $U \in \Gamma T M_2$. Agora, do Teorema 1.3.1 séguese a validez do resultado. $\square$

Así, obtense de xeito inmediato que as métricas de Taub-NUT verificando a condición de Einstein, consideradas en [38], se corresponden necesariamente con produtos warped.

Nota 1.3.1 Notemos que o Teorema 1.3.1 non pode ser empregado para caracterizar aqueles produtos dobre-twisted que se poidan expresar como un produto dobre-warped. Isto débese a que a condición sobre o tensor de Ricci, válida para caracterizar os produtos warped, non se cumpre nos produtos dobre-warped (ver [18]).

1.4. Influencia local da existencia de solucións da ecuación de Möbius

Supoñamos que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfai a ecuación de Möbius $B(f) = 0$. Entón, facendo a substitución $u = e^{-f}$ a ecuación de Möbius redúcese á seguinte ecuación linear de segunda orde

$$H_u = \frac{\Delta u}{n} g,$$

máis fácil de estudiar e que denominaremos *ecuación local de Möbius*. Esta ecuación linearizada non é globalmente equivalente á anterior, mais si o é localmente. En efecto, se u é unha solución positiva da ecuación linear entón $f = -log\, u$ constitúe unha solución da ecuación de Möbius. (Notemos que localmente sempre podemos atopar unha solución positiva da ecuación linear, pois chega con sumar unha constante axeitada.) E, obviamente, dada unha función f que sexa solución da ecuación de Möbius $u = e^{-f}$ é solución da ecuación local de Möbius. A dita ecuación local estúdiase en xeometría de Riemann e en xeometría semiriemanniana en conexión coa descomposición local dunha variedade como un produto warped.

A existencia de solucións locais da ecuación de Möbius $B(f) = 0$ nunha variedade semiriemanniana (M, g) inflúe na estrutura local da variedade, como o poñen de manifesto os dous seguintes resultados.

Proposición 1.4.1 [36] *Sexa (M, g) unha variedade semiriemanniana. Entón as dúas seguintes condicións son equivalentes:*

i) Existe unha solución non-constante u da ecuación $H_u = \frac{\Delta u}{n} g$ nunha veciñanza dun punto p con $g(\nabla u, \nabla u)(p) \neq 0$.

ii) Hai unha veciñanza U de p, unha función $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\lambda(t) \neq 0$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e unha variedade semiriemanniana (N, h) tal que $(U, g_{|U})$ é isométrica ao produto warped

$$((-\epsilon, \epsilon), \eta dt^2) \times_\lambda (N, h) = ((-\epsilon, \epsilon) \times N, \eta dt^2 + \lambda(t)^2 h)$$

onde $\eta = sign(g(\nabla u, \nabla u)(p)) \in \{\pm 1\}$.

Proba.
Sexa $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$, $t \rightsquigarrow \alpha(t) = exp_p(t\nabla u(p))$. Esta curva é unha xeodésica en M. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ sexa N_t a compoñente conexa de $u^{-1}(u(\alpha(t)))$ que contén a $\alpha(t)$. Nunha veciñanza de p, $u(\alpha(t))$ é un valor regular da función u e, polo tanto, cada N_t é unha subvariedade de M. Notemos que N_0 é a compoñente conexa de $u^{-1}(u(p))$.

Para cada $x \in N_0$ sexa $I_x = \{exp_x(t\nabla u(x))/t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$. Cada I_x é unha subvariedade xeodésica de M. Comprobemos que N_t é unha subvariedade esférica. Sexan ν o campo de vectores curvatura media de N_t e X un campo de vectores tanxente a N_t. Como $[X, \nu] = 0$, pois M é localmente un produto, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \nu X(u) = X\nu(u) = Xg(\nabla u, \nu) = g(\nabla_X \nabla u, \nu) + g(\nabla u, \nabla_X \nu) \\ &= H_u(X, \nu) + g(\nabla u, \nabla_X \nu) = g(\nabla u, \nabla_X \nu), \end{aligned}$$

é dicir, ν é paralelo no fibrado normal de N_t.

Finalmente, probaremos que I_x e N_t se cortan ortogonalmente. Posto que

$$\nabla_{\nabla u}((g(\nabla u, \nabla u)^{-1/2}\nabla u) = 0,$$

temos que $(g(\nabla u, \nabla u)^{-1/2}\nabla u$ é un campo de vectores paralelo ao longo das súas curvas integrais. Pero $\alpha'(0)$ é un múltiplo constante del e como $\alpha(t)$ é unha xeodésica temos que I_x e N_t se cortan ortogonalmente □

O seguinte resultado describe a xeometría da variedade nunha veciñanza dun punto singular dunha solución da ecuación de Möbius.

Proposición 1.4.2 [35] *Sexa (M, g) unha variedade semiriemanniana admitindo unha solución non-constante da ecuación $H_u = \frac{\Delta u}{n} g$. Entón, verifícase:*

i) Os puntos nos que ∇u se anula son illados.

ii) Nunha veciñanza dun punto no que ∇u se anula, a métrica pódese expresar como un produto warped en coordenadas polares $g = \eta dt^2 + \lambda(t)^2 g_S$, onde g_S é a métrica inducida na esfera de raio unidade no espacio semieuclidiano da mesma signatura que g e $\eta = sign(g(\nabla u, \nabla u)(p)) \in \{\pm 1\}$.

1.5. Deformación conforme de métricas Osserman en dimensión catro

O Teorema 1.1.1 caracteriza as variedades puntualmente Osserman en dimensión catro. Posto que a propiedade de autodualidade (ou antiautodualidade) é un invariante conforme da métrica, ao facer un cambio conforme da métrica dun espacio puntualmente Osserman de dimensión catro obteremos un novo espacio puntualmente Osserman se e soamente se o dito cambio conserva o carácter de Einstein da métrica. Pero isto é o que caracteriza as transformacións de Möbius dunha métrica, como probaremos no Corolario 1.5.2. Logo, tendo en conta que a propiedade puntualmente Osserman en dimensión catro é un invariante das transformacións de

Möbius (ver Teorema 1.5.2), centrarémonos nesta sección no estudio da existencia de tales transformacións e o seu significado xeométrico. En primeiro lugar, é importante sinalar que as condicións que definen unha transformación de Möbius constitúen un sistema de ecuacións en derivadas parciais que, frecuentemente, estará sobredeterminado e, por tanto, non terá solución non-trivial. O noso obxectivo será probar que nunha variedade puntualmente Osserman (M,g) a existencia de transformacións de Möbius da métrica $\tilde{g}=e^{2f}g$ con ∇f non-nulo é característica dos espacios de curvatura constante, como se pon de manifesto no Teorema 1.5.4. Tamén veremos que cando $g(\nabla f,\nabla f)$ se anula identicamente entón a transformación de Möbius conserva os operadores de Jacobi.

Teorema 1.5.1 *Sexan (M,g) unha variedade semiriemanniana de dimensión n. Dada unha función $f:M\longrightarrow\mathbb{R}$ satisfacendo a ecuación de Möbius, $B(f)=0$, consideremos a métrica $\widetilde{g}=e^{2f}g$. Entón, temos as seguintes relacións entre*

i) Os tensores curvatura R e $\widetilde{R}$ de g e $\widetilde{g}$

$$\widetilde{R}=e^{2f}\left\{R+\frac{1}{n}\left(\Delta f+\frac{n-2}{2}g(\nabla f,\nabla f)\right)g\odot g\right\}, \tag{1.5.11}$$

onde a notación $g\odot g$ é a mesma que a usada no Teorema 1.1.2.

ii) Os tensores de Ricci Ric e $\widetilde{Ric}$ de g e $\widetilde{g}$

$$\widetilde{Ric}=Ric-\frac{n-1}{n}\left(2\Delta f+(n-2)g(\nabla f,\nabla f)\right)g. \tag{1.5.12}$$

Proba.
A proba deste teorema séguese de xeito inmediato do Teorema 1.1.2 usando que f satisfai a ecuación de Möbius, é dicir, tendo en conta que

$$H_f-df\otimes df-\frac{1}{n}(\Delta f-g(\nabla f,\nabla f))=0.$$

□

Dada unha variedade semiriemanniana (M,g), existe un campo de tensores de tipo $(1,1)$, que denotaremos por ϕ_{Ric}, tal que

$$Ric(X,Y)=g(\phi_{Ric}X,Y)$$

para todo par de campos de vectores X,Y sobre a variedade M. A este campo de tensores, ϕ_{Ric}, chamarémolo *operador de Ricci* da variedade (M,g).

Corolario 1.5.1 *Sexa (M,g) unha variedade semiriemanniana de dimensión n e consideremos a métrica $\tilde{g}=e^{2f}$, sendo $f:M\longrightarrow\mathbb{R}$ unha función diferenciable. Se f satisfai a ecuación de Möbius entón os autoespacios do operador de Ricci de $\tilde{g}$ coinciden cos autoespacios do operador de Ricci de g.*

Proba.
Posto que f satisfai a ecuación de Möbius cúmprese a igualdade (1.5.12), de onde obtemos que

$$e^{2f}\phi_{\widetilde{Ric}} = \phi_{Ric} - \frac{n-1}{n}(2\Delta f + (n-2)g(\nabla f, \nabla f)id.$$

A anterior igualdade proba o resultado. $\square$

Corolario 1.5.2 *Sexa (M, g) unha variedade conexa de Einstein n-dimensional $(n \geq 3)$ e sexa $\widetilde{g} = e^{2f}g$, sendo $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Entón, $(M, \widetilde{g})$ é de Einstein se e soamente se $B_g(f) = 0$.*

Proba.
Tendo en conta o anterior corolario, é inmediato que se f satisfai a ecuación de Möbius e g é unha métrica de Einstein entón $\tilde{g} = e^{2f}$ tamén é de Einstein.

Supoñamos agora que g e $\tilde{g}$ son métricas de Einstein. Entón, $Ric = \frac{Sc}{n}g$ e $\widetilde{Ric} = \frac{\widetilde{Sc}}{n}\widetilde{g} = e^{2f}\frac{\widetilde{Sc}}{n}g$. Logo, de (1.1.10) deducimos que

$$(n-2)(H_f - df \otimes df) = (\mu - \Delta f - (n-2)g(\nabla f, \nabla f))g \tag{1.5.13}$$

onde $\mu = \frac{Sc}{n} - e^{2f}\frac{\tilde{Sc}}{n}$. Calculando a traza dos dous tensores que aparecen na anterior igualdade, obtemos

$$(n-2)(\Delta f - g(\nabla f, \nabla f)) = n(\mu - \Delta f - (n-2)g(\nabla f, \nabla f)).$$

Despexando μ,

$$\mu = \frac{2(n-1)}{n}\Delta f + \frac{(n-2)(n-1)}{n}g(\nabla f, \nabla f).$$

Agora, substituíndo μ en (1.5.13) obtemos que

$$(n-2)(H_f - df \otimes df) = \frac{n-2}{n}(\Delta f - g(\nabla f, \nabla f))g.$$

É dicir, f satisfai a ecuación de Möbius, pois $n \geq 3$. $\square$

A partir do anterior corolario e do Teorema 1.1.1 obtemos unha caracterización das métricas puntualmente Osserman conformemente equivalentes a outra dada que sexa puntualmente Osserman.

Teorema 1.5.2 *Sexa (M, g) unha variedade puntualmente Osserman de dimensión catro. Dada unha función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e a métrica $\widetilde{g} = e^{2f}g$ sobre M, temos que $(M, \widetilde{g})$ é puntualmente Osserman se e soamente se f satisfai a ecuación de Möbius, é dicir, $B_g(f) = 0$.*

O anterior resultado permítenos obter novos exemplos de variedades puntualmente Osserman de dimensión catro a partir dos xa coñecidos. Cada solución f da ecuación de Möbius nunha variedade puntualmente Osserman (M, g) de dimensión catro dá lugar a outra variedade puntualmente Osserman sen máis que considerar na variedade M a métrica $\widetilde{g} = e^{2f} g$.

Non se coñecen exemplos de variedades puntualmente Osserman que teñan dimensión catro, que sexan non-simétricas e con $Ric \neq 0$ (ver [27]). Pasamos agora a estudiar a posibilidade de atopar algún exemplo que cumpra as anteriores condicións mediante a busca de solucións da ecuación de Möbius. Durante o que resta desta sección suporemos que (M, g) é unha variedade puntualmente Osserman de dimensión catro e que a métrica g ten signatura $(+, +, -, -)$.

Como un primeiro paso na anterior análise, damos o seguinte resultado.

Teorema 1.5.3 *Sexa* $(M, g) = (I \times N, dt^2 + \lambda^2 g_N)$ *un produto twisted, onde* I *denota un intervalo da recta real,* N *é unha variedade semiriemanniana conexa de dimensión tres e* g *é unha métrica semiriemanniana en* M *de signatura* $(+, +, -, -)$. *Se* (M, g) *é unha variedade de Einstein entón* (M, g) *é unha variedade de curvatura constante.*

Proba.
Antes de nada, notemos que polo Teorema 1.3.1, $(M, g) = (I \times N, dt^2 + \lambda^2 g_N)$ pódese expresar como un produto warped para algunha función de deformación, que seguiremos denotando por λ. Agora, posto que (M, g) é de Einstein, o seu tensor de Ricci, Ric, é un múltiplo da métrica g, $Ric = \frac{Sc}{n} g$. Entón, de (1.3.6) séguese que

$$Ric_N(V, W) = \left(\frac{Sc}{n} + \Delta\zeta \right) g(V, W),$$

onde Ric_N denota o tensor de Ricci de (N, g_N) e $\zeta = log(\lambda)$. É dicir, (N, g_N) é unha variedade de Einstein e, como ten dimensión tres, ten curvatura constante c. De (1.3.6) dedúcese que, para vectores unitarios $X \in \Gamma TI$ e $U \in \Gamma TN$,

$$Ric(X, X) = -3((\zeta')^2 + \zeta''),$$

e

$$Ric(U, U) = 2ce^{-2\zeta} - (\zeta'' + 3(\zeta')^2).$$

Entón, como (M, g) é unha variedade de Einstein, a función ζ satisfai a ecuación

$$\zeta'' e^{2\zeta} + c = 0, \tag{1.5.14}$$

onde c é a curvatura seccional (constante) de (N, g_N). As solucións da ecuación (1.5.14) están dadas, en función de $\lambda = e^{\zeta}$, por (ver [28])

i) Se $c > 0$, entón

$$\lambda^2(t) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{4}{a} csenh^2(t) \dfrac{\sqrt{a}(t+b)}{2}, & (a > 0), \\ c(t+b)^2, & (a = 0), \\ -\dfrac{4}{a} csenh^2(t) \dfrac{\sqrt{-a}(t+b)}{2}, & (a < 0). \end{cases}$$

ii) Se $c = 0$, daquela

$$\lambda^2(t) = be^{at}, \qquad (a \neq 0).$$

iii) Se $c < 0$, entón

$$\lambda^2(t) = -\frac{4}{a} ccosh^2 \frac{\sqrt{a}(t+b)}{2}, \qquad (a > 0),$$

onde b é un número real calquera. Para rematar a proba do resultado, soamente nos resta comprobar que (M, g) ten curvatura constante. Para iso, sexan $X \in \mathcal{L}(I)$ e $U, V, W \in \mathcal{L}(N)$ formando unha referencia ortonormal nunha veciñanza do punto p. Usando a Proposición 1.3.5, calculamos os operadores de Jacobi R_X, R_U, R_V e R_W. Resulta que o operador de Jacobi R_X é diagonalizable cun único autovalor, $-(\zeta'' + (\zeta')^2)$. Os operadores de Jacobi R_U, R_V e R_W son diagonalizables con dous autovalores, $-(\zeta'' + (\zeta')^2)$ e $\frac{c}{e^{2\zeta}} - (\zeta')^2$, correspondéndose nos tres casos o primeiro autovalor co autovector X e tendo multiplicidade un. Polo tanto, posto que a función $\zeta = log(\lambda)$ satisfai a ecuación diferencial $e^{2\zeta}\zeta'' + c = 0$, equivalente á ecuación $\zeta'' + (\zeta')^2 = (\zeta')^2 - \frac{c}{e^{2\zeta}}$, temos que (M, g) é unha variedade puntualmente Osserman. Logo, temos que (M, g) é unha variedade de curvatura constante C, pois os operadores de Jacobi teñen un único autovalor. $\square$

No seguinte resultado establecemos que cando consideramos unha transformación de Möbius da métrica dun espacio puntualmente Osserman de dimensión catro entón o espacio ten curvatura constante ou os operadores de Jacobi coinciden.

Teorema 1.5.4 *Sexa (M, g) unha variedade puntualmente Osserman e consideremos en M a métrica $\tilde{g} = e^{2f} g$, onde $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función non-constante satisfacendo a ecuación de Möbius. Entón, cada punto p dun conxunto aberto denso en M ten unha veciñanza U tal que:*

i) (M, g) ten curvatura seccional constante en U, ou

ii) os operadores de Jacobi de (M, g) e $(M, \tilde{g})$ coinciden en U.

Proba.
Consideremos os conxuntos $A_1 = \{p \in M / g(\nabla f, \nabla f)(p) \neq 0\}$ e $A_2 = Int(M \backslash A_1)$, onde Int denota o interior do conxunto. Obviamente, $A = A_1 \cup A_2$ é aberto, como unión de abertos, e denso en M.

Sexa $p \in A_1$ e consideremos $u = e^{-f}$. Entón $H_u = \frac{\Delta u}{4} g$. Como $g(\nabla f, \nabla f)(p) \neq 0$ e $\nabla u = -e^{-f} \nabla f$ resulta que $g(\nabla u, \nabla u) \neq 0$. Entón pola Proposición 1.4.1 temos que (M, g) é un produto warped nunha veciñanza U de p. Como (M, g) é de Einstein, por ser puntualmente Osserman, séguese do Teorema 1.5.3 que (M, g) ten curvatura seccional constante en U.

Agora, consideremos $p \in A_2$. Da definición do conxunto A_2 temos que $g(\nabla f, \nabla f)$ é identicamente nula nunha veciñanza U de p. Da Proposición 1.4.2 séguese que os ceros de ∇f son illados. Se $(\nabla f)(p) = 0$, a mesma proposición afirma que nunha veciñanza de p a variedade é un produto warped e, por ser puntualmente Osserman, de Einstein. Logo, polo Teorema 1.5.3, nunha veciñanza de cada cero de ∇f a variedade (M, g) ten curvatura constante.

Supoñamos agora que $(\nabla f)(p) \neq 0$. Entón, considerando $u = e^{-f}$ temos que $H_u = \frac{\Delta u}{4} g$. Como $g(\nabla f, \nabla f) = 0$ e $\nabla u = -e^{-f} \nabla f$ resulta que $g(\nabla u, \nabla u) = 0$. Logo, se X é un campo de vectores calquera nunha veciñanza de p temos que

$$0 = \nabla_X g(\nabla u, \nabla u) = 2g(\nabla_X \nabla u, \nabla u) = 2H_u(X, \nabla u) = \frac{\Delta u}{2} g(X, \nabla u).$$

Como por hipótese é $\nabla u(p) \neq 0$ temos que $\Delta u = 0$ nunha veciñanza do punto p. Polo Teorema 1.5.1 a relación entre o tensor curvatura $\widetilde{R}$ da métrica $\widetilde{g}$ e o tensor curvatura R da métrica g é $\widetilde{R} = e^{2f} R$. Polo tanto, os operadores de Jacobi das dúas variedades son idénticos. $\square$

Capítulo 2

Ecuación de Möbius asociada a funcións tempo

Neste capítulo estudiamos unha modificación da ecuación de Möbius que figura no capítulo anterior, e que seguimos chamando ecuación de Möbius, nun espacio-tempo (M, g). Comezamos introducindo as definicións e o material básico que se empregará ao longo deste capítulo e do seguinte. Tamén damos unha descrición dos modelos espacio-tempo de Robertson-Walker, que caracterizaremos na sección §2,5. A ecuación de Möbius introducímola na sección §2,3, onde vemos que o feito de que unha función tempo dunha referencia sincronizable sexa solución dela permítenos deformar conformemente a métrica de xeito que os autoespacios do operador de Ricci queden invariantes no espacio ortogonal á dita referencia. Tamén mostramos que se unha función tempo satisfai a ecuación de Möbius entón o espacio-tempo ten unha singularidade no pasado, como é de esperar nun modelo cosmolóxico fisicamente realista. Xunto coa incompletitude xeodésica temporal pasada, o espacio-tempo tamén debería ter unha estrutura de produto warped. A ecuación de Möbius tamén satisfai esta expectativa, como mostramos na sección §2,4 baixo a hipótese de que o tensor tensión-enerxía se corresponde cun fluído. Finalmente rematamos o capítulo obtendo unha caracterización dos modelos de Robertson-Walker, impoñendo unha condición adicional sobre a estrutura analítica global do espacio-tempo.

2.1. Preliminares

Unha *variedade de Lorentz* é unha variedade semiriemanniana (M, g), onde a métrica g é de signatura $(-, +, \ldots, +)$. Un vector v, diferente de cero, tanxente á variedade M nun punto $p \in M$ dise *temporal, espacial* ou *nulo* segundo $g(v, v)$ sexa negativo, positivo ou cero, respectivamente. Unha curva $\gamma : I \longrightarrow M$ dise *temporal, espacial* ou *nula* segundo os seus vectores tanxentes $\gamma'(t)$ sexan temporais, espaciais ou nulos, respectivamente, para todo $t \in I$. Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$

dise *temporal, espacial* ou *nulo* segundo $g(X,X)(p)$ sexa negativo, positivo ou cero, respectivamente, para todo $p \in M$.

Fisicamente, unha curva temporal nunha variedade de Lorentz corresponde á traxectoria que segue unha partícula que se move a menor velocidade que a da luz. As curvas nulas correspóndense cos movementos que se realizan á velocidade da luz. Aínda que a teoría xeral da relatividade predí que ningunha partícula se pode mover a maior velocidade que a luz, as curvas espaciais (que se corresponderían con movementos que se realizan a maior velocidade que a da luz) teñen un claro interese xeométrico.

A continuación pasamos a considerar os conceptos de *pasado* e *futuro* nunha variedade de Lorentz. Sexa V un espacio vectorial dotado dunha métrica de Lorentz g. Denotamos por $\mathcal{T}$ o conxunto formado por todos os vectores temporais de V. Dado $u \in \mathcal{T}$, defínese

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} / g(u,v) < 0\}$$

como o *cono temporal* de V que contén ao vector u. O *cono temporal oposto* é

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in \mathcal{T} / g(u,v) > 0\}.$$

$\mathcal{T}$ pódese expresar como a unión disxunta de $C(u)$ e $C(-u)$. É dicir, en cada espacio vectorial cunha métrica de Lorentz hai dous conos temporais. Sen embargo, non temos ningunha forma intrínseca de distinguir o un do outro. Logo, elixir un vector temporal $u \in V$ significa dar unha orientación temporal a (V,g). Dise que u apunta cara ao futuro e que $-u$ apunta cara ao pasado.

Agora, sexa (M,g) unha variedade de Lorentz conexa. Cada espacio tanxente T_pM é un espacio vectorial de Lorentz. Logo, podemos fixar unha orientación temporal para cada T_pM. Diremos que (M,g) é *temporalmente orientable* se podemos elixir unha orientación temporal de cada espacio tanxente que varíe de forma continua ao longo de toda a variedade. As variedades de Lorentz temporalmente orientables pódense caracterizar pola existencia dun campo de vectores temporal sobre elas, é dicir, unha variedade de Lorentz (M,g) é temporalmente orientable se e soamente se existe un campo de vectores temporal unitario $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Chamaremos *espacio-tempo* (M,g) a unha variedade de Lorentz de dimensión catro, conexa e temporalmente orientable. Os *acontecementos* dun espacio-tempo (M,g) represéntanse por puntos da variedade M e as *traxectorias* das partículas son curvas diferenciables (posiblemente a trozos). As anteriores curvas son temporais cando describen o movemento de partículas materiais e nulas cando modelan como se moven partículas de luz.

