

Algúns conceptos básicos de radiometría e fotometría

José Ramón Flores Seijas

Área de Óptica
Departamento de Física Aplicada
Facultade de Física

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>

© Universidade de Santiago de Compostela, 2013

Deseño e maquetación

J. M. Gairí

Edita

Edicións USC

<https://www.usc.gal/publicacions>

ISBN

<https://dx.doi.org/10.15304/9788415876601>

MATERIA: Dispositivos Optoelectrónicos

TITULACIÓN: Licenciatura de Física

PROGRAMA XERAL DO CURSO

Localización da presente unidade didáctica

BLOQUE I. BASES TEÓRICAS

Unidade I. Algúns conceptos básicos de radiometría e fotometría

Definicións radiométricas

O espectro óptico

Definicións fotométricas

Perfis de radiación común na optoelectrónica

Correntes de fotóns

Unidade II. Semicondutores

Conceptos básicos

Concentración de portadores

Xeración, recombinación e inxección

Xuncións p-n

Estruturas cuánticas

Unidade III. Materiais empregados en optoelectrónica

Tipos de semicondutores

Substratos

Materiais máis usados

Unidade IV. Interaccións entre fotóns e portadores

Emisión e absorción banda a banda

Razóns de absorción e emisión

BLOQUE II. FONTES OPTOELECTRÓNICAS

Unidade V. Diodos emisores de luz

Electroluminescencia por inxección

Características dun LED

Modulación dun LED

Estruturas e materiais

Aplicacións

Unidade VI. Díodos láser

- Que é un láser
- Amplificadores ópticos de semiconductor
- Cavidade resoante dun díodo láser
- Fluxo externo
- Amplificadores ópticos independentes
- Modulación temporal dun díodo láser
- Distribución espectral e espacial
- Materiais e estruturas típicas
- Láseres de pozo cuántico
- Matrices de díodos láser

BLOQUE III. FOTODETECTORES

Unidade VI. Bases

- Efecto fotoeléctrico
- Características comúns

Unidade VII. Dispositivos unitarios

- Fotocondutores ou fotorresistencias
- Fotodíodos
- Células fotovoltaicas
- Fotodíodos de avalancha
- Fototransistores

Unidade VIII. Ruído en fotodetectores

- Ruído fotoelectrónico
- Ruído de ganancia
- Ruído de circuíto
- Razón sinal-ruído

Unidade IX. Sensores de imaxe dixitais

- Sensores CCD
- Sensores CMOS
- CCD versus CMOS
- Sensores en cores

BLOQUE IV. MODULADORES ÓPTICOS

Unidade X. Moduladores ópticos de semiconductor

- Moduladores absortivos
- Moduladores refractivos

ÍNDICE

Presentación

Obxectivos

Metodoloxía

Avaliación

Contidos básicos

1. Definicións radiométricas
2. O espectro óptico
3. Definicións fotométricas
4. Eficacia luminosa
 - 4.1. Dunha radiación electromagnética
 - 4.2. Global
5. Perfís de radiación comúns na optoelectrónica
 - 5.1. Cálculo do fluxo a partir da intensidade
 - 5.2. A función de transferencia óptica, OTF
6. Correntes de fotóns
 - 6.1. Variación temporal do feixe de fotóns
 - 6.2. Estatística fotónica
 - 6.2.1. Luz coherente
 - 6.2.2. Clasificación da luz
 - 6.2.3. Luz super-poissoniana

Exercicios

Anexos

1. Sensibilidade espectral do ollo humano
2. Grandezas de interese

PRESENTACIÓN

Os optoelectrónicos son dispositivos de base electrónica que emiten, modulan ou detectan radiación óptica, i.e. radiación electromagnética ultravioleta, visíbel ou infravermella. A maior parte deste tipo de dispositivos están baseados en semicondutores inorgánicos, se ben é posíbel que nun futuro os semicondutores orgánicos pasen a desempeñar un papel máis importante.

Nesta unidade introdúcense unha serie de conceptos relacionados coa radiación electromagnética, imprescindíbeis para o estudo dos dispositivos optoelectrónicos, e que ou ben non foron estudados noutras materias da carreira de física, ou ben o foron desde unha perspectiva moi afastada da necesaria para o estudo destes dispositivos.

OBXECTIVOS

Os obxectivos que se pretenden cubrir nesta unidade didáctica son:

- fornecer os conceptos básicos da medida da radiación desde 3 perspectivas diferentes: ondulatoria, visual e cuántica, procurando pór en relación as ditas perspectivas;
- presentar e clasificar o espectro óptico;
- ver os modelos matemáticos máis sinxelos para a descrición xeométrica dos feixes emitidos por fontes optoelectrónicas, e
- presentar algúns conceptos necesarios para o estudo do ruído nas medidas de sinais luminosos.

