Manuel Francisco González Lázaro

RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES EN ACCIONES POLARES

98

2003

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

IMPRIME: Imprenta Universitaria

Pavillón de Servicios

Campus Universitario

ISBN: 84-89390-16-9

Dep. Leg.: C-2141/2003

RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES EN ACCIONES POLARES

Manuel Francisco González Lázaro

Memoria realizada en el departamento de Xeometría e Topoloxía de la facultad de matemáticas, bajo la dirección del profesor Enrique Macias Virgós, para obtener el título de Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela.

Introducción

Es un hecho bien conocido que toda matriz real simétrica puede ser reducida, mediante una transformación de semejanza, a una forma diagonal. Este resultado es quizás el más célebre de toda una serie de teoremas sobre formas canónicas, en los cuales se simplifica el estudio de simetrías complejas mediante la búsqueda de familias de elementos notables que representan la situación global pero poseen simetrías internas más simples. El concepto de acción polar aparece al considerar estos teoremas de formas canónicas desde una perspectiva general: Si M es una variedad riemanniana en la que actúa isométricamente un grupo de Lie compacto G, se dice que la acción es polar cuando existe una subvariedad cerrada y embebida $\Sigma \subseteq M$ —denominada sección— que corta a toda órbita ortogonalmente.

Cronológicamente, las primeras publicaciones acerca de acciones polares se basaban en la generalización de las propiedades de las representaciones adjuntas de los grupos de Lie compactos, que son polares. Así, en el trabajo de J. Szenthe [13] se introduce el concepto de *grupo de Weyl generalizado* asociado a una acción polar, y en el artículo de J. Dadok [6] se concreta el vínculo entre las estructuras cristalográficas y las acciones polares lineales, ya perfilado en un artículo previo de L. Conlon [20]. Sin embargo, el primer trabajo que define con toda generalidad el concepto de acción polar, y estudia sistemáticamente sus propiedades, es el de R. Palais y Ch. L. Terng [5]. En el citado artículo, los autores amplían el material anterior con resultados muy significativos acerca de la estructura estratificada de los espacios de órbitas, las relaciones entre las estructuras funcionales del espacio y la sección ([5], 4.15), y algunos intentos de clasificación de las acciones polares. Unos recientes artículos de P. W. Michor [11, 12] profundizan en las relaciones funcionales entre el espacio y la sección, demostrando (cf. [12], Th. 2) que hay un isomorfismo $\Omega^p_{hor}(M)^G \xrightarrow{\cong} \Omega^p(\Sigma)^{W(\Sigma)}$ entre el espacio de p-formas horizontales G-invariantes de M y el espacio de p-

formas $W(\Sigma)$-invariantes de Σ, para cualquier p. Este resultado de Michor es la más profunda relación funcional entre espacio ambiente y sección encontrada hasta la fecha, y el uso de las estructuras cristalográficas durante su demostración ha sido el punto de partida para la realización del presente trabajo.

El objetivo perseguido en esta memoria es el de establecer una serie de resultados originales sobre la estructura de las singularidades en las acciones polares, bajo ciertas restricciones (Hip. 5.1, cf. [11], **2.4**). Se demostrará que las singularidades sobre la sección Σ constituyen una subvariedad inmersa (Prop. 5.11) ; se detallará la construcción y estructura de dicha variedad (Sec. 5.2); de qué forma está inmersa en Σ y qué relación hay entre esa inmersión y los grupos cristalográficos (Obs. 5.10); se definirá un sencillo proceso local de explosión, que permitirá resolver las singularidades en la sección al tiempo que se conserva la acción del grupo de Weyl generalizado (Sec. 4.2); se detallará un procedimiento mediante el cual se puede predecir el comportamiento de la acción en la variedad explosionada (Sec. 4.3); finalmente, se discutirán las posibilidades de extender estos resultados desde la sección a todo el espacio (Sec. 5.3). Es importante notar que Szenthe, en el artículo [13], Teoremas 2 y 3, estableció por un camino diferente algunos resultados incompletos semejantes a los expuestos en esta memoria, aunque sin llegar a concretar la estructura cristalográfica de la sección Σ ni dar una descripción de la estructura de los estratos.

Por capítulos, el contenido de la memoria es el siguiente:

El Capítulo 1 es puramente introductorio, y recoge varios resultados y definiciones básicas. Los dos puntos clave de este capítulo son el Teorema del *slice* (Teor. 1.8), y la noción de *tipo normal de órbitas*, un refinamiento del concepto clásico de tipo de órbitas, más apropiado para el estudio de las acciones diferenciables.

En el Capítulo 2 se introduce el concepto de acción polar, y se demuestran sus propiedades e invariantes más significativos. Una referencia completa para todo el Cap. 2 es el artículo de Palais y Terng[5], cuya notación se ha seguido en la medida de lo posible. La Sección 2.1 revisa rápidamente la noción de submersión riemanniana, que se emplea en la Sección siguiente para establecer las propiedades topológicas más importantes de las acciones polares. En la Sección 2.2 se dan las definiciones de acción polar y de sección, y se comprueban brevemente sus propiedades. En la Sección 2.3 se introduce la noción de grupo de Weyl generalizado y se demuestran sus características más notables, tales como el carácter discreto de estos grupos (Prop. 2.14); la importancia de estos grupos a la hora de determinar la herencia del carácter polar desde la variedad hacia la representación del *slice* (Teor. 2.16), y ante todo la relación entre los subgrupos de isotropía del grupo de Weyl generalizado y los grupos cristalográficos (Teor. 2.21).

El Capítulo 3 consiste en una muy breve introducción a las propiedades más elementales de los grupos cristalográficos y los sistemas de raíces. Todo el material expuesto en este capítulo es bien conocido, y puede consultarse en las excelentes referencias [8, 18]. El Capítulo está orientado a introducir los conceptos y notaciones necesarios para realizar explosiones lineales. Un análisis detenido de las estructuras cristalográficas permite, asimismo, detallar la estratificación de las acciones cristalográficas (Teor. 3.12), lo que ofrece toda una familia de ejemplos de estratificaciones no triviales. En la Sección 3.3 se emplean las estructuras cristalográficas para estudiar las estratificaciones de las acciones adjuntas de dos grupos de Lie, $\mathbf{SU}(3)$ y $\mathbf{Spin}(5)$. Los dos casos constituyen excelentes ejemplos de acciones polares no lineales.

En el Capítulo 4 se adapta el mecanismo clásico de resolución de singularidades mediante *blow up* al caso de la acción de un grupo cristalográfico. Como quiera que los estratos en estas acciones son variedades lineales que se cortan en el origen formando ángulos bien determinados, y que en el Capítulo 3 se han caracterizado estos grupos y sus subgrupos de isotropía, es fácil desarrollar un método para resolver estas singularidades, pudiendo predecirse además el comportamiento de la acción tras el proceso de *blow up*. Las Secciones 4.1 y 4.2 se ocupan de la descripción del procedimiento de *blow up*. La Sección 4.3 consiste en ejemplos de explosiones lineales. La Sección 4.4 compara el mecanismo de *blow up* con otro más genérico, el de las *explosiones de Jänich* [10, 3].

El Capítulo 5 emplea las explosiones lineales como recurso local para resolver singularidades en la sección. En la Sec. 5.1 se demuestra que los estratos en la sección tienen, bajo ciertas hipótesis, una estructura perfectamente escalonada en cuanto a la dimensión (Lema 5.2). Teniendo esto en cuenta y recordando que, según lo demostrado en la Sec. 2.3 (Teor. 2.21), la representación del *slice* en la sección es cristalográfica, es posible globalizar el procedimiento de explosión del Capítulo 4. De esta globalización se ocupa la Sec. 5.2, cuyo resultado más notable es el Teorema 5.13, que detalla tanto el proceso de explosión como la estructura de los estratos de la sección. La Sec. 5.3 se ocupa de la imposibilidad de extender el procedimiento de explosión a toda la variedad, y provee de un resultado débil de explosión para este caso.

Para terminar, quiero expresar mi más profundo agradecimiento al Profesor Dr. D. Enrique Macias Virgós, por su labor de dirección durante la realización de esta memoria, por el considerable apoyo que me ha prestado, y por su paciencia. También me gustaría expresar mi profunda deuda con el Departamento de Xeometría y Topoloxía de la Universidad de Santiago de Compostela, y con muchos de sus miembros. Sin la ayuda de todos ellos, la realización de esta memoria no habría sido posible.

Contenidos

Lista de Figuras

Capítulo 1

Estratificaciones normales.

1.1 Acciones diferenciables.

Sea M una variedad diferenciable C^∞, Hausdorff y paracompacta. Sean G un grupo de Lie compacto, y e su elemento neutro. Una acción por la izquierda de G en M es una aplicación diferenciable $\mathcal{L} : G \times M \longrightarrow M$ verificando:

(1) $\mathcal{L}(g, \mathcal{L}(h, p)) = \mathcal{L}(gh, p), \qquad \forall p \in M, \quad \forall g, h \in G.$
(2) $\mathcal{L}(e, p) = p, \qquad \forall p \in M.$

Diremos que la terna $(M, G, \mathcal{L})$ constituye una *G-variedad*. Cuando no haya lugar a confusión se escribirá $g \cdot p$ en vez de $\mathcal{L}(g, p)$. Análogamente, si $H \subseteq G$, $S \subseteq M$, denotamos $H \cdot S := \{g \cdot p \; : \; g \in H, p \in S\}$.

Si $g \in G$, sea $l_g : M \to M$ definida por $l_g(p) := g \cdot p$. Se tiene $l_g \circ l_h = l_{gh}$ y $l_e = Id$, luego cada l_g es un difeomorfismo de M, donde $l_{g^{-1}} = l_g^{-1}$ y la acción induce un homomorfismo de grupos

$$l : G \to \mathrm{Diff}(M).$$

La acción $\mathcal{L}$ se dice *efectiva* si l es inyectiva, es decir, cuando $l_g = Id$ si y sólo si $g = e$. En lo sucesivo sólo consideraremos acciones efectivas. Obsérvese que si la acción no es efectiva, y $A = \{g : l_g = Id\}$, entonces $G = G/A$ actuará efectivamente.

La representación de G en $\mathrm{Diff}(M)$ induce una aplicación lineal $\kappa : \mathcal{G} \to \mathcal{X}(M)$ del álgebra de Lie de G en el álgebra de campos de vectores de M. En efecto, si $X \in \mathcal{G}$ es campo invariante por la izquierda en G, podemos considerar la familia de difeomorfismos $l_{\exp(tX)}$, $t \in \mathbb{R}$, que es, teniendo en cuenta

$$l_{\exp(sX)} \circ l_{\exp(tX)} = l_{\exp(sX)\exp(tX)} = l_{\exp((s+t)X)},$$

un subgrupo uniparamétrico de $\mathrm{Diff}(M)$. Se define $\kappa(X)$ como el campo en M que deriva del flujo $l_{\exp(tX)}$,

$$\kappa(X)_p := \frac{d}{dt} \exp(tX) \cdot p|_{t=0}$$

Definición 1.1 *Cada campo $\kappa(X)$ se denomina campo fundamental de la acción $\mathcal{L}$.*

Sea $p \in M$; el conjunto $G_p := \{g \in G : g \cdot p = p\}$, de elementos de G que dejan fijo p, es un subgrupo cerrado (entonces subgrupo de Lie) de G, llamado *subgrupo de isotropía* de G en p. Es inmediato que por tanto

$$G_{g \cdot p} = g G_p g^{-1}.$$

Como consecuencia, todos los puntos de una órbita tienen subgrupos de isotropía conjugados.

Consideremos la relación en M que hace equivalentes los puntos que difieren en una traslación, es decir, si $p, q \in M$, entonces $p \sim q$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $p = g \cdot q$. Las clases de equivalencia son las *órbitas* de la acción; denotaremos $G \cdot p$ a la órbita de $p \in M$.

Proposición 1.2 *Para la acción de G en M se cumple:*

1. *La proyección de cocientes $\pi : M \to M/G$ es abierta y cerrada.*

2. *El espacio M/G es Hausdorff.*

3. *π es propia.*

4. *Las órbitas son subvariedades embebidas de M.*

Demostración:

(1) Si $U \subseteq M$ es abierto, $\pi^{-1}(\pi(U)) = G \cdot U = \bigcup_{g \in G} l_g(U)$ es abierto, es decir, $\pi(U)$ es abierto, por tanto π es abierta.

Sea $F \subseteq M$ cerrado. Para ver que π es cerrada basta ver que $\pi^{-1}(\pi(F)) = G \cdot F$ es cerrado, puesto que π es una identificación. Toda sucesión en $\pi^{-1}(\pi(F))$ puede considerarse de la forma $(g_n \cdot p_n)$, donde (g_n, p_n) es sucesión en $G \times F$. Puesto que G es compacto, no es restrictivo suponer que (g_n) converge a un elemento $g \in G$. Supuesto que $(g_n \cdot p_n)$ converge a cierto p, resulta que la sucesión $({g_n}^{-1}, g_n \cdot p_n)$, contenida en $G \times M$, es convergente a (g^{-1}, p). Entonces, por ser continua la acción, resulta que (p_n) converge a $g^{-1} \cdot p$, y en consecuencia está en el cerrado F. Por lo tanto, $p \in G \cdot F$.

(2) Sean $p, q \in M$ tales que $g \cdot p \neq g \cdot q$. Teniendo en cuenta que las órbitas son compactas y disjuntas, pueden ser separaradas por abiertos disjuntos en M. En particular hay un entorno abierto U de p tal que $\bar{U} \cap G \cdot q = \emptyset$. Como $\pi(q) \notin \pi(\bar{U})$, los abiertos $\pi(U)$, $M/G - \pi(\bar{U})$ separan $\pi(p)$ y $\pi(q)$.

(3) El carácter propio de π equivale a que la preimagen de todo compacto por π sigua siendo compacta. Teniendo en cuenta que π es abierta, y que la preimagen por π de todo punto de M/G es compacta, es fácil ver que para cada compacto $K \subseteq M/G$ se tiene que $\pi^{-1}(K)$ es compacto.

(4) Sea $p \in M$, $l^p : G \to M$ la aplicación dada por $l^p(g) := g \cdot p$, y sea $\eta : G \to G/G_p$ la proyección de cocientes.

Téngase en cuenta $l^p(g) = l^p(h)$ ssi $g \cdot p = h \cdot p$ ssi $g^{-1}h \in G_p$ ssi $\eta(g) = \eta(h)$. Entonces, existe un embebimiento (topológico) α^p que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "l^p"] \arrow[dr, "\eta"'] & & M \\ & G/G_p \arrow[ur, "\alpha^p"'] & \end{tikzcd}$$

Para ver que α^p es diferenciable, observemos que por ser G_p cerrado en G, puede encontrarse mediante un razonamiento usual para grupos de Lie [1] una sección local χ de π, es decir, un abierto $U \subseteq G/G_p$ con $[e] \in U$ y una aplicación diferenciable $\chi : U \to G$ tal que $\eta \circ \chi = Id_U$. Entonces $l^p \circ \chi$ es aplicación diferenciable que coincide localmente con α^p. Teniendo en cuenta que las traslaciones por elementos de G son difeomorfismos tanto en M como en G/G_p, se concluye que α^p es diferenciable.

Por tanto, α^p define un embebimiento diferenciable desde la variedad homogénea G/G_p en M cuya imagen es $G \cdot p$. $\square$

Definición 1.3 *El espacio topológico cociente M/G, que denotaremos B, se denomina espacio de órbitas de la acción.*

En lo sucesivo, por un tipo de órbita (H) se entiende la clase de conjugación de un subgrupo cerrado H de G; una órbita $G \cdot p$ se dice de tipo (H) si $(G_p) = (H)$; Denotaremos $M_{(H)} \subseteq M$ a la unión de todas las órbitas de tipo (H), y $B_{(H)} \subseteq B$ al conjunto de todas las órbitas de tipo (H).

La terna (M, B, π) puede ser considerada como una colección de G-fibrados. Al restringir π a cada $M_{(H)}$ se tiene $\pi_{(H)} : M_{(H)} \to B_{(H)}$, sobreyección de fibra G/H (cf. Prop. 1.2). Puede probarse [2] que $B_{(H)}$ y $M_{(H)}$ son variedades diferenciables (llamadas estratos), y que $\pi_{(H)}$ define un G-fibrado diferenciable. Sin embargo, el concepto de tipo de órbita no hace uso de la estructura diferenciable de G y M. En la Sección 1.4 introduciremos los *tipos normales de órbitas* (cf. [3]), y estudiaremos la estructura de fibrado para ese caso. La ventaja de los tipos normales de órbitas es que retienen información sobre la estructura diferenciable (transversa) de la acción.

La estructura de G-espacio tiene asociada de manera natural un conjunto de morfismos que conservan su estructura, las aplicaciones *equivariantes*.

Definición 1.4 *Sean M y N G-espacios. Una aplicación $f : M \to N$ es equivariante ssi $f(g \cdot p) = g \cdot f(p)$ para todo $g \in G$, $p \in M$.*

Lema 1.5 *Sea $f : M \to N$ equivariante. Entonces*

1. $G_p \subseteq G_{f(p)}$ *para todo* $p \in M$.
2. f *es inyectiva en* $G \cdot p$ *si y sólo si* $G_p = G_{f(p)}$.

