

JOSÉ CARLOS DÍAZ RAMOS

**CURVATURAS TOTAIS
DE ESFERAS XEODÉSICAS**

**97
2002**

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

JOSÉ CARLOS DÍAZ RAMOS

**CURVATURAS TOTAIS
DE ESFERAS XEODÉSICAS**

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección dos profesores Eduardo García Río e Luis M. Hervella Torrón, para obter o grao de Licenciado en Ciencias Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levou a cabo a súa defensa o día 22 de Xullo de 2002 na Facultade de Matemáticas de dita Universidade, obtendo a cualificación de Sobresaliente.

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 84-89390-14-2

Dep. Leg.: 2610/2002

Ós meus pais.

Agradecementos

Considero unha obriga ineludible expresar o meu máis sincero agradecemento ós directores deste traballo, os profesores Eduardo García Ríó e Luis M. Hervella Torrón, pola súa paciencia, o seu apoio e a súa axuda incondicional en todos os aspectos vinculados directa e indirectamente co seu desenvolvemento. Este agradecemento faise extensivo ó Departamento de Xeometría e Topoloxía da Universidade de Santiago de Compostela, polo trato cordial recibido e polos ánimos infundidos en todo momento. En particular, quérolle dar as grazas á profesora M. Elena Vázquez Abal pola súa axuda e simpatía, e ó profesor Luis A. Cordero Rego pois a súa colaboración foi esencial para que me fose concedida a beca que está servindo para financiar os meus estudos de Terceiro Ciclo.

Gustaríame lembrar tamén a Roi Docampo Álvarez pola súa amizade, as fructíferas e instructivas conversas que mantiven con el e as súas suxerencias e axuda no emprego de Mathematica, programa que foi indispensable no desenvolvemento desta memoria. Finalmente, grazas tamén ós meus compañeiros, que durante todos estes anos fixeron que o paso por esta facultade fose, e sexa aínda, todo o gratificante que un podería desexar.

Abstract

In order to study Riemannian manifolds, certain geometrical objects naturally associated to the structure of the manifold (M, g) itself are broadly used. As an instance of such geometrical objects, we have the different fiber bundles with basis (M, g) (for example, the bundle of linear frames, the tangent bundle, the spheric tangent bundle, etc.), certain kinds of local transformations on the manifold (which allow us to determine its symmetries) or hypersurfaces which reflect certain properties of the ambient manifold. Among the latter, geodesic spheres of sufficiently small radius, which are the starting point of this work, are specially important.

The ambient manifold essentially influences the geometry of all its submanifolds. Such influence can be precisely quantified by means of the Gauss Equation, which relates the curvature of the submanifold to that of the ambient manifold. Conversely, both the intrinsic geometry and the extrinsic geometry of a submanifold provide geometrical obstructions to the ambient manifold, which usually determine the latter, at least from a local point of view.

In the special case of geodesic spheres, a wide range of results were obtained in [7], [13], [14] and [20], where several properties of the geometry of the ambient manifold could be deduced by imposing conditions on their intrinsic and extrinsic curvatures. In this work, we are specially interested in the intrinsic geometry of geodesic spheres from two different points of view: to what extent their intrinsic geometry is influenced by the geometry of the ambient manifold and how the intrinsic properties of geodesic spheres completely determine the geometry of the latter.

The curvature invariants of a Riemannian manifold are well known to be important from the geometric point of view. Functions like the scalar curvature τ , the quadratic norm of the Ricci tensor, $\|\rho\|^2$, and the quadratic norm of the curvature tensor, $\|R\|^2$, were widely studied and used in the characterization of certain classes of Riemannian manifolds. From the intrinsic point of view, a geodesic sphere has all these curvature invariants. Not only does their study allow us to deduce properties of the geodesic spheres themselves, but also we can use their information to determine the geometry of the ambient manifold.

Our starting point in this work is the famous conjecture of Gray–Vanhecke [14] which claims that it is possible to state that a Riemannian manifold is flat if the volume of all its geodesic spheres is the same as the volume of an Euclidean sphere of the same radius.

Despite having made many attempts to answer that question affirmatively, the general case remains open.

As the volume is a function that does not provide enough geometrical information about geodesic spheres in order to solve the former conjecture, the next step was to integrate the intrinsic scalar curvature invariants. Such integrals are known as total scalar curvatures. Decisive information about the intrinsic curvature tensor of geodesic spheres is involved in these integrals, which in several cases have been used successfully to solve the analogous conjecture to that of Gray–Vanhecke [6], [7].

The purpose of our work is to study the total scalar curvatures of geodesic spheres associated to second order curvature invariants: τ^2 , $\|\rho\|^2$ and $\|R\|^2$. Such a study will be presented by giving the first four terms of the power series expansion of each of these total curvatures for a general Riemannian manifold (lemmas 2.3.2, 2.4.2 and 2.5.2). Explicit expressions for the model spaces are also included in Section 3.1.

Finally, comparison between the general results to that obtained for the model spaces allows us to characterize the latter in the case of the total quadratic norm of the curvature tensor (theorems 3.2.1, 3.2.6 and 3.2.8). Similar results are obtained for the total quadratic norm of the Ricci tensor in low dimension.

Prefacio

Para estudar as variedades de Riemann, habitualmente recórrase ó uso de certos obxectos xeométricos asociados de xeito natural á propia estrutura da variedade (M, g) . Exemplos de tales obxectos son os distintos espazos fibrados tendo a (M, g) como base (así, temos o fibrado de referencias, o fibrado tanxente, o fibrado tanxente esférico, etc.), determinados tipos de transformacións locais da variedade (que permiten establecer cales son as súas simetrías) ou hipersuperficies que reflectan propiedades xeométricas da variedade ambiente. Entre os últimos, son de especial importancia as esferas xeodésicas de radio suficientemente pequeno, as cales son o punto de partida deste traballo.

A variedade ambiente inflúe de maneira esencial a xeometría de todas as súas subvariedades. Tal influencia pode ser cuantizada de xeito bastante preciso a partir da ecuación de Gauss, que relaciona a curvatura da subvariedade con aquela da variedade ambiente. Reciprocamente, tanto a xeometría intrínseca como a xeometría extrínseca dunha subvariedade poñen obstrucións xeométricas á variedade ambiente que as contén, chegando incluso moitas veces a determinar esta, polo menos dende o punto de vista local.

No caso particular de esferas xeodésicas, un amplo número de resultados foron acadados en [7], [13], [14] e [20]. A imposición de condicións sobre as súas curvaturas intrínsecas e extrínsecas serviu para deducir propiedades da xeometría da variedade ambiente. Neste traballo estaremos especialmente interesados na xeometría intrínseca das esferas xeodésicas dende dous puntos de vista: como se ve influenciada pola xeometría do espazo ambiente e como as súas propiedades determinan completamente a xeometría do mesmo.

É ben coñecida a importancia xeométrica dos invariantes da curvatura dunha variedade Riemanniana. Funcións tales como a curvatura escalar τ , a norma cuadrática do tensor de Ricci $\|\rho\|^2$ e norma cuadrática da curvatura $\|R\|^2$, foron amplamente estudias e utilizadas na caracterización de certas clases de variedades Riemannianas. Dende o punto de vista intrínseco, unha esfera xeodésica posúe todos estes invariantes. O estudio dos mesmos non só nos permite deducir propiedades das propias esferas xeodésicas, senón que podemos trasladar a súa información á variedade ambiente para determinar tamén a súa xeometría.

O punto de partida no noso traballo é a famosa conxectura de Gray–Vanhecke [14]. Esta di que é posible determinar o carácter plano dunha variedade cando o volume de todas as súas esferas xeodésicas é o mesmo có dunha esfera euclídea do mesmo radio. Aínda que foron feitas numerosas tentativas para respostar afirmativamente a esta cuestión, no caso

xeral a conxetura permanece sen resolver.

Dado que o volume é unha función que non aporta a suficiente información xeométrica da esfera xeodésica como para resolver a anterior conxetura, o seguinte paso foi integrar os invariantes escalares da curvatura intrínseca. Tales integrais son o que se coñece como curvaturas escalares totais. Estas involucran de xeito decisivo información do tensor de curvatura intrínseco da esfera xeodésica, chegando en certos casos, á posibilidade de resolver a conxetura análoga á de Gray–Vanhecke [6], [7].

O propósito desta memoria é estudar as curvaturas escalares totais das esferas xeodésicas asociadas ós invariantes escalares de segunda orde: τ^2 , $\|\rho\|^2$ e $\|R\|^2$. Tal procedemento levarase a cabo dando unha expresión dos catro primeiros termos no desenrolo en serie de Taylor de cada unha destas curvaturas totais para o caso dunha variedade Riemanniana en xeral (lemas 2.3.2, 2.4.2 e 2.5.2). Tamén se inclúen as expresións explícitas para os espacios modelo na Sección 3.1.

Finalmente, a comparación dos resultados xerais cos obtidos para os espacios modelo permítenos caracterizar os últimos no caso da norma cuadrática total do tensor de curvatura (teoremas 3.2.1, 3.2.6 e 3.2.8). Resultados análogos se obterán para a norma cuadrática total do tensor de Ricci en dimensións baixas.

Índice Xeral

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introducción | 1 |
| 1.1 | Tensores básicos | 1 |
| 1.1.1 | Variedades de Einstein | 3 |
| 1.2 | Invariantes escalares da curvatura | 4 |
| 1.3 | A segunda forma fundamental | 6 |
| 1.4 | Coordenadas normais | 7 |
| 1.5 | Campos de vectores de Jacobi | 16 |
| 1.6 | Series de potencias | 19 |
| 2 | Curvaturas totais de esferas xeodésicas | 29 |
| 2.1 | Volumen de esferas xeodésicas | 30 |
| 2.2 | Curvatura escalar total | 34 |
| 2.3 | Curvatura escalar cuadrática total | 36 |
| 2.4 | Norma cuadrática total do tensor de Ricci | 39 |
| 2.5 | Norma cuadrática total do tensor de curvatura | 44 |
| 3 | Aplicacións | 49 |
| 3.1 | Expresións explícitas nos espazos modelo | 49 |
| 3.1.1 | Variedades de curvatura seccional constante | 51 |
| 3.1.2 | Variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante | 55 |
| 3.1.3 | Variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura Q-seccional constante | 62 |
| 3.2 | Caracterización dos espazos modelo | 70 |
| 3.2.1 | Variedades de curvatura seccional constante | 71 |
| 3.2.2 | Variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante | 76 |
| 3.2.3 | Variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura Q-seccional constante | 79 |

Capítulo 1

Introducción

Neste capítulo introduciremos as ferramentas e convenios que precisaremos para o noso estudio. Seguiremos, en maior medida, as notacións de [20], se ben os conceptos básicos están asequibles en case calquera tratado adicado ó estudio da xeometría de Riemann [18].

Sexa (M^n, g) unha variedade de Riemann de dimensión n , sendo g o seu tensor métrico. A conexión de Levi–Civita asociada denotarase por ∇ e vén dada pola fórmula de Koszul:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \{Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ -g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])\}$$

onde X, Y, Z son campos de vectores en M .

1.1 Tensores básicos

Definimos o *tensor de curvatura* na variedade seguindo o convenio:

$$R_{XY} = \nabla_{[X, Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$$

onde X, Y son campos de vectores en M . A partir del, constrúese o tensor de curvatura de tipo $(0, 4)$ mediante

$$R_{XYZW} = g(R_{XY}Z, W)$$

Este tensor é habitualmente difícil de manexar, polo que se recorre ás súas contraccións.

Defínese o *tensor de curvatura de Ricci* como a traza

$$\rho_{XY} = \text{tr}\{Z \mapsto R_{XZY}\}$$

Se $m \in M$, o tensor de Ricci expresado nunha base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_m M$ escríbese:

$$(1.1) \quad \rho_{XY}(m) = \sum_{i=1}^n R_{Xe_i Y e_i}$$

onde $X, Y \in T_m M$. O Lema 1.1.1 amosará que este é un tensor simétrico.

Defínese tamén a *curvatura escalar* como a traza do tensor de Ricci, $\tau = tr \rho$, que de novo, expresada nunha base ortonormal, se escribe como

$$(1.2) \quad \tau = \sum_{i=1}^n \rho_{ii}$$

Nos cálculos que faremos para este traballo será de vital importancia o uso de todas as identidades que poidamos deducir do tensor de curvatura. O seguinte lema resume as fundamentais.

Lema 1.1.1 *Con respecto a unha base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ o tensor de curvatura verifica as seguintes identidades:*

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij} \\ R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} &= 0 \\ \nabla_i R_{jklr} + \nabla_j R_{kilr} + \nabla_k R_{ijlr} &= 0 \end{aligned}$$

A partir delas pódense deducir tamén:

$$\begin{aligned} \sum_i \nabla_i R_{ijkl} &= \nabla_k \rho_{jl} - \nabla_l \rho_{jk} \\ \sum_i \nabla_i \rho_{ij} &= \frac{1}{2} \nabla_j \tau \\ \sum_{ij} R_{ijxy} R_{ivjw} &= \frac{1}{2} \sum_{ij} R_{ijxy} R_{ijvw} \\ \sum_{ij} R_{ijxy} \nabla_i R_{ajvw} &= \frac{1}{2} \sum_{ij} R_{ijxy} \nabla_a R_{ijvw} \end{aligned}$$

Ademais, R_{ij} actua como unha derivación tensorial que anula a todas as funcións e verifica

$$\nabla_{ij}^2 - \nabla_{ji}^2 = -R_{ij}$$

sobre calquera tensor covariante.

Como última nota introductoria, se ω é un tensor, o seu *laplaciano* con respecto a unha base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ en $m \in M$, escríbese:

$$\Delta \omega = \sum_{i=1}^n \nabla_{ii}^2 \omega$$

Será o uso reiterado das anteriores definicións e identidades o que nos permitirá realizar os cálculos explícitos dos primeiros termos do desenrolo en serie de Taylor do que máis adiante introduciremos como curvaturas totais.

1.1.1 Variedades de Einstein

Unha variedade (M^n, g) , $n > 2$ dise unha *variedade Einstein*, se o seu tensor de Ricci é proporcional ó tensor métrico, isto é,

$$(1.3) \quad \rho = \lambda g$$

onde $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función diferenciable. Contraendo a anterior igualdade, é claro que $\lambda = \frac{\tau}{n}$. Ademais, se $n > 2$, τ resulta ser constante en virtude do Lema de Schur.

É importante sinalar que toda variedade Einstein é analítica en coordenadas normais [9]. Ademais, como toda variedade Einstein verifica

$$\rho(X, Y) = \frac{\tau}{n} g(X, Y),$$

a norma do tensor de Ricci, $\|\rho\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij}^2$, dunha variedade Einstein cumpre que

$$\|\rho\|^2 = \frac{\tau^2}{n}$$

En xeral, é posible detectar as variedades Einstein a partir da relación anterior. Dado que dita caracterización será necesitada ó longo desta memoria, é importante destacar:

Proposición 1.1.2 [1] *Para calquera variedade de Riemann M^n , con $n > 2$, temos que*

$$\|\rho\|^2 \geq \frac{1}{n} \tau^2$$

con igualdade se e só se M é Einstein.

Observación 1.1.3 Coa definición dada anteriormente, todas as variedades de dimensión 2 resultarían ser Einstein. Por esta razón, unha variedade Einstein de dimensión 2 é aquela que verifica (1.3) esixindo ademais que λ sexa constante. Así, as variedades Einstein en dimensión dous compórtanse como as superficies de curvatura de Gauss constante.

En dimensión 3, a situación non é tan rixida, aínda que o tensor de Ricci determina por completo o tensor de curvatura:

$$R = \frac{\tau}{2} R^0 - R^1$$

onde R^0 e R^1 son os tensores curvatura alxebráicos dados por:

$$R^0(X, Y, Z, W) = g(X, V)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, V)$$

$$R^1(X, Y, Z, W) = g(X, V)\rho(Y, Z) - g(X, Z)\rho(Y, V) \\ + \rho(X, V)g(Y, Z) - \rho(X, Z)g(Y, V)$$

A situación en dimensión 4 é moito máis complexa, se ben existen importantes relacións entre a curvatura e a topoloxía da variedade subxacente (xeneralizacións do Teorema de Gauss–Bonnet), que resultan especialmente simples cando a variedade é Einstein. Así, a característica de Euler dunha variedade 4–dimensional compacta e orientada verifica [8]

$$\chi(M^4) = \frac{1}{32\pi^2} \int_M \{ \tau^2 - 4\|\rho\|^2 + \|R\|^2 \} dM$$

(Véxase (1.4) para a definición de $\|R\|^2$).

Esta ecuación resulta especialmente sinxela se a variedade é Einstein, pois en tal caso, a integral de $\|R\|^2$ é determinada completamente pola característica de Euler de M^4 .

1.2 Invariantes escalares da curvatura

Un *invariante escalar da curvatura* é un polinomio nas compoñentes do tensor de curvatura e nas súas derivadas que non depende da elección da base ortonormal utilizada na súa construción. A *orde* dun invariante escalar da curvatura é o número total de derivadas do tensor métrico involucradas nel. Nótese que o tensor de curvatura xa contén dúas derivadas da métrica.

A modo de exemplo, sinalar que xa apareceron nesta memoria tres invariantes escalares da curvatura: a curvatura escalar, $\tau = \sum_{i,j=1}^n R_{ijij}$, o cadrado da curvatura escalar, τ^2 , e a norma do tensor de Ricci, $\|\rho\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij}^2$. Cómpre salientar que, mentres que τ é un invariante escalar de primeira orde, τ^2 e $\|\rho\|^2$ son invariantes de segunda orde. Sen embargo, existen moitos invariantes escalares. De feito, unha base para os invariantes escalares de baixa orde foi calculada usando a teoría dos invariantes de Weyl. O teorema de Weyl implica que os invariantes escalares son precisamente as contraccións totais nas compoñentes do tensor de curvatura e nas súas derivadas covariantes.

Sexa $I(k, n)$ o espacio de invariantes escalares da curvatura de orde $2k$ para unha variedade de dimensión n . Tomemos $m \in M$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ unha base de $T_m M$.

É ben coñecido que se $n \geq 2$, $I(1, n)$ é un espacio vectorial de dimensión un xerado pola curvatura escalar τ .

Se $n \geq 4$, $I(2, n)$ é un espacio vectorial de dimensión catro xerado pola base:

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau^2 \\ \|\rho\|^2 = \sum \rho_{ij}^2 \\ \|R\|^2 = \sum R_{ijkl}^2 \\ \Delta\tau = \sum \nabla_{ii}^2 \tau \end{array} \right.$$

Finalmente, para $n \geq 6$, o espacío dos invariantes de orde seis $I(3, n)$ ten dimensión 17 e está xerado pola seguinte base:

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau^3 \\ \tau \|\rho\|^2 \\ \tau \|R\|^2 \\ \check{\rho} = \sum \rho_{ij} \rho_{jk} \rho_{ik} \\ \langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle = \sum \rho_{ij} \rho_{kl} R_{ikjl} \\ \langle \rho, \dot{R} \rangle = \sum \rho_{ij} R_{iklr} R_{jklr} \\ \check{R} = \sum R_{ijkl} R_{ijrs} R_{klrs} \\ \check{\check{R}} = \sum R_{ijkl} R_{irks} R_{jrsl} \\ \|\nabla\tau\|^2 = \sum (\nabla_i \tau)^2 \\ \|\nabla\rho\|^2 = \sum (\nabla_i \rho_{jk})^2 \\ \alpha(\rho) = \sum \nabla_i \rho_{jk} \nabla_j \rho_{ik} \\ \|\nabla R\|^2 = \sum (\nabla_i R_{jklr})^2 \\ \tau \Delta\tau \\ \langle \Delta\rho, \rho \rangle = \sum \rho_{ij} \nabla_{kk}^2 \rho_{ij} \\ \langle \nabla^2 \tau, \rho \rangle = \sum (\nabla_{ij}^2 \tau) \rho_{ij} \\ \langle \Delta R, R \rangle = \sum R_{ijkl} \nabla_{rr}^2 R_{ijkl} \\ \Delta^2 \tau \end{array} \right.$$

Nótense tamén as útiles ecuacións seguintes [12]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \|R\|^2 &= \langle \Delta R, R \rangle + \|\nabla R\|^2 \\ \frac{1}{2} \Delta \|\rho\|^2 &= \langle \Delta\rho, \rho \rangle + \|\nabla\rho\|^2 \end{aligned}$$

É importante sinalar a existencia de moitas relacións entre os invariantes escalares da curvatura ó xeito da Proposición 1.1.2, algunhas das cales serán amplamente utilizadas

nesta memoria.

Recentemente, unha aplicación interesante destes invariantes escalares foi obtida en [17], onde se amosa que unha variedade de Riemann é localmente homoxénea se e só se todos os invariantes escalares da curvatura son constantes.

Remitímonos a [14] para máis información sobre estes invariantes. Asemade, consideramos convinte sinalar neste punto que o estudio destes invariantes é un elemento específico da xeometría de Riemann, presentando unha interpretación radicalmente distinta en xeometría indefinida [4], [5] e [11].

1.3 A segunda forma fundamental

A definición do tensor de curvatura é aplicable a calquera variedade de Riemann en xeral. Para subvariedades, e máis especificamente para hipersuperficies, a segunda forma fundamental, ou operador de configuración permite relacionar a xeometría intrínseca da subvariedade con aquela do seu espacio ambiente.

Sexa (\widetilde{M}, g) unha subvariedade de (M, g) . Xa que o tensor métrico non é máis ca unha restricción do da variedade ambiente, denotaremos os dous coa mesma letra. A conexión de Levi-Civita da subvariedade escribirase como $\widetilde{\nabla}$.

A segunda forma fundamental, II , é definida descompoñendo $\nabla_X Y$ nas súas compoñentes tanxencial e normal á subvariedade segundo o isomorfismo canónico en cada punto $T_m M = T_m \widetilde{M} \oplus T_m \widetilde{M}^\perp$, $m \in M$, para obter,

$$\nabla_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + II(X, Y)$$

onde X, Y son campos de vectores en \widetilde{M} (ou calquera extensión súa a M). Por tanto,

$$II(X, Y) = (\nabla_X Y)^\perp$$

Se \widetilde{M} é unha hipersuperficie, a segunda forma fundamental pode ser expresada como,

$$II(X, Y) = \sigma(X, Y)\zeta$$

onde ζ é un campo de vectores unitario normal á hipersuperficie. É claro entón que todos os cálculos que involucran a segunda forma fundamental dependen, a partir de aquí, dun signo (segundo cal sexa o vector normal elexido), pero este signo nas fórmulas que necesitaremos cancelarse. Así, σ é un tensor de tipo $(0,2)$ en \widetilde{M} , que tamén se pode ver como,

$$\sigma(X, Y) = g(II(X, Y), \zeta)$$

O tensor σ , que tamén recibe o nome de *segunda forma fundamental* é metricamente equivalente ó *operador de configuración*, T , dado por

$$(1.6) \quad \sigma(X, Y) = g(TX, Y)$$

Ademais, verificase que,

$$(1.7) \quad TX = -\nabla_X \zeta$$

A función *curvatura media* obtense como o invariante alxebraico do operador de configuración dado pola súa traza. Así, con respecto a unha base ortonormal $\{e_2, \dots, e_n\}$ de \widetilde{M} , exprésase,

$$(1.8) \quad h = \sum_{i=2}^n \sigma(e_i, e_i)$$

A ecuación básica que relaciona a xeometría intrínseca coa extrínseca é a *ecuación de Gauss*, que mide a diferenza entre a curvatura da subvariedade e a do espacio ambiente en termos da segunda forma fundamental:

$$(1.9) \quad \widetilde{R}_{XYZW} = R_{XYZW} + \sigma(X, Z)\sigma(Y, W) - \sigma(X, W)\sigma(Y, Z)$$

sendo X, Y, Z, W campos de vectores en \widetilde{M} . Deste xeito, a segunda forma fundamental ten toda a información suplementaria para determinar a curvatura dunha subvariedade a partir da curvatura da variedade ambiente.

1.4 Coordenadas normais

Dada unha curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ na variedade, denotaremos por $\frac{d}{dt}$ o campo de vectores paramétrico no intervalo I con respecto a t , e por $\gamma'(t) = \gamma_{*t}(\frac{d}{dt})$ o vector tanxente da curva γ correspondente ó valor t do parámetro. A derivada covariante dun campo de vectores X denotarémola por $\nabla_{\gamma'} X$ ou abreviadamente por X' .

Unha curva γ dise unha *xeodésica* se:

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$$

Teorema 1.4.1 *Sexan $m \in M$ e $v \in T_m M$. Entón existe unha única xeodésica maximal $\gamma_v : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\gamma_v(0) = m$ e $\gamma'_v(0) = v$.*

A *aplicación exponencial* é a aplicación

$$\begin{aligned} \exp_m : T_m M &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto \gamma_v(1) \end{aligned}$$

Tal aplicación non está definida, en xeral, en todo $T_m M$, senón soamente nun entorno estrelado da orixe, pero por comodidade de notación omitiremos ese feito de agora en diante.

Xeometricamente, o punto $\exp_m(v)$ está na xeodésica γ_v a unha distancia $\|v\|$ de m . Ademais, a aplicación exponencial é un difeomorfismo local, dado que $\exp_{m*0} = I_{T_m M}$, se identificamos $T_m M$ con $T_0(T_m M)$. Isto significa que existe unha veciñanza U de $0 \in T_m M$ e unha veciñanza V de $m \in M$ tal que $\exp_m : U \rightarrow V$ é un difeomorfismo. Unha veciñanza V deste estilo é o que se chama unha *veciñanza normal* do punto $m \in M$.

Agora consideremos $S^{n-1}(r) = \{x \in T_m M : \|x\| = r\}$ a esfera de radio r en $T_m M$. Se o radio é tomado suficientemente pequeno como para que a esfera caia dentro da veciñanza U definida anteriormente, a imaxe,

$$G_m(r) = \exp_m(S^{n-1}(r))$$

é unha hipersuperficie en M consistente nos puntos localizados a unha distancia xeodésica r de m . Por tanto,

$$G_m(r) = \{p \in M : d(m, p) = r\}$$

Estas hipersuperficies son as *esferas xeodésicas* e constitúen o obxectivo do noso traballo. Para enfatizar que o radio se tomará suficientemente pequeno como para que a esfera xeodésica estea dentro dunha veciñanza normal, habitualmente nos referiremos a elas como *pequenas esferas xeodésicas*. Nas páxinas seguintes amósanse distintas esferas xeodésicas sobre superficies con curvatura de Gauss constante e sobre superficies non homoxéneas.

Para cada $p \in G_m(r)$, existe un único vector unitario $u \in T_m M$ tal que $p = \exp_m(ru)$. Por tanto, existe unha única xeodésica parametrizada proporcionalmente ó arco, $\gamma(t) = \exp_m(tu)$, conectando o centro da esfera xeodésica m co punto p da esfera. Tal xeodésica chámase *raio xeodésico* de m a p . En virtude do Lema de Gauss, o espacio tanxente a $G_m(r)$ en p é precisamente o conxunto de vectores en p que son ortogonales ó raio xeodésico γ .