METODOLOXÍA

A parte teórica correspondente a esta unidade desenvólvese en 5 horas, que permiten expor cunha certa comodidade os contidos teóricos correspondentes. Se ben o modelo usado é a lección maxistral, dado que o número de alumnos é reducido, e que a materia se imparte no último curso da licenciatura, a comunicación entre o profesor e o alumnado é bastante fluída, de maneira que as aulas sen chegar a ser un coloquio distan de ser meros monólogos.

A unidade consta tamén dun seminario de 2 horas, que ten lugar nunha sala de computadores, xa que os problemas propostos non se poden resolver con unha simple calculadora. Cada alumno debe resolver un problema individualmente, mais asesorado en todo momento polo profesor, cuxa principal tarefa é evitar que o uso de software numérico represente unha dificultade engadida na resolución do problema.

AVALIACIÓN

A avaliación de Dispositivos Optoelectrónicos realízase mediante:

- un exame escrito da parte teórica,
- os problemas resoltos no seminarios,
- e unha memoria de prácticas, individual.

A puntuación global calcúlase como a media ponderada da nota de teoría, 60%, de problemas, 20% e máis a de prácticas, 20% .

CONTIDOS BÁSICOS

Nesta unidade introdúcese unha serie de conceptos radiométricos e fotométricos, relacionándoos coa terminoloxía óptica. A radiometría é a ciencia que se ocupa da descrición e medida da radiación, e a súa interacción coa materia. Tanto da radiación electromagnética como doutros tipos de radiación: a radiación nuclear ou fluxos de partículas cargadas, aínda que normalmente se refira á radiación electromagnética. Por súa vez, a fotometría é a ciencia que se ocupa do estudo da detección da radiación electromagnética polo ollo humano.

1. Definicións radiométricas

Damos de seguido as definicións de conceptos básicos de radiometría, coas súas unidades e o concepto equivalente, se existir, na terminoloxía óptica.

- ENERXÍA RADIANTE, E_e , é a cantidade de enerxía que incide en, atravesa ou emerge de, unha superficie de área dada e nun período de tempo determinado. En principio inclúense todas as longuras de onda que contén a radiación, e se nalgún caso só se considera un intervalo limitado do espectro, este intervalo debe indicarse explicitamente. As unidades nas que se mide a enerxía radiante son loxicamente de enerxía, e nomeadamente o *Joule*. En óptica este concepto recibe o nome de *enerxía óptica*, e obviamente tamén se mide en *Joules*.
- ENERXÍA RADIANTE ESPECTRAL, E_λ , é a enerxía radiante correspondente ao intervalo diferencial de enerxía $[\lambda, \lambda + d\lambda]$:

$$E_\lambda = \left. \frac{dE_e}{d\lambda} \right|_\lambda \Rightarrow E_e = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda$$

As unidades nas que se mide a enerxía radiante espectral son de enerxía partido por longura de onda, usualmente *Joules/nm*. En vez da longura de onda pódese considerar a frecuencia, co cal:

$$E_\nu = \frac{dE_e}{d\nu}$$

que virá medida neste caso en *Joules/Hz*. Dada a relación entre a longura de onda e a frecuencia, $\lambda \nu = c$, non resulta difícil calcular a relación entre ambas grandezas e comprobar que as unidades son coherentes. Así nun intervalo de longuras de onda (λ_1, λ_2) , con $\lambda_1 < \lambda_2$, ao que lle corresponde o intervalo de frecuencias $(\nu_2 = c/\lambda_2, \nu_1 = c/\lambda_1)$, con $\nu_1 > \nu_2$, a enerxía radiante é:

$$E_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_\lambda(\lambda) d\lambda = \int_{\nu_2}^{\nu_1} E_\nu(\nu) d\nu.$$

A partir da igualdade $\lambda \nu = c$, faise o troco de variábel $\lambda = c/\nu$, de maneira que $d\lambda = -(c/\nu^2) d\nu$, co cal:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_\lambda(\lambda) d\lambda = \int_{\nu_1}^{\nu_2} E_\lambda(\nu) \left(-\frac{c}{\nu^2}\right) d\nu = \int_{\nu_2}^{\nu_1} E_\lambda(\nu) \frac{c}{\nu^2} d\nu = \int_{\nu_2}^{\nu_1} E_\nu(\nu) d\nu$$