Un espacio-tempo (M,g) dise *temporalmente xeodesicamente completo* se toda xeodésica temporal inextensible está definida en todo $\mathbb{R}$. E dise que é *temporalmente xeodesicamente incompleto* se existe unha xeodésica temporal inextensible que non está definida en toda a recta real. Tamén diremos que un espacio-tempo (M, g) é *temporalmente xeodesicamente incompleto no pasado* (resp. *no futuro*) se existe unha xeodésica temporal inextensible que está definida nun intervalo aberto (a, b) da recta real con $a > -\infty$ (resp. $b < \infty$).

Unha *referencia* nun espacio-tempo (M, g) é un campo de vectores temporal unitario Z dirixido cara ao futuro en todo punto de M. Unha referencia Z dise *sincronizable* se a distribución $Z^\perp$ é integrable ou, equivalentemente, se existen dúas funcións diferenciables $h, f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, con $h > 0$, tal que $Z = -h\nabla f$, e dise *sincronizable en tempo propio* se existe unha función diferenciable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $Z = -\nabla f$.

Notemos que se Z é sincronizable entón, posto que é un campo de vectores temporal unitario, temos que $h = (-g(\nabla f, \nabla f))^{-1/2}$. Tamén notamos que toda referencia sincronizable en tempo propio é obviamente unha referencia sincronizable.

Se Z é sincronizable ou sincronizable en tempo propio, calquera función f satisfacendo a relación anterior denomínase unha *función tempo* ou unha *función tempo propio* para Z, respectivamente. En tal caso, a distribución $Z^\perp$ é integrable e as súas follas son as hipersuperficies de nivel da función tempo f. Notamos que no caso de existir unha función tempo, ou tempo propio, esta non é única. Dicimos que Z é unha *referencia xeodésica* se Z é un campo de vectores xeodésico, é dicir, $\nabla_Z Z = 0$.

2.2. Modelos espacio-tempo de Robertson-Walker

Supoñamos que a materia do universo se comporta como se fose un fluído, no que cada partícula é unha galaxia. En lugar de considerar un modelo discreto para este fluído é moito máis fácil traballar cun modelo diferenciable. Admitamos que sobre as partículas do fluído non actúa ningunha forza salvo a que exercen unhas sobre outras debido á forza da gravidade. O modelo físico que se utiliza para estudiar o universo é un espacio-tempo (M, g). A continuación pasamos a estudiar a influencia que certas hipóteses físicas teñen na xeometría do dito espacio-tempo (ver [31]).

Hipótese 1 *Por cada punto $p \in M$ pasa unha xeodésica que representa o movemento dunha partícula do fluído.*

Isto equivale a dicir que estas xeodésicas constitúen unha foliación $\mathcal{F}$ de M de dimensión un. Para cada punto $p \in M$ denotamos por F_p o subespacio de dimensión un de T_pM tanxente a $\mathcal{F}$. Posto que o movemento das partículas no espacio-tempo (M, g) está descrito por curvas temporais, temos que cada F_p é un subespacio temporal de T_pM. O espacio $F_p^\perp$ formado polos vectores de T_pM ortogonais a F_p é o espacio 3-dimensional común a todas as galaxias que pasan por p nun determinado instante. $F_p^\perp$ é un subespacio espacial de T_pM.

Hipótese 2 *A distribución que a cada punto $p \in M$ lle asigna $F_p^\perp$ é involutiva.*

As subvariedades integrais da dita distribución, que son hipersuperficies espaciais tridimensionais, son o espacio común a todas as galaxias nun instante determinado. Esta hipótese equivale a dicir que existe un espacio común para todas as galaxias en cada instante; e podería debilitarse supoñendo que se cumpre para un só instante.

Coas dúas hipóteses anteriores temos que a variedade M se pode expresar localmente como un produto

$$M = I \times S$$

onde I é un intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e S é unha variedade conexa 3-dimensional.

Sexa $U = \partial/\partial t$ o levantamento a $I \times S$ do campo de vectores d/dt definido en $I \subset \mathbb{R}$. Temos que U é un campo de vectores tanxente á foliación $\mathcal{F}$ e, polo tanto, é un campo de vectores temporal. Para cada $x \in S$, $I \times \{x\}$ representa a historia da galaxia x. Cada $I \times \{x\}$ pódese parametrizar por $\gamma_x(t) = (t, x)$. U é o campo de vectores velocidade de cada galaxia γ_x ou, o que é o mesmo, cada γ_x é unha curva integral do campo de vectores U. A función t dános o tempo propio común para todas as galaxias. Para t fixo, este espacio é a hipersuperficie

$$S(t) = \{t\} \times S = \{(t, x)/x \in S\}.$$

A xeometría do espacio-tempo séguese das hipóteses feitas acerca do fluxo galáctico. Das dúas anteriores hipóteses séguese que

$$g(U, U) = -1$$

e

$$U \perp S(t), \text{ para todo } t \in I.$$

Hipótese 3 *Fixado $p \in M$, para cada par de vectores unitarios espaciais $u, v \in F_p^\perp$ existe unha isometría local ϕ de (M, g) que deixa fixo p, conserva a foliación $\mathcal{F}$ e tal que a súa diferencial transforma u en v, é dicir, $(d\phi)_p(u) = v$.*

Esta terceira hipótese reflite a idea física de que non hai direccións espaciais privilexiadas e está en total concordancia coas observacións do universo que ata o de agora se fixeron.

Admitindo as anteriores hipóteses, verifícase o seguinte resultado.

Teorema 2.2.1 [31, Páx. 348] *Nunha veciñanza de cada punto p do espacio-tempo (M, g) temos que a variedade M se pode expresar como un produto $M = I \times S$, onde I é un intervalo da recta real e S é unha variedade conexa 3-dimensional, e a métrica g é a métrica dun produto warped, $g = -dt^2 + \lambda^2(t) g_S$, onde g_S é unha métrica de Riemann na variedade S de curvatura constante, $k = 0$, $k = 1$ ou $k = -1$.*

As hipóteses anteriores non nos permiten deducir como pode ser o espacio-tempo (M, g) globalmente. Sen embargo, o teorema anterior dinos que o modelo máis sinxelo de espacio-tempo compatible coas hipóteses precedentes é $(M, g) = I \times_\lambda S$ considerado globalmente.

Definición 2.2.1 Sexa S unha variedade riemanniana conexa 3-dimensional de curvatura constante $k = -1, 0$ ou 1. Sexa $\lambda > 0$ unha función diferenciable definida nun intervalo aberto I de $\mathbb{R}$. Entón, o produto warped

$$M(k, \lambda) = I \times_\lambda S$$

denomínase un *espacio-tempo de Robertson-Walker.*

Máis detalladamente, $M(k, \lambda)$ é a variedade $I \times S$ coa métrica de Lorentz

$$g = -dt^2 + \lambda^2(t) g_S,$$

onde t é a coordenada usual de $\mathbb{R}$ e g_S é a métrica da variedade riemanniana S. $M(k, \lambda)$ é unha variedade de Lorentz temporalmente orientable. Chega con considerar a orientación temporal dada polo campo de vectores temporal e unitario $U = \partial/\partial t$, que consideramos apunta sempre cara ao futuro.

A notación $M(k, \lambda)$ non describe completamente a variedade que define, pois non precisa quen son nin o intervalo I nin a variedade S. Sen embargo, destaca dous elementos fundamentais como son k e λ.

A variedade de Riemann S denomínase o espacio de $M(k, \lambda)$. As eleccións estándar para S son as variedades completas e simplemente conexas: $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^3$, segundo k sexa $-1, 0$ ou 1, respectivamente.

Como aplicación dos resultados da sección §1.3, obtemos os seguintes resultados, que nos describen a conexión de Levi Civita, o tensor curvatura de Riemann, o tensor de Ricci e a curvatura escalar dos modelos espacio-tempo de Robertson-Walker (ver [31] e [41]).

Proposición 2.2.1 *Sexa $U = \partial/\partial t$ e sexan X, Y campos de vectores tanxentes a S. Entón,*

i) $\nabla_U U = 0,$

ii) $\nabla_U X = \nabla_X U = \dfrac{\lambda'}{\lambda} U,$

iii) $\nabla_X Y = \nabla^S_X Y + \lambda\lambda' g_S(X, Y) U,$

onde g_S e ∇^S denotan, respectivamente, a métrica e a conexión de Levi Civita da variedade riemanniana S que aparece na definición de $M(k, \lambda)$, e λ' denota a derivada da función λ.

O tensor curvatura do espacio-tempo de Robertson-Walker está caracterizado no seguinte resultado.

Proposición 2.2.2 *Sexan X, Y e Z campos de vectores tanxentes a S. Logo, as compoñentes non-nulas do tensor curvatura están dadas por*

i) $R(X,Y)Z = \left\{ \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 + \frac{k}{\lambda^2} \right\} (g(Y,Z)X - g(Y,Z)X),$

ii) $R(X,U)U = -\frac{\lambda''}{\lambda} U,$

iii) $R(X,U)Y = -\frac{\lambda''}{\lambda} g(X,Y)U.$

Finalmente, obtemos a expresión do tensor de Ricci e da curvatura escalar de $M(k, \lambda)$ nos dous seguintes resultados.

Proposición 2.2.3 *Sexan X, Y campos de vectores tanxentes a S. O tensor de Ricci satisfai:*

i) $Ric(X,Y) = \left\{ \frac{\lambda''}{\lambda} + 2\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 + \frac{2k}{\lambda^2} \right\} g(X,Y),$

ii) $Ric(U,U) = -\frac{3\lambda''}{\lambda}.$

Proposición 2.2.4 *A curvatura escalar dun espacio de Robertson-Walker vén dada pola expresión*

$$Sc = 6\left\{ \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 + \frac{k}{\lambda^2} + \frac{\lambda''}{\lambda} \right\}.$$

Hubble descubriu que a maior parte das galaxias están actualmente separándose de nós e que a velocidade á que o fan é directamente proporcional á distancia á que se atopan de nós. O valor actual da constante de proporcionalidade estímase en $1/(18 \pm 2 \times 10^9 anos)$, denótase por H_0 e coñécese con nome de *constante de Hubble.* A relación nos espacios de Robertson-Walker da constante de Hubble coa función de deformación λ está dada pola relación $\lambda'(t_0) = H_0\lambda(t_0)$, onde t_0 representa o tempo galáctico actual. Posto que a función λ é sempre positiva teríamos que H_0 é o cociente $\lambda'(t_0)/\lambda(t_0)$. Destacamos aquí o feito de que baixo a hipótese $H_0 > 0$ (é dicir, supoñendo que o universo se está a expandir no momento actual) resulta que os modelos espacio-tempo de Robertson-Walker son temporalmente xeodesicamente incompletos no pasado. É dicir, existe un número real t_P (principio do tempo) tal que o intervalo I é da forma (t_P, t_F), onde t_F é un número real (o fin do tempo) ou pode ser ∞. Na seguinte sección mostramos que se a función tempo nun espacio-tempo satisfai a ecuación de Möbius este ten unha singularidade no pasado e, baixo condicións adicionais, tamén no futuro.

2.3. Ecuación de Möbius asociada a funcións tempo

Cando queremos trasladar a ecuación de Möbius a un espacio-tempo (M, g) atopámonos con que funcións con importante significado físico non satisfán a dita ecuación (por exemplo, as funcións tempo definidas en modelos espacio-tempo realistas). Isto, motiva que estudiemos unha modificación da ecuación de Möbius, que consistirá basicamente en considerar a dita ecuación no espacio ortogonal ao tempo. A continuación precisamos a modificación que imos considerar.

Definición 2.3.1 Sexa (M, g) un espacio-tempo n-dimensional. Definimos o *tensor de Möbius* dunha función tempo $f : M \to \mathbb{R}$ dunha referencia sincronizable $Z = -h\nabla f$ en (M, g) como a aplicación linear $\hat{B}^{\perp}_{+}(f) : Z^{\perp} \to TM$ dada por

$$\hat{B}^{\perp}_{+}(f) = h_f - \frac{1}{n-1}(\Delta f + g(\nabla f, \nabla f))id. \tag{2.3.1}$$

Tamén diremos que f satisfai a *ecuación de Möbius* en (M, g) se $\hat{B}^{\perp}_{+}(f) = 0$, ou equivalentemente,

$$H_f(Z, X) = 0,$$
$$\hat{B}^{\perp}_{+}(X, Y) = H_f(X, Y) - \frac{1}{n-1}(\Delta f + g(\nabla f, \nabla f))g(X, Y) = 0,$$

para cada par de campos de vectores $X, Y \in \Gamma Z^{\perp}$.

A anterior ecuación é sustancialmente a ecuación de Möbius considerada en $(\nabla f)^{\perp}$. Notamos que a ecuación de Möbius se caracterizaba porque cando se considera nunha variedade (M, g) un cambio conforme da métrica $\tilde{g} = e^{2f}g$, se f satisfai a ecuación de Möbius, entón os autoespacios do operador de Ricci de g coinciden cos autoespacios do operador de Ricci de $\tilde{g}$. Vemos a continuación que se f é solución da anterior modificación da ecuación de Möbius, entón os autoespacios dos operadores de Ricci de g e de $\tilde{g} = e^{2f}g$ en $(\nabla f)^{\perp}$ coinciden.

Teorema 2.3.1 *Sexan (M, g) un espacio-tempo, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función satisfacendo a ecuación de Möbius (2.3.1) e consideremos a métrica $\tilde{g} = e^{2f}g$. Entón, os autoespacios do operador de Ricci de g en $(\nabla f)^{\perp}$ coinciden cos do operador de Ricci de $\tilde{g}$.*

Proba.
Usando que f é solución da ecuación de Möbius (2.3.1), obtense do Teorema 1.1.2, que

$$e^{2f}\phi_{\widetilde{Ric}} = \phi_{Ric} - \frac{1}{n-1}((2n-3)\Delta f + (n-2)ng(\nabla f, \nabla f))id,$$

de onde se segue o resultado. □

Logo, podemos dicir que o significado xeométrico da existencia de solucións da ecuación de Möbius nun espacio-tempo establécese en termos da existencia de cambios conformes da métrica que conserven os autoespacios do operador de Ricci no espacio ortogonal ao tempo $(\nabla f)^{\perp}$.

Nota 2.3.1 No caso particular en que o espacio-tempo (M, g) satisfaga a ecuación de Einstein para un tensor tensión-enerxía correspondente a un fluído perfecto é fácil comprobar que cando se considera un cambio conforme da métrica $\tilde{g} = e^{2f}g$, sendo f unha solución da ecuación de Möbius (2.3.1), entón todos os autoespacios do operador de Ricci de g coinciden cos do operador de Ricci de $\tilde{g}$ (incluido o autovector ∇f, e non só os autoespacios que haxa en $(\nabla f)^{\perp}$).

Notemos que o termo $df \otimes df$ que figura na ecuación de Möbius desaparece, pois é nulo en $(\nabla f)^{\perp}$. A motivación para escoller $\hat{B}_{+}^{\perp} = H_f - \frac{1}{n-1}(\Delta f + g(\nabla f, \nabla f))g = 0$ como ecuación de Möbius en lugar de considerar a dita ecuación como a dada por $\hat{B}_{-}^{\perp} = H_f - \frac{1}{n-1}(\Delta f - g(\nabla f, \nabla f))g = 0$ quedará clara despois dos seguintes resultados (ver Nota 2.3.4).

Na sección §1,4 vimos que a ecuación de Möbius se podía transformar unha ecuación linear mediante un cambio de variable. A continuación vemos que, facendo un cambio de variable similar, obtemos que a ecuación de Möbius (2.3.1) tamén se pode transformar nunha ecuación linear.

Proposición 2.3.1 *Sexa $f : (M, g) \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función tempo da referencia sincronizable $Z = -h\nabla f$. Supoñamos que f é satisfai a ecuación de Möbius $\widehat{B}_{+}^{\perp}(f) = 0$ en (M, g). Entón a función $t = e^{f}$ satisfai a ecuación*

$$h_t = \frac{\Delta t}{n-1} id$$

en $Z^{\perp}$, ou equivalentemente,

$$H_t(X, Z) = 0,$$
$$H_t(X, Y) = \frac{\Delta t}{n-1} g(X, Y),$$

para todo par de campos de vectores $X, Y \in \Gamma Z^{\perp}$.

Proba.
Posto que $t = e^f$ temos que $\nabla t = t\nabla f$. Logo, para todo campo de vectores X en M cúmprese a relación

$$\begin{aligned} h_t(X) = \nabla_X \nabla t &= tg(\nabla f, X)\nabla f + t\nabla_X \nabla f \\ &= t(h_f(X) + g(\nabla f, X)\nabla f)). \end{aligned}$$

Da anterior igualdade deducimos que $\Delta t = trh_t = t(\Delta f + g(\nabla f, \nabla f))$. Agora, como f satisfai a ecuación de Möbius $\hat{B}_+^{\perp}(f) = 0$,

$$h_t = \frac{\Delta t}{n-1} id$$

en $Z^{\perp}$. □

Antes de continuar co seguinte resultado necesitamos definir o concepto de diverxencia dun campo de vectores.

Definición 2.3.2 Sexa X un campo de vectores definido nunha variedade semiriemanniana (M, g). Entón a *diverxencia* de X en (M, g) está definida por

$$divX = traza\{Y \rightsquigarrow \nabla_Y X\}.$$

Se $\{E_1, \cdots, E_n\}$ denota unha referencia local ortonormal de campos de vectores sobre M entón a diverxencia do campo de vectores X está dada pola expresión:

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g(\nabla_{E_i} X, E_i),$$

onde $\epsilon_i = g(E_i, E_i)$, $i = 1, \cdots, n$.

Dado que $t = e^f$ resulta ser solución do problema linear asociado á ecuación de Möbius, é de esperar que o seu gradiente reflita certa información xeométrica, como mostramos no seguinte resultado.

Proposición 2.3.2 *Sexa $f : M \to \mathbb{R}$ unha función tempo da referencia sincronizable $Z = -h\nabla f$ no espacio-tempo (M, g). Supoñamos que f satisfai a ecuación de Möbius $\hat{B}_+^{\perp}(f) = 0$. Entón ∇t é un campo de vectores xeodésico dirixido cara ao pasado en (M, g), onde $t = e^f$.*

Ademais, $g(\nabla t, \nabla t)$ é constante en M e $Z = -(g(\nabla t, \nabla t)^{-1/2}\nabla t)$ é unha referencia xeodésica.

Proba.
Posto que $\nabla t = t\nabla f$ e $t > 0$ en M, ∇t é un campo de vectores dirixido cara o pasado en (M, g). Entón $Z = -(-g(\nabla t, \nabla t))^{-1/2}\nabla t$. Sexa $\{Z, X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ unha referencia local ortonormal de TM. Logo, usando a Proposición 2.3.1, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta t &= div \nabla t \\
&= -g(\nabla_Z \nabla t, Z) + \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{X_i} \nabla t, X_i) \\
&= -g(\nabla_Z \nabla t, Z) + \sum_{i=1}^{n-1} H_t(X_i, X_i) \\
&= -g(\nabla_Z \nabla t, Z) + \Delta t.
\end{aligned}$$

Séguese que $g(\nabla_Z \nabla t, Z) = 0$ e que, para todo $X \in \Gamma Z^\perp$,

$$g(\nabla_Z \nabla t, X) = g(\nabla_X \nabla t, Z) = \frac{\Delta t}{n-1} g(X, Z) = 0.$$

Polo tanto $\nabla_Z \nabla t = 0$, é dicir, ∇t é un campo de vectores xeodésico.

A continuación probamos que $g(\nabla t, \nabla t)$ é constante en M. Para iso, veremos que $\nabla g(\nabla t, \nabla t) = 0$. Sexa X un campo de vectores con $g(X, \nabla t) = 0$. Entón

$$\begin{aligned}
g(X, \nabla g(\nabla t, \nabla t)) &= X g(\nabla t, \nabla t) = 2g(\nabla_X \nabla t, \nabla t) \\
&= 2g(h_t(X), \nabla t) = 2\frac{\Delta t}{n-1} g(X, \nabla t) = 0.
\end{aligned}$$

Por outra parte,

$$g(\nabla t, \nabla g(\nabla t, \nabla t)) = \nabla t(g(\nabla t, \nabla t)) = 2g(\nabla_{\nabla t} \nabla t, \nabla t) = 0.$$

Logo, probamos que $g(\nabla t, \nabla t)$ é constante en M. Agora, posto que Z é un múltiplo constante de ∇t e este último é un campo de vectores xeodésico, temos que Z é un campo de vectores xeodésico. □

Nota 2.3.2 Posto que $g(\nabla t, \nabla t) = c$ (const.) < 0, temos que $Z = -\nabla \tilde{t}$ é unha referencia sincronizable en tempo propio en (M, g), sendo $\tilde{t} = (-g(\nabla t, \nabla t))^{-1/2} t$. (Nótese que $\tilde{f} = \log \tilde{t}$ tamén satisfai a ecuación de Möbius $\hat{B}^\perp_+(\tilde{f}) = 0$ en (M, g).) Logo, a función tempo propio $\tilde{t}$ de Z satisfai a ecuación $h_{\tilde{t}} = \frac{\Delta \tilde{t}}{n-1} id$ en $Z^\perp$.

A continuación vemos como a existencia de solucións da ecuación de Möbius predí a existencia de singularidades no pasado e, baixo certas condicións adicionais, tamén no futuro.

Teorema 2.3.2 *Sexa $f : M \to \mathbb{R}$ unha función tempo dunha referencia sincronizable $Z = -h\nabla f$ no espacio-tempo (M, g). Supoñamos que f é solución da ecuación de Möbius $\hat{B}^{\perp}_{+}(f) = 0$. Entón (M, g) é xeodesicamente temporalmente incompleto no pasado.*

Ademais, se $Ric(Z, Z) \geq 0$ e $(\Delta f + g(\nabla f, \nabla f))(p) > 0$ nalgún punto $p \in M$ entón (M, g) tamén é xeodesicamente temporalmente incompleto no futuro.

Proba.
Pola Nota 2.3.2 $\tilde{f} = \log \tilde{t}$ tamén é unha función tempo dunha referencia sincronizable $\tilde{Z} = -\tilde{h}\nabla \tilde{f}$ en (M, g) satisfacendo a ecuación de Möbius $\hat{B}^{\perp}_{+}(\tilde{f}) = 0$. Logo, podemos supor que $Z = -\nabla t$ é unha referencia sincronizable en tempo propio en (M, g). Sexa $\gamma : (a, b) \to M$ unha curva integral maximal de Z (de feito, γ é unha xeodésica temporal unitaria dirixida ao futuro). Entón

$$\frac{d}{ds}(t \circ \gamma) = g((\nabla t) \circ \gamma, \gamma') = 1,$$

de onde se segue $(t \circ \gamma)(s) = s + \beta$, sendo $\beta \in \mathbb{R}$. Posto que $t > 0$ sobre M, s ten que ser maior que $-\beta$. É dicir, $a > -\infty$ ou, o que é o mesmo, γ é incompleta no pasado.

Para demostrar a última afirmación, empregamos a igualdade

$$\frac{1}{2}\Delta g(\nabla t, \nabla t) = Ric(\nabla t, \nabla t) + g(\nabla \Delta t, \nabla t) + \|h_t\|^2,$$

onde $\|h_t\|^2 = \sum_{i=1}^{n} g(X_i, X_i) g(h_t(X_i), h_t(X_i))$ e $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é unha referencia ortonormal en TM. (Ver [25].) Agora, das condicións $g(\nabla t, \nabla t) = -1$, $Ric(\nabla t, \nabla t) \geq 0$ e $\|h_t\|^2 = \frac{(\Delta t)^2}{n-1}$, e da anterior igualdade séguese que $-g(\nabla \Delta t, \nabla t) \geq \frac{1}{n-1}(\Delta t)^2$.