Demostración: La primera afirmación es trivial. Sea f inyectiva en $G \cdot p$, entonces $(f|_{G\cdot p})^{-1}$ es equivariante, de donde $G_{f(p)} \subseteq G_p$. Recíprocamente, si $G_{f(p)} = G_p$ y $f(g_1 \cdot p) = f(g_2 \cdot p)$ entonces $g_1 g_2^{-1} \in G_{f(p)} = G_p$ y $g_1 \cdot p = g_2 \cdot p$. $\square$

Al definir los tipos de órbita, podríamos haber definido con mayor generalidad (H) como los subgrupos cerrados de G *isomorfos* al subgrupo H. La siguiente proposición justifica el uso de la conjugación para definir el concepto de tipo de órbita:

Proposición 1.6 *Dos órbitas son del mismo tipo si y sólo si existe entre ellas un homeomorfismo equivariante.*

Demostración: Sean $G \cdot p$ y $G \cdot q$ dos órbitas. Si son equivariantemente homeomorfas, $G_p = G_q$ por el lema anterior. Recíprocamente, si las dos órbitas son del mismo tipo, podemos tomar p y q tales que $G_p = G_q$. La aplicación $f : G \cdot p \to G \cdot q$ con $f(g \cdot p) := g \cdot q$ es biyección equivariante continua entre las órbitas. Por ser compactas las órbitas, es homeomorfismo. $\square$

1.2 El teorema del *slice* diferenciable.

Para lograr una descripción detallada de las acciones de los grupos compactos seguiremos la técnica usual de estudiar la acción en un abierto pequeño, donde se reduce su estudio al de una acción en un espacio euclídeo.

Consideraremos en lo sucesivo que M es variedad riemanniana, y que la acción de G es isométrica, es decir, que para cada $g \in G$ la traslación l_g es una isometría de M.

No es en absoluto restrictivo asumir que la acción es isométrica. Mediante el procedimiento conocido como *promediar* (de *averaging*, cf. [1]) es fácil encontrar en la variedad paracompacta M una métrica riemanniana invariante para la acción de G.

Introducimos a continuación el concepto de *slice* [1], en el que se fundamenta el estudio local de las acciones de grupos compactos de Lie.

Definición 1.7 *Sea H un subrupo cerrado de G. Un H-slice en M es un subconjunto $S \subseteq M$ tal que*

1. *S es invariante por H, es decir, $g \cdot S \subseteq S \quad \forall g \in H$.*
2. *Si $g \cdot S \cap S \neq \emptyset$ entonces $g \in H$.*

[1] Hemos preferido conservar la forma inglesa; en otros trabajos se traduce como *loncha*.

3. *Si* $\kappa : U \to G$ *es sección local para* G/H*, entonces* $F : U \times S \to M$*, dada por* $F(u,s) := \kappa(u) \cdot s$ *es homeomorfismo de* $U \times S$ *en un abierto de* M*.*

Si $p \in M$*, se define un* slice pasando por p *como un* G_p*-slice en* M *que contiene a* p*.*

Observación: Si S es un *slice* pasando por p, se tiene $G_s \subseteq G_p$ para todo $s \in S$, es decir, los puntos de S son *a lo sumo tan singulares como* p.

Un *slice* pasando por un punto define un G_p-espacio S tal que $S/G_p = (G \cdot S)/G$: en efecto, tomando la aplicación h entre los espacios de órbitas dada por $h(H \cdot s) = G \cdot s$, es fácil ver que define un homeomorfismo.

Teorema 1.8 *(Existencia de slice diferenciable, [2]).*
Para cada $p \in M$ *existe un slice pasando por* p*.*

Demostración: Podemos considerar M como una G-variedad riemanniana tal que G actúa por isometrías de M. La métrica de Riemann define una distancia d en M de manera natural.

El subgrupo G_p actúa en T_pM por isometrías respecto a $\langle .,. \rangle_p$ mediante $g \cdot v_p := l_{g*} v_p$. Se deduce que si $g \in G_p$ entonces $Exp_p(g \cdot v_p) = g \cdot Exp_p(v_p)$, donde $v_p \in T_pM$ se toma en un disco lo bastante pequeño centrado en 0_p. Si denotamos por ν_p el fibrado normal a $G \cdot p$, podemos encontrar gracias a la compacidad de $G \cdot p$ un $\epsilon > 0$ tal que para $\nu_p^{\varepsilon} := \{v \in \nu_p \ : \ \|v\| < \epsilon\}$ se tiene que Exp aplica difeomórficamente ν_p^{ϵ} en $B(G \cdot p, \epsilon) = \{y \in M \ : \ d(y, G \cdot p) < \epsilon\}$. Además el difeomorfismo es equivariante, $g \cdot Exp_q(v_q) = Exp_{g \cdot q}(l_{g*} v_q)$, pues al ser la acción isométrica, lleva geodésicas en geodésicas.

Sea $\Sigma_p^{\perp} := T_pM \cap \nu_p^{\epsilon}$ el ϵ-disco normal a $G \cdot p$ en p. Definamos $S := Exp_p(\Sigma_p^{\perp})$. Se tiene:

1. $G_p \cdot S = S$, es directo por ser Exp_p G_p-equivariante.

2. Si $g \cdot S \cap S \neq \emptyset$, entonces sea $s = Exp_p(v_p)$ para $v_p \in \Sigma_p^{\perp}$; la condición $g \cdot s \in S$ se escribe $g \cdot s = Exp_p(w_p)$, para cierto $w_p \in \Sigma_p^{\perp}$. Por ser Exp_p difeomorfismo equivariante sobre $B(G \cdot p, \epsilon)$, se tiene $g \cdot v_p = w_p$, necesariamente $g \cdot p = p$, entonces $g \in G_p$.

3. Si $\kappa : U \to G$ es sección local para G/G_p, podemos definir $K : U \times \Sigma_p^{\perp} \to \nu_p^{\epsilon}$ como $K(u,v) := \kappa(u) \cdot v$, que es un difeomorfismo en un abierto de ν_p^{ϵ}; es fácil construir su inversa. Entonces, componiendo con Exp_p se obtiene el difeomorfismo buscado. $\square$

1.3 Productos cruzados

En la demostración del teorema anterior se ha empleado repetidamente el difeomorfismo equivariante

$$Exp_p : \nu_p \longrightarrow B(G \cdot p, \epsilon).$$

El conjunto abierto $B(G \cdot p, \epsilon) = G \cdot S$ constituye un entorno tubular de la órbita $G \cdot p$. La noción de producto cruzado permite expresar estos entornos tubulares en forma de fibrado vectorial.

Definición 1.9 *Sea G un grupo de Lie, H un subgrupo cerrado de G, P una variedad en la que H actúa por la derecha y V un H-espacio vectorial. Podemos definir una H-acción en $P \times V$ como $h \cdot (p,v) := (ph^{-1}, h \cdot v)$. Se define el* producto cruzado *$P \times_H V$ como el espacio de órbitas de esa acción. Denotaremos por $[g,v]$ la clase de cada (g,v).*

Observación 1.10 *Es fácil introducir una estructura diferenciable en $P \times_H V$ teniendo en cuenta la estructura de variedad de P.*

Definición 1.11 *Sea $\pi : P \to M$ un G-fibrado principal y V un espacio vectorial de dimensión finita en el que G actúa por la izquierda. Se define el fibrado vectorial $E(M,V,G,P)$ como el fibrado $\pi_E : P \times_G V \to M$, donde $\pi_E([p,v]) := \pi(p)$. Cada fibra $\pi_E^{-1}(p)$ de $E(M,V,G,P)$ es isomorfa a V.*

Si G es grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de G, la proyección $G \to G/H$ define un H-fibrado principal. Para cada H-espacio vectorial V se tiene el H-fibrado vectorial $G \times_H V$.

Consideremos el fibrado vectorial $\nu_p \to G \cdot p$ definido en el Teorema 1.8. La fibra V_p de este fibrado va a través de Exp_p en el slice pasando por p. El grupo $H := G_p$ actúa en V_p, como se vió, a través de la diferencial de las traslaciones

l_h, $h \in H$. Según la Proposición 1.2, $G \cdot p \cong G/H$. Se tiene un isomorfismo de H-fibrados vectoriales entre $G \times_H V_p$ y ν_p dado por $[g, v] \mapsto l_{g*}v_p$.

La acción de G en ν_p dada por $r \cdot v_q := l_{r*}v_q$, para $q = g \cdot p$, se corresponde con la acción de G en $G \times_H V_p$ dada por $r \cdot [g, v] = [rg, v]$. Esta acción es evidentemente compatible con la relación que define $G \times_H V_p$.

Proposición 1.12 *Cada punto p de una G-variedad tiene un entorno G-invariante equivariantemente difeomorfo a $G \times_{G_p} V$, donde V es el espacio normal a $G \cdot p$ en el punto p.*

Demostración: Este resultado es una reformulación del teorema del *Slice*, y se sigue de la cadena de difeomorfismos equivariantes

$$\begin{array}{ccccc} G \times_{G_p} V & \longrightarrow & \nu_p & \longrightarrow & G \cdot S_p \\ (g, v) & \mapsto & l_{g*}v_p & \mapsto & Exp_{g \cdot p}(l_{g*}v_p) \end{array}$$

Obsérvese que, en consecuencia, la información relevante sobre el tubo de la órbita $G \cdot p$ está contenida en el grupo G_p y en el G_p-espacio vectorial V. $\square$

1.4 Estratos normales.

Para cada punto p en la G-variedad riemanniana M denominemos ν_p al fibrado normal a la órbita $G \cdot p$, como en la sección anterior. Cambiando la notación, llamemos N_p a la fibra de ν_p, y reservemos el nombre V_p para un subespacio notable de la fibra, a saber, el mayor subespacio de N_p donde la acción de G_p es no trivial.

En otras palabras, como por definición, $N_p = T_p(G \cdot p)^{\perp} \cong T_pM/T_p(G \cdot p)$, sabemos que G_p actúa de manera natural en N_p. Sea F_p el subespacio de puntos fijos de esa acción y $V_p := N_p/F_p$. Es claro que a cada $p \in M$ le corresponde una representación fiel:

$$G_p \longrightarrow Aut(V_p)$$

Definición 1.13 *Sean $p, q \in M$. Diremos que p y q tienen el mismo tipo normal de órbita si y sólo si existen $a \in G$ y $L : V_p \to V_q$ isomorfismo lineal, tales que conmuta el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} G_p & \xrightarrow{\phi_p} & Aut(V_p) \\ \downarrow i_a & & \downarrow i_L \\ G_q & \xrightarrow{\phi_q} & Aut(V_q) \end{array}$$

donde $i_a : G_p \to G_q$ *es el isomorfismo* $i_a(h) := aha^{-1}$, *e* $i_L : Aut(V_p) \to Aut(V_q)$ *es el isomorfismo* $i_L(F) := L \circ F \circ L^{-1}$.

A cada clase de equivalencia de esta relación la denominaremos *tipo normal de órbitas*, y la denotaremos $[G_p, V_p]$. En general denotaremos los tipos normales de órbitas mediante minúsculas griegas α,β, etc.

Observación 1.14

1. *Esta definición refina de manera natural el concepto clásico de tipo de órbitas.*
2. *Es evidente que si* $q \in G \cdot p$ *entonces* $[G_p, V_p] = [G_q, V_q]$.
3. *A menudo consideraremos tipos normales de órbitas genéricos* $[H, V]$, *donde* H *es subgrupo cerrado de* G *y* V *es un* H*-espacio sin* H*-submódulos triviales.*

Si α un tipo normal de órbitas para M, se define el α-*estrato normal* de M como el conjunto de puntos $M_\alpha \subseteq M$ cuyo tipo normal de órbitas es α:

$$M_\alpha := \{p \in M \ : \ [G_p, V_p] = \alpha\}.$$

Si $\pi : M \to B$ es la proyección de cocientes , llamamos a $B_\alpha := \pi(M_\alpha)$ el α-*estrato normal de* B. Tenemos el resultado predecible:

Proposición 1.15 *Si* α *es un tipo normal de órbitas de* M, *entonces* M_α *y* B_α *son variedades diferenciables y*

$$\pi_{|M_\alpha} : M_\alpha \longrightarrow B_\alpha$$

es un fibrado diferenciable, de fibra G/G_p.

Demostración: Sea $p \in M_\alpha$. Existe un entorno tubular T de $G \cdot p$ difeomorfo equivariantemente al G-espacio $G \times_{G_p} N_p$, como consecuencia del teorema del *slice*.

Recordemos la notación para N_p, F_p y V_p introducida al comienzo de esta sección. La inclusión $F_p \hookrightarrow N_p$ induce de manera natural una inclusión $G \times_{G_p} F_p \to G \times_{G_p} N_p$. Teniendo en cuenta que $F_p = (N_p)^{G_p}$, es inmediato que $(G \times_{G_p} N_p)_\alpha = G \times_{G_p} F_p$, donde α es el tipo de órbitas de p. Además, por la trivialidad de la acción de G en F_p,

$$G \times_{G_p} N_p \cong G/G_p \times F_p$$

En consecuencia, en el entorno tubular T, el conjunto M_α es equivariantemente difeomorfo a $G/G_p \times F_p$, y por ello variedad diferenciable. Además, teniendo en cuenta la trivialidad de F_p como G-módulo y el difeomorfismo equivariante $T \cong G \times_{G_p} N_p$, tenemos

$$\pi(T \cap M_\alpha) \;\cong\; (G/G_p \times F_p)/G \;=\; F_p$$

que da cartas diferenciables para B_α y una trivialización local diferenciable del fibrado $\pi|_{M_\alpha} : M_\alpha \to B_\alpha$. $\square$

Recapitulando, los estratos normales convierten a M y $B = M/G$ en espacios estratificados. Además, el G-espacio M puede considerarse como una colección de G-fibrados entre variedades diferenciables y un conjunto de relaciones de pegado. Una exposición completa de esta afirmación se encuentra en [3].

Es fácil dar una relación de orden parcial en el conjunto de los estratos de M.

Definición 1.16 *Si $\alpha = [H_1, V_1]$, $\beta = [H_2, V_2]$ son tipos normales de órbitas genéricos, decimos que $\alpha \leq \beta$ ssi $G \times_{H_1} V_1$ contiene un tipo normal de órbitas β.*

Teniendo en cuenta el teorema del *slice* podemos decir que $\alpha \leq \beta$ si y sólo si cada entorno tubular de un punto de M_α contiene puntos de M_β. Intuitivamente, el tipo normal α es más singular que β.

De la definición es evidente que un elemento maximal para esta relación debe tener el tipo normal de órbitas $[H, \{0\}]$ para cierto subgrupo cerrado $H \subset G$.

De estas definiciones se deduce que si α es tipo normal de órbitas, se cumple

$$\overline{M}_\alpha \quad = \quad \bigcup\nolimits_{\beta \leq \alpha} M_\beta$$

resultado conocido en el caso de tipos de órbitas clásicos.

Otro resultado clásico que se extiende al caso normal es:

Teorema 1.17 *Sea M un G-espacio tal que $B = M/G$ es conexo. Existe un tipo normal de órbitas máximo α en M, es decir, tal que $\beta \leq \alpha$ para cualquier tipo normal β de M. Además el estrato M_α es abierto denso en M y B_α es conexo.*

Demostración: Procederemos por inducción en la dimensión de M. Tomemos un punto cualquiera $p \in M$, y consideremos el entorno tubular $G \times_{G_p} N_p$. La acción de G_p en N_p es isométrica. Sea $\Sigma = \{v \in N_p : \|v\| = 1\}$ la esfera unitaria en N_p respecto a la métrica invariante. Necesariamente $\dim \Sigma < \dim M$, por tanto existen $K \subseteq G_p$, $W \subseteq N_p$, tales que $\alpha = [K, W]$ es tipo normal de órbitas máximo para la acción de G_p en Σ, debido a la hipótesis de inducción. (Si $\dim \Sigma = 0$ y K actúa trivialmente la situación no es ésta, pero entonces todas las órbitas de la acción de G_p en N_p son del mismo tipo, lo que determina la elección de α.)

Observemos que los tipos de órbitas de Σ se corresponden por homotecias con los de N_p, debido al carácter isométrico de la acción. Tomemos un punto $q \in \Sigma$ que se encuentre sobre el estrato Σ_α. El K-espacio W es subespacio vectorial de $T_q\Sigma$. Como $N_p = T_q\Sigma \oplus T_q\Sigma^\perp$, y $T_q\Sigma^\perp$ queda fijo por la acción de K, el tipo de órbitas $\alpha = [K, W]$ tiene sentido también para la acción de G_p en N_p. Además, debido a la correspondencia entre las órbitas de N_p y Σ, el tipo α en N_p sigue siendo máximo.

Por lo tanto, es directo comprobar:

$$(G \times_{G_p} N_p)_\alpha \ = \ G \times_{G_p} (N_p)_\alpha,$$

y además

$$(G \times_{G_p} N_p)_\alpha / G \ \cong \ (N_p)_\alpha / G_p,$$

siendo este último abierto, denso y conexo en $(G \times_{G_p} V)/G$.

Entonces, para cada $p \in M$, existe un entorno U de $[p]$ en B y un subconjunto W de U, conexo abierto y denso en U, en el que todas las órbitas normales tienen el mismo tipo, que es máximo en U.

Si γ es cualquier otro tipo normal, sea C_γ la clausura del interior de B_γ. Entonces una órbita $[p]$ está en C_γ ssi W consiste en órbitas de tipo γ, y en ese caso $U \subseteq C_\gamma$. Por tanto C_γ es abierto y cerrado, luego $C_\gamma = B$ para cierto γ fijo y $C_\delta = \emptyset$ si $\delta \neq \gamma$. Entonces M_γ es abierto porque $B_\gamma \cap U = W$ y además es denso. Cualquier otro tipo de órbitas es estrictamente menor que γ.

Si D es una componente de B_γ, como W_γ es conexo para cada $G \cdot p$ se tiene que $\overline{D}$ es abierto y cerrado en B. Entonces $B_\gamma = D$ es conexo. $\square$

Capítulo 2

Acciones polares.