Os integrandos das dúas últimas integrais deben ser iguais, de maneira que a relación procurada é:

$$\nu E_\nu = \lambda E_\lambda.$$

- FLUXO RADIANTE, P_e , é a razón temporal de fluxo da enerxía radiante, i.e. a cantidade de enerxía radiante que flúe ao través dunha superficie ou rexión do espazo por unidade de tempo:

$$P_e = \frac{dE_e}{dt}$$

Mídese en unidades de enerxía por unidade de tempo, nomeadamente $Watt = Joule/seg$. En óptica este concepto recibe o nome de *potencia óptica*, e loxicamente tamén se mide en *Watts*.

- FLUXO RADIANTE ESPECTRAL, P_λ , é o fluxo radiante por unidade de longura de onda a unha determinada longura de onda:

$$P_\lambda = \frac{dP_e}{d\lambda} = \frac{dE_\lambda}{dt}$$

sendo as unidades en que se mede de potencia por longura de onda, usualmente $Watt/nm$. Tamén neste caso podemos considerar a frecuencia obtendo $P_\nu = (dP_e/d\nu)$, sendo as unidades $Watt/Hz$, e $\nu P_\nu = \lambda P_\lambda$.

- IRRADIANCIA, I_e , é a densidade superficial de fluxo radiante, i.e. a cantidade de fluxo radiante que incide en, atravesa ou emerxe de, un punto dunha superficie determinada:

$$I_e = \frac{dP_e}{ds_o}$$

onde dP_e é un elemento diferencial de fluxo e ds_o é un elemento diferencial de área da superficie. A irradiancia que emerxe dunha superficie pode ser chamada "*exitancia*", M_e , tendo as mesmas unidades, reservándose entón o termo irradiancia para o fluxo incidente. En todo caso é perfectamente correcto usar irradiancia en todas as situacións. O termo óptico equivalente é *intensidade óptica*, que non debe ser confundida con o concepto radiométrico *intensidade radiante*, que veremos posteriormente. Tanto para a irradiancia, como para a exitancia e para a intensidade óptica úsanse unidades de potencia entre área: $Watt/m^2$ ou $Watt/cm^2$. A irradiancia é unha función da posición (x,y) na superficie na que está definida, polo que adoita escribirse $I_e(x,y)$.

- IRRADIANCIA ESPECTRAL, I_λ , é a irradiancia por unidade de longura de onda ou de frecuencia:

$$I_\lambda = \frac{dI_e}{d\lambda} = \frac{dP_\lambda}{ds_o}, \quad I_\nu = \frac{dI_e}{d\nu}, \quad \lambda I_\lambda = \nu I_\nu$$

medíndose ben en $Watt/m^2nm$ ben en $Watt/m^2Hz$.

- INTENSIDADE RADIANTE, A_e , é a densidade angular de fluxo radiante, i.e. o fluxo radiante por unidade de ángulo sólido que incide en, atravesa ou emerxe de, un punto no espazo e que se propaga nunha determinada dirección:

$$A_e = \frac{dP_e}{d\omega}$$

medíndose en $Watt/sr$. Este concepto é de utilidade para fontes puntuais, ou fontes moi pequenas comparada coa distancia do observador ou do detector á fonte, porén non é apropiado para fontes extensas. Ao ser a intensidade radiante unha función da dirección, adoitase escribir $A_e(\theta, \phi)$ para indicar a súa dependencia das coordenadas esféricas (θ, ϕ) que especifican unha dirección no espazo.

- INTENSIDADE RADIANTE ESPECTRAL, A_λ ou A_ν , é o fluxo radiante por unidade de ángulo sólido e por unidade de longura de onda, ou de frecuencia:

$$A_\lambda = \frac{dA_e}{d\lambda}, \quad A_\nu = \frac{dA_e}{d\nu}, \quad \lambda A_\lambda = \nu A_\nu$$

medíndose ben en $Watt/sr\,nm$, ben en $Watt/sr\,Hz$.

- RADIANCIA, L_e , é a densidade angular e superficial de fluxo radiante, i.e. o fluxo radiante por unidade de área proxectada e por unidade de ángulo sólido que incide, atravesa ou emerxe nunha dirección determinada dun punto específico dunha superficie dada:

$$L_e = \frac{d^2P}{d\omega\,ds} = \frac{d^2P}{d\omega\,ds_o \cos\theta}$$

onde $ds = ds_o \cos\theta$ é a área proxectada; a área da proxección da área elemental ds_o , na superficie que contén o punto no cal se define a radiancia, sobre un plano perpendicular á dirección de propagación. Sendo θ o ángulo que forman a normal á superficie que contén o punto no cal se define a radiancia e a dirección de propagación. Véxase a figura 1. As unidades nas que se mide a radiancia son $Watt/m^2sr$ ou similares.