Sexa $\gamma : (a, b) \to M$ unha curva integral maximal de $Z = -\nabla t$ con $\gamma(s_0) = p$ para $s_0 \in (a, b)$. É dicir, γ é unha xeodésica temporal dirixida ao futuro con $\gamma'(s_0) = Z_p$. Entón, posto que

$$((\Delta t) \circ \gamma)'(s) = -g((\nabla \Delta t) \circ \gamma, (\nabla t) \circ \gamma)(s) \geq \frac{1}{n-1}((\Delta t) \circ \gamma)^2(s) \geq 0,$$

$((\Delta t) \circ \gamma)(s)$ é unha función non-decrecente en (a, b).

Por hipótese temos que $\Delta t = t(\Delta f + g(\nabla f, \nabla f)) > 0$ en $p \in M$, de onde se segue que $((\Delta t) \circ \gamma)(s) > 0$ para todo $s \geq s_0$. Entón, da desigualdade

$$((\Delta t) \circ \gamma)'(s) \geq \frac{1}{n-1}((\Delta t) \circ \gamma)^2(s),$$

obtemos que

$$\int_{s_0}^{s} \frac{((\Delta t) \circ \gamma)'(u)}{((\Delta t) \circ \gamma)^2(u)} du \geq \frac{1}{n-1} \int_{s_0}^{s} du$$

para todo $s \geq s_0$. Así

$$\frac{1}{((\Delta t) \circ \gamma)(s_0)} - \frac{1}{n-1}(s - s_0) \geq \frac{1}{((\Delta t) \circ \gamma)(s)}$$

para todo $s \geq s_0$. Pero isto contradí que $s \to \infty$. Logo, debe ser $b < \infty$, é dicir, γ é incompleta no futuro. □

Nota 2.3.3 A hipótese $Ric(Z, Z) \geq 0$ que aparece no teorema anterior reflite a idea física de que a curvatura atrae. Logo, no caso dun espacio-tempo realista (M, g) esta hipótese sería certa e para que o dito espacio-tempo sexa xeodesicamente temporalmente incompleto no futuro chega con supor que $(\Delta f + g(\nabla f, \nabla f))(p) > 0$ nalgún punto $p \in M$.

Nota 2.3.4 A continuación explicamos porque optamos por considerar $\hat{B}^{\perp}_{+}(f) = 0$ como definición da ecuación de Möbius (2.3.1) en lugar de $\hat{B}^{\perp}_{-}(f) = 0$. No último caso, a función $t = e^{-f}$ sería solución da ecuación $h_t = \frac{\Delta t}{n-1} id$ en $Z^{\perp}$. Pero t non é unha función tempo dunha referencia sincronizable no espacio-tempo (M, g), pois $\nabla t = -t\nabla f$ é un campo de vectores temporal dirixido cara ao futuro. Logo, usar $t = e^{-f}$ no Teorema 2.3.2 serviría para predicir a incompletitude xeodésica temporal futura en primeiro lugar. Isto débese ao carácter reversible do tempo causado pola substitución $t = e^{-f}$ e non ten unha interpretación física. Isto tamén pode ser observado nos espacio-tempo de Robertson-Walker. A función tempo canónica t destes espacio-tempo satisfai a ecuación $h_t = \frac{\Delta t}{3} id$ en $(\nabla t)^{\perp}$ (ver, [41, p. 346]). Logo, mentras que $f = \log t$ é unha función tempo dunha referencia sincronizable satisfacendo a ecuación de Möbius $\hat{B}^{\perp}_{+}(f) = 0$, $f = -\log t$ non é unha función tempo dunha referencia sincronizable, aínda que é solución da ecuación $\hat{B}^{\perp}_{-}(f) = 0$. Xa que logo, a escolla de $\hat{B}^{\perp}_{+}(f) = 0$ como ecuación de Möbius nun espacio-tempo débese ao feito de que $t = e^{f}$ respecta a orientación temporal e, por tanto, a natureza causal das singularidades.

2.4. Descomposición local do espacio-tempo

Toda a información relativa a densidades e fluxo de enerxía e de momento nun espacio-tempo (M, g) pode ser modelada mediante un único campo de tensores simétrico de tipo $(0, 2)$, que denotaremos por T e denominaremos *tensor tensión-enerxía*. Ao campo de tensores T pídeselle que teña diverxencia nula, o cal expresa a lei física de conservación do momento-enerxía.

Sexa Z unha referencia nun espacio-tempo (M, g). Dise que un tensor tensión-enerxía T corresponde a un *fluído con fluxo asociado o campo de vectores* Z se T é da forma

$$T = \rho\omega \otimes \omega + \sum_{i=1}^{n-1} \varrho_i \eta_i \otimes \eta_i$$

en cada punto $p \in M$, onde $\omega(\,\cdot\,) = g(Z,\,\cdot\,)$, $\rho : M \to \mathbb{R}$, $\varrho_i \in \mathbb{R}$ e $\eta_i(\,\cdot\,) = g(\,\cdot\,, x_i)$ sendo $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ unha base ortonormal de $Z_p^{\perp}$. É dicir, o campo de tensores T corresponde a un fluído con fluxo asociado o campo de vectores Z se e soamente se $T(Z,X) = 0$ para todo $X \in \Gamma Z^{\perp}$. Na anterior expresión, ρ denomínase a *función densidade de enerxía* e os escalares ϱ_i chámanse as *presións principais* de T no punto $p \in M$.

Dicimos que un campo de tensores tensión-enerxía se corresponde cun *fluído perfecto con fluxo asociado o campo de vectores* Z se $\varrho_1 = \cdots = \varrho_{n-1} = \varrho$ en cada punto $p \in M$. Entón, temos unha función diferenciable $\varrho : M \to \mathbb{R}$, que se denomina *función presión* de T. Logo, un campo de tensores tensión-enerxía T asociado a un fluído perfecto con fluxo o campo de vectores Z pode ser escrito como

$$T = (\rho + \varrho)\omega \otimes \omega + \varrho g,$$

onde $\rho, \varrho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\omega = i_Z g$.

Dise que un espacio-tempo (M,g) satisfai a *ecuación de Einstein* para un tensor tensión-enerxía T se

$$Ric - \frac{1}{2}(Sc)g = T,$$

onde Ric e Sc denotan o tensor de Ricci e a función curvatura escalar de (M,g), respectivamente. A idea na que se basea a teoría xeral da relatividade para modelar o universo físico é a dun espacio-tempo no que a súa estrutura non está prefixada e imposta a priori, senón que procede da repartición das masas e enerxías presentes. Cada corpo deforma nas súas proximidades o espacio-tempo no que está inmerso e, reciprocamente, a xeometría local do espacio-tempo determina a dinámica dos corpos. Como xa diximos, toda esta información pode ser modelada mediante un campo de tensores tensión-enerxía T, que determina a métrica do espacio-tempo a través da ecuación de Einstein.

Se (M,g) satisfai a ecuación de Einstein para un campo de tensores tensión-enerxía T asociado a un fluído con fluxo o campo de vectores Z entón verifícanse as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
Ric(Z,Z) &= \frac{1}{n-2}((n-3)\rho + \sum_{i=1}^{n-1} \varrho_i), \\
Ric(Z,X) &= 0 \quad \text{para todo} \quad X \in \Gamma Z^{\perp}, \\
Sc &= (\frac{2}{n-2})(\rho - \sum_{i=1}^{n-1} \varrho_i),
\end{aligned}$$

en cada punto $p \in M$. Ademais, se o campo de tensores T corresponde a un fluído perfecto con fluxo o campo de vectores Z entón

$$\begin{aligned}
Ric(Z,Z) &= \frac{1}{n-2}((n-3)\rho + (n-1)\varrho),\\
Ric(Z,X) &= 0 \quad \text{para todo} \quad X \in \Gamma Z^{\perp},\\
Ric(X,Y) &= \frac{1}{n-2}(\rho - \varrho)g(X,Y) \quad \text{para todo} \quad X, Y \in \Gamma Z^{\perp},\\
Sc &= (\frac{2}{n-2})(\rho - \sum_{i=1}^{n-1} \varrho_i),
\end{aligned}$$

e ademais, temos que as funcións densidade de enerxía e presión satisfán as seguintes ecuacións,

$$Z\rho = -(\rho + \varrho)divZ \qquad \text{(ecuación de enerxía)}$$
$$(\rho + \varrho)\nabla_Z Z = -\nabla^{\perp}\varrho \qquad \text{(ecuación de forza),}$$

onde $\nabla^{\perp}\varrho$ é a compoñente de $\nabla\varrho$ en $Z^{\perp}$. (Ver [41, p. 339].)

Pasamos a ver como a existencia de solucións da ecuación de Möbius permite descompor localmente a variedade como un produto warped, baixo a hipótese de que o tensor tensión-enerxía de (M, g) se corresponde cun fluído. Notamos que a estrutura local de produto warped é común a moitos dos modelos espacio-tempo que se consideran na teoría xeral da relatividade.

Teorema 2.4.1 *Sexa $f : M \to \mathbb{R}$ unha función tempo dunha referencia sincronizable $Z = -h\nabla f$ no espacio-tempo n-dimensional (M, g), $(n \geq 3)$. Supoñamos que f satisfai a ecuación de Möbius $\hat{B}^{\perp}_{+}(f) = 0$ e que (M, g) cumpre a ecuación de Einstein para un tensor tensión-enerxía T con fluxo o campo de vectores Z.*

Entón (M, g) é temporalmente xeodesicamente incompleta no pasado e é localmente un produto warped $((a, b) \times N, -dt^2 \oplus \lambda^2 g_N)$, onde t é a coordenada usual en (a, b).

Ademais, se $\dim M = n \geq 4$ e T é un tensor tensión-enerxía asociado a un fluído perfecto con fluxo o campo de vectores Z entón o factor riemanniano (N, g_N) da anterior descomposición en produto warped é Einstein e as funcións densidade de enerxía e presión ρ e ϱ de T son constantes en cada folla de $Z^{\perp}$.

Proba.
A incompletitude temporal xeodésica no pasado séguese do Teorema 2.3.2. Notemos que na proba do Teorema 2.3.2, podemos supor que $Z = -\nabla t$, onde $t = e^f$, pola Nota 2.3.2. Entón (M, g) ten unha foliación formada polas curvas integrais (as cales son

xeodésicas temporais unitarias) de Z e as hipersuperficies integrais da distribución $Z^\perp$, que se cortan ortogonalmente.

Logo, pola Proposición 1.3.3, chega con ver que as hipersuperficies integrais de $Z^\perp$ son subvariedades esféricas de (M,g). Se X é un campo de vectores calquera tanxente ás follas de $Z^\perp$, entón

$$L_Z(X) = -(\nabla_X Z)^T = (\nabla_X \nabla t)^T = (h_t(X))^T = \frac{\Delta t}{n-1}X,$$

onde $()^T$ denota a compoñente tanxente ás follas de $Z^\perp$ do campo de vectores correspondente. Logo, os operadores de configuración das hipersuperficies integrais de $Z^\perp$ son da forma $L_Z = \frac{\Delta t}{n-1} id$. Polo tanto, as follas de $Z^\perp$ son totalmente umbílicas. Xa que logo, para probar que son subvariedades esféricas chega con ver que $X(\Delta t) = 0$ para todo $X \in \Gamma Z^\perp$, cousa que mostramos a continuación.

Sexan $X, Y \in \Gamma Z^\perp$. Daquela

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla_Y \nabla t &= \nabla_X \left(\frac{\Delta t}{n-1} Y\right) = \frac{1}{n-1}(X(\Delta t)Y + (\Delta t)\nabla_X Y),\\
\nabla_Y \nabla_X \nabla t &= \frac{1}{n-1}(Y(\Delta t)X + (\Delta t)\nabla_Y X),\\
\nabla_{[X,Y]} \nabla t &= \frac{\Delta t}{n-1}[X,Y].
\end{aligned}$$

Así, para cada $X, Y \in \Gamma Z^\perp$, tense que

$$R(X,Y)\nabla t = \frac{1}{n-1}(X(\Delta t)Y - Y(\Delta t)X).$$

Posto que T é un tensor tensión-enerxía asociado a un fluído con fluxo o campo de vectores $Z = -\nabla t$, temos que $Ric(X, Z) = 0$ para cada $X \in Z^\perp$. Así, se $X \in \Gamma Z^\perp$ é unitario con $\{X_1, \ldots, X_{n-1} = X\}$ referencia ortonormal de $Z^\perp$ entón

$$\begin{aligned}
0 = Ric(X, \nabla t) &= \sum_{i=1}^{n-2} g(R(X_i, X)\nabla t, X_i)\\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-2} g(X_i(\Delta t)X - X(\Delta t)X_i, X_i)\\
&= -\frac{n-2}{n-1}X(\Delta t).
\end{aligned}$$

Logo, Δt é constante en cada folla de $Z^\perp$, o que proba que (M,g) é localmente un produto warped $((a,b) \times N, -dt^2 \oplus \lambda^2 g_N)$.

Agora, supoñamos ademais que T é un tensor tensión-enerxía asociado a un fluído perfecto con fluxo o campo de vectores Z, é dicir,

$$T = (\rho + \varrho)\omega \otimes \omega + \varrho g,$$

onde $\omega(\,\cdot\,) = g(\,\cdot\,, Z)$.

Denotemos por R_N e Ric_N os tensores curvatura e de Ricci da estrutura riemanniana inducida nas hipersuperficies integrais N de $Z^\perp$. Entón, pola ecuación de Gauss, para $X, X_i, Y \in \Gamma Z^\perp$,

$$\begin{aligned} g(R_N(X_i, X)Y, X_i) &= g(R(X_i, X)Y, X_i) - \left(\frac{\Delta t}{n-1}\right)^2 g(X,Y)g(X_i, X_i) \\ &\quad + \left(\frac{\Delta t}{n-1}\right)^2 g(X, X_i)g(Y, X_i), \end{aligned}$$

de onde se obtén que

$$\begin{aligned} Ric_N(X,Y) &= Ric(X,Y) + g(R(\nabla t, X)Y, \nabla t) \\ &\quad - \frac{(\Delta t)^2}{n-1} g(X,Y) + \left(\frac{\Delta t}{n-1}\right)^2 g(X,Y) \\ &= \frac{1}{n-2}(\rho - \varrho)g(X,Y) + g(R(\nabla t, X)Y, \nabla t) \\ &\quad - \frac{(\Delta t)^2}{n-1} g(X,Y) + \left(\frac{\Delta t}{n-1}\right)^2 g(X,Y). \end{aligned}$$

Mais

$$
\begin{aligned}
g(R(\nabla t, X)Y, \nabla t) &= g(R(X, \nabla t)\nabla t, Y) \\
&= g(\nabla_X \nabla_{\nabla t} \nabla t, Y) - g(\nabla_{\nabla t} \nabla_X \nabla t, Y) - g(\nabla_{[X,\nabla t]} \nabla t, Y) \\
&= -g(\nabla_{\nabla t}(\frac{\Delta t}{n-1})X, Y) - \frac{\Delta t}{n-1} g([X, \nabla t], Y) \\
&= -\frac{1}{n-1}(\nabla t)(\Delta t) g(X, Y) - \frac{\Delta t}{n-1} g(\nabla_{\nabla t} X, Y) \\
&\quad -\frac{\Delta t}{n-1} g([X, \nabla t], Y) \\
&= -\frac{1}{n-1} g(\nabla \Delta t, \nabla t) g(X, Y) - \frac{\Delta t}{n-1} g(\nabla_X \nabla t, Y) \\
&\quad -\frac{\Delta t}{n-1} g([\nabla t, X], Y) - \frac{\Delta t}{n-1} g([X, \nabla t], Y) \\
&= -\frac{1}{n-1} g(\nabla \Delta t, \nabla t) g(X, Y) - \left(\frac{\Delta t}{n-1}\right)^2 g(X, Y).
\end{aligned}
$$

Por outra parte, usando a identidade,

$$
0 = \frac{1}{2}\Delta g(\nabla t, \nabla t) = Ric(\nabla t, \nabla t) + g(\nabla \Delta t, \nabla t) + \|h_t\|^2,
$$

(ver a proba do Teorema 2.3.2), tense que

$$
0 = \frac{1}{n-2}((n-3)\rho + (n-1)\varrho) + g(\nabla \Delta t, \nabla t) + \frac{(\Delta t)^2}{n-1},
$$

de onde se segue que

$$
-g(\nabla \Delta t, \nabla t) = \frac{1}{n-2}((n-3)\rho + (n-1)\varrho) + \frac{(\Delta t)^2}{n-1}.
$$

Polo tanto, chegamos a que

$$
\begin{aligned}
Ric_N(X, Y) &= \left(\frac{2}{n-1}\rho - \frac{(\Delta t)^2}{n-1} + \left(\frac{\Delta t}{n-1}\right)^2\right) g(X, Y) \\
&= \frac{\Lambda}{n-1} g(X, Y),
\end{aligned}
$$

para cada $X, Y \in \Gamma Z^{\perp}$, onde $\Lambda = 2\rho - \frac{n-2}{n-1}(\Delta t)^2$.

Así, posto que $\dim M = n \geq 4$ para o caso dun fluído perfecto, dedúcese do lema de Schur que Λ é constante en cada hipersuperficie integral de $Z^{\perp}$ e, polo tanto, estas son variedades de Einstein coas estruturas riemannianas inducidas. É dicir, o factor riemanniano (N, g_N) que aparece na descomposición como produto warped do espacio-tempo é unha variedade de Einstein. Ademais, posto que $\nabla_Z Z = 0$, séguese da ecuación de forza $(\rho + \varrho)\nabla_Z Z = -\nabla^\perp \varrho$ que as funcións presión ϱ de T son constantes en cada hipersuperficie integral de $Z^\perp$, o cal tamén implica que a función enerxía ρ tamén é constante posto que Λ, ϱ e Δt son constantes en cada folla de $Z^\perp$. $\square$

Nota 2.4.1 Unha demostración alternativa de que o produto twisted que aparece no anterior teorema é un produto warped obtense a partir do Teorema 1.3.1, tendo en conta o feito de que o tensor tensión-enerxía se corresponde cun fluído que ten como fluxo o campo de vectores Z, xa que o tensor de Ricci é diagonalizable por bloques.

A continuación obtemos unha caracterización dos espacio-tempo de Robertson-Walker. O resultado obterémolo engadindolle ás hipóteses do teorema anterior a suposición da existencia dunha solución dunha certa ecuación diferencial. A existencia da dita solución proporcionaranos unha solución da *ecuación de Obata* para cada unha das hipersuperficies integrais de $Z^\perp$, de onde se segue que estas son isométricas a unha esfera, como ocorre nos espacios de Robertson-Walker. Máis exactamente, o resultado de Obata que imos empregar establece que *unha variedade de Einstein compacta e con curvatura escalar reducida constante $k > 0$ admite unha función non-constante ϕ tal que $\Delta\phi = -nk\phi$ se e soamente se a variedade é isométrica á esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{k})$ con raio $1/\sqrt{k}$ no espacio euclidiano $(n+1)$-dimensional* (ver [40]).

Teorema 2.4.2 *Sexa $f : M \to \mathbb{R}$ unha función tempo dunha referencia sincronizable $Z = -h\nabla f$ nun espacio-tempo $(n \geq 4)$-dimensional (M, g). Supoñamos que f é solución da ecuación de Möbius $\hat{B}^\perp_+(f) = 0$ e que (M, g) cumpre a ecuación de Einstein para un tensor tensión-enerxía asociado a un fluído perfecto T con fluxo o campo de vectores Z. Admitamos que as hipersuperficies espaciais ortogonais a Z son compactas e que existe unha función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ a cal é non-constante en cada unha das ditas hipersuperficies e satisfai a ecuación*

$$\Delta\varphi + H_\varphi(Z, Z) - g(\nabla\varphi, Z)e^f(\Delta f + g(\nabla f, \nabla f)) = -\frac{\Lambda}{n-2}\varphi,$$

onde $\Lambda = \dfrac{2}{n-2}(\rho - (n-1)\varrho) - \dfrac{n}{n-1}e^{2f}(\Delta f + g(\nabla f, \nabla f))^2$ *en* (M, g).

Entón (M, g) é xeodesicamente temporalmente incompleto no pasado e localmente pódese expresar como un produto warped $((a, b) \times \mathbb{S}^{n-1}, -dt^2 \oplus \lambda^2 d\sigma^2)$, onde t é a coordenada usual en (a, b) e $(\mathbb{S}^{n-1}, d\sigma^2)$ é a esfera euclidiana $(n-1)$-dimensional. Ademais as funcións densidade de enerxía e presión ρ e ϱ de T son constantes en cada folla de $Z^\perp$.

Proba.
A incompletitude xeodésica temporal séguese do Teorema 2.3.2. Na proba do dito Teorema 2.3.2, podemos asumir que $Z = -\nabla t$, onde $t = e^f$. Entón (M, g) é unha variedade foliada polas curvas integrais (que son xeodésicas temporais unitarias) e as hipersuperficies integrais compactas de $Z^\perp$, que se cortan ortogonalmente en cada punto. Logo, (M, g) é localmente difeomorfa a $(a, b) \times N$, onde N é unha folla (compacta) de $Z^\perp$.

Séguese de forma idéntica a como se fixo na proba do Teorema 2.4.1 que (M, g) é localmente un produto warped $((a, b) \times N, -dt^2 \oplus \lambda^2 g_N)$, onde (N, g_N) é unha variedade de Einstein de curvatura escalar constante (posto que $dimN \geq 3$) e as funcións densidade de enerxía e presión ρ e ϱ son constantes en cada hipersuperficie integral de $Z^\perp$.

Logo, chega con probar que (N, g_N) é homotética á esfera euclidiana $(n-1)$-dimensional $(\mathbb{S}^{n-1}, d\sigma^2)$ posto que, entón multiplicando λ polos factores das homotecias das follas de $Z^\perp$ na anterior descomposición en cada $t \in (a, b)$, obtemos un produto warped $((a, b) \times \mathbb{S}^{n-1}, -dt^2 \oplus \tilde{\lambda}^2 d\sigma^2)$, onde $(\mathbb{S}^{n-1}, d\sigma^2)$ é a esfera $(n-1)$-dimensional e $\tilde{\lambda}$ é o resultado de multiplicar λ polo factor da homotecia. Para isto, usamos a ecuación de Obata [40].

Notemos que, se ∇^N denota o gradiente e a conexión de Levi Civita da estrutura riemanniana inducida g_N en N como unha subvariedade de (M, g), entón para $X \in \Gamma TN$, $g(\nabla^N \varphi_{|_N}, X) = X\varphi_{|_N} = X\varphi = g(\nabla\varphi, X)$ para calquera función $\varphi : M \to \mathbb{R}$. Logo, se $\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ é unha referencia local ortonormal en TN, entón

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla^N_{X_i} \nabla^N \varphi_{|_N}, X_i) &= \sum_{i=1}^{n-1} [X_i g(\nabla^N \varphi_{|_N}, X_i) - g(\nabla^N \varphi_{|_N}, \nabla^N_{X_i} X_i)] \\
&= = \sum_{i=1}^{n-1} [X_i g(\nabla\varphi, X_i) - g(\nabla\varphi, \nabla^N_{X_i} X_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [g(\nabla_{X_i} \nabla\varphi, X_i) + g(\nabla\varphi, \nabla_{X_i} X_i) \\
&\quad - g(\nabla\varphi, \nabla^N_{X_i} X_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [g(\nabla_{X_i} \nabla\varphi, X_i) + g(\nabla\varphi, \mathbb{I}(X_i, X_i))] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [g(\nabla_{X_i} \nabla\varphi, X_i) + \frac{\Delta t}{n-1} g(\nabla\varphi, \nabla t) g(X_i, X_i)] \\
&= \Delta\varphi + H_\varphi(Z, Z) - g(\nabla\varphi, Z)\Delta t,
\end{aligned}
$$

onde $\mathbb{I}$ é a segunda forma fundamental de N en (M, g). Así, se Δ_N denota o laplaciano de (N, g_N) entón, debido a que $Z = -\nabla t$ e $\Delta t = t(\Delta f + g(\nabla f, \nabla f))$, temos que

$$\Delta_N \varphi_{|_N} = \Delta\varphi + H_\varphi(Z, Z) - g(\nabla\varphi, Z)e^f(\Delta f + g(\nabla f, \nabla f)).$$

Polo tanto, $\varphi_{|_N}$ satisfai a ecuación

$$\Delta_N \varphi_{|_N} = -\frac{(Sc)_N}{n-2}\varphi_{|_N}$$

en N, onde $(Sc)_N = \Lambda\mid_N = c_N(cte.)$ e $(Sc)_N$ denota a curvatura escalar de (N, g_N). Agora, debido a que os autovalores de Δ_N son negativos para as correspondentes autofuncións non-constantes, séguese que $c_N > 0$.