2.1 Acciones diferenciables en variedades riemannianas.

Supongamos que nuestra variedad riemanniana M es completa, es decir, que toda geodésica en M puede prolongarse indefinidamente. Aunque esta hipótesis no será crucial para los resultados finales, no es excesivamente restrictiva y nos proporcionará varios resultados globales de existencia.

La métrica en M permite enriquecer la estructura de la proyección $\pi : M \to B = M/G$; si consideramos un tipo normal de órbitas α de M, sabemos que la restricción

$$\pi_{|M_\alpha} : M_\alpha \longrightarrow B_\alpha$$

define un fibrado (Proposición 1.4.3), y por tanto es en particular una submersión sobreyectiva entre variedades diferenciables. Según esa proposición, cada $p \in M_\alpha$ admite un entorno abierto G-invariante U_p tal que

$$U_p \cong G/G_p \times F_p = G/G_p \times T_{\pi(p)}B_\alpha$$

y entonces obtenemos que

$$TM_\alpha \cong T(G/G_p) \oplus TB_\alpha,$$

de forma que la inclusión $TB_\alpha \to TM_\alpha$ permite hacer una descomposición ortogonal, respecto a la métrica en M:

$$TM_\alpha = TB_\alpha \oplus (TB_\alpha)^\perp$$

y por tanto podemos definir una métrica riemanniana en B_α, restringiendo la métrica en M a TB_α, respecto a la cual $(\pi_{|M_\alpha})_{*|TB_\alpha}$ es una isometría.

Con la métrica inducida por M_α en B_α, cada proyección $\pi_{|M_\alpha} : M_\alpha \to B_\alpha$ es submersión riemanniana. Puede considerarse a $\pi : M \to B$ como una submersión riemanniana estratificada. El carácter riemanniano de π unido a la completitud de M nos proporcionará resultados globales relativos a la estructura transversa a las órbitas.

En lo que resta de esta sección revisaremos algunos resultados bien conocidos relativos a las submersiones riemannianas. Dada la generalidad de los conceptos expuestos, no ofreceremos demostraciones detalladas. Todos los resultados necesarios están tratados de manera completa en [4],[5].

Definición 2.1 *Sean M,N variedades riemannianas, $F : M \to N$ una submersión sobreyectiva. Si para todo $p \in M$ se tiene una descomposición ortogonal:*

$$T_pM = T_p^vM \oplus T_p^hM$$

tales que $F_{*p|T_p^hM}$ es isometría sobre T_qN, $q = F(p)$, se dice que F es submersión riemanniana o submersión isométrica.

LLamaremos a T_p^vM y T_p^hM los espacios vertical y horizontal respecto a F.

Esta descomposición permite definir dos tipos de campos de vectores de manera natural:

Definición 2.2 *Sea $F : M \to N$ submersión riemanniana, X un campo de vectores en M.*

1. *Diremos que X es vertical ssi $X_p \in T_p^vM$ para todo $p \in M$.*
2. *Diremos que X es horizontal ssi $X_p \in T_p^hM$ para todo $p \in M$.*

Si Y es un campo de vectores en N podemos construir un único campo de vectores horizontal $X = Y^*$ tal que $F_*X = Y$. A ese campo lo denominaremos *levantamiento de* Y.

Todo campo de vectores X en M se expresa de forma única: $X = X^v + (F_*X)^*$, donde X^v es un campo vertical (proyección ortogonal de X en TM^v).

El subfibrado T^hM de TM induce en M una distribución $\mathcal{H}$, que denominaremos *distribución horizontal* de M relativa a F.

Tenemos el resultado evidente:

Lema 2.3 *Si T, X son campos de vectores en M, T vertical y X horizontal, entonces $[T, X]$ es campo vertical.*

Podemos concretar la relación entre las estructuras riemannianas de M y N:

Lema 2.4 *Sea $F : M \to N$ submersión riemanniana.*

1. *Si X, Y son campos de vectores en N, sus levantamientos horizontales verifican:*
$$\nabla^M_{X^*} Y^* = (\nabla^N_X Y)^* + \frac{1}{2}[X, Y]^v$$
donde ∇^M, ∇^N son las conexiones de Riemann en M, N respectivamente.

2. *Sea $\sigma : (a, b) \to N$ una curva diferenciable en M y σ^* un levantamiento de σ a M, es decir, una curva σ^* tal que $(\sigma^*)'(t)$ es el levantamiento horizontal a $T_{\sigma^*(t)}M$ de $\sigma'(t)$. Entonces, σ es geodésica en N ssi σ^* es geodésica en M*

Demostración: Sean X, Y, Z campos de vectores en N, y X^*, Y^*, Z^* sus respectivos levantamientos horizontales. Sea T un campo vertical de vectores en M.

Se deduce de las definiciones:

$$X^* g(Y^*, Y^*) = X g(Y, Z)$$

y

$$T g(X^*, y^*) = 0$$

Además, como $F_*[X^*, Y^*] = [X, Y]$ y $F_*[X^*, T] = 0$, se deduce (lema previo)

$$g([X^*, Y^*], Z^*) = g([X^*, Y^*]^h, Z^*) = g([X, Y], Z)$$

$$g([X^*, T], Y^*) = 0$$

por lo que, teniendo en cuenta las propiedades de la métrica,

$$\begin{aligned} g(\nabla^M_{X^*} Y^*, Z^*) &= g(\nabla^N_X Y, Z) \\ 2g(\nabla^M_{X^*} Y^*, T) &= g(T, [X^*, Y^*]) \end{aligned}$$

lo que basta para afirmar que

$$\nabla^M_{X^*} Y^* = (\nabla^N_X Y)^* + \frac{1}{2}[X,Y]^v.$$

Para probar (2) aplicamos (1): si $t \in (a,b)$,

$$\begin{array}{ll} \frac{\nabla^M \sigma^*}{dt}(t) & = \\ \nabla^M_{(\sigma^*)'(t)}(\sigma^*)'(t) & = \\ (\nabla^M_{\sigma'(t)}\sigma'(t))^* + \frac{1}{2}[\sigma'(t),\sigma'(t)]^v & = \\ (\frac{\nabla^M \sigma}{dt})^*(t) & \end{array}$$

y por tanto σ es geodésica ssi σ^* es geodésica. $\square$

Observemos que, en general, no es posible encontrar un levantamiento σ^* de la curva σ en todo el dominio de definición (a,b).

Sea $\sigma\colon (a,b) \to M$ una geodésica en M, y para $t_0 \in (a,b)$ supongamos que $\sigma(t_0) = p$ y que el tangente $\sigma'(t_0)$ es horizontal; considerando la geodésica $(F \circ \sigma)^*(t)$ tal que $(F \circ \sigma)^*(t_0) = p$, resulta también $\frac{d}{dt}(F \circ \sigma)^*(t_0) = \sigma'(t_0)$ y por tanto, localmente, $(F \circ \sigma)^* = \sigma$, de donde $\sigma'(t)$ es horizontal para cada $t \in (a,b)$. En resumen:

Corolario 2.5 *Si σ es geodésica en M y σ' es campo horizontal en al menos un punto a lo largo de σ, entonces σ' es horizontal a lo largo de σ. En otras palabras, la foliación correspondiente a la distribución vertical es riemanniana.*

Otra consecuencia directa es:

Corolario 2.6 *Si la distribución horizontal $\mathcal{H}$ es integrable entonces cualquiera de sus hojas S es totalmente geodésica. Además $F_{|S}$ es isometría local.*

Observación 2.7 *Si la distribución horizontal $\mathcal{H}$ es integrable y consideramos una hoja S de $\mathcal{H}$, por el corolario anterior podemos encontrar para cada $q \in N$ una sección local de F*

$$\eta : U \subseteq N \longrightarrow S$$

donde U es un entorno abierto de q, $F \circ \eta = Id_{|U}$, y η es una inmersión isométrica que lleva geodésicas de N en geodésicas de M. Es fácil comprobar que si X,Y son campos de vectores en U, entonces

$$\nabla^M_{\eta_* X} \eta_* Y = \eta_*(\nabla_X Y),$$

es decir, la segunda forma fundamental de S en M es nula. S es una subvariedad minimal en el espacio ambiente M.

2.2 Acciones polares.

El concepto de acción polar surge naturalmente de los teoremas de diagonalización del álgebra lineal. Si se considera el espacio euclidiano de las matrices reales simétricas $k \times k$, respecto al producto escalar $\langle A, B \rangle := Tr(A \cdot B)$, en el que actúa el grupo $O(k)$ por conjugación, es bien sabido que toda órbita tiene al menos un representante diagonal. De hecho, cualquier permutación en las entradas del representante diagonal da otro representante diagonal de la misma órbita. Como veremos en un marco más general, el $\mathcal{S}_k$-espacio de las matrices diagonales $k \times k$ conserva una gran cantidad de información sobre el $O(k)$-espacio de las matrices $k \times k$.

Definición 2.8 *Sea M una G-variedad riemanniana, conexa y completa, en la que G actúa por isometrías. Se define una sección Σ de M como una subvariedad cerrada, embebida y conexa de M que encuentra ortogonalmente a todas las órbitas de M.*

Es fácil ver que las matrices diagonales $k \times k$ definen una sección para las matrices simétricas $k \times k$.

Observación 2.9 *Para una sección se cumple evidentemente:*

1. $G \cdot \Sigma \ = \ M$.
2. *Para cada* $p \in \Sigma$, $N_p = T_P(G \cdot p)^{\perp}$ *contiene a* $T_p\Sigma$.
3. *Si* Σ *es sección,* $g \cdot \Sigma$ *es sección, para cualquier* $g \in G$.

Podemos precisar la situación en la observación (2):

Lema 2.10 *Si $p \in M$ es punto regular para M, es decir, que está en el estrato normal máximo de M, se tiene $T_p\Sigma = N_p$.*

Demostración: En el caso de un punto regular, G_p actúa trivialmente en N_p, es decir $N_p = F_p$ (recuérdese la notación de la Sección 1.4). Teniendo en cuenta que un tubo de la órbita es equivariantemente difeomorfo a $G \times_{G_p} F_p \cong G/G_p \times F_p$, si fuese $T_p\Sigma \subset F_p$ contenido estricto, no podría ser $G \cdot \Sigma = M$. $\Box$

Si denotamos por M^0 el estrato normal principal de M, la submersión riemanniana $\pi_{|M^0} : M^0 \to B^0$ tiene como distribución horizontal $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_p = N_p : p \in M^0\}$, y $\mathcal{H}$ es G-invariante. Si M admite secciones, la distribución $\mathcal{H}$ es integrable: por el lema anterior, las placas de la foliación inducida son los *slices* pasando por los puntos regulares. Cada hoja de la foliación $\mathcal{H}$ es la componente conexa de una intersección $\Sigma \cap M^0$, para Σ una sección. Como hemos visto, las hojas de $\mathcal{H}$ son totalmente geodésicas. Teniendo en cuenta que M^0 es denso en M, toda sección es totalmente geodésica. Dado que B^0 es conexo, toda hoja de $\mathcal{H}$ recubre isométricamente a B^0. Se tiene:

Proposición 2.11 *Si M admite secciones, se tiene:*

1. *La distribución horizontal de $\pi_{|M^0}$ es integrable.*
2. *Sus hojas son las componentes conexas de las intersecciones $\Sigma \cap M^0$.*
3. *Cada hoja recubre isométricamente a B^0.*
4. *Cada sección Σ es totalmente geodésica.*
5. *Por cada punto regular p pasa una única sección, $\Sigma_p = Exp_p(N_p)$.*

Este resultado reduce el conjunto de secciones que puede admitir M. Si Σ, Σ' son secciones de M, existe un $g \in G$ tal que $g \cdot \Sigma = \Sigma'$.

Sin embargo, no es cierto que la integrabilidad de $\mathcal{H}$ equivalga a la existencia de secciones: si $M = S^1 \times S^1$ y $G = S^1$ actúa en M como

$$\lambda \cdot (z_1, z_2) := (\lambda z_1, z_2), \quad \lambda \in S^1, (z_1, z_2) \in M$$

consideremos un campo fundamental no nulo X generado por la acción, y un campo Y que genera curvas densas en el toro M. Podemos tomar Y de forma que sea G-invariante. Si dotamos a M de la métrica riemanniana g inducida por la referencia X, Y, una sección de esta acción debería ser una curva integral de Y, que no es cerrada en M.

Obsérvese que la elección de la métrica es esencial para caracterizar la sección. La misma acción en el toro es trivialmente isométrica para otras métricas riemannianas con las cuales admite secciones.

Como sugiere la observación anterior, hay que imponer restricciones adicionales a la clausura de una hoja de $\mathcal{H}$ para ser sección. Concretamente:

Proposición 2.12 *Sea $p \in M^0$, y $T = Exp_p(N_p)$. Si la distribución $\mathcal{H}$ es integrable y T es subvariedad cerrada y embebida de M, entonces T es sección de M.*

Demostración: Sea q un punto cualquiera de M. Existe un elemento $h \in G$ tal que la distancia de p a la órbita $G \cdot q$, medida respecto a la métrica riemanniana en M, es igual a la distancia de p a $h \cdot q$. Por la completitud de M podemos hallar una geodésica σ tal que $\sigma(0) = p$ y $\sigma(1) = h \cdot q$, de tal forma que la longitud de σ es igual a la distancia de p a $h \cdot q$. Al ser la acción isométrica, cualquier geodésica $l_r \circ \sigma$, $r \in G$, hace mínima la distancia entre las órbitas $G \cdot p$ y $G \cdot q$. Entonces σ entra ortogonalmente en p y $h \cdot q$. La geodésica σ se expresa

$$\sigma(t) = Exp_p(tw_p), \quad w_p \in N_p,$$

y está contenida en T. En consecuencia T encuentra a todas las órbitas.

Para satisfacer las propiedades de sección para T bastará ver que T encuentra a todas las órbitas ortogonalmente.

La ortogonalidad es evidente en todo punto regular de T. El conjunto de los puntos regulares de T es abierto denso en T. Sea $q \in T$ un punto singular. Teniendo en cuenta que *casi toda* geodésica contenida en T que entre en q lo hace a través de puntos regulares, y que localmente las geodésicas hacen mínima la distancia, podemos aplicar el razonamiento hecho más arriba para deducir que todas esas geodésicas entran ortogonalmente a $G \cdot q$ en el punto q. Luego T es normal a $G \cdot q$. $\square$

2.3 El grupo de Weyl generalizado

Una familia notable de representaciones polares es la que forman los grupos de Lie compactos conexos G, considerándolos como G-espacios para la *acción* *adjunta* definida por la conjugación:

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \mapsto & ghg^{-1} \end{array}$$

Todo grupo de Lie compacto conexo G admite un *toro maximal* T, subgrupo abeliano de la forma $T = S^1 \times \cdots \times S^1$, único salvo conjugación. Cada conjugado de un toro maximal es a su vez un toro maximal. Además, toda órbita de la acción adjunta corta a un toro maximal dado T.

Si consideramos el normalizador de un toro maximal

$$N(T) := \{g \in G \ : \ gTg^{-1} = T\}$$

el grupo $W := N(T)/T$, conocido como *grupo de Weyl de* G, es un grupo finito que actúa efectivamente en T. El conocimiento de la acción de W en T es de gran importancia en la clasificación de los grupos de Lie compactos conexos y de sus representaciones.

Los toros maximales son en efecto secciones para las representaciones adjuntas. Las representaciones polares conservan muchas de las propiedades de las representaciones adjuntas. Una de ellas es la existencia de un análogo al grupo de Weyl:

Definición 2.13 *Sea M una G-variedad riemanniana conexa, completa que admite secciones. Sea Σ una sección de M, y consideremos el subgrupo cerrado de G*

$$N(\Sigma) := \{g \in G \ : \ g \cdot \Sigma = \Sigma\}$$

que llamaremos normalizador de Σ, y el subgrupo normal de $N(\Sigma)$

$$Z(\Sigma) := \{g \in G \ : \ g \cdot p = p \quad \forall p \in \Sigma\}$$

que llamaremos centralizador de Σ. Se define el grupo de Weyl generalizado de M como

$$W(\Sigma) := N(\Sigma)/Z(\Sigma).$$

Este concepto claramente equivale al de grupo de Weyl en el caso particular de las acciones adjuntas.

Observemos que si p es punto regular de Σ, entonces $G_p = Z(\Sigma)$ puesto que la acción del *slice* es trivial en N_p y $\Sigma = Exp_p(N_p)$, siendo la exponencial equivariante. También puede deducirse fácilmente esta igualdad de la definición de *slice*.

Proposición 2.14 *El grupo de Weyl generalizado es discreto. Si Σ, Σ' son secciones de M entonces sus grupos de Weyl generalizados son isomorfos.*

Demostración: Consideremos el subgrupo de Lie $N(\Sigma)$ de G. Si $n \in N(\Sigma)$ es bastante próxima al elemento neutro de $N(\Sigma)$, necesariamente $n \cdot \Sigma = \Sigma$, si no se llega a contradicción con el carácter embebido de Σ. Por lo tanto $Z(\Sigma)$ es abierto en $N(\Sigma)$, y el cociente $W(\Sigma)$ es discreto.

Si Σ, Σ' son secciones, como sabemos, existe un $h \in G$ tal que $h \cdot \Sigma = \Sigma'$. Entonces claramente los respectivos normalizadores y centralizadores son h-conjugados, y se tiene un isomorfismo entre $W(\Sigma)$ y $W(\Sigma')$ inducido por la conjugación. □

Observación 2.15 *El carácter embebido es esencial para que el grupo de Weyl generalizado sea discreto. Si consideramos el ejemplo del flujo en $S^1 \times S^1$ dado en la Sec. 2, el centralizador de una sección es trivial, en tanto que el normalizador es un subgrupo denso de S^1, generado por una traslación a lo largo del flujo del campo X. El correspondiente grupo de Weyl generalizado es infinito y no discreto.*

En el caso de las acciones adjuntas en grupos de Lie, los grupos de Weyl tienen una estructura notable: todo grupo de Weyl W es *cristalográfico*, es decir, existe un W-espacio vectorial real V de dimensión finita, y una base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_m\}$ de V tal que W estabiliza el conjunto

$$\mathcal{L} := \{z_1 v_1 + \ldots + z_m v_m, \quad \textit{para } z_i \textit{ entero}, \ 1 \leq i \leq m\}$$

es decir, $w \cdot \mathcal{L} = \mathcal{L}$. Esta propiedad restringe la familia de los grupos cristalográficos lo suficiente como para dar una clasificación de los mismos, como veremos en el capítulo 3. Esta clasificación está íntimamente relacionada con la de los grupos de Lie compactos y conexos.