- RADIANCIA ESPECTRAL, L_λ , é a densidade espectral de radiancia

$$L_\lambda = \frac{dL_e}{d\lambda} = \frac{d^3P_e}{d\omega\,ds_o \cos\theta\,d\lambda}, \quad L_\nu = \frac{dL_e}{d\nu}, \quad \lambda L_\lambda = \nu L_\nu$$

medíndose ben en $Watt/m^2sr\,nm$, ben en $Watt/m^2sr\,Hz$.

Na táboa 1 podemos ver uns exemplos de valores radiométricos asociados a diversas fontes luminosas.

2. O espectro óptico

A óptica estuda a parte do espectro electromagnético con longuras de onda entre 1 mn e 10 nm. Este intervalo abrangue non apenas a luz¹, mais tamén o infravermello e o ultravioleta.

Como se pode ver na figura 2, o espectro visíbel é continuo, e se ben son evidentes distintas cores nel, non hai límites claros. Mesmo os valores que se utilizan tradicionalmente como límites do visíbel, 380 e 770 nm, non se corresponden cos

¹Estritamente a luz é a radiación electromagnética á que é sensíbel o ollo humano, se ben as veces se fale de “luz negra” para referirse ao ultravioleta.

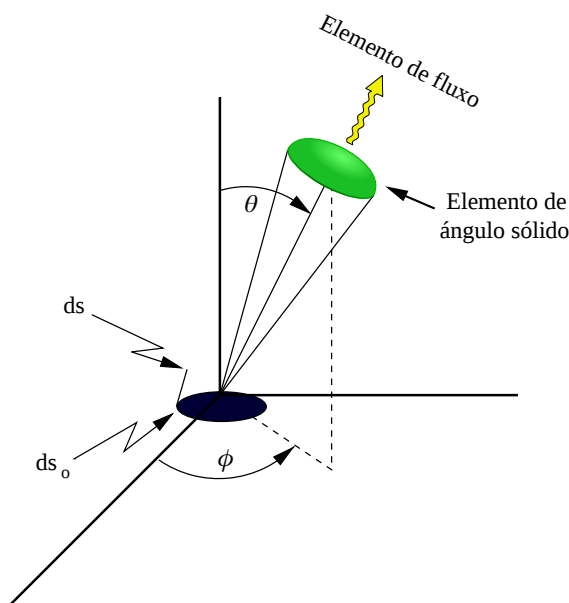


Figura 1: Radiancia

Táboa 1: Valores representativos de cantidades radiométricas (Valores orientativos).

Cantidade	Valor
Fluxo radiante total producido por unha lámpada incandescente de tungsteno de 100 W	80 W
Fluxo radiante total emitido por unha lámpada halóxena de 77 W	59 W
Fluxo radiante dunha lámpada fluorescente de 40 W	38 W
Fluxo radiante dun punteiro láser	0'5 - 5 mW
Intensidade radiante en eixo dos LEDs vermellos usados en instrumentación electrónica.	1 - 15 mW/sr
Irradiancia do Sol na órbita media da Terra	1.367 W/m ²
Irradiancia do Sol na superficie terrestre	600 - 900 W/m ²
Radiancia do Sol na súa superficie	2'3 10 ⁷ W/m ² sr



Figura 2: Espectro visíbel

coñecementos actuais sobre a sensibilidade do ollo humano, senón con datos obtidos anteriormente. Así hoxe en día considérase que o ollo humano é sensible a radiacións entre os 360 aos 830 nm, mais entre os 360 e os 380, e os 770 e os 830 a sensibilidade é moi baixa. Con todo é usual facer unha división en distintos subintervalos, i.e. en distintas cores espectrais. Esta división permite dar unha idea intuitiva do que se está a falar, mais é arbitraria, tanto polo número de subintervalos collidos como polos límites dos mesmo, e polo momento non se chegou a un consenso universal. O mesmo acontece no ultravioleta e no infravermello.

Na táboa 2 recóllese unha división do espectro óptico, non é a única posíbel, mais é bastante común, e as outras existentes non difiren moito desta. Así antigamente era común incluír nas cores espectrais o anil, 420 - 450 nm, entanto hoxe en día é relativamente usual incluír o ciano, 485 - 500 nm. Da mesma maneira hai tamén quen divida en catro o infravermello.