Entón, polo resultado de Obata [40, Th. 5] obtemos que (N, g_N) é isométrica á esfera euclidiana $(n-1)$-dimensional con raio $r = \frac{1}{\sqrt{\Lambda|_N}}$, e polo tanto homotética á esfera euclidiana estándar $(\mathbb{S}^{n-1}, d\sigma^2)$, sendo o factor da homotecia $\frac{1}{\Lambda|_N}$. $\square$

Capítulo 3

Métricas de Schwarzschild

Comezamos este capítulo estudiando a métrica de Schwarzschild, que describe o campo gravitatorio exterior a unha "estrela estática", é dicir, o campo gravitatorio exterior a un corpo con simetría esférica e que non rota. A solución de Schwarzschild, que describimos na sección §3,1, das ecuacións de Einstein para estudiar este caso é un espacio-tempo que ten estrutura de produto warped de tipo $2+2$. Por este motivo, non é posible obter unha caracterización da solución de Schwarzschild mediante a existencia de solucións da ecuación de Möbius, como se fixo no capítulo anterior cos espacios de Robertson-Walker, que son produtos warped de tipo $1+3$. É por iso, polo que na sección §3,2 xeneralizamos a ecuación de Möbius do Capítulo 2, coa finalidade de obter unha caracterización da métrica de Schwarzschild en termos da existencia de solucións da dita ecuación e certas condicións adicionais. A mencionada caracterización obtémola na sección §3,3. Na primeira parte da dita sección estudiamos a posibilidade de descompor o espacio-tempo como un produto warped e na segunda parte estudiamos a existencia de referencias estáticas, un dos ingredientes esenciais dos modelos de estrelas estáticas.

3.1. Preliminares

En ausencia de campos gravitatorios o marco xeométrico utilizado pola teoría da relatividade para describir os fenómenos físicos é o espacio de Minkowski, $\mathbb{R}^4$ coa métrica dada por

$$g = -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

En coordenadas esféricas r, θ e φ (θ denota a colatitude e φ a lonxitude) a anterior métrica exprésase da seguinte forma:

$$g = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2). \tag{3.1.1}$$

Imaxinemos agora un obxecto físico de forma esférica (pode ser, por exemplo, unha estrela) de masa m situado na orixe de coordenadas de $\mathbb{R}^3$. Este obxecto creará un campo gravitatorio que, de acordo coa teoría xeral da relatividade, se traducirá nun cambio da métrica. Así, para estudiar o campo gravitatorio, haberá que substituír a métrica de Minkowski por outra que reflita a presencia do dito campo (ver [31]).

Pouco despois de que Einstein formulara a súa teoría da relatividade xeral, Schwarzschild descubría que a seguinte métrica,

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \dfrac{2m}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2), \tag{3.1.2}$$

era solución das ecuacións de Einstein para o problema de describir o dito campo gravitatorio. Debemos observar que para $r = 2m$ a anterior métrica non está definida. Como o que interesa é estudiar o campo gravitatorio no exterior da estrela, restrinxirémonos á rexión dada por $r > 2m$. Polo tanto, o conxunto onde está definida a *métrica de Schwarzschild* (3.1.2) é $M = \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 / r > 2m\} \times \mathbb{S}^2$. (M, g) é unha variedade de Lorentz. Para que sexa un espacio-tempo, consideramos a orientación temporal dada pola condición de que o campo de vectores temporal $\partial/\partial t$ apunte sempre cara ao futuro.

Cada elemento do grupo de rotacións $SO(3)$ de $\mathbb{R}^3$ induce unha transformación da solución de Schwarzschild. En efecto, dado $\psi \in SO(3)$ unha transformación $\widetilde{\psi}$ do espacio-tempo de Schwarzschild está dada por $\widetilde{\psi}(t, r, \theta, \varphi) = (t, \psi(r, \theta, \varphi))$. Para cada $\psi \in SO(3)$, a transformación $\widetilde{\psi}$ é unha isometría do espacio-tempo que deixa invariante o campo de vectores temporal $\partial/\partial t$. Así, en cada instante fixado de tempo t, o espacio-tempo de Schwarzschild ten simetría esférica. Isto concorda coa natureza física do problema xa que, se supoñemos que a estrela é esférica, é natural pensar que o espacio-tempo terá simetría esférica.

O espacio-tempo de Schwarzschild é Ricci plano, é dicir, $Ric = 0$. Isto correspóndese coa natureza física do problema e obtense facilmente das ecuacións de Einstein. Posto que no exterior da estrela non hai materia nin enerxía, a ecuación de Einstein di $Ric - 1/2(Sc)g = 0$, de onde se deduce que $Sc = 0$ e, polo tanto, $Ric = 0$.

O campo de vectores temporal $\partial/\partial t$ é Killing e é un gradiente. Logo, o espacio-tempo de Schwarzschild é estático. Isto correspóndese coa idea física de que a estrela non rota. A métrica do espacio-tempo é invariante fronte a translacións temporais, $t \rightsquigarrow t + a$, sendo $a \in \mathbb{R}$ unha constante calquera.

Resumindo, o espacio-tempo de Schwarzschild representa fisicamente o campo gravitatorio creado por un obxecto esférico (unha estrela) que non rota. Facendo comparacións coa teoría da gravitación de Newton, chégase a que m pode ser identificada coa masa gravitatoria do corpo. A solución dada por Schwarzschild non é válida no interior do corpo.

O espacio-tempo de Schwarzschild pode ser visto como un produto warped. Denotamos $N = \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 / r > 2m\}$ e consideramos en N a métrica

$$g_N = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \dfrac{2m}{r}} dr^2.$$

Denotamos a métrica usual de $\mathbb{S}^2$ por $g_{\mathbb{S}^2}$ que, considerando en $\mathbb{S}^2$ as coordenadas θ, φ (θ colatitude, φ lonxitude), adopta a expresión:

$$g_{\mathbb{S}^2} = d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2.$$

Logo, o espacio-tempo de Schwarzschild está formado pola variedade $M = N \times \mathbb{S}^2$ dotada da métrica

$$g = g_N + r^2 g_{\mathbb{S}^2} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \dfrac{2m}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2).$$

Na métrica de Minkowski (3.1.1) r, θ e φ representan as coordenadas esféricas usuais e t o tempo. Sen embargo, na métrica (3.1.2) r, θ, φ e t xa non representan o mesmo. Para ver o seu significado intrínseco, relacionémolas coa acción de $SO(3)$ sobre o espacio-tempo de Schwarzschild descrita anteriormente. Para cada $p \in M$, a orbita $\mathbf{S}(p) = \{\widetilde{\psi}(p) / \psi \in SO(3)\}$ dotada da métrica inducida por (3.1.2) é isométrica á esfera euclidiana usual de raio $r(p)$. É dicir, a área de $\mathbf{S}(p)$ é $4\pi r(p)^2$. Isto dános unha interpretación intrínseca da coordenada r. θ e φ son a colatitude e a lonxitude da esfera euclidiana que é isométrica a $\mathbf{S}(p)$. Finalmente, sexa X un campo de vectores unitario ortogonal a $\{\partial/\partial r, \partial/\partial\theta, \partial/\partial\varphi\}$ en cada punto. Logo, X é un campo de vectores temporal que consideraremos apunta cara ao futuro. Existe un único campo de Killing satisfacendo as anteriores condicións. Logo, $\partial/\partial t$ é ese único campo.

3.2. Ecuación local de Möbius

Dado que a métrica de Schwarzschild se corresponde cun produto warped de tipo $2+2$, non é posible obter unha caracterización da mesma mediante a existencia de solucións da ecuación de Möbius, como se fixo no capítulo anterior cos espacios de Robertson-Walker, que son produtos warped de tipo $1+3$. Sen embargo, mediante unha xeneralización da ecuación de Möbius do Capítulo 2, que definimos a continuación, si poderemos obter unha caracterización da métrica de Schwarzschild.

Sexan (M_1, g_1) e (M_2, g_2) dúas variedades semiriemannianas, con dimensións $\dim M_1 = n_1 > n_2 = \dim M_2 \geq 1$, e sexa $f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ unha submersión con fibras semiriemannianas en (M_1, g_1), é dicir, as fibras son subvariedades semiriemannianas de (M_1, g_1) coa estrutura métrica inducida por g_1. Entón, dicimos que f satisfai *ecuación de Möbius* (ver Capítulo 4) se

$$(\nabla f_*)(X,Y) = \frac{\tau(f)}{n_1 - n_2} g(X,Y),$$
$$(\nabla f_*)(W,X) = 0,$$

para todo $X, Y \in \Gamma ker f_*$, $W \in \Gamma(ker f_*)^\perp$, onde ∇f_* e $\tau(f)$ denotan a segunda forma fundamental e o campo de tensión da función f, respectivamente. (Ver [24], [39] para máis información sobre ∇f_* e $\tau(f)$.) Neste capítulo estudiaremos un caso particular da anterior definición. Consideremos como (M_1, g_1) un espacio-tempo 4-dimensional e como (M_2, g_2) o espacio euclidiano $(\mathbb{R}^2, \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i)$, onde (x^1, x^2) denotan as coordenadas usuais en $\mathbb{R}^2$.

Se (M, g) é unha variedade semiriemanniana e $f = (f_1, \ldots, f_m) : (M, g) \to (\mathbb{R}^m, \sum_{i=1}^m dx^i \otimes dx^i)$ é unha aplicación, entón (ver [25])

$$(\nabla f_*)(X,Y) = \sum_{i=1}^m H_{f_i}(X,Y) \frac{\partial}{\partial x^i} \circ f$$

para todo par de vectores $X, Y \in \Gamma TM$ e, polo tanto,

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^m (\Delta f_i) \frac{\partial}{\partial x^i} \circ f.$$

Tendo en conta as anteriores igualdades resulta fácil obter unha caracterización das aplicacións que satisfán a ecuación de Möbius, no caso particular que estudiaremos neste capítulo, en termos do hessiano e do laplaciano das súas compoñentes. A dita caracterización aparece recollida nas condicións do primeiro apartado do seguinte resultado.

Proposición 3.2.1 *Sexa (M, g) un espacio-tempo 4-dimensional. Para unha submersión $f = (f_1, f_2) : (M, g) \to (\mathbb{R}^2, \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i)$ con fibras riemannianas en (M, g) satisfacendo a ecuación de Möbius tense que*

a) $H_{f_i}(X,Y) = \frac{\Delta f_i}{2} g(X,Y)$ *e* $H_{f_i}(W,X) = 0$, *ou equivalentemente,*

$$h_{f_i}(X) = \frac{\Delta f_i}{2} X,$$

para todo $X, Y \in \Gamma ker f_*$, $W \in \Gamma(ker f_*)^\perp$, $i = 1, 2$.

b) $H_{f_i}(Z,Z) = H_{f_i}(W,W)$ *para cada par de campos de vectores ortogonais e unitarios* $Z, W \in \Gamma(ker f_*)^\perp$, $i = 1, 2$.

Proba.

a) É inmediato.

b) Sexan $Z, W \in \Gamma(ker f_*)^\perp$ e $X, Y \in \Gamma ker f_*$ tales que $\{Z, W, X, Y\}$ constitúe unha referencia ortonormal local de TM. Entón

$$\begin{aligned}\tau(f) &= g(Z,Z)(\nabla f_*)(Z,Z) + g(W,W)(\nabla f_*)(W,W) \\ &\quad +(\nabla f_*)(X,X) + (\nabla f_*)(Y,Y) \\ &= g(Z,Z)(\nabla f_*)(Z,Z) + g(W,W)(\nabla f_*)(W,W) + \tau(f).\end{aligned}$$

Así,

$$g(Z,Z)(\nabla f_*)(Z,Z) + g(W,W)(\nabla f_*)(W,W) = 0$$

e séguese de *a*) e de $g(Z,Z) = -g(W,W)$ que $H_{f_i}(Z,Z) = H_{f_i}(W,W)$. □

3.3. Caracterización das métricas de Schwarzschild

O estudio da caracterización das métricas de Schwarzschild levarase a cabo en dúas etapas. Na primeira, centrarémonos na existencia da descomposición local do espacio-tempo como un produto warped de tipo $2+2$. Posteriormente estudiaremos a existencia de referencias estáticas, ingrediente esencial dos modelos empregados para describir "estrelas estáticas", pois representa a idea física de que o campo gravitatorio está xerado por unha fonte que é independente do tempo e que non rota.

3.3.1. Teoremas de Descomposición

Lembramos que un espacio-tempo 4-dimensional satisfai a ecuación de Einstein para un tensor tensión-enerxía T se

$$Ric - \frac{1}{2}(Sc)g = T,$$

onde Ric e Sc denotan respectivamente o tensor de Ricci e a curvatura escalar da variedade de Lorentz (M, g). O tensor tensión-enerxía T dise unha *radiación* se $trT = 0$, é dicir, se no espacio-tempo non hai materia presente. Notemos que se o espacio-tempo (M, g) satisfai a ecuación de Einstein para un tensor tensión-enerxía que sexa unha radiación entón temos que $Ric = T$.

Agora, sexa (M, g) un espacio-tempo 4-dimensional e sexa $f : (M, g) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ unha submersión con fibras riemannianas en (M, g). Ao longo desta sección, suporemos que (M, g) satisfai a ecuación de Einstein para un tensor tensión-enerxía T que é unha radiación dado por

$$T = \rho\left(-g|_{(kerf_*)^\perp} \oplus g|_{(kerf_*)}\right),$$

onde $g|_{(kerf_*)^\perp}$ e $g|_{(kerf_*)}$ denotan as restricións de g a $(kerf_*)^\perp$ e $(kerf_*)$, respectivamente, e ρ é unha función definida en M, que denominaremos tensión negativa de Faraday [22, Páx. 124]. Notemos que, se $\rho = 0$, entón (M, g) denomínase un *vacío.*

Teorema 3.3.1 *Sexan (M, g) un espacio-tempo 4-dimensional e $f = (f_1, f_2) : (M, g) \to (\mathbb{R}^2, \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i)$ unha submersión con fibras riemannianas en (M, g). Supoñamos que (M, g) satisfai a ecuación de Einstein para un tensor tensión-enerxía da forma*

$$T = \rho\left(-g|_{(kerf_*)^\perp} \oplus g|_{(kerf_*)}\right),$$

e que f satisfai a ecuación local de Möbius en (M, g).

Entón (M, g) é localmente un produto warped $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus \psi^2 g_2)$, onde (M_1, g_1) é unha superficie de Lorentz e (M_2, g_2) unha superficie riemanniana de curvatura constante.

Proba.
Primeiro, vexamos que $(kerf_*)^\perp$ é unha distribución totalmente xeodésica. Para iso, chega con ver que $\nabla_{\nabla f_j} \nabla f_i \in \Gamma(kerf_*)^\perp$ para $i, j = 1, 2$. Sexa $X \in \Gamma kerf_*$. Entón

$$g(\nabla_{\nabla f_j} \nabla f_i, X) = g(\nabla_X \nabla f_i, \nabla f_j) = \frac{\Delta f_i}{2} g(X, \nabla f_j) = 0,$$

e, polo tanto, $\nabla_{\nabla f_j} \nabla f_i \in \Gamma(kerf_*)^\perp$. Isto proba que $(kerf_*)^\perp$ é unha distribución con variedades integrais totalmente xeodésicas.

Agora, vexamos que as fibras de f son totalmente umbílicas e esféricas. Sexa $\mathbb{I}$ a segunda forma fundamental das fibras de f. Entón, posto que ∇f_1 e ∇f_2 son linearmente independentes en cada punto $p \in M$ e $g(\mathbb{I}(X, Y), \nabla f_i) = -\frac{\Delta f_i}{2} g(X, Y)$, para cada $X, Y \in \Gamma kerf_*$, chégase a que

$$\begin{aligned}\mathbb{I}(X,Y) \;=\; & \frac{1}{2Q(\nabla f_1, \nabla f_2)} \left[(g(\nabla f_1, \nabla f_2)\Delta f_2 - g(\nabla f_2, \nabla f_2)\Delta f_1)\nabla f_1\right. \\ & \left. + (g(\nabla f_1, \nabla f_2)\Delta f_1 - g(\nabla f_1, \nabla f_1)\Delta f_2)\nabla f_2\right] g(X, Y),\end{aligned}$$

onde $Q(\nabla f_1, \nabla f_2) = g(\nabla f_1, \nabla f_1) g(\nabla f_2, \nabla f_2) - g(\nabla f_1, \nabla f_2)^2$. Polo tanto, as fibras de f son totalmente umbílicas e o seu campo de vectores curvatura media N está dado por

$$\begin{aligned}N \;=\; & \frac{1}{Q(\nabla f_1, \nabla f_2)} \left[(g(\nabla f_1, \nabla f_2)\Delta f_2 - g(\nabla f_2, \nabla f_2)\Delta f_1)\nabla f_1\right. \\ & \left. + (g(\nabla f_1, \nabla f_2)\Delta f_1 - g(\nabla f_1, \nabla f_1)\Delta f_2)\nabla f_2\right].\end{aligned}$$

A continuación imos probar que as fibras de f son esféricas. É dicir, temos que ver que o campo de vectores curvatura media N é paralelo. A partir da expresión de N en termos das funcións f_1 e f_2 vemos que N é un campo de vectores paralelo se e soamente se Δf_1 e Δf_2 son constantes en cada fibra de f.

Consideremos $Z, W \in \Gamma(kerf_*)^\perp$ e $X, Y \in \Gamma kerf_*$ tales que $\{Z, W, X, Y\}$ sexa unha referencia local ortonormal de TM. Entón, posto que (M, g) satisfai a ecuación de Einstein, $Ric = T$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = Ric(Y, \nabla f_i) &= g(Z,Z)g(R(Z,Y)\nabla f_i, Z) \\ &\quad + g(W,W)g(R(W,Y)\nabla f_i, W) + g(R(X,Y)\nabla f_i, X). \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} R(X,Y)\nabla f_i &= \nabla_X \nabla_Y \nabla f_i - \nabla_Y \nabla_X \nabla f_i - \nabla_{[X,Y]} \nabla f_i \\ &= \frac{1}{2}\{\nabla_X((\Delta f_i)Y) - \nabla_Y((\Delta f_i)X) - (\Delta f_i)[X,Y]\} \\ &= \frac{1}{2}\{X(\Delta f_i)Y - Y(\Delta f_i)X\} \end{aligned}$$

e, polo tanto, $g(R(X,Y)\nabla f_i, X) = -\frac{1}{2}Y(\Delta f_i)$.

Por ser $(kerf_*)^\perp$ unha distribución totalmente xeodésica ortogonal a $kerf_*$, temos que

$$g(R(Z,Y)\nabla f_i, Z) = g(R(\nabla f_i, Z)Z, Y) = 0$$

e

$$g(R(W,Y)\nabla f_i, W) = g(R(\nabla f_i, W)W, Y) = 0.$$

Así, $0 = Ric(Y, \nabla f_i) = -\frac{1}{2}Y(\Delta f_i)$, de onde se segue que as funcións Δf_i son constantes en cada fibra de f. É dicir, as fibras de f tamén son esféricas. Polo tanto, dedúcese da Proposición 1.3.3 que (M, g) é localmente un produto warped $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus \psi^2 g_2)$, onde (M_1, g_1) é unha superficie de Lorentz e (M_2, g_2) é unha superficie riemanniana.

A continuación, probamos que cada fibra de f ten curvatura constante. Para isto, calculamos o tensor de Ricci dunha fibra M_2 de f coa estrutura riemanniana inducida en M_2 por (M, g). Para $X, Y \in \Gamma TM_2$, temos (ver [41, Páx. 211])

$$Ric_{M_2}(X,Y) = Ric(X,Y) + \left(\frac{\Delta_{M_1}\psi}{\psi} + \frac{g(\nabla^{M_1}\psi, \nabla^{M_1}\psi)}{\psi^2} \right) g(X,Y),$$

onde Ric_{M_2} é o tensor de Ricci da fibra M_2 de f coa estrutura riemanniana inducida de (M,g) e, $\nabla^{M_1}\psi$ e $\Delta_{M_1}\psi$ son o gradiente e o laplaciano da función ψ na estrutura de variedade de Lorentz inducida en M_1 por (M,g). Logo, tendo en conta que $Ric = T$, obtemos a igualdade

$$Ric_{M_2}(X,Y) = \left(\rho + \frac{\Delta_{M_1}\psi}{\psi} + \frac{g(\nabla^{M_1}\psi, \nabla^{M_1}\psi)}{\psi^2}\right) g(X,Y) = \frac{\Lambda}{2} g(X,Y).$$

Por ser $(kerf_*)^{\perp}$ unha distribución totalmente xeodésica, séguese da igualdade $0 = (divT)(X) = d\rho(X)$, válida para todo $X \in \Gamma kerf_*$, que ρ é constante en cada fibra de f. Agora, a función Λ é constante en cada fibra M_2 de f posto que ρ e $\frac{\Delta_{M_1}\psi}{\psi} + \frac{g(\nabla^{M_1}\psi,\nabla^{M_1}\psi)}{\psi^2}$ son constantes en cada fibra de f. Logo, cada fibra de f ten curvatura constante coa estrutura riemanniana inducida de (M,g). □

Nota 3.3.1 A expresión $\frac{\Delta_{M_1}\psi}{\psi} + \frac{g(\nabla^{M_1}\psi,\nabla^{M_1}\psi)}{\psi^2}$ que aparece na demostración do teorema anterior é igual a $-divN$.

Posto que $N = -\frac{\nabla^{M_1}\psi}{\psi}$ (ver [41, Páx. 206]), $\frac{\Delta_{M_1}\psi}{\psi} + \frac{g(\nabla^{M_1}\psi,\nabla^{M_1}\psi)}{\psi^2}$ pódese expresar en función do campo de vectores N. Obviamente, $\frac{g(\nabla^{M_1}\psi,\nabla^{M_1}\psi)}{\psi^2} = g(N,N)$. Por outra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{M_1}\psi}{\psi} &= -\frac{1}{\psi} div_{M_1}(\psi N) \\ &= -\frac{1}{\psi}[g(\nabla^{M_1}\psi, N) + \psi div_{M_1} N] \\ &= g(N,N) - div_{M_1} N, \end{aligned}$$

ao longo de M_1, onde $div_{M_1}N$ é a diverxencia de N na variedade M_1 dotada da estrutura de variedade de Lorentz inducida por (M,g). Posto que as fibras de f son totalmente umbílicas, temos que

$$\begin{aligned} divN &= div_{M_1}N + g(\nabla_X N, X) + g(\nabla_Y N, Y) \\ &= div_{M_1}N - 2g(N,N), \end{aligned}$$

onde $X, Y \in \Gamma kerf_*$ son campos de vectores ortonormais ao longo de M_2. Logo, temos que $\frac{\Delta_{M_1}\psi}{\psi} = -g(N,N) - divN$. É dicir, $\frac{\Delta_{M_1}\psi}{\psi} + \frac{g(\nabla^{M_1}\psi,\nabla^{M_1}\psi)}{\psi^2} = -divN$. Así, obtemos que $(Sc)_{M_2} = 2(\rho - divN)$, onde $(Sc)_{M_2}$ denota a curvatura escalar de M_2 dotada coa estrutura de variedade de Riemann inducida por (M,g).

