ANTONIO SOTELO ARMESTO

EL GRUPO DE DIFEOMORFISMOS DEL ESPACIO DE HOJAS DE UNA FOLIACIÓN DE LIE DESDE EL PUNTO DE VISTA DIFEOLÓGICO

99

2003

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

El grupo de difeomorfismos del espacio de hojas de una foliación de Lie desde el punto de vista difeológico.

Antonio Sotelo Armesto

17 de septiembre de 2003

EL GRUPO DE DIFEOMORFISMOS DEL ESPACIO DE HOJAS DE UNA FOLIACIÓN DE LIE DESDE EL PUNTO DE VISTA DIFEOLÓGICO

Antonio Sotelo Armesto

Memoria realizada bajo la dirección del Prof. Dr. D. Enrique Macias Virgós en el Dpto. de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, para optar al Grado de Licenciado.

Índice General

Introducción

Un problema clásico en Geometría Diferencial es el estudio de una variedad diferenciable en la cual tenemos una división en estratos u hojas, es decir, una foliación. Tiene especial importancia el estudio del espacio de hojas de la foliación (la estructura transversa), el cual no tiene por qué ser una variedad diferenciable (salvo si la foliación es simple). Este problema puede resolverse introduciendo el concepto de espacio difeológico (ver [9]), que es una generalización de las variedades diferenciables y nos permite dotar de una estructura diferenciable al espacio de hojas de una foliación como espacio difeológico cociente. En esta Memoria nos centraremos en este último concepto, pero además nos restringiremos al estudio de foliaciones de Lie sobre una variedad compacta. Para este caso demostramos un teorema de G. Hector-E. Macias [9], que permite calcular explícitamente el grupo de difeomorfismos del espacio de hojas. Haremos una exposición de algunos resultados clásicos sobre foliaciones de Lie, para finalmente centrarnos fundamentalmente en las foliaciones lineales en el toro T^{n+1} y en foliaciones que modelan sobre el grupo de Heisenberg. Más concretamente:

En el Capítulo 1 recordamos la noción de fracción continua y sus propiedades elementales. Analizamos la ecuación de Pell $X^2 - Y^2 d = 1$, que es una ecuación clásica de Teoría de Números, y resolvemos el problema de existencia de soluciones no triviales utilizando propiedades elementales de las fracciones continuas. Finalmente estudiamos las unidades del anillo $Z[\sqrt{d}]$, que son la solución de una ecuación entera que generaliza la ecuación de Pell. Su estructura como grupo multiplicativo viene indicada por el teorema de las unidades de Dirichlet, que es un teorema clásico de Álgebra.

En el Capítulo 2 definimos el concepto de espacio difeológico, de Souriau [16]. La noción de espacio difeológico incluye como caso particular las variedades diferenciables y permite trabajar de manera natural con espacios de funciones y colímites. Después damos las definiciones elementales, para posteriormente analizar las construcciones básicas, tales como cocientes de espacios difeológicos que poseen una difeología natural compatible con la del espacio difeológico donde está definida la relación de equivalencia. Cabe destacar que en este caso nos separamos de la topología, dado que podemos tener cocientes con topología trivial, pero sin embargo la difeología inducida en el cociente no es trivial. Finalmente introducimos la generalización adecuada de grupo de Lie, es decir, grupo difeológico y damos algunas propiedades elementales. La referencia básica es el artículo de Hector-Macias [9].

En el Capítulo 3 nos centramos en el caso de espacios de hojas de foliaciones de Lie sobre una variedad compacta, los cuales estarán dotados de la estructura natural de espacio difeológico cociente. Comentamos algunos resultados básicos de la teoría de E. Fedida [4] y analizamos la estructura transversa a la foliación, la cual vendrá modelada por una Q-variedad y cuyo espacio de hojas será difeomorfo (como espacio difeológico) al cociente G/Γ de un grupo de Lie por un subgrupo finitamente generado. Demostramos una propiedad de levantamiento, que generaliza la teoría de cubiertas de grupos de Lie al caso de grupos difeológicos, que aplicaremos en posteriores cálculos. En el caso de una foliación con hojas densas demostramos de manera detallada un teorema de [9] que permite hacer un cálculo efectivo del grupo de difeomorfismos (en sentido difeológico) de la foliación de Lie. Deducimos algunas consecuencias de la propiedad de levantamiento, concretamente cuándo dos foliaciones de Lie inducen espacios de hojas difeomorfos. Observamos además que la 1-forma que define la foliación está determinada por la foliación de Lie salvo un automorfismo del álgebra de Lie donde modela la foliación.

En el Capítulo 4 discutimos ciertas foliaciones lineales en el toro T^{n+1}, normalmente con hojas densas. Empezamos haciendo un estudio sobre las foliaciones lineales con hojas densas en el toro T^2, para las que calculamos el grupo de difeomorfismos del espacio de hojas y caracterizamos las foliaciones de Lie que inducen espacios de hojas difeomorfos utilizando los resultados del Capítulo 3, reobteniendo un resultado de P. Donato [3] . Después generalizamos el resultado anterior al caso de una foliación lineal de codimensión 1 en T^{n+1} y al caso de un flujo lineal de Lie con órbitas densas en el toro T^{n+1}. Este caso es especialmente importante, pues P. Caron [2] ha demostrado que para todo flujo de Lie con hojas densas en una variedad compacta M, el grupo transverso es R^n, la variedad M es difeomorfa a un toro T^{n+1} y el flujo es conjugado a uno lineal. Posteriormente analizamos el caso de foliaciones transcendentes estudiadas por B. Herrera [5], donde observamos la rigidez de la foliación en el cálculo del grupo de difeomorfismos del espacio de hojas, y extendemos un Lema de [5] a cualquier foliación lineal en el toro T^{n+1}. Además debilitamos la condición de foliación lineal transcendente por otra donde se siguen verificando las mismas propiedades y acabamos el Capítulo con una propiedad de levantamiento en el caso del toro T^{n+1}.

En el Capítulo 5 analizamos las foliaciones de Lie modeladas transversalmente por el grupo de Heisenberg. En este caso no se pretende obtener resultados generales sino mostrar las dificultades del cálculo ya en el caso nilpotente, centrándonos en un ejemplo particular. Primero observamos la existencia de foliaciones de Lie en variedades compactas que modelan sobre un grupo de Lie nilpotente y que tienen asociadas un grupo de holonomía finitamente generado. Después nos centramos en el cálculo del grupo de automorfismos del álgebra de Lie de H_3 que preservan una familia particular de subgrupos densos y finitamente generados de H_3. Entonces volvemos a calcular el grupo de difeomorfismos de la foliación, el cual será isomorfo a una composición de productos semidirectos, así como las foliaciones con espacios de hojas difeomorfos. En este caso tanto los cálculos como los grupos finalmente obtenidos son más complicados, debido a que nos exige calcular los isomorfismos de R^2 que inducen automorfismos en un cierto subgrupo denso en R^2 (dado que H_3 es una extensión central de R y R^2), después tenemos que calcular los isomorfismos de R que inducen automorfismos en un cierto subgrupo denso en R y finalmente (lo que complica todo) analizar las condiciones de compatibilidad entre los automorfismos de R^2 y los de R para que induzcan automorfismos en el grupo de Heisenberg.

Por último, quiero mostrar mi agradecimiento al Profesor Enrique Macías Virgós, que ha dirigido esta tesina, por el tiempo empleado en resolver las dudas y problemas que iban surgiendo durante su elaboración. También quiero agradecer al Instituto de Matemáticas la concesión de una beca de colaboración con el Departamento de Geometría y Topología en mi último año de carrera para la realización de esta tesina.

Capítulo 1

Preliminares algebraicos

1.1 Fracciones continuas.

En esta sección recordaremos la noción de fracción continua y sus propiedades elementales las cuales serán aplicadas posteriormente en la ecuación de Pell. Para profundizar más sobre las fracciones continuas ver [1].

1.1.1 Fracción continua de un número racional.

Consideremos un número racional $\alpha = a/b$, con a entero y b entero positivo, a y b coprimos. Por el algoritmo de Euclides sabemos que existe un par de únicos enteros r_1 y q verificando $a = bq + r_1$ con $0 < r_1 < b$, por lo cual:

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}.$$

Si ahora volvemos aplicar el algoritmo de Euclides a b y r_1 obtenemos $b = r_1q_1 + r_2$ y $0 < r_2 < r_1 < b$; por lo tanto, $\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1}$. Por lo cual:

$$\frac{a}{b} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}.$$

Repitiendo el proceso para r_1 y r_2 obtenemos $r_1 = r_2 q_2 + r_3$, $0 < r_3 < r_2 < r_1 < b$ y entonces $\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_2}{r_3}$. Luego:

$$\frac{a}{b} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}}.$$

Tras un número finito de n iteraciones del proceso llegamos a:

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1} < ... < r_1 < b,$$

de donde deducimos la siguiente expresión:

$$\frac{a}{b} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots \, q_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}}}}}}.$$

Verificándose lo siguiente: $r_{n-1} = r_n q_n$, $r_{n+1} = 0$. Finalmente tenemos la siguiente expresión:

$$\frac{a}{b} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots \, q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}}} = [q; q_1, q_2, ..., q_n],$$

donde $q \in Z$ pero con $q_k \geq 1$ para todo $k \geq 1$ y además $q_n > 1$, y la cual se denomina *desarrollo del número racional α en fracción continua.*

Ejemplo 1.1 Consideremos la fracción $\frac{10}{7}$. Entonces $q = 1$, $q_1 = 2$ y $q_2 = 3$; $r_1 = 3$ y $r_2 = 1$. Luego:

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = [1; 2, 3].$$

1.1.2 Fracción continua de un número irracional.

Sea α un número irracional y sea $q = [\alpha]$ su parte entera; entonces $\alpha = q + \frac{1}{\alpha_1}$ con $\alpha_1 > 1$. Sea ahora $q_1 = [\alpha_1]$, entonces $\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}$ con $\alpha_2 > 1$; sea $q_2 = [\alpha_2]$, entonces $\alpha_2 = q_2 + \frac{1}{\alpha_3}$, con $\alpha_3 > 1$. Tenemos:

$$\alpha = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\alpha_3}}}.$$

Si continuáramos este proceso iterativo, tendríamos construida una sucesión de números enteros $q, q_1, q_2, ..., q_n, ...$ donde $q \in Z$ y $q_k \in Z^+ \quad \forall k \geq 1$. Entonces llamaremos *desarrollo en fracción continua del número irracional* α a la siguiente expresión:

$$\alpha = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots}}} = [q; q_1, q_2, ..., q_n, ...].$$

Ejemplo 1.2 Sea e el número de Euler. Su desarrollo en fracción continua es:

$$[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, ...].$$

1.1.3 Propiedades de las fracciones continuas.

Sea α un número real y $[q; q_1, q_2, ..., q_n, ...]$ su correspondiente desarrollo en fracción continua. Denotemos por

$$\delta_0 = \frac{q}{1}; \quad \delta_1 = q + \frac{1}{q_1} = \frac{qq_1 + 1}{q_1}$$

y

$$\delta_n = \frac{P_n}{Q_n} \quad \forall n \geq 1,$$

donde P_n y Q_n son el correspondiente numerador y denominador de la fracción relativa al desarrollo en fracción continua truncado $[q; q_1, q_2, ..., q_n]$ del número real α hasta el término n-ésimo.

Introduzcamos el convenio $P_{-1} = 1$, $P_0 = q$, $Q_{-1} = 0$ y $Q_0 = 1$. Entonces tenemos las siguientes propiedades de verificación inmediata:

1. El desarrollo de un número real α en fracción continua es único.
2. Sea α un número real y $[q;,q_1,q_2,...]$ su correspondiente desarrollo en fracción continua, entonces:
$$\alpha = q + \frac{1}{[q_1;q_2,q_3,...]}.$$
3. Se tiene
$$\begin{aligned} P_n &= q_nP_{n-1} + P_{n-2}; \\ Q_n &= q_nQ_{n-1} + Q_{n-2}, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$
4. Además
$$\begin{aligned} P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n &= (-1)^{n+1}; \\ P_nQ_{n-2} - P_{n-2}Q_n &= (-1)^n q_n, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$
5. P_n y Q_n son coprimos entre sí.
6. Por otra parte,
$$\begin{aligned} \delta_n - \delta_{n-1} &= \frac{(-1)^{n+1}}{Q_nQ_{n-1}}; \\ \delta_n - \delta_{n-2} &= \frac{(-1)^n q_n}{Q_nQ_{n-2}}, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$
7. Tenemos la siguiente ordenación para los Q_n:
$$1 \leq Q_0 \leq Q_1 < Q_2 < Q_3 < ... < Q_n < ...$$
y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} Q_n = \infty$.
8. Se cumple
$$\lim_{n\to\infty}(\delta_n - \delta_{n-1}) = 0.$$
9. La sucesión $\{\delta_n\}_{n\in N}$ converge a α. Pero además se tiene la siguiente acotación:
$$| \alpha - \delta_n |< \frac{1}{Q_n^2}, \tag{1.1}$$
la cual nos será útil más adelante, concretamente la utililizaremos en la ecuación de Pell-Fermat.

10. Tenemos las siguientes ordenaciones para las δ_n:

$$\delta_0 < \delta_2 < \delta_4 < ... < \delta_{2k} < ...$$

$$\delta_1 > \delta_3 > \delta_5 > ... > \delta_{2k+1} > ... \quad \forall k \geq 1.$$

Además cualquier fracción δ_{2k} de índice par es menor que cualquier fracción de índice impar.

Para el siguiente teorema ver [1].

Teorema 1.3 *Sea α un número real. Entonces α es un irracional cuadrático si y sólo si su desarrollo en fracción continua es periódico.*

Ejemplo 1.4 Consideremos $\alpha = \frac{7+\sqrt{53}}{2}$, el cual es claramente mayor que 1. Además verifica la ecuación $X^2 - 7X - 1 = 0$, de donde deducimos $\alpha = 7 + \frac{1}{\alpha}$. Pero como $\alpha > 1$, tenemos

$$[q; q_1, q_2, ...] = 7 + \frac{1}{[q; q_1, q_2, ...]}.$$

Por lo cual $q = q_1 = q_2 = q_3 = ...$, pero como $q = 7$ concluimos:

$$\alpha = [7; 7, 7, 7, ...].$$

1.2 La ecuación de Pell.

En esta sección esbozaremos la ecuación de Pell, también llamada ecuación de Pell-Fermat, que es una ecuación clásica de teoría de números y analizaremos la estructura de las soluciones de la ecuación, las cuales relacionaremos en los siguientes capítulos con un cierto grupo de difeomorfismos.

Consideremos la ecuación entera

$$X^2 - Y^2 d = 1,$$

con $\sqrt{d} \notin Z$. Ésta es la ecuación de Pell. Trataremos de hallar todos los pares de soluciones enteras (x, y) de la ecuación de Pell-Fermat, para lo que primero analizaremos el caso con $x > 0$ e $y > 0$. A partir de este caso se obtienen de manera inmediata los demás casos, considerando entonces los pares de la forma $((-1)^m x, (-1)^n y)$ con $m, n \in Z$.

1.2.1 Existencia de solución.

La primera pregunta que surge es: ¿Existen soluciones de la ecuación no triviales, es decir, distintas de los pares $(1,0)$ y $(-1,0)$?

Teorema 1.5 *Siempre existe al menos una solución (x,y) con $x>1$ e $y>0$ de la ecuación de Pell.*

Demostración:
Sea $\sqrt{d}=[q;q_1,q_2,...]$ el desarrollo en fracción continua correspondiente. Sean $\delta_n = P_n/Q_n$ con $n \geq 0$ los truncamientos del desarrollo en fracción continua de α correspondientes. Entonces por (1.1) tenemos

$$\mid \sqrt{d} - \frac{P_n}{Q_n} \mid < \frac{1}{Q_n^2},$$

de lo cual deducimos:

$$\mid P_n - Q_n\sqrt{d} \mid < \frac{1}{Q_n}$$

y por lo tanto, dado que Q_n es positivo por serlo $\sqrt{d}$,

$$P_n < Q_n\sqrt{d} + \frac{1}{Q_n}.$$

Pero ahora si le sumamos $Q_n\sqrt{d}$ obtenemos:

$$P_n + Q_n\sqrt{d} < 2Q_n\sqrt{d} + \frac{1}{Q_n},$$

con lo cual si multiplicamos por $\mid P_n - Q_n\sqrt{d} \mid < \frac{1}{Q_n}$ obtenemos finalmente:

$$\mid P_n^2 - dQ_n^2 \mid < 2\sqrt{d}+1.$$

Ahora si consideramos n impar y suficientemente grande por la propiedad (10) de las fracciones continuas tenemos

$$0 < P_n^2 - dQ_n^2 < 2\sqrt{d}+1,$$

pues δ_n tiende a $\sqrt{d}>0$. Como sólo hay un número finito de enteros entre 0 y $2\sqrt{d}+1$, deducimos que tiene que existir un número natural entero entre 0 y $2\sqrt{d}+1$ que se repita infinitas veces. Sea este número k. Entonces tenemos que existen infinitos enteros impares naturales n tales que verifican la ecuación:

$$P_n^2 - Q_n^2 d = k.$$

Denotaremos por (x_n, y_n) los pares de enteros positivos soluciones de la ecuación $X^2 - Y^2 d = k$.

Consideremos ahora estos pares de enteros respecto al módulo k:

$$[x_n] \equiv x_n (\mathrm{mod}\, k), \quad [y_n] \equiv y_n (\mathrm{mod}\, k),$$

siendo $[x_n]$ e $[y_n]$ las clases de resto de x_n e y_n módulo k respectivamente. Entonces es claro que los pares (x_n, y_n) sólo pueden tomar a lo sumo k^2 valores módulo k, por lo cual ha de existir un par (α, β) que se repite infinitas veces en la sucesión $\{([x_n], [y_n])\}_{n \in N}$. Luego tenemos infinitos pares enteros positivos (x'_n, y'_n) verificando:

$$(x'_n, y'_n) \equiv (\alpha, \beta)(\mathrm{mod}\, k)$$

y

$${x'_n}^2 - {y'_n}^2 d = \alpha^2 - \beta^2 d = k.$$

Consideremos dos soluciones distintas (x'_l, y'_l) y (x'_m, y'_m) de estas ecuaciones. Entonces:

$$(x'_l + y'_l \sqrt{d})(x'_m - y'_m \sqrt{d}) = x'_l x'_m - y'_l y'_m d + (x'_m y'_l - x'_l y'_m)\sqrt{d},$$

pero

$$x'_m \equiv x'_l \equiv \alpha (\mathrm{mod}\, k)$$

y

$$y'_m \equiv y'_l \equiv \beta (\mathrm{mod}\, k).$$

Por lo cual obtenemos:

$$x'_l x'_m - y'_m y'_l d \equiv \alpha^2 - \beta^2 d \equiv 0 (\mathrm{mod}\, k)$$

y

$$x'_l y'_m - x'_m y'_l \equiv \alpha\beta - \beta\alpha \equiv 0 (\mathrm{mod}\, k).$$

Finalmente tenemos:

$$(x'_l + y'_l \sqrt{d})(x'_m - y'_m \sqrt{d}) = k(u + v\sqrt{d}),$$

donde $u, v \in Z$. Análogamente:

$$(x'_l - y'_l \sqrt{d})(x'_m + y'_m \sqrt{d}) = k(u - v\sqrt{d}).$$

Multiplicando la dos últimas igualdades obtenemos:

$$k^2 = k^2(u^2 - dv^2),$$

por lo cual

$$u^2 - dv^2 = 1.$$

Pero como habíamos obtenido infinitos pares (x'_n, y'_n) tenemos que también existen infinitos pares (u, v) con $u, v \in Z$. De donde ha de existir un (u_0, v_0) con $v_0 \neq 0$ porque si no $u_0 = \pm 1$. Es claro que entonces podemos elegir un (u_0, v_0) con $u_0 > 1$ y $v_0 > 0$.

Q.E.D.

Nota

Apartir de ahora y por conveniencia vamos a denotar los pares enteros (x, y) soluciones de la ecuación de Pell por $x + y\sqrt{d}$.

1.2.2 La ecuación $X^2 - Y^2 d = -1$.

Si consideramos la ecuación

$$X^2 - Y^2 d = -1,$$

análoga a la ecuación de Pell pero para -1, puede no existir ningún par de enteros que la verifiquen.

Ejemplo 1.6 La ecuación:

$$X^2 - Y^2 3 = -1,$$

no puede tener soluciones enteras. Se puede ver de manera inmediata que el par $(2, 1)$ es una solución mínima de la ecuación de Pell para $d = 3$. Si nuestra ecuación tuviera soluciones enteras tendría que existir un par de enteros (a, b) tal que:

$$(a + b\sqrt{3})^2 = 2 + \sqrt{3},$$

lo cual se ve por cálculos directos que es falso.

En cambio, si consideramos la ecuación:

$$X^2 - Y^2 2 = -1,$$

vemos que el par $(1, 1)$ verifica la ecuación.

1.2.3 Estructura de las soluciones de la ecuación de Pell.

Es claro que el conjunto

$$Z[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \ : \ a, b \in Z\}$$

forma un anillo con la suma y multiplicación usuales. Dado un elemento $a+b\sqrt{d} \in Z[\sqrt{d}]$ entenderemos por su conjugado el elemento

$$\overline{a + b\sqrt{d}} = a - b\sqrt{d} \in Z[\sqrt{d}].$$

Lema 1.7 *El conjunto de soluciones de la ecuación de Pell forma un grupo con la multiplicación.*

Demostración:

Basta tener en cuenta que un elemento de $Z[\sqrt{d}]$ es solución de la ecuación de Pell si y sólo si al multiplicarlo por su conjugado da la unidad $1 \in Z[\sqrt{d}]$. Y además si un elemento es solución de la ecuación de Pell entonces su inverso es su conjugado. Sean $x, y \in Z[\sqrt{d}]$ soluciones de la ecuación de Pell, entonces $x\overline{x} = 1$ e $y\overline{y} = 1$, pero ahora, como el conjugado de un producto es el producto de los conjugados obtenemos:

$$xy\overline{xy} = x\overline{x}y\overline{y} = 1 \times 1 = 1.$$

Q.E.D.

Tratemos de ver esto último de una manera más clara: Para ello consideremos la siguiente aplicación $N\colon Z[\sqrt{d}] \longrightarrow Z$, a la cual llamaremos *norma*, dada por

$$N(a + b\sqrt{d}) = a^2 - b^2 d.$$

Se puede ver de manera inmediata que la norma es multiplicativa, es decir:

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in Z[\sqrt{d}].$$

Utilizando la multiplicatividad de la norma se ve que un elemento de $Z[\sqrt{d}]$ es una unidad en el anillo si y sólo si tiene norma ± 1. Pero observemos que los elementos de norma 1 son justamente las soluciones de la ecuación de Pell. Además en el caso $Z[\sqrt{3}]$, tal y como vimos antes en el ejemplo 1.6, no existen soluciones enteras de la ecuación $X^2 - Y^2 3 = -1$, por lo cual las unidades son exactamente son todas las soluciones de la euación de Pell.

La siguiente pregunta que nos surge es: ¿Qué estructura tiene el grupo de las soluciones de la ecuación de Pell con la multiplicación?

Teorema 1.8 *Todas las soluciones* $x + y\sqrt{d}$ *con* $x > 1$, $y > 0$, *de la ecuación de Pell son de la forma:*

$$x + y\sqrt{d} = (x_0 + \sqrt{d}y_0)^n, \quad n \in Z^+,$$

donde $x_0 + y_0\sqrt{d}$ *es la solución positiva más pequeña de la ecuación de Pell con* $x_0 > 1$ *e* $y_0 > 0$.

Demostración:

Es claro que existe una solución mínima positiva de entre las soluciones de la ecuación de Pell con $x > 1$ e $y > 0$. Sea ésta $x_0 + y_0\sqrt{d}$. Supongamos ahora una solución $x + y\sqrt{d}$ con $x > 1$ e $y > 0$ que no fuese una potencia positiva de la solución mínima. Entonces ha de existir un $n_0 \in Z^+$ tal que se pueda realizar el siguiente encajamiento estricto:

$$(x_0 + y_0\sqrt{d})^{n_0} < x + y\sqrt{d} < (x_0 + y_0\sqrt{d})^{n_0+1},$$

puesto que $x_0 + y_0\sqrt{d}$ era la solución mínima y $x_0 + y_0\sqrt{d} > 1$. Observemos que $x_0 > y_0\sqrt{d}$ pues $x_0^2 - y_0^2 d = 1$, de donde deducimos:

$$x_0 = \sqrt{1 + y_0^2 d} > y_0\sqrt{d}.$$

Por lo cual $x_0 - y_0\sqrt{d} > 0$. Y si multiplicamos el encajamiento que teníamos por $(x_0 + y_0\sqrt{d})^{n_0}$ obtenemos:

$$(x_0+y_0\sqrt{d})^{n_0}(x_0-y_0\sqrt{d})^{n_0} < (x+y\sqrt{d})(x_0-y_0\sqrt{d})^{n_0} < (x_0+y_0\sqrt{d})^{n_0+1}(x_0-y_0\sqrt{d})^{n_0},$$

que al simplificar da

$$1 < w + z\sqrt{d} < x_0 + y_0\sqrt{d}.$$

La última desigualdad es debida a que tanto $x_0 + y_0\sqrt{d}$ como $x + y\sqrt{d}$ son soluciones de la ecuación de Pell, siendo $w + z\sqrt{d}$ otra solución, debido a que el producto de soluciones es solución.

Lema 1.9 *Se verifica* $w > 1$.

Demostración:

En efecto, puesto que $1 < w + z\sqrt{d}$ vemos que $w \neq 1$, pues si no por verificar la ecuación de Pell tendríamos $z = 0$ y entonces $1 = w + \sqrt{d}z$, $x + y\sqrt{d} = (x_0 + y_0\sqrt{d})^{n_0}$, lo cual es una contradicción. Luego $w \neq 1$. Pero además $w > 0$, sin más que hacer un razonamiento por inducción y teniendo en cuenta que si $a+b\sqrt{d}$ y $c+e\sqrt{d}$ son soluciones de la ecuación de Pell con $a>0$, $c>0$, entonces el producto de las dos también vuelve a tener la primera coordenada mayor que cero.

Q.E.D.

Analicemos finalmente qué ocurre para los posibles valores de z:

1. Si $z=0$ entonces $w=1$. Por lo cual $x+y\sqrt{d}=(x_0+y_0\sqrt{d})^{n_0}$ con $n_0 \in Z^+$, que es una contradicción con nuestra hipótesis inicial.
2. Si $z>0$, sería una contradicción pues habíamos elegido $x_0+y_0\sqrt{d}$ solución mínima entre las del tipo $x+y\sqrt{d}$ con $x>1$ e $y>0$, pero ahora tendríamos $1<w+z\sqrt{d}<x_0+y_0\sqrt{d}$ con $w,z>1$.
3. Si $z<0$, entonces tenemos $w-z\sqrt{d}>1$, porque $w>1$, $w+z\sqrt{d}>1$ y al multiplicarlas obtenemos que $w^2-z^2d>1$. Lo cual vuelve a ser una contradicción pues $w+z\sqrt{d}$ es solución de la ecuación de Pell.

Finalmente hemos llegado a una contradicción que surge de suponer que alguna de las soluciones de la ecuación de Pell con $x>0$ e $y>0$ no era de la forma $(x_0+y_0\sqrt{d})^{n_0}$ con $n_0 \in Z^+$.

Q.E.D.

Corolario 1.10 *Las soluciones de la ecuación de Pell con x e y enteros arbitrarios son de la forma:*

$$\pm(x_0+y_0\sqrt{d})^n, \quad n \in Z,$$

que tiene una estructura de grupo $Z_2 \times Z$.

Además tenemos el siguiente teorema, ver [1]

Teorema 1.11 *Sea $d>1$ un número natural exento de cuadrados, y sea h el período del desarrollo en fracción continua de $\sqrt{d}$. Entonces todas las soluciones enteras positivas de la ecuación $X^2-Y^2d=1$ son pares (x_n,y_n) de la forma*

$$x_n = P_{hn-1}, \;\; y_n = Q_{hn-1}, \quad \forall n \in Z^+, \quad hn \;\text{ par},$$

donde P_k, Q_k denotan los numeradores y denominadores del la fracción correspondiente al truncamiento del desarrollo en fracción continua de $\sqrt{d}$ hasta el lugar k-ésimo.

Ejemplo 1.12 Consideremos la ecuación de Pell $X^2 - Y^2 22 = 1$. Si calculamos el desarrollo en fracción continua de $\sqrt{d} = \sqrt{22}$ obtendremos $[4; \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$, por lo cual $h = 6$ y por lo tanto $x_n = P_{6n-1}$ e $y_n = Q_{6n-1}$ son soluciones de la ecuación de Pell con $x > 0$ e $y > 0$. Si tomamos $n = 1$ obtenemos $P_5 = 197$ y $Q_5 = 42$.

Entonces la solución mínima de la ecuación de Pell con $x > 1$, $y > 0$ es $197 + 42\sqrt{22}$.

1.3 Unidades del anillo $Z[\sqrt{d}]$.

Calcular las unidades del anillo $Z[\sqrt{d}]$ es equivalente a encontrar los elementos de la forma $x + y\sqrt{d}$, con $x, y \in Z$, para los cuales se verifica $x^2 - y^2 d = \pm 1$. Es decir, si $\alpha = x + y\sqrt{d}$, hay que encontrar los elementos $\alpha \in Z[\sqrt{d}]$ para los que $N(\alpha) = \pm 1$.

1.3.1 Estructura de las unidades

Observemos que la ecuación $N(\alpha) = 1$ es justamente la ecuación de Pell. Si denotamos por $\mathcal{U}(Z[\sqrt{d}])$ a las unidades del anillo $Z[\sqrt{d}]$, finalmente hemos obtenido lo siguiente:

Proposición 1.13 $\alpha \in \mathcal{U}(Z[\sqrt{d}])$ *si y sólo si* $N(\alpha) = \pm 1$.

Ahora bien, la ecuación $N(\alpha) = -1$ puede no tener ninguna solución. Pero en caso de tener una solución β es claro que β^2 es solución de la ecuación de Pell debido a la multiplicatividad de la norma.