3. Definicións fotométricas

É posíbel considerar a fotometría como unha parte da radiometría, onde as grandezas radiantes vistas no apartado anterior son adaptadas tendo en conta o funcionamento do sistema visual humano. Os nosos ollos teñen distintas sensibilidade para as diferentes longuras de onda. Na figura 3 podemos ver a sensibilidade espectral fotópica² do ollo padrón, $V(\lambda)$. Evidentemente cada persoa vai ter unha sensibilidade diferente, mais raramente significativamente diferente³ da reflectida nesa gráfica. Por baixo dos 360 nm e por riba dos 830 nm o ollo humano non detecta en absoluto a radiación electromagnética. E dentro deste intervalo a resposta é moi desigual, tal como se mostra na dita figura, tendo un máximo nos 555 nm, que corresponde ao verde, e diminuíndo tanto cara o violeta como cara o vermello.

As funcións sensibilidade espectral fotópica e escotópica tabúlanse no primeiro anexo. Por outro lado, e para o cálculo das grandezas fotométricas⁴ pódese utilizar a seguinte aproximación da sensibilidade espectral fotópica:

$$V(\lambda) \approx \exp \left\{ - \left(\frac{\lambda - 555}{60} \right)^2 \right\}$$

No apartado anterior definimos unha serie de grandezas radiométricas, a partir delas defínense as grandezas fotométricas correspondentes do xeito seguinte.

²Enténdese por visión fotópica a visión diúrna.

³En ollos normais, i.e. que non sufran nin de daltonismo nin de acromatopsia.

⁴Non é recomendábel usar esta aproximación para obter a sensibilidade para unha determinada longura de onda. Nese caso úsese a táboa do anexo 1.

Táboa 2: División en subintervalos do espectro óptico

Ultravioleta	10 - 380 nm
UV - C	10 - 280 nm
UV - B	280 - 315 nm
UV - A	315 - 380 nm
Visíbel	380 - 770 nm
Violeta	380 - 440 nm
Azul	440 - 491 nm
Verde	491 - 565 nm
Amarelo	565 - 585 nm
Laranxa	585 - 625 nm
Vermello	625 - 770 nm
Infravermello	0'77 μm - 1 mm
Próximo	0'78 - 1'4 μm
Medio	1'4 - 3 μm
Lonxano	3 - 1000 μm

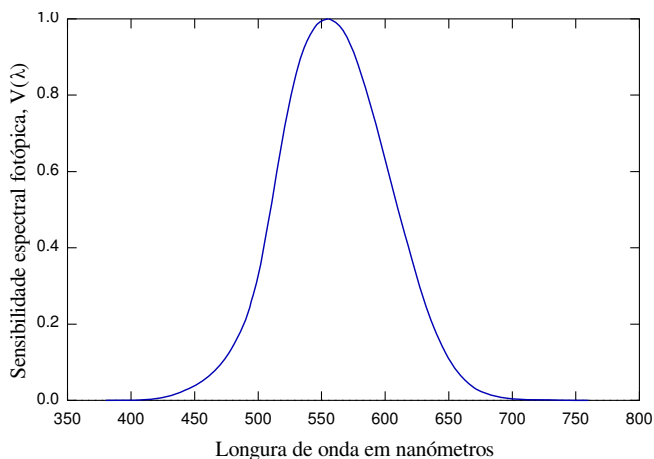


Figura 3: Sensibilidade espectral fotópica do olho padrón.

- FLUXO LUMINOSO, P_v . É o equivalente fotométrico do fluxo radiante. Integrando o fluxo radiante espectral para todas as posibles longuras de onda, obtense o fluxo radiante

$$P_e = \int_0^{\infty} P_{\lambda}(\lambda) d\lambda$$

Se ao integrar temos en conta a sensibilidade espectral do ollo obteremos o fluxo luminoso

$$P_v = 683 \int_{380}^{770} P_{\lambda}(\lambda) V(\lambda) d\lambda.$$

Utilízase o subíndice v (de visíbel ou visual) nas grandezas fotométricas para as diferenciar das radiométricas, as que se lles engade o subíndice e (de enerxía). En caso de que non haxa ambigüidade pódese omitir o subíndice. Os límites de integración deixan fora de consideración as radiacións entre 360 e 380 nm e entre 770 e 830 nm, porén como se ve na figura 3 nesa rexións a sensibilidade do ollo é practicamente nula⁵. O factor multiplicativo 683 engadiuse para facer cadrar as unidades fotométricas e radiométricas anteriores a esta definición; as unidades radiométricas, como xa vimos poden derivarse todas do metro o quilogramo e o segundo, entanto que as unidades fotométricas inclúen ademais a candela⁶, que é unha das unidades fundamentais do Sistema Internacional, e específica da fotometría. A dimensión do fluxo luminoso é [J], medíndose en lumens, sendo un lumen (o equivalente a un watt de luz) igual a 1 candela x 1 esferorradiano. (1 lm = 1 cd x 1 sr).