A continuación, impoñendo unha condición adicional sobre a estrutura analítica do espacio-tempo, obtemos unha descomposición del como un produto warped, onde as fibras son isométricas á esfera euclidiana 2-dimensional. A dita condición consiste en supor a existencia dunha solución dunha certa ecuación diferencial. Engadíndolle esta hipótese ás empregadas no resultado anterior e usando a *ecuación de Obata*, obtemos que as fibras son isométricas a esferas. O resultado de Obata que imos empregar é o mesmo que o que usamos no capítulo anterior. Lembramos que este resultado establece que *unha variedade de Einstein compacta e con curvatura escalar reducida constante $k > 0$ admite unha función non-constante ϕ tal que $\Delta\phi = -nk\phi$ se e soamente se a variedade é isométrica á esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{k})$ con raio $1/\sqrt{k}$ no espacio euclidiano $(n+1)$-dimensional* (ver [40]).

Teorema 3.3.2 *Sexa (M, g) un espacio-tempo 4-dimensional. Supoñamos que $f = (f_1, f_2) : (M, g) \to (\mathbb{R}^2, \sum_{i=1}^2 dx^i \otimes dx^i)$ é unha submersión con fibras riemannianas compactas en (M, g) e que (M, g) satisfai a ecuación de Einstein para un tensor tensión-enerxía $T = \rho\left(-g_{|_{(kerf_*)^\perp}} \oplus g_{|_{(kerf_*)}}\right)$. Admitamos que f satisfai a ecuación de Möbius en (M, g) e que existe unha función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ a cal é non-constante en cada fibra de f e satisfai a ecuación*

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi + 2g(\nabla\varphi, N) + \frac{1}{Q(\nabla f_1, \nabla f_2)} &\big[(-g(\nabla f_1, \nabla f_1)^2 g(\nabla f_2, \nabla f_2)^2 \\
&+2g(\nabla f_1, \nabla f_1)g(\nabla f_1, \nabla f_2)^2 - g(\nabla f_1, \nabla f_1)^3)H_\varphi(\nabla f_1, \nabla f_1) \\
&+g(\nabla f_1, \nabla f_2)Q(\nabla f_1, \nabla f_2)H_\varphi(\nabla f_1, \nabla f_2) \\
&+(-g(\nabla f_2, \nabla f_2)^2 g(\nabla f_1, \nabla f_1)^2 + 2g(\nabla f_2, \nabla f_2)g(\nabla f_1, \nabla f_2)^2 \\
&-g(\nabla f_2, \nabla f_2)^3)H_\varphi(\nabla f_2, \nabla f_2)\big] \\
= -\Lambda\varphi,
\end{aligned}$$

onde $Q(\nabla f_1, \nabla f_2) = g(\nabla f_1, \nabla f_1)g(\nabla f_2, \nabla f_2) - g(\nabla f_1, \nabla f_2)^2$, N é o campo de vectores curvatura media das fibras de f e $\Lambda = 2(\rho - divN)$. Entón (M, g) é localmente un produto warped $(M_1 \times \mathbb{S}^2, g_1 \oplus \psi^2 d\sigma^2)$, onde (M_1, g_1) é unha superficie de Lorentz e $(\mathbb{S}^2, d\sigma^2)$ é a esfera estándar euclidiana. Ademais, (M_1, g_1) será de curvatura positiva no anterior produto warped nunha veciñanza dun punto $p \in M$ se se verifica a condición $(2\rho + g(N, N))(p) \leq 0$.

Nota 3.3.2 No establecemento do Teorema 3.3.2, en vez de asumir a existencia da función φ, podemos supor que $\Lambda > 0$ en M. Entón, posto que todas as superficies riemannianas compactas, orientables e de curvatura constante positiva son homotéticas á esfera euclidiana 2-dimensional, a conclusión do Teorema 3.3.2 permanece válida.

De novo, poderíamos optar por supor que as fibras de f son simplemente conexas en substitución da hipótese relativa á existencia da función φ. Isto permitiríanos probar o mesmo resultado, sen máis que usar que toda superficie riemanniana simplemente conexa, compacta e de curvatura constante é homotética á esfera euclidiana 2-dimensional.

A razón pola que supoñemos que existe φ no establecemento do Teorema 3.3.2, é a de determinar a xeometría impoñendo condicións sobre a estrutura global do espacio-tempo antes que pedir que se cumpran as anteriores condicións sobre a estrutura xeométrica ou topolóxica da variedade.

Proba.
A demostración deste teorema é unha continuación do Teorema 3.3.1. Primeiro, probemos que cada fibra M_2 de f coa estrutura de variedade riemanniana inducida por (M, g) é homotética á esfera estándar euclidiana 2-dimensional. Para iso, consideramos a función $\varphi : M \to \mathbb{R}$ dada no enunciado do teorema. Se ∇^{M_2} denota o gradiente e a conexión de Levi Civita da estrutura de variedade de Riemann inducida nunha fibra M_2 de f por (M, g), entón, para $X \in \Gamma TM_2$,

$$g(\nabla^{M_2}\varphi_{|_{M_2}}, X) = X(\varphi_{|_{M_2}}) = X\varphi = g(\nabla\varphi, X).$$

Logo, dados $Z, W \in \Gamma(kerf_*)^{\perp}_{|_{M_2}}$ e $X, Y \in \Gamma TM_2$ tales que $\{Z, W, X, Y\}$ sexa unha referencia local ortonormal de TM ao longo de M_2, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_{M_2}\varphi_{|_{M_2}} &= div_{M_2}\nabla^{M_2}\varphi_{|_{M_2}} \\
&= g(\nabla^{M_2}_X\nabla^{M_2}\varphi_{|_{M_2}}, X) + g(\nabla^{M_2}_Y\nabla^{M_2}\varphi_{|_{M_2}}, Y) \\
&= Xg(\nabla\varphi, X) - g(\nabla\varphi, \nabla^{M_2}_X X) \\
&\quad +Yg(\nabla\varphi, Y) - g(\nabla\varphi, \nabla^{M_2}_Y Y) \\
&= g(\nabla_X\nabla\varphi, X) + g(\nabla\varphi, \mathbb{I}(X, X)) \\
&\quad +g(\nabla_Y\nabla\varphi, Y) + g(\nabla\varphi, \mathbb{I}(Y, Y)) \\
&= \Delta\varphi - g(Z, Z)g(\nabla_Z\nabla\varphi, Z) - g(W, W)g(\nabla_W\nabla\varphi, W) \\
&\quad +2g(\nabla\varphi, N),
\end{aligned}$$

onde Δ_{M_2} e div_{M_2} son o Laplaciano e a diverxencia, respectivamente, na estrutura de variedade riemanniana inducida en M_2 por (M, g). Posto que ∇f_1 e ∇f_2 son linearmente independentes en cada punto $p \in M$, Z e W pódense escribir como unha combinación linear de ∇f_1 e ∇f_2 ao longo de M_2 do seguinte xeito:

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{Q(\nabla f_1, \nabla f_2)} \left[(g(\nabla f_1, \nabla f_1) g(Z, \nabla f_2) - g(\nabla f_1, \nabla f_2) g(Z, \nabla f_1)) \nabla f_1 \right. \\
&\quad \left. + (g(\nabla f_2, \nabla f_2) g(Z, \nabla f_1) - g(\nabla f_1, \nabla f_2) g(Z, \nabla f_2)) \nabla f_2 \right], \\
W &= \frac{1}{Q(\nabla f_1, \nabla f_2)} \left[(g(\nabla f_1, \nabla f_1) g(W, \nabla f_2) - g(\nabla f_1, \nabla f_2) g(W, \nabla f_1)) \nabla f_1 \right. \\
&\quad \left. + (g(\nabla f_2, \nabla f_2) g(W, \nabla f_1) - g(\nabla f_1, \nabla f_2) g(W, \nabla f_2)) \nabla f_2 \right].
\end{aligned}
$$

Entón, substituíndo Z e W na expresión

$$-g(Z, Z) g(\nabla_Z \nabla \varphi, Z) - g(W, W) g(\nabla_W \nabla \varphi, W),$$

obtemos a ecuación

$$\Delta_{M_2} \varphi_{|M_2} = -(Sc)_{M_2} \varphi_{|M_2}$$

en M_2, onde $(Sc)_{M_2} = \Lambda_{|M_2} = c_{M_2}$ (const.) e $(Sc)_{M_2}$ é a curvatura escalar de M_2 coa estrutura de variedade de Riemann inducida por (M, g). (Ver Nota 3.3.1.)

Posto que os autovalores de Δ_{M_2} son negativos para autofuncións asociadas non-constantes, séguese que $c_{M_2} > 0$. Entón, baseándonos nun resultados de Obata [40, Thm. 5] obtemos que M_2 coa estrutura de variedade riemanniana inducida por (M, g) é homotética á esfera euclidiana 2-dimensional $(\mathbb{S}^2, d\sigma^2)$ con factor da homotecia $\frac{2}{\Lambda_{M_2}}$. Así, multiplicando a función ψ^2 que aparece na descomposición en produto warped $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus \psi^2 g_2)$ polo factor da homotecia $\frac{2}{\Lambda}$ para cada fibra de f na dita descomposición en cada $p_1 \in M_1$, obtemos unha descomposición local en produto warped de (M, g) como $(M_1 \times \mathbb{S}^2, g_1 \oplus \widetilde{\psi}^2 d\sigma^2)$, onde $\widetilde{\psi}^2 = \frac{2\psi^2}{\Lambda}$ e $(\mathbb{S}^2, d\sigma^2)$ é a esfera estándar 2-dimensional.

Finalmente, mostramos que (M_1, g_1) se pode tomar de curvatura positiva se $(2\rho + g(N, N))(p) \leq 0$ nalgún punto $p \in M$. Sexan M_1 unha variedade integral de $(ker f_*)^\perp$ pasando por p e Ric_{M_1} o tensor de Ricci de M_1 coa estrutura de variedade de Lorentz inducida por (M, g). Entón, séguese de [41, Páx. 211] que, para $Z, W \in \Gamma T M_1$, $Ric(Z, W) = Ric_{M_1}(Z, W) - \frac{2}{\psi} H_\psi(Z, W)$, onde ψ é a función de deformación e H_ψ é o hessiano de ψ en (M, g). Notemos que, por ser M_1 unha superficie, $Ric_{M_1}(Z, W) = K_1 g(Z, W)$, onde K_1 é a súa función curvatura coa estrutura de variedade de Lorentz inducida por (M, g). Ademais, posto que $Ric(Z, W) = T(Z, W) = -\rho g(Z, W)$, obtense que H_ψ é escalar en M_1, é dicir, $H_\psi(Z, W) = \frac{\Delta\psi}{2} g(Z, W)$. Así, $-\rho = K_1 - \frac{\Delta\psi}{\psi}$.

Tamén de [41, Páx. 214], posto que $(Sc) = trRic = trT = 0$, obtense

$$0 = 2K_1 + \frac{\Lambda}{\psi^2} - \frac{4\Delta\psi}{\psi} - 2g(N, N),$$

de onde se segue que

$$K_1 = \frac{\Lambda}{2\psi^2} - (2\rho + g(N, N)).$$

Logo, como $\Lambda > 0$, séguese da hipótese que $K_1 > 0$ nunha veciñanza aberta do punto $p_1 \in M_1$, onde $p = (p_1, p_2)$. Entón, tomando esta veciñanza como M_1 na descomposición local en produto warped, obtemos o resultado. □

Nota 3.3.3 É importante destacar que as coordenadas de Schwarzschild $f = (t, r)$ da solución de Schwarzschild constitúen un exemplo para o Teorema 3.3.2. Ademais, tense que $\tau(f) \neq 0$, é dicir, a aplicación f é non-harmónica.

3.3.2. Existencia de Referencias Estáticas

Nesta subsección estudiamos distintas rexións do espacio-tempo dependendo do carácter temporal, nulo ou espacial do campo de vectores curvatura media das fibras da aplicación f, que aparece nos resultados anteriores. Centrarémonos naquela rexión onde o dito campo de vectores é espacial. Supoñendo que esta é non-baleira probaremos a existencia dunha referencia estática no Teorema 3.3.3, de onde obtemos unha caracterización das métricas "tipo Schwarzschild".

Comezamos definindo o concepto de referencia estática. Sexa Z unha referencia nun espacio-tempo (M, g). Dise que Z é unha *referencia estacionaria* se existe unha función positiva $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que o campo de vectores fZ sexa Killing (é dicir, $\mathfrak{L}_{fZ}g = 0$, onde $\mathfrak{L}$ denota a derivada de Lie). Dise que Z é unha referencia *irrotacional* se a distribución $Z^\perp$ é integrable ou, equivalentemente, se cumpre a condición $g(\nabla_X Z, Y) = g(\nabla_Y Z, X)$, para todo par de campos de vectores $X, Y \in \Gamma TM$. Finalmente, dicimos que Z é unha *referencia estática* se Z é unha referencia estacionaria e irrotacional. Un espacio-tempo dise *estacionario* se existe unha referencia estacionaria definida nel. Isto correspóndese coa idea física de que o campo gravitatorio está xenerado por unha fonte que non depende do tempo. Un espacio-tempo dise *estático* se admite unha referencia estacionaria, e representa a idea física de que a fonte que xera o campo gravitatorio, ademais de ser independente do tempo, non rota.

O carácter causal do campo de vectores curvatura media N das fibras de f tamén ten importancia desde o punto de vista dos teoremas de singularidade. (Ver [32, Páx. 226].) No Teorema 3.3.2, sexa B a subvariedade aberta de (M, g) definida por

$$B = \{p \in M / g(N, N)(p) < 0\}.$$

Vexamos que se $B \neq \emptyset$ entón B corresponde á rexión burato negro/branco dunha estrela estática. Sexa M_2 unha fibra de f en B e sexan $U, V \in \Gamma(TM_2)^{\perp}$ campos de vectores nulos definidos en M_2 con $g(U,V) = -1$. Sexan L_U e L_V os operadores de configuración de M_2 con respecto a U e V, respectivamente. Entón, posto que $trL_U = 2g(U,N)$ e $trL_V = 2g(V,N)$, séguese que $(trL_U)(trL_V) = 4g(U,N)g(V,N) = -2g(N,N) > 0$. É dicir, M_2 é unha superficie pechada contida en B. Logo, cada fibra de f en B é unha superficie atrapada homotética á esfera euclidiana 2-dimensional. Ademais notemos que se (M,g) é *vacío*, é dicir, $\rho = 0$ en M, a variedade de Lorentz (M_1, g_1) que aparece como factor da descomposición en produto warped de B é de curvatura positiva.

Sexan H_+ e H_- os subconxuntos pechados de (M,g) definidos por

$$H_+ = \{p \in M / N(p) \neq 0 \text{ e } g(N,N)(p) = 0\}$$

e

$$H_- = \{p \in M / N(p) = 0\}.$$

Se $H_+ \neq \emptyset$ entón corresponde ao acontecemento horizonte da rexión burato negro/branco B. Se M_2 é unha fibra de f en H_+ e $U, V \in \Gamma(TM_2)^{\perp}$ son campos de vectores nulos definidos en M_2 con $g(U,V) = -1$, entón un deles, digamos U, é un múltiplo escalar de N en $p_2 \in M_2$. Así $trL_U = 0$ e $trL_V \neq 0$ sobre M_2. É dicir, M_2 é unha superficie marxinalmente atrapada en H_+. Logo, cada fibra de f en H_+ é unha superficie marxinalmente atrapada homotética á esfera euclidiana 2-dimensional. Finalmente, se $H_- \neq \emptyset$ entón corresponde a un horizonte de Cauchy como na solución de Reissner cando $r = r_-$. Se M_2 é unha fibra de f en H_- entón M_2 é totalmente xeodésica e, polo tanto, $trL_U = 0 = trL_V$, onde U e V son campos de vectores nulos ortogonais a M_2 definidos de forma análoga a como se fixo anteriormente. Novamente, as fibras de f en H_- son homotéticas á esfera euclidiana 2-dimensional.

A continuación analizamos a rexión E de (M,g) definida por

$$E = \{p \in M / g(N,N)(p) > 0\}.$$

As fibras de f en E son superficies non-atrapadas. Se M_2 é unha fibra de f en E, entón para campos de vectores nulos $U, V \in \Gamma(TM_2)^{\perp}$ elixidos como antes, temos que $(trL_U)(trL_V) = -2g(N,N) < 0$. Logo, esperaríamos a existencia dunha referencia estática en E para considerar (M,g) como un espacio-tempo describindo unha estrela estática. Para obter unha referencia estática en E impoñemos unha condición adicional sobre N (de feito, sobre f).

Sexan (M,g) unha variedade semiriemanniana e X un campo de vectores en M. O *tensor afinidade* $\mathfrak{L}_X\nabla$ de X defínese como

$$(\mathfrak{L}_X\nabla)(U,V) = \mathfrak{L}_X\nabla_U V - \nabla_{\mathfrak{L}_X U} V - \nabla_U \mathfrak{L}_X V$$

para todo $U, V \in \Gamma TM$, onde $\mathfrak{L}$ é a derivada de Lie en M. (Ver [45, Páx. 109].) O *campo de tensión* $\tau(X)$ de X defínese como a traza de $\mathfrak{L}_X\nabla$ con respecto a g. Un campo de vectores X nunha variedade semiriemanniana (M, g) dise *afín* se $\mathfrak{L}_X\nabla = 0$ e dise 1-*harmónico* se $\tau(X) = 0$ (ver [13]).

Notemos que se a rexión E en (M, g) é non-baleira entón (E, g) é tamén un espacio-tempo.

Lema 3.3.1 *No Teorema 3.3.2, supoñamos que* $E \neq \emptyset$. *Entón* $g(\tau(N), Z) = 0$ *para* $Z \in \Gamma(kerf_*)^{\perp}_{|E}$ *con* $g(N, Z) = 0$ *se e soamente se* $g((\mathfrak{L}_N\nabla)(Z, Z), Z) = 0$.

Proba.
Notemos que, xa que N é prexeodésico (ver a última parte do Teorema 3.3.2, é dicir, H_ψ é escalar), $(\mathfrak{L}_N\nabla)(N, N) = \mathfrak{L}_N\nabla_N N \sim N$. Sexa $X \in \Gamma(kerf_*)_{|E}$ con $\mathfrak{L}_N X = 0$. (Notemos que por ser N prexeodésico, $(kerf_*)^{\perp}_{|E}$ é unha distribución totalmente xeodésica e N é o campo de vectores curvatura media das fibras de f, sempre existe $X \in \Gamma(kerf_*)_{|E}$ satisfacendo $\mathfrak{L}_N X = 0$.) Entón $(\mathfrak{L}_N\nabla)(X, X) = \mathfrak{L}_N\nabla_X X = (Ng(X, X))N + V$, onde $V \in \Gamma(kerf_*)_{|E}$.

Agora, sexan $N_1 = \frac{N}{g(N,N)^{1/2}}$, $Z, N_1 \in \Gamma(kerf_*)^{\perp}_{|E}$ e $X, Y \in \Gamma(kerf_*)_{|E}$ tales que $\{Z, N_1, X, Y\}$ sexa unha referencia local ortonormal en TM. Entón, polo carácter tensorial de $\mathfrak{L}_N\nabla$, cúmprese a igualdade

$$\begin{aligned} g(\tau(N), Z) &= g(Z_1, Z_1)g((\mathfrak{L}_N\nabla)(Z_1, Z_1), Z) \\ &\quad + g(N_1, N_1)g((\mathfrak{L}_N\nabla)(N_1, N_1), Z) \\ &\quad + g(X, X)g((\mathfrak{L}_N\nabla)(X, X), Z) \\ &\quad + g(Y, Y)g((\mathfrak{L}_N\nabla)(Y, Y), Z) \\ &= g(Z_1, Z_1)g((\mathfrak{L}_N\nabla)(Z_1, Z_1), Z). \end{aligned}$$

Así, probamos o resultado. □

Lema 3.3.2 *No Teorema 3.3.2, o campo de vectores curvatura normal* N *ten as seguintes propiedades en* $B \cup H_+ \cup E$:

a) *A* 1-*forma* $\omega(\cdot) = g(\cdot, N)$ *é exacta.*

b) $Zg(N, N) = 0$ *e* $[N, Z] = \eta Z$ *para todo* $Z \in \Gamma(kerf_*)^{\perp}$ *con* $g(Z, Z) = c$ *(cte.) e ortogonal a* N, *onde* η *é unha función definida en* $B \cup H_+ \cup E$ *que é constante en cada fibra de* f.