Proposición 1.14 *Las unidades del anillo* $Z[\sqrt{d}]$ *tienen estructura de grupo* $Z_2 \times Z$ *con la multiplicación.*

Demostración:

Claramente si no hay ninguna solución de la ecuación $N(\alpha) = -1$ entonces las unidades del anillo $Z[\sqrt{d}]$ son justamente las soluciones de la ecuación de Pell, las cuales tenían por el corolario 1.10 estructura $Z_2 \times Z$.

En general, supongamos que existe alguna solución $u + v\sqrt{d}$ de la ecuación $N(\alpha) = -1$ (podemos suponer $u > 0$, de lo contrario multiplicaríamos por -1); entonces consideremos la aplicación biyectiva que a un α perteneciente al conjunto de soluciones de la ecuación $X^2 - Y^2 d = 1$ lo lleva en $\alpha(u + v\sqrt{d})$ que pertenece al conjunto de soluciones de la ecuación $X^2 - Y^2 d = -1$.

Está bien definida debido a la multiplicatividad de la norma. Es biyectiva con inversa multiplicar por $-(u - v\sqrt{d})$. Dado que $u + v\sqrt{d}$ es solución de la ecuación $X^2 - Y^2 d = -1$, entonces $(u + v\sqrt{d})^2$ es solución de la ecuación de Pell $X^2 - Y^2 d = 1$, debido a la multiplicatividad de la norma, por lo cual:

$$(u + v\sqrt{d})^2 = \pm(x_0 + y_0\sqrt{d})^{n_0}, \quad n_0 \in Z;$$

pero entonces:

$$u + v\sqrt{d} = \sqrt{\pm(x_0 + y_0\sqrt{d})^{n_0}},$$

y dado que $x_0 > 0$, vemos que

$$u + v\sqrt{d} = +\sqrt{(x_0 + y_0\sqrt{d})^{n_0}},$$

porque de lo contrario $u + v\sqrt{d}$ no sería un número real. Finalmente

$$u + v\sqrt{d} = (x_0 + y_0)^{\frac{n_0}{2}}, \quad n_0 \in Z,$$

donde vemos que n_0 tiene que ser impar pues de lo contrario $u+v\sqrt{d}$ sería solución de la ecuación de Pell. Sea $n_1 = [n_0/2]$, es decir, $n_0 = 2n_1 + 1$. Consideremos ahora

$$u_1 + v_1\sqrt{d} = (u + v\sqrt{d})(x_0 + y_0\sqrt{d})^{-n_1},$$

donde $u_1 + v_1\sqrt{d}$ vuelve a ser solución de la ecuación de Pell debido a la multiplicatividad de la norma. Además

$$(u_1 + v_1\sqrt{d})^2 = x_0 + y_0\sqrt{d}.$$

Si consideramos ahora la aplicación biyectiva que a un $\pm(x_0 + y_0\sqrt{d})^n$ solución de la ecuación $X^2 - Y^2 d = 1$ lo lleva en $\pm(x_0 + y_0\sqrt{d})^n(u_1 + v_1\sqrt{d})$ que pertenece al conjunto de soluciones de la ecuación $X^2 - Y^2 d = -1$, vemos que el conjunto de soluciones de la ecuación $N(\alpha) = \pm 1$ es de la forma:

$$\pm(u_1 + v_1\sqrt{d})^n, \quad n \in Z,$$

que tiene una estructura de grupo $Z_2 \times Z$ con la multiplicación.

Q.E.D.

Ejemplo 1.15 Consideremos el anillo $Z[\sqrt{2}]$, entonces las soluciones de la ecuación $N(\alpha) = 1$ son de la forma

$$\pm(3 + 2\sqrt{2})^n, \quad n \in Z.$$

Sin embargo las soluciones de la ecuación $N(\alpha) = \pm 1$ *son de la forma*

$$\pm(1 + 1\sqrt{2})^n, \quad n \in Z.$$

Y además

$$(1 + 1\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

1.3.2 El Teorema de las unidades de Dirichlet.

Sea $Q(\alpha)$ una extensión algebraica de Q de grado n, siendo α un elemento algebraico sobre Q. Sea $\{\sigma_i : i = 1, 2, ..., n\}$ el grupo de los morfismos de cuerpos entre $Q(\alpha)$ y C. Definimos:

$$N\colon Q(\alpha) \to Q$$

por

$$N(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\beta).$$

Está bien definida por la teoría de Galois y es multiplicativa. En el caso de $Q(\sqrt{d})$, $\beta = u + v\sqrt{d}$, con $u, v \in Z$, tendremos

$$N(\beta) = u^2 - v^2 d.$$

Sea $B \subset Q(\alpha)$ el conjunto de raíces de polinomios con coeficientes enteros y coeficiente principal uno que están en la extensión algebraica $Q(\alpha)$ de Q. Se puede ver que B es un anillo, al que se le llamará *anillo de los enteros algebraicos de* $Q(\alpha)$ *sobre* Z. Si $\beta \in B$ entonces $N(\beta) \in Z$. Además las unidades del anillo B son justamente las soluciones de la ecuación $N(\beta) = \pm 1$. Tenemos el siguiente teorema cuya demostración se puede ver en [8], [17] ó [15].

Teorema 1.16 *Sea $Q(\alpha)$ una extensión algebraica de grado n sobre Q, sea B el anillo de enteros algebraicos de $Q(\alpha)$ sobre Z, y sea P(X) el polinomio mínimo mónico de α sobre Q. Si la ecuación $P(X) = 0$ sobre C tiene t soluciones reales $\alpha_1, ..., \alpha_t$ y $2s$ soluciones complejas $\beta_1, ..., \beta_s, \overline{\beta_1}, ..., \overline{\beta_s}$, entonces las unidades del anillo B forman un grupo con la multiplicación isomorfo a $T \times Z^{s+t-1}$, donde T es un grupo de torsión finito formado por las raíces de la unidad que están en $Q(\alpha)$.*

Ejemplo 1.17 En el caso de $Q(\sqrt{d})$ con $\sqrt{d} \notin Z$ y $d > 0$, tenemos que las únicas raíces de la unidad son ± 1, por lo cual $T = Z_2$; y además el polinomio mínimo de α tiene dos raíces reales $\sqrt{d}$, $-\sqrt{d}$, por lo cual $t = 2$ y $s = 0$. De donde deducimos, por el Teorema de las unidades de Dirichlet, que las unidades de B tienen la estructura $Z_2 \times Z$ como grupo con la multiplicación.

Capítulo 2

Espacios difeológicos

En este capítulo introduciremos la noción de espacio difeológico, las definiciones y propiedades elementales que ésta conlleva, para posteriormente aplicarlas en el caso de espacios difeológicos cocientes de una variedad por una foliación de Lie con hojas densas, la cual nos permitirá construir un nuevo invariante diferenciable asociado a este tipo de foliaciones. Finalmente se realizarán algunas aplicaciones en ejemplos concretos, que se resolverán utilizando la ecuación de Pell. Las demostraciones aquí expuestas están esbozadas en [9].

2.1 Definiciones elementales.

Sea M un conjunto. Una aplicación de conjuntos de un abierto $U \subset R^n$ en M con $n \geq 0$ se llamará carta (o placa, o curva generalizada) en M. Denotaremos por α_U una carta con dominio U.

Definición 2.1 Una *difeología de clase $\mathcal{C}^\infty$ sobre un conjunto M* será una colección $\mathcal{P}$ de cartas $\alpha: U_\alpha \subset R^{n_\alpha} \to M$, $n_\alpha \geq 0$, verificando los siguientes axiomas:

1. Cualquier aplicación constante $c: U \subset R^n \to M, n \geq 0$, está en $\mathcal{P}$.

2. Si $\alpha \in \mathcal{P}$ está definida en un abierto $U \subset R^n$ y $h: V \subset R^m \to U$ es una aplicación diferenciable $\mathcal{C}^\infty$, entonces $\alpha \circ h \in \mathcal{P}$.

3. Sea $\alpha: U \subset R^n \to M, n \geq 0$, una aplicación tal que cada $t \in U$ posee un entorno U_t con $\alpha_{|U_t} \in \mathcal{P}$; entonces $\alpha \in \mathcal{P}$.

El axioma 1 garantiza que $\mathcal{P} \neq \emptyset$; el axioma 2 nos permite hacer cambios de coordenadas dentro de $\mathcal{P}$; el axioma 3 nos permite pegar las cartas.

Para definir una difeología sobre un conjunto M, nos llega con dar un *conjunto de generadores*, es decir, una familia de cartas $\mathcal{G}$ sobre M. Entonces consideramos la difeología $\mathcal{P} =< \mathcal{G} >$ formada por las constantes y por todas aplicaciones $\alpha: U \to M$ tales que $\forall t \in U\ \exists U_t$ con $\alpha_{|U_t} = \beta \circ h$, para algún $\beta \in \mathcal{G}$ y algún cambio de coordenadas h.

Definición 2.2 Sean $(M, \mathcal{P})$, $(N, \mathcal{Q})$ dos espacios difeológicos. Una aplicación $F: M \to N$ se dirá diferenciable cuando $F \circ \alpha \in \mathcal{Q}$, $\forall \alpha \in \mathcal{P}$.

Claramente nos llega con comprobar esta condición para unos generadores de $\mathcal{P}$.

Denotaremos por $\mathcal{D}(M, N)$ el conjunto de aplicaciones diferenciables entre $(M, \mathcal{P})$ y $(N, \mathcal{Q})$. *Un difeomorfismo* del espacio difeológico $(M, \mathcal{P})$ será una aplicación diferenciable con inversa diferenciable. El conjunto de difeomorfismos de un espacio difeológico se denotará por $\mathrm{Diff}(M)$.

Ejemplo 2.3 Sea M una variedad diferenciable, con $\dim M = m < \infty$, entonces las cartas coordenadas $\varphi^{-1}: \varphi(\mathrm{W}) \subset R^m \to W \subset M$ generan una difeología, la cual está formada por las aplicaciones diferenciables usuales $\alpha: U \subset R^n \to M, n \geq 0$. Para dos variedades diferenciables M, N tenemos $\mathcal{D}(M, N) = \mathcal{C}^\infty(M, N)$, el conjunto de aplicaciones diferenciables en el sentido usual.

2.2 Construcciones básicas.

2.2.1 Cocientes.

Uno de los aspectos más interesantes de los espacios difeológicos es que incluyen los espacios cocientes, como el espacio de hojas de una foliación.

Sea $(M, \mathcal{P})$ un espacio difeológico; si $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto M, denotemos por $M/\sim$ al conjunto cociente. Vamos a considerar en $M/\sim$ la difeología generada por las aplicaciones $\pi \circ \alpha$ con $\alpha \in \mathcal{P}$ y π la proyección canónica, la denotaremos por $\mathcal{P}/\sim$. Observemos que la proyección canónica es diferenciable. Se verifica la siguiente propiedad universal.

Proposición 2.4 *Una aplicación $F : (M/\sim, \mathcal{P}/\sim) \to (N, \mathcal{Q})$ es diferenciable si y sólo si $F \circ \pi$ es diferenciable.*

Demostración:

$\Rightarrow$ Por composición de diferenciables.

$\Leftarrow$ Hay que ver que dada una carta β_U de $M/\sim$ entonces $F \circ \beta_U$ es una carta de $(N, \mathcal{Q})$. Pero podemos suponer que β_U está en los generadores, es decir, $\beta_U = \pi \circ \alpha_U$ con α_U una carta en M. Pero como $F \circ \pi$ es diferenciable por hipótesis y α_U es una carta de M entonces $F \circ \pi \circ \alpha_U = F \circ \beta_U$ es una carta en $(N, \mathcal{Q})$, que era lo que queríamos comprobar.

Q.E.D.

Analicemos ahora el siguiente ejemplo tomado de [6] en el cual tenemos un espacio cociente con dos estructuras difeológicas no difeomórficas.

Ejemplo 2.5 Sobre $[0, +\infty)$ podemos definir dos estructuras difeológicas $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ respectivamente inducidas por las identificaciones:

$$\pi_1 \colon R \to [0, +\infty), \quad \pi_1(x) = \mid x \mid_1,$$

y

$$\pi_2 \colon R^2 \to [0, +\infty), \quad \pi_2(v) = \mid v \mid_2 .$$

No son difeomórficas. Veámoslo:

Supongamos que fueran difeomórficas. Sea $F \colon ([0, +, \infty), \mathcal{P}_2) \to ([0, +, \infty), \mathcal{P}_1)$ un difeomorfismo entre los dos espacios difeológicos. Sea F^{-1} su inversa. Observemos que las estructuras difeológicas de R^2 y R admiten como generadores la carta identidad de ellos mismos. Además tenemos que $F \circ \pi_2$ va de R^2 con la difeología usual en $([0, +\infty), \mathcal{P}_1)$, entonces si consideramos la carta identidad de R^2 tenemos, por definición de difeología cociente, que $F \circ \pi_2 \circ id_{R^2}$ localmente tiene que ser igual a $\pi_1 \circ \alpha$ siendo α una carta de R, donde $\alpha \colon U \subset R^2 \to R$ es diferenciable en sentido usual.

En particular para $t = (0, 0)$ existe esa aplicación f. Análogamente ha de existir una aplicación diferenciable $g \colon V \subset R \to R^2$, definida en un entorno de $f(0, 0)$, tal que $(F^{-1} \circ \pi_1 \circ id_R)_{|V} = \pi_1 \circ g$.

Ahora por continuidad $g \circ f$ estará bien definida en un entorno U del $(0, 0)$. Análogamente $f \circ g$ estará bien definida en un entorno V de $f(0, 0)$. Pero como $f \circ g$ se tiene que proyectar en $id_{\pi_1(V)}$ y dado que es diferenciable deducimos que $f \circ g = \pm id_{|V}$. Pero entonces f se convierte en una submersión local en el $(0, 0)$ de donde deducimos que existen puntos distintos del entorno U del $(0, 0)$ en R^2 que van al $f(0, 0)$ por f. Por lo cual existen puntos distintos del 0 en $[0, +\infty)$ que por F van al $[f(0, 0)]$, lo cual es una contradicción.

2.2.2 Difeologías inicial y final.

Definición 2.6 Sea M un conjunto, $(N, \mathcal{Q})$ un espacio difeológico, $f\colon M \to (N, \mathcal{Q})$ una aplicación de conjuntos; podemos definir *la difeología inicial sobre* M, se denotará por $f^*\mathcal{Q}$, a la difeología generada por las cartas β tales que $f \circ \beta \in \mathcal{Q}$. Es la mayor difeología para la cual f es diferenciable.

Proposición 2.7 *Una aplicación* $F\colon (S, \mathcal{P}) \to (M, f^*\mathcal{Q})$ *es diferenciable si y sólo si* $f \circ F$ *es diferenciable.*

Demostración:

$\Rightarrow$ Por composición de diferenciables.

$\Leftarrow$ Sea $\alpha \in \mathcal{P}$, entonces $f \circ F \circ \alpha \in \mathcal{Q}$, por lo cual $F \circ \alpha \in f^*\mathcal{Q}$. Luego F es diferenciable.

Q.E.D.

Como caso particular tenemos las subvariedades:

Definición 2.8 Sea $(M, \mathcal{P})$ un espacio difeológico. Dado un subconjunto arbitrario $N \subset M$ entonces podemos definir la difeología inducida por $(M, \mathcal{P})$ en N mediante la difeología inicial y la inclusión natural $i\colon N \to (M, \mathcal{P})$. Entonces $(N, i^*\mathcal{P})$ es una *subvariedad de* $(M, \mathcal{P})$, formada por las cartas $\alpha\colon U \subset R^n \to M$ tales que $\alpha(U) \subset N$.

De hecho todas las subvariedades son débilmente embebidas, en el siguiente sentido:

Proposición 2.9 *Una aplicación* $S \to N \subset M$ *es diferenciable si y sólo si* $S \to M$ *es diferenciable.*

Definición 2.10 Sea N un conjunto, $(M, \mathcal{P})$ un espacio difeológico, $f\colon (M, \mathcal{P}) \to N$ una aplicación de conjuntos; entonces se define *la difeología final sobre* N, se denotará por $f_*\mathcal{P}$, como la difeología generada por las cartas $f \circ \alpha$ con $\alpha \in \mathcal{P}$.

Otra vez tenemos la siguiente propiedad universal, de demostración análoga a las anteriores.

Proposición 2.11 *Una aplicación* $F\colon (N, f_*\mathcal{P}) \to (S, \mathcal{Q})$ *es diferenciable si y sólo si* $F \circ f$ *es diferenciable.*

La difeología cociente definida en la subsección 3.2.1 es un caso particular de esta construcción.

Definición 2.12 Sean $(M, \mathcal{P}), (N, \mathcal{Q})$ espacios difeológicos. Se define *la difeología producto en* $M \times N$ como la difeología generada por las aplicaciones $\alpha \times \beta: U \times V \to M \times N$, donde $\alpha_U \in \mathcal{P}, \beta_V \in \mathcal{Q}$.

Claramente las proyecciones y las inclusiones son diferenciables.

2.2.3 Otras construcciones categóricas.

Las notaciones de este apartado están tomadas de [11].

Sean $\mathcal{J}$ y $\mathcal{C}$ dos categorías pequeñas (en general $\mathcal{J}$ será un conjunto de índices). Sea c un objeto de $\mathcal{C}$, definamos el funtor $\Delta c: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ dado por

$$(\Delta c)(j) = c \;\; \forall j \in \mathrm{Obj}(\mathcal{J})$$

y

$$(\Delta c)(f) = 1_c \;\; \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(j, j\prime), \;\; j, j\prime \in \mathrm{Obj}(\mathcal{J}).$$

Nótese que dar una transformación natural entre Δc y Δd con $c, d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ equivale a dar un $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d)$.

Definición 2.13 Sea $F: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un funtor entre las dos categorías. Llamaremos (en caso de que exista) *colímite de* F a un par (c, v) con $c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y una transformación natural $v: F \to \Delta c$ verificando la siguiente propiedad univeral:

Para cualquier otro par (d, w) con $d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y una transformación natural $w: F \to \Delta d$, entonces existe una única transformación natural $\Delta u: \Delta c \to \Delta d$ tal que $\Delta u \circ v = w$.

En general denotaremos $c = \mathrm{Colim}\, F$.

Proposición 2.14 *Si existe el colímite entonces es único salvo una equivalencia natural.*

Proposición 2.15 *En la categoría de los espacios difeológicos* $\mathcal{D}$ *existe el colímite.*

Demostración:

Sea $\mathcal{J}$ una categoría pequeña de índices y sea $F: \mathcal{J} \to \mathcal{D}$ un funtor. Sea el conjunto

$$M = \coprod_{j \in \mathrm{Obj}(\mathcal{J})} F(j).$$

Consideremos en M la difeología $\mathcal{P}$ generada por $i_j \circ \beta_j$, $\forall j \in \mathrm{Obj}(\mathcal{J})$ siendo $i_j: F(j) \to M$ las inclusiones canónicas y β_j una carta en $(F(j), \mathcal{P}_j) \in \mathcal{D}$.

Consideremos en M la relación de equivalencia dada por:
sean $x \in F(j)$ e $y \in F(k)$ con $j,k \in \mathrm{Obj}(\mathcal{J})$, entonces $i_j(x) \sim i_k(y)$ si y sólo si existe $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(j,k)$ tal que $i_k(y) = i_k \circ F(f)(x)$.

Se comprueba de manera directa que la relación de equivalencia está bien definida dado que $\mathcal{J}$ es una categoría.
Consideremos en $M/\sim$ la difeología cociente $\mathcal{P}/\sim$ dada por la de M. Sea $L = (M/\sim, \mathcal{P}/\sim) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ y sea $v\colon F \to \Delta L$ dada por $v_j\colon F(j) \to L$ con $v_j = \pi \circ i_j,\ \forall j \in \mathrm{Obj}(\mathcal{J})$ y siendo $\pi\colon M \to L$ la proyección canónica. Se comprueba de manera directa que v está bien definida.

Sea (N,w) otro par formado por un espacio difeológico $(N,\mathcal{Q})$ y una transformación natural $w\colon F \to \Delta N$. Definamos la transformación natural $\Delta u\colon \Delta L \to \Delta N$ dada por la única aplicación $f\colon M \to N$ inducida por las $w_j = u \circ i_j\colon F(j) \to N$. De esta manera tenemos una aplicación de conjuntos $f\colon M \to N$, pero además es diferenciable pues $w_j \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(j), N)$. Además pasa al cociente $u\colon L \to N$, dado que $w\colon F \to \Delta N$ era una transformación natural, y como $f\colon M \to N$ era diferenciable deducimos que u es diferenciable, por definición de difeología cociente.

Q.E.D.

Observemos que las inclusiones canónicas de $F(j)$ en $\mathrm{Colim}\,F$ son diferenciables.

Proposición 2.16 *Sea $\mathcal{D}$ la categoría de espacios difeológicos. Sea $\mathcal{J}$ una categoría pequeña y un funtor $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{D}$. Entonces una aplicación $u\colon (\mathrm{Colim}\,F, \mathcal{P}) \to (N, \mathcal{Q})$ es diferenciable si y sólo si $u \circ \lambda_j$ es diferenciable $\forall j \in O\mathrm{bj}(\mathcal{J})$, siendo λ_j la inclusión canónica de $F(j)$ en* $\mathrm{Colim}\,F$.

Demostración:
Inmediata.

Ejemplo 2.17 Un ejemplo de colímite es el límite directo. Sea $(M_i, \mathcal{P}_i)$ una colección de espacios difeológicos entonces podemos considerar la unión disjunta $M = \coprod M_i$, con la difeología generada por las aplicaciones $\lambda \circ \alpha$, donde $\alpha \in \mathcal{P}_i$ y $\lambda_i\colon M_i \to M$ la inclusión natural. Más generalmente, sea $\lambda_{ij}\colon M_i \to M_j$ un sistema dirigido en la categoría de conjuntos; entonces se puede definir un nuevo conjunto al que llamaremos *límite directo de los M_i*, es decir, $M = \varinjlim M_i = (\coprod M_i)/\sim$ el cociente de la unión disjunta de los M_i por la relación dada por $\lambda_{ik}(x_i) = \lambda_{jk}(x_j)$. Entonces podemos dotar a M de una difeología que sería la dada por la difeología cociente de la difeología de la unión disjunta de los M_i.

Observemos que las inclusiones canónicas de M_i en $\varinjlim M_i$ son diferenciables.

Además una aplicación $F\colon (\varinjlim M_i, \mathcal{P}) \to (N, \mathcal{Q})$ es diferenciable si y sólo si $F \circ \lambda_i$ es diferenciable para cualquier índice i, siendo λ_i la inclusión canónica de M_i en $\varinjlim M_i$.

2.2.4 Difeología funcional.

Consideremos el conjunto $\mathcal{D}(M, N)$ de las aplicaciones diferenciables entre dos espacios difeológicos. Vamos a definir la *difeología funcional sobre* $\mathcal{D}(M, N)$ dando un conjunto de generadores.

Definición 2.18 Tomemos como conjunto de generadores el conjunto formado por todas las aplicaciones $\alpha\colon U \subset R^n \to \mathcal{D}(M, N)$, $n \geq 0$, tales que la aplicación $\alpha^\wedge\colon U \times M \to N$ dada por $\alpha^\wedge(t, x) = \alpha(t)(x) \in N$ es diferenciable en sentido difeológico.

Notemos que U tiene la estructura diferenciable usual de un abierto de R^n y $U \times M$ la estructura difeológica del producto.

Observemos entonces que la función evaluación $ev\colon M \times \mathcal{D}(M, N) \to N$ definida por $ev(m, f) = f(m)$ es diferenciable. Entonces tenemos el siguiente difeomorfismo natural:

Proposición 2.19 *Los espacios difeológicos* $\mathcal{D}(M, \mathcal{D}(N, P))$ *y* $\mathcal{D}(M \times N, P)$ *son difeomorfos mediante la equivalencia natural que existe entre ambos conjuntos.*

Demostración:

Construyamos $\Phi\colon \mathcal{D}(M, \mathcal{D}(N, P)) \to \mathcal{D}(M \times N, P)$. Si $F\colon M \to \mathcal{D}(N, P)$ definimos $\Phi(F)$ como

$$\Phi(F)(x, y) = F(x)(y), \quad (x, y) \in M \times N.$$

Primero la aplicación está bien definida, es decir, si $F \in \mathcal{D}(M, \mathcal{D}(N, P))$ entonces $\Phi(F) \in \mathcal{D}(M \times N, P)$, sin más que utilizar las definiciones. Veamos ahora que la aplicación es diferenciable con inversa diferenciable. Sea una carta α_U en $\mathcal{D}(M, \mathcal{D}(N, P))$, entonces por definición tenemos que la aplicación $\alpha^\wedge\colon U \times M \to \mathcal{D}(N, P)$ es diferenciable. Pero por definición de aplicación diferenciable tenemos que para cualquier carta β_V en M y γ_W en N la aplicación:

$$(t, r, s) \in U \times V \times W\colon \mapsto \alpha(t)(\beta(r))(\gamma(s)) \in P$$

es diferenciable. Pero entonces dada una carta arbitraria $\beta_V \times \gamma_W$ del conjunto natural de generadores de la difeología producto $M \times N$ y una carta arbitraria α_U en la difeología funcional $\mathcal{D}(M, \mathcal{D}(N, P))$ la aplicación $(\Phi \circ \alpha)_U^\wedge$ de $U \times M \times N \to P$ es diferenciable, que era justo lo que queríamos probar. Para ver que la inversa de Φ es diferenciable se hace de manera simétrica.

Q.E.D.

2.3 Grupos difeológicos.

En esta sección introduciremos la noción de grupo difeológico que es la generalización natural de grupo de Lie. Enunciaremos sus propiedades elementales, para posteriormente aplicarlas en el cálculo del grupo de difeomorfismos del espacio de hojas de una foliación de Lie con hojas densas, el cual será difeomorfo en sentido difeológico al cociente de un grupo de Lie simplemente conexo por un subgrupo denso y numerable.

2.3.1 Definición y primeros resultados.

Definición 2.20 Un *grupo difeológico* $(G, \mathcal{P})$ es un espacio difeológico dotado de una estructura de grupo tal que la aplicación división:

$$\begin{array}{rcc} \delta\colon G \times G & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$$

es diferenciable.

De la definición se sigue que cualquier subgrupo algebraico de un grupo difeológico es un grupo difeológico con la difeología inducida. También es claro que el producto de dos grupos difeológicos es un grupo difeológico con la difeología producto.

Proposición 2.21 *Todo grupo cociente de un grupo difeológico con la difeología cociente es un grupo difeológico.*

Demostración:

Consideremos dos cartas de la forma $\pi \circ \alpha$, $\pi \circ \beta$ con α, β cartas en el grupo difeológico y siendo π la proyección canónica. Entonces $\overline{\delta}(\pi \circ \alpha, \pi \circ \beta) = \pi \circ \delta(\alpha, \beta)$, donde δ es la operación división en el grupo difeológico y $\overline{\delta}$ es la operación división en el grupo difeológico cociente. La cual es diferenciable por composición de diferenciables.

Q.E.D.

Proposición 2.22 *El producto libre de grupos difeológicos es un grupo difeológico con la difeología engendrada por las difeologías de los grupos difeológicos.*

Demostración:

Sea $\{(G_j, \mathcal{P}_j)\}_{j\in J}$ una familia de grupos difeológicos. Sea $G = *G_j$ el producto libre en la categoría de grupos de la familia de grupos $\{G_j\}_{j\in J}$.

Vamos a dotar a G de una difeología. Tomemos como generadores las cartas $\alpha_{j_1} * \cdots * \alpha_{j_n} \colon U_{j_1} \times \cdots \times U_{j_n} \to G$, $j_k \in J$, $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$, $\forall n \in Z^+$, dadas por

$$\alpha_{j_1} * \cdots * \alpha_{j_n}(t_1, \cdots, t_n) = \alpha_{j_1}(t_1) * \cdots * \alpha_{j_n}(t_n)$$

con $\alpha_{j_k} \in \mathcal{P}_{j_k}$.

Veamos que con esta difeología G es un grupo difeológico. Para ello consideremos la operación de división $\delta \colon G\times G \to G$ dada por $\delta(x, y) = x*y^{-1}$ $\forall x, y \in G$. Sean dos cartas $\alpha = \alpha_{j_1}*\cdots*\alpha_{j_m}$ y $\beta = \beta_{k_1}*\cdots*\beta_{k_n}$ del conjunto de generadores, entonces

$$\delta(\alpha, \beta) = \alpha_{j_1} * \cdots * \alpha_{j_m} * \beta_{k_n}^{-1} * \cdots * \beta_{k_1}^{-1},$$

el cual vuelve estar en el conjunto de generadores pues $\beta_{k_l}^{-1} \in \mathcal{P}_{k_l}$ dado que G_{k_l} era un grupo difeológico. Por lo cual G con la difeología inducida por la familia de grupos difeológicos $\{(G_j, \mathcal{P}_j)\}_{j\in J}$ es un grupo difeológico.

Q.E.D.

Es inmediato comprobar que las inclusiones $i_j \colon (G_j, \mathcal{P}_j) \to (G, \mathcal{P})$ son diferenciables $\forall j \in J$. Tenemos la siguiente propiedad universal para el producto libre de grupos difeológicos.

Proposición 2.23 *Dado un grupo difeológico $(H, \mathcal{Q})$ y una familia de homomorfismos de grupos difeológicos $\{h_j \colon (G_j, \mathcal{P}_j) \to (H, \mathcal{Q})\}_{j\in J}$, existe un único homomorfismo de grupos difeológicos $h \colon (G, \mathcal{P}) \to (H, \mathcal{Q})$ verificando $h \circ i_j = h_j$ $\forall j \in J$.*

Demostración:

Dado que G es el producto libre de los grupos G_j y todas las aplicaciones h_j son de grupos, entonces por la propiedad universal de grupo libre existe una única $h \colon G \to H$ tal que $h \circ i_j = h_j$ $\forall j \in J$. Además está dada por $h(x_{j_1} * \cdots * x_{j_n}) = h_{j_1}(x_{j_1}) \cdots h_{j_n}(x_{j_n})$, $\forall x_{j_k} \in G_{j_k}$ y $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$.