A *bóla xeodésica* de centro m e radio r defínese de xeito natural como

$$B_m(r) = \{p \in M : d(m, p) \leq r\}$$

É importante sinalar que as bólas xeodésicas suficientemente pequenas corresponden coas bólas métricas determinadas pola topoloxía da variedade (que certamente é metrizable).

Para estudar as esferas xeodésicas en veciñanzas normais cómpre un sistema de coordenadas axeitado. Dito sistema virá dado polas coordenadas normais de centro en m . A

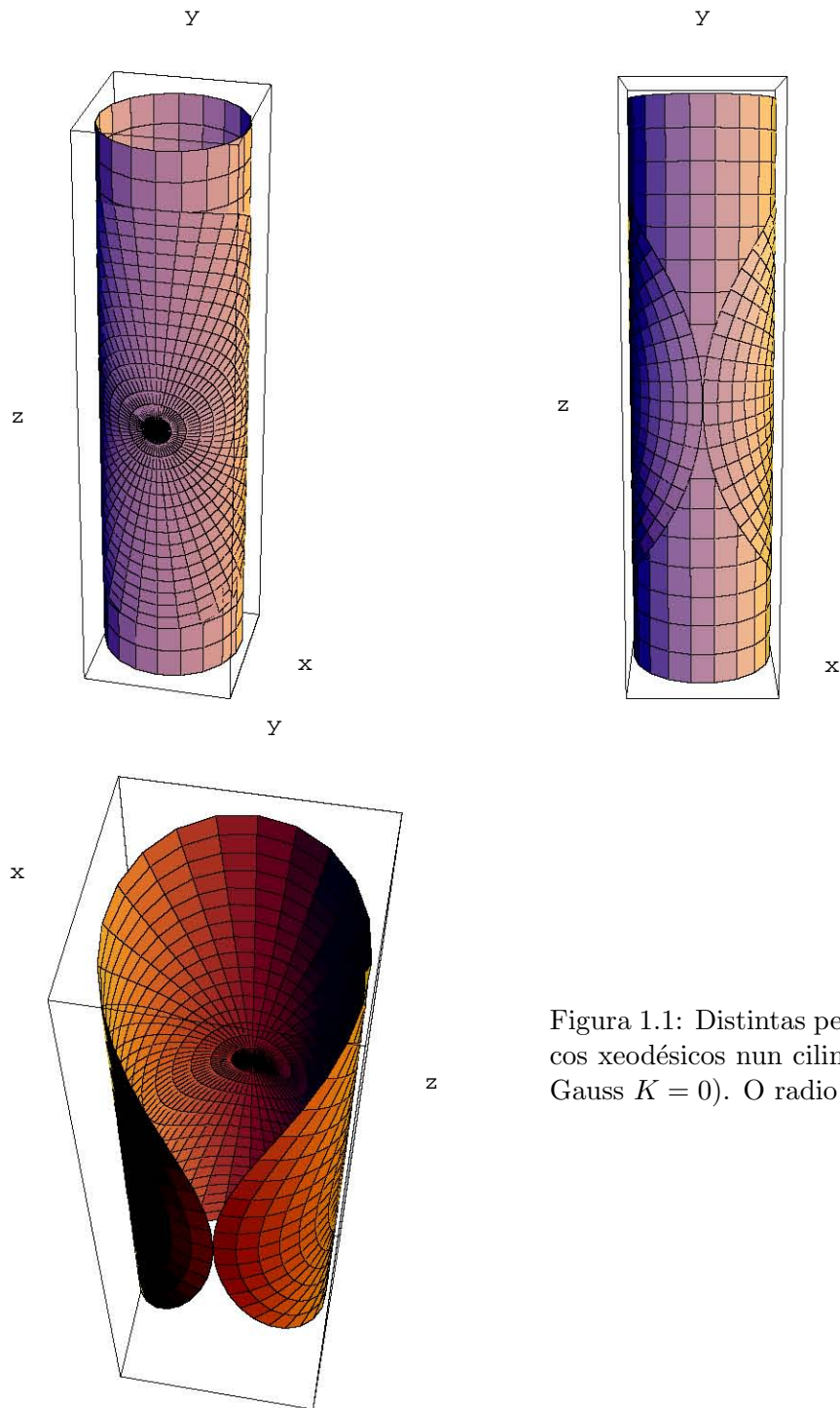


Figura 1.1: Distintas perspectivas dos discos xeodésicos nun cilindro (curvatura de Gauss $K = 0$). O radio máximo é $r = \pi$.

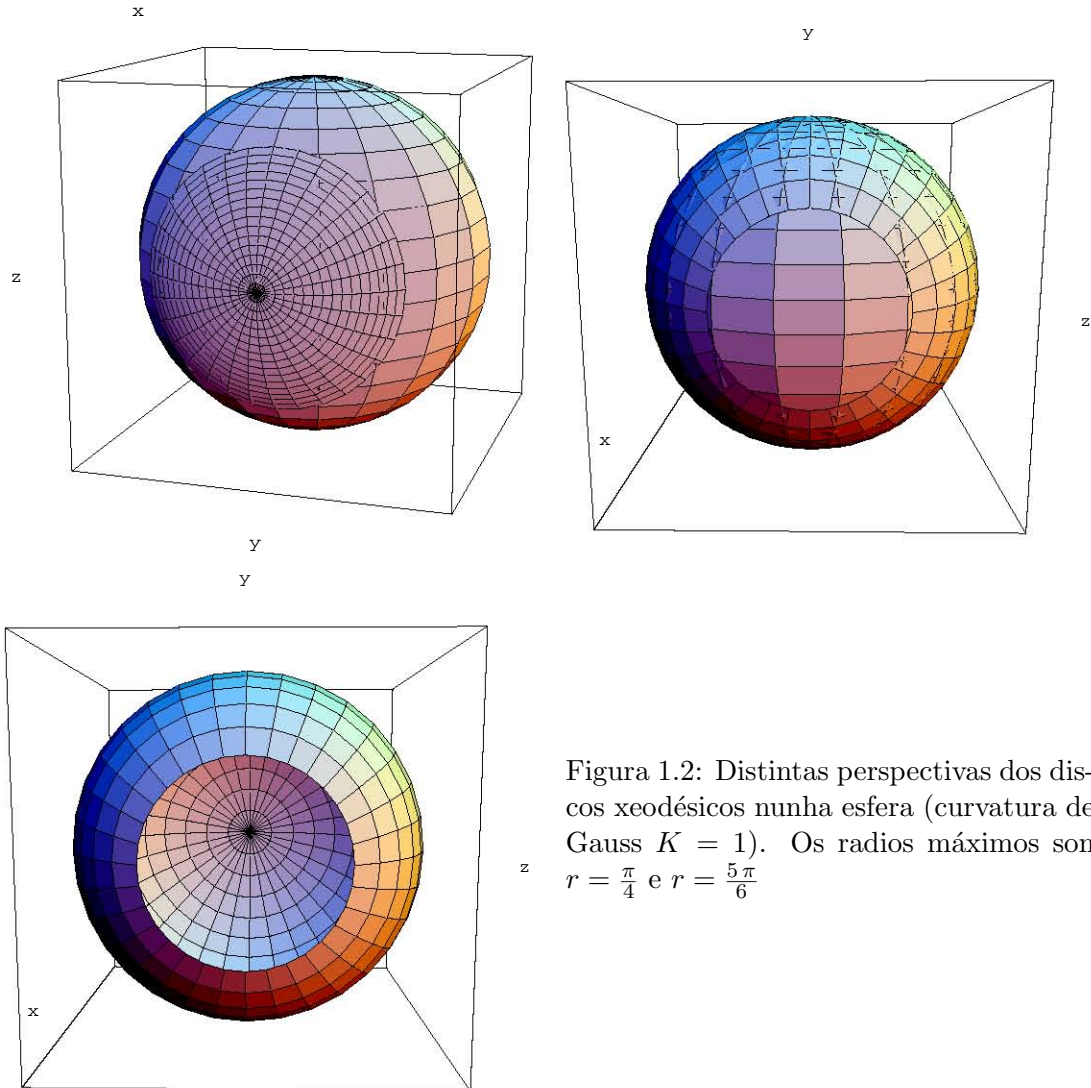


Figura 1.2: Distintas perspectivas dos discos xeodésicos nunha esfera (curvatura de Gauss $K = 1$). Os radios máximos son $r = \frac{\pi}{4}$ e $r = \frac{5\pi}{6}$

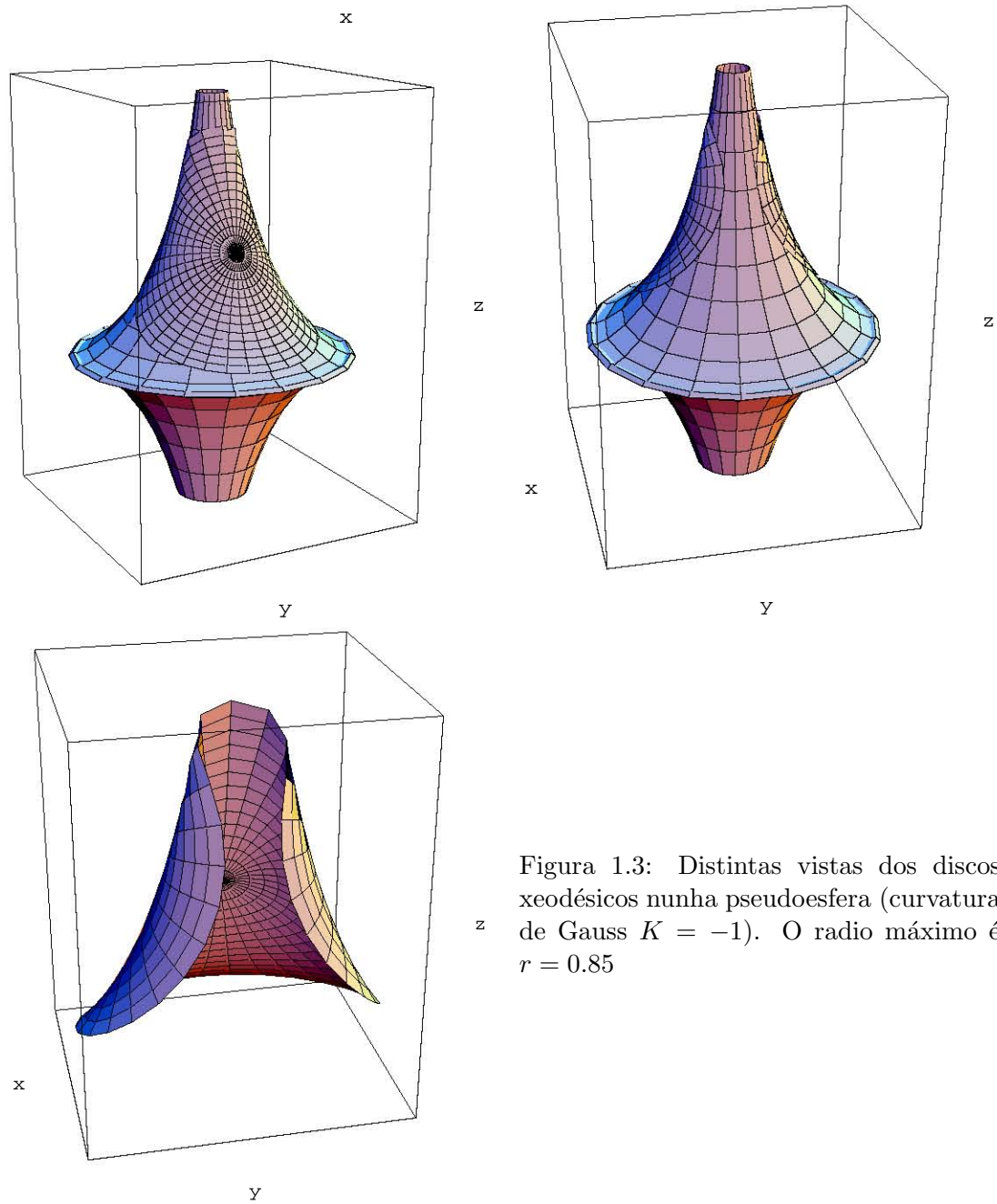


Figura 1.3: Distintas vistas dos discos xeodésicos nunha pseudoesfera (curvatura de Gauss $K = -1$). O radio máximo é $r = 0.85$

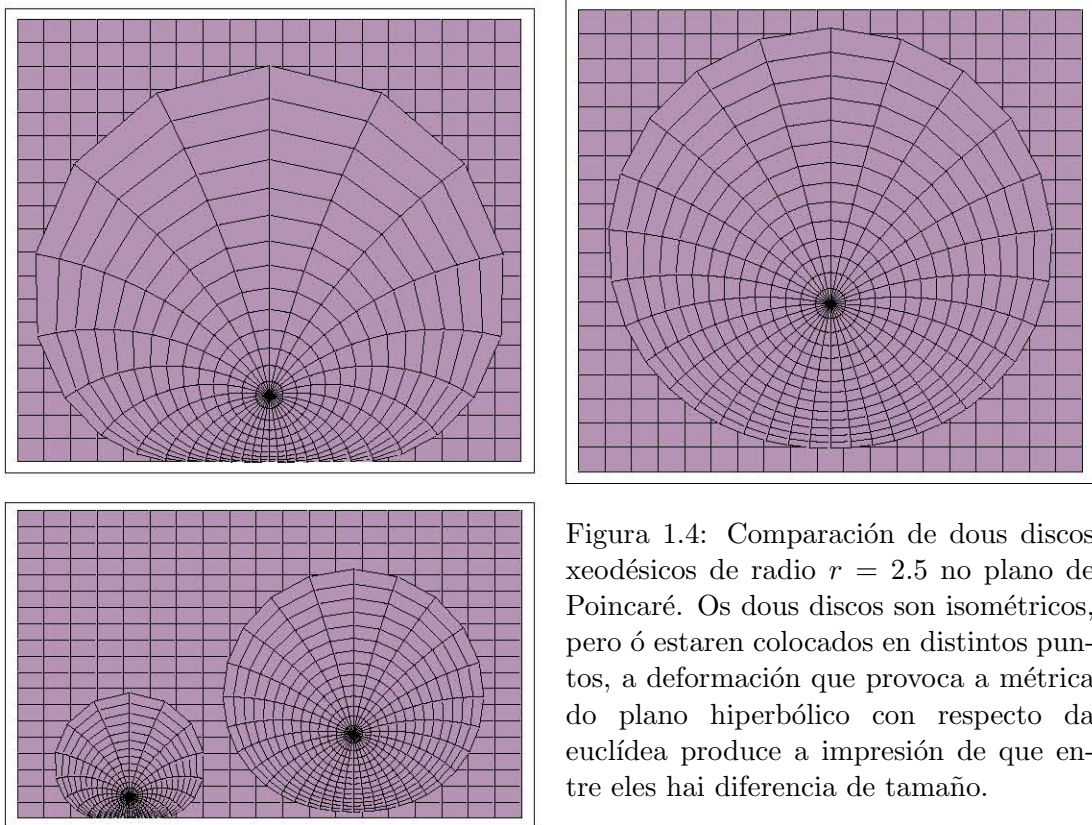


Figura 1.4: Comparación de dous discos xeodésicos de radio $r = 2.5$ no plano de Poincaré. Os dous discos son isométricos, pero ó estaren colocados en distintos puntos, a deformación que provoca a métrica do plano hiperbólico con respecto da euclídea produce a impresión de que entre eles hai diferenza de tamaño.

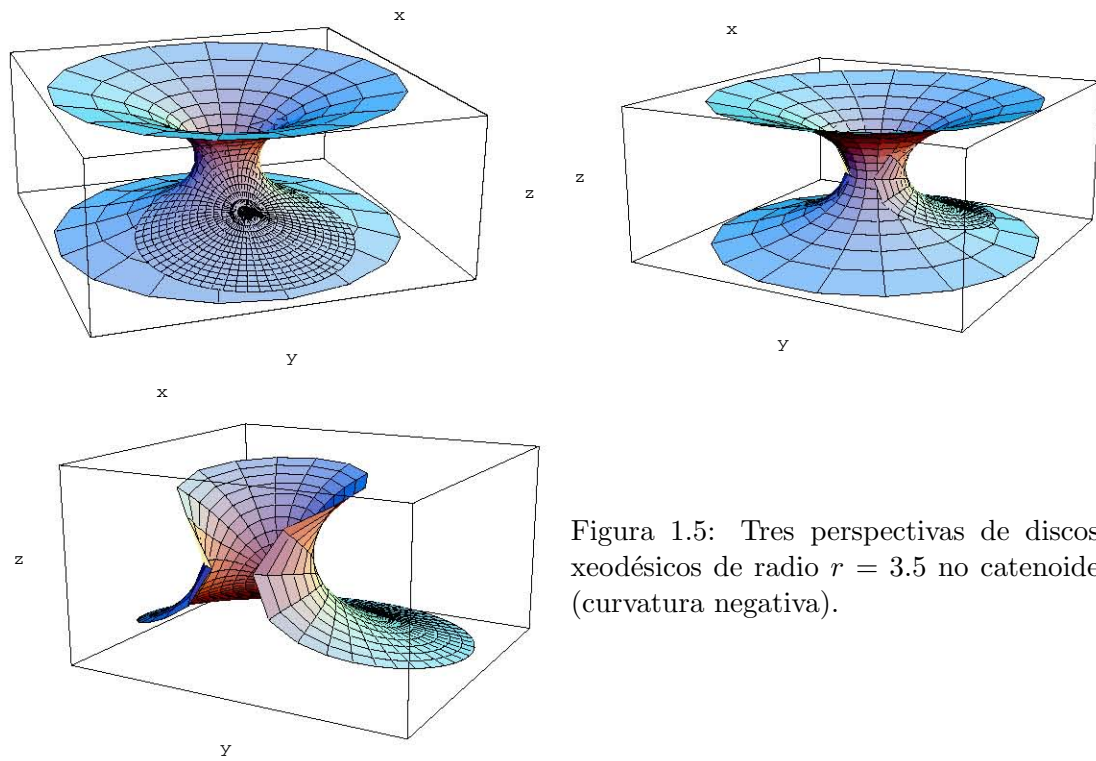


Figura 1.5: Três perspectivas de discos xeodésicos de radio $r = 3.5$ no catenoide (curvatura negativa).

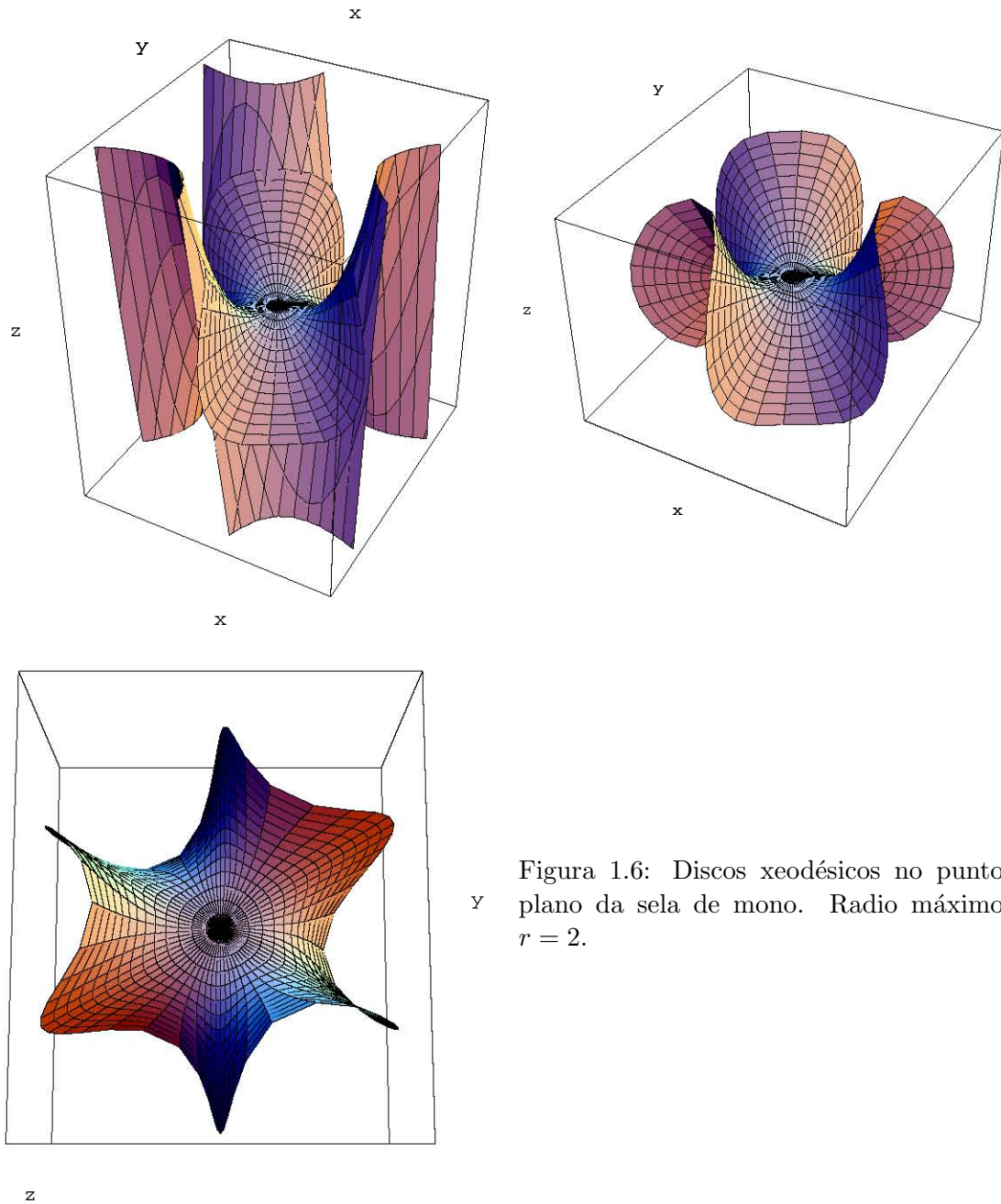


Figura 1.6: Discos xeodésicos no punto plano da sela de mono. Radio máximo $r = 2$.

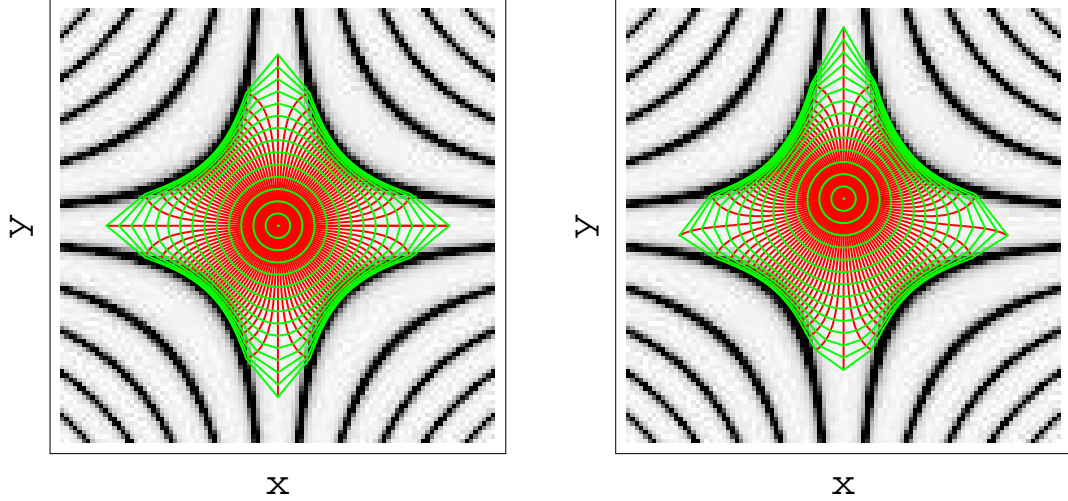


Figura 1.7: Dous discos xeodésicos de radio $r = \pi$ nos puntos $(0,0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ no plano \mathbb{R}^2 dotado coa métrica $g(x,y) = \frac{1}{\frac{1}{10} + \cos^2(xy)} g_0(x,y)$, sendo g_0 a métrica euclídea.

súa construción é como segue. Sexa exp_m a aplicación exponencial e $\{e_1, \dots, e_n\}$ unha base ortonormal de $T_m M$. Cada punto $p \in V$ pode ser descrito de xeito único como $exp_m(v)$ con $v \in T_m M$. Descompoñendo v con respecto á base ortonormal dada podemos escribir $p = exp_m(\sum_{i=1}^n x^i(p)e_i)$, onde $x^1(p), \dots, x^n(p)$ veñen determinadas de xeito único. De forma máis económica, sóese escribir,

$$x^i \left(exp_m \left(\sum_{j=1}^n t^j e_j \right) \right) = t^i$$

Este sistema de coordenadas así obtido é o que se chama *sistema de coordenadas normais* con respecto á base $\{e_1, \dots, e_n\}$ en m .

Finalmente, introduciremos dous conceptos máis que serán necesarios no estudio das esferas xeodésicas. A *función distancia radial*, r , escríbese en coordenadas normais como

$$r(p) = d(m, p) = \sum_{i=1}^n x^i(p)^2$$

O *campo de vectores radial* vén dado mediante

$$(1.10) \quad \frac{\partial}{\partial r} = \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Este campo, localmente definido, coincide co gradiente da función distancia radial, $\text{grad } r = \frac{\partial}{\partial r}$. Ademais, ó longo de cada xeodésica radial parametrizada por arco temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_{\gamma(r)} = \gamma'(r)$$

co cal, $\frac{\partial}{\partial r}$ é un vector normal unitario de $G_m(r)$ que apunta ó exterior.

1.5 Campos de vectores de Jacobi

Sexa $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ unha xeodésica en M . Un campo de vectores X ó longo de γ é un *campo de vectores de Jacobi* se satisfai a ecuación diferencial de Jacobi

$$(1.11) \quad X'' + R_\gamma(X) = 0$$

onde R_γ denota o *operador de Jacobi* definido por

$$(1.12) \quad R_\gamma(X) = R_{\gamma'X}\gamma'$$

É fácil ver que este operador é autoadxunto, polo que, en virtude do carácter definido positivo da métrica, é diagonalizable. O estudio dos seus autovalores constitúe un importante problema dentro da xeometría Riemanniana e semi-Riemanniana. Así, o denominado problema de Osserman consiste na determinación das variedades (semi-)Riemannianas que teñan operadores de Jacobi con autovalores constantes no fibrado unitario á variedade [10]. Dun xeito máis xeral, os espacios simétricos Riemannianos están caracterizados polas propiedades de que os autovalores do operador de Jacobi R_γ son constantes ó longo de γ e os seus autoespacios paralelos. O estudio separado de ámbalas dúas condicións dá lugar a importantes clases de variedades Riemannianas [2].

Os campos de vectores de Jacobi están fortemente relacionados coa curvatura da variedade e serán a ferramenta fundamental do noso traballo. A súa interpretación xeométrica aparece vencellada ó estudio das variacións xeodésicas, no intento de atopar as curvas de mínima lonxitude unindo dous puntos dados.