Proba.
a) Notemos que $\omega(X) = 0$ para todo $X \in \Gamma kerf_*$ e $\omega(Z) = g(Z, N) = g(Z, -\frac{\nabla\psi}{\psi}) = -\frac{1}{\psi}g(Z, \nabla\psi)$ para todo $Z \in \Gamma(kerf_*)^{\perp}$. Logo $\omega = d\log(\frac{1}{\psi})$.

b) Posto que ω é exacta por a),

$$\begin{aligned}
0 = 2d\omega(N,Z) &= N\omega(Z) - Z\omega(N) - \omega([N,Z]) \\
&= -2g(\nabla_Z N, N) - g([N,Z],N) \\
&= -2g(\nabla_N Z, N) - 2g([Z,N],N) - g([N,Z],N) \\
&= g(\nabla_Z N, N) - g(\nabla_N Z, N) \\
&= \frac{1}{2} Z g(N,N).
\end{aligned}$$

Logo, tamén se ten que $[N,Z] = \eta Z$, onde η é unha función definida en M. Notemos que, posto que Z é o levantamento da restrición a unha variedade integral de $(kerf_*)^\perp$, así como N, η é constante en cada fibra de f. (Isto tamén se pode probar usando a forma do tensor curvatura [41, Páx. 210].) □

Teorema 3.3.3 *No Teorema 3.3.2, supoñamos que $E \neq \emptyset$. Se $g(\tau(N), Z) = 0$ para cada $Z \in \Gamma(kerf_*)^\perp_{|E}$ ortogonal a N entón existe unha única referencia estática $Z_1 \in \Gamma(kerf_*)^\perp_{|E}$ ortogonal a N. Reciprocamente, se existe unha referencia estacionaria $Q_1 \in \Gamma(kerf_*)^\perp_{|E}$ ortogonal a N entón $g(\tau(N), Z) = 0$, para todo $Z \in \Gamma(kerf_*)^\perp_{|E}$ ortogonal a N, e Q_1 é unha referencia estática.*

Proba.
Sexa $Z_1 \in \Gamma(kerf_*)^\perp_{|E}$ un campo de vectores unitario ortogonal a N. Daquela, polo Lema 3.3.2, $[N, Z_1] = \eta Z_1$ para algunha función η definida en E que é constante en cada fibra de f. Agora, probaremos que existe unha función λ definida en cada aberto suficientemente pequeno de E tal que $[N, \lambda Z_1] = 0$ e $d\lambda(Z_1) = 0$. Para iso, consideremos a ecuación

$$0 = [N, \lambda Z_1] = (N\lambda)Z_1 + \lambda[N, Z_1] = ((N\lambda) + \lambda\eta)Z_1.$$

Logo, chega con probar que $N\lambda + \lambda\eta = 0$ ten unha solución local λ con $Z_1\lambda = 0$. Primeiro, observemos que $\nabla_{Z_1} Z_1 \in \Gamma(kerf_*)^\perp_{|E}$ é ortogonal a Z_1 e $[N, Z_1]$ é ortogonal a N polo Lema 3.3.2. O Lema 3.3.1 tamén nos dá que $g((\mathfrak{L}_N \nabla)(Z_1, Z_1), Z_1) = 0$, e temos

$$\begin{aligned}
-Z_1\eta &= Z_1 g(\mathfrak{L}_N Z_1, Z_1) \\
&= g(\nabla_{Z_1} \mathfrak{L}_N Z_1, Z_1) \\
&= g(\mathfrak{L}_N \nabla_{Z_1} Z_1, Z_1) - g(\nabla_{\mathfrak{L}_N Z_1} Z_1, Z_1) = 0.
\end{aligned}$$

Agora, para a solución λ, sexa γ unha curva integral de Z_1 e sexa φ_t o grupo local 1-paramétrico de N. Notemos que, posto que N é prexeodésico, $\varphi_t \circ \gamma$ tamén é unha curva integral de Z_1 (salvo unha reparametrización). Logo a función λ definida localmente por $\lambda(p) = e^{-\int_0^t \eta \circ \varphi_s(q) ds}$, onde q está en γ con $\varphi_t(q) = p$, satisfai $N\lambda +$

$\lambda\eta = 0$ con $Z_1\lambda = 0$ e é constante en cada fibra de f. De feito $Z = \lambda Z_1$ é un campo de vectores de Killing. Para iso, chega con ver que ∇Z é antisimétrica en $(kerf_*)^\perp$ posto que $\nabla_X Z = 0$ para todo $X \in \Gamma kerf_*$. En efecto,

$$\begin{aligned} g(\nabla_N Z, Z) &= g(\nabla_Z N, Z) = -g(N, \nabla_Z Z), \\ g(\nabla_N Z, N) &= -g(Z, \nabla_N N) = 0, \\ g(\nabla_Z Z, N) &= -g(Z, \nabla_Z N) = -g(Z, \nabla_N Z), \\ g(\nabla_Z Z, Z) &= \tfrac{1}{2} Z g(Z, Z) = 0, \end{aligned}$$

é dicir, Z é un campo de vectores de Killing. Sen perda de xeneralidade, podemos supor que $Z_1 = \frac{1}{\lambda}Z$ apunta cara ao futuro e, polo tanto, é unha referencia estacionaria. De feito, Z_1 é unha referencia estática. Posto que $[N, Z] = 0$, existe unha carta (local) (t, r, θ, ϕ) para (E, g), onde (θ, ϕ) é unha carta para a esfera euclidiana 2-dimensional $\mathbb{S}^2$, tal que $Z = \frac{\partial}{\partial t}$ e $N = \frac{\partial}{\partial r}$. Séguese que $Z = -\lambda^2\nabla t$ e $Z_1 = -\lambda\nabla t$. Notemos que a referencia estática Z_1 está localmente definida. Para probar que pode ser definida en E chega con ver que é localmente única. Sexa $Q \in \Gamma(kerf_*)^\perp_{|E}$ un campo de vectores Killing ortogonal a N onde Z_1 está definida. Logo, existe unha función h tal que $Z = hQ$. De feito, esta función é constante. Posto que

$$\begin{aligned} Ng(Z, Z) &= (Nh^2)g(Q, Q) + h^2 Ng(Q, Q) \\ &= (Nh^2)g(Q, Q) + 2hg(\nabla_N Q, Z) \\ &= (Nh^2)g(Q, Q) - 2hg(N, \nabla_Z Q) \\ &= (Nh^2)g(Q, Q) - 2g(N, \nabla_Z Z) \\ &= (Nh^2)g(Q, Q) + Ng(Z, Z), \end{aligned}$$

$Nh = 0$ e, pola igualdade

$$0 = Zg(Z, Z) = (Zh^2)g(Q, Q) + Zg(Q, Q) = (Zh^2)g(Q, Q),$$

$Zh = 0$, e séguese que h é constante porque $\nabla_X Z = 0$ para todo $X \in \Gamma kerf_*$. Así Z_1 é localmente único en $(kerf_*)^\perp_{|E}$.

Agora, notemos que os dominios de definición de Z_1 pódense elixir con forma de "rectángulos", os cales sexan produtos de curvas integrais de N, Z_1 e fibras de f. Estes dominios teñen a propiedade de que se $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ son tales rectángulos con $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_3$ e $\mathfrak{R}_2 \cap \mathfrak{R}_3$ non-baleiros, entón $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2 \cap \mathfrak{R}_3$ é tamén un rectángulo non-baleiro. Así, é posible definir a función $\tilde{\lambda}$ en E tal que $\tilde{Z} = \tilde{\lambda}Z_1$ sexa un campo de vectores de Killing en E. Isto pódese facer partindo dun campo de vectores Killing definido nun rectángulo e estendéndoo na intersección de rectángulos próximos multiplicando o campo de vectores Killing en tales rectángulos por unha constante apropiada. Notemos que a referencia estática resultante en E non ten porque ser sincronizable. (Ver [47, Páx. 53].)

Reciprocamente, sexa $Q_1 \in \Gamma(kerf_*)^{\perp}_{|E}$ unha referencia estacionaria ortogonal a N e sexa Q o correspondente campo de vectores Killing en E. Primeiro, observemos que Q_1 é necesariamente unha referencia estática posto que $\nabla_X Q_1 = 0$ para todo $X \in \Gamma(kerf_*)_{|E}$. Para mostrar que $g(\tau(N), Q) = 0$ chega con ver que $[N, Q] = 0$. Séguese de

$$g((\mathfrak{L}_N \nabla)(Q, Q), Q) = g(\mathfrak{L}_N \nabla_Q Q, Q) - g(\nabla_Q \mathfrak{L}_N Q, Q) - g(\nabla_{\mathfrak{L}_N Q} Q, Q) = 0$$

(posto que $\nabla_Q Q$ é ortogonal a Q) que $g(\tau(N), Q) = 0$ polo Lema 3.3.1. Para probar que $[N, Q] = 0$, notemos que

$$\begin{aligned} g([N, Q], Q) &= g(\nabla_N Q, Q) - g(\nabla_Q N, Q) \\ &= -g(N, \nabla_Q Q) + g(N, \nabla_Q Q) = 0 \end{aligned}$$

e

$$g([N, Q], N) = g(\nabla_N Q, N) + g(\nabla_Q N, N) = 0.$$

Logo, temos que $[N, Q] = 0$. □

Nota 3.3.4 A carta (local) (t, r, θ, ϕ) construída na proba do Teorema 3.3.3 pode ser considerada un sistema de coordenadas "tipo Schwarzschild"en E. Notemos tamén que, polo Lema 3.3.2, a función ψ^2 só depende de r neste sistema de coordenadas posto que $Zg(N, N) = 0$, onde $Z = \frac{\partial}{\partial t}$ e $N = \frac{\partial}{\partial r}$. A métrica inducida nunha variedade integral M_1 de $(kerf_*)^{\perp}$ pode ser localmente descrita como

$$g_1 = g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) dt \otimes dt \oplus g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) dr \otimes dr.$$

Ademais, posto que $\frac{\partial}{\partial t} g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = 0 = \frac{\partial}{\partial t} g(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t})$, $g(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t})$ e $g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r})$ só dependen de r neste sistema de coordenadas. A coordenada r está relacionada co raio euclidiano das fibras de f. Recalquemos (ver proba do Teorema 3.3.2) que o raio euclidiano dunha fibra de f está dado por $\sqrt{\frac{2}{\Lambda}}$ e $\Lambda = 2(\rho - divN)$ (onde $N = \frac{\partial}{\partial r}$). Agora, é fácil ver que $divN$ só depende de r neste sistema de coordenadas. De $0 = (divT)(Z) = d\rho(Z)$, as tensións negativas de Faraday só dependen de r tamén. (Notemos que $(divT)(N) = d\rho(N) + 2\rho g(N, N)$, e polo tanto, $d\rho(N) = 0$ se e soamente se $\rho = 0$, puntualmente en E). Logo, $\sqrt{\frac{2}{\Lambda}}$ só depende de r neste sistema de coordenadas e, polo tanto, r é localmente función de $\sqrt{\frac{2}{\Lambda}}$. Como exemplo, no sistema de coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, ϕ) para a rexión E da solución de Reissner, o campo de vectores curvatura normal N está dado por $N = -\frac{\nabla r}{r} = -\frac{1}{r}(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2})\frac{\partial}{\partial r}$. De feito, a coordenada r neste sistema de coordenadas non é máis que a correspondente coordenada no sistema de coordenadas tipo Schwarzschild localmente escalada, para facer que a función de deformación sexa tan sinxela como $\psi^2(r) = r^2$ neste sistema de coordenadas. Finalmente notemos que o campo de vectores curvatura normal N na solución de Reissner cumpre que $\tau(N) \neq 0$, aínda que $g(\tau(N), Z) = 0$, onde $Z = \frac{\partial}{\partial t}$.

Nota 3.3.5 Un campo de vectores X nunha variedade semiriemanniana (M, g) denomínase *debilmente afín* se $g((\mathfrak{L}_X \nabla)(U, V), V) = 0$ para todo U, V ortogonal a X. No caso en que X é o campo de vectores curvatura media N no Teorema 3.3.2, N é debilmente afín na rexión E se e soamente se $g((\mathfrak{L}_N \nabla)(Z, Z), Z) = 0$ para todo $Z \in \Gamma(ker f_*)^{\perp}_{|E}$ ortogonal N. (Ver [25].) Logo, polo Lema 3.3.1, N é debilmente afín se e soamente se $g(\tau(N), Z) = 0$ para todo $Z \in \Gamma(ker f_*)^{\perp}_{|E}$ ortogonal a N.

Capítulo 4

Ecuación de Möbius asociada a unha aplicación

Neste capítulo estudiaremos a xeneralización da ecuación de Möbius estudiada nos capítulos anteriores para aplicacións $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ definidas entre variedades semiriemannianas. Estudiaremos esta ecuación en relación coa estrutura local da variedade dominio das solucións. Máis exactamente, veremos como a existencia de solucións da dita ecuación implica a descomposición local do dominio da aplicación como un produto twisted e, ao mesmo tempo, supón a factorización local da aplicación. Tamén estudiamos certas condicións adicionais sobre a xeometría da variedade que nos permiten caracterizar os produtos warped mediante a existencia de solucións da ecuación de Möbius. Finalmente, na sección §4.4 mostraremos que baixo certas condicións as solucións da ecuación de Möbius son necesariamente totalmente xeodésicas.

4.1. Introdución

Comezamos recopilando algúns conceptos básicos e coñecidos relativos á segunda forma fundamental dunha aplicación (ver, por exemplo, [25]).

Definición 4.1.1 Sexan M_1 e M_2 dúas variedades diferenciables e $f : M_1 \longrightarrow M_2$ unha aplicación. Un *campo de vectores ao longo de* f é unha aplicación

$$X : M_1 \longrightarrow TM_2$$

tal que

$$X(p_1) \in T_{f(p_1)}M_2,$$

para todo $p_1 \in M_1$.

Denotaremos por $\Gamma_f TM_2$ o conxunto dos campos de vectores ao longo de f. No caso concreto en que $M_1 = M_2 \equiv M$ e $f = id$ entón $\Gamma_f TM_2 \equiv \Gamma_{id} TM$ non é máis que o conxunto dos campos de vectores sobre a variedade M e $\Gamma_{id} TM$ denótase por ΓTM.

Notemos que se $f : M_1 \longrightarrow M_2$ é unha aplicación e $X \in \Gamma TM_1$ entón a aplicación $f_* X : M_1 \longrightarrow TM_2$ definida por $(f_* X)(p_1) = f_{*p_1}(X(p_1))$ é un campo de vectores ao longo de f, onde f_* denota a diferencial da aplicación f. Se $Y \in \Gamma TM_2$ entón $Y \circ f$ tamén é un campo de vectores ao longo de f. Dise que $X \in \Gamma TM_1$ e $Y \in \Gamma TM_2$ están f-relacionados se $f_* X = Y \circ f$.

A continuación definimos o concepto de conexión ao longo dunha aplicación, que se utiliza na definición da segunda forma fundamental dunha aplicación.

Definición 4.1.2 Sexa $f : M_1 \longrightarrow M_2$ unha aplicación. Unha *conexión en M_2 ao longo de f* é unha aplicación $\nabla : \Gamma TM_1 \times \Gamma_f TM_2 \longrightarrow \Gamma_f TM_2$ que verifica as seguintes propiedades:

a) $\nabla_{X+Y} U = \nabla_X U + \nabla_Y U$,

b) $\nabla_{hX} U = h \nabla_X U, \;\; h \in C^\infty(M_1)$,

c) $\nabla_X (U + V) = \nabla_X U + \nabla_X V$,

d) $\nabla_X (hU) = X(h) U + h \nabla_X U, \;\; h \in C^\infty(M_1)$.

para todo $X, Y \in \Gamma TM_1$ e $U, V \in \Gamma TM_2$.

Notemos que, na anterior definición, no caso particular en que $M_1 = M_2 \equiv M$ e $f \equiv id$ temos que ∇ non é máis que unha conexión en M.

O seguinte resultado garántenos a existencia dunha única conexión ao longo dunha aplicación que sexa compatible cunha conexión na variedade de chegada da aplicación.

Teorema 4.1.1 [25] *Sexa $f : M_1 \longrightarrow M_2$ unha aplicación e sexa $\overset{2}{\nabla}$ unha conexión en M_2. Daquela, existe unha única conexión $\overset{2}{\nabla}{}^f$ en M_2 ao longo de f tal que, para todo $Y \in \Gamma TM_2$,*

$$\overset{2}{\nabla}{}^f{}_X \, (Y \circ f) = \overset{2}{\nabla}_{f_* X} Y$$

Supoñamos agora que (M_1, g_1) e (M_2, g_2) son dúas variedades semiriemannianas e que $\overset{1}{\nabla}$ e $\overset{2}{\nabla}$ son as conexións de Levi Civita respectivas. Entón:

Definición 4.1.3 Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación. A *segunda forma fundamental de f* é a aplicación

$$\nabla f_* : \Gamma TM_1 \times \Gamma TM_1 \longrightarrow \Gamma_f TM_2$$

definida por

$$(\nabla f_*)(X, Y) = \overset{2}{\nabla}_X f_* Y - f_*(\overset{1}{\nabla}_X Y),$$

onde $\overset{2}{\nabla}$ tamén denota o pullback de $\overset{2}{\nabla}$ ao longo de f.

A continuación recollemos dúas propiedades básicas da segunda forma fundamental dunha aplicación, como son o carácter bilinear e simétrico.

Proposición 4.1.1 *Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación diferenciable entre dúas variedades semiriemannianas. A segunda forma fundamental de f, ∇f_*, é unha aplicación bilinear e simétrica.*

Proba.
Comezaremos comprobando que ∇f_* é unha aplicación simétrica. Sexan $X, Y \in \Gamma TM_1$. Como un primeiro paso na proba obtemos, usando as propiedades das conexións, a identidade

$$\begin{aligned} \overset{2}{\nabla}_X f_* Y &= \overset{2}{\nabla}_{f_* X} f_* Y = \overset{2}{\nabla}_{f_* Y} f_* X + [f_* X, f_* Y] \\ &= \overset{2}{\nabla}_Y f_* X + f_*[X, Y]. \end{aligned}$$

Usando a anterior igualdade, temos que

$$\begin{aligned} (\nabla f_*)(X, Y) &= \overset{2}{\nabla}_X f_* Y - f_*(\overset{1}{\nabla}_X Y) \\ &= \overset{2}{\nabla}_Y f_* X + f_*[X, Y] - f_*(\overset{1}{\nabla}_Y X) - f_*[X, Y] \\ &= \overset{2}{\nabla}_Y f_* X - f_*(\overset{1}{\nabla}_Y X) \\ &= (\nabla f_*)(Y, X). \end{aligned}$$

A continuación probamos o carácter bilinear da aplicación ∇f_*. Como é simétrica, chega con ver que é linear na primeira compoñente. Sexan $X_1, X_2, Y \in \Gamma TM_1$ e $h \in C^\infty(M_1)$. Entón,

$$\begin{aligned}
(\nabla f_*)(h_1X_1 + h_2X_2, Y) &= \overset{2}{\nabla}_{h_1X_1+h_2X_2}\, f_*Y - f_*\, \overset{1}{\nabla}_{h_1X_1+h_2X_2}\, Y \\
&= h_1\, \overset{2}{\nabla}_{X_1}\, f_*Y + h_2\, \overset{2}{\nabla}_{X_2}\, f_*Y \\
&\qquad -h_1 f_*\, \overset{1}{\nabla}_{X_1}\, Y - h_2 f_*\, \overset{1}{\nabla}_{X_2}\, Y \\
&= h_1(\nabla f_*)(X_1, Y) + h_2(\nabla f_*)(X_2, Y),
\end{aligned}$$

é dicir, (∇f_*) é unha aplicación bilinear. □

Posto que ∇f_* é unha aplicación linear nos seus argumentos, o valor de (∇f_*) (X, Y) nun punto $p_1 \in M_1$ só depende dos valores de X e Y no punto $p_1 \in M_1$. Logo, para $x, y \in T_{p_1}M_1$ podemos definir $(\nabla f_*)(x, y)$ por

$$(\nabla f_*)(x, y) = (\nabla f_*)(X, Y)(p_1),$$

onde $X, Y \in \Gamma TM_1$ son dous campos de vectores tales que $X(p_1) = x$ e $Y(p_1) = y$.

Definición 4.1.4 Dise que unha aplicación $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ é *afín* ou *totalmente xeodésica* se ten segunda forma fundamental identicamente nula, ou sexa, $(\nabla f_*) \equiv 0$.

As aplicacións afíns ou totalmente xeodésicas pódense caracterizar en termos das xeodésicas das variedades dominio e rango. En efecto, se $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ é unha aplicación afín entón f manda xeodésicas en xeodésicas, é dicir, se $\gamma : I \longrightarrow M_1$ é unha xeodésica na variedade (M_1, g_1) entón $f \circ \gamma : I \longrightarrow M_2$ é tamén unha xeodésica en (M_2, g_2).

A continuación determinamos a segunda forma fundamental dunha aplicación composta en termos das segundas formas fundamentais dos factores. A expresión que se obtén empregarémola en varias ocasións durante o resto desta memoria.

Teorema 4.1.2 *Sexan* (M_1, g_1), (M_2, g_2) *e* (M_3, g_3) *tres variedades semiriemannianas con conexións de Levi Civita* $\overset{1}{\nabla}$, $\overset{2}{\nabla}$ *e* $\overset{3}{\nabla}$, *respectivamente. Sexan* $f^1 : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ *e* $f^2 : (M_2, g_2) \longrightarrow (M_3, g_3)$ *dúas aplicacións diferenciables. Entón, a segunda forma fundamental da aplicación* $f^3 = f^2 \circ f^1$,

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rr, "f^3"] \arrow[dr, "f^1"'] & & M_3 \\
& M_2 \arrow[ur, "f^2"'] &
\end{tikzcd}$$

satisfai a identidade

$$(\nabla f^3{}_*)(X,Y) = (\nabla f^2{}_*)(f^1{}_*X, f^1{}_*Y) + f^2{}_*((\nabla f^1{}_*)(X,Y)),$$

para todo $X, Y \in \Gamma TM_1$.

Proba.
Sexan $X, Y \in \Gamma TM_1$. Entón, usando que $f^3{}_* = f^2{}_* \circ f^1{}_*$, temos que

$$\begin{aligned}
(\nabla f^3{}_*)(X,Y) &= \overset{3}{\nabla}_{f^3{}_*X}\, f^3{}_*Y - f^3{}_*\, \overset{1}{\nabla}_X\, Y \\
&= \overset{3}{\nabla}_{(f^2{}_*\circ f^1{}_*)X}\, (f^2{}_*\circ f^1{}_*)Y - (f^2{}_*\circ f^1{}_*)\, \overset{1}{\nabla}_X\, Y \\
&= \overset{3}{\nabla}_{f^2{}_*(f^1{}_*X)}\, f^2{}_*(f^1{}_*Y) - f^2{}_*(f^1{}_*\, \overset{1}{\nabla}_X\, Y) \\
&= \overset{3}{\nabla}_{f^2{}_*(f^1{}_*X)}\, f^2{}_*(f^1{}_*Y) - f^2{}_*\, \overset{2}{\nabla}_{f^1{}_*X}\, f^1{}_*Y \\
&\qquad + f^2{}_*\, \overset{2}{\nabla}_{f^1{}_*X}\, f^1{}_*Y - f^2{}_*(f^1{}_*\, \overset{1}{\nabla}_X\, Y) \\
&= (\nabla f^2{}_*)(f^1{}_*X, f^1{}_*Y) + f^2{}_*((\nabla f^1{}_*)(X,Y)),
\end{aligned}$$

o que proba o resultado. □

Definición 4.1.5 Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación diferenciable. Defínese o *campo de tensión* da función f, que denotaremos por $\tau(f)$, como a traza da segunda forma fundamental de f, ∇f_*, con respecto á métrica g_1.

Se $\{E_1, \cdots, E_n\}$ é unha referencia ortonormal local de TM_1, entón

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^{n_1} g_1(E_i, E_i)(\nabla f_*)(E_i, E_i),$$

onde n_1 denota a dimensión de M_1.

Notemos que o campo de tensión dunha aplicación $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ é un campo de vectores ao longo de f, é dicir, $\tau(f) \in \Gamma_f TM_2$.

Definición 4.1.6 Unha aplicación $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ dise *harmónica* se o seu campo de tensión é identicamente nulo, é dicir, $\tau(f) \equiv 0$.

Obtemos como consecuencia inmediata do Teorema 4.1.2 o seguinte resultado.

Corolario 4.1.1 *Sexan* $f^1 : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ *e* $f^2 : (M_2, g_2) \longrightarrow (M_3, g_3)$ *dúas aplicacións diferenciables entre variedades semiriemannianas e* $f^3 = f^2 \circ f^1$. *Daquela,* *i) se f^1 e f^2 son totalmente xeodésicas, entón f^3 tamén é totalmente xeodésica.*

ii) se f^1 é harmónica e f^2 é totalmente xeodésica, entón f^3 é harmónica.

Antes de continuar, necesitamos introducir o concepto de submersión semiriemanniana.

Definición 4.1.7 Unha aplicación $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ dise unha *submersión semiriemanniana* se f é unha submersión e se cumpre que

$$g_2(f_*X, f_*Y) = g_1(X, Y),$$

para todo par de campos de vectores $X, Y \in \Gamma(kerf)^{\perp}$.

Corolario 4.1.2 *Dadas tres variedades semiriemannianas (M_1, g_1), (M_2, g_2) e (M_3, g_3), sexan $f^1 : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ e $f^2 : (M_2, g_2) \longrightarrow (M_3, g_3)$ dúas aplicacións diferenciables. Se f^1 é unha submersión semiriemanniana, entón*

$$\tau(f^3) = \tau(f^2) + {f^2}_*(\tau(f^1)).$$

Proba.
Sexa $\{E_1, \cdots, E_r, \cdots, E_{n_1}\}$ unha referencia ortonormal de TM_1 tal que $\{E_1, \cdots, E_r\}$ é unha referencia ortonormal de $(kerf^1)^{\perp}$. Entón, como f^1 é unha submersión riemanniana temos que $\{{f^1}_*E_1, \cdots, {f^1}_*E_r\}$ é unha referencia ortonormal de TM_2. Tendo en conta isto e o Teorema 4.1.2, obtemos que

$$\begin{aligned}
\tau(f^3) &= \sum_{i=1}^{n_1} (\nabla {f^3}_*)(E_i, E_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} (\nabla {f^2}_*)({f^1}_*E_i, {f^1}_*E_i) + \sum_{i=1}^{n_1} {f^2}_*((\nabla {f^1}_*)(E_i, E_i)) \\
&= \tau(f^2) + {f^2}_*\tau(f^1),
\end{aligned}$$

o que proba o resultado. □

4.2. Ecuación de Möbius asociada a unha aplicación

Nesta sección introducimos a ecuación de Möbius asociada a unha aplicación e estudiamos a relación existente entre que unha aplicación sexa solución da ecuación de Möbius e teña rango constante. É fácil ver que as ecuacións que estudiamos nos dous capítulos anteriores son casos particulares da ecuación de Möbius, cando se considera como rango a recta real ou o plano euclidiano, respectivamente.