Veamos que h es diferenciable. Sea una carta $\alpha = \alpha_{j_1} * \cdots * \alpha_{j_n}$ en el conjunto de generadores de $\mathcal{P}$, entonces $h(\alpha) = h_{j_1}(\alpha_{j_1}) \cdots h_{j_n}(\alpha_{j_n})$, la cual es una carta en $(H, \mathcal{Q})$, pues $h_{j_1}(\alpha_{j_1}), \cdots h_{j_n}(\alpha_{j_n})$ eran cartas en $(H, \mathcal{Q})$ y el producto de cartas en $(H, \mathcal{Q})$ es una carta en $(H, \mathcal{Q})$, dado que $(H, \mathcal{Q})$ es un grupo difeológico. Luego h es diferenciable. La unicidad de h está forzada por la propiedad universal de grupo libre.

Q.E.D.

Proposición 2.24 *Sea $\mathcal{G}$ la categoría de grupos difeológicos, $\mathcal{J}$ una categoría arbitraria y $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{G}$ un funtor, entonces existe $G = \operatorname{Colim} F$.*

Demostración:

Para construir $\operatorname{Colim} F$ se procedería de manera análoga a la del Teorema 2.15, pero en vez de considerar la unión disjunta de los grupos difeológicos $(F(j), \mathcal{P}_j)$ habría que considerar el producto libre dotado de la difeología inducida por la de los grupos difeológicos $(F(j), \mathcal{P}_j)$. Ahora la relación de equivalencia está dada por: $x_{j_1} * \cdots * x_{j_n} \sim y_{k_1} * \cdots * y_{k_n}$ si $j_1, \cdots, j_n, k_1, \cdots, k_n \in \operatorname{Obj}(\mathcal{J})$ y $y_{k_1} * \cdots * y_{k_n} = F(f_1)(x_{j_1}) * \cdots * F(f_n)(x_{j_n})$ donde $f_s \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{J}}(j_s, k_s)$.

Q.E.D.

Nota

En general, si $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{G}$ y $\operatorname{Olv}(F)\colon \mathcal{J} \to \mathcal{D}$ es el funtor olvido de F entonces $\operatorname{Colim} F \neq \operatorname{Colim} \operatorname{Olv}(F)$ como objetos de la categoría de espacios difeológicos.

Como caso particular de colímite de grupos difeológicos tenemos el *límite directo de grupos difeológicos* y su propiedad univeral. Análogamente tenemos las siguientes propiedades de demostración semejante.

1. Sea H un grupo algebraico, $(G, \mathcal{P})$ un grupo difeológico y $f\colon H \to G$ un homomorfismo de grupos, entonces $(H, f^*\mathcal{P})$ es un grupo difeológico.

2. Sea H un grupo algebraico, $(G, \mathcal{P})$ un grupo difeológico y $f\colon G \to H$ un homomorfismo de grupos, entonces $(H, f_*\mathcal{P})$ es un grupo difeológico.

2.3.2 Ejemplos.

Ejemplo 2.25 El grupo lineal general.

Consideremos el sistema dirigido $GL(1) \to GL(2) \to GL(3) \to \cdots$ de homomorfismos de grupos de Lie, donde:

$$GL(n) \longrightarrow GL(n+1)$$

$$A \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son isomorfismos encajados entre grupos de Lie. Entonces como los homomorfismos del sistema dirigido son de grupos difeológicos tenemos, por el Teorema 2.24, que $GL(\infty) = \varinjlim GL(n)$ es un grupo difeológico con la difeología dada por el sistema dirigido anterior.

Consecuentemente son subgrupos difeológicos también $O(\infty), SO(\infty), U(\infty)$ y $Sp(\infty)$.

Ejemplo 2.26 Sea $\mathcal{F}_\alpha$ la foliación sobre el toro T^2 definida por las rectas de pendiente irracional α. Dado que el espacio de hojas T_α es el cociente de un grupo abeliano abeliano difeológico entonces, por el Teorema 2.21, el espacio de hojas T_α es un grupo abeliano difeológico. Además es isomorfo como grupo difeológico (ver capítulo cuatro) al cociente R/Γ_α de grupos abelianos difeológicos, donde $\Gamma_\alpha \subset R$ es el subgrupo denso $\{m\alpha + n \colon m, n \in Z\}$.

Proposición 2.27 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión finita. Entonces el grupo de difeomorfismos* $\mathrm{Diff}(M)$ *es un grupo difeológico con la difeología inducida por la de $\mathcal{D}(M, M)$.*

Demostración:

Para ver que la división es diferenciable nos llega con ver que el producto y la inversión son diferenciables. Veamos que el producto es diferenciable, es decir, que la composición es diferenciable. Sean α_U, β_V cartas en $\mathcal{D}(M, M)$; para ver que $\pi \circ (\alpha_U, \beta_V)$ es una carta en $\mathcal{D}(M, M)$ tomemos una carta arbitraria γ_W en M y comprobemos que la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} U \times V \times W & \to & M \\ (t, r, s) & \mapsto & \pi(\alpha_U(t), \beta_V(r))(\gamma_W(s)) = \alpha(t)(\beta(r)\gamma(s)) \end{array}$$

es diferenciable. Pero esa aplicación no es más que la composición de: $id_U \times (\beta^\wedge \circ (id_V \times \gamma))$ y de $id_V \times \alpha^\wedge$, las cuales son inmediatamente diferenciables. Y dado que $\mathrm{Diff}(M)$ tiene la difeología inducida por la de $\mathcal{D}(M, M)$ deducimos que la composición es diferenciable.

Veamos ahora que la inversión $I \colon \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Diff}(M)$ es diferenciable. Dada una carta α_U en $\mathrm{Diff}(M)$, las aplicaciones $\alpha^\wedge$ e $(I\alpha)^\wedge$ son inversas, pero ahora bien como α_U es una carta en $\mathrm{Diff}(M)$ tenemos que la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\alpha} \colon U \times M & \to & U \times M \\ (t, m) & \mapsto & (t, \alpha(t)(m)) \end{array}$$

es biyectiva claramente. Observemos que como M es una variedad diferenciable y U es un abierto de R^n, entonces $U \times M$ también es una variedad diferenciable. Además su diferencial tiene rango máximo, pues si calculamos el determinante de la jacobiana en un punto (t, m) obtenemos el determinante de la jacobiana del difeomorfismo $\alpha(t)$ en el punto m. Finalmente podemos aplicar el Teorema de la función inversa para variedades concluyendo que su inversa es diferenciable. Pero su inversa es justamente $\overline{I\alpha}$, por lo cual la aplicación $I\colon \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Diff}(M)$ es diferenciable.

Q.E.D.

Nota

Para que en el grupo de difeomorfismos de una variedad la composición sea diferenciable sólo hemos necesitado recurrir a la estructura difeológica de la variedad. El problema está en la inversión. En general, para un espacio difeológico arbitrario necesitaremos recurrir a algo paralelo al Teorema de la función inversa. Por ejemplo, en la sección 3.3 veremos que $\mathrm{Diff}(G/\Gamma)$ es un grupo difeológico. Otra manera de esquivar el problema es considerar sobre $\mathrm{Diff}(M)$ la difeología generada por las cartas α tales que $\overline{\alpha}\colon U \times M \to U \times M$ dada por $\overline{\alpha}(t, x) = (t, \alpha(t)(x)) \in U \times M$ es un difeomorfismo entre espacios difeológicos.

Capítulo 3

Foliaciones de Lie

En este capítulo nos centraremos en el estudio de variedades diferenciables compactas donde está dada una foliación de Lie con hojas densas. Nos dedicaremos al cálculo de un invariante del espacio de hojas para posteriormente concretarlo en ejemplos.

3.1 Definiciones básicas.

Definición 3.1 Sea M una variedad diferenciable conexa y compacta de dimensión finita. Sea $\omega_x : T_xM \to g$ una 1-forma sobre M que toma valores en un álgebra de Lie g, tal que:

1. ω tiene rango máximo (igual a la dimensión de g);.
2. $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$, es decir $\omega[X, Y] = [\omega(X), \omega(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Entonces el $\operatorname{Ker} \omega_x$ determina una distribución en M completamente integrable; la foliación $\mathcal{F}$ asociada a la distribución se llama *g-foliación de Lie.*

Proposición 3.2 *Dar una g-foliación de Lie en M es equivalente a dar 1-formas $\omega_1, ..., \omega_n$ ($n = \dim g$) no singulares sobre M, tales que $d\omega_k = \sum c_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j$ donde c_{ij}^k son las constantes de estructura del álgebra de Lie g para una cierta base.*

Demostración:

$\Longrightarrow$ Sea ω la 1-forma que toma valores en el álgebra de Lie g, sea B una base de g. Entonces ω se puede descomponer en n 1-formas respecto a la base B. Pero como $d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]$, al escribir esta condición en coordenadas y teniendo en cuenta que si $\alpha \otimes v$ y $\beta \otimes w$ son 1-formas con valores en g (siendo α y β 1-formas usuales de la variedad M) entonces $[\alpha \otimes v, \beta \otimes w] = \alpha \wedge \beta \otimes [v, w]$, deducimos que $d\omega_k = \sum c_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j$. Pero además que ω sea no singular se traduce en la independencia de las 1-formas.

$\Longleftarrow$ Similar.

Q.E.D.

Se tienen las siguientes propiedades (ver [4], [14] ó [10]).

1. Aplicación desenrolladora.

   Existe una cubierta regular $p\colon \overline{M} \to M$ tal que el levantamiento $p^*\mathcal{F}$ de la foliación $\mathcal{F}$ a $\overline{M}$ es una foliación simple definida por un fibrado localmente trivial $D\colon \overline{M} \to G$, siendo G el único grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie g.

2. Homomorfismo de holonomía.

   Sean $x_0 \in M, \overline{x_0} \in \overline{M}$ puntos base fijados tales que $p(\overline{x_0}) = x_0$ y $D(\overline{x_0}) = e$ (=neutro de G). Consideremos el morfismo de grupos $h\colon \pi_1(M, x_0) \to G$ dado por $h[\alpha] = D(\overline{\alpha}(1))$, $\overline{\alpha}(0) = \overline{x_0}$ y $p(\overline{\alpha}) = \alpha$. Para el cual se verifica que $\operatorname{Ker} h = \pi_1(\overline{M})$.

   Además la aplicación D es h-equivariante, es decir,

   $$D(x[\alpha]) = D(x)h[\alpha], \quad \forall x \in \overline{M}. \quad \forall [\alpha] \in \pi_1(M),$$

   Nótese que $D(x[\alpha])$ está bien definido pues $\operatorname{Ker} h = \pi_1(\overline{M})$ y $\overline{M}$ es una cubierta regular.

   Al grupo $\Gamma = im\ h$ se le llamará *el grupo de holonomía* y actúa sobre G mediante traslaciones por la derecha.

Proposición 3.3 *Los espacios difeológicos $M/\mathcal{F}$ y G/Γ son difeomorfos.*

Demostración:

Observemos que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{M} & \xrightarrow{D} & G & & \\ p\downarrow & & \downarrow & & \\ M & \longrightarrow & M/\mathcal{F} & \cong G/\Gamma & \end{array}$$

Veamos entonces que podemos definir una aplicación biyectiva entre $M/\mathcal{F}$ y G/Γ diferenciable con inversa diferenciable. Sea $\Phi\colon M/\mathcal{F} \to G/\Gamma$ definida mediante $\Phi([x]) = (\pi \circ D)(\overline{x})$ con $[x] \in M/\mathcal{F}$, x un representante de $[x]$ en M y $\overline{x} \in p^{-1}(x)$. Está bien definida, pues basta observar dos cosas:

1. Si $\overline{x}, \overline{y} \in p^{-1}(x)$, $x \in M$, dado que $\overline{M}$ es una cubierta regular, tenemos que ha de existir $[\alpha] \in \pi_1(M)$ tal que $\overline{x}[\alpha] = \overline{y}$; pero entonces $D(\overline{y}) = D(\overline{x})\gamma$ con $\gamma \in \Gamma$, de donde $\pi \circ D(\overline{x}) = \pi \circ D(\overline{y})$.

2. Si $x, y \in M$ representan la misma clase L en el espacio de hojas $M/\mathcal{F}$ entonces $\pi \circ D(\overline{x}) = \pi \circ D(\overline{y})$ con $\overline{x} \in p^{-1}(x)$ y $\overline{y} \in p^{-1}(y)$.

   En efecto, podemos elegir $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{M}$ tal que estén en la misma componente conexa de p^*L; dado que $D\colon \overline{M} \to G$ era un fibrado entonces por D se proyectan en el mismo elemento de G y por $\pi \circ D$ se proyectan en el mismo elemento de G/Γ.

Además Φ es diferenciable. Para ello simplemente hay que tener en cuenta que $D\colon \overline{M} \to G$ era un fibrado localmente trivial con fibras las componentes conexas de p^*L y que $\overline{M}$ era un espacio de recubrimiento de M, porque entonces somos capaces de levantar localmente la aplicación $\Phi\colon M/\mathcal{F} \to G/\Gamma$ a una aplicación diferenciable de U en V, siendo U y V abiertos de M y G respectivamente.

Observemos que la inversa $\Psi\colon G/\Gamma \to M/\mathcal{F}$ viene dada por $\Psi([g]) = [p(z)]$ con $z \in D^{-1}(g)$, y se comprueba de manera análoga que está bien definida y que es diferenciable.

Q.E.D.

Entonces el espacio de hojas de la foliación $\mathcal{F}$ es el cociente G/Γ, donde G es el único grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie g, y Γ un subgrupo numerable de G. Además todas las hojas son difeomorfas, y son densas en M si y sólo si Γ es denso en G. En el caso no denso tenemos:

1. Fibración básica.

   Sea $\overline{\Gamma}$ la clausura de Γ en G y sea $\overline{\Gamma}_e$ la componente conexa del neutro. Entonces las clausuras $N = \overline{L}$ de las hojas de $\mathcal{F}$ son fibras del fibrado localmente trivial $B\colon M \to W$, con $W = G/\overline{\Gamma}$ y $B(x) = [D(\overline{x})]$ con $p(\overline{x}) = x$.

2. Álgebra de Lie estructural.

   Consideremos ahora la foliación $\mathcal{F}_0$ determinada por las hojas de $\mathcal{F}$ en N. Entonces $\mathcal{F}_0$ vuelve a ser una h-foliación de Lie con hojas densas, siendo h el álgebra de Lie del grupo de Lie $\overline{\Gamma}_e$.

3. Sea ahora H el único grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie h. Para la foliación inducida $\mathcal{F}_0$ tenemos también la cubierta $p_0\colon \overline{N} \to N$, la aplicación desenrolladora $D_0\colon \overline{N} \to H$, y el homomorfismo de holonomía $h_0\colon \pi_1(N) \to H$, con $\Gamma_0 = im\ h_0$ el grupo de transformaciones para p_0, el

cual es un subgrupo denso de H porque las hojas de la foliación son densas en N.

El álgebra de Lie g no es intrínseca, pero h sí lo es; dado que la cubierta de $\overline{M}$ depende solamente de $\pi_1(L)$, otra aplicación desenrolladora $D_1 : \overline{M} \to G_1$ inducirá un difeomorfismo $d: G \to G_1$ dado por $d(g) = D_1(x)$ con $D(x) = g$, que es un isomorfismo de grupos restringido a Γ, por lo cual d es un isomorfismo de grupos de Lie cuando las hojas son densas.

Ejemplo 3.4 Foliaciones lineales en el toro.

Consideremos la foliación $\mathcal{F}_\alpha$ en el toro T^2 definida por la 1-forma cerrada $\omega = dy - \alpha dx$. El grupo Γ_α es el grupo de ciclos de ω. Tenemos $M = T^2$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha$. Entonces la cubierta regular es $\overline{M} = R^2$, por lo cual $p^*\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{L}_\alpha$ siendo $\mathcal{L}_\alpha$ las rectas de R^2 con pendiente α y $p: R^2 \to T^2 = R^2/Z^2$ la proyección canónica. El fibrado (trivial) $D: R^2 \to R$ está definido por $D((x, y)) = \alpha x - y$. Como $\pi_1(M) \cong Z \times Z$, el homomorfismo de holonomía $h: Z \times Z \to R$ está definido por $h(a, b) = a + b\alpha$. El grupo de holonomía es $im\ h = \Gamma = \Gamma_\alpha$ y por la Proposición 3.3 tenemos $R/\Gamma_\alpha = T^2/\mathcal{F}_\alpha = T_\alpha$. Dado que las hojas son densas debido a que Γ_α es denso en R tenemos que la fibración básica es la dada por $B: M \to \{1\}$ con $B(x) = 1$ para todo $x \in M$. Dado que $\overline{\Gamma_\alpha} = R$ tenemos que el álgebra de Lie estructural es R.

3.2 Propiedad de levantamiento.

Sea G un grupo de Lie simplemente conexo, sea Γ un subgrupo numerable arbitrario de G. Sea π la proyección canónica de G en G/Γ (el espacio de clases por la izquierda).

Proposición 3.5 *Sea $f: G/\Gamma \to G/\Gamma$ diferenciable en sentido difeológico, entonces existe $F: G \to G$ diferenciable tal que $\pi \circ F = f \circ \pi$.*

Demostración:

Localmente es cierto por definición de difeología cociente, es decir, dado un punto arbitrario $x \in G$ existe un entorno abierto U_x y una aplicación diferenciable $F_x: U_x \to G$ tal que $\pi \circ F_x = f \circ \pi_{U_x}$.

Consideremos ahora $\{(y, F_x(y) : y \in U_x\} \subset G \times G$, que es el grafo de una función diferenciable de U_x en G, por lo cual es una subvariedad embebida de $U_x \times G$. Definamos una distribución en $U_x \times G$ de la siguiente manera: un punto arbitrario de $U_x \times G$ se escribirá de manera única como $(y, F_x(y)h)$ donde $y \in U_x$

y $h \in G$. Sea (v, w) un vector del espacio tangente al grafo de F_x en el punto $(y, F_x(y)) \in U_x \times G$; entonces $(v, (dR)_h(w)) \in T_yU_x \times T_{F_x(y)h}G$. Conseguimos así definir una distribución en $U_x \times G$. Además es integrable pues por cada $(y, z) \in U_x \times G$ pasa una variedad integral que sería un trasladado del grafo F_x por un cierto $h \in G$.

Podemos extender esta distribución en $U_x \times G$ a una distribución en $G \times G$. Para ello observemos que para cada $x \in G$ podemos hacer la misma construcción, entonces definimos una distribución en $G \times G$ definiéndola en cada abierto de la forma $U_x \times G$. Veamos que de hecho tenemos bien definida una distribución en $G \times G$. Sean $x, y \in G$ tales que $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, sea $z \in U_x \cap U_y$ y $V \subset U_x \cap U_y$ una componente conexa que contiene a z, entonces dado que F_x, F_y restringidos a V son levantamientos locales de f, V es conexo y Γ numerable, obtenemos que F_x, F_y difieren en una traslación por la derecha por un elemento de Γ. De donde concluimos que la distribución está bien definida. Además es integrable, porque lo era localmente.

Consideremos ahora $e \in G$ y un elemento $x_0 \in G$ tal que $[x_0] = f([e])$. Entonces existe una única variedad conexa maximal $\widetilde{G}$ de la distribución pasando por (e, x_0).

Lema 3.6 *La variedad integral $\widetilde{G}$ es un espacio recubridor de G donde la aplicación recubridora $\pi\colon \widetilde{G} \to G$ es la composición de la inclusión $i\colon \widetilde{G} \to G \times G$ y de la proyección en la primera componente $p_1\colon G \times G \to G$.*

Demostración:

Se tiene que $\pi\colon \widetilde{G} \to G$ es diferenciable, pues es la composición de aplicaciones diferenciables.

Claramente es una submersión, por lo cual es abierta.

También es sobreyectiva. Supongamos que no es sobreyectiva, sea y perteneciente a la frontera de $p_1(\widetilde{G})$, tomemos un entorno U_y (podemos suponer que $p_1(\widetilde{G}) \bigcap U_y$ e U_y son conexos) y un levantamiento local F_y de f. Entonces $\{(z, F_y(z))\colon z \in U_y\}$ es una variedad integral de la distribución. Como $p_1(\widetilde{G}) \bigcap U_y$ es conexo y abierto tenemos que $\widetilde{G}$ tiene que ser localmente de la forma $\{(z, F_y(z)h\colon z \in p_1(\widetilde{G}) \bigcap U_y\}$, pero entonces vemos inmediatamente que $\overline{G} = \widetilde{G} \cup \{(z, F_y(z)h)\colon z \in U_y\}$ es una variedad conexa integral que contiene estrictamente a $\widetilde{G}$, que era una variedad conexa integral maximal de la distribución. Lo cual es una contradicción.

Veamos que es espacio de recubrimiento. Hay que ver que para cada punto $x \in G$ existe un entorno abierto U_x tal que $\pi^{-1}(U_x)$ se descompone en una unión disjunta de abiertos de $\widetilde{G}$ tal que cada uno se aplica homemórficamente sobre U_x.

Por simetría de razonamientos nos llega con hacerlo para el neutro de G. Existe un único levantamiento local $F_e\colon U_e \to G$ de f, siendo U_e un entorno del neutro, verificando $F_e(e) = x_0$. Entonces $\widetilde{U_e} = \{(x, F_e(x)) : x \in U_e\}$ es un entorno abierto de (e, x_0) en $\widetilde{G}$, $\pi(\widetilde{U_e}) = U_e$ y además:

$$\pi^{-1}(U_e) = \coprod_{\gamma\in\Delta} \widetilde{U_e}\gamma,$$

siendo $\Delta = \{\gamma \in \Gamma : (e, x_0\gamma) \in \widetilde{G}\}$, que es no vacío ($e \in \Delta$), y $\widetilde{U_e}\gamma = \{(x, F_e(x)\gamma) : x \in U_e\}$.

Luego $\pi\colon \widetilde{G} \to G$ es un espacio recubridor de G.

Q.E.D.

Pero ahora como G es simplemente conexo deducimos que π tiene que ser un difeomorfismo. Y por lo tanto la aplicación $F\colon G \to G$ definida mediante $p_2 \circ i \circ \pi^{-1}(x)$ para todo $x \in G$ está bien definida, es diferenciable y es un levantamiento de f definido en todo G.

Q.E.D.

Tal y como se ve en la demostración, el levantamiento es único una vez que fijamos la imagen de un punto. Por tanto si f es un difeomorfismo, su levantamiento es también es un difeomorfismo de G.

Corolario 3.7 *Sea G un grupo de Lie simplemente conexo, Γ un subgrupo de G numerable, U un abierto de R^n, $n \geq 0$, difeomorfo a R^n y Γ_1 otro subgrupo de G numerable. Sea $f\colon U \times G/\,\Gamma \to U \times G/\,\Gamma_1$ una aplicación diferenciable de espacios difeológicos; entonces existe una aplicación diferenciable $F\colon U \times G \to U \times G$ tal que $\pi_1 \circ F = f \circ \pi$, es decir, F es un levantamiento de f.*

3.3 El grupo $\mathrm{Diff}(G/\,\Gamma)$.

A partir de ahora vamos a considerar $G/\,\Gamma$ como el espacio cociente de clases laterales por la izquierda. En el caso de clases laterales por la derecha los razonamientos serían análogos. Las demostraciones de este apartado están esbozadas en [9].

3.3.1 El grupo difeológico $\mathrm{Diff}(M/\mathcal{F})$.

Proposición 3.8 *Sea $M/\mathcal{F} = G/\,\Gamma$ el espacio de hojas de una foliación de Lie con hojas no necesariamente densas sobre una variedad compacta. Entonces $\mathrm{Diff}(M/\mathcal{F})$ es un grupo difeológico con la difeología inducida por la de $\mathcal{D}(M/\mathcal{F}, M/\mathcal{F})$.*

Demostración:

Sea $\alpha: U \subset R^n \to \mathrm{Diff}(M/\mathcal{F}) \subset \mathcal{D}(M/\mathcal{F}, M/\mathcal{F})$ una carta, es decir, una aplicación tal que $\overline{\alpha}: U \times G/\Gamma \to U \times G/\Gamma$, $\overline{\alpha}(t, [g]) = (t, \alpha(t)([g]))$, es diferenciable. Para demostrar que la inversión es diferenciable sólo hay que comprobar que $\overline{\alpha}$ es un difeomorfismo, porque entonces $(\overline{\alpha})^{-1} = \overline{(I\alpha)}$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el abierto $U \subset R^n$ es difeomorfo a R^n. Entonces, por el corolario 3.7, tenemos que la aplicación $\overline{\alpha}$ puede ser levantada a una aplicación $F: U \times G \to U \times G$ con $F(t, g) = (t, \zeta(t, g))$ tal que $[\zeta(t, g)] = \alpha(t)([g])$.

Ahora fijemos un $t \in U$. Desde que $\alpha(t)^{-1}$ es un difeomorfismo de G/Γ se puede levantar a algún difeomorfismo λ del grupo de Lie G. Dado que la composición $\lambda \circ \zeta(t, -)$ toma valores en la identidad desplazado por elementos de Γ a la derecha, pero Γ es grupo numerable, tenemos que la aplicación al multiplicarla por la inversión a la izquierda tiene que ser constante porque G es un grupo de Lie conexo. Por lo cual $\lambda \circ \zeta(t, -) = R_\gamma$. Análogamente $\zeta(t, -) \circ \lambda = R_\mu$. De donde concluimos que $\zeta(t, -)$ es un difeomorfismo.

Finalmente aplicando el Teorema de la función inversa para variedades podemos concluir que F es difeomorfismo, pero entonces como F^{-1} es un levantamiento de $(\overline{\alpha})^{-1}$ tenemos que $\overline{(I\alpha)}$ es diferenciable.

Q.E.D.

3.3.2 Cálculo del invariante $\mathrm{Diff}(G/\Gamma)$.

Sea $\mathrm{Aut}_\Gamma(G) \subset \mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Aut}(g)$ el grupo de automorfismos del grupo de Lie G que preservan Γ, y consideremos el producto-semidirecto $\mathrm{Aut}_\Gamma(G) \ltimes G$ definido de la siguiente manera:

$$(\theta_1, g_1)(\theta_2, g_2) = (\theta_1 \circ \theta_2, g_1 \theta_1(g_2)).$$

Además tenemos el siguiente isomorfismo de grupos en la imagen:

$$i: \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}_\Gamma(G) \ltimes G$$
$$\gamma \mapsto (i_\gamma, \gamma^{-1})$$

donde i_γ es el automorfismo interior de G dado por $g \in G \mapsto \gamma g \gamma^{-1}$.

Lema 3.9 *La imagen del grupo Γ mediante i es un subgrupo normal del producto semidirecto* $\mathrm{Aut}_\Gamma(G) \ltimes G$.

Demostración:

i es homomorfismo de grupos porque

$$(i_\gamma, \gamma^{-1})(i_\mu, \mu^{-1}) = (i_\gamma \circ i_\mu, \gamma^{-1} i_\gamma(\mu^{-1})) = (i_{\gamma\mu}, (\gamma\mu)^{-1}).$$

Sea $(\theta, g) \in \mathrm{Aut}_\Gamma(G) | \times G$ y $(i_\gamma, \gamma^{-1}) \in i(\Gamma)$. Entonces:

$$(\theta, g)(i_\gamma, \gamma^{-1})(\theta, g)^{-1} = (\theta, g)(i_\gamma, \gamma^{-1})(\theta^{-1}, \theta^{-1}(g^{-1})) = (i_{\theta(\gamma)}, \theta(\gamma)^{-1}).$$

Pero como θ preserva Γ deducimos que $i(\Gamma)$ es normal.

Q.E.D.

Ahora si identificamos Γ con su imagen obtenemos el siguiente teorema cuya demostración está esbozada en [9].

Teorema 3.10 *Si Γ es denso en G, entonces* $\mathrm{Diff}(G/\Gamma)$ *es isomorfo como grupo difeológico al grupo difeológico cociente* $(\mathrm{Aut}_\Gamma(G) | \!\times G)/\Gamma$.

Demostración:

Sea φ un levantamiento de un difeomorfismo de G/Γ; tal como vimos antes en la Proposición 3.5 φ es un difeomorfismo de G. Observemos que $\varphi(g)^{-1}\varphi(g\gamma)$, fijado $\gamma \in \Gamma$, es una función diferenciable de G que toma valores en Γ y por lo cual tiene que ser constante por ser Γ numerable y G conexo. Si hacemos este razonamiento para todo $\gamma \in \Gamma$ obtenemos:

$$\varphi(g\gamma) = \varphi(g)\theta(\gamma), \quad \forall g \in G, \quad \forall \gamma \in \Gamma,$$

siendo θ una función de Γ en Γ. Pero como θ no depende del elemento $g \in G$ que estemos considerando, si hacemos $g = e$ obtenemos: $\theta(\gamma) = \varphi(e)^{-1}\varphi(\gamma)$. Llamemos $\theta = \theta_\varphi = L^{-1}_{\varphi(e)} \circ \varphi$, en donde vemos que θ es diferenciable de G en G, y de hecho:

Lema 3.11 *θ es un automorfismo de grupos de Lie que induce un automorfismo de grupos al restringir a Γ.*

Demostración:

1. Es un homomorfismo de grupos de Lie que aplica Γ en Γ.

   Es diferenciable, pues es la composición de dos aplicaciones diferenciables. Además aplica Γ en Γ, pues φ conserva las clases por la izquierda. Es de grupos, dado que :

   $$\varphi(\gamma_1\gamma_2) = \varphi(\gamma_1)\theta(\gamma_2) = \varphi(e)\theta(\gamma_1)\theta(\gamma_2), \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma,$$

pero entonces

$$\varphi(e)\theta(\gamma_1)\theta(\gamma_2) = \varphi(\gamma_1\gamma_2) = \varphi(e)\theta(\gamma_1\gamma_2),$$

de donde deducimos que θ es de grupos al restringir a Γ, pero como Γ es denso en G, concluimos que θ es un homorfismo de grupos de Lie.