- ILUMINANCIA, I_v , é o equivalente fotométrico da irradiancia, estando definida por:

$$I_v = 683 \int_{380}^{770} I_{\lambda}(\lambda) V(\lambda) d\lambda$$

Esta grandezza expresa o fluxo luminoso por unidade de superficie que incide en, atravesa o emerxe de, unha superficie, medíndose en luxes, con 1 lux = 1 lm/m². A maioría dos fotómetros miden iluminancia dando as medidas en luxes.

- INTENSIDADE LUMINOSA, A_v , é o equivalente fotométrico da intensidade radiante, estando definida por:

$$A_v = 683 \int_{380}^{770} A_{\lambda}(\lambda) V(\lambda) d\lambda$$

Esta grandezza expresa o fluxo luminoso que emana dun punto por unidade de ángulo sólido nunha dirección dada, sendo a súa dimensión [J], e medíndose

⁵A razón para esta discrepancia ven de que no momento de definir as unidades fotométricas considerábase que os límites da sensibilidade do ollo eran xustamente 380 e 770 nm.

⁶CANDELA é a intensidade luminosa, nunha dirección dada, dunha fonte que emite radiación monocromática de frecuencia $5'4 \cdot 10^{14}$ Hz (~555 nm), e que ten unha intensidade radiante nesa dirección de $\frac{1}{683} \frac{W}{sr}$. Antigamente definíase como a intensidade luminosa, na dirección perpendicular, dunha superficie plana de área $\frac{5}{3} mm^2$ parte dun radiador perfecto (corpo negro) á temperatura de solidificación da platina a 1 atm de presión (101325 Pascals).

Táboa 3: Valores representativos de cantidades fotométricas (Valores orientativos)

Cantidade	Valor
Fluxo luminoso total producido por unha lámpada incandescente de tungsteno de 100 W	1250 - 1600 lm
Fluxo luminoso dunha lámpada fluorescente de 40 W	3000 - 3400 lm
Fluxo luminoso dun punteiro láser vermello	0'05 - 0'5 lm
Fluxo luminoso dun punteiro láser verde	0'3 - 3 lm
Iluminancia dun proxector de cinema sobre unha tela	10^2 lx
Iluminancia do Sol na superficie da Terra, con ceo despexado.	10^5 lx
Intensidade luminosa en eixo dos LEDs vermellos usados en instrumentación electrónica.	0'2 - 2 cd
Luminancia da chama dunha vela	10^4 cd/m ²
Luminancia do ceo despexado	$8 \cdot 10^3$ cd/m ²
Luminancia do ceo cuberto	$2 \cdot 10^3$ cd/m ²
Luminancia dun tubo fluorescente de 40 W	10^4 cd/m ²
Luminancia dun monitor LCD	200 - 300 cd/m ²
Luminancia dunha TV LCD	500 cd/m ²

en candelas, con 1 candela = 1 lm/sr. Aínda que como xa dixemos antes é a candela e non o lumen a unidade fundamental do Sistema Internacional.

- LUMINANCIA, L_v , é o equivalente fotométrico da radiancia, vendo definida por:

$$L_v = 683 \int_{380}^{770} L_\lambda(\lambda) V(\lambda) d\lambda$$

A luminancia é a cantidade de fluxo que pasa ao través dun punto nunha determinada superficie e nunha determinada dirección, por unidade de área proxectada no punto da superficie e por unidade de ángulo sólido na dirección dada.

As dimensións da luminancia son $[L^{-2}J]$ medíndose en cd/m² ou en lm/m²sr.

Na táboa 3 podemos ver uns exemplos de valores fotométricos asociados á diversas fontes luminosas.