Por contra, toda restricción sobre la estructura de W se pierde en el caso de las acciones polares en general. Consideremos un grupo finito arbitrario W y sea $m = |W|$ el orden de W. Tenemos un monomorfismo evidente $W \to \mathcal{S}_m$, en el grupo de permutaciones de m elementos, dado que el producto por un elemento de W permuta los elementos de W. A su vez el grupo $\mathcal{S}_m$ admite una representación lineal en $\mathbb{R}^m$ en la que a cada permutación $\sigma \in \mathcal{S}_m$ se le asigna el isomorfismo de $\mathbb{R}^m$

$$f(e_i) := e_{\sigma(i)} \quad 1 \leq i \leq m,$$

donde $\{e_1, ..., e_m\}$ es una base de $\mathbb{R}^m$. Componiendo con el monomorfismo de inclusión obtenemos una representación lineal fiel $W|\mathbb{R}^m$. Sabemos que, promediando, podemos considerar la acción de W en $\mathbb{R}^m$ como isométrica (respecto de una métrica riemanniana en $\mathbb{R}^m$, que naturalmente será una deformación lineal de la métrica usual). Tenemos, por tanto, un monomorfismo

$$W \longrightarrow O(m).$$

Sea Σ la esfera S^{m-1}. Σ es W-espacio. Sea el producto cruzado $M = O(m) \times_W \Sigma$, que es un $O(m)$-espacio en el que $O(m)$ actúa isométricamente. Como M es, en un entorno de la sección $\{e\} \times \Sigma$, localmente difeomorfo al producto $(O(m)/W) \times \Sigma$, podemos extender la métrica de Σ a una métrica $O(m)$-invariante en M de forma que las $O(m)$-órbitas cortan a $\{e\} \times \Sigma$ ortogonalmente. En estas condiciones la acción de $O(m)$ en M es polar, con sección $\{e\} \times \Sigma$ y grupo de Weyl generalizado W.

Pese a la arbitrariedad de W, la estructura cristalográfica no se pierde completamente en las acciones polares. En este capítulo veremos que, bajo restricciones no demasiado estrictas, a nivel local sigue habiendo grupos cristalográficos, que serán subgrupos de isotropía del grupo de Weyl generalizado.

El siguiente resultado detalla las propiedades de las acciones del *slice* para las acciones polares:

Teorema 2.16 *Si G actúa polarmente en M, y $p \in M$, la representación del slice por cualquier $p \in M$ es polar. Si Σ es sección por p, entonces $T_p\Sigma$ es sección para la representación del slice, y su grupo de Weyl generalizado es $W(\Sigma)_p = \{\phi \in W(\Sigma) \ : \ \phi(p) = p\}$.*

Demostración: Como sabemos, $T_p\Sigma$ es subespacio vectorial de N_p. Teniendo en cuenta que N_p es, a través de Exp_p, el *slice* pasando por p, se tiene, como sabemos:

$$N_p/G_p \quad \cong \quad (G \times_{G_p} N_p)/G \quad \cong \quad T/G,$$

donde T es un tubo invariante en torno a P. En particular, las dimensiones de los estratos principales de los espacios de órbitas N_p/G_p y M/G son idénticas, y por tanto iguales a $\dim \Sigma$. En consecuencia, si N_p admite una sección, ésta tendrá dimensión $\dim \Sigma$. En particular, $T_p\Sigma$ es variedad totalmente geodésica (respecto a la métrica plana en N_p), embebida, conexa y cerrada cuya dimensión coincide con la de una hipotética sección para N_p.

Tengamos en cuenta que a través del difeomorfismo local equivariante

$$Exp_p : N_p \longrightarrow M$$

podemos dotar al espacio N_p de la métrica de *pullback* $Exp_p^* g$, donde g es la métrica riemanniana en M. Para esta métrica de *pullback* cada órbita de N_p es ortogonal a $T_p\Sigma$. Por supuesto, la métrica $Exp_p^* g$ no coincide necesariamente con la métrica plana en N_p. Sin embargo, si consideramos las esferas $S(t) \subset T_p\Sigma$ de radio $t > 0$, sabemos que cuando t tiende a cero, por el lema de Gauss[1], la métrica de *pullback* tiende uniformemente a la métrica plana en N_p, de forma que es posible encontrar un $t > 0$ tal que el ángulo formado por $T_p\Sigma$ y el tangente a las órbitas es tan semejante al ángulo recto como se desee sobre $S(t)$, respecto a la métrica plana en N_p. Como la acción es lineal, por tanto invariante por homotecias, lo mismo se aplica a $S(1)$. Si el ángulo formado en $S(1)$ es arbitrariamente próximo a uno recto, entonces es recto. Por tanto $T_p\Sigma$ corta ortogonalmente a todas las órbitas que encuentra.

Finalmente observemos que la distribución horizontal asociada al estrato principal de N_p es integrable: si w es punto regular de N_p, por lo que hemos visto una placa de la distribución es el tangente a una sección pasando por $Exp_p(w)$.

Por tanto N_p admite secciones. Una sección está dada, evidentemente, por $T_p\Sigma$.

El grupo de Weyl generalizado $W(T_p\Sigma)$ se calcula fácilmente: teniendo en cuenta que N_p es equivariantemente difeomorfo a un *slice*, tenemos:

$$N(T_p\Sigma) = N(\Sigma) \cap G_p,$$

$$Z(T_p\Sigma) = Z(\Sigma) \cap G_p = Z(\Sigma),$$

y $W(T_p\Sigma) \subseteq W(\Sigma)_p$. El otro contenido es evidente. $\square$

Hay varias consecuencias directas de este resultado local:

[1] Una célebre descomposición de la métrica en coordenadas polares, cf. [7], Lema 1.9.1.

Corolario 2.17 *El grupo de isotropía G_p actúa transitivamente en el conjunto de las secciones que pasan por p.*

Demostración Si Σ, Σ' son secciones pasando por p, entonces $T_p\Sigma$ y $T_p\Sigma'$ son secciones de N_p, por tanto existe un $h \in G_p$ tal que $h \cdot T_p\Sigma = T_p\Sigma'$. Teniendo en cuenta que Exp_p es equivariante, se sigue $h \cdot \Sigma = \Sigma'$. □

Corolario 2.18 *Si $p \in \Sigma$, su $W(\Sigma)$-órbita en Σ coincide con $(G \cdot p) \cap \Sigma$.*

Demostración: Naturalmente se da el contenido $W(\Sigma) \cdot p \subseteq G \cdot p \cap \Sigma$. Si $q \in (G \cdot p) \cap \Sigma$, sea $q = h \cdot p$ para cierto $h \in G$. Tanto Σ como $h \cdot \Sigma$ son secciones pasando por q, entonces existe un $r \in G_q$ tal que $rh \cdot \Sigma = \Sigma$, de donde $rh \in N(\Sigma)$. Entonces $q = r \cdot q = rh \cdot p$, por tanto $q \in N(\Sigma) \cdot p = W(\Sigma) \cdot p$. □

Como consecuencia de este corolario, obtenemos una relación entre las estratificaciones de Σ/W y M/G:

Corolario 2.19 *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} j : M/G & \longrightarrow & \Sigma/W \\ G \cdot p & \mapsto & (G \cdot p) \cap \Sigma \end{array}$$

es un homeomorfismo. Su inversa j^{-1} es la aplicación inducida por la inclusión $i : \Sigma \to M$.

Demostración: Teniendo en cuenta los corolarios anteriores, la aplicación j está bien definida y admite como inversa j^{-1} la aplicación que hace $W \cdot p \mapsto G \cdot p$, que es precisamente la inducida por la inclusión i. Por tanto j^{-1} es continua. Finalmente, teniendo en cuenta que $W(\Sigma)$ es grupo finito y Σ es embebida, es fácil probar que j es continua. □

Observación 2.20 *De hecho, no es difícil probar que j lleva tipos clásicos de órbitas de M en tipos clásicos de órbitas de Σ, y que por tanto respeta las estratificaciones clásicas de M y Σ.*

El aspecto más relevante de las acciones polares para nuestro estudio se encuentra en la aparición de estructuras cristalográficas en los subgrupos de isotropía del grupo de Weyl generalizado:

Teorema 2.21 *(Cf. [6], Prop. 6).*

Si una representación lineal de un grupo de Lie compacto conexo en un espacio vectorial de dimensión finita admite secciones, entonces las secciones son subespacios vectoriales y el grupo de Weyl generalizado actúa cristalográficamente en las secciones.

Este enunciado es una adaptación del resultado de Dadok [6]. La prueba del mismo es un análisis caso por caso de las posibles representaciones polares para cada uno de los grupos de Lie compactos y conexos, cuya clasificación y representaciones se conocen. La principal consecuencia para nuestro estudio es la siguiente:

Corolario 2.22 *Si cada uno de los subgrupos de isotropía de G es conexo, entonces las representaciones del* slice *en cada punto de M tienen por grupo de Weyl a un grupo cristalográfico.*

Esta estructura cristalográfica será la que emplearemos en los capítulos siguientes para resolver singularidades.

Capítulo 3

Grupos cristalográficos.

3.1 Sistemas de raíces.

A lo largo de este capítulo nos centraremos en un género particular de representaciones lineales de grupos finitos, el de los grupos de Coxeter, que dejan invariante la estructura geométrica conocida como *sistema de raíces.* Una completa referencia para todo este capítulo es [8].

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Consideremos un conjunto finito Φ de vectores no nulos de V, que verifican la propiedad: $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$ para todo $\alpha \in \Phi$.

Asociemos a Φ el grupo discreto generado por las reflexiones de eje $\alpha \in \Phi$, es decir, el grupo $W := Span(\{s_\alpha,\ \alpha \in \Phi\})$, donde s_α es la reflexión:

$$s_\alpha(v) := v - \frac{2\langle \alpha, v\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha \quad \textit{para } v \in V.$$

Definición 3.1 *Diremos que Φ es un sistema de raíces si cada reflexión de W deja invariante a Φ. Denominaremos a W el grupo de reflexiones o grupo de Coxeter asociado al sistema de raíces Φ.*

Cada reflexión s_α tiene asociados dos ejes α y $-\alpha$ en Φ, y también un *hiperplano de reflexión* h_α que es el subespacio vectorial de V:

$$h_\alpha = \{v \in V \ : \ \langle v, \alpha\rangle = 0\}.$$

El hiperplano h_α es fijado punto a punto por s_α. En la Figura 3.1 (parte superior) está representado un sistema Φ con ocho raíces. El grupo W que lo deja invariante

Figura 3.1: Un sistema de raíces.

es el grupo diédrico del cuadrado, que más adelante denominaremos B_2. En la parte inferior de la figura están representados los cuatro hiperplanos de reflexión del sistema.

Observación 3.2 *Todo grupo de reflexiones W asociado a un sistema de raíces Φ es necesariamente finito, al ser un subrupo del grupo $\mathcal{S}_{|\Phi|}$ de permutaciones de las raíces. Por otro lado, para cada subgrupo finito W de $O(V)$ generado por reflexiones es fácil construir un sistema de raíces Φ cuyo grupo de Coxeter asociado sea W.*

El grupo W admite, en consecuencia, una representación lineal que permuta los elementos del sistema de raíces asociado. A cada elemento α de un sistema Φ lo denominaremos *raíz* de Φ.

En lo que sigue nos concentraremos en la clasificación y propiedades tanto de los sistemas de raíces como de los grupos de reflexiones asociados. Las clasificaciones no serán equivalentes: un mismo grupo puede estabilizar diferentes sistemas de raíces. En el caso de los grupos cristalográficos, como veremos, las clasificaciones son equivalentes salvo en una familia de sistemas de raíces.

Los sistemas de raíces contienen bastantes redundancias. A efectos de su clasificación basta considerar subconjuntos de los mismos a partir de los cuales se pueda construir todo el sistema de raíces.

Consideremos en el espacio V, isomorfo a $\mathbb{R}^n$, para $n = \dim V$, el orden lexicográfico respecto a un cierto sistema de coordenadas. Esta relación ordena totalmente el espacio V, y es compatible con las operaciones en V:

1. Si $u, v, w \in V$, y $u < v$, entonces $u + w < v + w$.
2. Si $c \in \mathbb{R}^+$, y $u < v$, entonces $c \cdot u < c \cdot v$.

En particular, el producto por -1 invierte las relaciones de orden. Diremos que un elemento $v \in V$ es *positivo* si $v > 0$.

Al conjunto de todas las raíces positivas respecto a un orden dado lo denominaremos *sistema positivo*, y lo denotaremos Π. Cada sistema positivo tiene exactamente la mitad de elementos de Φ, dado que para cada $\alpha \in \Phi$ o bien $\alpha < -\alpha$, o bien $-\alpha < \alpha$. Más adelante emplearemos los sistemas positivos para enumerar ciertos invariantes relativos a los sistemas de raíces: en particular, un sistema de raíces tiene tantos hiperplanos de reflexión como elementos hay en un sistema positivo Π.

La Figura 3.1 ofrece un ejemplo de sistema positivo respecto al orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$; se tiene $\Pi = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Definición 3.3 *Un* sistema simple *de un sistema de raíces Φ es un subconjunto Δ de Φ que está compuesto por vectores linealmente independientes, y tal que cada $\alpha \in \Phi$ se expresa como combinación lineal de elementos de Δ, con coeficientes todos del mismo signo (o nulos).*

Es posible hallar sistemas simples en todo sistema de raíces:

Proposición 3.4 *Sea Φ un sistema de raíces en V, y $<$ un orden total compatible en V. Existe un único sistema simple en Φ tal que todos sus elementos son positivos respecto al orden tomado en V.*

Demostración: Consideremos un conjunto minimal Δ de elementos positivos en Φ respecto a la propiedad de ser todo $\alpha \in \Phi, \alpha > 0$, una combinación lineal con coeficientes positivos de elementos de Δ. Tal conjunto es, evidentemente, no vacío. Por la compatibilidad de la relación de orden, bastará ver que este conjunto minimal es linealmente independiente. La independencia lineal se deduce del hecho de formar dos raíces cualesquiera de Δ un ángulo mayor o igual a $\frac{\pi}{2}$ radianes:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \ \leq 0 \quad para \quad \alpha \neq \beta \in \Delta,$$

pues si α, $\beta \in \Delta$, distintos, no cumpliesen esta propiedad, se tendría $s_\alpha(\beta) = \beta - c \cdot \alpha$ para $c = 2\langle \beta, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ positivo. Se tendría entonces $s_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \cdot \gamma$, donde, por la construcción de Δ, todos los c_γ tienen el mismo signo, digamos no negativo (el caso contrario es análogo). Si fuese $c_\beta < 1$ tendríamos $(1 - c_\beta) \cdot \beta = c \cdot \alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \cdot \gamma$, es decir β es combinación lineal por coeficientes no negativos de elementos de $\Delta - \{\beta\}$. Esto contradice la minimalidad de Δ. Si por el contrario $c_\beta \geq 1$, entonces obtenemos que $(1 - c_\beta) \cdot \beta$ es elemento negativo respecto al orden total en V, en tanto que $c \cdot \alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \cdot \gamma$ es positivo, lo que resulta en una contradicción.

Teniendo en cuenta esta propiedad geométrica en Δ, probemos la independencia: Si hay una combinación lineal $\sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \cdot \gamma = 0$ donde algún coeficiente es no nulo, entonces podemos reformular esa identidad como $\sum_{c_\gamma>0} c_\gamma \cdot \gamma = \sum_{c_\gamma<0}(-c_\gamma) \cdot \gamma$, donde ambos términos son iguales a un vector positivo δ. Entonces se tiene

$$0 \quad \leq \quad \langle \delta, \delta \rangle \quad \leq \quad \langle \sum_{c_\gamma>0} c_\gamma \cdot \gamma \ , \ \sum_{c_\gamma<0} (-c_\gamma) \cdot \gamma \rangle \quad \leq \quad 0$$

de forma que todos los c_γ deben ser nulos. Esto supone una contradicción.

La unicidad de los sistemas simples positivos es directa: puede caracterizarse un sistema simple positivo por estar compuesto por las raíces positivas de Φ, tales que no se pueden expresar como combinación lineal con coeficientes estrictamente positivos de dos o más elementos de Φ. $\Box$

Continuando con el ejemplo de la Figura 3.1, un sistema simple para Φ está dado por el par de raíces $\Delta = \{\alpha, \delta\}$. Todo elemento de Π es combinación lineal con coeficientes positivos del sistema simple: éste es el sistema asociado al orden lexicográfico.