2. Además es un difeomorfismo de G pues es la composición de los difeomorfismos φ y $L^{-1}_{\varphi(e)}$.

3. Además es biyectivo de Γ en Γ; para ver ésto, sólo hace falta ver que es sobreyectivo pues el resto ya está visto. Si no fuera sobreyectivo entonces habría un elemento $g \in G$ con $g \notin \Gamma$ tal que $\theta(g) \in \Gamma$, es decir, que pertenecen a distintas clases en G/Γ, pero entonces $[\varphi(g)] = [\varphi(e)]$, lo cual es una contradicción pues φ es el levantado de un difeomorfismo de G/Γ.

Luego de hecho $\theta \in \mathrm{Aut}_\Gamma(\mathrm{G})$, que era lo que queríamos demostrar.

Q.E.D.

Finalmente:

Lema 3.12 *Dos difeomorfismos φ, ψ de G, que pasan al cociente, inducen el mismo difeomorfismo en G/Γ si y sólo si $\theta_\psi = i_\mu \theta_\varphi$ con $\mu = \psi(e)^{-1}\varphi(e) \in \Gamma$.*

Demostración:

$\Rightarrow$ Si φ y ψ inducen el mismo automorfismo en G/Γ, como $\varphi = L_{\varphi(e)} \circ \theta_\varphi$ y $\psi = L_{\psi(e)} \circ \theta_\psi$, tenemos

$$(L_{\varphi(e)} \circ \theta_\varphi)(L_{\psi(e)} \circ \theta_\psi)^{-1} = R_\mu, \quad \mu \in \Gamma,$$

debido a que pasaría al cociente como la la aplicación constante $c\colon G/\Gamma \to G/\Gamma$ dada por $c([x]) = [e]$, $\forall x \in G$. Despejando:

$$L_{\varphi(e)}\theta_\varphi = R_\mu L_{\psi(e)}\theta_\psi.$$

Además si evaluamos en el neutro obtenemos:

$$\mu = \psi(e)^{-1}\varphi(e),$$

dado que θ_φ y θ_ψ son automorfismos de grupos, que dejan el neutro fijo. Luego:

$$\theta_\psi = L^{-1}_{\psi(e)} R^{-1}_\mu L_{\varphi(e)}\theta_\varphi = L^{-1}_{\psi(e)} L_{\varphi(e)} R^{-1}_\mu \theta_\varphi,$$

por lo cual
$$\theta_\psi = L_\mu R_\mu^{-1}\theta_\varphi, \quad \mu \in \Gamma;$$
dado que R_a y L_b conmutan $\forall a, b \in G$.

$\Leftarrow$ Son cálculos directos.

Q.E.D.

Vamos ahora a construir un aplicación biyectiva entre los espacios difeológicos $\mathrm{Diff}(G/\Gamma)$ y $(\mathrm{Aut}_\Gamma(G) |\!\!\times G)/\Gamma$. Con el siguiente lema quedará demostrado el teorema.

Sea $\Phi\colon \mathrm{Diff}(G/\Gamma) \longrightarrow (\mathrm{Aut}_\Gamma(G) |\!\!\times G)/\Gamma$ definida mediante
$$\Phi(\overline{\varphi}) = [(\theta_\varphi, \varphi(e))].$$

Lema 3.13 *La aplicación Φ está bien definida, es de grupos, es biyectiva y además es diferenciable con inversa diferenciable. Es decir, es un isomorfismo de grupos difeológicos.*

Demostración:

1. Está bien definida.

   Sean φ y ψ difeomorfismos de G que representan levantamientos del mismo difeomorfismo de G/Γ. Entonces por lo que vimos en el Lema 3.12 tenemos que $\theta_\psi = L_\mu \circ R_\mu^{-1} \circ \theta_\varphi$, donde $\mu = \psi(e)^{-1}\varphi(e) \in \Gamma$ y $\theta_\varphi, \theta_\psi \in \mathrm{Aut}_\Gamma(G)$. Por lo tanto:
   $$(\theta_\psi, \psi(e)) = (i_\mu, \mu^{-1})(\theta_\varphi, \varphi(e)),$$
   luego $(\theta_\varphi, \varphi(e))$ y $(\theta_\psi, \psi(e))$ definen el mismo elemento en el grupo cociente $(\mathrm{Aut}_\Gamma(G) |\times G)/\Gamma$.

2. Sea $\overline{\zeta} = \overline{\varphi} \circ \overline{\psi}$ con $\overline{\zeta}, \overline{\varphi}, \overline{\psi} \in \mathrm{Diff}(G/\Gamma)$; si φ y ψ son levantamientos de $\overline{\varphi}$ y $\overline{\psi}$ respectivamente, entonces $\zeta = \varphi \circ \psi$ es un levantamiento de $\overline{\zeta}$. Observemos también que si $\varphi = L_{\varphi(e)}\theta_\varphi$ y $\psi = L_{\psi(e)}\theta_\psi$, entonces
   $$\varphi \circ \psi = L_{\varphi(e)}\theta_\varphi L_{\psi(e)}\theta_\psi = L_{\varphi(e)} L_{\theta_\varphi(\psi(e))}\theta_\varphi\theta_\psi = L_{\varphi(e)\theta_\varphi(\psi(e))}\theta_\varphi\theta_\psi,$$
   por lo cual $\varphi \circ \psi(e) = \varphi(e)\theta_\varphi(\psi(e))$ y $\theta_{\varphi\circ\psi} = \theta_\varphi \circ \theta_\psi$. Pero por otra parte:
   $$(\theta_\varphi, \varphi(e))(\theta_\psi, \psi(e)) = (\theta_\varphi\theta_\psi, \varphi(e)\theta_\varphi(\psi(e))),$$
   de donde deducimos que Φ es de grupos.

3. Es biyectiva.

   Sea $\overline{\varphi}$ que se aplica en el neutro del grupo cociente $(\mathrm{Aut}_\Gamma(G)|\!\!\times G)/\Gamma$. Entonces $\varphi = L_\gamma^{-1} \circ i_\gamma = R_\gamma^{-1}, \gamma \in \Gamma$, pero entonces $\overline{\varphi} = id_{G/\Gamma}$. Por tanto Φ es inyectiva. Por otro lado es sobreyectiva, porque dado un elemento $[(\theta, g)]$ del grupo cociente del producto semidirecto tomemos un representante $(\theta, g) \in \mathrm{Aut}_\Gamma(G)|\!\!\times G$. Entonces es claro que $\varphi = L_g \circ \theta$ pasa a un difeomorfismo $\overline{\varphi}$ del cociente G/Γ y que $\overline{\varphi}$ se aplica por Φ en $[(\theta, g)]$.

4. Veamos que es diferenciable.

   Sea α_U una carta de Diff(G/Γ). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que U es un abierto de R^n difeomorfo a R^n. Por lo cual, por el corolario 3.7, $\overline{\alpha}_U\colon U \times G/\Gamma \to U \times G/\Gamma$ se puede levantar a una aplicación diferenciable $\overline{\beta}_U\colon U \times G \to U \times G$. Pero ahora la aplicación $\lambda^\wedge\colon U \times G \to G \times G$ definida mediante

   $$\lambda^\wedge(t, g) = (\beta_U(t)(e)^{-1}\beta_U(t)(g), \beta_U(t)(e))$$

   es diferenciable. Luego $\lambda\colon U \to \mathrm{Aut}_\Gamma(G) \times G$ dada por

   $$\lambda(t) = (L_{\beta_U(t)(e)^{-1}} \circ \beta_U(t), \beta_U(t)(e))$$

   es una carta en $\mathrm{Aut}_\Gamma(G) \times G$. Pero como es un levantamiento de $\Phi \circ \alpha_U$, deducimos que Φ es diferenciable.

5. Para ver que la inversa también es diferenciable en sentido difeológico se procede de manera análoga.

Q.E.D.

Corolario 3.14 *(a la demostración)*
Sean G y G' grupos de Lie simplemente conexos, sean Γ y Γ' dos subgrupos densos numerables en G y G' respectivamente. Entonces G/Γ y G'/Γ' son difeomorfos si y sólo si existe un isomorfismo de grupos de Lie θ de G en G' tal que θ establezca un isomorfismo de grupos entre Γ y Γ'.

Corolario 3.15 *Si Γ es denso en G, entonces $\mathcal{D}(G/\Gamma, G/\Gamma)$ es difeomorfo como espacio difeológico al cociente* $(\mathrm{End}_\Gamma(G)|\!\!\times G)/\Gamma$.

Además en el caso de que G sea abeliano entonces $\mathcal{D}(G/\Gamma, G/\Gamma)$ tiene estructura de anillo y el difeomorfismo se convierte en un isomorfismo de anillos (en general no conmutativos) y las unidades de este anillo son justamente Diff(G/Γ).

Nota

Es sencillo ver que tanto el grupo $\mathrm{Aut}_\Gamma(G)$ como el monoide $\mathrm{End}_\Gamma(G)$ son invariantes de la foliación $\mathcal{F}$ (Γ denso en G). Es decir si la foliación $\mathcal{F}$ tuviera asociado otro subgrupo Γ' en G, el cual sería necesariamente denso en G por serlo Γ, tendríamos: $\mathrm{Aut}_\Gamma(G) \cong \mathrm{Aut}_{\Gamma'}(G)$ como grupos y $\mathrm{End}_\Gamma(G) \cong \mathrm{End}_{\Gamma'}(G)$ como monoides. Además en el caso abeliano $\mathrm{End}_\Gamma(G)$ tiene una estructura de anillo (en general no conmutativo) que tiene por unidades $\mathrm{Aut}_\Gamma(G)$ y entonces el isomorfismo de monoides se transforma en un isomorfismo de anillos.

3.3.3 Consecuencias de la propiedad de levantamiento.

Los cálculos efectuados en la sección anterior nos permiten obtener los siguientes resultados como consecuencias de la propiedad de levantamiento.

Proposición 3.16 *Sea M una variedad diferenciable compacta en la que están dadas dos foliaciones de Lie $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ con hojas densas. Entonces los espacios difeológicos $M/\mathcal{F}$ y $M/\mathcal{F}'$ son difeomorfos si y sólo si $g \cong g'$ y existe un isomorfismo de grupos de Lie de G en G' que lleva Γ en Γ'.*

Demostración:

Si $M/\mathcal{F}$ es difeomorfo a $M/\mathcal{F}'$ entonces por la Proposición 3.3 tenemos que los espacios difeológicos $G/\,\Gamma$ y $G'/\,\Gamma'$ son difeomorfos. Pero por el corolario 3.14 tenemos que existe un isomorfismo de grupos de Lie θ de G en G' que establece un isomorfismo de grupos entre Γ y Γ'.

Q.E.D.

Corolario 3.17 *Sea M una variedad compacta, sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ dos foliaciones de Lie. Entonces $M/\mathcal{F}$ es difeomorfo a $M/\mathcal{F}'$ si y sólo si existe una cubierta regular $\overline{M}$ y dos fibrados localmente triviales $D\colon \overline{M} \to G$ y $D'\colon \overline{M} \to G$ que induzcan las foliaciones $p^*\mathcal{F}$ y $p^*\mathcal{F}'$ respectivamente y que los morfismos de holonomía de D y D' sobre $\pi_1(M)$ coincidan.*

Demostración:

$\Leftarrow$ Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} \overline{M} & \xrightarrow{D} & G & & \xrightarrow{\theta} & & G & \xleftarrow{D'} & \overline{M} \\ p\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow p \\ M & \longrightarrow & G/\,\Gamma & \cong M/\mathcal{F} & \cong & M/\mathcal{F}' & \cong G/\,\Gamma' & \longleftarrow & M \end{array} \tag{3.1}$$

con $D(x) = D'(x) = e$, $x \in \overline{M}$ y siendo θ el automorfismo de grupos de Lie que lleva Γ en Γ'.

Luego $\theta \circ D$ y D' verifican los requisitos.

$\Rightarrow$ Por la Proposición 3.3, $M/\mathcal{F}$ es difeomorfo a G/Γ y $M/\mathcal{F}'$ es difeomorfo a G/Γ. Q.E.D.

Corolario 3.18 *Si tenemos una foliación de Lie sobre una variedad compacta con hojas densas inducida por dos* 1*-formas ω y ω' con valores en un álgebra de Lie g entonces $\omega = \theta_* \circ \omega'$, siendo θ_* un automorfismo del álgebra de Lie g.*

Demostración:

Consideremos el diagrama 3.1 de la Proposición 3.17 con $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ y $\Gamma = \Gamma'$. Sea $[D]: M/\mathcal{F} \to G/\Gamma$ el difeomorfismo inducido por D, $[D']: M/\mathcal{F} \to G/\Gamma'$ el difeomorfismo inducido por D' y $[\theta]: G/\Gamma \to G/\Gamma'$ el inducido por θ; entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M/\mathcal{F} & \xrightarrow{id} & M/\mathcal{F} \\ [D]\downarrow & & \downarrow [D'] \\ G/\Gamma & \xrightarrow{[\theta]} & G/\Gamma' \end{array}$$

del cual deducimos que $[\theta \circ D] = [D']$ por lo cual $\theta \circ D = R_{\gamma'} \circ D'$, pero como las dos envían x al neutro, tenemos que

$$\theta \circ D = D'.$$

Finalmente $\theta_* \circ \omega = \omega'$.

Q.E.D.

Nota

Observemos que en el caso denso una foliación de Lie sólo puede modelar sobre un álgebra de Lie, pues el isomorfismo entre los grupos de holonomía se podría extender a un isomorfismo entre los grupos de Lie simplemente conexos. Aunque puede darse el caso de que una foliación de Lie con hojas densas se le pueda asociar distintos grupos de holonomía (conjugados).

Capítulo 4

Aplicación a las foliaciones lineales en el toro T^{n+1}

En este capítulo consideraremos foliaciones lineales en el toro T^2, para las que calcularemos el grupo de difeomorfismos del espacio de hojas. Estos cálculos están hechos en [3], pero nosotros aplicaremos el resultado general de Hector y Macias que hemos visto en el teorema 3.10 del capítulo anterior . Después generalizaremos los resultados de Donato [3] en dos direcciones, a los casos de foliaciones lineales de codimensión uno y de flujos lineales en un toro T^n con órbitas densas. Las foliaciones lineales en el toro T^n fueron estudiadas por ElKacimi y Azeddine Tihami para el cálculo de cohomologías bigraduadas en [7].

En general entenderemos por foliación lineal $\mathcal{F}$ en el toro T^n una foliación inducida por la foliación trivial de R^n que está generada por un subespacio vectorial $V \subset R^n$.

4.1 Foliaciones lineales en el toro T^2.

Vamos a considerar la foliación lineal en el toro dada en el ejemplo 2.26 mediante el núcleo de una 1-forma cerrada. Trataremos de calcular los difeomorfismos (como espacio difeológico) del espacio de hojas, así como otras foliaciones de Lie sobre el toro cuyo espacio de hojas sea difeomorfo al espacio de hojas de la foliación inicial; para hacer esto aplicaremos el Teorema 3.3 y el corolario 3.14. Estos cálculos están hechos por Donato en [3].

Consideremos el cociente $T^2 = R^2/Z^2$. Sea la 1-forma cerrada en R^2 dada por $\omega = dy - \alpha dx$, α un número irracional, la cual induce una 1-forma en el cociente. La foliación $\mathcal{F}_\alpha$ que define en el toro tiene sus hojas densas. Llamemos T_α al espacio difeológico dado por el cociente:

$$T_\alpha = \frac{R^2}{R(1,\alpha) + Z^2},$$

de grupos difeológicos. Sea $\Gamma_\alpha = \{m + n\alpha : m, n \in Z\} \subset R$, el cual es un subgrupo denso de R. Entonces tenemos que los grupos difeológicos T_α y R/Γ_α son isomorfos como grupos difeológicos, pues basta tener en cuenta que el difeomorfismo dado en 3.3 en este caso es de grupos.

4.1.1 Clasificación de los toros T_α.

Nótese que desde el punto de vista algebraico siempre tenemos:

Proposición 4.1 *Para cualesquiera $\alpha, \beta \in R$ irracionales, los grupos cocientes de R/Γ_α y R/Γ_β son isomorfos como grupos algebraicos.*

Demostración:

Para ver esto llega con ver que existe un isomorfismo de R como grupo abeliano que induce un isomorfismo entre Γ_α y Γ_β. Basta tener en cuenta que R es un Q-espacio vectorial. Distingamos dos casos:

1. $\langle 1, \alpha\rangle_Q = \langle 1, \beta\rangle_Q$.

   Dado que $\{1, \alpha\}$ es un conjunto linealmente independiente sobre Q, entonces por el Lema de Zorn lo podemos completar a una base B de R como Q-espacio vectorial. Pero ahora, si substituimos α por β obtenemos una nueva base B' de R. Entonces podemos definir el Q-endomorfismo lineal $f\colon R \to R$ sobre la base B mediante $f(\alpha) = \beta$ y $f(b) = b$ si $b \in B$ y $b \neq \alpha$. Además f es claramente inyectiva, sobreyectiva (pues B' es otra base de R) y aplica isomórficamente Γ_α en Γ_β.

2. Supongamos que el conjunto $\{1, \alpha, \beta\}$ es linealmente independiente sobre Q.

   Otra vez por el Lema de Zorn lo podemos completar a una base B. Ahora volvemos a definir un Q-endomorfismo lineal $f\colon R \to R$ sobre la base B mediante $f(\alpha) = \beta$, $f(\beta) = \alpha$ y $f(b) = b$ si $b \in B - \{\alpha, \beta\}$. Además f es claramente inyectiva, sobreyectiva (pues lleva la base B en ella misma) y aplica isomórficamente Γ_α en Γ_β.

Como f es isomorfismo Q-lineal entonces también es isomorfismo de grupos abelianos y sí cumple los requisitos que queríamos.

Q.E.D.

Sean T_α y T_β dos toros irracionales. Entonces todo difeomorfismo $\varphi \in \mathrm{Diff}(T_\alpha, T_\beta)$, se puede levantar a un difeomorfismo de R, por ser R un grupo de Lie simplemente conexo y T_α, T_β cocientes de R por subgrupos numerables de R, tal y como vimos en 3.5, es decir:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R \\ \downarrow \pi_\alpha & & \downarrow \pi_\beta \\ T_\alpha & \xrightarrow{\varphi} & T_\beta \end{array}$$

La igualdad $\pi_\alpha \circ f = \varphi \circ \pi_\beta$, se traduce en que para todo $x \in R$ y para todo $m + n\alpha \in \Gamma_\alpha$ existe $p + q\beta \in \Gamma_\beta$ verificando:

$$f(x + m + n\alpha) = f(x) + p + q\beta.$$

Ahora, tal y como vimos en el corolario 3.14, f ha de inducir un isomorfismo $\theta = -f(0) + f$ de Γ_α en Γ_β, el cual es la restricción de un automorfismo (de grupos de Lie) de R.

Pero los únicos automorfismos de grupos (con la suma) continuos de R en R son los de la forma $\theta(x) = \lambda x$ para un escalar $\lambda \in R - \{0\}$.

Además, como Γ_α y Γ_β son grupos abelianos libres, el isomorfismo θ restringido a ellos estará determinado por la imagen de los generadores:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix},$$

con $a, b, c, d, m, n, p, q \in Z$ y donde estamos identificando $p + q\beta = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ y $m + n\alpha = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$, pues estamos tomando como bases $\{1, \alpha\}$ y $\{1, \beta\}$.

Dado que tiene que ser un isomorfismo de grupos abelianos libres, la primera condición que obtenemos es:

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \pm 1,$$

es decir: $ad - bc = \pm 1$.

Pero ahora bien, la imagen del $1 \in \Gamma_\alpha$ es justamente

$$\lambda 1 = \lambda = a + b\beta,$$

y la otra condición que queda es que $\lambda\alpha = c+d\beta$, de donde sacamos la condición $\alpha(a+b\beta) = (c+d\beta)$. Entonces el difeomorfismo φ vendrá de un difeomorfismo f de R definido mediante $f(x) = (a+b\beta)x + r$, con $r \in R$.

Diremos que dos números irracionales α, β están relacionados módulo $GL(2, Z)$ si y sólo si

$$\alpha = A * \beta = \frac{c+d\beta}{a+b\beta} \tag{4.1}$$

con $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL(2, Z)$. Claramente es una relación de equivalencia. Finalmente hemos obtenido el siguiente teorema; que está demostrado en [3].

Teorema 4.2 *Dos toros irracionales son difeomorfos, y de hecho isomorfos (como grupos difeológicos) si y sólo si $\alpha \sim \beta$ módulo $GL(2, Z)$.*

4.1.2 Cálculo de los difeomorfismos del toro irracional T_α.

Como $\Gamma_\alpha = \{m+n\alpha : \ m, n \in Z\}$ (α irracional) es un subgrupo denso finitamente generado de R y dado que R es un grupo de Lie simplemente conexo, por el Teorema 3.10, tenemos:

$$\mathrm{Diff}(T_\alpha) = (\mathrm{Aut}_{\Gamma_\alpha}(R) |\!\times R) / \,\Gamma_\alpha,$$

donde $\Gamma_\alpha = \{(i_\gamma, \gamma^{-1}) \ : \ \gamma \in \Gamma_\alpha\}$ y donde i_γ era la conjugación interior por γ. Ahora bien, como R es abeliano la conjugación por γ se transforma en la identidad, por lo cual:

$$(\mathrm{Aut}_{\Gamma_\alpha}(R) |\!\times R)/\Gamma_\alpha = \mathrm{Aut}_{\Gamma_\alpha}(R) |\!\times (R/\Gamma_\alpha) = \mathrm{Aut}_{\Gamma_\alpha}(R) |\!\times T_\alpha.$$

Nuestro problema principal ahora es calcular $\mathrm{Aut}_{\Gamma_\alpha}(R)$ el cual es equivalente a cacular los $\lambda \in R - \{0\}$ tales que multiplicar por λ induce un automorfismo en Γ_α. Está claro que la composición al pensarlos como escalares se transforma en la multiplicación usual.

Teorema 4.3 *Supongamos que α es un irracional no cuadrático. Entonces el grupo $\mathrm{Aut}_{\Gamma_\alpha}(R)$ es isomorfo a Z_2.*

Demostración:

Sea φ un automorfismo de R que induce un automorfismo en Γ_α y que esté asociado a un escalar $\lambda \in R - \{0\}$. Entonces la imagen del 1 está en Γ_α, es decir, $\lambda 1 \in \Gamma_\alpha$. Luego $\lambda = m + n\alpha$ con $m, n \in Z$. Ahora bien, la imagen de α también pertenece a Γ_α, luego $\lambda\alpha = (m + n\alpha)\alpha = p + q\alpha$ y entonces $n\alpha^2 + m\alpha = p + q\alpha$. Dado que α no es cuadrático deducimos: $n = p = 0$ y $m = q$, de donde sacamos $\lambda = m$ con $m \in Z$. Pero como λ induce un automorfismo de Γ_α, entonces $\lambda^{-1} = \frac{1}{m} \in \Gamma_\alpha$ de donde deducimos $m = \pm 1$ y $\lambda = \pm 1$. Luego $\mathrm{Aut}_{\Gamma\alpha}(R) = \{\pm id\}$.

Q.E.D.

Lema 4.4 *Supongamos que α es un irracional cuadrático con $\alpha = \sqrt{d}$ para un $d \in Z^+$. Entonces el grupo* $\mathrm{Aut}_{\Gamma_\alpha}(R)$ *es isomorfo a $Z_2 \times Z$.*

Demostración:

Si φ es un automorfismo de R que induce un automorfismo de Γ_α, y está asociado a $\lambda \in R - \{0\}$, tenemos que la imagen del 1 está en Γ_α, es decir, $\lambda = m + n\alpha$ con $m, n \in Z$. Teniendo en cuenta que φ^{-1} también induce un automorfismo de Γ_α y que está asociado a λ^{-1}, volvemos obtener que $\lambda^{-1} \in \Gamma_\alpha$. Pero entonces, recordando que la norma:

$$N \colon Z[\sqrt{d}] \longrightarrow Z,$$

dada por $N(a+b\sqrt{d}) = a^2 - b^2 d$ era multiplicativa, obtenemos que λ es una unidad del anillo $Z[\sqrt{d}]$ y que $N(\lambda) = \pm 1$. Para esta ecuación se había demostrado en el Teorema 1.14 que la estructura como grupo multiplicativo de las unidades era $Z_2 \times Z$.

Además, si un elemento de Γ_α es una unidad en el anillo, es decir, tiene norma ± 1, entonces es inmediato comprobar que induce un homomorfismo de grupos de Γ_α en Γ_α; pero como su inverso también está en Γ_α, y vuelve inducir un homomorfismo de grupos de Γ_α en Γ_α, deducimos que una unidad del anillo establece un isomorfismo de Γ_α de grupos con la suma. Luego finalmente:

$$\mathrm{Aut}_{\Gamma_\alpha}(R) = Z_2 \times Z.$$

Q.E.D.

Teorema 4.5 *Supongamos que α es una irracionalidad cuadrática. Entonces el grupo* $\mathrm{Aut}_{\Gamma_\alpha}(R)$ *es isomorfo a $Z_2 \times Z$.*

Demostración:

En el caso general de una irracionalidad cuadrática α, siempre se puede suponer

$$\alpha = \frac{p + r\sqrt{d}}{q}, \quad p, q, r \in Z, d \in Z^+, \sqrt{d} \notin Z.$$

De hecho podemos considerar

$$\alpha = \frac{p+\sqrt{d}}{q}, \quad p, q \in Z, d \in Z^+, \sqrt{d} \notin Z,$$

sin más que pasar r para dentro de la raíz y cambiarle el signo, si es necesario, a p ó a q.

Consideremos un automorfismo φ de R que induzca un automorfismo de Γ_α y que esté asociado a un $\lambda \in R - \{0\}$. Dado que λ y λ^{-1} inducen automorfismos de Γ_α, volviendo a calcular la imagen del 1, deducimos que tanto $\lambda, \lambda^{-1} \in \Gamma_\alpha$. Por lo cual:

$$\lambda, \lambda^{-1} \in Z + Z_{\frac{p+\sqrt{d}}{q}} \subset \frac{1}{q}(Z + Z_{\sqrt{d}}),$$

donde Z_x indica el grupo abeliano libre generado por x. Pero si $\lambda = \frac{m+n\sqrt{d}}{q}$ entonces

$$\lambda^{-1} = q\frac{m-n\sqrt{d}}{m^2-n^2d}, \quad m, n \in Z.$$

Haciendo el mismo razonamiento para λ^n para cualquier $n \in Z$ vemos que $\lambda^n \in \frac{1}{q}(Z+Z_{\sqrt{d}})$. Ahora haciendo una construcción análoga a la de la norma obtenemos la aplicación:

$$N \colon \frac{1}{q}(Z + Z_{\sqrt{d}}) \longrightarrow \frac{1}{q^2}Z,$$

dada por

$$N(\frac{m+n\sqrt{d}}{q}) = \frac{m^2-n^2d}{q^2}$$

que vuelve a ser multiplicativa.

De donde deducimos $N(\lambda) = \pm 1$. En efecto, en otro caso tendríamos $\mid N(\lambda) \mid < 1$ ó $\mid N(\lambda^{-1}) \mid < 1$. Podemos suponer que $\mid N(\lambda) \mid < 1$; en caso contrario razonaríamos con λ^{-1}. Entonces tendríamos:

$$N(\lambda^n) = N(\lambda)^n \in \frac{1}{q}Z \quad \forall n \in Z^+,$$

y se tiene $N(\lambda) \in (-1, 1)$; lo cual es una contradicción, pues $\frac{1}{q}Z$ es discreto. Luego $N(\lambda) = \pm 1$.

Vemos entonces que si un $\lambda \in \frac{1}{q}(Z + Z_{\sqrt{d}})$ induce un automorfismo de Γ_α ha de verificar la ecuación $N(\lambda) = \pm 1$.

Para terminar nos hará falta un resultado similar al Teorema de estructura 1.14 para los elementos x del anillo $Z[\sqrt{d}]$ que verificaban la ecuación $N(x) = \pm 1$, y volveremos a tener una proposición similar a la del corolario 1.10 para este caso. De lo que se sigue inmediatamente que en el caso general de una irracionalidad cuadrática se tiene

$$\mathrm{Aut}_{\Gamma_\alpha}(R) = Z_2 \times Z.$$

Lema 4.6 *Todas las soluciones (x_n, y_n) de la ecuación $N(x) = 1$ con $x_n > 1$ e $y_n > 0$, que inducen automorfismo en Γ_α son de la forma*

$$(\frac{x_0^2 - y_0^2 d}{q})^n, \quad n \geq 1,$$

donde $(x_0^2 - y_0^2 d)/q$ es la solución mínima entre las que tienen $x > 1$ e $y > 0$.

Demostración:

Supongamos que existe algún $\lambda \neq \pm 1$ en el grupo multiplicativo. Entonces por verificar la ecuación:

$$\frac{x_n^2 - y_n^2 d}{q^2} = 1,$$

de nuevo se volvería a ver que el conjunto de los $\beta \in \Gamma_\alpha$ que inducen automorfismos en Γ_α, el cual es un subgrupo multiplicativo de R, tiene estructura $Z_2 \times Z$. La demostración sería análoga a la del Teorema 1.8 de estructura de las soluciones de la ecuación de Pell, teniendo encuenta que si λ está en el grupo multiplicativo entonces $-\lambda$ y $\overline{\lambda}$ también están.

Veamos ahora que, de hecho, existe algún $\lambda \neq \pm 1$ en el grupo multiplicativo. Para ello tomemos $d' = q^2 d$. Ahora, si consideramos la ecuación de Pell:

$$X^2 - Y^2 d' = 1,$$

sabemos que existe alguna solución distinta de ± 1. Sea por ejemplo (x_0, y_0) una de ellas. Consideremos

$$\begin{array}{rcl} f\colon R & \longrightarrow & R \\ x & \mapsto & (x_0 + y_0 q\sqrt{d})x. \end{array}$$

Entonces $\lambda = x_0 + y_0 q\sqrt{d}$ induce un automorfismo f de R, pero además induce un automorfismo de Γ_α. Para ello veamos que $f(\Gamma_\alpha) \subset \Gamma_\alpha$. Lo único que hay que comprobar es que $\lambda 1, \lambda\alpha \in \Gamma_\alpha$.

1. $\lambda 1 = \lambda \in \Gamma_\alpha$:

   Como $\lambda = x_0 + y_0 q\sqrt{d}$, es inmediato que está en $Z + Z_{\frac{p+\sqrt{d}}{q}}$.