Definición 4.2.1 Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación diferenciable. Diremos que f satisfai a *ecuación de Möbius* se

$$(\nabla f_*)(X, Y) = g_1(X, Y)\xi,$$
$$(\nabla f_*)(X, V) = 0,$$

para todo $X, Y \in \Gamma Kerf_*$, $V \in \Gamma(kerf_*)^\perp$. Diremos que f satisfai a *ecuación especial de Möbius* se $\xi_p = \frac{1}{r_p}\tau(f)(p)$, para todo $p \in M_1$, onde $r_p = \dim kerf_{*p} \geq 1$.

Nota 4.2.1 Unha aplicación que sexa solución da ecuación de Möbius pode ter rango non-constante.

A continuación imos dar un exemplo que ilustra a anterior afirmación, é dicir, imos definir unha aplicación de rango non-constante que é solución da ecuación de Möbius. Sexa $(M_1, g_1) = (\mathbb{R}^2 \times N, dx \otimes dx + dy \otimes dy + g_N)$ unha variedade produto e consideremos a aplicación harmónica $i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $i(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Consideremos $f = i \circ \pi$, onde π denota a proxección sobre o primeiro factor no anterior produto. É claro que f non ten rango constante e, a continuación, veremos que satisfai a ecuación de Möbius.

π é unha aplicación afín e, daquela, satisfai a ecuación de Möbius. Logo

$$(\nabla \pi_*)(X, Y) = \frac{1}{2} g_1(X, Y)\tau(\pi)$$

para todo $X, Y \in \Gamma ker\pi_*$. Entón

$$(\nabla f_*)(X, Y) = i_*(\nabla \pi_*)(X, Y) = \frac{1}{2} g_1(X, Y) i_*\tau(\pi)$$

para todo $X, Y \in \Gamma ker\pi_*$. Así, posto que $\tau(f) = i_*\tau(\pi)$, se $\pi(p) \neq 0$ entón

$$(\nabla f_*)(X, Y) = \frac{1}{2} g_1(X, Y)\tau(f)$$

para todo $X, Y \in \Gamma ker\pi_* = \Gamma kerf_*$.

Agora, sexa p tal que $\pi(p) = 0$. Logo $\tau(f) = i_*\tau(\pi) = 0$ e posto que $(\nabla i_*)_0 = 0$ temos que

$$(\nabla f_*)(X, Y) = 0$$

para todo $X, Y \in \Gamma TM_1$.

Logo, vimos que f satisfai a ecuación especial de Möbius e, sen embargo, f non ten rango constante.

O seguinte resultado dá unha condición suficiente para que unha aplicación que satisfai a ecuación especial de Möbius teña (localmente) rango constante.

Proposición 4.2.1 *Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación diferenciable satisfacendo a ecuación especial de Möbius. Se $\tau(f)(p)$ é distinto de cero entón f ten rango constante nunha veciñanza de p.*

Proba.
Sexa p un punto de M_1 tal que $\tau(f)(p) \neq 0$ e supoñamos que o rango de f non é constante en ningunha veciñanza de p. Entón, existe unha sucesión (p_n) de puntos de M_1 que converxe a p e tal que $\dim ker f_{*p_n} = r_n < r = \dim ker f_{*p}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, sexa $X \in \Gamma ker f_*$ un campo de vectores que non se anula nunha veciñanza de p. Entón,

$$(\nabla f_*)(X_{p_n}, X_{p_n}) = \frac{1}{r_n} g_1(X_{p_n}, X_{p_n})\tau(f)(p_n)$$

converxe a $(\nabla f_*)(X_p, X_p) = \frac{1}{r} g_1(X_p, X_p)\tau(f)(p)$, o cal é imposible. Logo, se supoñemos que o rango de f é non-constante en ningunha veciñanza de p chegamos a unha contradición. Polo tanto, f ten rango constante nunha veciñanza de p. $\square$

Do anterior teorema séguese de modo inmediato o seguinte resultado, que nos dá unha condición suficiente para que unha solución da ecuación de Möbius teña (globalmente) rango constante.

Corolario 4.2.1 *Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación satisfacendo a ecuación especial de Möbius. Se M_1 é conexa e $\tau(f)$ non se anula en ningún punto entón f ten rango constante.*

Nota 4.2.2 Non temos un resultado similar para unha aplicación que satisfaga a ecuación de Möbius non-especial. En efecto, $\xi_p \neq 0$ non é unha condición suficiente para asegurar que f ten rango constante nunha veciñanza do punto p.

A continuación damos un exemplo da anterior afirmación. Consideremos o produto warped $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, dx_1 \otimes dx_1 + \lambda(x_1, x_2)^2(dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3 + dx_4 \otimes dx_4))$ e sexa π a proxección sobre o primeiro factor. Sexa $i : (\mathbb{R}^2, dx_1 \otimes dx_1 + \lambda(x_1, x_2)^2 dx_2 \otimes dx_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2)$ a aplicación definida por $i(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)$. Consideremos $f = i \circ \pi$ e supoñamos que $\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}(0, x_2)$ é diferente de cero para todo $x_2 \in \mathbb{R}$.

Denotemos $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Logo, en $\mathbb{R}^2 \times_\lambda \mathbb{R}^2$ tense que

$$\nabla_{X_3} X_3 = \nabla_{X_4} X_4 = -\lambda \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} X_2 \right).$$

Do anterior obtemos que

$$(\nabla \pi_*)(X_3, X_3) = (\nabla \pi_*)(X_4, X_4) = \lambda \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} X_2 \right).$$

Sexa p un punto tal que $\pi(p) \neq 0$. Entón $kerf_{*p} = ker\pi_{*p}$. Así

$$(\nabla f_*)(X_3, X_3) = (\nabla f_*)(X_4, X_4) = \lambda \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} X_1 + 2x_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} X_2 \right).$$

Agora, sexa p un punto tal que $\pi(p) = 0$. Entón, $kerf_{*p} = \langle X_2, X_3, X_4 \rangle$ e $ker\pi_{*p} = \langle X_3, X_4 \rangle$. Temos que

$$(\nabla f_*)(X_3, X_3) = (\nabla f_*)(X_4, X_4) = \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} X_1 \neq 0$$

e

$$(\nabla f_*)(X_2, X_2) = (\nabla i_*)(X_2, X_2) = -i_{*0} \nabla_{X_2} X_2.$$

Pero en $(\mathbb{R}^2, dx_1 \otimes dx_1 + \lambda(x_1, x_2)^2 dx_2 \otimes dx_2)$ é

$$\nabla_{X_2} X_2 = -\lambda(\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} X_2).$$

Logo

$$(\nabla f_*)(X_2, X_2) = -i_{*0} \nabla_{X_2} X_2 = \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} X_1.$$

Entón, vimos que

$$(\nabla f_*)(X, X) = \frac{g_1(X, X)}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} X_1$$

para todo $X \in \Gamma kerf_*$.

Agora, só resta ver que $(\nabla f_*)(X_1, X_2) = 0$. Pero como

$$\nabla_{X_2} X_1 = \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} X_2$$

obtemos que

$$(\nabla f_*)(X_2, X_1) = (\nabla i_*)(X_2, X_1) = -i_* \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} X_2 = 0.$$

4.3. Resultados de descomposición

Nesta sección poremos de manifesto a relación entre a existencia de solucións da ecuación de Möbius e a descomposición local como un produto twisted do dominio das ditas solucións. Comezamos vendo que a proxección dun produto twisted sobre o primeiro factor nos proporciona unha solución da ecuación de Möbius. Tamén obtemos o resultado recíproco, vendo que se unha aplicación satisfai a ecuación de Möbius entón o seu dominio ten estrutura local de produto twisted. Posteriormente, engadindo unha condición adicional sobre a segunda forma fundamental, obtemos unha relación análoga entre submersións que satisfan a ecuación de Möbius e as proxeccións sobre o primeiro factor dun produto warped.

Teorema 4.3.1 *Sexan* $(M_1, g_1) = (N_1 \times N_2, h_1 + \lambda^2 h_2)$ *un produto twisted e* $i : (N_1, h_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ *unha inmersión. Entón,* $f = i \circ \pi$ *satisfai a ecuación de Möbius. Ademais,* f *satisfai a ecuación especial de Möbius se e soamente se* i *é harmónica.*

Proba. O primeiro paso da demostración consiste en ver que $\pi = \pi_1 : M_1 = N_1 \times N_2 \longrightarrow N_1$ satisfai a ecuación especial de Möbius. Da Proposición 1.3.3 dedúcese que $Ker\pi_*$ e unha distribución totalmente umbílica e $ker\pi_*^{\perp}$ é totalmente xeodésica. Sexan $p_1 \in M_1$, $X_{p_1} \in T_{p_1}M_1$ e $Y \in \Gamma ker\pi_*$. Entón,

$$(\nabla\pi_*)(X_{p_1}, Y_{p_1}) = \overset{2}{\nabla}_{X_{p_1}} \pi_* Y - \pi_{*p_1} \overset{1}{\nabla}_{X_{p_1}} Y = -\pi_{*p_1} \overset{1}{\nabla}_{X_{p_1}} Y = -\pi_{*p_1} B(X_{p_1}, Y_{p_1}),$$

onde B denota a segunda forma fundamental da folla de $ker\pi_*$ que contén ao punto p_1. Agora, posto que $ker\pi_*$ e unha distribución totalmente umbílica,

$$B(X_{p_1}, Y_{p_1}) = g_1(X_{p_1}, Y_{p_1})\nu_{p_1},$$

e así

$$(\nabla\pi_*)(X_{p_1}, Y_{p_1}) = g_1(X_{p_1}, Y_{p_1})(-\pi_{*p_1}\nu_{p_1}) = g_1(X_{p_1}, Y_{p_1})\eta_{p_1},$$

onde $\eta_{p_1} = -\pi_{*p_1}\nu_{p_1}$.

Agora, probaremos que $\eta_{p_1} = \frac{1}{r_{p_1}}\tau(\pi)_{p_1}$, onde r_{p_1} denota a dimensión de $ker\pi_{*p_1}$. Para iso, sexa $\{X_1, \cdots, X_{k_1}, Y_1, \cdots, Y_{k_2}\}$ unha base ortonormal de $T_{p_1}M_1$, de modo que $\{X_1, \cdots, X_{k_1}\}$ sexa unha base de $ker\pi_{*p_1}^{\perp}$ e $\{Y_1, \cdots, Y_{k_2}\}$ sexa base de $ker\pi_{*p_1}$. De [54, Lemma 3.1] séguese que $(\nabla\pi_*)(X_i, X_i) = 0$, $i = 1, \cdots, k_1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\tau(\pi) &= \sum_{i=1}^{k_1}(\nabla\pi_*)(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^{k_2}(\nabla\pi_*)(Y_i, Y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k_2}(\nabla\pi_*)(Y_i, Y_i) = \sum_{i=1}^{k_2} g_1(Y_i, Y_i)\eta_{p_1} = k_2\eta_{p_1} = r_{p_1}\eta_{p_1}.
\end{aligned}$$

A continuación mostraremos que $(\nabla\pi_*)(X, V) = 0$ para todo $X \in \Gamma ker\pi_*$ e $V \in \Gamma ker\pi_*^{\perp}$. Posto que $ker\pi_*^{\perp}$ é integrable e totalmente xeodésica cúmprese que $\overset{1}{\nabla}_V W \in \Gamma ker\pi_*^{\perp}$ para todo $V, W \in \Gamma ker\pi_*^{\perp}$. Logo, para $X \in \Gamma ker\pi_*$ verifícase que $g_1(\overset{1}{\nabla}_V X, W) = 0$. Entón, $\overset{1}{\nabla}_V X \in \Gamma ker\pi_*$, de onde

$$(\nabla\pi_*)(X, V) = -\pi_* \overset{1}{\nabla}_V X = 0.$$

Así, probamos que $\pi = \pi_1 : M_1 = N_1 \times N_2 \longrightarrow N_1$ satisfai a ecuación especial de Möbius.

A continuación probaremos que $f = i \circ \pi$ satisfai a ecuación de Möbius. Da relación,

$$(\nabla f_*)(X,Y) = i_*((\nabla \pi_*)(X,Y)) + (\nabla i_*)(\pi_* X, \pi_* Y),$$

válida para todo $X, Y \in \Gamma TM_1$, obtemos

$$(\nabla f_*)(X,Y) = \frac{1}{r} g_1(X,Y) i_* \tau(\pi),$$

para todo $X, Y \in \Gamma ker f_*$, e

$$(\nabla f_*)(X,V) = 0,$$

para todo $X \in \Gamma ker f_*$ e $V \in \Gamma ker f_*^\perp$. É dicir, f satisfai a ecuación de Möbius con $\xi = \frac{1}{r} i_* \tau(\pi)$.

Posto que π é unha submersión riemanniana tense a relación

$$\tau(f) = i_* \tau(\pi) + \tau(i).$$

Entón, $\frac{1}{r}\tau(f) = \xi (= \frac{1}{r} i_* \tau(\pi))$ se e soamente se $\tau(i) = 0$, é dicir, f satisfai a ecuación especial de Möbius se e soamente se a inmersión i é harmónica. □

Corolario 4.3.1 *Sexa* $(M_1, g_1) = (N_1 \times N_2, h_1 + \lambda^2 h_2)$ *un produto twisted. Entón* $\pi = \pi_1 : M_1 = N_1 \times N_2 \longrightarrow N_1$ *satisfai a ecuación especial de Möbius.*

Antes de establecer o recíproco do teorema anterior damos un resultado preliminar.

Lema 4.3.1 *Sexa* $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ *unha aplicación de rango constante satisfacendo a ecuación de Möbius. Entón,* $(Ker f_*)^\perp$ *é unha distribución integrable e totalmente xeodésica.*

Proba.
Sexan $X \in \Gamma ker f_*$ e $V \in \Gamma ker f_*^\perp$. Posto que f satisfai a ecuación de Möbius, temos que $(\nabla f_*)(X,V) = 0$. Daquela,

$$0 = (\nabla f_*)(X,V) = \overset{2}{\nabla}_V f_* X - f_* \overset{1}{\nabla}_V X = -f_* \overset{1}{\nabla}_V X.$$

Logo, $\overset{1}{\nabla}_V X \in \Gamma ker f_*$ para todo $X \in \Gamma ker f_*$ e $V \in \Gamma ker f_*^\perp$.

Agora, consideremos $W \in \Gamma ker f_*^\perp$. Posto que $g_1(W,X) = g_1(\overset{1}{\nabla}_V X, W) = 0$ obtemos que $0 = g_1(\overset{1}{\nabla}_V W, X)$.

Polo tanto, comprobamos que $\overset{1}{\nabla}_V W \in \Gamma ker f_*^{\perp}$ para todo $V, W \in \Gamma ker f_*^{\perp}$. É dicir, $ker f_*^{\perp}$ é unha distribución integrable e totalmente xeodésica. $\square$

Os dous seguintes resultados establecen o recíproco do Teorema 4.3.1, mostrando que o rango dunha aplicación que satisfai a ecuación de Möbius ten unha estrutura local de produto twisted.

Teorema 4.3.2 *Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación de rango constante satisfacendo a ecuación de Möbius. Entón, temos a seguinte descomposición (local)*

$$(M_1, g_1) = (N_1 \times N_2, h_1 + \lambda^2 h_2)$$

como un produto twisted, onde N_1 e N_2 cumpren que $TN_1 = ker f_*^{\perp}$ e $TN_2 = ker f_*$. Ademais a aplicación f factorízase localmente como f

$$\begin{tikzcd}
M_1 = N_1 \times N_2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M_2 \\
& N_1 \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

onde π é a proxección canónica e i é unha inmersión.

Proba.
Sexan $X, Y \in \Gamma ker f_*$. Entón,

$$(\nabla f_*)(X, Y) = \overset{2}{\nabla}_X f_* Y - f_* \overset{1}{\nabla}_X Y = -f_* \overset{1}{\nabla}_X Y = -f_* B(X, Y),$$

onde B denota a segunda forma fundamental das follas de $ker \pi_*$. Posto que f satisfai a ecuación de Möbius temos que

$$g_1(X, Y)\xi = -f_* B(X, Y).$$

Sexa $Z \in \Gamma ker f_*$ un campo de vectores unitario e denotemos $\eta = B(Z, Z)$. Entón, $\xi = -f_* \eta$, de onde

$$f_*(B(X, Y) - g_1(X, Y)\eta) = 0.$$

Así, $B(X, Y) = g_1(X, Y)\eta$. Isto proba que $ker f_*$ é unha distribución totalmente umbílica.

Agora, do Lema 4.3.1 obtemos que $ker f_*^{\perp}$ é unha distribución integrable e totalmente xeodésica. Logo, usando a Proposición 1.3.3, obtemos que M_1 é (localmente) un produto twisted.

Agora, en canto á factorización da aplicación f, consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M_1 = N_1 \times N_2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M_2 \\ & N_1 \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

onde i está definida por $i : x \rightsquigarrow i(x) = f(x, y_0)$, sendo $y_0 \in N_2$. Notemos que a definición de i é independente do punto y_0 elixido, pois a aplicación $f_x : N_2 \longrightarrow M_2$, $f_x(y) = f(x, y)$ ten rango constante cero e, polo tanto, é localmente constante. $\square$

Teorema 4.3.3 *Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación de rango constante satisfacendo a ecuación especial de Möbius. Entón, temos a seguinte descomposición (local)*

$$(M_1, g_1) = (N_1 \times N_2, h_1 + \lambda^2 h_2)$$

como un produto twisted, onde N_1 e N_2 cumpren que $TN_1 = ker f_*^{\perp}$ e $TN_2 = ker f_*$. Ademais, a aplicación f factorízase localmente como f

$$\begin{tikzcd} M_1 = N_1 \times N_2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M_2 \\ & N_1 \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

onde π é a proxección canónica e i é unha inmersión harmónica.

Proba.
A primeira parte do resultado séguese do teorema anterior. Só nos resta probar que i é harmónica se e soamente se f satisfai a ecuación especial de Möbius. Como no teorema anterior, temos a relación

$$\tau(f) = i_* \tau(\pi) + \tau(i),$$

xa que π é unha submersión riemanniana. Agora, para $X, Y \in \Gamma ker f_*$ temos

$$(\nabla f_*)(X, Y) = g_1(X, Y)\xi$$

e

$$(\nabla f_*)(X, Y) = \frac{1}{r} g_1(X, Y) i_* \tau(\pi).$$

Entón,

$$\xi = \frac{1}{r} i_* \tau(\pi)$$

de onde

$$\xi = \frac{1}{r}\tau(f) \qquad \text{se e soamente se} \qquad \tau(i) = 0,$$

é dicir, f satisfai a ecuación especial de Möbius se e soamente se a inmersión i é harmónica. □

A continuación mostramos que a proxección dun produto warped, ademais de ser solución da ecuación de Möbius, cumpre unha condición adicional sobre a súa segunda forma fundamental.

Teorema 4.3.4 *Sexa $(M, g) = (N_1 \times N_2, h_1 + \lambda^2 h_2)$ un produto warped de variedades riemannianas. Entón, a proxección $\pi = \pi_1 : M = N_1 \times N_2 \longrightarrow N_1$ satisfai a ecuación especial de Möbius e $(\nabla\nabla\pi_*)(X, Y, Z) = 0$ para toda terna de campos de vectores X, Y, Z tanxentes ás copias de N_2 en $M = N_1 \times N_2$.*

Proba.
Primeiro, notemos que, polo Corolario 4.3.1, π satisfai a ecuación especial de Möbius. Dados $X, Y, Z \in \Gamma ker\pi_*$, posto que π satisfai a ecuación de Möbius, temos que

$$\begin{aligned}
(\nabla\pi_*)(X, Y, Z) &= \nabla_X((\nabla\pi_*)(Y, Z)) - (\nabla\pi_*)(\nabla_X Y, Z) - (\nabla\pi_*)(Y, \nabla_X Z) \\
&= \nabla_X(\frac{1}{n_2} g(Y, Z)\tau(\pi)) - \frac{1}{n_2} g(\nabla_X Y, Z) - \frac{1}{n_2} g(Y, \nabla_X Z) \\
&= \frac{1}{n_2} g(Y, Z)\nabla_X \tau(\pi).
\end{aligned}$$

Logo, para probar o resultado chega con ver que $\nabla_X \tau(\pi) = 0$. Agora, na proba do Teorema 4.3.1 vimos que $\tau(\pi) = n_2\eta$, sendo η o campo de vectores curvatura normal das follas de $ker\pi_*$. Pero, como (M, g) é un produto warped, temos que as follas de $ker\pi_*$ son esféricas e, polo tanto, $\nabla_X \tau(\pi) = 0$. □

Vimos no anterior resultado que a proxección dun produto warped satisfai a ecuación de Möbius e, ademais, tense que $(\nabla\nabla\pi_*)(X,Y,Z)=0$ para todo $X,Y,Z\in \Gamma ker f_*$. No seguinte resultado probamos que a estrutura de produto twisted nos Teoremas 4.3.2 e 4.3.3 pode ser substituída pola de produto warped impoñendo que a aplicación f cumpra a condición análoga á que satisfai π.

Teorema 4.3.5 *Sexa $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ unha submersión entre dúas variedades de Riemann (M_1,g_1) e (M_2,g_2) satisfacendo a ecuación de Möbius. Se $\nabla\nabla f_*(X,Y,Z)=0$ para todo $X,Y,Z\in\Gamma ker f_*$, entón (M_1,g_1) é localmente un produto warped $(M_1^1\times M_1^2, g_1^1\oplus\varphi g_1^2)$, onde (M_1^1,g_1^1) e (M_1^2,g_1^2) son dúas variedades de Riemann e $f:M_1^1\times M_1^2\to M_1^1$ é a proxección.*

Proba. Polo Teorema 4.3.2 a variedade (M_1,g_1) é localmente un produto twisted, sendo as subvariedades integrais de $ker f_*$ totalmente umbílicas con campo de vectores curvatura media $\eta=-\frac{\tilde\tau(f)}{n_1-n_2}$, onde $\tilde\tau(f)$ é o levantamento de $\tau(f)$ a $(ker f_*)^\perp$. Logo, para mostrar que (M_1,g_1) é localmente un produto warped chega con ver que o campo de vectores η é paralelo no fibrado normal ao longo das variedades integrais de $ker f_*$. Dado un campo de vectores $X\in\Gamma ker f_*$,

$$\begin{aligned}0=(\nabla f_*)(X,\tilde\tau(f)) &= \overset{2}{\nabla}_X\, f_*\tilde\tau(f)-f_*(\overset{1}{\nabla}_X\,\tilde\tau(f))\\ &= \overset{2}{\nabla}_X\,\tau(f)-f_*(\overset{1}{\nabla}_X\,\tilde\tau(f)).\end{aligned}$$

Logo

$$\overset{2}{\nabla}_X\,\tau(f)=f_*(\overset{1}{\nabla}_X\,\tilde\tau(f))=f_*((\overset{1}{\nabla}_X\,\tilde\tau(f))^\perp)$$

e, por tanto, para mostrar que η é paralelo no fibrado normal ao longo das subvariedades integrais de $ker f_*$, chega con ver que $\overset{2}{\nabla}_X\,\tau(f)=0$ para todo $X\in\Gamma ker f_*$. Para iso, temos que, dados $X,Y,Z\in\Gamma ker f_*$,

$$\begin{aligned}0=(\nabla\nabla f_*)(X,Y,Z) &= \overset{2}{\nabla}_X\,((\nabla f_*)(Y,Z))-(\nabla f_*)(\overset{1}{\nabla}_X\,Y,Z)\\ &\quad -(\nabla f_*)(Y,\overset{1}{\nabla}_X\,Z)\\ &= \overset{2}{\nabla}_X\,((\nabla f_*)(Y,Z))-(\nabla f_*)((\overset{1}{\nabla}_X\,Y)^T,Z)\\ &\quad -(\nabla f_*)(Y,(\overset{1}{\nabla}_X\,Z)^T)\\ &= \overset{2}{\nabla}_X\,(\frac{\tau(f)}{n_1-n_2}g_1(Y,Z))-\frac{\tau(f)}{n_1-n_2}g_1(\overset{1}{\nabla}_X\,Y,Z)\\ &\quad -\frac{\tau(f)}{n_1-n_2}g_1(Y,\overset{1}{\nabla}_X\,Z)\\ &= \frac{1}{n_1-n_2}(\overset{2}{\nabla}_X\,\tau(f))g_1(Y,Z),\end{aligned}$$

onde $(\overset{1}{\nabla}_X Y)^T$ e $(\overset{1}{\nabla}_X Z)^T$ son as compoñentes de $\overset{1}{\nabla}_X Y$ e $\overset{1}{\nabla}_X Z$ en $ker f_*$, respectivamente. Así, $\overset{2}{\nabla}_X \tau(f) = 0$ para todo $X \in \Gamma ker f_*$ e séguese da Proposición 1.3.3 que (M_1, g_1) é localmente un produto warped. $\square$

A continuación establecemos o anterior teorema, substituíndo a hipótese sobre a segunda forma fundamental por outra sobre o tensor de Ricci da variedade dominio. Ao mesmo tempo, o seguinte resultado xeneraliza tamén o anterior, pois non necesitamos supor que a aplicación sexa unha submersión, chegando con que sexa unha aplicación de rango constante.