Observación 3.5 *A cada sistema simple Δ se le puede asociar el orden lexicográfico generado por sus elementos, lo que basta para ordenar totalmente el sistema Φ. Δ es el único sistema simple positivo respecto a ese orden.*

Lema 3.6 *Si Δ es un sistema simple y $\alpha \in \Delta$, se tiene $s_\alpha(\Phi - \{\alpha, -\alpha\}) = \Phi - \{\alpha, -\alpha\}$.*

Demostración: Sea $\beta \in \Phi - \{\alpha, -\alpha\}$. Podemos suponer, por la linealidad de s_α, que $\beta = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma \cdot \gamma$, siendo cada c_γ no negativo. Como $\beta \neq \pm\alpha$, existe un $\gamma \neq \alpha$ tal que $c_\gamma \neq 0$. $\Box$

Los sistemas simples bastan para generar los grupos de reflexiones:

Proposición 3.7 *Si Δ es sistema simple, $W = Span(\{s_\gamma \ : \ \gamma \in \Delta\})$.*

Demostración: Consideremos el orden inducido en Φ por el sistema simple Δ. Sea W' el subgrupo de W generado por las reflexiones de Δ. Introduzcamos la función *altura* relativa a Δ como:

$$h(\alpha) := \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma \quad para\ \alpha = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma \cdot \gamma.$$

Para ver que $W' = W$ bastará ver que $W' \cdot \Delta = \Phi$, puesto que entonces, si s_α es reflexión de W, podemos escribir $\alpha = w' \cdot \gamma$ para $\gamma \in \Delta$, $w' \in W'$, y por lo tanto $s_\alpha = w s_\alpha w^{-1}$ de donde $W = W'$.

Teniendo esto en cuenta, consideremos $\alpha \in \Phi$, α positiva. Veamos que $W' \cdot \alpha$ contiene al menos un elemento de Δ. Tomemos en $W' \cdot \alpha$ un elemento β de altura mínima. Si $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \cdot \gamma$ entonces, por ser positivo el número real

$$\langle \beta, \beta \rangle = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \langle \gamma, \beta \rangle,$$

deducimos que $\langle \gamma, \beta \rangle$ es positivo para cierto $\gamma \in \Delta$. Entonces, o bien $\gamma = \beta$, y tenemos el elemento buscado, o bien $\gamma \neq \beta$, y podemos considerar $s_\gamma(\beta) = \beta - c \cdot \gamma$, que es positiva, y tal que $h(s_\gamma(\beta)) < h(\beta)$, dado que c es positivo. Esto contradice la minimalidad de la altura de β. Necesariamente, $\beta \in \Delta$.

Una vez visto que cada W'-órbita corta a Δ, es fácil ver que $W' \cdot \Delta = \Phi$. En efecto, como hemos visto, todo elemento positivo de Φ está contenido en $W' \cdot \Delta$. Si por otro lado α es negativo, $-\alpha = w'\gamma$ con $w' \in W'$, $\gamma \in \Delta$, entonces $\alpha = w' s_\gamma \gamma$. $\square$

Como consecuencia de este resultado, cualquier $\alpha \in \Phi$ es una raíz simple para cierto sistema positivo, puesto que para cualquier sistema simple Δ existe un $w \in W$ tal que $w \cdot \alpha \in \Delta$.

Para obtener una idea precisa de la estructura estratificada que aparece en las acciones de grupos cristalográficos es preciso profundizar en la estructura de los mismos. Conociendo un sistema reducido de generadores $\{s_\alpha,\ \alpha \in \Delta\}$ para W, definamos la *longitud* de un elemento de W, relativa a Δ, como el menor número natural $n = l(w)$ tal que w se puede expresar como:

$$w \quad = \quad s_1 \cdot s_2 \ \cdots \ s_n, \quad s_i \in \Delta, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Convengamos $l(e) = 0$. La longitud tiene varias propiedades sencillas:

1. $l(w) = 1$ si y sólo si w es una reflexión de Δ.

2. $l(w) = l(w^{-1})$.

3. Si $w \in W$, $\alpha \in \Delta$, entonces $l(s_\alpha w) = l(w) \pm 1$.

Puede relacionarse la función l con las propiedades de la representación. Para $w \in W$, sea

$$n(w) = card\left(\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)\right)$$

el número de raíces positivas que w lleva en raíces negativas, para una elección de Π. Naturalmente, $n(w) = n(w^{-1})$, y teniendo en cuenta el Lema 3.6, si $\alpha \in \Delta$ tenemos $n(s_\alpha) = 1$. De hecho, veremos que $l(w) = n(w)$ para todo $w \in W$.

Lema 3.8 *Si $w \in W$ se escribe como un producto de m reflexiones simples, entonces $n(w) \leq m$.*

Demostración: Procediendo por inducción, $n(s_1) = 1$; si tomamos el producto de dos o más raíces simples, $w' = s_1 s_2 \cdots s_k$, $k < m$, basta comprobar si, para $s_{k+1} = s_\alpha$, es $w \cdot \alpha$ positivo o negativo. Como s_α invierte únicamente el orden de α, tenemos $n(w' s_\alpha) = n(w') \pm 1$, según sea $w \cdot \alpha$ positivo o negativo. Como consecuencia, $n(w' s_{k+1}) \leq k + 1$. $\square$

De este lema se sigue que $n(w) \leq l(w)$. La igualdad entre $n(w)$ y $l(w)$ es consecuencia de:

Teorema 3.9 *Sea w un producto de r raíces simples, $w = s_1 s_2 \cdots s_r$, y supongamos que $n(w) < r$. Entonces existen índices $1 \leq i < j \leq r$ tales que*

$$w = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_r,$$

es decir, puede acortarse la expresión como producto de raíces simples.

Demostración: Renombremos las raíces de Δ haciendo $s_i = s_{\alpha_i}$, pudiendo haber repeticiones en los índices. Como $n(w) < r$, tiene que haber al menos una raíz α_j que cumpla

$$(s_1 s_2 \cdots s_{j-1}) \cdot \alpha_j < 0.$$

Naturalmente, como α_j es positivo, tiene que haber un índice $1 \leq i < j$ tal que $(s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1}) \cdot \alpha_j$ es negativo, en tanto que $(s_{i+1} \cdots s_{j-1}) \cdot \alpha_j$ es positivo. Como $s_i = s_{\alpha_i}$ es simple, necesariamente:

$$\alpha_i = (s_{i+1} \cdots s_{j-1}) \cdot \alpha_j.$$

Si es $j = i + 1$, sencillamente $\alpha_i = \alpha_j$, y como $s_i s_j = s_i^2 = e$, queda probado el teorema. En otro caso, sea $w' := s_{i+1} \cdots s_{j-1}, w' \neq e$, entonces tenemos $w' \cdot \alpha_i = \alpha_j$. Por las propiedades elementales de las reflexiones,

$$s_i = w' s_j w'^{-1}.$$

Desarrollando w' y multiplicando por s_j, resulta

$$s_{i+1} \cdots s_{j-1} = s_i \cdots s_j$$

de donde, sustituyendo en la expresión de w, obtenemos la simplificación. □

Corolario 3.10 *Se verifica la identidad* $l(w) = n(w)$ *para todo* $w \in W$.

Este teorema de simplificación permite además encontrar relaciones sencillas entre los generadores de Δ. Tomando el conjunto de generadores $\{s_\alpha,\ \alpha \in \Delta\}$, y definiendo las cantidades

$$m(\alpha, \beta) := Orden(s_\alpha s_\beta),$$

donde el orden de un elemento $w \in W$ es el menor $k \in \mathbb{N}$ tal que $w^k = e$. Puede generarse el grupo W por las relaciones ([8], Sec. 1.9):

$$(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha,\beta)} = e, \qquad \alpha, \beta \in \Delta.$$

Estas relaciones son la base de la clasificación de los sistemas de raíces dada en la sección siguiente.

Como preparación para el estudio de los estratos en los sistemas de raíces, observemos que si tomamos un sistema simple Δ, y un subconjunto de reflexiones simples $I \subseteq \{s_\alpha,\ \alpha \in \Delta\}$, podemos formar un subgrupo $W_I := Span\{s_\alpha,\ s_\alpha \in I\}$. Este tipo de subgrupos se denominan *subgrupos parabólicos* de W, y son a su vez grupos de Coxeter. Es fácil construir su sistema de raíces a partir del de W, tomando el subespacio de V generado por las raíces simples $\{\alpha\ :\ s_\alpha \in I\}$ e intersecándolo con todo el sistema Φ.

Sea $\alpha \in \Phi$, y definamos el semiespacio abierto de V,

$$A_\alpha := \{v \in V\ :\ \langle v, \alpha \rangle\ >\ 0\}$$

Sea Δ un sistema simple, y $C := \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$. C es un cono abierto convexo. Consideremos la clausura de C,

$$D := \{v \in V\ :\ \langle v, \alpha \rangle\ \geq\ 0\}$$

que es un cono convexo cerrado.

Lema 3.11 *El cono D, que es la clausura de $C = \bigcap_\alpha A_\alpha$, contiene al menos un representante de cada órbita de V.*

Demostración: Consideremos el siguiente orden parcial en V: $\lambda \leq \mu$ si y sólo si $\lambda - \mu$ es combinación lineal de elementos de Δ con todos sus coeficientes no negativos. Dado cualquier $\lambda \in V$, consideremos los elementos μ de la órbita de λ que cumplen $\lambda \leq \mu$. Este conjunto no vacío admite un elemento maximal μ. Dado $\alpha \in \Delta$, $s_\alpha(\mu) = \mu - \frac{2\langle\alpha,\mu\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$ está en la órbita de μ, y la condición de maximalidad implica $\langle\alpha, \mu\rangle \geq 0$. Como este razonamiento es válido para cada $\alpha \in \Delta$, se tiene que $\mu \in D$. $\square$

De hecho, D contiene exactamente un elemento de cada órbita:

Teorema 3.12 *Consideremos un sistema simple Δ y el cono D asociado.*

1. *Si $w\lambda = \mu$, para λ, $\mu \in D$, entonces $\lambda = \mu$ y w es producto de reflexiones simples que fijan λ.*

2. *El subgrupo de isotropía de $\lambda \in D$ está generado por las reflexiones simples que contiene.*

Demostración:

1) Podemos proceder por inducción en la longitud $l(w)$. Si $l(w) = 0$ entonces $w = e$ y no hay nada que probar.

Si $l(w) > 1$, entonces w debe enviar una cierta raíz simple α en su opuesta, dado que $l(w) = n(w) > 0$. Naturalmente, el producto ws_α deja invariante α, de forma que su longitud es una unidad menor que la de w. Como $w \cdot \alpha$ es negativa,

$$0 \geq \langle\mu, w \cdot \alpha\rangle \ = \ \langle w^{-1} \cdot \mu, \alpha\rangle \ = \ \langle\lambda, \alpha\rangle \ \geq \ 0$$

de forma que $s_\alpha \cdot \lambda = \lambda$, luego $ws_\alpha \cdot \lambda = \mu$, y ws_α es de menor longitud que w. Aplicando la hipótesis de inducción tenemos que $\lambda = \mu$, y ws_α fija λ, de donde se sigue que w —que es producto de reflexiones simples— fija λ.

2) Esta parte del resultado es consecuencia directa del proceso de inducción: w puede irse reduciendo en longitud -hasta longitud cero- multiplicando por reflexiones generadas por raíces simples que fijan λ. $\square$

Observación 3.13 *Todos los subgrupos de isotropía de la acción de W son subgrupos parabólicos. Con estos datos es fácil determinar los estratos de la acción: tomando un subgrupo parabólico W_I de W, el conjunto de los puntos de V fijos por él es la intersección de hiperplanos de reflexión $\bigcap_{s_\alpha \in I} H_\alpha$. Al intersecar con D obtenemos como estrato principal el interior C, y como estratos sucesivamente más singulares las intersecciones entre las caras en la frontera de D. De este resultado haremos uso continuamente en los próximos capítulos.*

3.2 Clasificación de los grupos cristalográficos.

En esta sección indicaremos brevemente cómo se clasifican los grupos cristalográficos y de Coxeter. Los detalles concretos de la clasificación son largos y no revisten especial interés para este trabajo, así que los omitiremos (ver [8], Cap. 2; [9]).

Como indicamos en la sección anterior, para determinar los generadores y relaciones de un grupo de Coxeter basta con tener un conjunto de enteros $m(\alpha, \beta)$, con α, β $\in \Delta$. Es sencillo entonces encontrar una representación simbólica para los grupos de Coxeter: Indiquemos mediante una circunferencia $\bigcirc$ cada uno de los generadores del grupo. Si dos generadores $\alpha, \beta \in \Delta$ verifican $m(\alpha, \beta) = 3$, uniremos sus circunferencias mediante una línea simple $\bigcirc - \bigcirc$, y si $m(\alpha, \beta) = m \geq 4$ los uniremos mediante una línea con un superíndice: $\bigcirc \overset{m}{-} \bigcirc$. Finalmente, si $m(\alpha, \beta) = 2$, es decir, si las raíces conmutan, no las uniremos.

Los diagramas así obtenidos serán denominados *diagramas de Coxeter*. Es importante observar que aunque los diagramas de Coxeter tienen una estrecha relación con los diagramas de Dynkin de la teoría de Lie, estos últimos esquematizan sistemas de raíces, no los grupos que actúan sobre ellos, de manera que unos y otros diagramas no son equivalentes. Concretamente, en los diagramas de Coxeter no se incluye información sobre la longitud de las raíces: como consecuencia, a los diagramas de Dynkin B_n y C_n ($n \geq 2$) les corresponde exactamente el mismo grupo cristalográfico ([8], Sec. 2.9).

Lema 3.14 *Sean W_1, W_2 dos grupos de Coxeter que actúan en V_1, V_2 respectivamente. Si $V_1^{W_1} = 0 = V_2^{W_2}$ y los dos grupos tienen el mismo diagrama de Coxeter, entonces existe una isometría de V_1 en V_2 que induce un isomorfismo*

Figura 3.2: Diagramas de Coxeter. Tomado de [8].

entre W_1 *y* W_2*.*

Demostración: Tomemos un sistema simple de raíces para cada uno de los dos grupos, Δ_1 y Δ_2. Podemos suponer que los vectores en los dos sistemas son unitarios, y forman cada uno una base del espacio en el que se encuentran. Por tanto, puede definirse una aplicación lineal ϕ que lleva raíces de Δ_1 en raíces de Δ_2, de forma que una raíz y su imagen ocupan posiciones equivalentes en el diagrama. En esas condiciones, si α, $\beta \in \Delta_1$ son dos raíces distintas, el ángulo entre ellas es $\pi - \pi/m(\alpha,\beta)$ puesto que ambas forman un sistema simple para el grupo diédrico $\mathcal{D}_{m(\alpha,\beta)}$. Pero al estar las imágenes por ϕ de ambas en posiciones equivalentes en el diagrama de Coxeter de W_2, también formarán el mismo ángulo. En consecuencia, ϕ preserva la métrica para una base, luego es isometría. Por respetar el diagrama de Coxeter, ϕ induce evidentemente un isomorfismo entre W_1 y W_2. $\square$

Diremos que un diagrama de Coxeter es conexo cuando dos cualesquiera de sus raíces están conectadas a través de otras. En otro caso, diremos que el diagrama es inconexo. En caso de ser inconexo, un diagrama de Coxeter tiene asociada una familia de componentes conexas de manera natural.

Proposición 3.15 *([8], Sec. 2.2)*
Sea Γ *el diagrama de un grupo de Coxeter* W*, y* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ *las componentes conexas. Sean* $W_1, \ldots, W_k$ *los subgrupos parabólicos de* W *generados por las raíces contenidas en las correspondientes componentes conexas. En estas condiciones* W *es el producto directo de los subgrupos parabólicos* $W_1, \ldots, W_k$*.*

Los dos últimos resultados prueban que un grupo de Coxeter está caracterizado por su diagrama de Coxeter, y permiten obtener los diagramas y propiedades de los subgrupos parabólicos a partir del diagrama del grupo de partida.

De los grupos de Coxeter, nos concentraremos en los llamados *grupos cristalográficos.*

Definición 3.16 *Un grupo de Coxeter* W*, asociado a un sistema de raíces* Φ *en* V *se dice cristalográfico si existe una base* $\mathcal{B}$ *de* V *tal que* W *deja invariante al conjunto de las* $\mathbb{Z}$*-combinaciones lineales de vectores de la base* $\mathcal{B}$*.*

Los grupos cristalográficos admiten pocas posibilidades en cuanto al valor de las cantidades $m(\alpha,\beta)$:

Lema 3.17 *Si W es un grupo cristalográfico y Δ es un sistema simple para W, entonces los únicos valores que puede tomar $m(\alpha,\beta)$, $\alpha \neq \beta$, son 2, 3, 4, 6.*

Demostración: Sea $\mathcal{L}$ el conjunto generado por $\mathbb{Z}$-combinaciones lineales de elementos de la base $\mathcal{B}$. Como W deja invariante el conjunto $\mathcal{L}$, las matrices de las rotaciones de W pueden ser expresadas respecto a la base $\mathcal{B}$ como matrices de números enteros. En otro caso, W no podría estabilizar $\mathcal{L}$. Por tanto los invariantes por semejanza de estas matrices, en particular la traza, son números enteros.

Consideremos entonces α, β según las hipótesis. Estos dos elementos generan el grupo diédrico $\mathcal{D}_{m(\alpha,\beta)}$, y la transformación $s_\alpha s_\beta$ es entonces una rotación de ángulo $\phi = 2\pi/m(\alpha,\beta)$, que fija un hiperplano de codimensión 2 en V ($s_\alpha s_\beta$ es la rotación fundamental de ese grupo diédrico). Tomando entonces la base respecto a ese eje y su ortogonal, la traza es naturalmente $(n-2)+2\cos\phi$, para $n = \dim V$. Por tanto $\cos\phi$ es entero o semientero, para $0 < \phi \leq \pi$. Los únicos casos posibles son $\cos\phi$ = -1, -1/2, 0, 1/2, que se corresponden con $m(\alpha,\beta)$ = 2, 3, 4, 6. $\square$

La condición de ser cristalográfico no es demasiado restrictiva para los grupos de Coxeter. La Figura 3.2 muestra la clasificación de todos los diagramas de Coxeter conexos y positivos, y está tomada de [8], Sec. 2.4. Con la excepción de H_3, H_4, y los $I_2(m)$, para $m \neq 2,3,4,6$, nada impide que existan grupos cristalográficos con esos diagramas[1]. De hecho, es un tópico dentro de la teoría de Lie el que todos esos diagramas tienen asociado al menos un sistema de raíces cristalográfico. En consecuencia, existen grupos cristalográficos asociados a cada uno de esos diagramas.