Unha variación dunha curva γ é unha aplicación:

$$\begin{aligned} \Gamma : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow M \\ (s, t) &\longmapsto \Gamma(s, t) \end{aligned}$$

tal que $\Gamma(s, 0) = \gamma(s)$ para todo s . Fixadas constantes s_0 e t_0 , a curva $\Gamma(s_0, \cdot)$ chámase transversal e a curva $\Gamma(\cdot, t_0)$ lonxitudinal. Unha variación dise unha variación xeodésica ou unha familia uniparamétrica de xeodésicas se toda curva lonxitudinal é unha xeodésica.

Chamamos campo de vectores variacional de Γ ó campo ó longo de γ que para cada s nos dá a velocidade da curva transversal $\Gamma(s, \cdot)$. A seguinte proposición proporciónanos unha interpretación xeométrica dos campos de vectores de Jacobi:

Proposición 1.5.1 *Un campo de vectores X ó longo dunha xeodésica γ é un campo de vectores de Jacobi se e só se X é o campo de vectores variacional dunha variación xeodésica da curva γ .*

Para aqueles campos de vectores de Jacobi X que verifican $X(0) = 0$, podemos obter a expresión seguinte:

Proposición 1.5.2 *Sexa X un campo de vectores de Jacobi ó longo da xeodésica γ con condicións iniciais $X(0) = 0$ e $X'(0) = v$. Entón, X está dado por*

$$X(s) = \exp_{\gamma(0)*s\gamma'(0)}(sv)$$

para todos os valores de s ó longo da xeodésica γ .

Por último, salientar o feito de que, xa que todo campo de vectores de Jacobi é o campo variacional dunha variación xeodésica de γ , podemos interpretar estes intuitivamente dicindo que un campo de vectores de Jacobi ó longo dunha xeodésica dá unha indicación infinitesimal de como as xeodésicas veciñas se comportan con respecto da xeodésica dada. Este feito é especialmente importante cando se consideran métricas de Lorentz na formulación xeométrica da Relatividade Xeral. Así, unha familia de partículas en movemento inercial seguirá traxectorias xeodésicas (libres de aceleración), e os campos de Jacobi permiten medir as aceleracións relativas que experimentan os observadores situados sobre ditas xeodésicas [16]. Así pois, as propiedades físicas do sistema a estudar transfórmanse en propiedades do operador de Jacobi (é dicir, da curvatura), co que o problema básico a resolver é o de construír variedades Lorentzianas de tal xeito que a súa curvatura corresponda cos valores preestablecidos polas propiedades do sistema.

O noso interés polos campos de Jacobi na realización do presente traballo, céntrase na súa relación cos campos de coordenadas normais. Para amosar esta relación procedemos como segue:

Sexan $m \in M$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ unha base ortonormal de T_mM . Denotemos as coordenadas normais asociadas á base $\{e_1, \dots, e_n\}$ en m por (x^1, \dots, x^n) . Para un punto $p \in G_m(r)$ consideramos o raio xeodésico γ conectando m e p . Escribiremos $\gamma(t) = \exp_m(tu)$ sendo $u \in T_mM$, $\|u\| = 1$. Así, $p = \exp_m(ru)$. Ó longo da xeodésica γ podemos construír de xeito natural tres campos de vectores:

En primeiro lugar, podemos simplemente restrinxir os campos coordenados correspondentes ó sistema de coordenadas normais $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_{\gamma(t)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_{\gamma(t)} \right\}$ á curva γ .

En segundo lugar, e supoñendo que $u = \gamma'(0) = e_1$, podemos definir os campos de vectores $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ onde cada $E_i(t)$ é obtido desplazando paralelamente e_i ó longo

de γ . Nótese que con esta elección de e_1 temos que $\gamma'(t) = E_1(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\gamma(t)}$. Deste xeito, aplicando o Lema de Gauss, $T_p G_m(r) = \gamma'(r)^\perp$ está xerado por $\{E_2(r), \dots, E_n(r)\}$.

Por último, introduciremos unha base de campos de vectores de Jacobi ó longo de γ , $\{Y_2(t), \dots, Y_n(t)\}$, satisfacendo as condicións iniciais

$$(1.13) \quad Y_i(0) = 0, \quad Y_i'(0) = e_i, \quad i \in \{2, \dots, n\}$$

Para valores de t suficientemente pequenos como para non chegar ó primeiro punto conxugado de $m = \gamma(0)$, ó longo de γ , temos que $\{Y_2(t), \dots, Y_n(t)\}$ é base de $\gamma'(t)^\perp$.

Usando a Proposición 1.5.2 é fácil ver que

$$Y_i(t) = t \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\gamma(t)}$$

o que pon de manifesto a relación existente entre os campos de Jacobi anteriormente construídos e os campos coordenados normais.

A continuación, a relación que hai entre os campos de vectores de Jacobi e a base ortonormal paralela $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ permítenos derivar unha grande cantidade de información sobre a xeometría da esfera no punto p . Sexa $A(t)$ o endomorfismo de $T_{\gamma(t)} G_m(t)$ que expresa o cambio de base. Poñamos

$$(1.14) \quad Y_i(t) = A(t) E_i(t), \quad i \in \{2, \dots, n\}$$

Utilizando (1.11), (1.12), (1.13) e (1.14) obtemos que a familia de endomorfismos $A(t)$ satisfai a ecuación de Jacobi matricial

$$(1.15) \quad A'' + R_\gamma \circ A = 0$$

$$(1.16) \quad A(0) = 0, \quad A'(0) = I$$

Como aplicación dos resultado anteriores, xa somos quen de expresar as funcións compoñentes do tensor métrico en coordenadas normais nun punto $p = \exp_m(ru)$ situado sobre a esfera xeodésica $G_m(r)$ en termos do endomorfismo A . Claramente, $g_{11}(p) = 1$, e, aplicando o Lema de Gauss, $g_{1i}(p) = 0$, $i \in \{2, \dots, n\}$. Por último,

$$g_{ij}(p) = \frac{1}{r^2} g \left(r \frac{\partial}{\partial x^i}, r \frac{\partial}{\partial x^j} \right) (\gamma(r)) = \frac{1}{r^2} g(A E_i, A E_j)(r) = \frac{1}{r^2} ({}^T A A)_{ij}(r)$$

En consecuencia, as compoñentes do tensor métrico con respecto das coordenadas normais veñen dadas por

$$(1.17) \quad g_p = (g_{ij})(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} ({}^T A A)(r) \end{pmatrix}$$

A *función densidade de volume* defínese como

$$\theta_m(p) = \sqrt{\det g_p}$$

polo que, como aplicación de (1.17), temos

$$(1.18) \quad \theta_m(p) = \frac{\det(A(r))}{r^{n-1}}$$

Asemade, o *operador de configuración dunha esfera xeodésica* vén dado por

$$T_m(p) X = \left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial r} \right) (p)$$

onde utilizamos (1.7) para o vector normal unitario entrante $-\frac{\partial}{\partial r}$, dado por (1.10).

Tamén se verifica que

$$T_m Y_i = \nabla_{Y_i} \frac{\partial}{\partial r} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} Y_i = Y_i'$$

Entón usando (1.14) chegamos a que

$$(1.19) \quad T_m A = A'$$

ou ben,

$$(1.20) \quad T_m(p) = (A' A^{-1})(r)$$

Contraendo o operador de configuración segundo (1.8) obtemos unha nova expresión para a curvatura media:

$$h_m(p) = \text{tr } T_m(p) = \text{tr } (A' A^{-1})(r) = \frac{(\det A)'}{\det A}(r)$$

Empregando (1.18), finalmente obtemos

$$(1.21) \quad h_m(p) = \frac{n-1}{r} + \frac{\theta'_m(p)}{\theta_m(p)}$$

1.6 Series de potencias

Os campos de vectores de Jacobi son de vital importancia á hora de deducir información sobre a curvatura da variedade. Na anterior sección vimos como podíamos expresar os conceptos xeométricos que nos interesan en función do endomorfismo A . Sen embargo, a ecuación de Jacobi, que en última instancia nos permite expresar todos os anteriores resultados, non é, en xeral, resoluble en termos elementais. Agora ben, podemos utilizar esta para aproximar todas as expresións anteriores pola súa serie de Taylor, método

que desenrolaremos no que segue. Véxase [20] para ampliar información e máis referencias.

Derivando a igualdade (1.19) séguese que

$$T_m A' + T_m' A = A''$$

co que empregando de novo (1.15), chegamos á *ecuación diferencial de Riccati*

$$(1.22) \quad T_m' + T_m^2 + R_\gamma = 0$$

Para obter as fórmulas correspondentes ás series de potencias dos distintos tensores, utilizaremos o método de Ledger. Para elo definimos

$$(1.23) \quad C(r) = r T_m(p)$$

Está claro que podemos facer o desenrolo en serie de potencias como

$$C(r) = C(0) + \frac{r}{1!} C'(0) + \frac{r^2}{2!} C''(0) + \dots$$

e tendo en conta que (1.22) é equivalente a

$$(1.24) \quad r C' + C^2 - C + r^2 R_\gamma = 0$$

tomando a derivada n -ésima e avaliando en $r = 0$ obtemos finalmente a *fórmula de recursión de Ledger*:

$$(1.25) \quad (n-1) C^{(n)}(0) = -n(n-1) R^{(n-2)}(0) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} C^{(k)}(0) C^{(n-k)}(0), \quad n \in \mathbb{N}$$

Empregando a fórmula de recursión de Ledger obtemos un importante método para derivar as expresións de todos os tensores de curvatura que necesitaremos para este traballo.

Tendo en conta que o noso obxectivo último é o de atopar os primeiros termos no desenrolo en serie de Taylor das integrais dos invariantes escalares da curvatura das esferas xeodésicas, precisamos coñecer os correspondentes á segunda forma fundamental de ditas esferas (Lema 1.6.1), á función densidade de volume (Lema 1.6.3) e ó tensor curvatura na súa forma de tipo (0,4), ó tensor de Ricci e á curvatura escalar (lemas 1.6.5, 1.6.6 e 1.6.7).

O seguinte resultado consiste sinxelamente en empregar a fórmula (1.25) xunto con (1.23) e (1.6). A expresión obtida pode atoparse, por exemplo, en [7] e [12].

Lema 1.6.1 [7] *Sea $\sigma(p)$ a segunda forma fundamental da esfera xeodésica $G_m(r)$ en $p = \exp_m(ru)$. Entón:*

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(p) &= \frac{1}{r} \delta_{ij} - \frac{r}{3} R_{iuju}(m) - \frac{r^2}{4} (\nabla_u R_{iuju})(m) \\
&\quad - r^3 \left(\frac{1}{10} \nabla_{uu}^2 R_{iuju} + \frac{1}{45} \sum_{c=1}^n R_{cuiu} R_{cuju} \right) (m) \\
&\quad - \frac{r^4}{24} \left(\frac{2}{3} \nabla_{uuu}^3 R_{iuju} + \frac{1}{3} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuiu} R_{cuju} + \frac{1}{3} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuju} R_{cuiu} \right) (m) \\
&\quad - \frac{r^5}{720} \left(\frac{30}{7} \nabla_{uuuu}^4 R_{iuju} + \frac{45}{7} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuiu} \nabla_u R_{cuju} + \frac{24}{7} \sum_{c=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cuiu} R_{cuju} \right. \\
&\quad \left. + \frac{24}{7} \sum_{c=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cuju} R_{cuiu} + \frac{32}{21} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu} R_{cuiu} R_{duju} \right) (m) + O(r^6)
\end{aligned}$$

Tomando trazas na anterior ecuación segundo a definición (1.8) chegamos ó seguinte resultado.

Lema 1.6.2 [7] *Sea $h(p)$ a curvatura media da esfera xeodésica $G_m(r)$ en $p = \exp_m(ru)$. Entón:*

$$\begin{aligned}
h(p) &= \frac{n-1}{r} - \frac{r}{3} \rho_{uu}(m) - \frac{r^2}{4} (\nabla_u \rho_{uu})(m) \\
&\quad - r^3 \left(\frac{1}{10} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} + \frac{1}{45} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2 \right) (m) \\
&\quad - \frac{r^4}{24} \left(\frac{2}{3} \nabla_{uuu}^3 \rho_{uu} + \frac{2}{3} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cudu} R_{cudu} \right) (m) \\
&\quad - \frac{r^5}{720} \left(\frac{30}{7} \nabla_{uuuu}^4 \rho_{uu} + \frac{45}{7} \sum_{c,d=1}^n (\nabla_u R_{cudu})^2 + \frac{48}{7} \sum_{c,d=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cudu} R_{cudu} \right. \\
&\quad \left. + \frac{32}{21} \sum_{c,d,e=1}^n R_{cudu} R_{cueu} R_{dueu} \right) (m) + O(r^6)
\end{aligned}$$

Procedendo de xeito análogo e utilizando agora (1.21), tense

Lema 1.6.3 [7] *Sexa θ_m a función densidade de volume con respecto a unha carta normal centrada en $m \in M$. Se $p = \exp_m(ru)$, entón:*

$$\begin{aligned}
\theta_m(p) &= 1 - \frac{r^2}{6} \rho_{uu}(m) - \frac{r^3}{12} (\nabla_u \rho_{uu})(m) \\
&+ \frac{r^4}{24} \left(-\frac{3}{5} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} + \frac{1}{3} \rho_{uu}^2 - \frac{2}{15} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2 \right) (m) \\
&+ \frac{r^5}{120} \left(-\frac{2}{3} \nabla_{uuu}^3 \rho_{uu} + \frac{5}{3} \rho_{uu} \nabla_u \rho_{uu} - \frac{2}{3} \sum_{c,d=1}^n \nabla_u R_{cudu} R_{cudu} \right) (m) \\
&+ \frac{r^6}{720} \left(-\frac{5}{7} \nabla_{uuuu}^4 \rho_{uu} + 3 \rho_{uu} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} + \frac{5}{2} (\nabla_u \rho_{uu})^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{5}{9} \rho_{uu}^3 - \frac{8}{7} \sum_{c,d=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cudu} R_{cudu} - \frac{15}{14} \sum_{c,d=1}^n (\nabla_u R_{cudu})^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{16}{63} \sum_{c,d,e=1}^n R_{cudu} R_{cueu} R_{dueu} + \frac{2}{3} \rho_{uu} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2 \right) (m) + O(r^7)
\end{aligned}$$

A continuación calcularemos os desenrols en serie de potencias dos tensores de curvatura intrínsecos das esferas xeodésicas. Posteriormente, utilizaremos estes desenrols para calcular as series de potencias dos invariantes da curvatura e das curvaturas totais de segunda orde, núcleo esencial deste traballo.

En primeiro lugar, cómpre o sinxelo resultado seguinte.

Lema 1.6.4 *Con respecto á base paralela $\{E_1, \dots, E_n\}$ temos:*

$$\begin{aligned}
R_{ijkl}(p) &= R_{ijkl}(m) + \frac{r}{1!} (\nabla_u R_{ijkl})(m) + \frac{r^2}{2!} (\nabla_{uu}^2 R_{ijkl})(m) + \dots \\
\rho_{ij}(p) &= \rho_{ij}(m) + \frac{r}{1!} (\nabla_u \rho_{ij})(m) + \frac{r^2}{2!} (\nabla_{uu}^2 \rho_{ij})(m) + \dots \\
\tau(p) &= \tau(m) + \frac{r}{1!} (\nabla_u \tau)(m) + \frac{r^2}{2!} (\nabla_{uu}^2 \tau)(m) + \dots
\end{aligned}$$

O lema anterior, xunto co Lema 1.6.1 permiten, por medio da ecuación de Gauss (1.9), obter o tensor de curvatura de Riemann dunha esfera xeodésica. En [7], obtéñese a seguinte expansión ata o termo de grao 3 (\tilde{R}_3). Nós necesitaremos un termo adicional.

Lema 1.6.5 *Sexa \tilde{R} o tensor de curvatura dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = \exp_m(ru)$, entón:*

$$\tilde{R}_{ijkl}(p) = \tilde{R}_{-2} r^{-2} + \tilde{R}_0(m) + \tilde{R}_1(m) r + \tilde{R}_2(m) r^2 + \tilde{R}_3(m) r^3 + \tilde{R}_4(m) r^4 + O(r^5)$$

onde os coeficientes \tilde{R}_i veñen dados por:

$$\tilde{R}_{-2} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$$

$$\tilde{R}_0 = R_{ijkl} - \frac{1}{3} R_{julu}\delta_{ik} + \frac{1}{3} R_{juku}\delta_{il} + \frac{1}{3} R_{iulu}\delta_{jk} - \frac{1}{3} R_{iuku}\delta_{jl}$$

$$\tilde{R}_1 = \nabla_u R_{ijkl} - \frac{1}{4} \nabla_u R_{julu}\delta_{ik} + \frac{1}{4} \nabla_u R_{juku}\delta_{il} + \frac{1}{4} \nabla_u R_{iulu}\delta_{jk} - \frac{1}{4} \nabla_u R_{iuku}\delta_{jl}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_2 = & \frac{1}{2} \nabla_{uu}^2 R_{ijkl} - \frac{1}{10} \nabla_{uu}^2 R_{julu}\delta_{ik} + \frac{1}{10} \nabla_{uu}^2 R_{juku}\delta_{il} + \frac{1}{10} \nabla_{uu}^2 R_{iulu}\delta_{jk} \\ & - \frac{1}{10} \nabla_{uu}^2 R_{iuku}\delta_{jl} - \frac{1}{45} \sum_{c=1}^n R_{cuju} R_{culu}\delta_{ik} + \frac{1}{45} \sum_{c=1}^n R_{cuju} R_{cuku}\delta_{il} \\ & + \frac{1}{45} \sum_{c=1}^n R_{cuiu} R_{culu}\delta_{jk} - \frac{1}{45} \sum_{c=1}^n R_{cuiu} R_{cuku}\delta_{jl} - \frac{1}{9} R_{iulu} R_{juku} + \frac{1}{9} R_{iuku} R_{julu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_3 = & \frac{1}{6} \nabla_{uuu}^3 R_{ijkl} - \frac{1}{36} \nabla_{uuu}^3 R_{julu}\delta_{ik} + \frac{1}{36} \nabla_{uuu}^3 R_{juku}\delta_{il} + \frac{1}{36} \nabla_{uuu}^3 R_{iulu}\delta_{jk} \\ & - \frac{1}{36} \nabla_{uuu}^3 R_{iuku}\delta_{jl} - \frac{1}{72} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{culu} R_{cuju}\delta_{ik} - \frac{1}{72} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuju} R_{culu}\delta_{ik} \\ & + \frac{1}{72} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuku} R_{cuju}\delta_{il} + \frac{1}{72} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuju} R_{cuku}\delta_{il} + \frac{1}{72} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{culu} R_{cuiu}\delta_{jk} \\ & + \frac{1}{72} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuiu} R_{culu}\delta_{jk} - \frac{1}{72} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuku} R_{cuiu}\delta_{jl} - \frac{1}{72} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuiu} R_{cuku}\delta_{jl} \\ & + \frac{1}{12} \nabla_u R_{julu} R_{iuku} - \frac{1}{12} \nabla_u R_{juku} R_{iulu} - \frac{1}{12} \nabla_u R_{iulu} R_{juku} + \frac{1}{12} \nabla_u R_{iuku} R_{julu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_4 = & \frac{1}{24} \nabla_{uuuu}^4 R_{ijkl} - \frac{1}{168} \nabla_{uuuu}^4 R_{julu} \delta_{ik} + \frac{1}{168} \nabla_{uuuu}^4 R_{juku} \delta_{il} \\
& + \frac{1}{168} \nabla_{uuuu}^4 R_{iulu} \delta_{jk} - \frac{1}{168} \nabla_{uuuu}^4 R_{iuku} \delta_{jl} + \frac{1}{30} \nabla_{uu}^2 R_{julu} R_{iuku} \\
& - \frac{1}{30} \nabla_{uu}^2 R_{juku} R_{iulu} - \frac{1}{30} \nabla_{uu}^2 R_{iulu} R_{juku} + \frac{1}{30} \nabla_{uu}^2 R_{iuku} R_{julu} \\
& - \frac{1}{210} \sum_{c=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{culu} R_{cuju} \delta_{ik} - \frac{1}{210} \sum_{c=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cuju} R_{culu} \delta_{ik} \\
& + \frac{1}{210} \sum_{c=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cuku} R_{cuju} \delta_{il} + \frac{1}{210} \sum_{c=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cuju} R_{cuku} \delta_{il} \\
& + \frac{1}{210} \sum_{c=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{culu} R_{cuiu} \delta_{jk} + \frac{1}{210} \sum_{c=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cuiu} R_{culu} \delta_{jk} \\
& - \frac{1}{210} \sum_{c=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cuku} R_{cuiu} \delta_{jl} - \frac{1}{210} \sum_{c=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cuiu} R_{cuku} \delta_{jl} \\
& - \frac{1}{16} \nabla_u R_{iulu} \nabla_u R_{juku} + \frac{1}{16} \nabla_u R_{iuku} \nabla_u R_{julu} \\
& - \frac{1}{112} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuju} \nabla_u R_{culu} \delta_{ik} + \frac{1}{112} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuju} \nabla_u R_{cuku} \delta_{il} \\
& + \frac{1}{112} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuiu} \nabla_u R_{culu} \delta_{jk} - \frac{1}{112} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuiu} \nabla_u R_{cuku} \delta_{jl} \\
& + \frac{1}{135} \sum_{c=1}^n R_{julu} R_{cuiu} R_{cuku} - \frac{1}{135} \sum_{c=1}^n R_{iulu} R_{cuju} R_{cuku} \\
& - \frac{1}{135} \sum_{c=1}^n R_{juku} R_{cuiu} R_{culu} + \frac{1}{135} \sum_{c=1}^n R_{iuku} R_{cuju} R_{culu} \\
& - \frac{1}{945} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu} R_{culu} R_{duju} \delta_{ik} - \frac{1}{945} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu} R_{cuju} R_{dulu} \delta_{ik} \\
& + \frac{1}{945} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu} R_{cuku} R_{duju} \delta_{il} + \frac{1}{945} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu} R_{cuju} R_{duku} \delta_{il} \\
& + \frac{1}{945} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu} R_{culu} R_{duiu} \delta_{jk} + \frac{1}{945} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu} R_{cuiu} R_{dulu} \delta_{jk}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{945} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu} R_{cuku} R_{duiu} \delta_{jl} - \frac{1}{945} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu} R_{cuiu} R_{duku} \delta_{jl}$$

En [7], dábase o desenrolo en serie de potencias do tensor de Ricci dunha esfera xeodésica ata a orde 3 ($\tilde{\rho}_3$). De novo, nós empregaremos un termo adicional. Pola definición (1.1) temos:

Lema 1.6.6 *Sexa $\tilde{\rho}$ o tensor de Ricci dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = \exp_m(ru)$, entón:*

$$\tilde{\rho}_{ij}(p) = \tilde{\rho}_{-2} r^{-2} + \tilde{\rho}_0(m) + \tilde{\rho}_1(m) r + \tilde{\rho}_2(m) r^2 + \tilde{\rho}_3(m) r^3 + \tilde{\rho}_4(m) r^4 + O(r^5)$$

onde:

$$\tilde{\rho}_{-2} = (n-2) \delta_{ij}$$

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_{ij} - \frac{1}{3} \rho_{uu} \delta_{ij} - \frac{n}{3} R_{iuju}$$

$$\tilde{\rho}_1 = \nabla_u \rho_{ij} - \frac{1}{4} \nabla_u \rho_{uu} \delta_{ij} - \frac{n+1}{4} \nabla_u R_{iuju}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_2 &= \frac{1}{2} \nabla_{uu}^2 \rho_{ij} - \frac{1}{10} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} \delta_{ij} - \frac{n+2}{10} \nabla_{uu}^2 R_{iuju} \\ &+ \frac{1}{9} \rho_{uu} R_{iuju} - \frac{1}{45} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2 \delta_{ij} - \frac{n+2}{45} \sum_{c=1}^n R_{cuiu} R_{cuju} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_3 &= \frac{1}{6} \nabla_{uuu}^3 \rho_{ij} - \frac{1}{36} \nabla_{uuu}^3 \rho_{uu} \delta_{ij} - \frac{n+3}{36} \nabla_{uuu}^3 R_{iuju} + \frac{1}{12} \nabla_u \rho_{uu} R_{iuju} \\ &+ \frac{1}{12} \rho_{uu} \nabla_u R_{iuju} - \frac{n+3}{72} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuju} R_{cuiu} \\ &- \frac{n+3}{72} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuiu} R_{cuju} - \frac{1}{36} \sum_{c,d=1}^n \nabla_u R_{cudu} R_{cudu} \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_4 &= \frac{1}{24} \nabla_{uuuu}^4 \rho_{ij} - \frac{1}{168} \nabla_{uuuu}^4 \rho_{uu} \delta_{ij} - \frac{n+4}{168} \nabla_{uuuu}^4 R_{iuju} \\ &+ \frac{1}{30} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} R_{iuju} + \frac{1}{30} \rho_{uu} \nabla_{uu}^2 R_{iuju} - \frac{n+4}{210} \sum_{c=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cuju} R_{cuiu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{n+4}{210} \sum_{c=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cuiu} R_{cuju} - \frac{1}{105} \sum_{c,d=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cudu} R_{cudu} \delta_{ij} \\
& + \frac{1}{16} \nabla_u \rho_{uu} \nabla_u R_{iuju} - \frac{n+4}{112} \sum_{c=1}^n \nabla_u R_{cuiu} \nabla_u R_{cuju} \\
& - \frac{1}{112} \sum_{c,d=1}^n (\nabla_u R_{cudu})^2 \delta_{ij} + \frac{1}{135} \sum_{c=1}^n \rho_{uu} R_{cuiu} R_{cuju} \\
& - \frac{2(n+4)}{945} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu} R_{cuju} R_{duiu} + \frac{1}{135} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2 R_{iuju} \\
& - \frac{2}{945} \sum_{c,d,e=1}^n R_{cudu} R_{cueu} R_{dueu} \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Finalmente con (1.2) chegamos a unha expresión xa deducida en [12] para a curvatura escalar:

Lema 1.6.7 [12] *Sexa $\tilde{\tau}$ a curvatura escalar dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = \exp_m(ru)$, entón:*

$$\tilde{\tau}(p) = \tilde{\tau}_{-2} r^{-2} + \tilde{\tau}_0(m) + \tilde{\tau}_1(m) r + \tilde{\tau}_2(m) r^2 + \tilde{\tau}_3(m) r^3 + \tilde{\tau}_4(m) r^4 + O(r^5)$$

onde:

$$\tilde{\tau}_{-2} = (n-1)(n-2)$$

$$\tilde{\tau}_0 = \tau - \frac{2(n+1)}{3} \rho_{uu}$$

$$\tilde{\tau}_1 = \nabla_u \tau - \frac{n+2}{2} \nabla_u \rho_{uu}$$

$$\tilde{\tau}_2 = \frac{1}{2} \nabla_{uu}^2 \tau - \frac{n+3}{5} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} + \frac{1}{9} \rho_{uu}^2 - \frac{2n+1}{45} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2$$

$$\tilde{\tau}_3 = \frac{1}{6} \nabla_{uuu}^3 \tau - \frac{n+4}{18} \nabla_{uuu}^3 \rho_{uu} + \frac{1}{6} \rho_{uu} \nabla_u \rho_{uu} - \frac{n+1}{18} \sum_{c,d=1}^n \nabla_u R_{cudu} R_{cudu}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_4 &= \frac{1}{24} \nabla_{uuuu}^4 \tau - \frac{n+5}{84} \nabla_{uuuu}^4 \rho_{uu} + \frac{1}{15} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} \rho_{uu} \\
&\quad - \frac{2n+3}{105} \sum_{c,d=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cudu} R_{cudu} + \frac{1}{16} (\nabla_u \rho_{uu})^2 - \frac{2n+3}{112} \sum_{c,d=1}^n (\nabla_u R_{cudu})^2 \\
&\quad + \frac{2}{135} \rho_{uu} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2 - \frac{2(2n+3)}{945} \sum_{c,d,e=1}^n R_{cudu} R_{cueu} R_{dueu}
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Curvaturas totais de esferas xeodésicas

No capítulo anterior, rematamos dando os primeiros termos do desenrolo en serie de potencias dos máis importantes tensores curvatura intrínsecos das esferas xeodésicas. Agora utilizaremos eses resultados para calcular os invariantes de primeira e segunda orde. Posteriormente integraremos as funcións resultantes para dar unha aproximación en desenrolo de serie de Taylor do que chamaremos as curvaturas totais de esferas xeodésicas. (Asumiremos, como anteriormente, que os tensores definidos nunha esfera xeodésica se denotarán cun tilde).