2. $\lambda\alpha \in \Gamma_\alpha$:

   Tenemos que

$$\lambda\alpha = x_0 \frac{p+\sqrt{d}}{q} + y_0 q\sqrt{d}\,\frac{p+\sqrt{d}}{q} = x_0\frac{p+\sqrt{d}}{q} + py_0\sqrt{d} + y_0 d \in Z + Z_{\frac{p+\sqrt{d}}{q}}.$$

Pero ahora como $\lambda^{-1} = x_0 - y_0 q\sqrt{d}$, haciendo un razonamiento simétrico volvemos a concluir que $f^{-1}(\Gamma_\alpha) \subset \Gamma_\alpha$. Luego de hecho λ induce un automorfismo de Γ_α.
Q.E.D.

Nota

Otra manera de demostrar el Teorema 4.6 es viendo que si $\alpha = \frac{a+b\sqrt{d}}{c}$ donde $a, b, c \in Z$ con $m.c.d.\{a,b,c\} = 1$ y si $\beta = \det A\sqrt{d}$ donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, entonces $G/\Gamma_\alpha \cong G/\Gamma_\beta$. Dado que $SL(2,Z)$ actúa transitivamente sobre el conjunto de números irracionales β tales que $G/\Gamma_\alpha \cong G/\Gamma_\beta$ mediante la acción dada en la sección 4.1, basta tener en cuenta que toda matriz A de $GL(2,R)$ con coeficientes en Z y con $m.c.d.\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\} = 1$ se puede transformar mediante operaciones de matrices elementales en una matriz de la forma $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Corolario 4.7 *El grupo* $\mathrm{Diff}(T_\alpha)$ *es isomorfo a:*

1. $Z_2 \ltimes T_\alpha$ *si* α *es un irracional no cuadrático.*

2. $(Z_2 \times Z) \ltimes T_\alpha$ *si* α *es un irracional cuadrático.*

4.2 Foliaciones lineales de codimensión uno en T^{n+1}.

Sea $T^{n+1} = R^{n+1}/Z^{n+1}$. Tomemos coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, y)$ en R^{n+1} y consideremos la 1-forma exacta en R^{n+1} dada por $\omega = dy - \alpha_1 dx_1 - \cdots - \alpha_n dx_n$ siendo alguno de los $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ un número irracional. Define una 1-forma cerrada en el cociente T^{n+1} y por lo tanto tendrá asociada una foliación $\mathcal{F}$ en T^{n+1}. Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} R^{n+1} & \xrightarrow{D} & R & & \\ p\downarrow & & \downarrow & & \\ T^{n+1} & \longrightarrow & T^{n+1}/\mathcal{F} & \cong & R/\Gamma \end{array}$$

donde $D(x_1, \ldots, x_n, y) = y - \alpha_1 x_1 - \cdots - \alpha_n x_n$. Entonces $dD = p^*\omega$ y el homomorfismo de holonomía

$$h: \pi_1(T^{n+1}, p(O)) \cong Z^{n+1} \to R$$

está dado por

$$h(k_1, \ldots, k_{n+1}) = k_{n+1} - \alpha_1 k_1 - \cdots - \alpha_n k_n,$$

siendo O el origen de R^{n+1} y $k_1, \ldots, k_{n+1} \in Z$. Entonces vemos inmediatamente que $\Gamma = \langle 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$. Pero además como Γ contiene al 1 y algún número irracional, deducimos que Γ es denso en R, consecuentemente la foliación $\mathcal{F}$ es de hojas densas.

4.2.1 Clasificación de los espacios de hojas.

Ahora de nuevo nos va interesar calcular el grupo Diff(R/Γ), pero también nos va a interesar calcular los grupos difeológicos $R/\,\Gamma'$ con Γ' otro subgrupo abeliano libre de tipo finito y denso en R, tales que sean difeomorfos en sentido difeológico a $R/\,\Gamma$.

Para calcular Diff$(T^{n+1}/\mathcal{F})$ vamos a tener que considerar R y los subgrupos $\Gamma \subset R$ finitamente generados y densos. Como Γ es un subgrupo finitamente generado, contenido en un grupo abeliano sin torsión deducimos que Γ es un grupo abeliano libre con una base formada por un número finito de elementos. Sea $B = \{\beta_0, ..., \beta_m\}$ una base del grupo abeliano libre Γ $(n \geq m \geq 1)$.

Lema 4.8 *Podemos restringirnos a considerar el caso de un subgrupo Γ abeliano libre de R con base $B = \{1, \alpha_1, ..., \alpha_m\}$.*

Demostración:

Si $\Gamma = \langle \beta_0, \beta_1, ..., \beta_m \rangle$ consideremos el automorfismo de R:

$$\begin{array}{rcl} \varphi: R & \longrightarrow & R \\ x & \mapsto & \beta_0^{-1} x \end{array} .$$

Lleva Γ en $\beta_0^{-1}\Gamma = \Gamma'$, que tiene como base $B' = \{1, \alpha_1, ..., \alpha_m\}$, siendo $\alpha_k = \beta_0^{-1}\beta_k$, $1 \leq k \leq m$.

Como $R/\,\Gamma$ y $R/\,\Gamma'$ son isomorfos como grupos difeológicos tenemos que $\mathrm{Aut}_\Gamma(R) = \mathrm{Aut}_{\Gamma'}(R)$ (por ser isomorfos sobre R mediante el automorfismo que consiste en multiplicar por β_0), y se sigue que Diff(R/Γ) y Diff(R/Γ') son isomorfos.

Q.E.D.

Ahora, volviendo a utilizar la condición de levantamiento, vemos de nuevo que los subgrupos abelianos libres Γ' de R tales que R/Γ' es difeomorfo R/Γ son aquéllos para los que existe un $\lambda \in R - \{0\}$ tal que $\lambda, \lambda\alpha_1, ..., \lambda\alpha_m$ es una base de Γ'. Al igual que en el toro de dimensión dos, veremos esta condición como una cierta relación de equivalencia dada por una acción de $GL(m+1, Z)$.

Sea la acción de $GL(m+1, Z)$ sobre la base $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$ dada por:

$$A * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} a_{12} + a_{22}\alpha_1 + \cdots + a_{(m+1)2}\alpha_m \\ \vdots \\ a_{1(m+1)} + a_{2(m+1)}\alpha_1 + \cdots + a_{(m+1)(m+1)}\alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

siendo $d = a_{11} + a_{21}\alpha_1 + \cdots + a_{(m+1)1}\alpha_m$. La acción está bien definida porque $\{1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ son linealmente independientes sobre Q. Finalmente tenemos la siguiente proposición, de demostración análoga a 4.1

Proposición 4.9 *Sean $\Gamma = \langle 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle$ y $\Gamma' = \langle 1, \beta_1, \ldots, \beta_m \rangle$ dos grupos abelianos libres del mismo rango. Entonces los grupos cocientes R/Γ y R/Γ' son isomorfos como grupos algebraicos.*

También tenemos el siguiente teorema, de demostración análoga a la del Teorema 4.2:

Teorema 4.10 *Sean $\Gamma = \langle 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle$ y $\Gamma' = \langle 1, \beta_1, \ldots, \beta_m \rangle$ dos grupos abelianos libres del mismo rango y con sus respectivas bases. Entonces R/Γ es difeomorfo a R/Γ' si y sólo si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ está relacionado con $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ módulo $GL(m+1, Z)$.*

4.2.2 Cálculo de Diff$(T/\mathcal{F})$.

Lema 4.11 *Sea A la clausura íntegra sobre Z de una extensión de grado finito $Q(\beta)$ de Q. Supongamos que $\lambda^i \in \frac{1}{q}A \quad \forall i \in Z$, para algún $q \in Z^+$. Entonces $\lambda, \lambda^{-1} \in A$, es decir, λ es una unidad de A.*

Demostración:

Tenemos que A es un dominio de Dedekind, es decir, un dominio donde todo ideal de A se factoriza como producto de ideales primos.

Se denomina ideal fraccionario de A a todo submódulo M (sobre A) contenido en el cuerpo de fracciones K de A, para el cual existe un elemento $v \in K$ tal que $M = v\mathcal{I}$, siendo $\mathcal{I}$ un ideal de A.

Recordemos (ver [8], [17]) que si tenemos un dominio A y K es su cuerpo de fracciones, entonces: A es dominio de Dedekind si y sólo si el conjunto de ideales fraccionarios de A forman un grupo con la multiplicación de ideales.

Además, por ser dominio de Dedekind, todo submódulo (sobre A) de tipo finito contenido en $Q(\beta)$ es un ideal fraccionario, es decir, que se factoriza como producto de ideales primos (los cuales pueden estar elevados a potencias negativas).

Sean

$$(q) = P_1^{m_1} \cdots P_s^{m_s} \quad y \quad (\lambda) = Q_1^{n_1} \cdots Q_t^{n_t}, \quad m_1, \ldots, m_s, n_1, \ldots, n_t \in Z$$

las factorizaciones en potencias de ideales primos de los A-módulos generados por q y λ respectivamente. Como $q\lambda^n \in A \quad \forall n \in Z$ deducimos que $m_1, \ldots, m_s \in Z^+$ y $n_1 = \cdots = n_t = 0$. Por lo cual $(\lambda) = A$, de donde se sigue que λ es una unidad de A .

Q.E.D.

Teorema 4.12 *El grupo* $\mathrm{Aut}_\Gamma(R)$ *es isomorfo a*

$$Z_2 \times Z \times \overset{r)}{\cdots} \times Z, \quad r \in N.$$

Demostración:

Supongamos que $\lambda \in R - \{0\}$ induce un automorfismo en Γ, consideremos los siguientes casos:

1. Supongamos que la base B del grupo abeliano libre Γ es una base algebraica sobre Q de una extensión $Q(\beta)$ de grado finito sobre Q.

   Supongamos además que el número de raíces reales del polinomio mínimo de β sobre Q es t, y el número de raíces complejas del polinomio mínimo sobre Q de β es $2s$. Entonces por el Teorema 1.16, tenemos que el grupo de unidades del anillo de la clausura íntegra A de $Q(\beta)$ sobre Z con la multiplicación es isomorfo a:

$$Z_2 \times Z \times \overset{s+t-1)}{\cdots} \times Z.$$

El grupo de torsión es Z_2 debido a que las únicas raíces de la unidad sobre R son ± 1.

Dado que Γ es un Z-módulo de tipo finito y del mismo rango que la clausura íntegra de $Q(\beta)$ sobre Z, deducimos que para un $q \in Z^+$ adecuado tenemos que $\Gamma \subset \frac{1}{q}A$, por lo cual:

$$\lambda, \lambda^{-1} \in \frac{1}{q}A.$$

Como además $q\lambda^n \in A \ \forall n \in Z$, deducimos por el Lema previo que $\lambda, \lambda^{-1} \in A$. Ahora bien, es claro que el subgrupo multiplicativo $\mathrm{Aut}_A(R)$ de R es el grupo de las unidades de A, que tiene una estructura de grupo con la multiplicación isomorfa a

$$Z_2 \times Z \times \overset{s+t-1)}{\cdots} \times Z.$$

Pero además, como hemos visto ahora, si un $\lambda \in \mathrm{Aut}_\Gamma(R)$ entonces $\lambda \in \mathcal{U}(A)$, es decir:

$$\mathrm{Aut}_\Gamma(R) \subset \mathrm{Aut}_A(R),$$

por lo cual

$$\mathrm{Aut}_\Gamma(R) = Z_2 \times Z \times \overset{r)}{\cdots} \times Z, \quad r \in N.$$

El problema es que ahora no conocemos el valor de r, pero sí que sabemos que $0 \leq r \leq s + t - 1$.

2. Supogamos ahora que B no es la base de ninguna extensión algebraica sobre Q. Entonces dividamos B en la unión disjunta de dos conjuntos:

$$B = B_A \amalg B_T$$

donde B_A está formado por los elementos algebraicos de B y B_T por los transcendentes.

Distingamos dos casos:

   (a) Supongamos que $B_T = \emptyset$, es decir $B_A = B$.
   Como el $1 \in B_A$ volvemos a deducir que si $\lambda \in R - \{0\}$ induce un automorfismo de Γ entonces $\lambda^n \in \Gamma \ \forall n \in Z$.
   Ahora, dado que los elementos de B_A son algebraicos y un número finito, podemos considerar una extensión algebraica de grado finito sobre

Q que contenga a B_A, de hecho podemos considerar una extensión mínima entre las que contienen a B_A, sea ésta $Q(\beta)$.

Sea A la clausura algebraica de $Q(\beta)$ sobre Z. Por razonamientos análogos a los anteriormente hechos volvemos a deducir que $\lambda \in \mathcal{U}(A)$, por lo cual: $\mathrm{Aut}_\Gamma(R) = Z_2 \times Z \times \overset{r)}{\cdots} \times Z, \quad r \in N$.

(b) $B_T \neq \emptyset$.

Sea un $\lambda \in R - \{0\}$ que induce un automorfismo de Γ. Entonces, como siempre, tenemos $\lambda \in \Gamma$ y de nuevo tenemos también que $\lambda^n \in \Gamma, \forall n \in Z$.

Pero, como Γ es un grupo abeliano libre de tipo finito, deducimos que tiene que haber una combinación lineal finita sobre Z de $\{1, \lambda^1, ..., \lambda^n\}$ igualada a cero y con algún coeficiente distinto de cero. De donde deducimos que λ tiene que ser algebraico sobre Q. Luego λ es combinación lineal sobre Z de elementos de B_A. Entonces, como la multiplicación de elementos algebraicos sobre Q vuelve a ser algebraico sobre Q, deducimos que λ establece un automorfismo del grupo abeliano libre $\langle B_A \rangle$.

Ahora tomemos un elemento transcendente $t \in B_T$. Entonces, dado que $\lambda \neq 0$ es algebraico, deducimos que λt es transcendente. La matriz asociada a λ respecto de la base $\{B_A, B_T\}$ tendrá la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{B_A} & * \\ 0 & \lambda_{B_T} \end{pmatrix},$$

donde λ_{B_A} es la matriz con coeficientes enteros asociada al isomorfismo de grupos abelianos libres que induce λ en $\langle B_A \rangle$ y por lo cual pertenece a $GL(k, Z)$, siendo k el número de elementos de B_A, es decir, $\det(\lambda_{B_A}) = \pm 1$. De donde deducimos $\lambda \in GL(n, Z)$ si y sólo si $\lambda_{B_A} \in GL(k, Z)$ y $\lambda_{B_T} \in GL(n-k, Z)$. Por lo cual λ tiene que transformar la base del grupo abeliano libre $\langle B_T \rangle$ en otra base del grupo abeliano libre $\langle B_T \rangle$ más una parte algebraica, la cual no importa.

Luego

$$\mathrm{Aut}_\Gamma(R) \subset \mathrm{Aut}_{\langle B_A \rangle}(R),$$

pero por lo visto antes:

$$\mathrm{Aut}_{\langle B_A \rangle}(R) = Z_2 \times Z \times \overset{r)}{\cdots} \times Z, \quad r \in N,$$

de donde deducimos

$$\mathrm{Aut}_\Gamma(R) = Z_2 \times Z \times \overset{r')}{\cdots} \times Z, \quad r' \in N.$$

Vemos tanto en el caso 1) como en el 2) que el grupo de automorfismos de R que fijan Γ estará contenido en el grupo de unidades de la clausura íntegra A de una extensión finita de Q, por lo cual será isomorfo a :

$$Z_2 \times Z \times \overset{r)}{\cdots} \times Z, \quad r \in N.$$

Q.E.D.

Nota

Otra manera de demostrar el Teorema es tener en cuenta que $\mathrm{End}_\Gamma(R)$ es un anillo por ser R un grupo de Lie abeliano. Pero además en este caso también es un anillo conmutativo, el cual es un Z-módulo de tipo finito. Por tanto estará contenido en alguna clausura íntegra A sobre Z de una extensión finita de cuerpos de Q. Pero, como grupo, $\mathrm{Aut}_\Gamma(R)$ se corresponde con el grupo de las unidades del anillo $\mathrm{End}_\Gamma(R)$, el cual está contenido en el grupo de las unidades de A; entonces vemos que tiene que ser isomorfo a $Z_2 \times Z \times \overset{r)}{\cdots} \times Z$, con $r \in N$.

La ventaja de la primera demostración es que nos da un método efectivo para calcular $\mathrm{Aut}_\Gamma(R)$ como se verá después en los ejemplos.

Corolario 4.13 *El grupo* $\mathrm{Diff}(R/\Gamma)$ *es isomorfo a* $(Z_2 \times Z \times \overset{r)}{\cdots} \times Z) |\!\times R/\Gamma$, *para algún* $r \in N$.

Ejemplo 4.14 Consideremos $B = 1 \coprod B_T$, con B_T un conjunto finito de elementos transcendentes y tal que el conjunto B es linealmente independiente sobre Q. Entonces, como vimos antes, los $\lambda \in R - \{0\}$ que inducen automorfismo sobre $\Gamma =< B >$ tienen que pertenecer a $< B_A >= Z$ e inducir un automorfismo sobre $< B_A >= Z$. Luego $\lambda = \pm 1$. Por lo cual:

$$\mathrm{Diff}(R/\Gamma) \cong Z_2 |\!\times R/\Gamma.$$

Ejemplo 4.15 Si consideramos $B = \{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ entonces se puede ver que la clausura íntegra A de $Q(\sqrt[3]{2})$ sobre Z es justamente $\Gamma =< B >$. El polinomio mínimo mónico de $\sqrt[3]{2}$ sobre Z tiene dos raíces complejas y una real ($s = 1$ y $t = 1$). Entonces como $\Gamma = A$ tenemos que

$$\mathrm{Aut}_\Gamma(R) \cong \mathcal{U}(\Gamma) \cong Z_2 \times Z^{s+t-1} = Z_2 \times Z,$$

por lo cual

$$\mathrm{Diff}(R/\Gamma) \cong (Z_2 \times Z) |\!\times R/\Gamma.$$

Ejemplo 4.16 Consideremos ahora $B = \{1, \sqrt{2}, e, (1+\sqrt{2})e\}$, y sea $\Gamma =< B >$. Entonces tenemos $B_A = \{1, \sqrt{2}\}$ y $B_T = \{e, (1+\sqrt{2})e\}$.

Como habíamos visto antes, si un $\lambda \in R - \{0\}$ inducía un automorfismo de Γ, entonces $\lambda \in < B_A >$ e induce un automorfismo en B_A. Pero, como vimos, $< 1, \sqrt{2} >$ es la clausura íntegra de $Q(\sqrt{2})$ sobre Z. Además el grupo de unidades de $Z[\sqrt{2}]$ se descompone en

$$\{\pm 1\} \times \{(1+\sqrt{2})^n, \quad n \in Z\}.$$

Como multiplicar por $1+\sqrt{2}$ induce un automorfismo sobre $< B_T >$ (porque $B' = \{(1+\sqrt{2})e, (1+\sqrt{2})^2 e\}$ es otra base del grupo abeliano libre engendrado por B_T), obtenemos que:

$$\mathrm{Aut}_\Gamma(R) \cong \{\pm 1\} \times \{(1+\sqrt{2})^n, \quad n \in Z\},$$

y

$$\mathrm{Diff}(R/\Gamma) \cong (Z_2 \times Z) |\!\times R/\Gamma.$$

4.3 Foliaciones lineales de dimensión uno en T^{n+1}.

La importancia de las foliaciones lineales de dimensión uno con hojas densas en el toro T^{n+1} nos la indican los siguientes teoremas de Caron, ver [2]:

Teorema 4.17 *Sea M una variedad compacta de dimensión $n+1$ en la que está dado un flujo con órbitas densas que modela sobre un álgebra de Lie g de dimensión n. Entonces g es isomorfa al álgebra de Lie abeliana R^n.*

Teorema 4.18 *Sea M una variedad compacta de dimensión $n+1$ en la que está dado un flujo con órbitas no compactas que modela sobre el álgebra de Lie abeliana R^n. Entonces M es difeomorfa a T^{n+1} y la foliación asociada al flujo por el difeomorfismo se transforma en una foliación lineal.*

Sea $T^{n+1} = R^{n+1}/Z^{n+1}$. Tomemos coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, y)$ en R^{n+1}, y consideremos la 1-forma exacta en R^{n+1} con valores en el álgebra de Lie abeliana R^n dada por $\omega = (dx_1 + \alpha_1 dy, \ldots, dx_n + \alpha_n dy)$ con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números reales. La forma ω induce una 1-forma cerrada en el toro T^{n+1} y por lo tanto tendrá asociada una foliación $\mathcal{F}$ en T^{n+1}. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} R^{n+1} & \xrightarrow{D} & R^n & & \\ p\downarrow & & \downarrow & & \\ T^{n+1} & \longrightarrow & T^{n+1}/\mathcal{F} & \cong R/\Gamma \end{array}$$

donde $D(x_1, \ldots, x_n, y) = (x_1 + \alpha_1 y, \ldots, x_n + \alpha_n y)$. Entonces $dD = p^*\omega$ y el homomorfismo de holonomía

$$h\colon \pi_1(T^{n+1}, p(O)) \cong Z^{n+1} \to R^n$$

está dado por

$$h(k_1, \ldots, k_{n+1}) = (k_1 + k_{n+1}\alpha_1, \ldots, k_n + k_{n+1}\alpha_n),$$

siendo O el origen de R^{n+1} y $k_1, \ldots, k_{n+1} \in Z$. Entonces vemos inmediatamente que

$$\Gamma = \langle e_1, \ldots, e_n, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\rangle,$$

siendo $e_1, \ldots, e_n$ la base canónica de R^n.

4.3.1 Preliminares.

En nuestro caso analizamos cocientes de R^n por subgrupos densos y numerables, que en el toro son además finitamente generados por serlo el grupo fundamental del toro.

Lema 4.19 *Sea Γ un subgrupo discreto de R^n. Entonces el rango de Γ es menor o igual que n.*

Demostración:

Supongamos que el rango del grupo abeliano Γ fuera estrictamente mayor que n. Consideremos un subgrupo Γ' de Γ de rango n. Dado que Γ era discreto tenemos que Γ' también es discreto. Sea $B = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ una base del grupo abeliano libre Γ', entonces B es también una base de R^n, porque en otro caso tendríamos $0 = a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n$ con $a_1, \cdots, a_n \in R$ y alguno de ellos distinto de cero, pero esto contradice que Γ' era discreto (pues habría elementos de Γ'

tan próximos al neutro como quisiéramos). Entonces si cocientamos R^n por Γ' obtenemos un toro de dimensión n. Pero ahora el grupo abeliano Γ/Γ' actúa de manera propiamente discontinua sobre el toro. Pero como el toro es compacto deducimos que Γ/Γ' tiene que ser finito, de donde se sigue que el rango de Γ es el mismo que el de Γ'.

Q.E.D.

Lema 4.20 *Un subgrupo Γ de R^n es denso en R^n si y sólo si para cualquier aplicación lineal sobreyectiva (continua) $f\colon R^n \to R$ se tiene que $f(\Gamma)$ es denso en R.*

Demostración:

$\Rightarrow$ Como f es continua tenemos que $f(\overline{\Gamma}) \subset \overline{f(\Gamma)}$.

$\Leftarrow$ Dado que la adherencia de Γ es un subgrupo (de Lie) de R^n, veamos que la componente conexa V de $\overline{\Gamma}$ que contiene al origen tiene que ser un subespacio vectorial de R^n de dimensión $m \geq 1$. En otro caso Γ sería discreto en R^n y el rango de Γ sería menor o igual que n por el Lema 4.3.1. Si una de las bases de Γ fuera una base para R^n, tendríamos que al proyectar en la dirección de uno de los vectores de la base nos saldría un subgrupo discreto de R. En otro caso proyectando en una dirección ortogonal a los elementos de una de las bases de Γ obtenemos el cero. Así, en los dos casos se contradice la hipótesis (que la imagen de Γ mediante cualquier proyección sobre R es densa), luego la dimensión de V es igual ó mayor que 1. Si cocientamos R^n por el subespacio vectorial V, obtenemos $R^n/V \cong R^{n-m}$ y $(\Gamma + V)/V \subset R^{n-m}$ es discreto en R^{n-m}. Entonces, volviendo a repetir el anterior razonamiento al par $(R^{n-m}, \Gamma + V/V)$, podemos definir una aplicación $g\colon R^{n-m} \to R$ lineal, continua y sobreyectiva tal que $g(\Gamma + V/V)$ es discreto. Ahora, si consideramos la proyección canónica $\pi\colon R^n \to R^n/V \cong R^{n-m}$, la aplicación $f = g \circ \pi\colon R^n \to R$ es lineal, continua, sobreyectiva y verifica que $f(\Gamma)$ es discreto. Lo cual es una contradicción.

Q.E.D.

Proposición 4.21 *El grupo abeliano libre $\Gamma = \langle e_1, \ldots, e_n, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\rangle$ es denso en R^n si y sólo si el subgrupo abeliano libre $\langle 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$ tiene rango $n+1$.*

Demostración:

$\Rightarrow$ Supongamos que $\langle 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle$ no tiene rango $n+1$. Entonces tenemos una combinación lineal con coeficientes enteros tal que

$$m_0 + m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n = 0,$$

donde $m_0, \dots, m_n \in Z$ y alguno es distinto de cero. Entonces si consideramos la aplicación lineal $f\colon R^n \to R$ definida por $f(e_i) = m_i$, $1 \le i \le n$, vemos que

$$f(\Gamma) = \langle m_1, \dots, m_n, -m_0 \rangle,$$

el cual es discreto y contradice el Lema previo 4.20.

$\Leftarrow$ Si Γ no fuese denso entonces por el Lema previo 4.20 ha de existir alguna aplicación $f\colon R^n \to R$ tal que $f(\Gamma)$ no es denso en R; por tanto $f(\Gamma)$ es discreto. Pero entonces dado que los únicos subgrupos discretos de R son los que poseen un único generador independiente, tenemos que $f(\Gamma) = \langle \beta \rangle$. Por lo cual $f(e_i) = a_i\beta$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $f((\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = m\beta$ con $m, a_1, \dots, a_n \in Z$ y $\beta \in R$. Observemos que $\beta \neq 0$ y algún a_i es distinto de cero, pues f es sobreyectiva. Pero entonces tenemos

$$a_1\alpha_1\beta + \dots + a_n\alpha_n\beta = m\beta,$$

y dividiendo por β obtenemos

$$a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n = m.$$

Finalmente, como $m, a_1, \dots, a_n \in Z$ y $a_i \neq 0$, deducimos que $\langle 1, \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ tiene rango estrictamente menor que $n + 1$. Lo cual es una contradicción.

Q.E.D.

Dado que la imagen de $\pi_1(T^{n+1})$ por el morfismo de holonomía h es un grupo abeliano libre en R^n, entonces para que la imagen sea densa ha de ser h inyectivo, es decir, las hojas de la foliación de Lie han de ser simplemente conexas ($\pi_1(L) = \operatorname{Ker} h$). De hecho, una hoja cerrada sería difeomorfa a S^1, que no puede ser densa.

Componiendo con un automorfismo de R^n podemos suponer que la imagen de h es el grupo abeliano libre engendrado por $\Gamma = \langle e_1, \dots, e_n, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rangle$, donde, por la Proposición 4.21, $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ han de ser linealmente independientes sobre Q.

4.3.2 Clasificación de los espacios de hojas.

Para calcular $\mathrm{Diff}(T^{n+1}/\mathcal{F})$ será útil e interesante calcular las foliaciones lineales de dimensión uno en T^{n+1} tales que el espacio de hojas es difeomorfo a $T^{n+1}/\mathcal{F}$.

Proposición 4.22 *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ dos flujos lineales densos en el toro T^{n+1}, que estarán asociados a vectores $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $(1, \beta_1, \dots, \beta_n)$. Entonces $T^{n+1}/\mathcal{F}$ es difeomorfo a $T^{n+1}/\mathcal{F}'$ si y sólo si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ está relacionado con $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ módulo $GL(n + 1, Z)$.*

Demostración:

Como $T^{n+1}/\mathcal{F}$ es difeomorfo a R^n/Γ y $T^{n+1}/\mathcal{F}'$ es difeomorfo a R^n/Γ', siendo $\Gamma = \langle e_1, \ldots, e_n, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\rangle$ y $\Gamma' = \langle e_1, \ldots, e_n, (\beta_1, \ldots, \beta_n)\rangle$, entonces por el corolario 3.14 tendremos que ver la existencia de un automorfismo θ de R^n que lleva Γ en Γ' es equivalente a que $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $w = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ estén relacionados módulo $GL(n+1, Z)$.

Sea φ un automorfismo de R^n que induzca un isomorfismo de Γ en Γ'. Entonces la matriz asociada a φ respecto la base canónica de R^n será

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Como $A(e_j)$ tiene que estar en Γ' deducimos que

$$(a_{1j}, \ldots, a_{nj}) = (b_{1j} + c_j\beta_1, \ldots, b_{nj} + c_j\beta_n)$$

con $b_{ij}, c_j \in Z$ para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$.

Ahora Av^T también tiene que estar en Γ', por lo cual

$$(Av^T) = \begin{pmatrix} d_1 + c_{n+1}\beta_1 \\ \vdots \\ d_n + c_{n+1}\beta_n \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} (b_{11} + c_1\beta_1)\alpha_1 + \cdots + (b_{1n} + c_n\beta_1)\alpha_n &= d_1 + c_{n+1}\beta_1, \\ &\vdots \\ (b_{n1} + c_1\beta_1)\alpha_1 + \cdots + (b_{nn} + c_n\beta_1)\alpha_n &= d_n + c_{n+1}\beta_n. \end{aligned}$$

Despejando $\beta_1, \cdots, \beta_n$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{d_1 - b_{11}\alpha_1 - \cdots - b_{1n}\alpha_n}{-c_{n+1} + c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n}, \\ &\vdots \\ \beta_n &= \frac{d_n - b_{n1}\alpha_1 - \cdots - b_{nn}\alpha_n}{-c_{n+1} + c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n}. \end{aligned}$$

Pero como A tiene que inducir un isomorfismo en los grupos abelianos libres, entonces si B es la matriz asociada al isomorfismo de Γ en Γ' que induce A respecto a las bases $\{e_1, \dots, e_n, v\}$ y $\{e_1, \dots, e_n, w\}$, tenemos

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & d_n \\ c_1 & \cdots & c_n & c_{n+1} \end{pmatrix},$$

donde $B = (b_{ij}) \in GL(n+1, Z)$.