[1]En lo sucesivo llamaremos G_2 a $I_2(6)$

3.3 Ejemplos de acciones polares no lineales.

En esta sección aplicaremos los resultados obtenidos sobre los sistemas de raíces para analizar algunos casos no discretos de acciones polares. Aunque los ejemplos no discretos más simples son, como se ha indicado anteriormente, las acciones de los grupos de matrices en los espacios euclídeos, la motivación para el estudio de las acciones polares partió de las propiedades de las acciones adjuntas de los grupos de Lie compactos, conexos y semisimples. Las propiedades de estas acciones son bien conocidas, así que las tomaremos como ejemplo no lineal y no discreto de acción polar.

El caso de las acciones de estos grupos de Lie es apenas más complicado que el de las acciones de los grupos de matrices en espacios vectoriales, que fue tratado en el Capítulo 2 (cf. Th. 2.21). La diferencia esencial es que la sección es un toro en vez de un subespacio vectorial. Si trasladamos el problema de la acción del grupo de Weyl desde el toro hasta la cubierta universal del toro —un espacio vectorial—, volvemos a encontrarnos con la acción de un grupo cristalográfico en un espacio euclídeo, pero en este caso aparece además un grupo de traslaciones debido al levantamiento desde el toro. Para desarrollar los ejemplos deberemos determinar qué traslaciones se asocian al levantamiento a la cubierta universal.

3.3.1 Diagramas de Stiefel

Sea G un grupo de Lie compacto, conexo y semisimple y T un toro maximal de G. Denotemos por $\mathcal{T}$ al álgebra de Lie de T. Si Φ es el sistema de raíces asociado a la representación adjunta de G en $\mathcal{T}$, podemos definir el llamado *sistema inverso* de Φ como el sistema de raíces:

$$\Phi^* \;=\; \{\alpha^* = 2\frac{\alpha}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \,:\, \alpha \in \Phi\}.$$

Consideremos el homomorfismo de grupos $\mathcal{T} \xrightarrow{\exp} T$ inducido por la exponencial. Se tiene la propiedad notable ([18] V, 2.16):

Lema 3.18 $\Phi^* \subseteq \ker(\exp)$

Es decir, las combinaciones lineales por enteros de las raíces inversas generan un subgrupo del núcleo de exp. En general este subgrupo no tiene por qué coincidir con el núcleo de exp.

Figura 3.3: Diagrama de Stiefel de A_2.

Consideremos la familia de hiperplanos en $\mathcal{T}$ definida como:

$$L_{\alpha n} \ := \ \{v \in T : \langle \alpha, v \rangle \ = \ n\}, \quad \alpha \in \Phi \ , \ n \in \mathbb{Z}.$$

La representación de todos estos hiperplanos en $\mathcal{T}$ se conoce como *diagrama de Stiefel* de G, y es la imagen inversa de las singularidades de T por la aplicación exponencial ([18] V, 7.8), es decir, el levantamiento de las singularidades a la cubierta universal de T. Es interesante observar que el grupo generado por las reflexiones respecto a cualesquiera de los hiperplanos en el diagrama de Stiefel es el producto semidirecto del grupo de Weyl de G por el grupo de traslaciones respecto a las raíces inversas de Φ. Este tipo de grupos se conocen como *grupos de Weyl afines* [8, 19].

El diagrama de Stiefel del grupo A_2 ($= SU(3)$), se encuentra representado en la Figura 3.3, parte superior[2]. Observando el diagrama se comprueba que para este grupo se tiene $\ker(\exp) = \langle \Phi^* \rangle_{\mathbb{Z}}$. Por lo tanto, podemos determinar la configuración de las singularidades en el toro maximal de $SU(3)$: son tres circunferencias en el toro, que se cortan en 3 puntos. Esos puntos son las singularidades de orden 2. En ellas la isotropía es diédrica triangular, esto es, A_2 (ver Figura 3.3, medio, donde se muestra una representación del toro maximal obtenida al cocientar el diagrama de Stiefel). Las tres singularidades de orden 2 son, claramente, la intersección de todos los toros maximales, por tanto el centro de $SU(3)$.

Podemos cocientar el toro maximal por el centro de $SU(3)$ para obtener la configuración de las singularidades del toro maximal del grupo de Lie $SU(3)/Z(SU(3))$. En este caso sigue habiendo tres circunferencias en los estratos singulares, pero hay una sola singularidad de orden 2. Podemos observar también que el centro pasa a ser trivial (Figura 3.3, parte inferior). En la figura, el toro de $SU(3)/Z(SU(3))$ se representa en relación al toro de $SU(3)$.

Un ejemplo parecido pero ligeramente más complejo se obtiene considerando el grupo $Spin(5)$ (ver Figura 3.4). En la parte superior tenemos el diagrama de Stiefel. Dado que el núcleo de exp coincide con las traslaciones por raíces inversas, deducimos la configuración de las singularidades en el toro (Figura 3.4,

[2] En el Capítulo 4, Figura 4.1, hay una representación sistema de raíces A_2.

Figura 3.4: Diagrama de Stiefel de B_2.

medio). Se tienen cuatro circunferencias en el toro, que se cortan en cuatro singularidades de orden 2: dos de ellas tienen como isotropía un grupo de Weyl B_2, y constituyen el centro de $Spin(5)$ (que por tanto es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$), en tanto que las otras dos singularidades tienen como isotropía al grupo $A_1 \times A_1$, y por tanto no están contenidas en el centro.

En la Figura 3.4, parte inferior, se representa el toro maximal del grupo de Lie $Spin(5)/Z(Spin(5))$, representado de nuevo en relación al toro maximal de $Spin(5)$.

Capítulo 4

Resolución de singularidades lineales.

4.1 Preliminares.

Para la resolución de singularidades en G-espacios suele recurrirse al formalismo conocido como *explosiones de Jänich* [3, 10], que consiste en convertir el G-espacio en una colección de fibrados principales sobre variedades con borde, relacionados por unas complejas relaciones de pegado que dependen de las estructuras transversales a los estratos. Nuestra aproximación al problema de las singularidades, en cierta familia de G-espacios, consistirá en encontrar una variedad diferenciable que recubra los puntos singulares. Esta variedad será un G-espacio con singularidades más simples que las del G-espacio de partida. Como se indicará al final de este capítulo, existe una relación entre las explosiones de Jänich y nuestro mecanismo de eliminación de singularidades.

El primer conjunto de singularidades que resolveremos serán las generadas por la acción de un grupo cristalográfico. Supongamos que W es un grupo cristalográfico que actúa en el espacio vectorial real V de dimensión finita, con un sistema de raíces asociado Φ. Supondremos además que el espacio de puntos fijos por W es nulo: $V^W = 0$. El caso en el que W actúa trivialmente en un subespacio mayor que el nulo será consecuencia del anterior. Consideremos una variante de la acción de W en Φ: Sea V^* el espacio dual de V, y denominemos Φ^* a las ecuaciones de los hiperplanos de reflexión del sistema de raíces dadas por los elementos duales a las raíces. Teniendo en cuenta que W actúa isométricamente podemos extender de manera natural a Φ^* la acción de W en Φ. Como consecuencia, existe una dualidad completa entre la acciones de W en Φ y Φ^*. El siguiente resultado permitirá calcular las singularidades que aparecen después de una explosión:

Lema 4.1 *Sean $\alpha, \beta \in \Phi$ vectores linealmente independientes, y consideremos la reflexión asociada s_α y el hiperplano de reflexión h_β. Son equivalentes:*

1. $\alpha \perp \beta$.
2. s_α *deja invariante* h_β.
3. s_α *y* s_β *conmutan.*

Demostración: Teniendo en cuenta que $v \in h_\beta$ ssi $v \perp \beta$, y que $s_\alpha(v)$ es combinación lineal de v y α, ambos ortogonales a β, la equivalencia entre (1) y (2) es evidente.

Supongamos ahora que s_α y s_β conmutan. Entonces $s_\alpha s_\beta(\alpha) = s_\beta s_\alpha(\alpha) = s_\beta(\alpha)$. Teniendo en cuenta el primer y el último términos de las igualdades se deduce que o bien $s_\beta(\alpha) = \alpha$ o bien $s_\beta(\alpha) = -\alpha$. El segundo resultado no es posible dado que α, β son independientes, por tanto ha de ser cierto el primero, y tendremos entonces $\alpha \perp \beta$.

Supongamos que α y β son perpendiculares. Tenemos entonces que para cualquier $v \in V$ se verifica:

$$s_\alpha s_\beta(v) \quad = \quad s_\alpha(v - 2\frac{\langle v, \beta\rangle}{\langle \beta, \beta\rangle}\beta) \quad = \quad v - 2\frac{\langle v, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha - 2\frac{\langle v, \beta\rangle}{\langle \beta, \beta\rangle}s_\alpha(\beta).$$

Pero por ser perpendiculares, $s_\alpha(\beta) = \beta$, de manera que la expresión arriba resulta simétrica respecto al intercambio de α y β. $\square$

Como sabemos, las singularidades de las acciones cristalográficas - en general, de los grupos de Coxeter - consisten en la unión de los hiperplanos de reflexión. El complemento de este conjunto, abierto denso, es el de los puntos regulares. Como consecuencia del lema anterior, podemos determinar con facilidad la isotropía de un elemento de Φ^*, considerándolo como un hiperplano:

Corolario 4.2 *La isotropía de $\phi^* \in \Phi^*$ es isomorfa al grupo generado por las reflexiones s_α que conmutan con s_ϕ. Ese grupo es un subgrupo parabólico de W.*

Demostración: Recordando la dualidad entre la acciones de W en V y V^*, necesariamente la isotropía de ϕ^* es un subgrupo parabólico de W, dado que la acción de W en V^* es cristalográfica. Es decir, podemos construir el grupo de isotropía a partir de un subconjunto de las reflexiones simples que generan W (cf. Cap. 3). Por otro lado, la propiedad de conmutación es inmediata a partir del lema anterior. $\square$

Esta colección de resultados nos permite clasificar en dos clases las transformaciones de W relativas a un hiperplano de reflexión. En primer lugar, las que dejan invariante ese hiperplano y definen un sistema de raíces sobre el mismo. Estas transformaciones forman un subgrupo parabólico de W, formado por las transformaciones generadas por raíces simples contenidas en el hiperplano. En segundo lugar, aquellas transformaciones que no dejan invariante el hiperplano, y que por tanto definen una afinidad sobre otro hiperplano de reflexión.

Como un ejemplo del cálculo de la acción sobre un hiperplano consideremos el sistema de raíces A_4, cuyo diagrama de Coxeter es $\bigcirc - \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc$, y llamemos —de izquierda a derecha— α, β, γ, δ a las raíces simples del esquema. Si consideramos el hiperplano h_β, deducimos que s_α y s_γ llevan a h_β en otros hiperplanos, dado que las reflexiones s_α, s_γ están conectadas con s_β, y por tanto no conmutan. Naturalmente, s_β deja fijo h_β punto a punto, de manera que induce en éste la identidad. Finalmente s_γ induce un sistema de raíces de tipo A_1 en h_β, que es la acción heredada por el hiperplano.

Como puede comprobarse, la predicción de las singularidades que se inducen en los hiperplanos de reflexión es un sencillo cálculo sobre el diagrama de Coxeter del sistema de raíces.

4.2 Explosiones lineales.

La clave del procedimiento de explosión en sistemas de raíces se encuentra en que los hiperplanos de reflexión entran en el origen desde direcciones diferentes. En muchas situaciones -desde la geometría algebraica hasta la geometría diferencial- se explota este fenómeno para resolver las singularidades mediante un proceso de *blow up*: se aumenta la dimensión del espacio en una coordenada (proyectiva) que represente el ángulo con el que entran las diferentes variedades en el origen, tomando ese ángulo respecto a una referencia convenida. De esa manera, en el espacio ampliado las variedades se cruzan sobre el punto singular, pudiéndose recuperar la situación mediante un simple proceso de proyección.

En esta sección nos ocuparemos de una versión de este procedimiento de explosión, simplificada para adaptarse a nuestro caso lineal. En vez de considerar un espacio con una dimensión superior, tomaremos cada hiperplano por separado tras la explosión, de modo que nos pueda servir para definir cartas en futuros casos no lineales.

Sea Φ el sistema de raíces que aparece en el espacio vectorial V al actuar el grupo cristalográfico W. Para realizar las explosiones tendremos que considerar los hiperplanos de reflexión como entidades independientes. Esto nos lleva a considerar el conjunto

$$E \quad := \quad \{E_\phi \; : \; \phi \in \Pi\}$$

de variedades lineales de dimensión $\dim V - 1$, donde Π es un sistema positivo asociado a Φ (cf. Cap. 3), y cada uno de los E_ϕ es un espacio vectorial con una dimensión menos que V.

Para el procedimiento de explosión necesitaremos definir también una acción de W entre los hiperplanos explosionados, así que tendremos que definir qué entendemos como transformaciones admisibles entre estos conjuntos formados por uniones disjuntas de hiperplanos:

Definición 4.3 *Definimos una* transformación admisible *de E, y la denotamos $f : E \longrightarrow E$, como un conjunto de afinidades: $f = \{f_\phi : \phi \in \Pi\}$ de Π de forma que cada f_ϕ determina una afinidad entre los espacios E_ϕ y $E_{\sigma(\phi)}$, donde σ es una permutación de Π.*

Es decir, una transformación admisible de E consiste en una familia de afinidades entre sus hiperplanos, de manera que estas afinidades permutan unos con otros. De hecho, no es necesario considerar afinidades en absoluto. Todas las transformaciones que consideraremos serán lineales, al ser levantamientos de otras transformaciones lineales.

Observación 4.4 *Si E, E' son dos conjuntos con la misma cantidad de hiperplanos, y de la misma dimensión, es sencillo extender la noción de transformación admisible a esta situación. En lo sucesivo denominaremos $Adm(E)$ al* *conjunto de las transformaciones admisibles de E, y $Adm(E, E')$ al conjunto de las transformaciones admisibles entre dos familias de hiperplanos. Es sencillo comprobar que $Adm(E)$ es un grupo.*

Con estos conceptos se puede definir lo que entenderemos por la explosión del sistema de raíces Φ:

Definición 4.5 *Definimos la* explosión *del sistema de raíces Φ como el par (E, Ω), donde E es la familia de hiperplanos $E = \bigsqcup_{\phi \in \Pi} h_\phi$ formada por la unión disjunta de los hiperplanos de reflexión, y Ω es una representación fiel $\Omega : W \longrightarrow Adm(E)$, definida como: si $g \in G$, entonces cada $\Omega(g)$ está definida por las afinidades:*

$$\Omega(g) \;=\; \{l_g|_{h_\phi} \colon h_\phi \to h_{g\cdot\phi} \;,\; \phi \in \Pi\}$$

que consisten en las restricciones a los hiperplanos de la acción de W.

Es sencillo comprobar que las anteriores condiciones se pueden alcanzar para cualquier sistema de raíces:

Lema 4.6 *Todo sistema Φ puede ser explosionado.*

Demostración: Teniendo en cuenta la definición, basta comprobar que los términos que intervienen están bien definidos. Esto equivale a comprobar que cada $\Omega(g)$ es admisible, y que Ω es una representación fiel, es decir, que W es isomorfo a $\Omega(W)$. Ambos hechos son evidentes. $\square$

En lo sucesivo asociaremos a cada explosión (E, Ω) una correspondencia $i : E \longrightarrow V$, que lleva cada hiperplano h_ϕ de E en V mediante la inclusión. A esta correspondencia la denominaremos *inclusión* de la explosión en V. Cada una de las inclusiones $h_\phi \hookrightarrow V$ se denotará i_ϕ. Por la definición de la acción en las explosiones podemos decir que i es equivariante respecto a $\Omega(W)$. Como consecuencia, aquellas transformaciones de la explosión que fijan un hiperplano h_ϕ coinciden con las transformaciones de W que lo fijan, y se induce en cada hiperplano de E un sistema de raíces que podemos calcular en base a los resultados de la sección anterior.

Figura 4.1: El sistema de raíces A_2.

Figura 4.2: Explosión del sistema A_2.

El carácter cristalográfico de la acción en cada hiperplano de E conlleva la posibilidad de explosionar cada uno de ellos de manera recursiva, hasta eliminar todas las singularidades.

Desde el principio de este capítulo hemos asumido que el espacio de puntos fijos por todo W es trivial. En el caso de que $V^W \neq 0$, podemos hacer una descomposición del espacio compatible con la acción, $V = N \oplus F$, donde $F = V^W$, y N está en las condiciones del procedimiento de explosión desarrollado. En consecuencia, basta definir la explosión a partir de la de N. Una vez calculada, basta ampliar cada variedad en E multiplicándola por F, y extender acciones e isomorfismos trivialmente a F. Todas las propiedades demostradas a lo largo de este capítulo se siguen verificando en este caso ampliado.

4.3 Algunos ejemplos

Consideremos dos ejemplos sencillos de explosión de singularidades lineales. En primer lugar tomemos el sistema de raíces A_2, que se corresponde con el grupo diédrico triangular. Como es bien sabido, el diagrama de Coxeter de este sistema es $\bigcirc - \bigcirc$, y los hiperplanos de reflexión son tres rectas que pasan por el origen [Fig. 4.1].