Se ben os primeiros termos dos desenrols correspondentes ós invariantes escalares considerados ($\tilde{\tau}, \tilde{\tau}^2, \|\tilde{\rho}\|^2, \|\tilde{R}\|^2$), xa eran coñecidos en [7], para o noso estudio foi necesario obter dous novos termos que serán explicitados ó longo deste capítulo. Ademais, escribiremos os seis primeiros termos correspondentes ós desenrols das súas integrais.

Observación 2.0.8 En primeiro lugar, sinalamos a razón da non inclusión no noso estudio da información relativa ó invariante escalar dado polo laplaciano da curvatura escalar. Recordemos para iso que nunha variedade de Riemann, o laplaciano dunha función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ vén dado por $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$. O Teorema da Diverxencia asegura que

$$\int_M \text{div}(X) = \int_{\partial M} \langle X, U \rangle$$

sendo U o vector unitario normal saínte de ∂M . Tendo en conta que as esferas xeodésicas non posúen borde,

$$\int_{G_m(r)} \tilde{\Delta} \tilde{\tau} du = \int_{G_m(r)} \text{div}(\text{grad } \tilde{\tau}) du = \int_{\partial G_m(r)} \langle \text{grad } \tilde{\tau}, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = 0$$

razón pola cal, no noso estudio non incluímos $\tilde{\Delta} \tilde{\tau}$, xa que dita curvatura total non nos aporta ningunha información.

2.1 Volume de esferas xeodésicas

A orixe histórica do noso traballo é a famosa conxectura do volume de Gray-Vanhecke [14]. Tal conxectura afirma que é posible caracterizar os espazos localmente planos a partir do volume das súas pequenas esferas xeodésicas. Sinalar que, aínda que se coñecen numerosas respostas parciais, esta conxectura non foi ata o momento resolta no caso xeral.

Aínda que nós non imos utilizar explícitamente o desenrolo en serie de Taylor do volume de pequenas esferas xeodésicas, incluíremolo no noso estudio por razóns de completitude, e porque as ferramentas necesarias para o cálculo das curvaturas totais serán similares ó cálculo deste.

De agora en diante denotaremos por

$$c_{n-1} = \frac{n \pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

o volume da esfera unidade $S^{n-1}(1)$ no espacio euclídeo \mathbb{R}^n . Aquí $\left(\frac{n}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$, onde Γ é a función gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} |t|^{2\alpha-1} dt$$

Véxase [13] para unha discusión máis detallada deste cálculo.

A continuación esbózase a demostración do cálculo dos primeiros termos da serie de Taylor do volume de esferas xeodésicas empregando esencialmente o método desenrolado en [13] e [14].

Lema 2.1.1 [14] *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann. Entón, o volume $V(G_m(r))$ dunha pequena esfera xeodésica de radio r no punto $m \in M$ é:*

$$V(G_m(r)) = c_{n-1} r^{n-1} \{1 + \alpha_2 r^2 + \alpha_4 r^4 + \alpha_6 r^6 + O(r^7)\}$$

onde

$$\alpha_2 = -\frac{1}{6n} \tau(m)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{n(n+2)} \left\{ -\frac{1}{120} \|R\|^2 + \frac{1}{45} \|\rho\|^2 + \frac{1}{72} \tau^2 - \frac{1}{20} \Delta\tau \right\} (m)$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{n(n+2)(n+4)} \left\{ -\frac{1}{1296} \tau^3 - \frac{1}{270} \tau \|\rho\|^2 + \frac{1}{720} \tau \|R\|^2 + \frac{4}{2835} \check{\rho} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{945} \langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle + \frac{2}{315} \langle \rho, \dot{R} \rangle - \frac{5}{4536} \ddot{R} - \frac{5}{1134} \check{R} + \frac{1}{112} \|\nabla \tau\|^2 \\
& + \frac{1}{224} \|\nabla \rho\|^2 + \frac{1}{112} \alpha(\rho) - \frac{1}{224} \|\nabla R\|^2 + \frac{1}{120} \tau \Delta \tau + \frac{1}{105} \langle \Delta \rho, \rho \rangle \\
& + \left. \frac{3}{280} \langle \nabla^2 \tau, \rho \rangle - \frac{1}{168} \langle \Delta R, R \rangle - \frac{1}{112} \Delta^2 \tau \right\} (m)
\end{aligned}$$

Demostración.

En [14] probouse que o elemento de volume dunha esfera xeodésica suficientemente pequena $G_m(r)$ é $r^{n-1} \theta_m du$, sendo du o elemento de volume da esfera euclídea $S^{n-1}(1)$. En consecuencia, o volume dunha esfera xeodésica é:

$$(2.1) \quad r^{n-1} \int_{S^{n-1}} \theta_m(\exp_m(ru)) du$$

No primeiro capítulo acadamos os primeiros termos do desenrolo en serie de potencias da función densidade de volume θ_m . Así, chegamos a unha expresión do tipo:

$$\theta_m(\exp_m(ru)) = 1 + \gamma_2(u) r^2 + \gamma_3(u) r^3 + \gamma_4(u) r^4 + \gamma_5(u) r^5 + \gamma_6(u) r^6 + O(r^7)$$

onde os γ_i correspóndense cos coeficientes dados no Lema 1.6.3. Substituíndo en (2.1) obtemos:

$$\begin{aligned}
& r^{n-1} \left(c_{n-1} + r^2 \int_{S^{n-1}} \gamma_2(u) du + r^3 \int_{S^{n-1}} \gamma_3(u) du \right. \\
& \quad \left. + r^4 \int_{S^{n-1}} \gamma_4(u) du + r^5 \int_{S^{n-1}} \gamma_5(u) du + r^6 \int_{S^{n-1}} \gamma_6(u) du + O(r^7) \right)
\end{aligned}$$

Empregamos agora unha fórmula dada en [13] para a integración de polinomios en esferas. Sexan i_1, \dots, i_k índices distintos. En primeiro lugar, debido ás simetrías da esfera

$$(2.2) \quad \int_{S^{n-1}} x_{i_1}^{j_1} \dots x_{i_k}^{j_k} du = 0$$

se algún j_i é impar. Denotemos agora $l = j_1 + \dots + j_k$, e definamos:

$$k) = (k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$$

para k par. Entón, cando j_1, \dots, j_k son todos pares:

$$(2.3) \quad \int_{S^{n-1}} x_{i_1}^{j_1} \dots x_{i_k}^{j_k} du = c_{n-1} \frac{j_1) \dots j_k)}{n(n+2) \dots (n+l-2)}$$

Fixada unha base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_m M$ e un tensor ω de tipo $(0, k)$ en $T_m M$, podemos escribir

$$\omega_{u\dots u} = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}$$

sendo $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Logo, se k é impar, empregando (2.2) dedúcese que

$$\int_{S^{n-1}} \omega_{u\dots u} du = 0$$

En particular, isto significa que

$$\int_{S^{n-1}} \gamma_3(u) du = \int_{S^{n-1}} \gamma_5(u) du = 0$$

Se k é par, non é difícil obter, empregando (2.2) e (2.3) que para os primeiros valores pares de k é:

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \omega_{uu} du &= c_{n-1} \sum_{i=1}^n \omega_{ii} \\ \int_{S^{n-1}} \omega_{uuuu} du &= c_{n-1} \left(\sum_{i,j=1}^n \omega_{iijj} + \sum_{i,j=1}^n \omega_{ijij} + \sum_{i,j=1}^n \omega_{ijji} \right) \\ \int_{S^{n-1}} \omega_{uuuuuu} du &= c_{n-1} \left(\sum_{i,j,k=1}^n \omega_{iijjkk} + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{iijkjk} + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijjkkj} + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijjikk} \right. \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijikjk} + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijikkj} + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijjikk} + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijjkkik} \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijjkkki} + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijkijk} + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijkikj} + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijkjik} \\ &\quad \left. + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijkjki} + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijkkij} + \sum_{i,j,k=1}^n \omega_{ijkkji} \right) \end{aligned}$$

Nestes intres só resta facer a integración dos $\gamma_i(u)$. Pero tendo en conta a expresión anterior, e empregando reiteradamente o Lema 1.1.1, obtéñense os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \rho_{uu} du &= \frac{c_{n-1}}{n} \tau \\
\int_{S^{n-1}} \rho_{uu}^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} (2 \|\rho\|^2 + \tau^2) \\
\int_{S^{n-1}} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} du &= \frac{2c_{n-1}}{n(n+2)} \Delta \tau \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^n R_{iuju}^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n} \left(\frac{3}{2} \|R\|^2 + \|\rho\|^2 \right) \\
\int_{S^{n-1}} \rho_{uu}^3 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)(n+4)} (6\tau \|\rho\|^2 + \tau^3 + 8\check{\rho}) \\
\int_{S^{n-1}} (\nabla_u \rho_{uu})^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)(n+4)} (2 \|\nabla \rho\|^2 + 4 \|\nabla \tau\|^2 + 4\alpha(\rho)) \\
\int_{S^{n-1}} \rho_{uu} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)(n+4)} (6 \langle \nabla^2 \tau, \rho \rangle + 2 \langle \Delta \rho, \rho \rangle \\
&\quad - 4 \langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle + 4\check{\rho} + 2\tau \Delta \tau) \\
\int_{S^{n-1}} \nabla_{uuuu}^4 \rho_{uu} du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)(n+4)} (20\alpha(\rho) - 2 \langle \Delta R, R \rangle - 6 \langle \Delta \rho, \rho \rangle \\
&\quad + 4 \langle \rho, \dot{R} \rangle - 12 \langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle + 16 \langle \nabla^2 \tau, \rho \rangle - 14 \|\nabla \rho\|^2 \\
&\quad + 5 \|\nabla \tau\|^2 + 12\check{\rho} - 2\check{\check{R}} - 8\check{\check{R}} + 9\Delta^2 \tau) \\
\int_{S^{n-1}} \rho_{uu} \sum_{i,j=1}^n R_{iuju}^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)(n+4)} \left(6 \langle \rho, \dot{R} \rangle + 4 \langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \tau \|R\|^2 + \tau \|\rho\|^2 \right) \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i,j,k=1}^n R_{iuju} R_{iuku} R_{juku} du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)(n+4)} \left(\frac{9}{2} \langle \rho, \dot{R} \rangle + \check{\rho} + \frac{7}{2} \check{\check{R}} - \check{\check{R}} \right) \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^n (\nabla_u R_{iuju})^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)(n+4)} (3 \|\nabla R\|^2 + 11 \|\nabla \rho\|^2 - 10\alpha(\rho)) \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{iuju} R_{iuju} du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)(n+4)} \left(5 \langle \Delta R, R \rangle + 3 \langle \Delta \rho, \rho \rangle - 4 \langle \rho, \dot{R} \rangle \right. \\
&\quad \left. + 2 \langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle - \langle \nabla^2 \tau, \rho \rangle - 2\check{\rho} + 2\check{\check{R}} + 8\check{\check{R}} \right)
\end{aligned}$$

sendo todas as demais integrais nulas por involucrar un número impar de variables.

Por último, considerando todas estas identidades e a definición dos γ_i , operando chégase o resultado requerido. \square

2.2 Curvatura escalar total

Aínda que non a utilizaremos, por completidute, incluiremos a continuación os primeiros termos do desenrolo en serie de Taylor da curvatura escalar total, resultado que pode ser atopado tamén en [12].

Definimos a *curvatura escalar total* dunha esfera xeodésica $G_m(r)$ como

$$(2.4) \quad \int_{G_m(r)} \tilde{\tau}$$

Integrando 1.6.7 obtense:

Lema 2.2.1 [12] *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$\int_{G_m(r)} \tilde{\tau} = c_{n-1} r^{n-1} \{ \alpha_{-2} r^{-2} + \alpha_0 + \alpha_2 r^2 + \alpha_4 r^4 + O(r^5) \}$$

onde

$$\alpha_{-2} = (n-2)(n-1)$$

$$\alpha_0 = -\frac{(n-3)(n-2)}{6n} \tau(m)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{n(n+2)} \left\{ -\frac{(n+2)(n+3)}{120} \|R\|^2 + \frac{n^2+5n+21}{45} \|\rho\|^2 + \frac{n^2-7n-6}{72} \tau^2 - \frac{(n-3)(n-2)}{20} \Delta\tau \right\} (m)$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{n(n+2)(n+4)} \left\{ -\frac{n^2-9n-34}{1296} \tau^3 - \frac{n^2+3n+17}{270} \tau \|\rho\|^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{720} \tau \|R\|^2 + \frac{4(n^2+9n-106)}{2835} \check{\rho} - \frac{4(n^2+9n-1)}{945} \langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle + \frac{2(n^2+9n-1)}{315} \langle \rho, \dot{R} \rangle \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{11n^2 + 99n - 158}{4536} \check{R} - \frac{5n^2 + 45n - 278}{1134} \check{R} \\
& \frac{n^2 - 5n - 22}{112} \|\nabla\tau\|^2 + \frac{n^2 + 9n + 188}{224} \|\nabla\rho\|^2 \\
& + \frac{(n-3)(n+12)}{112} \alpha(\rho) - \frac{(n+4)(n+5)}{224} \|\nabla R\|^2 \\
& + \frac{(n-9)(n+2)}{120} \tau\Delta\tau + \frac{n^2 + 9n + 69}{105} \langle\Delta\rho, \rho\rangle \\
& + \frac{(n-3)(9n+38)}{840} \langle\nabla^2\tau, \rho\rangle - \frac{n^2 + 9n + 6}{168} \langle\Delta R, R\rangle \\
& - \frac{(n-3)(n-2)}{112} \Delta^2\tau \Big\} (m)
\end{aligned}$$

Demostración.

Como vimos anteriormente, o elemento de volume dunha esfera xeodésica suficientemente pequena $G_m(r)$ é $r^{n-1}\theta_m du$ sendo du o elemento de volume da esfera euclídea $S^{n-1}(1)$. En consecuencia a definición (2.4) transfórmase en:

$$(2.5) \quad \int_{G_m(r)} \tilde{\tau} = r^{n-1} \int_{S^{n-1}} (\tilde{\tau}\theta_m)(\exp_m(ru)) du$$

Agora ben, o desenrolo en serie de potencias das funcións $\tilde{\tau}$ e θ_m está dado nos lemas 1.6.7 e 1.6.3 respectivamente. Facendo o produto de Cauchy destas dúas series de potencias chegamos a unha expresión do tipo:

$$\begin{aligned}
(\tilde{\tau}\theta_m)(\exp_m(ru)) &= \tilde{\tau}_{-2} r^{-2} + (\gamma_2 \tilde{\tau}_{-2} + \tilde{\tau}_0) + (\gamma_3 \tilde{\tau}_{-2} + \tilde{\tau}_1) r \\
&+ (\gamma_4 \tilde{\tau}_{-2} + \gamma_2 \tilde{\tau}_0 + \tilde{\tau}_2) r^2 + (\gamma_5 \tilde{\tau}_{-2} + \gamma_3 \tilde{\tau}_0 + \gamma_2 \tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_3) r^3 \\
&+ (\gamma_6 \tilde{\tau}_{-2} + \gamma_4 \tilde{\tau}_0 + \gamma_3 \tilde{\tau}_1 + \gamma_2 \tilde{\tau}_2 + \tilde{\tau}_4) r^4 + O(r^5)
\end{aligned}$$

onde os γ_i son os coeficientes da serie de θ_m , e os $\tilde{\tau}_i$ os coeficientes da serie de $\tilde{\tau}$.

Agora, procedemos de forma análoga ó feito no Lema 2.1.1, tendo en conta ademais que

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \nabla_{uu}^2 \tau du &= \frac{c_{n-1}}{n} \Delta\tau \\
\int_{S^{n-1}} \nabla_u \tau \nabla_u \rho_{uu} du &= \frac{2c_{n-1}}{n(n+2)} \|\nabla\tau\|^2 \\
\int_{S^{n-1}} \rho_{uu} \nabla_{uu}^2 \tau du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} (2 \langle\nabla^2\tau, \rho\rangle + \tau\Delta\tau) \\
\int_{S^{n-1}} \nabla_{uuuu}^4 \tau du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} (2 \langle\nabla^2\tau, \rho\rangle + \|\nabla\tau\|^2 + 3 \Delta^2\tau)
\end{aligned}$$

Facendo operacións chégase ó resultado. \square

2.3 Curvatura escalar cuadrática total

En [7] obtense o desenrolo en serie de potencias do cadrado da curvatura escalar nunha esfera xeodésica ata o termo de orde cero. Elevando ó cadrado a serie obtida no Lema 1.6.7 conseguimos expresar dous termos adicionais que precisaremos neste traballo:

Lema 2.3.1 *Sexa $\tilde{\tau}$ a curvatura escalar dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = \exp_m(ru)$, entón:*

$$\tilde{\tau}^2(p) = \tilde{t}_{-4} r^{-4} + \tilde{t}_{-2}(m) r^{-2} + \tilde{t}_{-1}(m) r^{-1} + \tilde{t}_0(m) + \tilde{t}_1(m) r + \tilde{t}_2(m) r^2 + O(r^3)$$

onde

$$\tilde{t}_{-4} = (n-1)^2(n-2)^2$$

$$\tilde{t}_{-2} = 2(n-2)(n-1) \left(\tau - \frac{2(n+1)}{3} \rho_{uu} \right)$$

$$\tilde{t}_{-1} = 2(n-2)(n-1) \left(\nabla_u \tau - \frac{n+2}{2} \nabla_u \rho_{uu} \right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}_0 = & (n-1)(n-2) \nabla_{uu}^2 \tau - \frac{2(n-1)(n-2)(n+3)}{5} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} \\ & + \tau^2 - \frac{4(n+1)}{3} \tau \rho_{uu} + \frac{2(3n^2+n+4)}{9} \rho_{uu}^2 \\ & - \frac{2(n-2)(n-1)(2n+1)}{45} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{t}_1 = & \frac{(n-1)(n-2)}{3} \nabla_{uuu}^3 \tau - \frac{(n-2)(n-1)(n+4)}{9} \nabla_{uuu}^3 \rho_{uu} \\ & + 2\tau \nabla_u \tau - (n+2) \tau \nabla_u \rho_{uu} - \frac{4(n+1)}{3} \rho_{uu} \nabla_u \tau \\ & + (n^2+n+2) \rho_{uu} \nabla_u \rho_{uu} - \frac{(n-1)(n-2)(n+1)}{9} \sum_{c,d=1}^n \nabla_u R_{cudu} R_{cudu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_2 &= \frac{(n-1)(n-2)}{12} \nabla_{uuuu}^4 \tau - \frac{(n-1)(n-2)(n+5)}{42} \nabla_{uuuu}^4 \rho_{uu} \\
&+ \tau \nabla_{uu}^2 \tau - \frac{2(n+3)}{5} \tau \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} - \frac{2(n+1)}{3} \rho_{uu} \nabla_{uu}^2 \tau \\
&+ \frac{2(3n^2+5n+8)}{15} \rho_{uu} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} - \frac{2(n-1)(n-2)(3n+2)}{105} \sum_{c,d=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cudu} R_{cudu} \\
&+ (\nabla_u \tau)^2 - (n+2) \nabla_u \tau \nabla_u \rho_{uu} + \frac{3n^2+5n+10}{8} (\nabla_u \rho_{uu})^2 \\
&- \frac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{56} \sum_{c,d=1}^n (\nabla_u R_{cudu})^2 + \frac{2}{9} \tau \rho_{uu}^2 - \frac{2(2n+1)}{45} \tau \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2 \\
&- \frac{4(n+1)}{27} \rho_{uu}^3 + \frac{4(n^2+1)}{45} \sum_{c,d=1}^n \rho_{uu} R_{cudu}^2 \\
&- \frac{4(n-1)(n-2)(2n+3)}{945} \sum_{c,d,e=1}^n R_{cudu} R_{cueu} R_{dueu}
\end{aligned}$$

Demostración.

Séguese trivialmente do Lema 1.6.7 que

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}^2(\exp_m(ru)) &= \tilde{\tau}_{-2}^2 r^{-4} + 2\tilde{\tau}_{-2}\tilde{\tau}_0 r^{-2} + 2\tilde{\tau}_{-2}\tilde{\tau}_1 r^{-1} \\
&(\tilde{\tau}_0^2 + 2\tilde{\tau}_{-2}\tilde{\tau}_2) + (2\tilde{\tau}_0\tilde{\tau}_1 + 2\tilde{\tau}_{-2}\tilde{\tau}_3) r \\
&+ (\tilde{\tau}_1^2 + 2\tilde{\tau}_0\tilde{\tau}_2 + 2\tilde{\tau}_{-2}\tilde{\tau}_4) r^2 + O(r^3)
\end{aligned}$$

onde os $\tilde{\tau}_i$ son os coeficientes do desenrolo de $\tilde{\tau}$. O resultado obtense despois de substituír cada $\tilde{\tau}_i$ polo seu valor e facer operacións. \square

Definimos a *curvatura escalar cuadrática total* dunha esfera xeodésica $G_m(r)$ como

$$(2.6) \quad \int_{G_m(r)} \tilde{\tau}^2$$

Integrando a serie de potencias obtida no lema anterior obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.3.2 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$\int_{G_m(r)} \tilde{\tau}^2 = c_{n-1} r^{n-1} \{ \alpha_{-4} r^{-4} + \alpha_{-2} r^{-2} + \alpha_0 + \alpha_2 r^2 + O(r^3) \}$$

onde

$$\alpha_{-4} = (n-2)^2 (n-1)^2$$

$$\alpha_{-2} = -\frac{(n-5)(n-2)^2(n-1)}{6n} \tau(m)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{n(n+2)} \left\{ -\frac{(n-2)(n-1)(n^2+13n+10)}{120} \|R\|^2 \right. \\ \left. + \frac{n^4+10n^3+43n^2-14n+120}{45} \|\rho\|^2 + \frac{n^4-14n^3+29n^2-60n-188}{72} \tau^2 \right. \\ \left. - \frac{(n-5)(n-2)^2(n-1)}{20} \Delta\tau \right\} (m)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{n(n+2)(n+4)} \left\{ -\frac{n^4-18n^3+n^2+132n-428}{1296} \tau^3 \right. \\ \left. - \frac{(n+2)(n^3+4n^2+7n-248)}{270} \tau \|\rho\|^2 + \frac{n^4+6n^3-55n^2-324n-156}{720} \tau \|R\|^2 \right. \\ \left. + \frac{4(n^4+18n^3+61n^2+2028n+580)}{2835} \check{\rho} \right. \\ \left. - \frac{4(n^4+18n^3+131n^2+978n+720)}{945} \langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle \right. \\ \left. + \frac{2(n^4+18n^3-9n^2+138n+20)}{315} \langle \rho, \dot{R} \rangle + \frac{n^4-10n^3-23n^2-100n-540}{112} \|\nabla\tau\|^2 \right. \\ \left. - \frac{(n-2)(n-1)(11n^2+231n-338)}{4536} \check{R} - \frac{(n-2)(n-1)(5n^2+105n-566)}{1134} \check{\check{R}} \right. \\ \left. + \frac{n^4+18n^3+425n^2-632n+1196}{224} \|\nabla\rho\|^2 + \frac{n^4+18n^3-23n^2+712n+300}{112} \alpha(\rho) \right. \\ \left. - \frac{(n-2)(n-1)(n+2)(n+19)}{224} \|\nabla R\|^2 + \frac{n^4-14n^3+5n^2-4n-396}{120} \tau \Delta\tau \right. \\ \left. + \frac{n^4+18n^3+131n^2-142n+440}{105} \langle \Delta\rho, \rho \rangle \right. \\ \left. - \frac{(n-2)(n-1)(n^2+21n+10)}{168} \langle \Delta R, R \rangle \right. \\ \left. + \frac{(n-2)(9n^3+40n^2-71n+470)}{840} \langle \nabla^2\tau, \rho \rangle - \frac{(n-5)(n-2)^2(n-1)}{112} \Delta^2\tau \right\} (m)$$

Demostración.

Considerando o elemento de volume dunha esfera xeodésica suficientemente pequena, a

definición (2.6) transfórmase en:

$$(2.7) \quad \int_{G_m(r)} \tilde{\tau}^2 = r^{n-1} \int_{S^{n-1}} (\tilde{\tau}^2 \theta_m) (\exp_m(ru)) du$$

Empregando o desenrolo en serie de potencias das funcións $\tilde{\tau}^2$ e θ_m , dado nos lemas 2.3.1 e 1.6.3, e facendo o seu produto de Cauchy obtemos:

$$\begin{aligned} (\tilde{\tau}^2 \theta_m)(\exp_m(ru)) &= \tilde{t}_{-4} r^{-4} + (\gamma_2 \tilde{t}_{-4} + \tilde{t}_{-2}) r^{-2} + (\gamma_3 \tilde{t}_{-4} + \tilde{t}_{-1}) r^{-1} \\ &\quad + (\gamma_4 \tilde{t}_{-4} + \gamma_2 \tilde{t}_{-2} + \tilde{t}_0) + (\gamma_5 \tilde{t}_{-4} + \gamma_3 \tilde{t}_{-2} + \gamma_2 \tilde{t}_{-1} + \tilde{t}_1) r \\ &\quad + (\gamma_6 \tilde{t}_{-4} + \gamma_4 \tilde{t}_{-2} + \gamma_3 \tilde{t}_{-1} + \gamma_2 \tilde{t}_0 + \tilde{t}_2) r^2 + O(r^3) \end{aligned}$$

onde os γ_i son os coeficientes da serie de θ_m , e os \tilde{t}_i os coeficientes da serie de $\tilde{\tau}^2$.