Recordemos que la acción de $GL(n+1, Z)$ sobre $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ estaba dada por:

$$F * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} f_{12} + f_{22}\alpha_1 + \cdots + f_{(m+1)2}\alpha_m \\ \vdots \\ f_{1(m+1)} + f_{2(m+1)}\alpha_1 + \cdots + f_{(m+1)(m+1)}\alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

con $F \in GL(n+1, Z)$ y $d = f_{11} + f_{21}\alpha_1 + \cdots + f_{(n+1)1}\alpha_n$.

Por lo cual:

$$F = \begin{pmatrix} -c_{n+1} & d_1 & \cdots & d_n \\ c_1 & -b_{11} & \cdots & -b_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & -b_{1n} & \cdots & -b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pero como $\det B = \pm 1$ si y sólo si $\det F = \pm 1$, deducimos que existe un automorfismo de R^n que induce un isomorfismo de Γ en Γ' si y sólo si v y w están relacionados módulo $GL(n+1, Z)$.

Q.E.D.

4.3.3 Cálculo de $\mathrm{Diff}(T/\mathcal{F})$.

Teorema 4.23 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación lineal de dimensión 1 con hojas densas en el toro T^{n+1}, la cual estará asociada a un vector director $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Entonces el grupo $\mathrm{Aut}_\Gamma(R^n)$ es isomorfo a $\mathrm{Aut}_H(R)$, siendo H el grupo abeliano libre de R con base $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.*

Demostración:

Calcular las matrices $A \in GL(n, R)$ que inducen un automorfismo en Γ, por lo visto en 4.22, es equivalente a calcular las matrices $F \in GL(n+1, Z)$

tales que mediante la acción de $GL(n+1, Z)$ sobre $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dejan el vector $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ invariante. Es decir, hay que calcular el estabilizador de la acción de $GL(n+1, Z)$ en el vector v.

Tal y como vimos en la Proposición 4.10, un subgrupo abeliano libre de R de rango $n+1$ y con base $\{1, \beta_1, \ldots, \beta_n\}$ era isomorfo sobre R a otro subgrupo con base $\{1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ si y sólo si el vector $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ estaba relacionado con el vector $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ módulo $GL(n+1, Z)$. Por lo cual calcular los automorfismos de R que inducen automorfismos sobre el grupo abeliano libre generado por $\{1, \beta_1, \ldots, \beta_n\}$ es equivalente a hallar el estabilizador de la acción de $GL(n+1, Z)$ sobre el vector $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Finalmente deducimos que $\mathrm{Aut}_\Gamma(R^n)$ es isomorfo a $\mathrm{Aut}_H(R)$, que por el Teorema 4.12 es isomorfo a $Z_2 \times Z \times \overset{r)}{\cdots} \times Z$ para algún $r \in N$.

Q.E.D.

Corolario 4.24 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación lineal de dimensión 1 sobre el toro T^{n+1} con hojas densas. Entonces*

$$\mathrm{Diff}(T^{n+1}/\mathcal{F}) \cong Z_2 \times Z \times \overset{r)}{\cdots} \times Z \ltimes (T^{n+1}/\mathcal{F}),$$

con $r \in N$. Además $r \leq n$.

Demostración:

Para el isomorfismo basta tener en cuenta que T^{n+1} es abeliano (por lo cual un automorfismo interior se transforma en la identidad) y los isomorfismos de los teoremas 3.3 y 4.23. Para la acotación de r tener en cuenta los teoremas 4.12 y 4.23.

Q.E.D.

4.4 Foliaciones lineales transcendentes en el toro T^{n+1}.

Una foliación lineal de dimensión $1 \leq k \leq n+1$ en T^{n+1} está asociada a la foliación trivial determinada por un subespacio lineal dimensión k en R^{n+1}. De acuerdo con [5] damos la siguiente definición.

Definición 4.25 Llamaremos *foliación transcendente* a cualquier foliación lineal sobre el toro T^n, de dimensión $k < n+1$, tal que el subespacio invariante que la genera tiene una base:

$$\begin{cases} v_1 = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1, \ldots, \alpha_n^1, 1) \\ \vdots \\ v_k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \ldots, \alpha_n^k, 1) \end{cases}$$

tal que el conjunto $\{\alpha_i^j\}$ es algebraicamente independiente sobre Q. A la base $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ la llamaremos *base de transcendencia.*

Nota

Toda foliación transcendente es densa, dado que la foliación generada por uno de los vectores de una de las bases de transcendencia (por lo visto en la sección anterior) ya es densa en T^{n+1}.

Tenemos las siguientes caracterizaciones de las foliaciones lineales transcendentes. La primera de las cuales está comentada en [5] en el caso bidimensional.

Lema 4.26 *Un subespacio vectorial $V \subset R^{n+1}$ genera una foliación transcendente en el toro T^{n+1} si y sólo si el subespacio W ortogonal a V genera una foliación transcendente en el toro T^{n+1}.*

Demostración:

Observemos que llega con demostrar una implicación.

$\Rightarrow$ Si el subespacio $V \subset R^{n+1}$ tiene codimensión uno, consideremos el vector producto vectorial $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ de una de las bases de transcendencia asociada a V, es decir

$$w = \det \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n & e_{n+1} \\ \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_n^1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^n & \ldots & \alpha_n^n & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que el conjunto $\{\alpha_i^j\}$ era algebraicamente independiente sobre Q, obtenemos que las coordenadas de w son algebraicamente independientes sobre Q (en particular $w_n \neq 0$) y por tanto la última coordenada del vector $z = w_n^{-1} w$ es 1 y verifica las condiciones.

Supongamos ahora que el subespacio V tiene codimensión $k+1$ y que una base B de transcendencia de V está formada por los vectores

$$\begin{cases} v_1 & = & (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1, 1) \\ & \vdots & \\ v_{n-k} & = & (\alpha_1^{n-k}, \ldots, \alpha_n^{n-k}, 1) \end{cases}$$

Observemos que podemos completar B con un conjunto de vectores $\{v'_1, \ldots, v'_{k+1}\}$ tal que el conjunto $B_1 = \{v_1, \ldots, v_{n-k}, v'_1, \ldots, v'_{k+1}\}$ es una base de transcendencia de R^{n+1} (por la numerabilidad del conjunto de números reales que son algebraicamente dependientes sobre $Q(t_1, \ldots, t_r)$ con $t_1, \ldots, t_r \in R$). Entonces si consideramos el producto vectorial $w^i = (w^i_1, \ldots, w^i_n)$ del conjunto de vectores $B_1 - \{v'_i\}$, tenemos que $W = \{z_1, \ldots, z_{k+1}\}$ donde $z_i = (w^i_n)^{-1} w^i$ verifica las condiciones requeridas.

Q.E.D.

Lema 4.27 *Sea $(T^{n+1}, \mathcal{F})$ una foliación lineal de codimensión k. Entonces la foliación $\mathcal{F}$ es transcendente si y sólo si puede ser definida por una 1-forma ω con valores en el álgebra de Lie abeliana R^k*

$$\omega = \begin{pmatrix} dx_1 + \beta^1_1 dx_{k+1} + \cdots + \beta^{n-k}_1 dx_{n+1} \\ \vdots \\ dx_k + \beta^1_k dx_{k+1} + \cdots + \beta^{n-k}_k dx_{n+1} \end{pmatrix},$$

tal que el conjunto $\{\beta^j_i\}$ sea algebraicamente independiente sobre Q.

Demostración:

$\Rightarrow$ Sea V el subespacio vectorial de R^{n+1} que genera la foliación $\mathcal{F}$. Entonces por el Lema 4.26 el subespacio vectorial W ortogonal a V también admite una base de transcendencia, sea ésta $\{w_1, \ldots, w_k\}$, con

$$\begin{cases} w_1 = (\alpha^1_1, \ldots, \alpha^1_n, 1) \\ \qquad \vdots \\ w_k = (\alpha^k_1, \ldots, \alpha^k_n, 1) \end{cases}$$

siendo el conjunto $\{\alpha^j_i\}$ algebraicamente independiente sobre Q.

Si consideramos la 1-forma cerrada ω definida en R^{n+1} que toma valores en el álgebra de Lie abeliana R^k definida por

$$\omega = \begin{pmatrix} dx_{n+1} + \alpha^1_1 dx_1 + \cdots + \alpha^1_n dx_n \\ \vdots \\ dx_{n+1} + \alpha^k_1 dx_1 + \cdots + \alpha^k_n dx_n \end{pmatrix},$$

define una 1-forma cerrada α en T^{n+1} con valores en el álgebra de Lie abeliana R^k e induce la foliación $\mathcal{F}$, por ser $\{w_1, \ldots, w_k\}$ una base de W. Entonces si consideramos el diagrama de la Proposición 3.3

$$\begin{array}{ccc} R^{n+1} & \xrightarrow{D} & R^k \\ p\downarrow & & \downarrow \\ T^{n+1} & \longrightarrow & R^k/\Gamma \quad \cong T^{n+1}/\mathcal{F} \end{array}$$

con

$$D(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \begin{pmatrix} x_{n+1}+\alpha_1^1 x_1+\cdots+\alpha_n^1 x_n \\ \vdots \\ x_{n+1}+\alpha_1^k x_1+\cdots+\alpha_n^k x_n \end{pmatrix},$$

tenemos $dD = \omega$ y el grupo de holonomía Γ asociado a la foliación $\mathcal{F}$ estará determinado por las imágenes de los generadores de $\pi_1(T^{n+1})$, es decir

$$\Gamma = \langle(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^k),\ldots,(\alpha_n^1,\ldots,\alpha_n^k),(1,1,\ldots,1)\rangle.$$

Ahora, como $\{(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^k),\ldots,(\alpha_k^1,\cdots,\alpha_k^k)\}$ es una base de R^k (su determinante es distinto de cero por ser el conjunto $\{\alpha_i^j\}$ algebraicamente independiente sobre Q), podemos considerar el isomorfismo lineal A de R^k definido por

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1^1\\ \vdots \\ \alpha_1^k\end{pmatrix} = e_1,\ldots,A\begin{pmatrix}\alpha_k^1\\ \vdots \\ \alpha_k^k\end{pmatrix} = e_k,$$

siendo $\{e_1,\ldots,e_k\}$ la base canónica de R^k. Entonces tomemos

$$\begin{pmatrix}\beta_1^1\\ \vdots \\ \beta_k^1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\alpha_{k+1}^1\\ \vdots \\ \alpha_{k+1}^k\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\beta_1^{n-k}\\ \vdots \\ \beta_k^{n-k}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\alpha_1^n\\ \vdots \\ \alpha_k^n\end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix}\beta_1^{n+1-k}\\ \vdots \\ \beta_k^{n+1-k}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}.$$

Como el conjunto $\{\alpha_i^j\}$ era algebraicamente independiente sobre Q, deducimos que el conjunto $\{\beta_i^j\}$ es algebraicamente independiente sobre Q y verifica las condiciones exigidas.

$\Leftarrow$ Similar.

Q.E.D.

Posteriormente en [5] se demuestra un lema (el cual analizaremos en la siguiente sección 4.31) para foliaciones transcendentes con la ayuda de otro lema que es un caso particular del Teorema 3.10 de Hector y Macias. Esto sirve a B. Herrera (en el caso transcendente) para caracterizar como $\pm id$ los automorfismos del álgebra de Lie transversa R^k asociados a difeomorfismos de $(T^{n+1}, \mathcal{F})$ (dado que un difeomorfismo de $(T^{n+1}, \mathcal{F})$ induce un difeomorfismo del espacio de hojas, que por el Teorema 3.10 está asociado canónicamente a un automorfismo del grupo de Lie R^k salvo una traslación) y dar condiciones que le permiten observar el carácter trivial del Haz Conmutante en foliaciones transversalmente paralelizables tales que la adherencia de una hoja es una foliación lineal transcendente.

Nosotros caracterizaremos los automorfismos del álgebra de Lie transversa asociados a difeomorfismos de $(T^{n+1}, \mathcal{F})$ como $\pm id$ (haciendo otra demostración distinta a la hecha en [5]) y donde debilitaremos la condición de que la foliación lineal sea transcendente.

Proposición 4.28 *Sea $(T^{n+1}, \mathcal{F})$ una foliación lineal de codimensión k definida por la 1-forma en R^{n+1}*

$$\omega = \begin{pmatrix} dx_1 + \beta_1^1 dx_{k+1} + \cdots + \beta_1^{n+1-k} dx_{n+1} \\ \vdots \\ dx_k + \beta_k^1 dx_{k+1} + \cdots + \beta_k^{n+1-k} dx_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Supongamos que cualquier polinomio con $k(n+1-k)$ variables y coeficientes en Q que se anule sobre el conjunto $\{\beta_i^j\}$ tiene grado mayor estricto que 2. Entonces si $\varphi \in \mathrm{Aut}(T^{n+1}, \mathcal{F})$, el automorfismo que induce sobre el álgebra de Lie transversa sólo puede ser $\pm id$.

Demostración:

Observemos que para la 1-forma ω el grupo de holonomía Γ está dado por

$$\Gamma = \langle e_1, \ldots, e_k, (\beta_1^1, \ldots, \beta_k^1), \ldots, (\beta_1^{n+1-k}, \ldots, \beta_k^{n+1-k}) \rangle.$$

Haciendo un razonamiento similar al hecho en el Teorema 4.22 deducimos que si A es la matriz asociada a un isomorfismo lineal de R^k respecto la base canónica que induce un automorfismo en Γ, tendrá la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} m_{11} + c_1^1\beta_1^1 + \cdots + c_{n+1-k}^1 \beta_1^{n+1-k} & \cdots & m_{1k} + c_1^k\beta_1^1 + \cdots + c_{n+1-k}^k \beta_1^{n+1-k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k1} + c_1^1\beta_k^1 + \cdots + c_{n+1-k}^1 \beta_k^{n+1-k} & \cdots & m_{kk} + c_1^k\beta_k^1 + \cdots + c_{n+1-k}^k \beta_k^{n+1-k} \end{pmatrix},$$

con $m_{ij}, c_i^j \in Z$. Ahora con las condiciones $A(\Gamma) \subset \Gamma$ deducimos condiciones de dependencia algebraica sobre Q para el conjunto $\{\beta_i^j\}$, las cuales están dadas por polinomios en $k(n+1-k)$ variables con coeficientes en Q y de grado menor o igual que 2, salvo si $c_i^j = 0$ con $1 \leq j \leq k$ y $1 \leq i \leq n+1-k$. También tenemos que $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Luego la matriz A es diagonal, con todos los términos m_{ii} de la diagonal iguales. Pero como tiene que inducir un automorfismo en Γ, deducimos que la inversa de A tiene que ser del mismo tipo; por lo cual $m_{ii} = \pm 1$ con $1 \leq i \leq k$. Finalmente tenemos que el isomorfismo lineal de R^k asociado a A tiene que ser $\pm id$.

Q.E.D.

Nota

Observemos que para una foliación lineal transcendente los automorfismos del álgebra de Lie transversa son $\pm id$, pues por el Lema 4.27, tenemos que la foliación tiene asociada una 1-forma ω del tipo del Lema 4.28, siendo el conjunto $\{\beta_i^j\}$ algebraicamente independiente sobre Q.

De hecho, para lo que acabamos de demostrar sólo hemos necesitado que si $\varphi \in \mathrm{Aut}(T^{n+1}, \mathcal{F})$, entonces φ induce un difeomorfismo en el espacio de hojas $T^{n+1}/\mathcal{F}$. Es decir, de acuerdo con el Teorema 3.10, tenemos:

Corolario 4.29 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación en T^{n+1} asociada a una 1-forma ω en las hipótesis del Lema 4.28. Entonces* $\mathrm{Diff}(T^{n+1}/\mathcal{F}) \cong \{\pm 1\} \ltimes T^{n+1}/\mathcal{F}$.

Si denotamos por $\beta_j = \begin{pmatrix} \beta_1^j \\ \vdots \\ \beta_k^j \end{pmatrix}$ con $1 \leq j \leq n+1-k$, entonces tenemos la siguiente proposición, de cálculos semejantes a las proposiciones 4.22 y 4.28.

Proposición 4.30 *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ dos foliaciones de codimensión k en el toro T^{n+1} asociadas a 1-formas en las condiciones del Lema 4.28, definidas por vectores $\beta_j = \begin{pmatrix} \beta_1^j \\ \vdots \\ \beta_k^j \end{pmatrix}$ y $\gamma_j = \begin{pmatrix} \gamma_1^j \\ \vdots \\ \gamma_k^j \end{pmatrix}$, $1 \leq j \leq k$ respectivamente. Entonces los espacios de hojas de las foliaciones son difeomorfos si y sólo si*

$$\gamma = (A + \beta B)^{-1}(C + \beta D),$$

siendo A, B, C, D matrices dadas por las siguientes condiciones: $A \in M_{k\times k}(Z)$, $B \in M_{(n+1-k)\times k}(Z)$, $C \in M_{k\times(n+1-k)}(Z)$, $D \in M_{(n+1-k)\times(n+1-k)}(Z)$ y

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in GL(n+1, Z).$$

4.5 Análisis y consecuencias finales.

A partir de ahora, dado que no supone restricción ninguna, supondremos que una aplicación diferenciable $\varphi: T^{n+1}/\mathcal{F} \to T^{n+1}/\mathcal{F}'$ lleva la hoja F de $\mathcal{F}$ que pasa por $p(O)$ en la hoja F' de $\mathcal{F}'$ que pasa por $p(O)$, siendo O el origen de R^{n+1} y $p: R^{n+1} \to T^{n+1}$ la proyección canónica. Además $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ serán foliaciones lineales en el toro T^{n+1} y tendrán asociadas aplicaciones desenrollantes $D: R^{n+1} \to R^k$ (con grupo de holonomía Γ) y $D': R^{n+1} \to R^l$ (con grupo de holonomía Γ').

En [5] se demuestra un lema para foliaciones transcendentes o para foliaciones lineales tales que el subespacio vectorial que las genera admita una base de vectores con flujos asociados compactos o densos. Nosotros lo generalizaremos para una foliación lineal arbitraria en T^{n+1}.

Lema 4.31 *Sea $(T^{n+1}, \mathcal{F})$ una foliación lineal, sea $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Aut}(T^{n+1}, \mathcal{F})$. Entonces la aplicación inducida en homotopía $\widetilde{\varphi}_*: \pi_1(T^{n+1}) \to \pi_1(T^{n+1})$ que se extiende de manera canónica a una aplicación lineal de R^{n+1} (mediante los puntos finales de los levantamientos de $\pi_1(T^{n+1})$ en R^{n+1} a partir del origen de R^{n+1}) deja invariante el subespacio vectorial de R^{n+1} que genera la foliación.*

Demostración:

Distingamos dos casos.

1. Supongamos que la foliación $\mathcal{F}$ es de hojas densas en T^{n+1}.

   Sea $\widetilde{\varphi}: (T^{n+1}, \mathcal{F}) \to (T^{n+1}, \mathcal{F})$ y sea $\widetilde{\lambda}: (R^{n+1}, p^*\mathcal{F}) \to (R^{n+1}, p^*\mathcal{F})$ un levantamiento de $\widetilde{\varphi}$. No es restricción suponer que $\widetilde{\lambda}$ deja fijo el origen de R^{n+1}. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R^{n+1} & \xrightarrow{\widetilde{\lambda}} & R^{n+1} \\ D \downarrow & & \downarrow D \\ R^k & \xrightarrow{\theta} & R^k \end{array} \quad ,$$

   donde θ es un automorfismo lineal de R^k que deja invariante el grupo de holonomía de la foliación. Dado que Γ es denso en R^k y que la aplicación diferenciable $\varphi: T^{n+1}/\mathcal{F} \to T^{n+1}/\mathcal{F}$ inducida por $\widetilde{\varphi}$ es un difeomorfismo, por aplicación directa del Teorema 3.10 tenemos que θ es un isomorfismo lineal de R^k. Observemos que $\widetilde{\varphi_*}: \pi_1(T^{n+1}) \to \pi_1(T^{n+1})$ está dada por los valores de $\widetilde{\lambda}$ sobre los vectores de R^{n+1} con coordenadas enteras. Entonces el isomorfismo de grupos abelianos $\widetilde{\varphi_*}: Z^{n+1} \to Z^{n+1}$ admite una única extensión a un isomorfismo lineal $\widetilde{\varphi}_*: R^{n+1} \to R^{n+1}$. Consideremos el siguiente diagrama de aplicaciones lineales

$$\begin{array}{ccc} R^{n+1} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_*} & R^{n+1} \\ D\downarrow & & \downarrow D \\ R^k & \xrightarrow{\theta} & R^k \end{array}$$

Como el diagrama conmuta para los elementos de la base canónica de R^{n+1}, ya que se corresponden con los puntos finales de los levantamientos de una base del grupo fundamental de T^{n+1} a partir del origen de R^{n+1}, vemos que el diagrama conmuta, por la linealidad de las aplicaciones involucradas. Pero entonces $\widetilde{\varphi}_*(\operatorname{Ker} D) = \operatorname{Ker} D$, que es el subespacio invariante que genera la foliación $\mathcal{F}$.

2. En el caso no denso se procedería igual, teniendo en cuenta que la adherencia de una de las hojas sería un toro T^m, y entonces tendríamos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(T^{n+1}) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_*} & \pi_1(T^{n+1}) \\ i\uparrow & & \uparrow i \\ \pi_1(T^m) & \xrightarrow{\theta} & \pi_1(T^m) \end{array} \quad ,$$

donde $i: \pi_1(T^m) \to \pi_1(T^{n+1})$ es la inclusión canónica (que es inyectiva) y θ es la restricción de $\widetilde{\varphi}_*$ a $\pi_1(T^m)$. Ahora, como θ deja invariante el espacio asociado a la foliación deducimos, por la conmutatividad del diagrama, que $\widetilde{\varphi_*}$ deja invariante el espacio asociado la foliación.

Q.E.D.

Nota

Tal como se observa en la demostración, nos basamos sólo en la conmutatividad de diagramas y en que las aplicaciones son lineales. Por lo tanto el Lema sigue siendo cierto si sólo suponemos que $\widetilde{\varphi}: (T^{n+1}, \mathcal{F}) \to (T^{n+1}, \mathcal{F}')$ es una aplicación diferenciable ($\mathcal{F}'$ es otra foliación lineal en T^{n+1}), caso en que θ sería un endomorfismo lineal por el corolario 3.15. El homomorfismo inducido en homotopía llevaría el espacio vectorial asociado a $\mathcal{F}$ en el espacio vectorial asociado a $\mathcal{F}'$.

Por el difemorfismo dado en la Proposición 3.3 entre $T^{n+1}/\mathcal{F}$ y $R^k/\,\Gamma$, tenemos que una aplicación diferenciable $\widetilde{\varphi}: (T^{n+1}, \mathcal{F}) \to (T^{n+1}, \mathcal{F}')$ define dos aplicaciones diferenciables $\varphi: T^{n+1}/\mathcal{F} \to T^{n+1}/\mathcal{F}'$ y $\psi: R^k/\,\Gamma \to R^l/\,\Gamma'$, que por el corolario 3.7 definen un único levantamiento (una vez que fijemos la imagen de un punto) $\widetilde{\psi}\colon (R^k, \Gamma) \to (R^l, \Gamma')$.

Además, dada una aplicación diferenciable $\varphi\colon T^{n+1}/\mathcal{F} \to T^{n+1}/\mathcal{F}'$, existe un único levantamiento (una vez que fijemos la imagen de un punto) $\widetilde{\psi}\colon (R^k, \Gamma) \to (R^l, \Gamma')$. Pues bien, tenemos:

Proposición 4.32 *Dada una aplicación diferenciable $\varphi\colon T^{n+1}/\mathcal{F} \to T^{n+1}/\mathcal{F}'$ existe un levantamiento $\widetilde{\varphi}\colon (T^{n+1}, \mathcal{F}) \to (T^{n+1}, \mathcal{F}')$ de φ. En este caso el levantamiento ya no tiene por qué ser único, aunque fijemos la imagen de un punto.*

Además en el caso de que φ sea difeomorfismo, entonces se puede encontrar un levantamiento $\widetilde{\varphi}$ que sea difeomorfismo.

Demostración:

Distingamos dos casos:

1. Supongamos que la foliación $\mathcal{F}$ es de hojas densas en T^{n+1}. Consideremos el único levantamiento $\widetilde{\psi}\colon (R^k, \Gamma) \to (R^l, \Gamma')$ asociado a φ que lleva el origen de R^k en el origen de R^l , siendo Γ y Γ' los grupos de holonomía asociados a respectivas aplicaciones equivariantes (lineales) D y D'. Entonces completaremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} (R^{n+1}, \pi_1(T^{n+1})) & & (R^{n+1}, \pi_1(T^{n+1})) \\ D\downarrow & & \downarrow D' \\ (R^k, \Gamma) & \xrightarrow{\widetilde{\psi}} & (R^l, \Gamma') \end{array} \quad ,$$

   donde $\widetilde{\psi}$ es una aplicación lineal, por una aplicación inmediata del Teorema 3.10. Puesto que $D(\pi_1(T^{n+1}))$ y $D'(\pi_1(T^{n+1}))$ son grupos abelianos libres, podemos hacer la descomposición:

$$\pi_1(T^{n+1}) = \mathrm{Ker}(D') \oplus H,$$

   siendo H un subgrupo abeliano libre que por D' se aplica isomórficamente en Γ'. Sea $pr'\colon \pi_1(T^{n+1}) \to H$ la proyección canónica. Consideramos el homomorfismo de grupos $\widetilde{\lambda}\colon \pi_1(T^{n+1}) \to \pi_1(T^{n+1})$ dado por $\widetilde{\lambda}(t) = pr' \circ \widetilde{\psi} \circ D(t)$, $t \in \pi_1(T^{n+1})$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(T^{n+1}) & \xrightarrow{\widetilde{\lambda}} & \pi_1(T^{n+1}) \\ D\downarrow & & \downarrow D' \\ \Gamma & \xrightarrow{\widetilde{\psi}} & \Gamma' \end{array} \quad .$$

Observemos que $\widetilde{\lambda}$ admite una única extensión a una aplicación lineal

$$\widetilde{\lambda}\colon (R^{n+1}, \pi_1(T^{n+1})) \to (R^{n+1}, \pi_1(T^{n+1}))$$

dado que una base del grupo abeliano libre $\pi_1(T^{n+1})$ es también una base del espacio vectorial R^{n+1}. Luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo de aplicaciones lineales

$$\begin{array}{ccc} (R^{n+1}, \pi_1(T^{n+1})) & \xrightarrow{\widetilde{\lambda}} & (R^{n+1}, \pi_1(T^{n+1})) \\ D\downarrow & & \downarrow D' \\ (R^k, \Gamma) & \xrightarrow{\widetilde{\psi}} & (R^l, \Gamma') \end{array} ,$$

por lo cual $\widetilde{\lambda}$ envía el subespacio vectorial asociado a la foliación $\mathcal{F}$ en el subespacio vectorial asociado a la foliación $\mathcal{F}'$. Pero como $\widetilde{\lambda}(\pi_1(T^{n+1})) \subset \pi_1(T^{n+1})$, la matriz asociada a $\widetilde{\lambda}$ tiene todas las coordenas enteras respecto de las bases canónicas. Por lo tanto, induce una aplicación en el toro $\widetilde{\varphi}\colon (T^{n+1}, \mathcal{F}) \to (T^{n+1}, \mathcal{F}')$ que es un levantamiento de $\varphi\colon T^{n+1}/\mathcal{F} \to T^{n+1}/\mathcal{F}'$.

2. Supongamos que $\mathcal{F}$ no es de hojas densas. Sean T, T' las respectivas adherencias de las hojas de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ que pasan por $p(O)$. Sean $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}'_0$ las foliaciones inducidas por $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ en T y T' respectivamente. Dado que T^{n+1} y T son grupos de Lie abelianos, tenemos que D induce un isomorfismo de grupos de Lie entre T^{n+1}/T y $R^k/\overline{\Gamma}$ (análogamente D' para T^{n+1}/T' y $R^l/\overline{\Gamma'}$). Además tenemos las aplicaciones diferenciables

$$\overline{\varphi}\colon T^{n+1}/T \to T^{n+1}/T' \quad \text{y} \quad \varphi_1\colon T/\mathcal{F}_0 \to T'/\mathcal{F}'_0,$$

inducidas por φ. Por el apartado anterior existe un levantamiento $\widetilde{\varphi_1}\colon (T, \mathcal{F}_0) \to (T', \mathcal{F}'_0)$ de φ_1. Entonces tenemos la siguiente aplicación diferenciable

$$\widetilde{\varphi}\colon T^{n+1}/T \times (T, \mathcal{F}_0) \to T^{n+1}/T' \times (T', \mathcal{F}'_0)$$

dada por $\widetilde{\varphi} = (\overline{\varphi}, \widetilde{\varphi_1})$.

Con el siguiente lema queda demostrada la proposición.

Lema 4.33 *$T^{n+1}/T \times (T, \mathcal{F}_0)$ es isomorfo como grupo de Lie a $(T^{n+1}, \mathcal{F})$.*

Demostración:

Supongamos que la dimensión de T es m. Consideremos el fibrado $p\colon T^{n+1} \to T^{n+1}/T \cong T^{n+1-m}$. Dado que $\pi_2(T^{n+1-m}) = \pi_0(T) = \{0\}$, tenemos la siguiente sucesión exacta corta de grupos abelianos

$$\pi_1(T) \xrightarrow{i} \pi_1(T^{n+1}) \xrightarrow{p} \pi_1(T^{n+1-m}).$$

Pero como $\pi_1(T^{n+1-m})$ es proyectivo, la sucesión es rota. Si consideramos ahora la sucesión exacta corta de grupos abelianos inducida por la anterior tenemos

$$R^m \xrightarrow{i} R^{n+1} \xrightarrow{p} R^{n+1-m},$$

donde las matrices asociadas a i y p respecto de las bases canónicas tienen todas las coordenadas enteras. Como $p\colon T^{n+1} \to T^{n+1-m}$ admite una sección σ (análogamente para i tenemos una retracción de grupos ϵ) tenemos que $p\colon R^{n+1} \to R^{n+1-m}$ admite una sección σ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas tiene todas las coordenadas enteras (análogamente para ϵ). Entonces si consideramos el isomorfismo de grupos de Lie

$$\theta\colon R^{n+1} \to R^{n+1-m} \times R^m$$

dado por $\theta(x) = (p(x), \epsilon(x))$, con inversa $\theta^{-1}(u, v) = i(u) + \sigma(v)$, pasa a los repectivos cocientes

$$\overline{\theta}\colon T^{n+1} \to T^{n+1-m} \times T^m.$$

Además, como $i(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{F}$, tenemos que el isomorfismo de grupos de Lie respeta las foliaciones. Q.E.D.