Del sistema podemos deducir que no existen raíces ortogonales, de forma que al provocar la explosión no se producirán singularidades. Idéntica conclusión podemos sacar del diagrama de Coxeter, dado que las dos raíces simples están conectadas. Cada reflexión s_α, para $\alpha \in \Phi$, deja fija una de las rectas en tanto que intercambia las otras dos.

La explosión de este sencillo sistema lineal consiste en tomar un conjunto de tres rectas $E = \{r, s, t\}$ [Fig. 4.2], definiendo la acción Ω como la generada por el levantamiento de las reflexiones: tres afinidades entre las rectas, dejando cada una de ellas fija una recta diferente e intercambiando las otras dos. En la Figura 4.2 podemos ver una interpretación de i como proyección de las tres rectas sobre el sistema de partida.

Figura 4.3: Explosión del sistema $A_1 \times A_1 \times A_1$.

La clave del procedimiento de explosión es que se ha conseguido convertir el conjunto de los puntos singulares de V —originalmente tres rectas que se cortan— en una variedad —unión inconexa de tres rectas— conservando información sobre la configuración original. El origen ha explosionado sobre tres puntos, y ha dejado de ser singular.

Otro ejemplo simple, pero de naturaleza totalmente diferente lo constituye el sistema de raíces $A_1 \times A_1 \times A_1$ en $\mathbb{R}^3$ [Fig. 4.3]. De nuevo tenemos tres hiperplanos, pero en este caso son ortogonales dos a dos. El diagrama de Coxeter es $\bigcirc \ \bigcirc \ \bigcirc$, de donde podemos deducir que la explosión de los tres hiperplanos va a contener el sistema $A_1 \times A_1$ en cada uno de ellos. Este es el caso más singular que se puede dar en dimensión 3.

Una interpretación de la explosión sucesiva de las singularidades se encuentra en la Figura 4.3. En primer lugar, se obtienen tres planos, α, β, γ, cada uno de ellos con el sistema $A_1 \times A_1$ heredado del sistema de partida. Cada uno de estos sistemas contiene dos rectas r, s, en las cuales cada una de las reflexiones de $A_1 \times A_1$ actúa dejando fija una de las rectas en tanto que invierte la orientación de la otra. En consecuencia, la explosión de cada uno de los planos (Fig. 4.3, parte inferior) da lugar a las dos rectas, cada una de ellas con un punto singular como origen de la inversión de la orientación. Para resolver esta última singularidad podría hacerse una nueva explosión en la que se levanta un único punto de cada recta.

Como puede verse, la predicción del comportamiento de las singularidades después de una explosión es bastante sencillo, dado que se limita al análisis de los subgrupos parabólicos, que pueden obtenerse sin ningún problema de los diagramas de Coxeter.

4.4 Explosiones de Jänich.

Como se ha indicado al principio del capítulo, puede establecerse una relación entre las explosiones de Jänich [3, 10] y las explosiones lineales. El conocimiento de las explosiones de Jänich no es necesario para ninguno de los resultados de este capítulo, ni para la construcción desarrollada en las secciones previas, pero

Figura 4.4: Explosiones de Jänich en el sistema $A_1 \times A_1 \times A_1$.

es interesante dado que permite llegar igualmente a las explosiones lineales por un camino más largo.

Sin entrar en detalles profundos acerca de la construcción de Jänich, el procedimiento de explosión nace de observar que el estrato más singular de una acción siempre es una subvariedad cerrada del espacio total. En consecuencia, puede calcularse su fibrado normal en relación a la variedad ambiente. Si M es la G-variedad estudiada, y N es el estrato más singular, denominemos $\nu(M)$ al fibrado normal de N en M.

Podemos entonces derivar dos nuevos fibrados a partir del normal: el fibrado cilindro C_+N y el fibrado esfera ΣN de N. El segundo consiste en el fibrado de vectores normales unitarios a N en M, una especie de *tubo hueco* en torno a N, en tanto que el primero es el fibrado $\nu(N) \times_{\mathbb{R}^+} [0, +\infty)$, una especie de corona semiabierta en torno a N, que contiene a ΣN ([3], IV.1).

El proceso de explosión consiste en tomar el conjunto $(M - N) \cup \Sigma N$, que representa el espacio ambiente privado del estrato singular, que es sustituído por el *borde* ΣN. Para obtener una estructura de variedad con borde en este conjunto se emplea el fibrado C_+N, definiendo una carta mediante el teorema del entorno tubular ([3], IV.1).

Gracias a este mecanismo se consigue eliminar un estrato, al tiempo que se conserva la estructura normal al mismo.

El proceso de eliminación de estratos singulares puede continuarse inductivamente, eliminando cada vez estratos menos singulares. Si se aplica este mecanismo de explosión a un sistema de raíces, eliminando todos los estratos menos singulares que los hiperplanos, se obtiene una situación como la de la figura 4. El proceso inductivo de eliminación es considerablemente complicado, puesto que en cada paso hay que extender la acción a los bordes que van apareciendo, y hay que calcular las direcciones normales dichos bordes para obtener los fibrados normales necesarios en las siguientes explosiones. Es sencillo calcular estos fibrados en el caso cristalográfico; en el caso general de variedades, es también posible adaptar los fibrados a los bordes (cf. [10]).

La situación del sistema $A_1 \times A_1 \times A_1$ después de dos explosiones está representada en la Figura 4.4. La extensión de la acción cristalográfica a los bordes es la evidente. Para obtener la explosión lineal a partir de la de Jänich basta identificar los bordes de los hiperplanos (Fig. 4.4, parte inferior), obteniéndose el conjunto E, y la acción del grupo W.

En consecuencia, para obtener las explosiones lineales a partir de las de Jänich basta con eliminar todas las singularidades salvo las de codimensión 1, y a continuación identificar puntos opuestos de los bordes (puntos opuestos relativos al fibrado normal del estrato eliminado, no opuestos respecto al origen de V). Con esto se obtienen los hiperplanos y las acciones, así como la inclusión en un abierto denso de los hiperplanos. El resto de la inclusión se extiende por continuidad.

Capítulo 5

Resolución de singularidades en la sección.

Sea M una G-variedad riemanniana que admite una sección Σ, de acuerdo con las hipótesis que hemos establecido en los capítulos 1 y 2. En este capítulo nos centraremos en la explosión de las singularidades en el caso no lineal más sencillo, que corresponde a la sección Σ. Para explosionar la sección deberemos imponer la hipótesis adicional (cf. [11]):

Hipótesis 5.1 *Para cada $p \in M$, la representación del* slice *de G_p en $O(T_p(G\cdot p)^\perp)$ tiene como grupo de Weyl un grupo cristalográfico.*

Teniendo en cuenta el resultado de Dadok (Teorema 3.9, Capítulo 2), toda representación polar de un grupo conexo tiene como grupo de Weyl a un grupo cristalográfico, de forma que para satisfacer la anterior hipótesis basta exigir que cada subgrupo de isotropía de G sea conexo.

5.1 Estructura de los estratos en la sección.

Sea $p \in \Sigma \subseteq M$. Teniendo en cuenta el Teorema 3.4 del Capítulo 3, la representación del *slice* es polar y tiene como grupo de Weyl a W_p. Por la Hipótesis 5.1 este grupo es cristalográfico.

Esto da una idea de la estructura de las estratificaciones inducidas por W en Σ:

Figura 5.1: Una posible situación global.

Lema 5.2 *Si la sección Σ tiene singularidades, existe un estrato singular de codimensión 1. Además, si S_0 es un estrato minimal de Σ, entonces para cada entero n tal que $\dim S_0 \leq n \leq \dim \Sigma$, existe un estrato S' tal que $\dim S' = n$ y $S_0 \leq S'$ respecto al orden parcial entre los estratos introducido en la Sec. 1.4.*

Demostración: El resultado es inmediato si se observa que, para cada $p \in \Sigma$, el espacio tangente $T_p\Sigma$ es una sección para la representación del *slice* por p, y que se corresponde a través de la exponencial con una carta equivariante de Σ en p. Por tanto, el esquema de las singularidades en torno a cualquier punto es localmente un sistema de raíces. Esto implica inmediatamente la existencia de un estrato de codimensión 1 si hay singularidades (se corresponde con un hiperplano de reflexión), y la existencia de estratos de cualquier dimensión mayor que la de uno dado, generados por las intersecciones de los diversos hiperplanos. □

Es natural por tanto interpretar la estratificación de Σ como la resultante de intersecar variedades de codimensión 1. Para ello basta considerar los estratos de codimensión 1, que forman una subvariedad de Σ, y completarlos en un entorno de cada singularidad mayor tomando cartas, usando para ello los hiperplanos del sistema de raíces de esa singularidad. Sin embargo, las variedades que resultan de esta compleción no tienen por qué ser embebidas (ver Fig. 5.1). En el caso representado en la figura, una de las variedades completadas es inmersa, no embebida. Por tanto, para obtener un resultado correcto tendremos que explosionar cada una de las singularidades en Σ y definir una variedad diferenciable S^* cuya inmersión defina el conjunto de las singularidades de Σ. La variedad S^* deberá conservar todas las propiedades relevantes de la acción en los estratos.

5.2 Explosiones en la sección.

Para construir el espacio S^* procederemos por etapas:

5.2.1 Formación de un espacio topológico.

En lo que sigue, denominaremos S al conjunto de los puntos singulares de Σ.

Denotemos por D la unión de todos los estratos de Σ de codimensión mayor que 1. Como sabemos D es cerrado (cf. Cap. 1, Sec. 4). Si D es vacío, necesariamente los estratos de codimensión 1 forman una subvariedad diferenciable, dado que no pueden cortarse sin dar lugar a estratos de codimensión menor. En este caso la explosión de las singularidades es trivial: Los estratos de codimensión 1 forman una subvariedad cerrada de Σ, invariante por W. Así que podemos suponer que D es no vacío.

Dado $p \in \Sigma$, el teorema del *slice* afirma la existencia de una parametrización (inversa de una carta) $\eta_p : T_p\Sigma \to U_p$, donde U_p es un entorno abierto de p en Σ que no contiene otros estratos menos singulares que el de p, y de forma que tal parametrización es equivariante. Esta parametrización puede considerarse como análoga a la aplicación exponencial, salvo que está definida en todo $T_p\Sigma$.

Teniendo esto en cuenta, para cada $p \in S$, consideremos una explosión (E_p, Ω_p) del sistema de raíces inducido por la representación $W_p \longrightarrow O(T_p\Sigma)$. Adaptemos la notación empleada en el Cap. 4 para las explosiones lineales: denominaremos Φ_p al sistema de raíces de E_p; Π_p será un sistema positivo para Φ_p; cada uno de los hiperplanos de reflexión de E_p será denotado $h_{p\phi}$, de forma que $E_p = \bigsqcup_{\phi\in\Pi_p} h_{p\phi}$; a cada una de las transformaciones inducidas en E_p por elementos $g \in W_p$ la denominaremos $\Omega_p(g)$; finalmente, la inclusión de E_p en $T_p\Sigma$ se denotará i_p.

Definamos entonces el conjunto $\bigsqcup_{p\in D} E_p$, compuesto por todos los hiperplanos de reflexión de todos los sistemas de raíces sobre puntos de D. En este conjunto podemos tomar la topología suma de los hiperplanos, que hace abierto a cada uno de ellos. Como primer paso de la explosión, formaremos un espacio cociente; consideremos la siguiente relación de equivalencia en $\bigsqcup_{p\in D} E_p$:

Definición 5.3 *Para $v \in h_{p\phi}$, $w \in h_{q\psi}$, diremos $v \equiv w$ si y sólo si*

1. $\eta_p \circ i_p(v) \;=\; \eta_q \circ i_q(w)$.
2. $\eta_p \circ i_p(h_{p\phi}) \cap \eta_q \circ i_q(h_{q\psi})$ *es variedad de codimensión 1 en Σ.*

Definamos el espacio

$$Q = (\bigsqcup_{p\in D} E_p)/\equiv,$$

al que dotaremos de la topología cociente.

Es sencillo comprobar que la relación $\equiv$ es de equivalencia. Esencialmente, hace equivalentes puntos con proyección idéntica en Σ, con la condición de que se encuentren asociados al mismo hiperplano en el sistema de raíces de un punto singular. Esta última condición permite conservar los múltiples levantamientos de un mismo punto singular. Si la hubiésemos omitido, habríamos obtenido $Q = D$.

Definamos el espacio

$$S' := (S - D) \sqcup Q,$$

dotado de la topología suma. S' no es todavía el espacio que estamos buscando. La topología que hemos definido desconecta a $(S-D)$ de Q. Podemos considerar este último espacio como la explosión de cada uno de los puntos del conjunto D junto a una prolongación local del mismo hasta alcanzar la codimensión 1 respecto a Σ. Esta prolongación deberá ser identificada con puntos de $(S - D)$ para obtener finalmente la explosión de las singularidades.

5.2.2 Formación de una variedad.

Lema 5.4 *Q es una variedad diferenciable.*

Demostración: Para cada hiperplano $h_{p\phi}$ consideremos la proyección de cocientes $\pi_{p\phi} : h_{p\phi} \longrightarrow Q$. Esta proyección es una identificación, debido a la definición de la topología de Q, y dado que $h_{p\phi}$ es abierto en $\bigsqcup_{p\in D} E_p$.

Además $\pi_{p\phi}$ es inyectiva porque $\eta_p \circ i_p$ es biyectiva: dados $v, w \in h_{p\phi}$, $v = w$ si y sólo si $\eta_p i_p(v) = \eta_p i_p(w)$ si y sólo si $v \equiv w$. Puesto que las proyecciones $\pi_{p\phi}$ son identificaciones y biyectivas, son homeomorfismos. Por tanto, Q es localmente euclídeo.

Definamos la familia de cartas

$$\{(\pi_{p\phi}(h_{p\phi}), \pi_{p\phi}^{-1}\ ) \ : \ p \in D, \ \phi \in \Pi_p\}.$$

Estas cartas son compatibles, dado que si $(\pi_{p\phi}(h_{p\phi}), \pi_{p\phi}^{-1})$, $(\pi_{q\psi}(h_{q\psi}), \pi_{q\psi}^{-1})$ son dos cartas con $\pi_{p\phi}(h_{p\phi}) \cap \pi_{q\psi}(h_{q\psi})$ no vacío, entonces la composición $\pi_{p\phi}^{-1} \circ \pi_{q\psi}$ — restringida a los correspondientes abiertos —, conmuta por la definición de la relación de equivalencia con $(\eta_p i_p)^{-1} \circ (\eta_q i_q)$ — también restringida a los correspondientes abiertos — que es un difeomorfismo. Disponiendo de una familia de cartas compatibles cuyos abiertos recubren Q, determinamos una única estructura diferenciable para Q. $\square$.

Definamos ahora una relación de equivalencia en S'. En primer lugar, si $x \in S-D$, $[v] \in Q$, definiremos $x \approx [v]$ ssi $\eta_p i_p(v) = x$ para algún representante $v \in h_{p\phi}$ de $[v]$. Obviamente esta relación es compatible con $\equiv$. Completemos la relación de equivalencia en todo S' exigiendo $x \approx x$ para todo $x \in S'$.

Definición 5.5 *Definiremos la primera explosión de Σ como el cociente $S^* := S'/\approx$.*

Observación 5.6 *La relación de equivalencia $\approx$ es una relación de pegado entre las variedades Q y $S-D$ mediante un difeomorfismo entre abiertos de ambas. Si consideramos el abierto de Q formado por los puntos $[v]$ tales que $\eta_p i_p(v) \notin D$ (para algún representante $v \in h_{p\phi}$), el difeomorfismo es el que lleva $[v]$ en $\eta_p i_p(v)$.*

Es fácil comprobar que el pegado de variedades por un difeomorfismo entre abiertos no siempre es una variedad diferenciable. Sin embargo, en el caso de Q y $S-D$ se obtiene la estructura de variedad sin más que observar las situaciones locales:

Proposición 5.7 *S^* es variedad diferenciable.*

Demostración: Como hemos indicado, $\approx$ asocia un abierto de Q a otro de $S-D$ mediante un difeomorfismo: El abierto en Q, compuesto por los puntos que no son explosión de uno de D, es llevado sobre $S-D$ mediante una cadena de difeomorfismos, $\eta_p \circ i_p \circ \pi_{p\phi}^{-1}$. La situación local en esta correspondencia, respecto a la carta $(\pi_{p\phi}(h_{p\phi}), \pi_{p\phi}^{-1})$, es clara: el abierto $\pi_{p\phi}(h_{p\phi})$ es difeomorfo a un hiperplano $h_{p\phi}$ que contiene el sistema de raíces obtenido por levantamiento lineal de Φ_p, tal y como se detalló en el Cap. 4, Sec. 1, y que no es otro que el sistema de raíces Φ_p restringido al hiperplano $h_{p\phi}$. Por otro lado, el abierto de $S-D$ que se pega a $\pi_{p\phi}(h_{p\phi})$ es difeomorfo a $h_{p\phi}$ menos ese mismo sistema de raíces. Entonces, desde el punto de vista local, el pegado es la inclusión de un espacio vectorial al que se ha quitado un conjunto de hiperplanos en ese mismo espacio vectorial completo. Es decir, localmente el pegado es la función

Figura 5.2: Ejemplo de identificación $\approx$.

identidad. Como consecuencia, en las zonas de pegado podemos emplear las cartas $(\pi_{p\phi}(h_{p\phi}), \pi_{p\phi}^{-1})$ para representar entornos de S^*.

Un ejemplo sencillo de esta situación se encuentra en la Figura 5.2.2. En este ejemplo, al abierto del espacio $S - D$ se le pega $h_{p\phi}$ completando así la franja que deja en este abierto la eliminación de los puntos singulares. $\square$

En resumen, la variedad S^* puede considerarse como la variedad $S - D$ ampliada con la explosión Q de las singularidades de D. Además, las cartas de Q permiten representar la situación en las zonas de pegado.