Empregando agora o procedemento de demostracións anteriores (lemas 2.1.1 e 2.2.1), a partir de (2.7), e utilizando a expresión

$$\int_{S^{n-1}} (\nabla_u \tau)^2 du = \frac{c_{n-1}}{n} \|\nabla \tau\|^2$$

obtemos a fórmula requerida despois de facer operacións. \square

2.4 Norma cuadrática total do tensor de Ricci

De novo, en [7] dáse unha expresión da serie de potencias para $\|\tilde{\rho}\|^2$ ata o termo independente. Utilizando o Lema 1.6.6, podemos explicitar dous termos adicionais de dita serie:

Lema 2.4.1 *Sexa $\|\tilde{\rho}\|$ a norma do tensor de Ricci dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = \exp_m(ru)$, entón:*

$$\|\tilde{\rho}\|^2(p) = \tilde{\varrho}_{-4} r^{-4} + \tilde{\varrho}_{-2}(m) r^{-2} + \tilde{\varrho}_{-1}(m) r^{-1} + \tilde{\varrho}_0(m) + \tilde{\varrho}_1(m) r + \tilde{\varrho}_2(m) r^2 + O(r^3)$$

onde

$$\tilde{\varrho}_{-4} = (n-1)(n-2)^2$$

$$\tilde{\varrho}_{-2} = 2(n-2) \left(\tau - \frac{2(n+1)}{3} \rho_{uu} \right)$$

$$\tilde{\varrho}_{-1} = 2(n-2) \left(\nabla_u \tau - \frac{n+2}{2} \nabla_u \rho_{uu} \right)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varrho}_0 &= (n-2) \nabla_{uu}^2 \tau - \frac{2(n-2)(n+3)}{5} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} - \frac{2}{3} \tau \rho_{uu} \\
&\quad + \|\rho\|^2 - 2 \sum_{c=1}^n \rho_{cu}^2 + \frac{5(n+2)}{9} \rho_{uu}^2 \\
&\quad - \frac{2n}{3} \sum_{c,d=1}^n \rho_{cd} R_{cudu} + \frac{n^2+6n+4}{45} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2 \\
\tilde{\varrho}_1 &= \frac{n-2}{3} \nabla_{uuu}^3 \tau - \frac{(n-2)(n+4)}{9} \nabla_{uuu}^3 \rho_{uu} - \frac{2}{3} \rho_{uu} \nabla_u \tau \\
&\quad - \frac{1}{2} \tau \nabla_u \rho_{uu} + 2 \sum_{c,d=1}^n \rho_{cd} \nabla_u \rho_{cd} - 4 \sum_{c=1}^n \rho_{cu} \nabla_u \rho_{cu} + \frac{5(n+3)}{6} \rho_{uu} \nabla_u \rho_{uu} \\
&\quad - \frac{n+1}{2} \sum_{c,d=1}^n \rho_{cd} \nabla_u R_{cudu} - \frac{2n}{3} \sum_{c,d=1}^n \nabla_u \rho_{cd} R_{cudu} \\
&\quad - \frac{(n+1)(n+4)}{18} \sum_{c,d=1}^n \nabla_u R_{cudu} R_{cudu} \\
\tilde{\varrho}_2 &= \frac{n-2}{12} \nabla_{uuuu}^4 \tau - \frac{(n-2)(n+5)}{42} \nabla_{uuuu}^4 \rho_{uu} - \frac{1}{5} \tau \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} - \frac{1}{3} \rho_{uu} \nabla_{uu}^2 \tau \\
&\quad + \sum_{c,d=1}^n \rho_{cd} \nabla_{uu}^2 \rho_{cd} - 2 \sum_{c=1}^n \rho_{cu} \nabla_{uu}^2 \rho_{cu} + \frac{n+4}{3} \rho_{uu} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} \\
&\quad - \frac{n+2}{5} \sum_{c,d=1}^n \rho_{cd} \nabla_{uu}^2 R_{cudu} - \frac{n}{3} \sum_{c,d=1}^n \nabla_{uu}^2 \rho_{cd} R_{cudu} \\
&\quad + \frac{3n^2+16n+12}{105} \sum_{c,d=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cudu} R_{cudu} - \frac{1}{2} \nabla_u \tau \nabla_u \rho_{uu} \\
&\quad + \frac{5n+21}{16} (\nabla_u \rho_{uu})^2 + \frac{3n^2+16n+19}{112} \sum_{c,d=1}^n (\nabla_u R_{cudu})^2 \\
&\quad - 2 \sum_{c=1}^n (\nabla_u \rho_{cu})^2 + \sum_{c,d=1}^n (\nabla_u \rho_{cd})^2 - \frac{n+1}{2} \sum_{c,d=1}^n \nabla_u \rho_{cd} \nabla_u R_{cudu} \\
&\quad - \frac{2}{45} \tau \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2 - \frac{2}{27} \rho_{uu}^3 + \frac{2}{9} \sum_{c,d=1}^n \rho_{uu} \rho_{cd} R_{cudu}
\end{aligned}$$

$$-\frac{2(n+2)}{45} \sum_{c,d,e=1}^n \rho_{cd} R_{cueu} R_{dueu} + \frac{2(3n^2 + 16n + 12)}{945} \sum_{c,d,e=1}^n R_{cudu} R_{cueu} R_{dueu}$$

Demostración.

Tendo en conta a definición

$$\|\tilde{\rho}\|^2 = \sum_{i,j=2}^n \tilde{\rho}_{ij}^2$$

só hai que elevar ó cadrado a serie obtida no Lema 1.6.6, de xeito análogo a outros lemas considerados anteriormente, e contraer os índices resultantes segundo a definición anterior. \square

Defínese a *norma cuadrática total do tensor de Ricci* dunha esfera xeodésica $G_m(r)$ como

$$(2.8) \quad \int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2$$

Integrando a serie de potencias obtida no lema anterior obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.4.2 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$\int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 = c_{n-1} r^{n-1} \{ \alpha_{-4} r^{-4} + \alpha_{-2} r^{-2} + \alpha_0 + \alpha_2 r^2 + O(r^3) \}$$

onde

$$\alpha_{-4} = (n-2)^2 (n-1)$$

$$\alpha_{-2} = -\frac{(n-5)(n-2)^2}{6n} \tau(m)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{n(n+2)} \left\{ -\frac{n^3 - 9n^2 - 16n - 20}{120} \|R\|^2 + \frac{n^3 + 31n^2 - 16n - 120}{45} \|\rho\|^2 + \frac{n^3 - 13n^2 - 16n + 44}{72} \tau^2 - \frac{(n-5)(n-2)^2}{20} \Delta\tau \right\} (m)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{n(n+2)(n+4)} \left\{ -\frac{n^3 - 17n^2 - 112n - 4}{1296} \tau^3 \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(n+2)(n^2+25n+14)}{270} \tau \|\rho\|^2 + \frac{(n+2)(n^2-15n-66)}{720} \tau \|R\|^2 \\
& + \frac{4(n^3+187n^2+395n+1310)}{2835} \check{\rho} + \frac{2(n+2)(n^2+10n-10)}{315} \langle \rho, \check{R} \rangle \\
& - \frac{2(2n^3+94n^2-225n-180)}{945} \langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle \\
& - \frac{(n+2)(11n^2+103n+338)}{4536} \check{R} - \frac{(n+2)(5n^2+253n+566)}{1134} \check{\check{R}} \\
& + \frac{n^3-9n^2-116n+120}{112} \|\nabla\tau\|^2 + \frac{n^3+61n^2-60n-1238}{224} \|\nabla\rho\|^2 \\
& + \frac{n^3+61n^2+164n+330}{112} \alpha(\rho) - \frac{n^3-23n^2-88n-118}{224} \|\nabla R\|^2 \\
& + \frac{n^3-13n^2-56n+108}{120} \tau \Delta\tau + \frac{n^3+47n^2+80n-440}{105} \langle \Delta\rho, \rho \rangle \\
& + \frac{9n^3+143n^2-680n+940}{840} \langle \nabla^2\tau, \rho \rangle \\
& - \frac{(n+2)(n^2-11n-10)}{168} \langle \Delta R, R \rangle - \frac{(n-5)(n-2)^2}{112} \Delta^2\tau \Big\} (m)
\end{aligned}$$

Demostración.

Considerando o elemento de volume dunha esfera xeodésica suficientemente pequena, a definición (2.8) transfórmase en:

$$(2.9) \quad \int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 = r^{n-1} \int_{S^{n-1}} (\|\tilde{\rho}\|^2 \theta_m) (\exp_m(ru)) du$$

Desenrolando en serie de potencias as funcións $\|\tilde{\rho}\|^2$ e θ_m , (dadas nos lemas 2.4.1 e 1.6.3), e facendo o seu produto de Cauchy obtemos unha expresión do tipo:

$$\begin{aligned}
(\|\tilde{\rho}\|^2 \theta_m)(\exp_m(ru)) &= \tilde{\varrho}_{-4} r^{-4} + (\gamma_2 \tilde{\varrho}_{-4} + \tilde{\varrho}_{-2}) r^{-2} + (\gamma_3 \tilde{\varrho}_{-4} + \tilde{\varrho}_{-1}) r^{-1} \\
&+ (\gamma_4 \tilde{\varrho}_{-4} + \gamma_2 \tilde{\varrho}_{-2} + \tilde{\varrho}_0) + (\gamma_5 \tilde{\varrho}_{-4} + \gamma_3 \tilde{\varrho}_{-2} + \gamma_2 \tilde{\varrho}_{-1} + \tilde{\varrho}_1) r \\
&+ (\gamma_6 \tilde{\varrho}_{-4} + \gamma_4 \tilde{\varrho}_{-2} + \gamma_3 \tilde{\varrho}_{-1} + \gamma_2 \tilde{\varrho}_0 + \tilde{\varrho}_2) r^2 + O(r^3)
\end{aligned}$$

onde os γ_i son os coeficientes da serie de θ_m , e os $\tilde{\varrho}_i$ os coeficientes da serie de $\|\tilde{\rho}\|^2$.

Levando a cabo o mesmo procedemento de demostracións anteriores en (2.9), e utilizando as igualdades

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^n \rho_{iu}^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n} \|\rho\|^2 \\
\int_{S^{n-1}} \rho_{uu} \sum_{i=1}^n \rho_{iu}^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} (2\check{\rho} + \tau\|\rho\|^2) \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} R_{iuju} du &= \frac{c_{n-1}}{n} \|\rho\|^2 \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \nabla_{uu} \rho_{ij} du &= \frac{c_{n-1}}{n} \langle \Delta\rho, \rho \rangle \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^n \rho_{iu} \nabla_{uu} \rho_{iu} du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} (\langle \nabla^2 \tau, \rho \rangle + \langle \Delta\rho, \rho \rangle - \langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle + \check{\rho}) \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^n (\nabla_u \rho_{ij})^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n} \|\nabla\rho\|^2 \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^n (\nabla_u \rho_{iu})^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} \left(\frac{1}{4} \|\nabla\tau\|^2 + \|\nabla\rho\|^2 + \alpha(\rho) \right) \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^n \nabla_u \rho_{ij} \nabla_u R_{iuju} du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} (3\|\nabla\rho\|^2 - 2\alpha(\rho)) \\
\int_{S^{n-1}} \rho_{uu} \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} R_{iuju} du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} (2\langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle + \tau\|\rho\|^2) \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i,j,k=1}^n \rho_{ij} R_{iuku} R_{juku} du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} \left(\frac{3}{2} \langle \rho, \dot{R} \rangle + \check{\rho} \right) \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} \nabla_{uu}^2 R_{iuju} du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} (-\langle \nabla^2 \tau, \rho \rangle + 3\langle \Delta\rho, \rho \rangle + 2\langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle - 2\check{\rho}) \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^n \nabla_{uu}^2 \rho_{ij} R_{iuju} du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} \left(\frac{1}{2} \langle \Delta R, R \rangle + \langle \Delta\rho, \rho \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle \rho, \dot{R} \rangle + \frac{1}{2} \check{R} + 2\check{\check{R}} \right)
\end{aligned}$$

O resultado séguese agora operando. □

2.5 Norma cuadrática total do tensor de curvatura

Utilizando o Lema 1.6.5 obtéñense dous termos máis ca no desenrolo en serie de potencias que podemos atopar en [7]:

Lema 2.5.1 *Sexa $\|\tilde{R}\|$ a norma do tensor de curvatura dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = \exp_m(ru)$, entón:*

$$\|\tilde{R}\|^2(p) = \tilde{\beta}_{-4} r^{-4} + \tilde{\beta}_{-2}(m) r^{-2} + \tilde{\beta}_{-1}(m) r^{-1} + \tilde{\beta}_0(m) + \tilde{\beta}_1(m) r + \tilde{\beta}_2(m) r^2 + O(r^3)$$

onde

$$\tilde{\beta}_{-4} = 2(n-1)(n-2)$$

$$\tilde{\beta}_{-2} = 4 \left(\tau - \frac{2(n+1)}{3} \rho_{uu} \right)$$

$$\tilde{\beta}_{-1} = 4 \left(\nabla_u \tau - \frac{n+2}{2} \nabla_u \rho_{uu} \right)$$

$$\tilde{\beta}_0 = 2 \nabla_{uu}^2 \tau - \frac{4(n+3)}{5} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} + \frac{8}{9} \rho_{uu}^2 - \frac{8}{3} \sum_{c,d=1}^n \rho_{cd} R_{cudu}$$

$$+ \|R\|^2 - 4 \sum_{c,d,e=1}^n R_{cdeu}^2 + \frac{4(3n+59)}{45} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2$$

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{2}{3} \nabla_{uuu}^3 \tau - \frac{2(n+4)}{9} \nabla_{uuu}^3 \rho_{uu} + \frac{4}{3} \rho_{uu} \nabla_u \rho_{uu}$$

$$- 2 \sum_{c,d=1}^n \rho_{cd} \nabla_u R_{cudu} - \frac{8}{3} \sum_{c,d=1}^n \nabla_u \rho_{cd} R_{cudu} + 2 \sum_{c,d,e,f=1}^n \nabla_u R_{cdef} R_{cdef}$$

$$- 8 \sum_{c,d,e=1}^n \nabla_u R_{cdeu} R_{cdeu} + \frac{2(2n+47)}{9} \sum_{c,d=1}^n \nabla_u R_{cudu} R_{cudu}$$

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{1}{6} \nabla_{uuuu}^4 \tau - \frac{n+5}{21} \nabla_{uuuu}^4 \rho_{uu} + \frac{8}{15} \rho_{uu} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu}$$

$$- \frac{4}{5} \sum_{c,d=1}^n \rho_{cd} \nabla_{uu}^2 R_{cudu} - \frac{4}{3} \sum_{c,d=1}^n \nabla_{uu}^2 \rho_{cd} R_{cudu} + \sum_{c,d,e,f=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cdef} R_{cdef}$$

$$\begin{aligned}
& -4 \sum_{c,d,e=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cdeu} R_{cdeu} + \frac{4(5n+137)}{105} \sum_{c,d=1}^n \nabla_{uu}^2 R_{cudu} R_{cudu} + \frac{1}{2} (\nabla_u \rho_{uu})^2 \\
& -2 \sum_{c,d=1}^n \nabla_u \rho_{cd} \nabla_u R_{cudu} + \sum_{c,d,e,f=1}^n (\nabla_u R_{cdef})^2 - 4 \sum_{c,d,e=1}^n (\nabla_u R_{cdeu})^2 \\
& + \frac{5n+144}{28} \sum_{c,d=1}^n (\nabla_u R_{cudu})^2 - \frac{8}{45} \rho_{uu} \sum_{c,d=1}^n R_{cudu}^2 \\
& - \frac{8}{45} \sum_{c,d,e=1}^n \rho_{cd} R_{cueu} R_{dueu} + \frac{4}{9} \sum_{c,d,e,f=1}^n R_{cdef} R_{cueu} R_{dufu} \\
& + \frac{8(5n+32)}{945} \sum_{c,d,e=1}^n R_{cudu} R_{cueu} R_{dueu}
\end{aligned}$$

Demostración.

Séguese da definición

$$\|\tilde{R}\|^2 = \sum_{i,j,k,l=2}^n \tilde{R}_{ijkl}^2$$

elevando ó cadrado a serie obtida no Lema 1.6.5 e contraendo os índices resultantes segundo a fórmula anterior. \square

Defínese a *norma cuadrática total do tensor de curvatura* dunha esfera xeodésica $G_m(r)$ como

$$(2.10) \quad \int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2$$

Integrando a serie de potencias obtida no lema anterior obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.5.2 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$\int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 = c_{n-1} r^{n-1} \{ \alpha_{-4} r^{-4} + \alpha_{-2} r^{-2} + \alpha_0 + \alpha_2 r^2 + O(r^3) \}$$

onde

$$\alpha_{-4} = 2(n-2)(n-1)$$

$$\alpha_{-2} = -\frac{(n-5)(n-2)}{3n} \tau(m)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{n(n+2)} \left\{ \frac{59n^2 - 93n - 10}{60} \|R\|^2 + \frac{2(n^2 - 37n + 60)}{45} \|\rho\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{n^2 - 11n + 2}{36} \tau^2 - \frac{(n-5)(n-2)}{10} \Delta\tau \right\} (m) \\
\alpha_2 &= \frac{1}{n(n+2)(n+4)} \left\{ -\frac{n^2 - 15n - 22}{648} \tau^3 - \frac{n^2 - 41n + 4}{135} \tau \|\rho\|^2 \right. \\
&\quad - \frac{59n^2 + 151n + 126}{360} \tau \|R\|^2 + \frac{8(n^2 + 357n - 1705)}{2835} \check{\rho} \\
&\quad - \frac{4(2n^2 + 49n - 960)}{945} \langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle + \frac{4(n^2 + 427n - 95)}{315} \langle \rho, \dot{R} \rangle \\
&\quad - \frac{11n^2 + 4851n - 1682}{2268} \check{R} - \frac{5n^2 + 4473n - 2414}{567} \check{\check{R}} \\
&\quad + \frac{(n-2)(n-5)}{56} \|\nabla\tau\|^2 + \frac{n^2 - 1239n + 626}{112} \|\nabla\rho\|^2 \\
&\quad + \frac{n^2 + 553n - 270}{56} \alpha(\rho) + \frac{3(37n^2 + 21n - 22)}{112} \|\nabla R\|^2 \\
&\quad + \frac{n^2 - 11n - 6}{60} \tau \Delta\tau + \frac{2(n^2 - 133n + 220)}{105} \langle \Delta\rho, \rho \rangle \\
&\quad + \frac{9n^2 + 273n - 470}{420} \langle \nabla^2\tau, \rho \rangle + \frac{83n^2 - 133n - 10}{84} \langle \Delta R, R \rangle \\
&\quad \left. - \frac{(n-5)(n-2)}{56} \Delta^2\tau \right\} (m)
\end{aligned}$$

Demostración.

Como vimos, a definición (2.10) interprétase como:

$$(2.11) \quad \int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 = r^{n-1} \int_{S^{n-1}} \left(\|\tilde{R}\|^2 \theta_m \right) (exp_m(ru)) du$$

Os desenrols en serie de potencias de $\|\tilde{R}\|^2$ e θ_m foron dados nos lemas 2.5.1 e 1.6.3 respectivamente. Ó facer o produto de tales series quedáanos:

$$\begin{aligned}
(\|\tilde{R}\|^2 \theta_m)(exp_m(ru)) &= \tilde{\beta}_{-4} r^{-4} + \left(\gamma_2 \tilde{\beta}_{-4} + \tilde{\beta}_{-2} \right) r^{-2} + \left(\gamma_3 \tilde{\beta}_{-4} + \tilde{\beta}_{-1} \right) r^{-1} \\
&\quad + \left(\gamma_4 \tilde{\beta}_{-4} + \gamma_2 \tilde{\beta}_{-2} + \tilde{\beta}_0 \right) + \left(\gamma_5 \tilde{\beta}_{-4} + \gamma_3 \tilde{\beta}_{-2} + \gamma_2 \tilde{\beta}_{-1} + \tilde{\beta}_1 \right) r \\
&\quad + \left(\gamma_6 \tilde{\beta}_{-4} + \gamma_4 \tilde{\beta}_{-2} + \gamma_3 \tilde{\beta}_{-1} + \gamma_2 \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_2 \right) r^2 + O(r^3)
\end{aligned}$$

sendo os γ_i os coeficientes da serie de θ_m , e os $\tilde{\beta}_i$ os coeficientes da serie de $\|\tilde{R}\|^2$.

Procedendo de xeito análogo ó feito anteriormente e considerando

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \sum_{i,j,k=1}^n R_{ijk}^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n} \|R\|^2 \\ \int_{S^{n-1}} \rho_{uu} \sum_{i,j,k=1}^n R_{ijk}^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} \left(2 \langle \rho, \dot{R} \rangle + \tau \|R\|^2 \right) \\ \int_{S^{n-1}} \sum_{i,j,k,l=1}^n R_{ijkl} R_{iuku} R_{jul} du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} \left(\langle \rho \otimes \rho, \bar{R} \rangle - \frac{1}{4} \check{R} + 2 \check{\check{R}} \right) \\ \int_{S^{n-1}} \sum_{i,j,k=1}^n (\nabla_u R_{ijk})^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} \left(\frac{3}{2} \|\nabla R\|^2 + 2 \|\nabla \rho\|^2 - 2 \alpha(\rho) \right) \\ \int_{S^{n-1}} \sum_{i,j,k,l=1}^n (\nabla_u R_{ijkl})^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n} \|\nabla R\|^2 \\ \int_{S^{n-1}} \sum_{i,j,k=1}^n \nabla_{uu} R_{ijk} R_{ijk} du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} \left(2 \langle \Delta R, R \rangle - \langle \rho, \dot{R} \rangle + \frac{1}{2} \check{R} + 2 \check{\check{R}} \right) \\ \int_{S^{n-1}} \sum_{i,j,k,l=1}^n \nabla_{uu} R_{ijkl} R_{ijkl} du &= \frac{c_{n-1}}{n} \langle \Delta R, R \rangle \end{aligned}$$

obtemos a fórmula requerida despois de facer operacións. \square

Observación 2.5.3 Consideramos importante sinalar que no proceso de obtención dos resultados anteriores foi necesario deducir unha serie de expresións relativas ás integrais das compoñentes da curvatura e as súas derivadas covariantes. Estas integrais permitiron obter novas relacións entre os invariantes escalares da curvatura.

Por exemplo, de

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^n (\nabla_u R_{iuju})^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)(n+4)} (3 \|\nabla R\|^2 + 11 \|\nabla \rho\|^2 - 10 \alpha(\rho)) \\ \int_{S^{n-1}} \sum_{i,j,k=1}^n (\nabla_u R_{ijk})^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} \left(\frac{3}{2} \|\nabla R\|^2 + 2 \|\nabla \rho\|^2 - 2 \alpha(\rho) \right) \\ \int_{S^{n-1}} (\nabla_u \rho_{uu})^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)(n+4)} (2 \|\nabla \rho\|^2 + 4 \|\nabla \tau\|^2 + 4 \alpha(\rho)) \\ \int_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^n (\nabla_u \rho_{iu})^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} \left(\frac{1}{4} \|\nabla \tau\|^2 + \|\nabla \rho\|^2 + \alpha(\rho) \right) \end{aligned}$$

dedúcese

- (i) $3 \|\nabla R\|^2 + 11 \|\nabla \rho\|^2 - 10 \alpha(\rho) \geq 0$, con igualdade se e só se a variedade é localmente simétrica.
- (ii) $3 \|\nabla R\|^2 + 4 \|\nabla \rho\|^2 - 4 \alpha(\rho) \geq 0$, con igualdade se e só se a variedade é localmente simétrica.
- (iii) $2 \|\nabla \tau\|^2 + \|\nabla \rho\|^2 + 2 \alpha(\rho) \geq 0$, con igualdade se e só se o tensor de Ricci é paralelo cíclico.
- (iv) $\|\nabla \tau\|^2 + 4 \|\nabla \rho\|^2 + 4 \alpha(\rho) \geq 0$, con igualdade se e só se o tensor de Ricci é paralelo.

No seguinte capítulo acadaremos unha aplicación das expresións obtidas na caracterización dos espazos modelo. Outras aplicacións para o estudo das propiedades de homoxeneidade local poden ser tamén deducidas, se ben o seu estudio está máis aló do propósito desta memoria.

Capítulo 3

Aplicacións

No capítulo anterior obtivemos os desenvollos en serie de Taylor das integrais dos invariantes da curvatura de primeira e segunda orde en esferas xeodésicas ata o termo de orde dous.

Agora veremos como estas expresións nos serven para caracterizar en certos casos os espazos modelo. Comenzaremos dando a expresión exacta das curvaturas totais en esferas xeodésicas para estes, e compararemos os seus desenvollos en serie de potencias cos xa obtidos, para caracterizar un amplo número de casos nos mesmos.

O resultado esencial será, de feito, a posibilidade de caracterizar os espazos modelo mediante a norma cuadrática total do tensor de curvatura, e en dimensións baixas mediante a norma cuadrática total do tensor de Ricci. Isto dá unha resposta afirmativa a un análogo da conxectura de Gray–Vanhecke para o volume de esferas xeodésicas [14] no caso das curvaturas totais, a primeira coñecida ata o de agora sen asumir hipóteses adicionais.

Sinalar, por último, que outras aplicacións dos desenvollos obtidos permiten resolver cuestións relativas a homoxeneidade local ou formular resultados de comparación. Sen embargo, o seu desenvollo afástase dos obxectivos propios deste traballo.

3.1 Expresións explícitas nos espazos modelo

A ecuación de Jacobi (1.11), en xeral, non pode ser resolta exactamente, razón pola cal, na maior parte dos casos temos que conformarnos con dar as súas solucións só dun xeito aproximado mediante, por exemplo, un polinomio de Taylor.

En [20] trátase un número considerable de casos nos que tal ecuación si pode ser resolta en termos elementais, polo menos dun xeito teórico. Así, unha variedade de Riemann (M, g) dise un *espacio localmente simétrico* se $\nabla R = 0$. Isto significa que os autoespazos do operador de Jacobi R_γ son paralelos ó longo de xeodésicas, e os seus autovalores constantes.

Utilizando (1.15) non é difícil obter por inducción a seguinte expresión nun espazo localmente simétrico analítico:

$$(3.1) \quad A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)!} R_{\gamma}^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(r\sqrt{R_{\gamma}})^{2k+1}}{(2k+1)! \sqrt{R_{\gamma}}} = \frac{\sin r\sqrt{R_{\gamma}}}{\sqrt{R_{\gamma}}}$$

entendendo as últimas igualdades como unha expresión formal do desenvolvemento en serie de Taylor da primeira.

Con (1.19) dedúcese a partir de (3.1) que

$$(3.2) \quad T_m(p) = \sqrt{R_{\gamma}} \cot r\sqrt{R_{\gamma}}$$

Utilizando (1.17), xunto con (3.1), é claro que:

$$(3.3) \quad g_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left[\frac{\sin r\sqrt{R_{\gamma}}}{\sqrt{R_{\gamma}}} \right]^2 \end{pmatrix}$$

Aplicando a fórmula (1.18) á ecuación (3.3) obtemos

$$(3.4) \quad \theta_m(p) = \frac{1}{r^{n-1}} \det \left(\frac{\sin r\sqrt{R_{\gamma}}}{\sqrt{R_{\gamma}}} \right)$$

Aínda que as expresións anteriores son explícitas e completas, non resolven de xeito definitivo o problema de realizar cálculos sobre esferas xeodésicas, na medida en que aínda cómpre coñecer máis exactamente o operador de Jacobi.