4. Eficacia luminosa

4.1. Dunha radiación electromagnética

A eficacia luminosa da radiación, K_r , é unha medida da efectividade dun feixe de radiación estimulando a percepción de luz no ollo humano. Se Q_v é algunha das catro grandezas fotométricas definidas anteriormente, e Q_e é a grandeza radiométrica correspondente, entón a eficacia luminosa de radiación é:

$$K_r = \frac{Q_v}{Q_e}$$

Táboa 4: Eficacia luminosa de radiación dalgunhas fontes de luz (Valores orientativos)

Radiación	Eficacia luminosa
Luz monocromática de 555 nm	683 lm/W
Luz do Sol directa, no mediodía	90 - 120 lm/W
Luz do Sol directa, no solpor	50 - 90 lm/W
Luz do ceo cuberto	103 - 115 lm/W
Luz dun LED branco	266 lm/W
Luz dun LED verde	450 lm/W
Luz dun LED vermello	110 lm/W

con unidades de lm/Watt. Así por exemplo considerando o fluxo luminoso e o fluxo radiante:

$$K_r = \frac{P_v}{P_e} = 683 \frac{\int_{380}^{770} P_\lambda(\lambda) V(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty P_\lambda(\lambda) d\lambda} \text{ (lm/Watt)}.$$

Na táboa 4 podemos ver a eficacia luminosa de radiación de diversas fontes luminosas. Evidentemente para radiacións monocromáticas a eficacia luminosa de radiación é simplemente:

$$K_\lambda = 683 V(\lambda) \text{ lm/Watt}.$$

4.2. Global

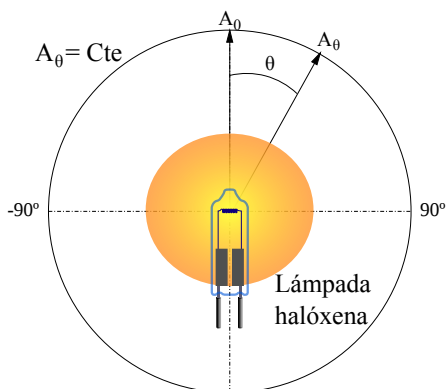
A eficacia luminosa global dunha fonte de luz é o cociente do fluxo luminoso emitido pola fonte entre a potencia eléctrica consumida pola mesma. Evidentemente esta eficacia é igual a eficiencia da fonte, i.e. o cociente do fluxo radiante emitido entre a potencia eléctrica consumida, pola eficacia luminosa deste fluxo radiante, de maneira que a eficacia luminosa da fonte é sempre menor que a eficacia luminosa da radiación.

5. Perfís de radiación comúns na optoelectrónica

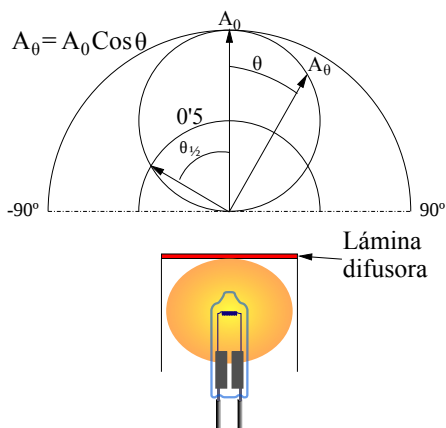
Na figura 4 podemos ver tres perfís de radiación abondo comúns, que teñen a vantaxe de estaren descritos matematicamente por unha fórmula sinxela.

Táboa 5: Eficacia luminosa global dalgunhas lámpadas (Valores orientativos)

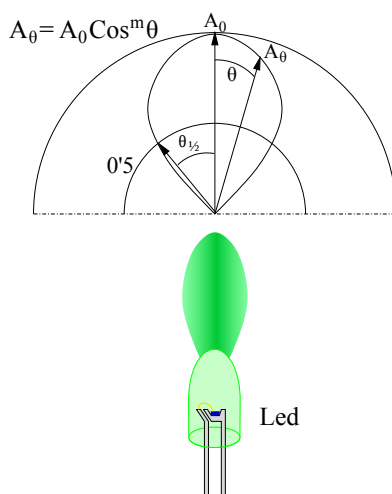
Fonte luminosa	Eficacia luminosa global
Lámpada incandescente de tungsteno	9 - 18 lm/W
Lámpada halóxena	17 - 22 lm/W
Tubo fluorescente	80 - 95 lm/W
Lámpada fluorescente compacta	45 - 60 lm/W
Lámpada de LEDs brancos	40 - 70 lm/W
Lámpara de descarga	90 - 150 lm/W



a) Fonte pontual



b) Fonte lambertiana



c) Fonte labertiana xeral

Figura 4: Perfís de radiación típicos

- FONTE PUNTUAL. É un tipo de fonte moi común. Así as fontes que constan dun filamento pequeno dentro dunha cuberta transparente pódense considerar a moitos efectos fontes puntuais. A fonte puntual radia coa mesma intensidade, radiante ou luminosa, en todas as direccións:

$$A_{\theta} = A_0 = cte$$

sendo A_{θ} a intensidade na dirección definida polo ángulo θ , e A_0 a intensidade na dirección do eixo de simetría.