Finalmente la propiedad de levantamiento nos permite concluir los siguientes corolarios:

Corolario 4.34
La aplicación canónica $\mathrm{Aut}(T^{n+1}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Diff}(T^{n+1}/\mathcal{F})$ *es sobreyectiva.*

Corolario 4.35
$T^{n+1}/\mathcal{F} \cong /T^{n+1}/\mathcal{F}'$ *si y sólo si existe* $\varphi \in \mathrm{Diff}(T^{n+1})$ *tal que* $\varphi(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}'$.

Y finalmente combinando este último corolario con el lema 4.31, podemos concluir:

Corolario 4.36
$T^{n+1}/\mathcal{F} \cong /T^{n+1}/\mathcal{F}'$ *si y sólo si existe* $\varphi \in Gl(n+1, Z)$ *que aplica isomórficamente el espacio vectorial asociado la foliación* $\mathcal{F}$ *en el espacio vectorial asociado a la foliación* $\mathcal{F}'$.

Nota
Cabe destacar que en las secciones anteriores habíamos hecho las clasificaciones difeológicas de los espacios de hojas, pero a la vista del corolario 4.35, hemos clasificado las foliaciones lineales en el toro que son conjugadas en sentido habitual.

Además hemos dado dos tipos de clasificaciones: la primera en función del grupo de holonomía asociado a la foliación y la segunda en función del subespacio vectorial que la genera.

Nota
Podemos observar cierta analogía entre los teoremas de clasificación de los espacios de hojas y del grupo de difeomorfismos del espacio de hojas asociado a foliaciones lineales de codimensión uno y a los flujos lineales, lo cual no nos debería sorprender: dado que si A es una matriz de $Gl(n+1, Z)$ que aplica isomórficamente el subespacio vectorial asociado a una foliación en el subespacio vectorial asociado a la otra foliación (ver 4.36), entonces la traspuesta también está en $Gl(n+1, Z)$ y aplica isomórficamente el ortogonal asociado a una foliación en el ortogonal asociado a la otra foliación.

Capítulo 5

Foliaciones Nilpotentes

En este Capítulo mostraremos cómo el caso nilpotente es considerablemente más complicado que el caso abeliano estudiado hasta ahora. Nos limitaremos a dar algunos resultados para el grupo de Heisenberg H_3, en el que vamos a considerar una familia particular de subgrupos densos y finitamente generados Γ, para posteriormente calcular el grupo $\mathrm{Diff}(H_3/\Gamma)$. Tenemos el siguiente Teorema [13]

Teorema 5.1 *Sea G un grupo de Lie resoluble y simplemente conexo. Sea $\Gamma \subset G$ un subgrupo finitamente generado de adherencia uniforme en G. Si Γ posee algún subgrupo policíclico de adherencia uniforme en G entonces existe al menos una variedad compacta M con una G-foliación de Lie $\mathcal{F}$ y que tiene por grupo de holonomía Γ.*

Como H_3 es nilpotente y los subgrupos de H_3 que vamos a considerar son densos (en particular tienen adherencia uniforme) y policíclicos entonces estarán asociados a variedades compactas con foliaciones de Lie que modelan sobre H_3. De hecho dado que H_3 es nilpotente podríamos haber utilizado otro resultado anterior de [12]

Teorema 5.2 *Sea G un grupo de Lie nilpotente y simplemente conexo. Sea $\Gamma \subset G$ un subgrupo denso y finitamente generado de G. Entonces existe un grupo de Lie $M(\Gamma)$ nilpotente y simplemente conexo, y un homomorfismo sobreyectivo de grupos de Lie $\varphi\colon M(\Gamma) \to G$ que aplica isomórficamente un subgrupo Γ' discreto y uniforme de $M(\Gamma)$ en Γ.*

Por lo cual, la variedad compacta y homogénea $M(\Gamma)/\Gamma'$ verifica las condiciones.

5.1 El Grupo de Heisenberg.

Consideremos en R^3 la siguiente operación:

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy').$$

Con esta operación R^3 tiene estructura de grupo de Lie no abeliano, al cual se le llama *el grupo de Heisenberg* H_3, que además es simplemente conexo.

Ahora vamos considerar un subgrupo $\Gamma \subset H_3$ finitamente generado y denso. Trataremos de dar condiciones para ver cuando H_3/Γ es difeomorfo como espacio difeológico a H_3/Γ', siendo Γ' otro subgrupo de H_3 en las mismas condiciones que Γ. Después trataremos de calcular $\mathrm{Diff}(H_3/\Gamma)$.

5.1.1 Automorfismos de Lie de H_3.

Dado que el grupo de Heisenberg es simplemente conexo tenemos un isomorfismo natural:

$$\mathrm{Aut}(H_3) \cong \mathrm{Aut}(g),$$

siendo g el álgebra de Lie de H_3 y $\mathrm{Aut}(g)$ los automorfismos del álgebra de Lie, es decir, los automorfismos lineales de g que conservan el producto corchete. El isomorfismo está dado de la siguiente forma:

$$\varphi \in \mathrm{Aut}(H_3) \mapsto (d\varphi)_e \in \mathrm{Aut}(g). \tag{5.1}$$

Lema 5.3 *El álgebra de Lie del grupo de Heisenberg es isomorfa al álgebra de Lie de las matrices de orden* 3×3 *triangulares superiores y donde todos lo términos de la diagonal son cero.*

Demostración:

Para ello basta tener en cuenta que H_3 es isomorfo (como grupo de Lie) al subgrupo cerrado de $GL(3, R)$ formado por las matrices triangulares superiores y donde los términos de la diagonal son todos 1. Ahora, como el álgebra de Lie de $GL(3, R)$ es $R(3)$ y la exponencial de $R(3)$ en $GL(3, R)$ es la exponencial usual de matrices, tenemos que una matriz $A \in R(3)$ está en el álgebra de Lie de H_3 si y sólo si $\exp(tA) \in H_3$ para todo $t \in R$. Finalmente por cálculos directos deducimos el enunciado del lema.

Q.E.D.

La exponencial $\exp\colon g \to H_3$ está dada explícitamente por

$$\exp(\mathrm{X}) = \mathrm{I} + \mathrm{X} + \frac{1}{2}\mathrm{X}^2$$

y es por tanto un difeomorfismo (como ocurre con todos los nilpotentes simplemente conexos).

Lema 5.4 *Si* $\overline{v}$ *es un campo de vectores invariante a la izquierda que en el neutro vale* $v = (v_1, v_2, v_3) \in R^3$ *entonces*

$$\overline{v}_{(x,y,z)} = (v_1, v_2, xv_2 + v_3).$$

Además, si $\overline{v'}$ *es otro campo de vectores invariante a la izquierda que en el neutro vale* $v' = (v'_1, v'_2, v'_3) \in R^3$ *entonces*

$$[\overline{v}, \overline{v'}] = (0, 0, v_1 v'_3 - v'_1 v_3).$$

Finalmente:

Proposición 5.5 *Todo automorfismo de Lie* φ *de* H_3 *es de la forma* $\varphi(x, y, z) =$

$$(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y, b_1 x + b_2 y + \Delta z + a_{12}a_{21}xy + \frac{1}{2}a_{11}a_{21}x^2 + \frac{1}{2}a_{12}a_{22}y^2),$$

y su diferencial en el neutro es

$$\varphi_* \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ b_1 & b_2 & \Delta \end{pmatrix},$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 \in R$ *y* $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Demostración:
La condición de que un automorfismo lineal $\varphi_* \colon g \to g$ sea un automorfismo de álgebras de Lie es:

$$[\varphi_*(v), \varphi_*(v')] = \varphi_*[v, v'].$$

Si hacemos la siguiente identificación:

$$\varphi_* \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

al imponerle a φ_* que conserve el corchete nos aparecen las condiciones $a_{13} = a_{23} = 0$ y $a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Denotemos a partir de ahora $a_{31} = b_1$, $a_{32} = b_2$ y $\Delta = a_{33}$, y dado que φ_* es isomorfismo tenemos además que $\Delta \neq 0$.

Consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_3 & \xrightarrow{\varphi} & H_3 \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ g & \xrightarrow{\varphi_*} & g \end{array}$$

Entonces como H_3 es simplemente conexo podemos levantar el automorfismo de álgebras de Lie φ_* a un único automorfismo de Lie de H_3 cuya diferencial en el neutro es justamente φ_*. Utilizando el diagrama vemos que $\varphi\colon H_3 \to H_3$ está dado por la fórmula del enunciado.

Q.E.D.

5.1.2 Una familia particular de subgrupos densos y finitamente generados.

Sea $\alpha = \sqrt{d}$ con $d \in Z^+$ y $\sqrt{d} \notin Z$, y sea $\Gamma_\alpha = \langle 1, \alpha\rangle \subset R$. Sea $\Gamma = \Gamma(\alpha) = \{(x, y, z)\colon x, y, z \in \Gamma_\alpha\}$.

Es inmediato comprobar que Γ es un subgrupo de H_3. Además es finitamente generado por:

$$B = \{(1,0,0), (\alpha,0,0), (0,1,0), (0,\alpha,0), (0,0,1), (0,0,\alpha)\},$$

sin más que tener en cuenta que cualquier elemento $(m+n\alpha, m'+n'\alpha, m''+n''\alpha)$ se escribe

$$(1,0,0)^m(\alpha,0,0)^n(0,1,0)^{m'}(0,\alpha,0)^{n'}(0,0,1)^{m''}(0,0,\alpha)^{n''}.$$

Además es denso en H_3, pues los subgrupos de Γ de la forma $(\Gamma_\alpha, 0, 0)$, $(0, \Gamma_\alpha, 0)$ y $(0, 0, \Gamma_\alpha)$ son densos en los subgrupos de H_3 de la forma $(P, 0, 0)$, $(0, Q, 0)$ y $(0, 0, R)$. Como estos últimos subgrupos de H_3 engendran H_3 y por la continuidad de la operación concluimos que Γ es denso en H_3.

Recordemos que dado un grupo G se entendía por el centro de G

$$Z(G) = \{g \in G \ : \ ga = ag \ \forall a \in G\},$$

el cual era un subgrupo normal de G.

Proposición 5.6

$$Z(H_3) = \{(0,0,z) \ : \ z \in R\}$$

y

$$Z(\Gamma) = \{(0,0,m+n\alpha) \ : \ m, n \in Z\} = \Gamma \cap Z(H_3).$$

Al igual que en el toro interesa saber cuando dos subgrupos $\Gamma = \Gamma(\alpha)$ y $\Gamma' = \Gamma(\beta)$ inducen cocientes de H_3 difeomorfos.

Teorema 5.7 *Sea* $\Gamma' = \Gamma(\beta) = \{(x, y, z) \in H_3 \colon x, y, z \in \Gamma_\beta\}$ *otro subgrupo denso y finitamente generado de* H_3 *asociado a* $\beta \notin Q = \{(x, y, z) \in H_3 \colon x, y, z \in \Gamma_\beta\}$. *Si* $H_3/\Gamma \cong H_3/\Gamma'$ *entonces* $\Gamma = \Gamma'$.

Demostración:

Dado que Γ' tiene que ser un subgrupo de H_3 deducimos que Γ_β también es un anillo. Si $H_3/\Gamma \cong H_3/\Gamma'$ entonces por el corolario 3.15 $\mathrm{End}_\Gamma(H_3) \cong \mathrm{End}_{\Gamma'}(H_3)$ como monoides. Además el centro de $\mathrm{End}_\Gamma(H_3)$ es isomorfo como anillo a $\mathrm{End}_{\Gamma_\alpha}(R)$, análogamente el centro de $\mathrm{End}_{\Gamma'}(H_3)$ es isomorfo como anillo a $\mathrm{End}_{\Gamma_\beta}(R)$. Pero entonces tenemos la siguiente cadena de isomorfismos de anillos

$$Z[\alpha] \cong \mathrm{End}_{\Gamma_\alpha}(R) \cong \mathrm{End}_{\Gamma_\beta}(R) \cong Z[\beta],$$

donde el primer isomorfismo $\theta_1 \colon Z[\alpha] \to \mathrm{End}_{\Gamma_\alpha}(R)$ está dado por $\theta_1(\gamma) \colon Z[\alpha] \to Z[\alpha]$ con $\theta_1(\gamma)(x) = \gamma x$. El segundo isomorfismo $\theta_2 \colon \mathrm{End}_{\Gamma_\alpha}(R) \to \mathrm{End}_{\Gamma_\beta}(R)$ está dado por $\theta_2(f) = \lambda \circ f \circ \lambda^{-1}$ (siendo λ un isomorfismo entre $Z[\alpha]$ y $Z[\beta]$). Y el último isomorfismo $\theta_3 \colon \mathrm{End}_{\Gamma_\beta}(R) \to Z[\beta]$ está dado por $\theta_3(g) = g(1)$. Por lo cual si $\theta = \theta_3 \circ \theta_2 \circ \theta_1$ tenemos

$$\theta(\gamma) = \gamma \subset \Gamma_\beta.$$

Razonando de manera análoga deducimos $\Gamma_\beta \subset \Gamma_\alpha$ y por lo tanto $\Gamma_\beta = \Gamma_\alpha$.

Q.E.D.

5.2 El grupo $\mathrm{Diff}(H_3/\Gamma)$.

Supongamos que $d \in Z^+$ y que $\alpha = \sqrt{d} \notin Z$. Apartir de ahora vamos considerar Γ un subgrupo denso y finitamente generado de H_3 asociado a α, es decir, $\Gamma = \Gamma(\alpha) = \{(x, y, z) \in R^3 \colon x, y, z \in \Gamma_\alpha\}$.

Para calcular $\mathrm{Diff}(H_3/\Gamma)$ vamos necesitar calcular el grupo $\mathrm{Aut}_\Gamma(H_3)$. Una vez que tengamos esto, aplicaremos la fórmula del Teorema 3.10 y habremos terminado.

Para calcular el grupo $\mathrm{Aut}_\Gamma(H_3)$ lo que vamos hacer es trabajar con $\mathrm{Aut}(g)$ y después mediante el isomorfismo natural dado en 5.1 lo pasaremos a $\mathrm{Aut}(H_3)$.

5.2.1 La acción de $\mathrm{Aut}_\Gamma(H_3)$ sobre H_3.

En esta subsección nos va interesar ver el isomorfismo del Teorema 3.10 en función de los automorfismos del álgebra de Lie, para poder expresar de una manera más simplificada el grupo $\mathrm{Diff}(M/\mathcal{F})$.

El automorfismo interior i_γ con $\gamma = (x, y, z) \in \Gamma$ de H_3 viene dado por $i_\gamma(x', y', z') = (x', y', z' + xy' - x'y)$. Ahora si pasamos este automorfismo de Lie de H_3 a un automorfismo del álgebras de Lie g mediante la diferencial en el neutro obtenemos:

$$(di_\gamma)_e \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & x & 1 \end{pmatrix},$$

donde $x, y \in \Gamma_\alpha$.

La acción de $\mathrm{Aut}_\Gamma(H_3)$ sobre H_3 se puede pasar mediante el isomorfismo natural a una acción de $\mathrm{Aut}(g)$ sobre H_3. Y entonces obtenemos que

$$\mathrm{Diff}(H_3/\Gamma) \cong \frac{\mathrm{Aut}_\Gamma(g) |\!\times H_3}{\Gamma},$$

donde un elemento $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \Gamma$ en la última igualdad representa el elemento

$$(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 1 \end{pmatrix}, (-\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2)), \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma_\alpha,$$

en el producto semidirecto $\mathrm{Aut}_\Gamma(g) |\!\times H_3$, es decir, las clases

$$(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 1 \end{pmatrix}, (-\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3)), \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma_\alpha.$$

Por lo cual tenemos que en el cociente un par (φ, g_1) está en la misma clase que otro par (ψ, g_2) si y sólo si existe un $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \Gamma$ tal que:

$$((d\varphi)_e, g_1) = (M(\gamma_1, \gamma_2)(d\psi)_e, g_2\gamma^{-1}),$$

donde $M(\gamma_1, \gamma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 1 \end{pmatrix}$.

Observemos que el grupo $Z(\Gamma) = \{(0,0,\gamma) \,:\, \gamma \in \Gamma_\alpha\}$ es normal en H_3. Si consideramos ahora:

$$\Gamma/Z(\Gamma) = \{(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 1 \end{pmatrix}, [(\gamma_1, \gamma_2, 0)]) \ : \ \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_\alpha\},$$

dado que $Z(\Gamma)$ es normal en $Z(H_3)$ y $Z(H_3)$ es normal en H_3, deducimos que $Z(\Gamma)$ es normal en H_3. Pero además como un elemento de $\mathrm{Aut}_\Gamma(g)$ fija $Z(\Gamma)$ podemos definir una acción

$$A\colon \mathrm{Aut}_\Gamma(g) \times H_3/\,Z(\Gamma) \to H_3/\,Z(\Gamma)$$

dada por $A(f,[g]) = [f(g)]$. Si hacemos la identificación de $\Gamma/\,Z(\Gamma)$ con el grupo abeliano $\Gamma^+ = \{(\Gamma_\alpha, \Gamma_\alpha)\}$, tenemos

Teorema 5.8

$$\mathrm{Diff}(H_3/\,\Gamma) \cong \frac{\mathrm{Aut}_\Gamma(g)|_A \times (H_3/\,Z(\Gamma))}{\Gamma^+}$$

5.2.2 Cálculo del grupo $\mathrm{Aut}_\Gamma(H_3)$.

Sea entonces un $\varphi \in \mathrm{Aut}(H_3)$ que induzca un automorfismo de Γ. Entonces la diferencial en el neutro, φ_* tendrá como matriz asociada

$$\varphi_* \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ b_1 & b_2 & \Delta \end{pmatrix},$$

con $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Como vimos antes en 5.19, $\varphi(x,y,z) =$

$$(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y, b_1x + b_2y + \Delta z + a_{12}a_{21}xy + \frac{1}{2}a_{11}a_{21}x^2 + \frac{1}{2}a_{12}a_{22}y^2). \quad (5.2)$$

La primera condición natural que surge es que $\varphi(\Gamma) \subset \Gamma$. Pero como Γ es un grupo finitamente generado, esta condición se traduce en las siguientes condiciones de verificación inmediata:

1. $\varphi(1,0,0) \in \Gamma$ si y sólo si $a_{11}, a_{21} \in \Gamma_\alpha$ y $b_1 + \frac{1}{2}a_{11}a_{21} \in \Gamma_\alpha$.
2. $\varphi(0,1,0) \in \Gamma$ si y sólo si $a_{12}, a_{22} \in \Gamma_\alpha$ y $b_2 + \frac{1}{2}a_{12}a_{22} \in \Gamma_\alpha$.
3. $\varphi(0,0,1) \in \Gamma$ si y sólo si $\Delta \in \Gamma_\alpha$.

4. $\varphi(\alpha,0,0)\in\Gamma$ si y sólo si $b_1\alpha+\frac{1}{2}a_{11}a_{21}\alpha^2\in\Gamma_\alpha$ (las condiciones que faltan aquí ya se deducirían de las anteriores).

5. $\varphi(0,\alpha,0)\in\Gamma$ si y sólo si $b_2\alpha+\frac{1}{2}a_{12}a_{22}\alpha^2\in\Gamma_\alpha$ (las condiciones que faltan aquí ya se deducirían de las anteriores).

6. $\varphi(0,0,\alpha)\in\Gamma$, la cual no aporta ninguna condición nueva.

Estas condiciones son equivalentes a que $\varphi(\Gamma)\subset\Gamma$. Pero de hecho, dado que φ es un automorfismo de H_3, para que φ induzca un automorfismo de Γ necesitamos verificar que $\Gamma\subset\varphi(\Gamma)$, lo cual es equivalente a que $\varphi^{-1}(\Gamma)\subset\Gamma$. Es decir, debemos deducir unas condiciones análogas para $\varphi^{-1}\in\mathrm{Aut}(H_3)$.

Para ello observemos que la inversa de la matriz asociada a φ_* dado en 5.2.2 es:

$$\varphi_*^{-1}\equiv\begin{pmatrix} a_{22}\Delta^{-1} & -a_{12}\Delta^{-1} & 0\\ -a_{21}\Delta^{-1} & a_{11}\Delta^{-1} & 0\\ (-b_1a_{22}+b_2a_{21})\Delta^{-2} & (-b_2a_{11}+b_1a_{12})\Delta^{-2} & \Delta^{-1}\end{pmatrix}.$$

Haciendo el mismo razonamiento que hacíamos para φ_* y φ, lo hacemos ahora para $(\varphi_*)^{-1}=(\varphi^{-1})_*$ y φ^{-1}. Por lo cual obtenemos las siguientes condiciones análogas:

1. $a_{22}\Delta^{-1},-a_{21}\Delta^{-1}\in\Gamma_\alpha$ y $(b_2a_{21}-b_1a_{22}-\frac{1}{2}a_{22}a_{21})\Delta^{-2}\in\Gamma_\alpha$.

2. $-a_{12}\Delta^{-1},a_{11}\Delta^{-1}\in\Gamma_\alpha$ y $(-b_2a_{11}+b_1a_{12}-\frac{1}{2}a_{11}a_{12})\Delta^{-2}\in\Gamma_\alpha$.

3. $\Delta^{-1}\in\Gamma_\alpha$.

4. $((b_2a_{21}-b_1a_{22})\alpha-\frac{1}{2}a_{22}a_{21}\alpha^2)\Delta^{-2}\in\Gamma_\alpha$.

5. $((-b_2a_{11}+b_1a_{12})\alpha-\frac{1}{2}a_{11}a_{12}\alpha^2)\Delta^{-2}\in\Gamma_\alpha$.

6. $\varphi^{-1}(0,0,\alpha)\in\Gamma$, la cual no aporta ninguna condición nueva.

Lo primero que observamos tras esta numerosa lista de ecuaciones es que el determinante Δ es una unidad en el anillo $Z[\sqrt{d}]=Z[\alpha]$. Teniendo en cuenta esto obtenemos

Lema 5.9 *El automorfismo φ dado en 5.2 induce un automorfismo en Γ si y sólo si verifica la siguiente lista de ecuaciones:*

1. $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\in\Gamma_\alpha$.

2. $\Delta \in \mathcal{U}(Z[\sqrt{d}])$.

3. $b_1 + \frac{1}{2}a_{11}a_{21} \in \Gamma_\alpha$.

4. $b_2 + \frac{1}{2}a_{12}a_{22} \in \Gamma_\alpha$.

5. $b_2a_{21} - b_1a_{22} - \frac{1}{2}a_{22}a_{21} \in \Gamma_\alpha$.

6. $-b_2a_{11} + b_1a_{12} - \frac{1}{2}a_{11}a_{12} \in \Gamma_\alpha$.

7. $b_1\alpha + \frac{1}{2}a_{11}a_{21}\alpha^2 \in \Gamma_\alpha$.

8. $b_2\alpha + \frac{1}{2}a_{12}a_{22}\alpha^2 \in \Gamma_\alpha$

9. $(b_2a_{21} - b_1a_{22})\alpha - \frac{1}{2}a_{22}a_{21}\alpha^2 \in \Gamma_\alpha$.

10. $(-b_2a_{11} + b_1a_{12})\alpha - \frac{1}{2}a_{11}a_{12}\alpha^2 \in \Gamma_\alpha$

Ahora si hacemos la identificación:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

teniendo en cuenta que $\Delta = \det A \in \mathcal{U}(Z([\sqrt{d}]))$ y haciendo unas pequeñas modificaciones en las ecuaciones donde aparece Δ como denominador, llegamos a lo siguiente:

Proposición 5.10 *Un automorfismo φ de H_3 induce un automorfismo en Γ si y sólo si la matriz asociada a φ_* dada en 5.2.2 verifica las siguientes condiciones:*

$$A \in GL(2, \Gamma_\alpha). \tag{5.3}$$

$$b_1 + \frac{1}{2}a_{11}a_{21} \in \Gamma_\alpha. \tag{5.4}$$

$$b_2 + \frac{1}{2}a_{12}a_{22} \in \Gamma_\alpha. \tag{5.5}$$

$$b_2a_{21} - b_1a_{22} - \frac{1}{2}a_{22}a_{21} \in \Gamma_\alpha. \tag{5.6}$$

$$-b_2a_{11} + b_1a_{12} - \frac{1}{2}a_{11}a_{12} \in \Gamma_\alpha. \tag{5.7}$$

$$\frac{1}{2}a_{11}a_{12}(\alpha^2 - \alpha) \in \Gamma_\alpha. \tag{5.8}$$

$$\frac{1}{2}a_{11}a_{21}(\alpha^2-\alpha) \in \Gamma_\alpha. \tag{5.9}$$
$$\frac{1}{2}a_{22}a_{12}(\alpha^2-\alpha) \in \Gamma_\alpha. \tag{5.10}$$
$$\frac{1}{2}a_{22}a_{21}(\alpha^2-\alpha) \in \Gamma_\alpha. \tag{5.11}$$

5.3 Representación matricial de $\mathrm{Aut}_\Gamma(H_3)$.

Trataremos de analizar más profundamente las ecuaciones de la Proposición 5.10 para ver qué vectores $b=(b_1,b_2)\in R^2$ son compatibles con las matrices $A\in GL(2,\Gamma_\alpha)$. Evidentemente puede pasar que para distintas matrices en $GL(2,\Gamma_\alpha)$ haya distintos vectores $b\in R^2$.

Para proseguir con nuestros razonamientos vamos a necesitar distinguir los casos en que d sea par ó impar.

5.3.1 Caso en el que d es par.

Consideremos el anillo $Z[\sqrt{d}]$. Un elemento del anillo se puede pensar como un par de números enteros $a+b\sqrt{d}=(a,b)\in Z^2$. Entonces podemos hacer una extensión de la paridad usual al anillo $Z[\sqrt{d}]$. Diremos que un $(a,b)\in Z[\sqrt{d}]$ tiene paridad tipo:

1. (P,P) si a y b son pares.
2. (P,I) si a es par y b es impar.
3. (I,P) si a es impar y b es par.
4. (I,I) si a y b son impares.

Observamos que ahora hay cuatro tipos de paridades. Análogamente en Z teníamos unas leyes para la suma y la multiplicación de números pares e impares, ahora tenemos unas leyes análogas, de deducción inmediata sin más que tener en cuenta que d es par, que son las siguientes:

Para la suma tenemos:

	(I,I)	(P,I)	(I,P)	(P,P)
(I,I)	(P,P)	(I,P)	(P,I)	(I,I)
(P,I)	(I,P)	(P,P)	(I,I)	(P,I)
(I,P)	(P,I)	(I,I)	(P,P)	(I,P)
(P,P)	(I,I)	(P,I)	(I,P)	(P,P)

y para la multiplicación tenemos:

	(I,I)	(P,I)	(I,P)	(P,P)
(I,I)	(I,P)	(P,I)	(I,I)	(P,P)
(P,I)	(P,I)	(P,P)	(P,I)	(P,P)
(I,P)	(I,I)	(P,I)	(I,P)	(P,P)
(P,P)	(P,P)	(P,P)	(P,P)	(P,P)

.

De acuerdo con estas leyes vamos a probar el siguiente lema.

Lema 5.11 *Una unidad del anillo $Z[\sqrt{d}]$ ha de tener paridad (I,I) ó (I,P).*

Demostración:

Una unidad del anillo $Z[\sqrt{d}]$ tiene que verificar la ecuación $x^2 - y^2 d = \pm 1$, y como d es par deducimos que la unidad tiene que ser del tipo (I,I) ó (I,P).

Q.E.D.

Se sigue inmeditamente de las ecuaciones que teníamos en la proposición 5.10 que si un automorfismo φ de H_3 induce un automorfismo de Γ entonces $b = (a_{31}, a_{32})$ tiene que verificar:

$$b \in (\frac{1}{2}\Gamma_\alpha, \frac{1}{2}\Gamma_\alpha) \subset R^2.$$

Veamos qué matrices $A \in GL(2, \Gamma_\alpha)$ que estén asociadas a un automorfismo de H_3 que induzca un automorfismo en Γ tienen asociado un $b \in (\frac{1}{2}\Gamma_\alpha, \frac{1}{2}\Gamma_\alpha)$.

Lema 5.12 *Si $b = (b_1, b_2) \subset R^2$ está asociado un automorfismo de H_3 que induce un automorfismo en Γ entonces:*

$$b_1, b_2 \in \Gamma_\alpha \coprod (\frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha),$$

donde el signo $\coprod$ significa unión disjunta.

Demostración:

Analicemos el caso de b_1, dado que el caso de b_2 es análogo.

Se sigue directamente de las ecuaciones de la proposición 5.10 que $b_1 \in \Gamma_\alpha$ si y sólo si $\frac{1}{2}a_{11}a_{21} \in \Gamma_\alpha$. Supongamos entonces que $b_1 \notin \Gamma_\alpha$, es decir, $\frac{1}{2}a_{11}a_{21} \notin \Gamma_\alpha$. Entonces pueden pasar tres cosas:

1. $\frac{1}{2}a_{11}a_{21} = \frac{1}{2} + \gamma$ con $\gamma \in \Gamma_\alpha$.

   De donde deduciríamos utilizando la ecuación (5.4) de la Proposición 5.10 que:
$$(\frac{1}{2} + \gamma)(\alpha^2 - \alpha) \in \Gamma_\alpha;$$
   pero entonces $\frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha) \in \Gamma_\alpha$. Observemos que α es del tipo (P, I) y por las leyes de la multiplicación y la suma para paridades obtenemos que $\alpha^2 - \alpha$ es del tipo (P, I), por lo que
$$\frac{1}{2}(\alpha^2 - \alpha) \notin \Gamma_\alpha.$$
   Lo cual es una contradicción.