Unha variedade de Riemann (M, g) dise *homoxénea dous puntos* se para calesquera $p, q, p', q' \in M$ verificando que $d(p, q) = d(p', q')$ existe unha isometría φ de M tal que $\varphi(p) = p'$ e $\varphi(q) = q'$.

Esta condición é tan sumamente forte que as variedades homoxéneas dous puntos están totalmente clasificadas: unha variedade homoxénea dous puntos é localmente simétrica [19] e así, localmente isométrica a \mathbb{R}^n , a un espazo simétrico compacto de rango un, ou ós seus duais non compactos (os espazos simétricos compactos de rango un son S^n , $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ e o plano de Cayley, *Cay P*²).

No que segue, o noso obxectivo fundamental será tratar de caracterizar os espazos localmente isométricos a estes, que será os que chamaremos *espacios modelo*.

Observación 3.1.1 Tanto $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ como o plano de Cayley son variedades que teñen estruturas adicionais que fan que o seu grupo de holonomía se reduza respectivamente a $SU(n)$, $Sp(1) \cdot Sp(n)$ e $Spin(9)$.

A nosa extratexia consistirá en caracterizar os espazos simétricos compactos de rango un e os seus duais non compactos a partir do seu grupo de holonomía e a súa expresión para as curvaturas totais.

Agora ben, se unha variedade de Riemann ten como grupo de holonomía un subgrupo de $Spin(9)$, ela mesma é localmente isométrica a unha variedade plana de dimensión 16, ó plano de Cayley ou ó seu dual non compacto [14]. Esta é a razón pola cal non incluiremos ó Plano de Cayley nas caracterizacións que realizaremos a continuación.

3.1.1 Variedades de curvatura seccional constante

Sexa (M^n, g) , $n \geq 2$, unha variedade de Riemann.

Se Σ_m é un plano xerado por dous vectores linearmente independentes $X, Y \in T_m M$, definimos a *curvatura seccional* de Σ_m como

$$K(\Sigma_m) = K(X, Y) = \frac{R_{XYXY}}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

Pódese ver que, en efecto, esta definición non depende da base eleixida do plano Σ_m . Por outra banda, a curvatura seccional dun plano tanxente corresponde coa curvatura de Gauss no punto m da superficie obtida dentro da variedade ó proxectar o plano Σ_m pola aplicación exponencial.

Se $K(\Sigma_m)$ é constante para todos os planos $\Sigma_m \subset T_m M$ e para todos os puntos $m \in M$, M dise un *espacio de curvatura seccional constante* ou unha *forma espacial real*. Ademais, un Lema de Schur establece que, se a curvatura seccional dunha variedade Riemanniana conexa de dimensión maior ou igual ca tres é puntualmente constante, entón a variedade ten curvatura seccional constante.

Proposición 3.1.2 *Sexa (M^n, g) , $n \geq 2$, unha variedade Riemanniana conexa de curvatura seccional constante λ . Entón o tensor de curvatura de Riemann vén dado por*

$$R_{XY}Z = \lambda \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\}$$

Reciprocamente, unha variedade cun tensor de curvatura como o anterior ten curvatura seccional constante λ .

En [1] podemos atopar o útil resultado seguinte que caracteriza as variedades de curvatura seccional constante en termos de certas relacións entre os invariantes escalares de segunda orde. Véxase tamén [7].

Proposición 3.1.3 [7] *Para calquera variedade de Riemann M^n , con $n > 2$ temos que*

$$\|R\|^2 \geq \frac{2}{n-1} \|\rho\|^2, \quad \|R\|^2 \geq \frac{2}{n(n-1)} \tau^2$$

con igualdade se e só se M ten curvatura seccional constante.

Se (M^n, g) é un espacio de curvatura constante λ , o operador de Jacobi redúcese a

$$R_\gamma = \lambda I$$

de xeito que así, a ecuación de Jacobi (1.11) toma a forma simple:

$$(3.5) \quad X'' + \lambda X = 0$$

sendo X ortogonal a γ' . Con respecto a unha base ortonormal paralela ó longo de γ , $\{E_1 = \gamma', E_2, \dots, E_n\}$, esta ecuación diferencial pode ser resolta facilmente mediante a teoría xeral de ecuacións diferenciais, chegándose a que:

$$X(t) = \begin{cases} \sum_{i=2}^n (A_i \cos t\sqrt{\lambda} + B_i \sin t\sqrt{\lambda}) E_i(t) & \text{se } \lambda > 0 \\ \sum_{i=2}^n (A_i t + B_i) E_i(t) & \text{se } \lambda = 0 \\ \sum_{i=2}^n (A_i \cosh t\sqrt{-\lambda} + B_i \sinh t\sqrt{-\lambda}) E_i(t) & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

As fórmulas dos tensores que utilizaremos son agora fáciles de derivar a partir das expresións anteriores, podéndoas obter dun xeito completo. Así, a segunda forma fundamental dunha esfera xeodésica vén dada, en virtude de (3.2) por:

$$(3.6) \quad \sigma = c g$$

onde g é a métrica inducida na esfera, que denotaremos coa mesma letra, e

$$c = \begin{cases} \sqrt{\lambda} \cot r\sqrt{\lambda} & \text{se } \lambda > 0 \\ \frac{1}{r^2} & \text{se } \lambda = 0 \\ \sqrt{-\lambda} \coth r\sqrt{-\lambda} & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

Empregando (3.4), chégase a que

$$(3.7) \quad \theta_m = \begin{cases} \left(\frac{\sin r\sqrt{\lambda}}{r\sqrt{\lambda}} \right)^{n-1} & \text{se } \lambda > 0 \\ 1 & \text{se } \lambda = 0 \\ \left(\frac{\sinh r\sqrt{-\lambda}}{r\sqrt{-\lambda}} \right)^{n-1} & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

Combinando (1.9), (3.6) e a Proposición 3.1.2, obtemos o tensor de curvatura na esfera. Contraendo segundo a definición (1.1) tamén se obtén o tensor de Ricci:

$$(3.8) \quad \tilde{R}_{XYZW} = \tilde{c} \{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)\}$$

$$(3.9) \quad \tilde{\rho} = (n-2)\tilde{c}g$$

sendo X, Y, Z, W campos de vectores en $G_m(r)$, e $\tilde{c} = \lambda + c^2$, é dicir,

$$\tilde{c} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\sin^2 r\sqrt{\lambda}} & \text{se } \lambda > 0 \\ \frac{1}{r^2} & \text{se } \lambda = 0 \\ \frac{-\lambda}{\sinh^2 r\sqrt{-\lambda}} & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

Volvendo a contraer en (3.9) obtemos

$$(3.10) \quad \tilde{\tau} = (n-1)(n-2)\tilde{c}$$

Unha vez que coñecemos todos os tensores de curvatura, podemos deducir expresións explícitas para as curvaturas totais de esferas xeodésicas. Empezamos coa curvatura escalar cuadrática total (compárese este resultado co obtido en [7]).

Lema 3.1.4 *Sexa $G_m(r)$ a esfera xeodésica centrada en $m \in M$ de radio r nunha variedade de curvatura seccional constante λ . Entón:*

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \tilde{\tau}^2 &= c_{n-1} (n-1)^2 (n-2)^2 \left(\frac{\sin r\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right)^{n-5}, & \text{se } \lambda > 0 \\ \int_{G_m(r)} \tilde{\tau}^2 &= c_{n-1} (n-1)^2 (n-2)^2 \left(\frac{\sinh r\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{-\lambda}} \right)^{n-5}, & \text{se } \lambda < 0 \\ \int_{G_m(r)} \tilde{\tau}^2 &= c_{n-1} (n-1)^2 (n-2)^2 r^{n-5}, & \text{se } \lambda = 0 \end{aligned}$$

Demostración.

Elevando (3.10) ó cadrado e multiplicando pola función de densidade (3.7) obtemos unha expresión que non depende da dirección radial elixida. Por tanto, só hai que integrar unha función que é constante na esfera, o cal supón multiplicar esta por $c_{n-1} r^{n-1}$. Este cálculo directo leva ó resultado que buscabamos. \square

O seguinte lema é consecuencia da expresión explícita para o tensor de curvatura de Ricci.

Lema 3.1.5 *Sexa $G_m(r)$ a esfera xeodésica centrada en $m \in M$ de radio r nunha variedade de curvatura seccional constante λ . Entón:*

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 &= c_{n-1} (n-1) (n-2)^2 \left(\frac{\sin r\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right)^{n-5}, & \text{se } \lambda > 0 \\ \int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 &= c_{n-1} (n-1) (n-2)^2 \left(\frac{\sinh r\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{-\lambda}} \right)^{n-5}, & \text{se } \lambda < 0 \end{aligned}$$

$$\int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 = c_{n-1} (n-1) (n-2)^2 r^{n-5}, \quad \text{se } \lambda = 0$$

Demostración.

A igualdade (3.9) dinos en particular que o tensor de Ricci é un múltiplo da matriz identidade, e por tanto, a súa norma cuadrática non é máis ca elevar ó cadrado o seu elemento diagonal e multiplicar por $(n-1)$, isto é,

$$\|\tilde{\rho}\|^2 = (n-1)(n-2)^2 \tilde{c}^2$$

resultado que tamén é evidente se empregamos a Proposición 1.1.2.

Multiplicando pola densidade (3.7) e de novo observando que o resultado non depende da dirección elexida, obtense inmediatamente o resultado. \square

Lema 3.1.6 *Sexa $G_m(r)$ a esfera xeodésica centrada en $m \in M$ de radio r nunha variedade de curvatura seccional constante λ . Entón:*

$$\int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 = 2 c_{n-1} (n-1) (n-2) \left(\frac{\sin r \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right)^{n-5}, \quad \text{se } \lambda > 0$$

$$\int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 = 2 c_{n-1} (n-1) (n-2) \left(\frac{\sinh r \sqrt{-\lambda}}{\sqrt{-\lambda}} \right)^{n-5}, \quad \text{se } \lambda < 0$$

$$\int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 = 2 c_{n-1} (n-1) (n-2) r^{n-5}, \quad \text{se } \lambda = 0$$

Demostración.

A ecuación (3.8) expresa o feito de que as esferas xeodésicas nunha variedade de curvatura constante son tamén de curvatura seccional constante. É fácil deducir, utilizando por exemplo a Proposición 3.1.3, que

$$\|\tilde{R}\|^2 = 2(n-1)(n-2)\tilde{c}^2$$

de xeito que así só resta multiplicar pola función densidade de volume (3.7) e observar que, de novo, o resultado non depende da dirección. \square

3.1.2 Variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante

Unha variedade $2n$ -dimensional dirase unha *variedade complexa* cando sobre ela sexa posible construír un sistema de coordenadas complexas, isto é, un atlas de homeomorfismos valuados en \mathbb{C}^n de tal xeito que os cambios de coordenadas sexan funcións holomorfas. Tal condición supón unha redución do grupo estrutural da variedade ó grupo linear complexo $Gl(n, \mathbb{C})$. Así, unha variedade dirase unha *variedade case complexa* se o seu grupo de estrutura admite unha redución a $Gl(n, \mathbb{C})$. Tal redución é equivalente á existencia dun campo de tensores J de tipo $(1, 1)$ de tal xeito que $J^2 = -I$. Este chamarase *estructura case complexa*, e o par (M, J) , *variedade case complexa*.

A existencia dunha estrutura case complexa non permite, en xeral, asegurar que unha variedade é unha variedade complexa. De feito, unha condición necesaria e suficiente para que isto ocorra é que se anule o tensor de Nijenhuis [21], é dicir, $[J, J] = 0$, sendo

$$[J, J](X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y].$$

En tal caso, dirase que J é unha *estructura complexa* e que (M, J) é unha *variedade complexa*.

Dicimos que unha métrica de Riemann g en (M, J) é unha *métrica case hermítica* se $g(JX, JY) = g(X, Y)$, para calquera campos de vectores X, Y en M . Agora, o triple (M, g, J) chámase *variedade case hermítica*.

Nunha variedade case hermítica defínese a *forma de Kähler* como

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY),$$

que é unha 2-forma non dexenerada. Dise que (g, J) é unha *estructura Kähler* se J é unha estrutura complexa e a 2-forma de Kähler asociada é pechada. A expresión

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) = -3d\Omega(X, Y, Z) + 3d\Omega(X, JY, JZ) + g(JX, [J, J](Y, Z))$$

permite caracterizar as variedades Kähler mediante a propiedade $\nabla J = 0$.

Debido a esta última caracterización, podemos obter as *identidades de Kähler* do tensor de curvatura:

$$R(X, Y, JZ, JW) = R(JX, JY, Z, W) = R(X, Y, Z, W)$$

$$\rho(JX, JY) = \rho(X, Y)$$

para X, Y, Z, W campos de vectores arbitrarios. Esta condición é fortemente restrictiva, xa que, por exemplo, unha variedade Kähler de curvatura seccional constante de dimensión complexa maior ca 1 é necesariamente plana. Isto significa que o estudo da curvatura

seccional non é moi interesante no caso das variedades Kähler, razón pola cal se introduce o concepto moito máis convinte de curvatura seccional holomorfa.

A *curvatura seccional holomorfa* determinada por X é, por definición, a curvatura seccional do plano xerado por $\{X, JX\}$, e denotarase $H(X)$.

Se $H(X)$ é constante para todo $X \in T_m M$ e todo $m \in M$, a variedade dirase un *espacio de curvatura seccional holomorfa constante* ou unha *forma espacial complexa*. Un análogo do Lema de Schur establece que para que a curvatura seccional holomorfa sexa constante nunha variedade Kähler conexas, é suficiente con que sexa puntualmente constante.

Proposición 3.1.7 *Sexa $(M^{2n}, g, J), n \geq 2$, unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ . Entón o tensor de curvatura vén dado por*

$$R_{XYZ} = \frac{\mu}{4} \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X \\ + g(JX, Z)JY - g(JY, Z)JX + 2g(JX, Y)JZ\}$$

Reciprocamente, unha variedade Kähler cun tensor de curvatura como o anterior ten curvatura seccional holomorfa constante μ .

De novo é posible caracterizar as variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante en termos de certas relacións entre os invariantes escalares de segunda orde.

Proposición 3.1.8 [7] *Se M é unha variedade Kähler de dimensión complexa n ,*

$$\|R\|^2 \geq \frac{4}{n+1} \|\rho\|^2$$

con igualdade se e só se M ten curvatura seccional holomorfa constante.

Se (M^{2n}, g, J) é unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ , o operador de Jacobi é

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{4} I_{2n-2} \end{pmatrix}$$

Así, a ecuación de Jacobi (1.11) escríbese como:

$$(3.11) \quad X'' + \frac{\mu}{4} (X + 3g(J\gamma', X)J\gamma') = 0$$

sendo X ortogonal a γ' .

Nunha variedade Kähler sempre é posible construír unha *J-base*, é dicir, unha base ortonormal da forma $\{e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n\}$. Ademais, en virtude do paralelismo da estrutura case complexa, tal base pode desplazarse paralelamente ó longo dunha xeodésica

resultando unha J-base paralela $\{E_1, JE_1, \dots, E_n, JE_n\}$.

Con respecto a unha J-base como a anterior, a ecuación diferencial de Jacobi resultante pode ser resolta exactamente:

$$X(t) = \begin{cases} \left(C_1 \cos t \frac{\sqrt{\mu}}{2} + D_1 \sin t \frac{\sqrt{\mu}}{2} \right) JE_1(t) \\ \quad + \sum_{i=2}^n (A_i \cos t \sqrt{\mu} + B_i \sin t \sqrt{\mu}) E_i(t) \\ \quad + \sum_{i=2}^n (C_i \cos t \sqrt{\mu} + D_i \sin t \sqrt{\mu}) JE_i(t) & \text{se } \mu > 0 \\ \left(C_1 \cosh t \frac{\sqrt{-\mu}}{2} + D_1 \sinh t \frac{\sqrt{-\mu}}{2} \right) JE_1(t) \\ \quad + \sum_{i=2}^n (A_i \cosh t \sqrt{-\mu} + B_i \sinh t \sqrt{-\mu}) E_i(t) \\ \quad + \sum_{i=2}^n (C_i \cosh t \sqrt{-\mu} + D_i \sinh t \sqrt{-\mu}) JE_i(t) & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$

A partir das fórmulas xerais anteriores pódense de novo derivar as expresións exactas de todos os campos de tensores considerados na esfera.

Mediante (3.2) deducimos que a segunda forma fundamental dunha esfera xeodésica vén dada por:

$$(3.12) \quad \sigma = a g + b \eta \otimes \eta$$

onde g é a métrica inducida na esfera, que denotaremos coa mesma letra, η é a 1-forma dual de $J\gamma'$, é dicir, $\eta(X) = g(X, J\gamma'(r))$, $X \in T_{\gamma(r)}G_m(r)$ e os coeficientes a e b veñen dados por

$$a = \begin{cases} \frac{\sqrt{\mu}}{2} \cot r \frac{\sqrt{\mu}}{2} & \text{se } \mu > 0 \\ \frac{\sqrt{-\mu}}{2} \coth r \frac{\sqrt{-\mu}}{2} & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\mu}}{2} \tan r \frac{\sqrt{\mu}}{2} & \text{se } \mu > 0 \\ \frac{\sqrt{-\mu}}{2} \tanh r \frac{\sqrt{-\mu}}{2} & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$

Agora, se empregamos (3.4), é sinxelo calcular a función densidade de volume para variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante.

$$(3.13) \quad \theta_m = \begin{cases} \cos r \frac{\sqrt{\mu}}{2} \left(\frac{2 \sin r \frac{\sqrt{\mu}}{2}}{r \sqrt{\mu}} \right)^{2n-1} & \text{se } \mu > 0 \\ \cosh r \frac{\sqrt{-\mu}}{2} \left(\frac{2 \sinh r \frac{\sqrt{-\mu}}{2}}{r \sqrt{-\mu}} \right)^{2n-1} & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$

Combinando (1.9), (3.12) e a Proposición 3.1.7 obtemos o tensor de curvatura na esfera.

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_{XYZW} = & \left(\frac{\mu}{4} + a^2 \right) \{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)\} \\
 & + \frac{\mu}{4} \{g(JX, Z)g(JY, W) - g(JY, Z)g(JX, W) \\
 (3.14) \quad & + 2g(JX, Y)g(JZ, W)\} \\
 & + ab \{g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) + g(Y, W)\eta(X)\eta(Z) \\
 & - g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) - g(Y, Z)\eta(X)\eta(W)\}
 \end{aligned}$$

sendo X, Y, Z, W campos de vectores en $G_m(r)$.

Contraendo a anterior expresión,

$$(3.15) \quad \tilde{\rho} = \tilde{a}g + \tilde{b}\eta \otimes \eta$$

onde

$$\begin{aligned}
 \tilde{a} &= (n-2)a^2 + (n+1)\frac{\mu}{4} + ab \\
 \tilde{b} &= (n-3)ab - \frac{3\mu}{4}
 \end{aligned}$$

Contraendo unha vez máis en (3.15),

$$\begin{aligned}
 \tilde{\tau} &= (2n-1)\tilde{a} + \tilde{b} \\
 &= (n-1) \{2(2n-1)a^2 + (n+1)\mu + 4ab\}
 \end{aligned}$$

Substituíndo os valores de a e b segundo o signo da curvatura seccional holomorfa, chegamos, despois dalgúns cálculos, a que

$$(3.16) \quad \tilde{\tau} = \begin{cases} 2(n-1) \left(\frac{\sqrt{\mu}}{2 \sin r \frac{\sqrt{\mu}}{2}} \right)^2 \left(2n-1 + \sin^2 r \frac{\sqrt{\mu}}{2} \right) & \text{se } \mu > 0 \\ 2(n-1) \left(\frac{\sqrt{-\mu}}{2 \sinh r \frac{\sqrt{-\mu}}{2}} \right)^2 \left(2n-1 - \sinh^2 r \frac{\sqrt{-\mu}}{2} \right) & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$

Agora que coñecemos todos os tensores de curvatura, podemos deducir as expresións explícitas das curvaturas totais das esferas xeodésicas. Empezaremos pola curvatura escalar cuadrática total. O correspondente resultado para a curvatura escalar total pode atoparse en [7].

Lema 3.1.9 *Sexa $G_m(r)$ a esfera xeodésica centrada en $m \in M$ de radio r nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ . Entón:*

$$\int_{G_m(r)} \tilde{\tau}^2 = 4c_{2n-1}(n-1)^2 \left(2n-1 + \sin^2 \frac{r\sqrt{\mu}}{2} \right)^2 \cdot \cos \frac{r\sqrt{\mu}}{2} \left(\frac{2 \sin \frac{r\sqrt{\mu}}{2}}{\sqrt{\mu}} \right)^{2n-5}, \quad \text{se } \mu > 0$$

$$\int_{G_m(r)} \tilde{\tau}^2 = 4c_{2n-1}(n-1)^2 \left(2n-1 - \sinh^2 \frac{r\sqrt{-\mu}}{2} \right)^2 \cdot \cosh \frac{r\sqrt{-\mu}}{2} \left(\frac{2 \sinh \frac{r\sqrt{-\mu}}{2}}{\sqrt{-\mu}} \right)^{2n-5}, \quad \text{se } \mu < 0$$

Demostración.

Tómese a ecuación (3.16) e elévese ó cadrado. O resultado hai que multiplicalo pola función de densidade (3.13) e integralo nunha esfera. Pero como tal resultado non depende da dirección elixida, a función resultante é constante, e por tanto, só hai que multiplicar o obtido polo volume da esfera, que é, $c_{2n-1} r^{2n-1}$. A fórmula acadada despois de facer os cálculos é o que afirma o lema. \square

Empregando as expresións explícitas dos tensores de Ricci e de curvatura dunha esfera xeodésica nunha variedade Kähler deducimos os dous seguintes lemas.

Lema 3.1.10 *Sexa $G_m(r)$ a esfera xeodésica centrada en $m \in M$ de radio r nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ . Entón:*

$$\int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 = 4c_{2n-1}(n-1) \left((n-1)(2n-1) + 2(n-1) \sin^2 \frac{r\sqrt{\mu}}{2} + (n+1) \sin^4 \frac{r\sqrt{\mu}}{2} \right)^2 \cos \frac{r\sqrt{\mu}}{2} \left(\frac{2 \sin \frac{r\sqrt{\mu}}{2}}{\sqrt{\mu}} \right)^{2n-5}, \quad \text{se } \mu > 0,$$

$$\int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 = 4c_{2n-1}(n-1) \left((n-1)(2n-1) - 2(n-1) \sinh^2 \frac{r\sqrt{-\mu}}{2} + (n+1) \sinh^4 \frac{r\sqrt{-\mu}}{2} \right)^2 \cosh \frac{r\sqrt{-\mu}}{2} \left(\frac{2 \sinh \frac{r\sqrt{-\mu}}{2}}{\sqrt{-\mu}} \right)^{2n-5}, \quad \text{se } \mu < 0.$$

Demostración.

A expresión (3.15) indica que o tensor de Ricci é un tensor de tipo (0,2) representado por unha matriz diagonal. Por tanto, calcular a súa norma non é máis que sumar os cadrados dos elementos da súa diagonal, é dicir,

$$\|\tilde{\rho}\|^2 = (\tilde{a} + \tilde{b})^2 + 2(n-1)\tilde{a}^2$$

Substituíndo os valores de \tilde{a} e \tilde{b} segundo o signo da curvatura seccional holomorfa, obtemos, despois de empregar algunhas identidades trigonométricas ben coñecidas, que

$$\|\tilde{\rho}\|^2 = \begin{cases} 4(n-1) \left(\frac{\sqrt{\mu}}{2 \sin r \frac{\sqrt{\mu}}{2}} \right)^4 ((n-1)(2n-1) \\ \quad + 2(n-1) \sin^2 r \frac{\sqrt{\mu}}{2} + (n+1) \sin^4 r \frac{\sqrt{\mu}}{2}) & \text{se } \mu > 0 \\ 4(n-1) \left(\frac{\sqrt{-\mu}}{2 \sinh r \frac{\sqrt{-\mu}}{2}} \right)^4 ((n-1)(2n-1) \\ \quad - 2(n-1) \sinh^2 r \frac{\sqrt{-\mu}}{2} + (n+1) \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\mu}}{2}) & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$

Como en demostracións anteriores, multiplicamos esta función pola función de densidade de volume (3.13) e integramos na esfera a función independente da dirección resultante. Isto só é multiplicar polo volume da esfera correspondente. \square

Lema 3.1.11 *Sexa $G_m(r)$ a esfera xeodésica centrada en $m \in M$ de radio r nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ . Entón:*

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 &= 4c_{2n-1} (n-1) \left(2n-1 + 2 \sin^2 \frac{r\sqrt{\mu}}{2} \right. \\ &\quad \left. + (6n-1) \sin^4 \frac{r\sqrt{\mu}}{2} \right) \cosh \frac{r\sqrt{\mu}}{2} \left(\frac{2 \sinh \frac{r\sqrt{\mu}}{2}}{\sqrt{\mu}} \right)^{2n-5}, \quad \text{se } \mu > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 &= 4c_{2n-1} (n-1) \left(2n-1 - 2 \sinh^2 \frac{r\sqrt{-\mu}}{2} \right. \\ &\quad \left. + (6n-1) \sinh^4 \frac{r\sqrt{-\mu}}{2} \right) \cosh \frac{r\sqrt{-\mu}}{2} \left(\frac{2 \sinh \frac{r\sqrt{-\mu}}{2}}{\sqrt{-\mu}} \right)^{2n-5}, \quad \text{se } \mu < 0. \end{aligned}$$

Demostración.