Teorema 4.3.6 *Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación de rango constante satisfacendo a ecuación de Möbius. Supoñamos que $Ric_{M_1}(X, U) = 0$ para todo $X \in \Gamma ker f_*$ e $U \in \Gamma(ker f_*)^\perp$, onde Ric_{M_1} denota o tensor de Ricci da variedade (M_1, g_1). Entón, (M_1, g_1) é localmente un produto warped $(N_1 \times N_2, h_1 + \lambda h_2)$, onde (N_1, h_1) e (N_2, h_2) son variedades de Riemann.*

Proba.
Séguese do Teorema 4.3.2 que (M_1, g_1) é localmente un produto twisted e, entón, o Teorema 1.3.1 establece que (M_1, g_1) se pode expresar localmente como un produto warped $(N_1 \times N_2, h_1 + \lambda^2 h_2)$, onde (N_1, h_1) e (N_2, h_2) son dúas variedades de Riemann.

$\square$

4.4. Ecuación de Möbius e aplicacións afíns en xeometría de Riemann

Nesta sección estudiaremos condicións baixo as que unha aplicación satisfacendo a ecuación de Möbius é totalmente xeodésica. Os resultados obtidos baséanse na aplicación da identidade de Bochner e estimacións na curvatura das variedades. Durante toda esta sección, restrinxiremos o noso estudo a variedades riemannianas. Comezamos esta sección con algún resultado preliminar.

Definición 4.4.1 Sexa $L : (V_1, \langle\ ,\ \rangle_1) \longrightarrow (V_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ unha aplicación linear entre dous espacios euclidianos. A *aplicación adxunta* de L, que denotaremos por ${}^*L$ é a única aplicación linear ${}^*L : (V_2, \langle\ ,\ \rangle_2) \longrightarrow (V_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ que cumpre a igualdade

$$\langle x, {}^* Ly\rangle_1 = \langle Lx, y\rangle_2$$

para todo par de vectores $x \in V_1$ e $y \in V_2$.

O seguinte resultado proporcionanos unha relación que se coñece como *a identidade de Bochner.*

Lema 4.4.1 [25, Páx. 73] *Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación entre dúas variedades riemannianas. Entón,*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\Delta_{M_1}\|f_*\|^2)(p_1) \quad = \quad & \sum_{i,j=1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(E_i, E_j), (\nabla f_*)(E_i, E_j)) \\
& - \sum_{i,j=1}^{n_1} R_{M_2}(f_*E_i, f_*E_j, f_*E_j, f_*E_i) \\
& + \sum_{i,j=1}^{n_1} g_1(R_{M_1}(E_i, E_j)E_j, ({}^*f_{*p_1} \circ f_{*p_1})E_i) \\
& +(div(\tau(f)))(p_1),
\end{aligned}$$

onde $\Delta_{M_1}\|f_*\|^2$ é o laplaciano da función $\|f_*\|^2$ en (M_1, g_1), $\{E_1, \cdots, E_{n_1}\}$ é unha base ortonormal de $(T_{p_1}M_1, g_1(p_1))$ e R_{M_1} e R_{M_2} son os tensores curvatura das variedades (M_1, g_1) e (M_2, g_2), respectivamente.

Un último resultado preliminar que precisamos é o seguinte lema, que se obtén como un caso particular do teorema da diverxencia xeneralizado (ver [25, Páx. 70]).

Lema 4.4.2 *Sexan (M_1, g_1) unha variedade semiriemanniana orientada con forma de volume μ_1 e (M_2, g_2) unha variedade semiriemanniana. Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación diferenciable. Entón,*

$$\int_{M_1} (div(\tau(f)))\mu_1 + \int_{M_1} g_2(\tau(f), \tau(f))\mu_1 = 0.$$

Usando os dous resultados anteriores probamos o primeiro resultado, que nos dá condicións suficientes para que unha aplicación de rango constante satisfacendo a ecuación de Möbius sexa totalmente xeodésica.

Teorema 4.4.1 *Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación de rango constante satisfacendo a ecuación de Möbius. Supoñamos que (M_1, g_1) é orientable, compacta e ten curvatura de Ricci non-negativa e que (M_2, g_2) ten curvatura seccional non-positiva. Se*

$$r g_2(\xi, \xi) + div(\tau(f)) \geq 0,$$

onde $r = dim\, ker f_* \geq 2$, entón f é unha aplicación afín.

Proba.
Sexa $\{X_1, \cdots, X_{n_1}\}$ unha base ortonormal de $(T_{p_1}M_1, g_1(p_1))$ formada por autovectores unitarios da aplicación ${}^*f_{*p_1} \circ f_{*p_1}$ co correspondente conxunto de autovalores

(non-negativos) $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_1}\}$. Obviamente, podemos supor que $\{X_1, \cdots, X_r\}$ é unha base de $ker f_{*p_1}$. Entón, pola identidade de Bochner (Lema 4.4.1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\Delta_{M_1}\|f_*\|^2\right)(p_1) &= \sum_{i,j=1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(X_i,X_j),(\nabla f_*)(X_i,X_j)) \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^{n_1} R_{M_2}(f_*X_i, f_*X_j, f_*X_j, f_*X_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i Ric_{M_1}(X_i,X_i) \\ &\quad + div(\tau(f)),\end{aligned}$$

e así

$$\frac{1}{2}(\Delta_{M_1}\|f_*\|^2)(p_1) \geq r g_2(\xi,\xi) + div(\tau(f)) \geq 0.$$

É dicir, $\|f_*\|^2$ é unha función subharmónica e como M_1 é unha variedade compacta temos que $\|f_*\|^2$ é harmónica. Logo, cúmprese a igualdade

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i,j=r+1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(X_i,X_j),(\nabla f_*)(X_i,X_j)) \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^{n_1} R_{M_2}(f_*X_i, f_*X_j, f_*X_j, f_*X_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i Ric_{M_1}(X_i,X_i) \\ &\quad + r g_2(\xi,\xi) + div(\tau(f)).\end{aligned}$$

Entón, como consecuencia das hipóteses feitas,

$$\sum_{i,j=r+1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(X_i,X_j),(\nabla f_*)(X_i,X_j)) = 0,$$

e así,

$$\xi = \frac{1}{r}\tau(f).$$

Agora, aplicando o Lema 4.4.2, temos que $\tau(f) = 0$, pois $r \geq 2$. Logo, probamos que f é unha aplicación afín. □

Definimos agora o concepto de aplicación riemanniana. Para o caso dunha submersión o feito de que esta sexa riemanniana consiste en particularizar a definición dada na sección §4.1 para variedades de Riemann.

Definición 4.4.2 *Unha aplicación* $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ *dise unha aplicación riemanniana se* f *é unha submersión e se cumpre que*

$$g_2(f_*X, f_*Y) = g_1(X, Y)$$

para todo par de campos de vectores $X, Y \in \Gamma(kerf)^\perp$.

Particularizando o Lema 4.4.1 para o caso dunha aplicación riemanniana obtemos o seguinte resultado.

Lema 4.4.3 [25, Páx. 96] *Sexa* $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ *unha aplicación riemanniana. Entón, en cada punto* $p \in M_1$ *satisfaise a relación*

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \sum_{i,j=1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(X_i, X_j), (\nabla f_*)(X_i, X_j)) \\ & - \sum_{i,j=r+1}^{n_1} R_{M_2}(f_*X_i, f_*X_j, f_*X_j, f_*X_i) \\ & + \sum_{i=r+1}^{n_1} Ric_{M_1}(X_i, X_i) \\ & + div(\tau(f))(p_1), \end{aligned}$$

onde $\{X_1, \cdots, X_r, X_{r+1}, \cdots, X_{n_1}\}$ *é unha base ortonormal de* $(T_{p_1}M_1, g_1(p_1))$ *con* $\{X_1, \cdots, X_r\}$ *base de* $Kerf_{*p_1}$.

O que resta desta sección dedicamolo a estudiar condicións para que unha aplicación riemanniana que satisfai a ecuación de Möbius sexa totalmente xeodésica.

Teorema 4.4.2 *Sexa* $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ *unha aplicación riemanniana de rango constante maior que dous satisfacendo a ecuación de Möbius. Supoñamos que* M_1 *é unha variedade conexa,* $Ric_{M_1} \geq A$, $K_{M_2} \leq B$ *e* $A \geq (rango(f) - 1)B$. *Se*

$$Cg_2(\xi, \xi) + div(\tau(f)) \geq 0$$

para algunha constante $C < r$, *onde* $r = dim\, kerf_*$, *entón* f *é unha aplicación afín.*

Proba.

Sexa $\{X_1, \cdots, X_r, X_{r+1}, \cdots, X_{n_1}\}$ unha base ortonormal de $(T_{p_1}M_1, g_1(p_1))$ tal que $\{X_1, \cdots, X_r\}$ é base de $Kerf_{*p_1}$. Entón, das hipóteses feitas, obtéñense as desigualdades

$$-\sum_{i,j=r+1}^{n_1} R_{M_2}(f_*X_i, f_*X_j, f_*X_j, f_*X_i) \geq -(rango(f))(rango(f)-1)B,$$

$$\sum_{i=r+1}^{n_1} Ric_{M_1}(X_i, X_i) \geq (rango(f))A,$$

e a igualdade

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(X_i, X_j), (\nabla f_*)(X_i, X_j)) \\ &\qquad = rg_2(\xi,\xi) + \sum_{i,j=r+1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(X_i, X_j), (\nabla f_*)(X_i, X_j)).\end{aligned}$$

Agora, a partir do Lema 4.4.3 obtense a desigualdade

$$\begin{aligned} 0 &\geq rg_2(\xi,\xi) + \sum_{i,j=r+1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(X_i, X_j), (\nabla f_*)(X_i, X_j)) \\ &\quad -(rango(f))(rango(f)-1)B + (rango(f))A + div(\tau(f))(p_1) \\ &\geq rg_2(\xi,\xi) + div(\tau(f))(p_1) \\ &\geq Cg_2(\xi,\xi) + div(\tau(f))(p_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Entón,

$$\sum_{i,j=r+1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(X_i, X_j), (\nabla f_*)(X_i, X_j)) = 0,$$

e

$$rg_2(\xi,\xi) + div(\tau(f))(p_1) = Cg_2(\xi,\xi) + div(\tau(f))(p_1) = 0.$$

Así, f é unha aplicación afín. $\square$

Teorema 4.4.3 *Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación riemanniana satisfacendo a ecuación de Möbius. Supoñamos que M_1 é unha variedade conexa, $Ric_{M_1} \geq A$, $Sc_{M_2} \leq B$ e $n_2 A \geq B$. Se*

$$Cg_2(\xi, \xi) + div(\tau(f)) \geq 0$$

para algunha constante $C < r$, onde $r = dim\, ker f_*$, entón f é unha aplicación afín.

Proba.
Sexa $\{X_1, \cdots, X_r, X_{r+1}, \cdots, X_{n_1}\}$ unha base ortonormal de $(T_{p_1}M_1, g_1(p_1))$ de modo que $\{X_1, \cdots, X_r\}$ é base de $Ker f_{*p_1}$. Entón, séguese das hipóteses que

$$- \sum_{i,j=r+1}^{n_1} R_{M_2}(f_*X_i, f_*X_j, f_*X_j, f_*X_i) = -Sc_{M_2}(p_2),$$

$$\sum_{i=r+1}^{n_1} Ric_{M_1}(X_i, X_i) \geq (rango(f))A = n_2 A,$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(X_i, X_j), (\nabla f_*)(X_i, X_j)) = Cg_2(\xi, \xi) + div(\tau(f))(p_1).$$

Agora, a partir do Lema 4.4.3 obtemos as desigualdades

$$\begin{aligned} 0 &\geq rg_2(\xi, \xi) - B + n_2 A + div(\tau(f))(p_1) \\ &\geq rg_2(\xi, \xi) + div(\tau(f))(p_1) \\ &\geq Cg_2(\xi, \xi) + div(\tau(f))(p_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Entón,

$$rg_2(\xi, \xi) + div(\tau(f))(p_1) = Cg_2(\xi, \xi) + div(\tau(f))(p_1) = 0,$$

de onde se segue que $\xi = 0$. Logo, f é unha aplicación afín. $\square$

Para o caso dunha función con rango un podemos debilitar as hipóteses do teorema anterior.

Teorema 4.4.4 *Sexa $f : (M_1, g_1) \longrightarrow (M_2, g_2)$ unha aplicación riemanniana de rango un satisfacendo a ecuación de Möbius. Supoñamos que M_1 é conexa e $Ric_{M_1} \geq 0$. Se*

$$Cg_2(\xi, \xi) + div(\tau(f)) \geq 0$$

para algunha constante $C < (n_1 - 1)$ entón f é unha aplicación afín.

Proba.
Sexa $\{X_1, \cdots, X_{n_1-1}, X_{n_1}\}$ unha base ortonormal de $(T_{p_1}M_1, g_1(p_1))$ de modo que $\{X_1, \cdots, X_{n_1-1}\}$ sexa base de $Ker f_{*p_1}$. Entón,

$$R_{M_2}(f_*X_i, f_*X_j, f_*X_j, f_*X_i) = 0$$

e

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(X_i, X_j), (\nabla f_*)(X_i, X_j)) \\
&\qquad = (n_1 - 1)g_2(\xi, \xi) + g_2((\nabla f_*)(X_n, X_n), (\nabla f_*)(X_n, X_n)).
\end{aligned}$$

Entón, a partir do Lema 4.4.3 obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\geq (n_1 - 1)g_2(\xi, \xi) + g_2((\nabla f_*)(X_n, X_n), (\nabla f_*)(X_n, X_n)) + div(\tau(f)) \\
&\geq (n_1 - 1)g_2(\xi, \xi) + div(\tau(f)) \\
&\geq C g_2(\xi, \xi) + div(\tau(f)) \geq 0.
\end{aligned}$$

Así, $\xi = 0$ e $(\nabla f_*)(X_n, X_n) = 0$. Logo, f é unha aplicación afín. $\square$

Bibliografía

[1] D Alekseevsky, N. Blažić, N. Bokan e Z. Rakić; Self-duality and pointwise Osserman manifolds, *Arch. Math.(Brno)* **35** (1999), 193 – 201.

[2] N. Blazic, N. Bokan e Z. Rakic; Osserman pseudo-Riemannian manifolds of signature $(2, 2)$, *J. Aust. Math. Soc.,* **71** (2001), 367 – 395.

[3] A. L. Besse; *Einstein Manifolds,* Springer-Verlag, 1987.

[4] J. K. Beem, P. E. Ehrlich e K. L. Easley; *Global Lorentzian Geometry,* (Second Edition) Marcel Dekker, New York, 1996.

[5] R.L. Bishop e B. O'Neill; Manifolds of Negative Curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.* **145** (1969), 1 – 49.

[6] E. Boeckx, O. Kowalski e L. Vanhecke; *Riemannian manifolds of conullity two,* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.

[7] A. Bonome, R. Castro, E. García Río, L. Hervella e R. Váquez Lorenzo; Nonsymmetric Osserman indefinite Kähler manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 2763–2769.

[8] B. Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen e L. Vranken; Lagrangian isometric immersions of a real-space-form $M^n(c)$ into a complex-space-form $\tilde{M}^n(4c)$, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **124** (1998), 107 – 125.

[9] B. Y. Chen, J. M. Morvan e T. Nore; Énergie, tension, et ordre des applications à valeurs dans un espace euclidien, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), 123 – 126.

[10] Q. S. Chi; A Curvature Characterization of Certain Locally Rank-one Symmetric Spaces, *J. Diff. Geom.* **28** (1988), 187 – 202.

[11] Q. S. Chi; Quaternionic Kähler Manifolds and a Curvature Characterization of Two-point Homogeneous Spaces, *Illinois J. Math.* **35** (1991), 408 – 418.

[12] Q. S. Chi; Curvature Characterization and Classification of Rank-one Symmetric Spaces, *Pacific J. Math.* **150** (1991), 31 – 42.

[13] C. T. J. Dodson, M. Trinidad Pérez e M. E. Vázquez Abal; Harmonic-Killing vector fields, *Bull. Belgian Math. Soc.,* aceptado para publicación.

[14] P. Ehrlich; Rigidez de la curvatura e incompletitud geodésica temporal en la geometría del espacio-tiempo, *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* **2** (1999), 290 – 304.

[15] J. Ells e L. Lemaire; *Two Reports on Harmonic Maps,* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995.

[16] M. Fernández López, E. García Río e D. Kupeli; A Characterization of Cosmological Time Functions, *Ann. Global Anal. Geom.*, aceptado para publicación.

[17] M. Fernández López, E. García Río e D. Kupeli; The Local Möbius Equation and Decomposition Theorems in Riemannian Geometry, *Canadian Math. Bull.* aceptado para publicación.

[18] M. Fernández López, E. García Río, D. Kupeli e B. Ünal; A Curvature Condition for a Twisted Product to be a Warped Product, *Manuscripta Math.* **106** (2001), 213 – 217.

[19] M. Fernández López, E. García Río e D. Kupeli; A Local Analytic Characterization of Schwarzschild Metrics, *J. Geom. Phys.* aceptado para publicación.

[20] A. Fisher; Riemannian maps between Riemannian manifolds, *Contemp. Math.* **132** (1992), 331 – 336.

[21] A. Fisher; Riemannian submersions and the regular interval theorem of Morse theory, *Ann. Global Anal. Geom.* **14** (1996), 263 – 300.

[22] T. Frankel; *Gravitational Curvature,* Freeman, San Francisco, 1979.

[23] G. Ganchev e V. Mihova; Riemannian manifolds of quasi-constant sectional curvatures, *J. Reine Agew. Math.* **522** (2000), 119-141.

[24] E. García Río e D. Kupeli; Singularity Versus Splitting Theorems for Stably Causal Spacetimes, *Ann. Global Anal. Geom.* **14** (1996), 301 – 312.

[25] E. García Río e D. Kupeli; *Semi-Riemannian Maps and Their Applications*, Math. Appl. **475**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[26] E. García Río e D. Kupeli; On Affine Riemannian Maps, *Arch. Math. (Basel)* **71** (1998), 71 – 79.

[27] E. García Río, D. Kupeli e R. Vázquez Lorenzo; *Osserman Manifolds in Semi-Riemannian Geometry,* Lecture Notes in Math. **1777**, Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, 2002.

[28] A. Gebarowski; On Einstein Warped Products, *Tensor N. S.* **52** (1993), 204 – 207.

[29] P. Gilkey; *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemann Curvature Tensor,* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, aceptado para publicación.

[30] P. Gilkey, A. Swan e L. Vanhecke; Isoparametric Geodesic Spheres and a Conjecture of Osserman Concerning The Jacobi Operator, *Quat. J. Math. Oxford* **46** (1995), 299 – 320.

[31] J. Girbau; *Geometria Diferencial i Relativitat,* Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, 1993.

[32] S. Hawking e G. Ellis; *The Large Scale Structure of Space-Time,* Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[33] S. Ishihara e K. Yano; Harmonic and Relatively Affine Mappings, *J. Diff. Geom.* **10** (1975), 501 – 509.

[34] N. Koike; The decomposition of curvature netted hypersurfaces, *Geom. Dedicata* **54** (1995), 1 – 11.

[35] W. Kühnel e H.-B. Rademacher; Conformal Vector Fields on Pseudo-Riemannian Spaces, *Differential Geom. Appl.* **7** (1997), 237 – 250.

[36] W. Kühnel e H.-B. Rademacher; Essential Conformal Fields in Pseudo-Riemannian Geometry, *J. Math. Pures Appl.* **74** (1995), 453 – 481.

[37] M. Lohnherr e H. Reckziegel; On ruled real hypersurfaces in complex space forms, *Geom. Dedicata* **74** (1999), 26-286.

[38] Y. Miyake; Self-dual generalized Taub-NUT metrics, *Osaka J. Math.* **32** (1995), 659-675.

[39] T. Nore; Second Fundamental Form of a Map, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **146** (1987), 281 – 310.

[40] M. Obata; Certain Condition for a Riemannian Manifold to be Isometric With a Sphere, *J. Math. Soc. Japan* **14** (1962), 57 – 99.

[41] B. O'Neill; *Semi-Riemannian Geometry, With Applications to Relativity,* Academic Press, New York, 1983.

[42] R. Osserman; Curvature in the Eighties, *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 731 – 756.

[43] B. Osgood e D. Stowe; The Schwarzian Derivative and Conformal Mapping of Riemannian manifolds, *Duke Math. J.* **67** (1992), 57 – 99.

[44] P. Petersen e G. Walschap; Observer fields and the strong energy condition, *Class. Quantum Grav.* **13** (1996), 1901 – 1908.

[45] W. A. Poor; *Differential Geometric Structures,* McGraw-Hill, New York, 1981.

[46] R. Ponge e H. Reckziegel; Twisted Products in Pseudo-Riemannian Geometry, *Geom. Dedicata* **48** (1993), 15 – 25.

[47] R. K. Sachs e H. Wu; *General Relativity for Mathematicians,* Springer-Verlag, New York, 1977.

[48] T. Sakai; *Riemannian Geometry,* Providence, RI, 1996.

[49] B. F. Schutz; *A first course in general relativity,* Cambridge University Press, 1985.

[50] E. F. Taylor e J. A. Wheeler; *Spacetime Physics,* W. H. Freeman and Company, New York, 1966.

[51] B. Ünal; Multiply warped products, *J. Geom. Phys.* **34** (2000), 287–301.

[52] B. Ünal; Doubly warped products, *Differential Geom. Appl.*, aceptado para publicación.

[53] R. Vázquez Lorenzo; *Estudio del Operador de Jacobi en Geometría Semi-Riemanniana* Publ. Dep. Geom. Top. **88**, Univ. Santiago de Compostela, España, 1998.

[54] J. Vilms; Totally Geodesic Maps, *J. Diff. Geom.* **4** (1970), 73 – 79.

[55] X. Xu; On the existence and uniqueness of solutions of Möbius equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), 927 – 945.