5.2.3 S^* es W-espacio.

Comencemos por definir una acción en Q. Existe una acción natural para este espacio dada por la acción en Σ:

Proposición 5.8 *Q es W-variedad diferenciable.*

Demostración: Si $[v] \in Q$, $g \in W$ y consideramos un representante $v \in h_{p\phi}$, construyamos en primer lugar una *transformación admisible* (cf. Obs. 4.4) $\mathcal{L}_g : E_p \longrightarrow E_{g \cdot p}$ entre las explosiones E_p y $E_{g \cdot p}$ a partir de la diferencial $l_{g*} : T_p\Sigma \longrightarrow T_{g \cdot p}\Sigma$ de la traslación l_g.

Los conjuntos E_p y $E_{g \cdot p}$ tienen la misma cantidad de hiperplanos, y de hecho se corresponden con sistemas de raíces idénticos, al ser explosiones de puntos sobre la misma órbita. El isomorfismo lineal l_{g*} induce una biyección σ entre los hiperplanos asociados a Φ_p y los asociados a $\Phi_{g \cdot p}$. La restricción de l_{g*} a cada uno de los hiperplanos de Φ_p da lugar a una familia de isomorfismos lineales

$$\mathcal{L}_g = \{l_{g*|h_{p\phi}} : h_{p\phi} \longrightarrow h_{g \cdot p\ \sigma(\phi)}\}_{\ \phi \in \Pi_p}$$

que constituye una transformación admisible entre las dos explosiones. Observemos que en el caso de que $g \in W_p$, la acción coincide con la de la explosión: $\mathcal{L}_g = \Omega_p(g)$. En otro caso, consiste en tomar la diferencial entre los correspondientes hiperplanos de las explosiones.

Definamos la acción de g en $[v]$ como:

$$g \cdot [v] \ := \ [l_{g*|h_{p\phi}}(v)].$$

Esta definición es consistente con la relación de equivalencia $\equiv$ de manera evidente: si $w \in h_{q\psi}$ es equivalente a v, entonces las dos condiciones para la equivalencia de las imágenes se deducen de:

$$\eta_{g\cdot p} \circ i_{g\cdot p} \circ \mathcal{L}_g(v) \ = \ \eta_{g\cdot p} \circ l_{g*} \circ i_p(v) \ = \ l_g \circ \eta_p \circ i_p(v). \tag{5.1}$$

Como el mismo resultado vale para w, se cumple la primera condición de compatibilidad.

La prueba de la segunda condición es consecuencia de la primera: si $(\eta_p \circ i_p)(h_{p\phi}) \cap (\eta_q \circ i_q)(h_{q\psi})$ es subvariedad de codimensión 1, entonces, aplicando la relación 5.1 tenemos:

$$(\eta_{g\cdot p} \circ i_{g\cdot p})(h_{g\cdot p\sigma(\phi)}) \ \cap \ (\eta_{g\cdot q} \circ i_{g\cdot q})(h_{g\cdot q\sigma'(\psi)}) \ = \ l_g\left(\eta_p i_p(h_{p\phi}) \ \cap \ \eta_q i_q(h_{q\psi})\right)$$

Por tanto las transformaciones están bien definidas.

Veamos a continuación que estas transformaciones definen una acción (cf. Cap 1, Sec 1.1). En primer lugar, si e es el elemento neutro de W, es evidente por la definición de las transformaciones que $e \cdot [v] = [v]$ para todo $[v] \in Q$. En segundo lugar, podemos escribir

$$g \cdot (h \cdot [v]) \ = \ [l_{h*|h_{g\cdot p \ \sigma(\phi)}} \circ l_{g*|h_{p\phi}}(v)] \ = \ [l_{gh*|h_{p\phi}}(v)] \ = \ (gh) \cdot [v].$$

De forma que en efecto W actúa como un grupo en Q.

Finalmente, es fácil concluir que la acción es diferenciable en Q, dado que entre dos hiperplanos de reflexión (cartas para Q) se comporta como una aplicación lineal. $\Box$.

En consecuencia, además de la acción en $S - D$, conjunto invariante, tenemos una acción de W en Q. Esto nos permite definir la acción en todo S^*.

Corolario 5.9 *S^* es W-variedad diferenciable.*

Demostración: Lo único que hemos de comprobar es que la relación de equivalencia $\approx$ es compatible con la acción, lo que es equivalente a probar que el difeomorfismo de pegado entre Q y $S-D$ es equivariante. Este difeomorfismo (5.6) era el que llevaba $[v]$ en $\eta_p i_p(v)$. Teniendo en cuenta que según la relación 5.1 se cumple:

$$\eta_{g\cdot p} \circ i_{g\cdot p} \circ \mathcal{L}_g(v) \;=\; l_g \circ \eta_p \circ i_p(v),$$

es evidente el carácter compatible de $\approx$ con las acciones en Q y $S-D$. $\square$

Desde un punto de vista práctico es suficiente con saber cómo actúa W en $S-D$, y cómo actúa en cada una de las cartas $(\pi_{p\phi}(h_{p\phi}), \pi_{p\phi}^{-1})$. Debido a la compatibilidad de la acción, ésto cubre todos los puntos de S^*.

Observación 5.10 *Respecto a las cartas* $(\pi_{p\phi}(h_{p\phi}), \pi_{p\phi}^{-1})$ *las singularidades de* S^* *presentan una estructura cristalográfica, cuya configuración es la obtenida de la explosión lineal. Como en la variedad* S^* *los puntos de* $S-D$ *son regulares, se deduce que* S^* *hereda la estructura cristalográfica de* Σ *y por ello puede repetirse el proceso de explosión.*

5.2.4 Construcción de la inclusión.

El resultado esencial es el siguiente:

Proposición 5.11 *Existe una inmersión diferenciable equivariante* $h : S^* \to \Sigma$ *tal que* $h(S^*) = S$.

Demostración: Definamos $h_{|S-D} := Id_{S-D}$, la inclusión de la subvariedad $S-D$. Naturalmente, en este abierto h es una inmersión diferenciable. Tomando cada una de las cartas $(\pi_{p\phi}(h_{p\phi}), \pi_{p\phi}^{-1})$, podemos definir de una manera compatible la aplicación h en los puntos de $\pi_{p\phi}(h_{p\phi})$ como $h := \eta_p \circ i_p \circ \pi_{p\phi}^{-1}$. Esta definición es consistente con las relaciones de equivalencia y define una inmersión al ser composición de difeomorfismos. También es consistente con la inclusión de $S-D$. Obsérvese que esta definición de h es la que daba la relación de pegado entre Q y $S-D$.

La prueba del carácter equivariante es sencilla: por un lado el conjunto $S-D$ es invariante, y la inclusión es equivariante. Por otro lado, la definición de la inmersión h en las singularidades es equivariante al ser equivariante todas las funciones que la definen. $\square$

5.2.5 Recursividad.

Un único proceso de explosión, como sabemos, no es suficiente para eliminar todas las singularidades de un espacio. Es necesario reiterar estos procesos para obtener una resolución completa. El único elemento que hemos empleado para la primera explosión es la existencia de un W-espacio con estratos de estructura cristalográfica a través de la representación del *slice* dada por la aplicación exponencial. Por lo tanto, si transladamos la métrica invariante desde Σ a S^*, mediante un proceso de *pullback*, podremos reiterar el procedimiento de explosión. Para ello es necesario que esa métrica de *pullback* sea invariante.

Lema 5.12 *La métrica de* pullback *por h es invariante para la acción de W en S^*.*

Demostración: Como en $S - D$ la inmersión h es la inclusión, la métrica es invariante en un abierto denso de S^*, por lo tanto en todo S^*. □

En consecuencia, se obtiene

Teorema 5.13 *Sea Σ sección para una acción polar con singularidades, sujeta a la hipótesis 5.1.1. En estas condiciones existe un W-espacio riemanniano S^* y una inmersión isométrica $h : S^* \longrightarrow \Sigma$ tal que $h(S^*) = S$. La dimensión de S^* es una unidad menor que la de Σ. Si además S^* tiene singularidades éstas pueden explosionarse de manera análoga, y así sucesivamente hasta formar una cadena finita de W-espacios riemannianos e inmersiones isométricas*

$$\cdots \longrightarrow S^{**} \longrightarrow S^* \longrightarrow \Sigma$$

donde cada variedad resuelve las singularidades de la anterior.

Este teorema nos permite, por ejemplo, refinar el conocido resultado de que la unión de estratos de dimensión menor o igual que una dada son un cerrado:

Corolario 5.14 *Para una acción como la descrita, la unión de todos los estratos de codimensión mayor o igual que una dada es la imagen de la inmersión isométrica de una variedad diferenciable.*

Este corolario puede considerarse un resultado de estructura para las singularidades en las secciones de aquellas acciones polares que cumplen la Hipótesis 5.1.

5.3 Estructura de los estratos en M.

Al contrario de lo que sucede con los estratos en Σ, no existe un escalonamiento perfecto para las dimensiones de los estratos en M. Para comprobar esto basta con analizar un ejemplo:

Ejemplo 5.15 *Consideremos la acción adjunta del grupo de Lie A_2, que es polar y tiene como sección un toro maximal de dimensión 2. El grupo de Lie A_2 es de dimensión 8 (dado que se corresponde con $SU(3)$; también puede deducirse de su álgebra de Lie, que tiene 6 raíces y una subálgebra de Cartan de dimensión 2). Como A_2 es semisimple, su centro es discreto. De ello deducimos que sus singularidades de orden 1 han de ser de dimensión mayor o igual que 2. Si ésto no fuera así — obsérvese el diagrama de Stiefel de A_2 en el Apéndice A — las singularidades de orden 1 de un toro maximal (que corresponden a circunferencias en ese toro) estarían contenidas en todos los toros, por lo que el centro de A_2 tendría dimensión mayor o igual que 1, lo que contradice que A_2 sea semisimple. Pero las singularidades de orden 2 de A_2 son su centro, que es de dimensión cero (el centro de A_2 es $\mathbb{Z}_3$). Esto nos da la estructura de las singularidades de A_2: las singularidades de orden 2 son tres puntos, en tanto que las singularidades de orden 1 constituyen una variedad conexa de dimensión mayor que 1; el resto de los puntos de A_2 son regulares.*

La discontinuidad en las dimensiones de los estratos en M causa una primera obstrucción al intento de reproducir el mecanismo de explosión empleado en la sección anterior. Antes de discutir si se puede, pese a todo, usar ese método, consideremos un mecanismo alternativo.

El Teorema 5.13 puede extenderse de manera directa a M, obteniéndose sin embargo un resultado de explosión débil. Consideremos la sucesión de inmersiones de dicho teorema:

$$\cdots \longrightarrow S^{**} \longrightarrow S^{*} \longrightarrow \Sigma$$

Cada una de las explosiones $S^*, S^{**}, \ldots$ es un W-espacio, en consecuencia también un $N(\Sigma)$-espacio, de manera que podemos aplicar el funtor $G \times_{N(\Sigma)} \cdot$ ([2], II.2), para obtener la sucesión equivariante:

$$\cdots \longrightarrow G \times_{N(\Sigma)} S^{**} \longrightarrow G \times_{N(\Sigma)} S^{*} \longrightarrow G \times_{N(\Sigma)} \Sigma$$

El espacio $G \times_{N(\Sigma)} \Sigma$ puede llevarse naturalmente en M mediante la aplicación $[g,p] \rightsquigarrow g \cdot p$, de manera que tenemos la sucesión equivariante:

$$\cdots \longrightarrow G \times_{N(\Sigma)} S^{**} \longrightarrow G \times_{N(\Sigma)} S^{*} \longrightarrow M \tag{5.2}$$

del todo análoga a la del Teorema 5.13. Sin embargo, el carácter de inmersión de los morfismos equivariantes se pierde irremediablemente en este proceso, incluso para las singularidades de orden menor, como es fácil comprobar.

Ejemplo 5.16 *En efecto, volvamos sobre el ejemplo de A_2. En este espacio las singularidades en la sección son tres circunferencias sobre un toro maximal. Si consideramos un punto p, singular de orden 1, es sencillo*[1] *hallar un vector $X \in \mathcal{A}_2$ del álgebra de Lie de A_2 tal que $\exp(tX) \cdot p = p$ y $\exp(tX) \notin N(\Sigma)$ para todo t próximo a 0. En estas condiciones, todos los puntos de la forma $[\exp(tX), p] \in G \times_{N(\Sigma)} S^*$, para t próximo a cero, son distintos (dado que $\exp(tX) \notin N(\Sigma)$) y sin embargo se proyectan sobre el punto p de M según el diagrama 5.2. Así que ni siquiera para las singularidades de orden 1 el diagrama 5.2 está formado por inmersiones. De la misma manera puede comprobarse que para singularidades de orden mayor que el primero los morfismos no son inmersiones.*

Es razonable preguntarse si este resultado débil de explosión es mejorable. La situación en A_2 parece sugerir que se podría explosionar cada singularidad de orden 2 en tres puntos, de manera que las singularidades de A_2 fueran una subvariedad inmersa que se autointerseca tres veces en cada una de las singularidades de orden 2. Esto sería, en esencia, lo que resultaría de repetir un procedimiento análogo al realizado en la sección anterior para Σ. Sin embargo, se plantea un serio obstáculo a la hora de determinar cómo sería el tangente por una singularidad de orden 2 a los estratos singulares maximales. Este obstáculo puede resumirse en el siguiente lema:

Lema 5.17 *Si p es singularidad de al menos orden 2, y la acción de G_p en T_pM es irreducible, entonces cada G_p-órbita en T_pM genera, o bien T_pM, o bien el espacio trivial* 0.

[1] Por ejemplo, basta tomar un generador de $(A_2)_p$ que no esté en la isotropía de un punto regular contenido en un *slice* pasando por p.

Demostración: Supongamos que para un $v \in T_pM$, el espacio generado $V = \langle G_p \cdot v \rangle \subseteq T_pM$ sea un subespacio propio T_pM. En estas condiciones, la descomposición ortogonal $T_pM = V \oplus V^{\perp}$ respecto a la métrica invariante hace reducible la acción de G_p, lo que supone una contradicción. $\square$

Este resultado afirma que un estrato singular de M *entra* en los estratos más singulares desde todas las direcciones a la vez. No se conserva el resultado simple para Σ, donde los estratos *entraban* en las singularidades siguiendo direcciones bien definidas. Esto nos impide determinar, como se hizo en la sección anterior, unos hiperplanos en cada singularidad que se correspondan con las direcciones de *entrada* de los estratos menos singulares. Estos hiperplanos serían para M, sencillamente, todo el espacio.

Ejemplo 5.18 *Esta situación puede verse claramente en la acción de A_2: los puntos singulares de orden 2 tienen por isotropía a todo A_2, y la representación en el tangente a esos puntos es precisamente la representación adjunta de A_2, que es irreducible. No es posible, por tanto, definir hiperplanos por las singularidades de orden 2 que permitan hacer explosiones como en la sección 5.2.*

Debe considerarse el Teorema 5.13 como una propiedad muy particular de las secciones de las acciones polares, relacionada con el carácter discreto del grupo de Weyl generalizado. El resultado más aproximado al Teorema 5.13 que se cumple para M es entonces la existencia de la cadena de morfismos equivariantes formada por funtorización respecto a $G \times_{N(\Sigma)} \cdot$

Bibliografía

[1] Chevalley, C. *Theory of Lie Groups.* Princeton, 1946.

[2] Bredon, Glen E. *Introduction to Compact Transformation Groups.* Academic Press, 1972.

[3] Davis, Michael. Smooth G-Manifolds as Collections of Fiber Bundles. *Pacific J. Math*, Vol. 77. No. 2 (1978).

[4] Macías, E; Sanmartín, E. Manifolds of Maps in Riemannian Foliations. *Geometriae Dedicata* (1999).

[5] Palais, Richard S.; Terng, Chuu-Lian. A General Theory of Canonical Forms. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 300 (1987).

[6] Dadok, J. Polar Coordinates Induced by Actions of Lie Groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 288 (1985).

[7] Klingenberg, W. *Riemannian Geometry.* de Gruyter Studies in Mathematics 1, 1982.

[8] Humphreys, J. E. *Reflection Groups and Coxeter Groups.* Cambridge University Press, 1997.

[9] Bourbaki, N. *Groupes et Algébres de Lie, Ch. 4-6.* Hermann, Paris, 1968.

[10] Jänich, K. On the Classification of $O(n)$-Manifolds. *Math. Annalen*, **176** (1968), pp. 53-76.

[11] Michor, P. Basic Differential Forms for Actions of Lie Groups. *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 124 (1996).

[12] Michor, P. Basic Differential Forms for Actions of Lie Groups II. *Porc. Amer. Math. Soc.* Vol. 125 (1997).

[13] Szenthe, J. A Generalization of the Weyl Group. *Acta Math. Hungarica*, No. 41 (1983).

[14] Palais, R. *Slices and Equivariant Imbeddings*, artículo de la obra:

Borel, A. *Seminar on Transformation Groups.* Annals of Math. Studies, Princeton University Press, Princeton, 1960.

[15] Humphreys, J. E. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer-Verlag, 1972.

[16] Glaeser, G. Fonctions Composées Différentiables. *Ann. of Math.* Vol. 77, No. 1 (1963)

[17] Mather, J. N. Differentiable Invariants. Topology, Vol. 16 (1977), pp. 145-155.

[18] Bröcker, Theodor; tom Dieck, Tammo *Representations of Compact Lie Groups.* Springer Verlag, 1985.

[19] Hiller, H. *Geometry of Coxeter Groups.* Research Notes in Mathematics. Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[20] Conlon, L. Variational completeness and K-transversal domains. *J. Differential Geom.* **5** (1971).