Para calcular $\|\tilde{R}\|^2$ tomaremos unha J-base $\{E_1 = \gamma', JE_1, \dots, E_n, JE_n\}$. Un cálculo inmediato lévanos a que

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}\|^2 &= \sum_{i,j,k,l=1}^n \tilde{R}_{JiJjJkJl}^2 + 4 \sum_{i,j,k=1}^n \sum_{l=2}^n \tilde{R}_{JiJjJkl}^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n \sum_{k,l=2}^n \tilde{R}_{JiJjkl}^2 \\ &+ 4 \sum_{i,k=1}^n \sum_{j,l=2}^n \tilde{R}_{JijJkl}^2 + 4 \sum_{i=1}^n \sum_{j,k,l=2}^n \tilde{R}_{Jijkl}^2 + \sum_{i,j,k,l=2}^n \tilde{R}_{ijkl}^2 \end{aligned}$$

Empregando (3.14) e tendo en conta que $\eta(e_i) = \langle Je_1, e_i \rangle = 0$ e $\eta(Je_i) = \langle Je_1, Je_i \rangle = \delta_{1i}$, temos as expresións:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{JiJjJkJl} &= \left(\frac{\mu}{4} + a^2\right) (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + ab (\delta_{ik}\delta_{1j}\delta_{1l} + \delta_{jl}\delta_{1i}\delta_{1k} - \delta_{il}\delta_{1j}\delta_{1k} - \delta_{jk}\delta_{1i}\delta_{1l}) \\ \tilde{R}_{JiJjJkl} &= 0 \\ \tilde{R}_{JiJjkl} &= \frac{\mu}{4} (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il}) \\ \tilde{R}_{JijJkl} &= \left(\frac{\mu}{4} + a^2\right) \delta_{ik}\delta_{jl} + \frac{\mu}{4} (\delta_{jk}\delta_{il} + 2\delta_{ij}\delta_{kl}) + ab \delta_{jl}\delta_{1i}\delta_{1k} \\ \tilde{R}_{Jijkl} &= 0 \\ \tilde{R}_{ijkl} &= \left(\frac{\mu}{4} + a^2\right) (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned}$$

de xeito que realizando os cálculos, e de novo substituíndo polos valores de a e b segundo o valor correspondente da curvatura holomorfa, chegamos, despois de aplicar relacións trigonométricas elementais, ó seguinte resultado:

$$\|\tilde{R}\|^2 = \begin{cases} 4(n-1) \left(\frac{\sqrt{\mu}}{2 \sin r \frac{\sqrt{\mu}}{2}}\right)^4 \left(2n-1 + 2 \sin^2 r \frac{\sqrt{\mu}}{2}\right) \\ \quad + (6n-1) \sin^4 r \frac{\sqrt{\mu}}{2} & \text{se } \mu > 0 \\ 4(n-1) \left(\frac{\sqrt{-\mu}}{2 \sinh r \frac{\sqrt{-\mu}}{2}}\right)^4 \left(2n-1 - 2 \sinh^2 r \frac{\sqrt{-\mu}}{2}\right) \\ \quad + (6n-1) \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\mu}}{2} & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$

Multiplicando pola función densidade de volume (3.13) e polo volume da esfera euclídea correspondente chégase ó resultado requerido. \square

3.1.3 Variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura Q-seccional constante

Unha *estructura case cuaterniónica* V sobre unha variedade diferenciable M é un subfibrado 3-dimensional do fibrado de endomorfismos do fibrado tanxente, xerado localmente por tres estruturas case complexas $\{J_1, J_2, J_3\}$ de xeito que

$$J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = -I$$

$$J_i J_j = -J_j J_i = J_k$$

onde (i, j, k) é unha permutación cíclica de $(1, 2, 3)$. A unha base como $\{J_1, J_2, J_3\}$ chámase unha *base adaptada*. O par (M, V) denomínase unha *variedade case cuaterniónica*. Se ademais existe unha conexión libre de torsión ∇ que deixa invariante a estrutura case cuaterniónica V , diremos que tal estrutura V é unha *estructura cuaterniónica* e que o par (M, V) é unha *variedade cuaterniónica*.

Unha métrica de Riemann g sobre M dise *hermítica* con respecto á estrutura case cuaterniónica V se

$$g(J_i X, J_i Y) = g(X, Y), \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

para calquera campos de vectores X, Y na variedade e calquera base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ de V . Neste caso dicimos que (g, V) é unha *estructura case cuaterniónica hermítica* e que (M, g, V) é unha *variedade case cuaterniónica hermítica*. Se alén disto, V é unha estrutura cuaterniónica con respecto á conexión de Levi-Civita determinada por g , o par (g, V) chámase *estructura cuaterniónica Kähler* e a terna (M, g, V) unha *variedade cuaterniónica Kähler*. Nótese que toda variedade case cuaterniónica ten como dimensión un múltiplo de 4.

Nunha variedade case cuaterniónica hermítica o caracter invariante do fibrado V pola conexión de Levi-Civita determinada por g é equivalente a que

$$\begin{aligned} \nabla_X J_1 &= r(X)J_2 - q(X)J_3 \\ \nabla_X J_2 &= -r(X)J_1 + p(X)J_3 \\ \nabla_X J_3 &= q(X)J_1 - p(X)J_2 \end{aligned}$$

para calquera campo de vectores X e calquera base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$, e sendo p, q, r 1-formas locais.

Definimos unha *Q-sección* nun punto $m \in M$ determinada por un $u \in T_m M$ non nulo, como o menor subespacio non trivial de $T_m M$ que contén a u e é invariante baixo todos os tensores de V . Por tanto, unha Q-sección en $m \in M$ determinada por $u \in T_m M$ é do tipo:

$$Q_m(u) = \{a_0u + a_1J_1u + a_2J_2u + a_3J_3u : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

Dicimos que unha variedade cuaterniónica Kähler ten *curvatura Q-seccional constante* en m con respecto de u , se todos os planos de $Q_m(u)$ teñen a mesma curvatura seccional constante. Unha *variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante* ou unha *forma espacial cuaterniónica* é unha variedade cuaterniónica Kähler que ten curvatura Q-seccional constante con respecto de todos os puntos e todas as direccións. Como anteriormente, tamén temos un análogo ó Lema de Schur: se a variedade ten dimensión maior ou igual ca oito, é suficiente para que teña curvatura Q-seccional constante, con que teña curvatura Q-seccional constante con respecto a todas as direccións en cada punto.

En dimensión catro, as variedades cuaterniónicas Kähler correspóndense coas variedades orientables, e a curvatura Q-seccional é constante se e só se o é a curvatura seccional. Cando a dimensión é maior ou igual ca 8, verifícanse dúas propiedades importantes [21]: por un lado, que a variedade é Einstein, e, en segundo lugar, que a curvatura seccional de tales variedades é constante se e só se é nula.

Este último feito motiva que só esteamos interesados en estudar a curvatura Q-seccional. O seguinte teorema caracteriza as variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura Q-seccional constante.

Proposición 3.1.12 *Sexa (M^{4n}, g, V) , $n \geq 2$, unha variedade cuaterniónica Kähler conexas con curvatura Q-seccional constante ν . Entón, o tensor de curvatura ten a forma:*

$$\begin{aligned} R_{XYZ} &= \frac{\nu}{4} \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\} \\ &+ \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^3 \{g(J_i X, Z)J_i Y - g(J_i Y, Z)J_i X + 2g(J_i X, Y)J_i Z\} \end{aligned}$$

para calquera base adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ do fibrado V . Reciprocamente, se o tensor de curvatura dunha variedade cuaterniónica Kähler é como o anterior, entón a variedade ten curvatura Q-seccional constante ν .

O seguinte resultado podemos atopalo en [7].

Proposición 3.1.13 *Se M é unha variedade cuaterniónica Kähler de dimensión real $4n$, entón*

$$\|R\|^2 \geq \frac{5n+1}{4n(n+2)^2} \tau^2$$

e a igualdade cúmplese se e só se M ten curvatura Q-seccional constante.

Antes de continuar mencionaremos un resultado que serve para simplificar de forma importante os cálculos que imos facer a partir de agora.

Lema 3.1.14 [12] *Sexa γ unha xeodésica nunha variedade cuaterniónica Kähler (M, g, V) e m un punto da xeodésica γ . Supoñamos $\{J_1, J_2, J_3\}$ unha base local adaptada de V nunha veciñanza de m . Para calquera matriz real $(a_{ij})_{i,j=1}^3$, existe unha base local adaptada $\{\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3\}$ de V ó longo da xeodésica, tal que:*

$$\begin{aligned}\bar{J}_i(m) &= (a_{1i} J_1 + a_{2i} J_2 + a_{3i} J_3)(m) \\ \nabla_{\gamma'} \bar{J}_i &= 0\end{aligned}$$

Podemos pois resumir o lema anterior dun xeito máis sinxelo para os nosos propósitos dicindo que existe unha base ortonormal paralela que se obtén por unha rotación apropiada da base $\{J_1, J_2, J_3\}$ ó longo de γ ,

$$\{E_1 = \gamma', J_1 E_1, J_2 E_1, J_3 E_1, \dots, E_n, J_1 E_n, J_2 E_n, J_3 E_n\}$$

á cal chamaremos *base adaptada ó longo da xeodésica γ* .

Supoñamos (M^{4n}, g, V) unha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante ν . Neste caso, o operador de Jacobi vén dado por:

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} \nu I_3 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{4} I_{4n-4} \end{pmatrix}$$

Tomando unha base adaptada ó longo das xeodésicas, podemos escribir a ecuación de Jacobi como:

$$(3.17) \quad X'' + \frac{\nu}{4} \left(X + 3 \sum_{i=1}^3 g(J_i \gamma', X) J_i \gamma' \right) = 0$$

sendo X ortogonal a γ' . Con esta elección de base e denotando $J_0 = I$, a ecuación diferencial resultante pode ser resolta exactamente para dar:

$$X(t) = \begin{cases} \begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 \left(A_i \cos t \frac{\sqrt{\nu}}{2} + B_i \sin t \frac{\sqrt{\nu}}{2} \right) J_i E_1(t) \\ &+ \sum_{i=0}^3 \sum_{j=2}^n (C_{ij} \cos t \sqrt{\nu} + D_{ij} \sin t \sqrt{\nu}) J_i E_j(t) \end{aligned} & \text{se } \nu > 0 \\ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 \left(A_i \cosh t \frac{\sqrt{-\nu}}{2} + B_i \sinh t \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \right) J_i E_1(t) \\ &+ \sum_{i=0}^3 \sum_{j=2}^n (C_{ij} \cosh t \sqrt{-\nu} + D_{ij} \sinh t \sqrt{-\nu}) J_i E_j(t) \end{aligned} & \text{se } \nu < 0 \end{cases}$$

A partir das fórmulas xerais anteriores poden de novo derivarse as expresións exactas de todos os tensores na esfera.

Mediante (3.2) deducimos que a segunda forma fundamental dunha esfera xeodésica vén dada por:

$$(3.18) \quad \sigma = a g + b \sum_{i=1}^3 \eta_i \otimes \eta_i$$

onde g é a métrica inducida na esfera e as η_i son as 1-formas duais de $J_i \gamma'$ definidas por $\eta_i(X) = g(X, J_i \gamma'(r))$ para $X \in T_{\gamma(r)} G_m(r)$. Ademais, os coeficientes a e b veñen dados por

$$a = \begin{cases} \frac{\sqrt{\nu}}{2} \cot r \frac{\sqrt{\nu}}{2} & \text{se } \nu > 0 \\ \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \coth r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} & \text{se } \nu < 0 \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} -\frac{\sqrt{\nu}}{2} \tan r \frac{\sqrt{\nu}}{2} & \text{se } \nu > 0 \\ \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \tanh r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} & \text{se } \nu < 0 \end{cases}$$

Agora, se empregamos (3.4), a función densidade de volume para variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura Q-seccional constante é

$$(3.19) \quad \theta_m = \begin{cases} \cos^3 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \left(\frac{2 \sin r \frac{\sqrt{\nu}}{2}}{r \sqrt{\nu}} \right)^{4n-1} & \text{se } \nu > 0 \\ \cosh^3 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \left(\frac{2 \sinh r \frac{\sqrt{-\nu}}{2}}{r \sqrt{-\nu}} \right)^{4n-1} & \text{se } \nu < 0 \end{cases}$$

Denotemos $T = \sum_{i=1}^3 \eta_i \otimes \eta_i$. Combinando (1.9), (3.18) e a Proposición 3.1.12 obtemos o tensor de curvatura na esfera.

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \tilde{R}_{XYZW} &= \left(\frac{\nu}{4} + a^2 \right) \{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)\} \\ &+ \frac{\nu}{4} \sum_{i=1}^3 \{g(J_i X, Z)g(J_i Y, W) - g(J_i Y, Z)g(J_i X, W) \\ &+ 2g(J_i X, Y)g(J_i Z, W)\} \\ &+ a b \sum_{i=1}^3 \{g(X, Z)\eta_i(Y)\eta_i(W) + g(Y, W)\eta_i(X)\eta_i(Z)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g(X, W)\eta_i(Y)\eta_i(Z) - g(Y, Z)\eta_i(X)\eta_i(W)\} \\
& +b^2 \{T(X, Z)T(Y, W) - T(X, W)T(Y, Z)\}
\end{aligned}$$

sendo X, Y, Z, W campos de vectores en $G_m(r)$.

Contraendo de novo,

$$(3.21) \quad \tilde{\rho} = \tilde{a}g + \tilde{b} \sum_{i=3}^3 \eta_i \otimes \eta_i$$

e onde

$$\begin{aligned}
\tilde{a} &= (n-2)a^2 + (n+7)\frac{\nu}{4} + 3ab \\
\tilde{b} &= (n-3)ab - \frac{3\nu}{4} + 2b^2
\end{aligned}$$

Contraendo unha vez máis en (3.21),

$$\tilde{\tau} = 3(\tilde{a} + \tilde{b}) + 4(n-1)\tilde{a}$$

Substituíndo os valores de \tilde{a} e \tilde{b} segundo o signo da curvatura Q -seccional, chegamos, despois dalgúns cálculos, a que

$$(3.22) \quad \tilde{\tau} = \begin{cases} 2 \left(\frac{\sqrt{\nu}}{2 \sin r \frac{\sqrt{\nu}}{2}} \right)^2 \left((2n-1)(4n-1) + 3(2n-1) \sin^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \right. \\ \quad \left. + 3 \sin^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \tan^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \right) & \text{se } \nu > 0 \\ 2 \left(\frac{\sqrt{-\nu}}{2 \sinh r \frac{\sqrt{-\nu}}{2}} \right)^2 \left((2n-1)(4n-1) - 3(2n-1) \sinh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \right. \\ \quad \left. + 3 \sinh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \tanh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \right) & \text{se } \nu < 0 \end{cases}$$

A utilización das anteriores expresións permitiranos, igual que nos outros espazos modelo, calcular explicitamente as fórmulas das curvaturas totais nas esferas xeodésicas.

O seguinte lema danos a curvatura escalar cuadrática total de esferas xeodésicas. O resultado correspondente á curvatura escalar total pode ser atopado en [7].

Lema 3.1.15 *Sexa $G_m(r)$ a esfera xeodésica centrada en $m \in M$ de radio r nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q -seccional constante ν . Entón:*

$$\int_{G_m(r)} \tilde{\tau}^2 = 4 \left((2n-1)(4n-1) + 3(2n-1) \sin^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \right. \\ \left. + 3 \sin^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \tan^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \right)^2 \cos^3 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \left(\frac{2 \sin r \frac{\sqrt{\nu}}{2}}{\sqrt{\nu}} \right)^{4n-5}$$

se $\nu > 0$, e

$$\int_{G_m(r)} \tilde{\tau}^2 = 4 \left((2n-1)(4n-1) - 3(2n-1) \sinh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \right. \\ \left. + 3 \sinh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \tanh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \right)^2 \cosh^3 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \left(\frac{2 \sinh r \frac{\sqrt{-\nu}}{2}}{\sqrt{-\nu}} \right)^{4n-5}$$

se $\nu < 0$.

Demostración.

As ecuacións (3.22) e (3.19) dannos unha expresión explícita da curvatura escalar e da densidade de volume respectivamente. Cada unha delas, e por tanto o seu produto, é independente de direccións radiais, polo que, ó integrar nunha esfera só hai que multiplicar polo volume da esfera euclídea da mesma dimensión e do mesmo radio: $c_{4n-1} r^{4n-1}$. Este produto, é o resultado que garantiza o lema. \square

Os dous lemas que seguen realizan o cálculo explícito para a norma cuadrática total do tensor de curvatura e a norma cuadrática total do tensor de Ricci. As expresións finais gardan un certo grao de analogía con aquelas obtidas para as variedades Kähler, se ben, neste caso, os cálculos son bastante máis laboriosos e aparecen pequenas dificultades adicionais polo feito de haber máis dunha estrutura complexa.

Lema 3.1.16 *Sexa $G_m(r)$ a esfera xeodésica centrada en $m \in M$ de radio r nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante ν . Entón:*

$$\int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 = 4 c_{4n-1} \left((2n-1)^2 (4n-1) \right. \\ \left. + 6(2n-1)^2 \sin^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} + 3(4n^2 + 4n - 5) \sin^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \right. \\ \left. + 12 \sin^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \tan^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} + 3 \sin^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \tan^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \right) \\ \cos^3 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \left(\frac{2 \sin r \frac{\sqrt{\nu}}{2}}{\sqrt{\nu}} \right)^{4n-5}$$

se $\nu > 0$, e

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 &= 4c_{4n-1} ((2n-1)^2(4n-1) \\ &\quad -6(2n-1)^2 \sinh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} + 3(4n^2+4n-5) \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \\ &\quad -12 \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \tanh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} + 3 \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \tanh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2}) \\ &\quad \cosh^3 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \left(\frac{2 \sinh r \frac{\sqrt{-\nu}}{2}}{\sqrt{-\nu}} \right)^{4n-5} \end{aligned}$$

se $\nu < 0$.

Demostración.

A expresión (3.21) significa que o tensor de Ricci é un tensor de tipo (0,2) representado por unha matriz diagonal. Calcular a súa norma é, pois, sumar os cadrados dos elementos da súa diagonal, é dicir,

$$\|\tilde{\rho}\|^2 = 3(\tilde{a} + \tilde{b})^2 + 4(n-1)\tilde{a}^2$$

Substituíndo os valores de \tilde{a} e \tilde{b} segundo o signo da curvatura Q-seccional, obtemos, empregando algunhas identidades trigonométricas ben coñecidas, que

$$\|\tilde{\rho}\|^2 = \begin{cases} 4 \left(\frac{\sqrt{\nu}}{2 \sin r \frac{\sqrt{\nu}}{2}} \right)^4 ((2n-1)^2(4n-1) \\ \quad +6(2n-1)^2 \sin^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} + 3(4n^2+4n-5) \sin^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \\ \quad +12 \sin^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \tan^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} + 3 \sin^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \tan^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2}) & \text{se } \nu > 0 \\ 4 \left(\frac{\sqrt{-\nu}}{2 \sinh r \frac{\sqrt{-\nu}}{2}} \right)^4 ((2n-1)^2(4n-1) \\ \quad -6(2n-1)^2 \sinh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} + 3(4n^2+4n-5) \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \\ \quad -12 \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \tanh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} + 3 \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \tanh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2}) & \text{se } \nu < 0 \end{cases}$$

Resta só multiplicar a anterior expresión por aquela obtida en (3.19) para a densidade de volume e integrar na esfera a función independente da dirección resultante. \square

Lema 3.1.17 *Sexa $G_m(r)$ a esfera xeodésica centrada en $m \in M$ de radio r nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante ν . Entón:*

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 &= 4c_{4n-1} \left((2n-1)(4n-1) \right. \\ &\quad + 6(2n-1) \sin^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} + 3(6n-5)(4n-1) \sin^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \\ &\quad \left. + 12 \sin^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \tan^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} + 3 \sin^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \tan^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \right) \\ &\quad \cos^3 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \left(\frac{2 \sin r \frac{\sqrt{\nu}}{2}}{\sqrt{\nu}} \right)^{4n-5} \end{aligned}$$

se $\nu > 0$, e

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 &= 4c_{4n-1} \left((2n-1)(4n-1) \right. \\ &\quad - 6(2n-1) \sinh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} + 3(6n-5)(4n-1) \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \\ &\quad \left. - 12 \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \tanh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} + 3 \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \tanh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \right) \\ &\quad \cosh^3 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \left(\frac{2 \sinh r \frac{\sqrt{-\nu}}{2}}{\sqrt{-\nu}} \right)^{4n-5} \end{aligned}$$

se $\nu < 0$.

Demostación.

No cálculo de $\|\tilde{R}\|^2$ tomamos unha base adaptada ó longo da xeodésica como a considerada anteriormente. Isto significa que podemos descompoñer cada sumatorio noutros catro, cada un dos cales correspondente a considerar a estrutura $J_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ e sendo $J_0 = I$.

Organízanse os cálculos dun xeito bastante similar a como faciamos para as variedades Kähler (se ben neste caso, as contas, en certo sentido, aparecen por triplicado). Ademais, o último sumando de (3.20) involucra un termo que non tiña análogo en (3.14), aínda que o tratamento deste é relativamente simple. Despois de contraer o tensor de curvatura segundo a definición da norma cuadrática do tensor de curvatura e logo de longos cálculos, chégase ó seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}\|^2 &= 4(2n-1)(4n-1)a^4 + 48(2n-1)a^3b + 24(2n+1)a^2b^2 \\ &\quad + 48ab^3 + 12b^4 + 8(n+2)(2n-1)a^2b + 24(n+1)ab\nu \\ &\quad + 24b^2\nu + (20n^2 - 15n + 7)\nu^2 \end{aligned}$$

Substituímos os valores de a e b segundo o signo da curvatura Q-seccional e aplicamos algunhas identidades trigonométricas elementais para chegar despois dalgunhas simplificacións a que:

$$\|\tilde{R}\|^2 = \begin{cases} 4 \left(\frac{\sqrt{\nu}}{2 \sin r \frac{\sqrt{\nu}}{2}} \right)^4 \left((2n-1)(4n-1) \right. \\ \quad \left. + 6(2n-1) \sin^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} + 3(6n-5)(4n-1) \sin^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \right. \\ \quad \left. + 12 \sin^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \tan^2 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} + 3 \sin^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \tan^4 r \frac{\sqrt{\nu}}{2} \right) & \text{se } \nu > 0 \\ 4 \left(\frac{\sqrt{-\nu}}{2 \sinh r \frac{\sqrt{-\nu}}{2}} \right)^4 \left((2n-1)(4n-1) \right. \\ \quad \left. - 6(2n-1) \sinh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} + 3(6n-5)(4n-1) \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \right. \\ \quad \left. - 12 \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \tanh^2 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} + 3 \sinh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \tanh^4 r \frac{\sqrt{-\nu}}{2} \right) & \text{se } \nu < 0 \end{cases}$$

Como sempre, esta é unha función radial, o cal trivializa o feito de ter que integrála nunha esfera xeodésica. Así, despois de multiplicala pola densidade de volume (3.19) e polo volume da esfera euclídea correspondente, unhas pequenas simplificacións lévannos ó resultado establecido no enunciado do lema. \square

3.2 Caracterización dos espazos modelo

En [14] pretendíase levar a cabo a caracterización dos espazos modelo a partir do volume de pequenas esferas xeodésicas. Isto deu pé á conxectura de Gray-Vanhecke:

Se o volume de toda esfera xeodésica suficientemente pequena nunha variedade coincide co volume dunha esfera euclídea do mesmo radio, entón a variedade é plana.

No caso xeral, esta conxectura non foi resolta ata o de agora, aínda que si nun amplo número de casos particulares.

Analogamente, tamén se poden establecer conxecturas semellantes para o resto dos espazos modelo.

Intentos de obter caracterizacións similares mediante o uso de invariantes intrínsecos ou extrínsecos (curvatura escalar total, norma cuadrática total da segunda forma fundamental, etc.) foron igualmente infructuosas (ver [7], [12]). Só algúns resultados completos puideron ser acadados empregando máis dun invariante para a caracterización [7].

Cabe pois preguntarse se a conxetura pode ser resolta para os invariantes da curvatura de segunda orde. Como poremos de manifesto, tal caracterización é posible cando se emprega a norma cuadrática total do tensor de curvatura, ou, en dimensións baixas, coa norma cuadrática total do tensor de Ricci.

Outras caracterizacións son posibles utilizando combinacións de dous invariantes da curvatura, se ben, polo seu primordial interés, centrarémonos naquelas caracterizacións que só involucran un único invariante.

No que segue, todas as variedades serán de dimensión maior ou igual ca tres. Nas variedades de dimensión un, as pequenas esferas xeodésicas son pares de puntos illados, e nas variedades de dimensión dous, as pequenas esferas xeodésicas son variedades planas (pois son de dimensión un), co cal o estudio das curvaturas intrínsecas totais non nos aporta nada.

3.2.1 Variedades de curvatura seccional constante

A partir das fórmulas explícitas obtidas na Sección 3.1.1 podemos caracterizar, nun amplo número de casos xerais, as variedades de curvatura constante comparando ditas expresións explícitas cos desenrols en serie de potencias obtidos no Capítulo 2.

Teorema 3.2.1 *Sexa M unha variedade de Riemann de dimensión $n \neq 5$. Se en toda esfera xeodésica suficientemente pequena, $\int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2$ coincide coa dunha variedade de curvatura seccional constante λ , entón M ten curvatura seccional constante λ .*

Demostración.

Para unha variedade de curvatura constante, facendo o desenrolo en serie de Taylor no Lema 3.1.6:

$$(3.23) \quad \int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 = c_{n-1} r^{n-1} \left\{ \frac{2(n-1)(n-2)}{r^4} - \frac{(n-1)(n-2)(n-5)\lambda}{3r^2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-5)(5n-27)\lambda^2}{180} + O(r^2) \right\} (m)$$

Comparando (3.23) co Lema 2.5.2 obtemos que se $n \neq 5$,

$$\tau = n(n-1)\lambda$$

Substituíndo na fórmula do Lema 2.5.2:

$$\begin{aligned}
\int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 &= c_{n-1} r^{n-1} \left\{ \frac{2(n-1)(n-2)}{r^4} - \frac{(n-1)(n-2)(n-5)\lambda}{3r^2} \right. \\
&\quad + \frac{1}{n(n+2)} \left(\frac{59n^2 - 93n - 10}{60} \|R\|^2 + \frac{2(n^2 - 37n + 60)}{45} \|\rho\|^2 \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{n^2(n-1)^2(n^2 - 11n + 2)}{36} \lambda^2 \right) + O(r^2) \right\} (m) \\
&= c_{n-1} r^{n-1} \left\{ \frac{2(n-1)(n-2)}{r^4} - \frac{(n-1)(n-2)(n-5)\lambda}{3r^2} \right. \\
&\quad + \frac{59n^2 - 93n - 10}{60n(n+2)} \left(\|R\|^2 - \frac{2}{n-1} \|\rho\|^2 \right) \\
&\quad + \frac{4n^3 + 25n^2 + 109n - 270}{90n(n-1)(n+2)} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n} \tau^2 \right) \\
&\quad \left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-5)(5n-27)}{180} \lambda^2 + O(r^2) \right\} (m)
\end{aligned}$$

e volvendo a comparar con (3.23) deducimos que:

$$\begin{aligned}
\frac{59n^2 - 93n - 10}{60n(n+2)} \left(\|R\|^2 - \frac{2}{n-1} \|\rho\|^2 \right) \\
+ \frac{4n^3 + 25n^2 + 109n - 270}{90n(n-1)(n+2)} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n} \tau^2 \right) = 0
\end{aligned}$$

Agora ben, as funcións

$$\begin{aligned}
f(n) &= \frac{59n^2 - 93n - 10}{60n(n+2)} \\
g(n) &= \frac{4n^3 + 25n^2 + 109n - 270}{90n(n-1)(n+2)}
\end{aligned}$$

son positivas cando $n \geq 2$, de xeito que empregando as proposicións 1.1.2 e 3.1.3, deducimos que a variedade ten curvatura seccional constante. Por último, usando que $\tau = n(n-1)\lambda$ chégase a que a súa curvatura é precisamente λ . \square

No caso de dimensión 5, o resultado que se obtén non é tan forte, pero aínda así podemos caracterizar en gran medida as variedades de curvatura seccional constante.