2. $\frac{1}{2}a_{11}a_{21} = \frac{1}{2}(1 + \alpha) + \gamma$ con $\gamma \in \Gamma_\alpha$.

   De donde deducimos que $b_1 = \frac{1}{2}(1 + \alpha) + \gamma'$ con $\gamma' \in \Gamma_\alpha$. Volviendo a utilizar la ecuación (5.4) de la Proposición 5.10 deducimos que:
$$(\frac{1}{2}(1 + \alpha) + \gamma)(\alpha^2 - \alpha) \in \Gamma_\alpha,$$
   pero entonces $\frac{1}{2}(1+\alpha)(\alpha^2-\alpha) \in \Gamma_\alpha$. Observemos que α es del tipo (P, I) y por las leyes de la multiplicación y la suma para paridades obtenemos que $\alpha^2 - \alpha$ es del tipo (P, I) y $1 + \alpha$ es del tipo (I, I), por lo que:
$$\frac{1}{2}(1 + \alpha)(\alpha^2 - \alpha) \notin \Gamma_\alpha.$$
   Lo cual es una contradicción.

3. Luego la única posiblidad que nos queda es que
$$\frac{1}{2}a_{11}a_{21} = \frac{1}{2}\alpha + \gamma,$$
   con $\gamma \in \Gamma_\alpha$. Que era lo que queríamos demostrar.

Q.E.D.

De hecho tenemos

Lema 5.13 *Se verifica lo siguiente:*

1. $b_1 \in \Gamma_\alpha$ *si y sólo si* $\frac{1}{2}a_{11}a_{21} \in \Gamma_\alpha$.

2. $b_1 \in (\frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha)$ *si y sólo si* $\frac{1}{2}a_{11}a_{21} \in (\frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha)$.

Y análogamente para b_2*:*

1. $b_2 \in \Gamma_\alpha$ *si y sólo si* $\frac{1}{2}a_{12}a_{22} \in \Gamma_\alpha$.

2. $b_2 \in (\frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha)$ *si y sólo si* $\frac{1}{2}a_{12}a_{22} \in (\frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha)$.

Teorema 5.14 *Supongamos que* d *es par y denotemos por* J *los elementos del anillo que tienen paridad* (I, I) *ó* (I, P)*. Entonces un automorfismo* φ *de* H_3 *induce un automorfismo de* Γ *si y sólo si la matriz asociada a* φ_* *pertenece a uno de los siguientes tipos:*

1.

$$\begin{pmatrix} (P,I) & J & 0 \\ J & (P,P) & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} J & (P,P) & 0 \\ (P,I) & J & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} J & (P,I) & 0 \\ (P,P) & J & 0 \\ \Gamma_\alpha & \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} (P,P) & J & 0 \\ J & (P,I) & 0 \\ \Gamma_\alpha & \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} J & (P,I) & 0 \\ (P,I) & J & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} (P,I) & J & 0 \\ J & (P,I) & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha+\Gamma_\alpha & \frac{1}{2}\alpha+\Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}.$$

4.

$$\begin{pmatrix} J & (P,P) & 0 \\ (P,P) & J & 0 \\ \Gamma_\alpha & \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} (P,P) & J & 0 \\ J & (P,P) & 0 \\ \Gamma_\alpha & \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}.$$

Siendo $\det A = \Delta$ *una unidad en el anillo* $Z[\sqrt{d}]$.

Demostración:

Tal y como vimos en el Lema 5.13 vamos a tener que analizar cuatro casos, según los valores de b_1 y b_2 (dependiendo si están en Γ_α o si por el contrario están en $\frac{1}{2}\alpha+\Gamma_\alpha$).

1. Supongamos $b_1 = \frac{1}{2}\alpha+\gamma$ y $b_2 = \gamma'$ con $\gamma, \gamma\prime \in \Gamma_\alpha$. Para evitar complejidad de cálculos y por no suponer ningún tipo de restricción supongamos que $b_1 = \frac{1}{2}\alpha$ y $b_2 = 0$. Entonces de acuerdo con el Lema 5.13 tenemos que $a_{11}a_{21} = (P,I)$ y $a_{12}a_{22} = (P,P)$, pero entonces por las leyes de multiplicación de paridades en el anillo $Z[\alpha]$ obtenemos las siguientes posibilidades:

$$a_{11}a_{21} = (P,I) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{11} = (I,I), \qquad a_{21} = (P,I) & (1) \\ \qquad ó & \\ a_{11} = (P,I), \qquad a_{21} = (I,I) & (2) \\ \qquad ó & \\ a_{11} = (P,I), \qquad a_{21} = (I,P) & (3) \\ \qquad ó & \\ a_{11} = (I,P), \qquad a_{21} = (P,I) & (4) \end{cases}$$

y

$$a_{12}a_{22} = (P,P) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{12} = a_{22} = (P,I) & (1) \\ \qquad ó & \\ a_{12} = (P,P) & (2) \\ \qquad ó & \\ a_{22} = (P,P) & (3) \end{cases}.$$

Por lo cual tenemos doce nuevos casos, que estarán determinados por las condiciones cruzadas $(i)(j)$. Esencialmente va haber dos tipos de casos y por lo tanto dos tipos de razonamientos.

Analicemos el caso en que tenemos $a_{11} = (I, I)$ y $a_{21} = (P, I)$ y $a_{12} = a_{22} = (P, I)$. Entonces si calculamos el determinante de A obtenemos por las leyes de las paridades para la suma y la multiplicación:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (I, I)(P, I) - (P, I)(P, I) = (P, I).$$

Una de las condiciones para que el isomorfismo del álgebra de Lie de H_3 esté asociado a un automorfismo de H_3 que induzca un isomorfismo en Γ es (Proposición 5.10) que $\Delta = \det A$ sea una unidad en Γ_α. Pero ahora por el Lema 5.11 tenemos que Δ ha de tener paridad tipo (I, I) o (I, P). Lo cual es una contradicción, por lo cual este caso no se puede dar.

Razonando de manera análoga en los casos (2)(1), (3)(1), (4)(1) obtenemos que estos casos tampoco son posibles.

En los casos (2)(2), (3)(2), (1)(3), (4)(3) hay un coeficiente de la matriz de A cuyo tipo de paridad desconocemos, pero probando con todos los tipos de paridades del anillo para ese coeficiente y volviendo a razonar con el determinante como en los casos anteriores obtenemos que estos casos no son posibles.

En los casos (1)(2) con $a_{22} = (P, I)$ ó $a_{22} = (P, P)$, (4)(2) con $a_{22} = (P, I)$ ó $a_{22} = (P, P)$, (2)(3) con $a_{12} = (P, I)$ ó $a_{12} = (P, P)$, (3)(3) con $a_{12} = (P, I)$ ó $a_{12} = (P, P)$ volviendo a razonar con el determinante como en los casos anteriores obtenemos que estos casos no son posibles.

Finalmente nos quedan los casos (1)(2) con $a_{22} = (I, I)$ ó $a_{22} = (I, P)$, (4)(2) con $a_{22} = (I, I)$ ó $a_{22} = (I, P)$, (2)(3) con $a_{12} = (I, I)$ ó $a_{12} = (I, P)$, (3)(3) con $a_{12} = (I, I)$ ó $a_{12} = (I, P)$ en los que Δ tiene el mismo tipo de paridad que una unidad, y de hecho es una unidad del anillo $Z[\alpha]$, pero entonces por comprobación directa de las condiciones de la Proposición 5.10 obtenemos que de hecho el isomorfismo del álgebra de Lie de H_3 asociado a (b_1, b_2) y A está inducido por un automorfismo de H_3 que induce un automorfismo en Γ.

Finalmente hemos obtenido que la diferencial $(d\varphi)_e$ del automorfismo de

H_3 tiene que tener una de las formas siguientes:

$$\begin{pmatrix} (P,I) & (I,I) \text{ ó } (I,P) & 0 \\ (I,I) \text{ ó } (I,P) & (P,P) & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} (I,I) \text{ ó } (I,P) & (P,P) & 0 \\ (P,I) & (I,I) \text{ ó } (I,P) & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix},$$

siendo $\det A = \Delta$ una unidad del anillo $Z[\sqrt{d}]$.

2. Supongamos ahora que $b_1 \in \Gamma_\alpha$ y $b_2 \in \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha$.

   Entonces mediante un razonamiento totalmente análogo al anterior llegamos a que la diferencial del automorfismo tiene que tener una de las formas siguientes:

$$\begin{pmatrix} (I,I) \text{ ó } (I,P) & (P,I) & 0 \\ (P,P) & (I,I) \text{ ó } (I,P) & 0 \\ \Gamma_\alpha & \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} (P,P) & (I,I) \text{ ó } (I,P) & 0 \\ (I,I) \text{ ó } (I,P) & (P,I) & 0 \\ \Gamma_\alpha & \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix},$$

siendo $\det A = \Delta$ una unidad del anillo $Z[\sqrt{d}]$.

3. Supongamos ahora que $b_1 \in \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha$ y que $b_2 \in \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha$.

   Entonces de acuerdo con el último Lema 5.13 tenemos que $a_{11}a_{21} = (P,I)$ y $a_{12}a_{22} = (P,I)$, pero entonces por las leyes de multiplicación de paridades en el anillo $Z[\alpha]$ obtenemos las siguientes posibilidades:

$$a_{11}a_{21} = (P,I) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{11} = (I,I), \qquad a_{21} = (P,I) & (1) \\ \quad \text{ó} & \\ a_{11} = (P,I), \qquad a_{21} = (I,I) & (2) \\ \quad \text{ó} & \\ a_{11} = (P,I), \qquad a_{21} = (I,P) & (3) \\ \quad \text{ó} & \\ a_{11} = (I,P), \qquad a_{21} = (P,I) & (4) \end{cases}$$

y

$$a_{12}a_{22} = (P, I) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{12} = (I, I), \qquad a_{22} = (P, I) & (1) \\ \quad ó \\ a_{12} = (P, I), \qquad a_{22} = (I, I) & (2) \\ \quad ó \\ a_{12} = (P, I), \qquad a_{22} = (I, P) & (3) \\ \quad ó \\ a_{12} = (I, P), \qquad a_{22} = (P, I) & (4) \end{cases}$$

Ahora hay que analizar 16 posibles casos. Pero razonando otra vez con la paridad de $\Delta = \det A$, que (Proposición 5.10) tiene que ser una unidad y con el tipo de paridad de una unidad que tiene que ser de tipo (I, I) o (I, P) por el Lema 5.11 volvemos a descartar la mayor parte de los casos, quedando otros casos que verificarán todas las condiciones de la Proposición 5.10 y por lo cual el automorfismo del álgebra de Lie de H_3 asociado a (b_1, b_2) y A estará inducido por un automorfismo de H_3 que induce un automorfismo en Γ.

Finalmente obtenemos que la diferencial $(d\varphi)_e$ del automorfismo de H_3 tiene que tener una de las formas siguientes:

$$\begin{pmatrix} (I, I) \text{ ó } (I, P) & (P, I) & 0 \\ (P, I) & (I, I) \text{ ó } (I, P) & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} (P, I) & (I, I) \text{ ó } (I, P) & 0 \\ (I, I) \text{ ó } (I, P) & (P, I) & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \frac{1}{2}\alpha + \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix},$$

siendo $\Delta = \det A$ una unidad del anillo $Z[\sqrt{d}]$.

4. Caso en el que $b_1, b_2 \in \Gamma_\alpha$. Entonces tenemos lo siguiente:

$$b_1 \in \Gamma_\alpha \Rightarrow a_{11}a_{21} = (P, P) \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{21} = (P, I) & (1) \\ \quad ó \\ a_{11} = (P, P) & (2) \\ \quad ó \\ a_{21} = (P, P) & (3) \end{cases}$$

y

$$b_2 \in \Gamma_\alpha \Rightarrow a_{12}a_{22} = (P,P) \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = a_{22} = (P,I) & (1) \\ \text{ó} & \\ a_{12} = (P,P) & (2) \\ \text{ó} & \\ a_{22} = (P,P) & (3) \end{cases}$$

Ahora tenemos 9 casos para analizar, pero volviendo a razonar de manera análoga con $\Delta = \det A$, el cual tiene que ser una unidad, y con el tipo de paridad de una unidad y Δ, concluimos que la diferencial en el neutro del automorfismo de Lie de H_3 que conserva Γ ha que tener una de las siguientes formas y de hecho verificará todas las condiciones de la Proposición 5.10:

$$\begin{pmatrix} (I,I) \text{ ó } (I,P) & (P,P) & 0 \\ (P,P) & (I,I) \text{ ó } (I,P) & 0 \\ \Gamma_\alpha & \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} (P,P) & (I,I) \text{ ó } (I,P) & 0 \\ (I,I) \text{ ó } (I,P) & (P,P) & 0 \\ \Gamma_\alpha & \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix},$$

siendo $\Delta = \det A$ una unidad del anillo $Z[\sqrt{d}]$.

Teniendo en cuenta que J denota los elementos que tienen paridad (I,I) ó (I,P), entonces un automorfismo de H_3 induce un automorfismo en Γ si y sólo si su diferencial en el neutro pertenece a uno de los tipos indicados en el enunciado del Teorema.

Q.E.D.

Observemos que en el enunciado del Teorema, la inversa de una matriz del tipo (1) es una del tipo (2), mientras que la inversa de una del tipo (3) ó (4) es una del tipo (3) ó (4) repectivamente.

5.3.2 Caso en el que d es impar.

Consideremos el anillo $Z[\sqrt{d}]$. Un elemento del anillo se puede pensar como un par de números enteros $a+b\sqrt{d} = (a,b) \in Z^2$. Entonces podemos hacer de nuevo una extensión de la paridad usual al anillo $Z[\sqrt{d}]$ como hicimos en 5.3.1.

Observemos de nuevo que vuelve haber cuatro tipo de paridades. Análogamente como antes volvemos a tener unas leyes para la suma y la multiplicación de elementos del anillo $Z[\sqrt{d}]$.

Para la suma tenemos:

	(I,I)	(P,I)	(I,P)	(P,P)
(I,I)	(P,P)	(I,P)	(P,I)	(I,I)
(P,I)	(I,P)	(P,P)	(I,I)	(P,I)
(I,P)	(P,I)	(I,I)	(P,P)	(I,P)
(P,P)	(I,I)	(P,I)	(I,P)	(P,P)

Para la multiplicación tenemos:

	(I,I)	(P,I)	(I,P)	(P,P)
(I,I)	(P,P)	(I,I)	(I,I)	(P,P)
(P,I)	(I,I)	(I,P)	(P,I)	(P,P)
(I,P)	(I,I)	(P,I)	(I,P)	(P,P)
(P,P)	(P,P)	(P,P)	(P,P)	(P,P)

.

Razonando análogamente a lo hecho antes, es decir, por paridades llegaríamos a los siguiente lemas y al siguiente teorema.

Lema 5.15 *Una unidad del anillo $Z[\sqrt{d}]$ ha de tener paridad (P,I) ó (I,P).*

Lema 5.16 *Si $b = (b_1, b_2) \subset R^2$ está asociado un automorfismo de H_3 que induce un automorfismo en Γ entonces:*

$$b_1, b_2 \in \Gamma_\alpha \coprod (\frac{1}{2}(1+\alpha) + \Gamma_\alpha),$$

donde el signo $\coprod$ significa unión disjunta.

De hecho tenemos

Lema 5.17 *Se verifica lo siguiente:*

1. $b_1 \in \Gamma_\alpha$ *si y sólo si* $\frac{1}{2}a_{11}a_{21} \in \Gamma_\alpha$.
2. $b_1 \in (\frac{1}{2}(1+\alpha) + \Gamma_\alpha)$ *si y sólo si* $\frac{1}{2}a_{11}a_{21} \in (\frac{1}{2}(1+\alpha) + \Gamma_\alpha)$.

Y análogamente para b_2:

1. $b_2 \in \Gamma_\alpha$ *si y sólo si* $\frac{1}{2}a_{12}a_{22} \in \Gamma_\alpha$.

2. $b_2 \in (\frac{1}{2}(1+\alpha)+\Gamma_\alpha)$ *si y sólo si* $\frac{1}{2}a_{12}a_{22} \in (\frac{1}{2}(1+\alpha)+\Gamma_\alpha)$.

Teorema 5.18 *Si denotamos por K los elementos que tienen paridad (P,I) ó (I,P), un automorfismo de H_3 induce un automorfismo en Γ si y sólo si su diferencial en el neutro pertenece a uno de lo siguientes tipos:*

1.

$$\begin{pmatrix} (I,I) & K & 0 \\ K & (P,P) & 0 \\ \frac{1}{2}(1+\alpha)+\Gamma_\alpha & \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} K & (P,P) & 0 \\ (I,I) & K & 0 \\ \frac{1}{2}(1+\alpha)+\Gamma_\alpha & \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} K & (I,I) & 0 \\ (P,P) & K & 0 \\ \Gamma_\alpha & \frac{1}{2}(1+\alpha)+\Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} (P,P) & K & 0 \\ K & (I,I) & 0 \\ \Gamma_\alpha & \frac{1}{2}(1+\alpha)+\Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} K & (I,I) & 0 \\ (I,I) & K & 0 \\ \frac{1}{2}(1+\alpha)+\Gamma_\alpha & \frac{1}{2}(1+\alpha)+\Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} (I,I) & K & 0 \\ K & (I,I) & 0 \\ \frac{1}{2}(1+\alpha)+\Gamma_\alpha & \frac{1}{2}(1+\alpha)+\Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}.$$

4.

$$\begin{pmatrix} K & (P,P) & 0 \\ (P,P) & K & 0 \\ \Gamma_\alpha & \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} (P,P) & K & 0 \\ K & (P,P) & 0 \\ \Gamma_\alpha & \Gamma_\alpha & \Delta \end{pmatrix}.$$

Siendo $\Delta = \det A$ *una unidad del anillo* $Z[\sqrt{d}]$.

Observemos que la inversa de una matriz del tipo (1) es una del tipo (2), mientras que la inversa de una del tipo (3) ó (4) es una del tipo (3) ó (4) repectivamente.

5.4 Estructura de los grupos $\mathrm{Aut}_\Gamma(H_3)$ y $\mathrm{Diff}(G/\Gamma)$.

Dado que el grupo de automorfismos de Lie de H_3 es isomorfo canónicamente al grupo de automorfismos del álgebra de Lie g de H_3, nos dedicaremos a ver la estructura del grupo $\mathrm{Aut}_\Gamma(H_3)$ pensándolo como el subgrupo de $\mathrm{Aut}(g)$ que hemos obtenido en el apartado anterior.

Ahora si consideramos las matrices $A_{2\times 2}$, las cuales son la primera caja de una matriz tres por tres que proviene de la diferencial en el neutro de un automorfismo de H_3 que induce un automorfismo en Γ, entonces forman un subgrupo H de $GL(2,\Gamma_\alpha)$, dado que si B y C son matrices asociadas a las diferenciales en el neutro de dos automorfismos de Heisenberg entonces $(BC)_{2\times 2} = B_{2\times 2}C_{2\times 2}$. Por ejemplo en el caso impar tenemos que el subgrupo H está generado por las matrices

$$F, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -(1+\alpha) \\ 1-\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix},$$

siendo

$$F = \{A = \begin{pmatrix} K & (P,P) \\ (P,P) & K \end{pmatrix} : A \in SL(2,\Gamma_\alpha)\},$$

y siendo u una unidad de Γ_α tal que $\{u, -1\}$ generen todas las unidades de Γ_α. Entonces tenemos que $\mathrm{Aut}_\Gamma(H_3)$ es isomorfo al grupo generado por las matrices

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(1+\alpha) & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -(1+\alpha) & 0 \\ 1-\alpha & \alpha^2 & 0 \\ \frac{1}{2}(1+\alpha) & \frac{1}{2}(1+\alpha) & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $H_1 = \{A \in H : \det A = 1\}$, el grupo generado por las matrices

$$F, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -(1+\alpha) \\ 1-\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces tenemos

Teorema 5.19 $\mathrm{Aut}_\Gamma(H_3)$ *se puede ver como un producto "muy torcido" de* $Z_2 \times Z$ *(el grupo de unidades de* Γ_α*),* H_1 *(un subgrupo de* $SL(2, \Gamma_\alpha)$*) y el grupo abeliano* $\Gamma^+ = (\Gamma_\alpha, \Gamma_\alpha)$*.*

De lo que deducimos:

Teorema 5.20 *El grupo* $\mathrm{Diff}(H_3/\Gamma)$ *es isomorfo al producto semidirecto de* H *y* $H_3/Z(\Gamma)$*, donde la acción de* H *sobre* $H_3/Z(\Gamma)$ *es la inducida por la acción de* $\mathrm{Aut}_\Gamma(H_3)$ *sobre* H_3*. Entonces* $\mathrm{Diff}(H_3/\Gamma)$ *es isomorfo a un producto "muy torcido" de* $Z_2 \times Z$*, el subgrupo* H_1 *y el grupo* $H_3/Z(\Gamma)$*.*

Demostración:

Sea $\overline{H}$ el subgrupo generado por las matrices

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(1+\alpha) & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -(1+\alpha) & 0 \\ 1-\alpha & \alpha^2 & 0 \\ \frac{1}{2}(1+\alpha) & \frac{1}{2}(1+\alpha) & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces por el Teorema 5.8 tenemos que

$$\mathrm{Diff}(G/\,\Gamma) \cong (\mathrm{Aut}_\Gamma(g)|_A \times H_3/\,Z(\Gamma))\,/\,\Gamma^+,$$

pero todo elemento de $\mathrm{Aut}_\Gamma(g)|_A \times H_3/\,Z(\Gamma)$ se puede representar por una terna

$$(A, \gamma^+, [g]) = (A_{\gamma^+}, [g]) \in \mathrm{Aut}_\Gamma(g)|_A \times H_3/\,Z(\Gamma),$$

con $A \in \overline{H}$, $[g] \in H_3/\,Z(\Gamma)$, $\gamma^+ \in \Gamma^+$, $A_{\gamma^+} = M_{\gamma_+}A$ siendo

$$M_{\gamma_+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma_1^+ & \gamma_2^+ & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora si tomamos un elemento arbitrario $(B, [h]) \in \mathrm{Aut}_\Gamma(g)|_A \times H_3/\,Z(\Gamma)$, al multiplicarlo a la izquierda por un $\gamma^+ \in \Gamma^+$ adecuado siempre podemos transformar la matriz B en una del grupo $\overline{H}$, debido a que la primera caja de orden 2 de B induce un automorfismo en el grupo abeliano $(\Gamma_\alpha, \Gamma_\alpha)$. Pero entonces es claro que $(B, [h])$ y $(C, [k])$ con $B, C \in \overline{H}$ y $[h], [k] \in H_3/\,Z(\Gamma)$ representarán el mismo elemento en el cociente si y sólo si $B = C$ y $[h] = [k]$. Por lo cual un conjunto de representantes del cociente es

$$R = \{(A, [g]) : A \in \overline{H} \text{ y } [g] \in H_3/\,Z(\Gamma)\}.$$

Y por lo cual $\mathrm{Diff}(G/\,\Gamma)$ es el producto semidirecto de $\overline{H}$ y $H_3/\,Z(\Gamma)$, pero como $\overline{H} \cong H$, y H era un "producto torcido" de H_1 y $Z_2 \times Z$ deducimos que $\mathrm{Diff}(G/\,\Gamma)$ es un "producto torcido" de H_1, $Z_2 \times Z$ y de $H_3/\,Z(\Gamma)$.

Q.E.D.

5.5 Caso en el que Γ_α es un subanillo con unidad.

Sea Γ_α un Z-módulo (de rango finito y mayor estricto que 1) de R el cual además es un subanillo con unidad de R. Entonces si consideramos el subgrupo denso y numerable del grupo de Heisenberg

$$\Gamma = \{(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3,) : \gamma_1, , \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma_\alpha\},$$

el cual es grupo por ser Γ_α grupo abeliano y anillo. Entonces volviendo hacer una extensión de la paridad usual de Z al anillo Γ_α haciendo razonamientos análogos a los hechos en 5.3 volveríamos a deducir unos teoremas de estructura análogos a los teoremas 5.19 y 5.20:

Teorema 5.21 *El subgrupo de automorfismos de* H_3 *que inducen automorfismos en* Γ *se puede ver como un producto "muy torcido" de* $Z_2 \times Z \times \cdots^r \times Z$ *(el grupo de unidades de* Γ_α *y* $r+1$ *menor o igual que el rango de* Γ_α*),* H_1 *(un subgrupo de* $SL(2,\Gamma_\alpha)$*) y el grupo abeliano* $(\Gamma_\alpha, \Gamma_\alpha)$*.*

Consecuentemente:

Teorema 5.22 *El grupo* $\mathrm{Diff}(H_3/\,\Gamma)$ *es isomorfo al producto semidirecto de* H *(siendo* H *un subgrupo de* $GL(2,\Gamma_\alpha)$*) y* $H_3/\,Z(\Gamma)$*. Entonces* $\mathrm{Diff}(H_3/\,\Gamma)$ *es isomorfo a un producto "muy torcido" de* $Z_2 \times Z \times \cdots^r \times Z$ *(*$r+1$ *menor o igual que el rango de* Γ_α*), un subgrupo* H_1 *de* $SL(2,\Gamma_\alpha)$ *y el grupo* $H_3/\,Z(\Gamma)$*.*

Análogamente tenemos el siguiente teorema de demostración análoga al Teorema 5.7.

Teorema 5.23 *Sean* Γ_α *y* Γ_β *dos anillos con unidad, finitamente generados y densos de* R*. Sean* $\Gamma = \{(x,y,z) \in R^3 \colon x,y,z \in \Gamma_\alpha\}$ *y* $\Gamma' = \{(x,y,z) \in R^3 \colon x,y,z \in \Gamma_\beta\}$ *sus respectivos subgrupos asociados densos y finitamente generados de* H_3*. Si* $H_3/\,\Gamma \cong H_3/\,\Gamma'$ *entonces* $\Gamma = \Gamma'$*.*

5.6 Nota final.

Otra manera de atacar el problema de la estructura del grupo $\mathrm{Diff}(M/\mathcal{F})$ en el caso de un grupo nilpotente H, pero que plantea esencialmente las mismas dificultades, es considerar la extensión central

$$Z(H) \to H \to H/Z(H) = H',$$

que induce la extensión central

$$Z(\Gamma) \to \Gamma \to \Gamma/Z(\Gamma) = \Gamma'.$$

Por densidad, $Z(\Gamma) = \Gamma \cap Z(H)$. Mediante una sección adecuada de conjuntos $s\colon H' \to H$ tal que $s(\Gamma') \subset \Gamma$, podemos descomponer H como un producto torcido $H' \times Z(H)$ con la operación inducida por una forma $\omega \in H^2(H', Z(H))$. Análogamente $\omega_{|\Gamma' \times \Gamma'} \in H^2(\Gamma', Z(\Gamma))$ nos dará un isomorfismo entre Γ y $\Gamma' \times Z(\Gamma)$.

Por tanto $\mathrm{Diff}(H/\,\Gamma)$ podrá descomponerse en una parte $\Delta \in \mathrm{Diff}(Z(H)/\,Z(\Gamma))$ (caso abeliano), otra parte $A \in \mathrm{Diff}(H'/\,\Gamma')$ (caso nilpotente con una longitud inferior de la serie central ascendente), y una aplicación $b\colon H \to Z(H)$ que haga compatibles A y Δ, más una nueva condición (asociada a b) para garantizar que el automorfismo determinado por A, Δ y b lleve Γ en Γ.

Sin embargo, las dificultades técnicas de esta aproximación son las mismas que las que hemos discutido.

Bibliografía

[1] Aparicio, V. *Teoría de los números.* Universidad del País Vasco, 1993.

[2] Caron, P. *Flots Transversalement de Lie*, Tesis. Univ. de Lille (1980).

[3] Donato, P.; Iglesias, P. Exemples de groupes difféologiques: flots irrationels sur le tore, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I Math. **301** No. 4 , p. 127–130 (1985).

[4] Fedida, E. *Feuilletages de Lie, feuilletages du plan*, Tesis. Univ. de Strasbourg (1973).

[5] Herrera Gómez, B. *Sobre la estructura transversa de las foliaciones de Lie*, Tesis. Univ. Autónoma de Barcelona (1994).

[6] Iglesias, P. Difféologie d'espace singulier et petits diviseurs, *C.R. Acad. Sci. Paris* Sér. I Math. **302**, p. 519–522 (1986).

[7] El Kacimi, A.; Tihami, A. *Cohomologie bigraduée de certains feuilletages*, Bull. Soc. Math. Bélgique, Fasc. 2, Vol. 38, p. 144–157 (1986).

[8] Lang, S. *Algebraic number theory*, Springer-Verlag, 1986.

[9] Macias, E.; Hector, G. Diffeological groups, *Recent Advances in Lie Theory, Research and Expositions in Mathematics*, vol. 25, p. 247–261 (2002).

[10] Macias-Virgós, E. Sous-groupes denses des groupes de Lie nilpotents, *Illinois Journal of Mathematics.*, vol. 35, No **4**, p. 607–617 (1991).

[11] Mac Lane, S. *Categories for the Working mathematician.* Springer-Verlag, 1971.

[12] Mal'cev, A.I. On a class of homogeneous spaces, *Transl. Amer. Math. Soc.*, Vol. 39, p. 276-307 (1951).

[13] Meigniez, G. Exemples de feuilletages de Lie resolubles, *Ann. Sci. Toulouse*, Sér. 6, Fasc. 4, Vol. IV, p. 801-817 (1995).

[14] Molino, P. *Riemannian foliations.* Birkhauser, 1988.

[15] Samuel, P. *Teoría algebraica de números.* Ediciones Omega, S.A., 1972.

[16] Souriau, J.M. Groupes différentiels, in Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Conf. Aix-en-Provence Salamanca, 1979), *Lecture Notes in Math. 836*, Springer(1980), 91-128.

[17] Stewart, I.; Tall , D. *Algebraic number theory.* Chapman and Hall, 1987.