En primeiro lugar, substituíndo nos lemas 3.1.4, 3.1.5 e 3.1.6 obtemos inmediatamente:

Proposición 3.2.2 *Se M é unha variedade de curvatura seccional constante de dimensión cinco entón:*

$$\int_{G_m(r)} \tilde{\tau}^2 = 144 c_4, \quad \int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 = 36 c_4, \quad \int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 = 24 c_4$$

A proposición anterior, en particular, significa que as integrais dos invariantes da curvatura de segunda orde nunha variedade de curvatura constante de dimensión 5 son independentes da súa curvatura. Dado que un espacio é de curvatura seccional constante se e só se as súas esferas xeodésicas son Einstein [7], a Observación 1.1.3 dinos que, esencialmente, as curvaturas totais dos invariantes de segunda orde en dimensión 5 para espacios de curvatura seccional constante só dependen da característica de Euler e por tanto constitúen un invariante topolóxico. En consecuencia, é imposible caracterizar a curvatura destas. Sen embargo, aínda así podemos obter o seguinte resultado.

Teorema 3.2.3 *Sexa M unha variedade de dimensión 5. Se a norma cuadrática total do tensor de curvatura de toda esfera xeodésica suficientemente pequena coincide coa dunha variedade de dimensión 5 de curvatura seccional constante, entón M ten curvatura seccional constante.*

Demostración.

Comparando (3.23) para o caso de dimensión 5, coa Proposición 3.2.2 séguese que:

$$\begin{aligned} 24 c_4 &= 24 c_4 + \frac{1}{35} \left(\frac{50}{3} \|R\|^2 - \frac{40}{9} \|\rho\|^2 - \frac{7}{9} \tau^2 \right) c_4 r^4 + O(r^6) \\ &= 24 c_4 + \frac{1}{35} \left\{ \frac{50}{3} \left(\|R\|^2 - \frac{1}{2} \|\rho\|^2 \right) + \frac{35}{9} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{5} \tau^2 \right) \right\} c_4 r^4 + O(r^6) \end{aligned}$$

de onde

$$\frac{50}{3} \left(\|R\|^2 - \frac{1}{2} \|\rho\|^2 \right) + \frac{35}{9} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{5} \tau^2 \right) = 0$$

Así que, utilizando as proposicións 1.1.2 e 3.1.3 chégase a que M ten curvatura seccional constante. \square

Nótese que o teorema anterior, como era previsible, non asegura que as dúas variedades teñan a mesma curvatura.

Para a norma cuadrática total do tensor de Ricci os resultados obtidos son esencialmente diferentes e só permiten responder afirmativamente en dimensións baixas. As demostracións obtéñense de xeito similar.

Teorema 3.2.4 *Sexa M unha variedade de Riemann de dimensión $n \in \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Se en toda esfera xeodésica suficientemente pequena, $\int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2$ coincide coa dunha variedade de curvatura seccional constante λ , entón M ten curvatura seccional constante λ .*

Demostración.

Para unha variedade de curvatura constante, desenrolando en serie de Taylor a fórmula do Lema 3.1.5:

$$(3.24) \quad \int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 = c_{n-1} r^{n-1} \left\{ \frac{(n-1)(n-2)^2}{r^4} - \frac{(n-1)(n-2)^2(n-5)\lambda}{6r^2} + \frac{(n-1)(n-2)^2(n-5)(5n-27)\lambda^2}{360} + O(r^2) \right\} (m)$$

Comparando (3.24) co Lema 2.4.2 obtemos que se $n \neq 5$,

$$\tau = n(n-1)\lambda$$

Substituíndo

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 &= c_{n-1} r^{n-1} \left\{ \frac{(n-1)(n-2)^2}{r^4} - \frac{(n-1)(n-2)^2(n-5)\lambda}{6r^2} \right. \\ &\quad + \frac{1}{n(n+2)} \left(-\frac{n^3 - 9n^2 - 16n - 20}{120} \|R\|^2 \right. \\ &\quad + \frac{n^3 + 31n^2 - 16n - 120}{45} \|\rho\|^2 \\ &\quad \left. \left. + \frac{n^2(n-1)^2(n^3 - 13n^2 - 16n + 44)}{72} \lambda^2 \right) + O(r^2) \right\} (m) \\ &= c_{n-1} r^{n-1} \left\{ \frac{(n-1)(n-2)^2}{r^4} - \frac{(n-1)(n-2)^2(n-5)\lambda}{6r^2} \right. \\ &\quad - \frac{n^3 - 9n^2 - 16n - 20}{120n(n+2)} \left(\|R\|^2 - \frac{2}{n-1} \|\rho\|^2 \right) \\ &\quad + \frac{4n^4 + 117n^3 - 161n^2 - 368n + 540}{180n(n-1)(n+2)} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n} \tau^2 \right) \\ &\quad \left. \left. + \frac{(n-1)(n-2)^2(n-5)(5n-27)}{360} \lambda^2 + O(r^2) \right\} (m) \end{aligned}$$

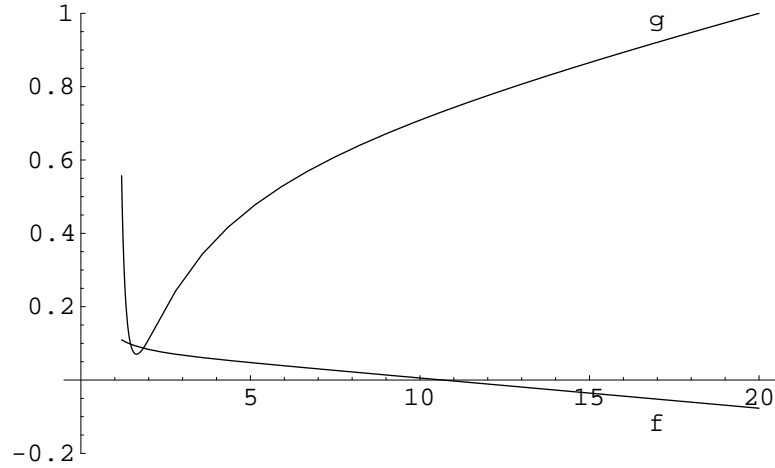


Figura 3.1: Representación gráfica das funcións f e g .

de onde,

$$-\frac{n^3 - 9n^2 - 16n - 20}{120n(n+2)} \left(\|R\|^2 - \frac{2}{n-1} \|\rho\|^2 \right) + \frac{4n^4 + 117n^3 - 161n^2 - 368n + 540}{180n(n-1)(n+2)} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n} \tau^2 \right) = 0$$

Agora ben, as funcións

$$f(n) = -\frac{n^3 - 9n^2 - 16n - 20}{120n(n+2)}$$

$$g(n) = \frac{4n^4 + 117n^3 - 161n^2 - 368n + 540}{180n(n-1)(n+2)}$$

son positivas cando $n \in \{3, \dots, 10\}$ (Figura 3.1), de xeito que empregando as proposicións 1.1.2 e 3.1.3, deducimos que a variedade ten curvatura seccional constante. Por último, usando que $\tau = n(n-1)\lambda$ chégase a que a súa curvatura é precisamente λ . \square

De maneira similar ó que sucedía para o caso da norma cuadrática total do tensor de curvatura, obtemos un resultado parcial en dimensión 5.

Teorema 3.2.5 *Sexa M unha variedade de dimensión 5. Se a norma cuadrática total do tensor de Ricci de toda esfera xeodésica suficientemente pequena coincide coa dunha variedade de dimensión 5 de curvatura seccional constante, entón M ten curvatura seccional constante.*

Demostración.

Comparando (3.24) para $n = 5$, coa Proposición 3.2.2 séguese que:

$$\begin{aligned} 36 c_4 &= 36 c_4 + \frac{1}{35} \left(\frac{5}{3} \|R\|^2 - \frac{140}{9} \|\rho\|^2 - \frac{59}{18} \tau^2 \right) c_4 r^4 + O(r^6) \\ &= 36 c_4 + \frac{1}{35} \left\{ \frac{5}{3} \left(\|R\|^2 - \frac{1}{2} \|\rho\|^2 \right) + \frac{295}{18} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{5} \tau^2 \right) \right\} c_4 r^4 + O(r^6) \end{aligned}$$

de onde,

$$\frac{5}{3} \left(\|R\|^2 - \frac{1}{2} \|\rho\|^2 \right) + \frac{295}{18} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{5} \tau^2 \right) = 0$$

Así que, utilizando as proposicións 1.1.2 e 3.1.3 chégase a que M ten curvatura seccional constante. \square

De novo, a Proposición 3.2.2 imposibilitáanos a determinar exactamente a curvatura.

3.2.2 Variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante

Neste apartado utilizaremos os resultados obtidos na Sección 3.1.2 para caracterizar as variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante.

Veremos que, de novo, a norma cuadrática total do tensor de curvatura caracteriza totalmente a estas, mentres que a norma cuadrática total do tensor de Ricci só serve para caracterizar os espazos de dimensión baixa.

O seguinte teorema proba a primeira de tales cuestións. A súa demostración é moi similar á anteriormente realizada para as variedades de curvatura seccional constante.

Teorema 3.2.6 *Sexa M unha variedade Kähler de dimensión complexa $n \neq 1$. Se en toda esfera xeodésica suficientemente pequena, $\int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2$ coincide coa dunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ , entón M ten curvatura seccional holomorfa constante μ .*

Demostración.

Para unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante, facendo o desenvolvemento en serie de Taylor no Lema 3.1.11:

$$(3.25) \quad \int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 = c_{2n-1} r^{2n-1} \left\{ \frac{4(n-1)(2n-1)}{r^4} - \frac{(n-1)(n+1)(2n-5)\mu}{3r^2} + \frac{(n-1)(10n^3 - 27n^2 + 491n - 90)\mu^2}{360} + O(r^2) \right\} (m)$$

Comparando (3.25) co Lema 2.5.2 (nótese que agora a dimensión real é $2n$) obtemos que,

$$\tau = n(n+1)\mu$$

Substituíndo na fórmula do Lema 2.5.2:

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 &= c_{2n-1} r^{2n-1} \left\{ \frac{4(n-1)(2n-1)}{r^4} - \frac{(n-1)(n+1)(2n-5)\mu}{3r^2} \right. \\ &\quad + \frac{1}{4n(n+2)} \left(\frac{236n^2 - 186n - 10}{60} \|R\|^2 + \frac{2(4n^2 - 74n + 60)}{45} \|\rho\|^2 \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n^2(n+1)^2(4n^2 - 22n + 2)}{36} \mu^2 \right) + O(r^2) \right\} (m) \\ &= c_{2n-1} r^{2n-1} \left\{ \frac{4(n-1)(2n-1)}{r^4} - \frac{(n-1)(n+1)(2n-5)\mu}{3r^2} \right. \\ &\quad + \frac{236n^2 - 186n - 10}{240n(n+2)} \left(\|R\|^2 - \frac{4}{n+1} \|\rho\|^2 \right) \\ &\quad + \frac{4n^3 + 284n^2 - 293n + 45}{90n(n+1)(n+2)} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n} \tau^2 \right) \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)(10n^3 - 27n^2 + 491n - 90)}{360} \mu^2 + O(r^2) \right\} (m) \end{aligned}$$

e volvendo a comparar con (3.25) deducimos que:

$$\begin{aligned} &\frac{236n^2 - 186n - 10}{240n(n+2)} \left(\|R\|^2 - \frac{4}{n+1} \|\rho\|^2 \right) \\ &\quad + \frac{4n^3 + 284n^2 - 293n + 45}{90n(n+1)(n+2)} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n} \tau^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Agora ben, as funcións

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{236n^2 - 186n - 10}{240n(n+2)} \\ g(n) &= \frac{4n^3 + 284n^2 - 293n + 45}{90n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

son positivas cando $n \geq 2$, de xeito que empregando as proposicións 1.1.2 e 3.1.8, deducimos que a variedade ten curvatura seccional holomorfa constante. Por último, como $\tau = n(n+1)\mu$ chégase a que a súa curvatura holomorfa é precisamente μ . \square

O resultado análogo para a norma cuadrática total do tensor de Ricci, é, como anteriormente, máis frouxo, podéndose só probar para dimensións baixas.

Teorema 3.2.7 *Sexa M unha variedade Kähler de dimensión complexa $n \in \{2, 3, 4, 5\}$. Se en toda esfera xeodésica suficientemente pequena, $\int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2$ coincide coa dunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ , entón M ten curvatura seccional holomorfa constante μ .*

Demostración.

Para unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante, facendo o desenvolvemento en serie de Taylor no Lema 3.1.10:

$$(3.26) \int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 = c_{2n-1} r^{2n-1} \left\{ \frac{4(n-1)^2(2n-1)}{r^4} - \frac{(n-1)^2(n+1)(2n-5)\mu}{3r^2} + \frac{(n-1)(10n^4 - 37n^3 - 22n^2 + 139n + 90)\mu^2}{360} + O(r^2) \right\} (m)$$

Comparando (3.26) co Lema 2.4.2 (de novo con dimensión real $2n$) obtemos que,

$$\tau = n(n+1)\mu$$

Substituíndo na fórmula do Lema 2.4.2:

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 &= c_{2n-1} r^{2n-1} \left\{ \frac{4(n-1)^2(2n-1)}{r^4} - \frac{(n-1)(n+1)(2n-5)\mu}{3r^2} \right. \\ &\quad + \frac{1}{4n(n+1)} \left(-\frac{8n^3 - 36n^2 - 32n - 20}{120} \|R\|^2 \right. \\ &\quad + \frac{8n^3 + 124n^2 - 32n - 120}{45} \|\rho\|^2 \\ &\quad \left. \left. + \frac{n^2(n+1)^2(8n^3 - 52n^2 - 32n + 44)}{72} \mu^2 \right) + O(r^2) \right\} (m) \\ &= c_{2n-1} r^{2n-1} \left\{ \frac{4(n-1)^2(2n-1)}{r^4} - \frac{(n-1)(n+1)(2n-5)\mu}{3r^2} \right. \\ &\quad - \frac{8n^3 - 36n^2 - 32n - 20}{480n(n+1)} \left(\|R\|^2 - \frac{4}{n+1} \|\rho\|^2 \right) \\ &\quad + \frac{4n^4 + 60n^3 + 73n^2 - 52n - 45}{90n(n+1)^2} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n} \tau^2 \right) \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)(10n^4 - 37n^3 - 22n^2 + 139n + 90)\mu^2}{360} \mu^2 + O(r^2) \right\} (m) \end{aligned}$$

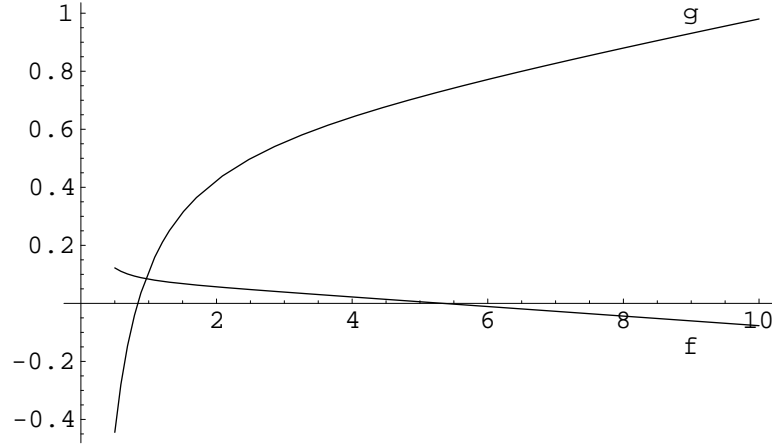


Figura 3.2: Representación gráfica das funcións f e g .

e volvendo a comparar con (3.26) deducimos que:

$$-\frac{8n^3 - 36n^2 - 32n - 20}{480n(n+1)} \left(\|R\|^2 - \frac{4}{n+1} \|\rho\|^2 \right) + \frac{4n^4 + 60n^3 + 73n^2 - 52n - 45}{90n(n+1)^2} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n} \tau^2 \right) = 0$$

Agora ben, as funcións

$$f(n) = -\frac{8n^3 - 36n^2 - 32n - 20}{480n(n+1)}$$

$$g(n) = \frac{4n^4 + 60n^3 + 73n^2 - 52n - 45}{90n(n+1)^2}$$

son positivas cando $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ (Figura 3.2), de xeito que empregando as proposicións 1.1.2 e 3.1.8, deducimos que a variedade ten curvatura seccional holomorfa constante. Por último, como $\tau = n(n+1)\mu$ chégase a que a súa curvatura holomorfa é precisamente μ . \square

3.2.3 Variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura Q-seccional constante

Para as variedades cuaterniónicas, a caracterización mediante as curvaturas totais das esferas xeodésicas tamén pode ser feita de xeito análogo ós outros espazos modelo, se ben tal caracterización é máis sinxela debido as fortes restricións que impón sobre a curvatura a existencia dunha estrutura cuaterniónica Kähler.

Teorema 3.2.8 *Sexa M unha variedade cuaterniónica Kähler de dimensión $4n$. Se en toda esfera xeodésica suficientemente pequena, $\int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2$ coincide coa dunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q -seccional holomorfa constante ν , entón M ten curvatura Q -seccional holomorfa constante ν .*

Demostración.

Para unha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q -seccional constante, facendo o desenrolo en serie de Taylor no Lema 3.1.17:

$$(3.27) \quad \int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 = c_{4n-1} r^{4n-1} \left\{ \frac{4(2n-1)(4n-1)}{r^4} - \frac{2(n+2)(2n-1)(4n-5)\nu}{3r^2} + \frac{(80n^4 + 92n^3 + 2776n^2 - 3851n + 945)\nu^2}{180} + O(r^2) \right\} (m)$$

Comparando (3.27) co Lema 2.5.2 (con dimensión real $4n$) obtemos que,

$$\tau = 4n(n+2)\nu$$

Substituíndo na fórmula do Lema 2.5.2:

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \|\tilde{R}\|^2 &= c_{4n-1} r^{4n-1} \left\{ \frac{4(2n-1)(4n-1)}{r^4} - \frac{2(n+2)(2n-1)(4n-5)\nu}{3r^2} \right. \\ &\quad + \frac{1}{8n(2n+1)} \left(\frac{944n^2 - 372n - 10}{60} \|R\|^2 \right. \\ &\quad + \frac{2(16n^2 - 148n + 60)}{45} \|\rho\|^2 \\ &\quad \left. \left. + \frac{8n^2(n+2)^2(8n^2 - 22n + 1)}{9} \mu^2 \right) + O(r^2) \right\} (m) \\ &= c_{4n-1} r^{4n-1} \left\{ \frac{4(2n-1)(4n-1)}{r^4} - \frac{2(n+2)(2n-1)(4n-5)\nu}{3r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{472n^2 - 186n - 5}{240n(2n+1)} \left(\|R\|^2 - \frac{5n+1}{4n(n+2)^2} \tau^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4n^2 - 37n + 15}{45n(2n+1)} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n} \tau^2 \right) \\
& + \frac{(80n^4 + 92n^3 + 2776n^2 - 3851n + 945)\nu^2}{180} + O(r^2) \Big\} (m)
\end{aligned}$$

e volvendo a comparar con (3.27) deducimos que:

$$\begin{aligned}
& \frac{472n^2 - 186n - 5}{240n(2n+1)} \left(\|R\|^2 - \frac{5n+1}{4n(n+2)^2} \tau^2 \right) \\
& + \frac{4n^2 - 37n + 15}{45n(2n+1)} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n} \tau^2 \right) = 0
\end{aligned}$$

Agora ben, se $n > 1$, a variedade é Einstein, e por tanto, o segundo sumando anúlase. Por outra banda, a función

$$f(n) = \frac{472n^2 - 186n - 5}{240n(2n+1)}$$

é positiva cando $n > 1$, de xeito que empregando as proposicións 1.1.2 e 3.1.13, deducimos que a variedade ten curvatura Q-seccional constante. Como $\tau = 4n(n+2)\nu$ chégase a que a súa curvatura Q-seccional é precisamente ν .

Por último, como en dimensión 4, curvatura Q-seccional constante equivale a curvatura seccional constante, o resultado redúcese a un probado anteriormente (Teorema 3.2.1). \square

Finalmente demostraremos o teorema análogo ó anterior para a norma cuadrática total do tensor de Ricci. Neste caso a caracterización pódese realizar completamente debido ó carácter Einstein das variedades cuaterniónicas Kähler.

Teorema 3.2.9 *Sexa M unha variedade cuaterniónica Kähler de dimensión $4n$. Se en toda esfera xeodésica suficientemente pequena, $\int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2$ coincide coa dunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional holomorfa constante ν , entón M ten curvatura Q-seccional holomorfa constante ν .*

Demostración.

Para unha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante, facendo o desenrolo en serie de Taylor no Lema 3.1.16:

$$\begin{aligned}
\int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 & = c_{4n-1} r^{4n-1} \left\{ \frac{4(2n-1)^2(4n-1)}{r^4} \right. \\
& \quad \left. - \frac{2(n+2)(2n-1)^2(4n-5)\nu}{3r^2} \right\}
\end{aligned}$$

$$(3.28) \quad \left. \begin{aligned} &+ \frac{(160n^5 + 104n^4 - 1020n^3 + 322n^2 + 1421n - 945)\nu^2}{180} \\ &+ O(r^2) \end{aligned} \right\} (m)$$

Comparando (3.28) co Lema 2.4.2,

$$\tau = 4n(n+2)\nu$$

Substituindo na fórmula do Lema 2.4.2:

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \|\tilde{\rho}\|^2 &= c_{4n-1} r^{4n-1} \left\{ \frac{4(2n-1)^2(4n-1)}{r^4} - \frac{2(n+2)(2n-1)^2(4n-5)\nu}{3r^2} \right. \\ &+ \frac{1}{8n(2n+1)} \left(-\frac{64n^3 - 144n^2 - 64n - 20}{120} \|R\|^2 \right. \\ &+ \frac{64n^3 + 496n^2 - 64n - 120}{45} \|\rho\|^2 \\ &+ \left. \left. \frac{2n^2(n+2)^2(64n^3 - 208n^2 - 64n + 44)}{9} \nu^2 \right) + O(r^2) \right\} (m) \\ &= c_{4n-1} r^{4n-1} \left\{ \frac{4(2n-1)^2(4n-1)}{r^4} - \frac{2(n+2)(2n-1)^2(4n-5)\nu}{3r^2} \right. \\ &- \frac{16n^3 - 32n^2 - 16n - 5}{240n(2n+1)} \left(\|R\|^2 - \frac{5n+1}{4n(n+2)^2} \tau^2 \right) \\ &+ \frac{8n^3 + 62n^2 - 8n - 15}{45n(2n+1)} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n} \tau^2 \right) \\ &+ \left. \left. \frac{(160n^5 + 104n^4 - 1020n^3 + 322n^2 + 1421n - 945)\nu^2}{180} + O(r^2) \right\} (m) \end{aligned}$$

e volviendo a comparar con (3.28) deducimos que:

$$\begin{aligned} &- \frac{16n^3 - 32n^2 - 16n - 5}{240n(2n+1)} \left(\|R\|^2 - \frac{5n+1}{4n(n+2)^2} \tau^2 \right) \\ &+ \frac{8n^3 + 62n^2 - 8n - 15}{45n(2n+1)} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n} \tau^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Agora ben, como $n > 1$, a variedade é Einstein, e por tanto, o segundo sumando anúlase. Por outra banda, a función

$$f(n) = -\frac{16n^3 - 32n^2 - 16n - 5}{240n(2n+1)}$$

non se anula cando $n > 1$, de xeito que empregando as proposicións 1.1.2 e 3.1.13, deducimos que a variedade ten curvatura Q-seccional constante. Como $\tau = 4n(n+2)\nu$ chégase a que a súa curvatura Q-seccional é precisamente ν .

Para dimensión 4, o resultado dedúcese do Teorema 3.2.4, xa que ter curvatura Q-seccional constante equivale a ter curvatura seccional constante nesta dimensión. \square

Observación 3.2.10 Como foi visto anteriormente, as variedades cuaterniónicas Kähler son Einstein. Este feito produce grandes simplificacións nos desenrols en serie de potencias, podendo caracterizar todas as variedades cuaterniónicas Kähler a partir das curvaturas escalares totais. De feito, pódense enunciar teoremas análogos ós anteriores para o volume, a curvatura escalar total e a curvatura escalar cuadrática total.

É máis: en [14] próbase que a conxetura do volume (e todas as súas variacións para caracterizar os espazos modelo) son certas cando se asume, a maiores, que a variedade é Einstein. Dado que as variedades cuaterniónicas Kähler verifican esta última propiedade, é sinxelo, como vimos, caracterizar estas a partir dos desenrols en serie de potencias das curvaturas totais.

Bibliografía

- [1] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet; *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, **194**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.
- [2] J. Berndt, L. Vanhecke; Two natural generalizations of locally symmetric spaces, *Differential Geom. Appl.* **2** (1992), 57–80.
- [3] Arthur L. Besse; *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik, **93**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1978.
- [4] A. Bonome, P. Castro, E. García-Río; Generalized Osserman four-dimensional manifolds, *Classical Quantum Gravity* **18** (2001), 4813–4822.
- [5] P. Bueken, L. Vanhecke; Examples of curvature homogeneous Lorentz metrics, *Classical Quantum Gravity* **14** (1997), L93–L96.
- [6] B.-Y. Chen, L. Vanhecke; Total curvatures of geodesic spheres, *Archiv der Mathematik*, **32**, (1979), 404 – 411.
- [7] B.-Y. Chen, L. Vanhecke; Differential geometry of geodesic spheres, *J. Reine Angew. Math.*, **325**, (1981), 28 – 67.
- [8] J. C. Dessertine; Expressions nouvelles de la formule de Gauss-Bonnet en dimension 4 et 6, *C. R. Acad. Sc. Paris Sér. A*, **273**, (1971), 164 – 167.
- [9] D. M. DeTurck; Existence of metrics with prescribed Ricci curvature: local theory, *Invent. Math.*, **65**, (1981/82), 179 – 207.
- [10] E. García-Río, D.N. Kupeli, R. Vázquez-Lorenzo, *Osserman Manifolds in semi-Riemannian Geometry*, Lecture Notes in Math. **1777**, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [11] E. García-Río, Y. Matsushita; Isotropic Kähler structures on Engel 4-manifolds, *J. Geom. Phys.* **33** (2000), 288–294.
- [12] J. Gillard; *Pointwise and global aspects of the geometry of geodesic spheres and tubes*, Tese doutoral, Katholieke Universiteit Leuven, 1999.

- [13] A. Gray; *Tubes*, Addison–Wesley, Redwood City, 1990.
- [14] A. Gray, L. Vanhecke; Riemannian geometry as determined by the volumes of small geodesic balls, *Acta Math.*, **142** (1979), 157 – 198.
- [15] A. Gray, L. Vanhecke; The volume of tubes about curves in a Riemannian manifold, *Proc. London Math. Soc.*, **44** (1982), 215 – 243.
- [16] B. O’Neill; *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983
- [17] F. Prüfer, F. Tricerri, L. Vanhecke; Curvature invariants, differential operators and local homogeneity, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996) 4643–4652.
- [18] T. Sakai; *Riemannian Geometry*, Providence, RI, 1996.
- [19] Z. I. Szabó; A short topological proof for the symmetry of 2-point homogeneous spaces, *Invent. Math.* **106** (1991), 61–64.
- [20] L. Vanhecke; Geometry in normal and tubular neighborhoods, *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, supplemento al vol.* **58** (1988), 73 – 176.
- [21] K. Yano, M. Kon; *Structures on Manifolds*, Series in Pure Math., **3**, World Scientific, Singapore, 1984.