- FONTE LAMBERTIANA. O segundo tipo de fonte que aparece na figura 4 recibe o nome de fonte lambertiana, en honor de Johann Lambert⁷. Neste caso o perfil de radiación é cosenoidal:

$$A_{\theta} = A_0 \cos \theta.$$

Este tipo de perfil xérase cando a luz, procedente dunha fonte puntual, pasa por unha lámina difusora, ou ben se reflicte nunha superficie rugosa. Comparando este tipo de fonte coa anterior, vemos que o espallamento da radiación é menor, xa que toda a enerxía é radiada para ángulos entre 0 e 90 graos. A direccionalidade (ou estreiteza) dun padrón de radiación é unha característica chave do dito padrón. E para medir esta característica emprégase o ángulo metade, $\theta_{\frac{1}{2}}$, que non é máis que o ángulo para o cal a intensidade é o 50% da máxima, usualmente correspondente á intensidade no eixo de simetría. Evidentemente canto menor sexa o ángulo metade máis estreito e direccional será o padrón de radiación. No caso dunha fonte lambertiana o ángulo metade é:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 \cos \theta_{\frac{1}{2}} \Rightarrow \theta_{\frac{1}{2}} = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$$

- FONTE LAMBERTIANA XERAL. Son fontes cuxo padrón de radiación ven dado por:

$$A_{\theta} = A_0 \cos^m \theta$$

sendo m un número real, representado na figura 4(c). Os LEDs son os exemplos máis coñecidos deste tipo de fontes. Neste caso o ángulo metade é:

$$\theta_{\frac{1}{2}} = \arccos \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{1/m} \right] \Rightarrow \left(m = \left| \frac{\ln 2}{\ln [\cos \theta_{1/2}]} \right| \right)$$

5.1. Cálculo do fluxo a partir da intensidade

A medida do fluxo non é usualmente unha tarefa doada. Porén a medida da intensidade é moito máis sinxela. Por isto resulta usual que nas follas de dados da maioría das fontes optoelectrónicas aparezan recollidas especificacións de intensidade, e non de fluxo. Agora ben, normalmente obter o fluxo emitido por unha fonte

⁷Matemático e cartógrafo Alsaciano coñecido principalmente por ser o inventor da proxección cónica conformal que se usa en cartografía

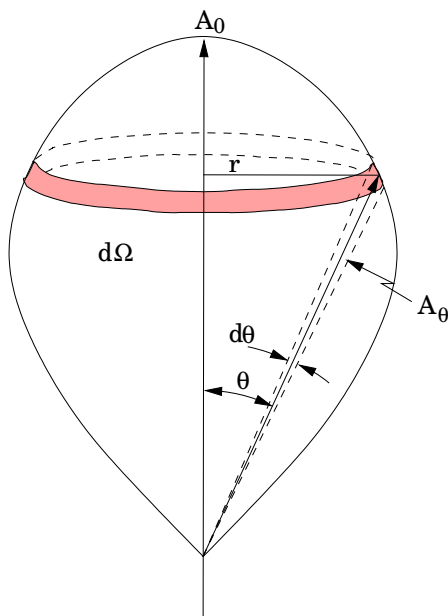


Figura 5: Padrón de radiación

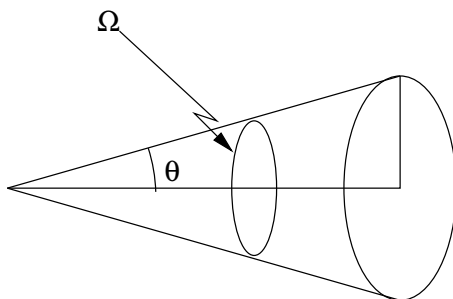
a partir do seu perfil de intensidade non resulta complicado, sobre todo cando o padrón de radiación ten simetría rotacional. Para isto non temos máis que integrar a intensidade.

Dada a simetría do perfil de radiación, véxase a figura 5, podemos considerar elementos de ángulo sólido anulares. (Ou sexa o ángulo sólido que encerra o anel sombreado da figura). O ángulo sólido correspondente a un cono de semiángulo θ , véxase a figura 6 é igual a:

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

e por tanto

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta .$$

Figura 6: Ángulo sólido correspondente a un cono de semiángulo θ .

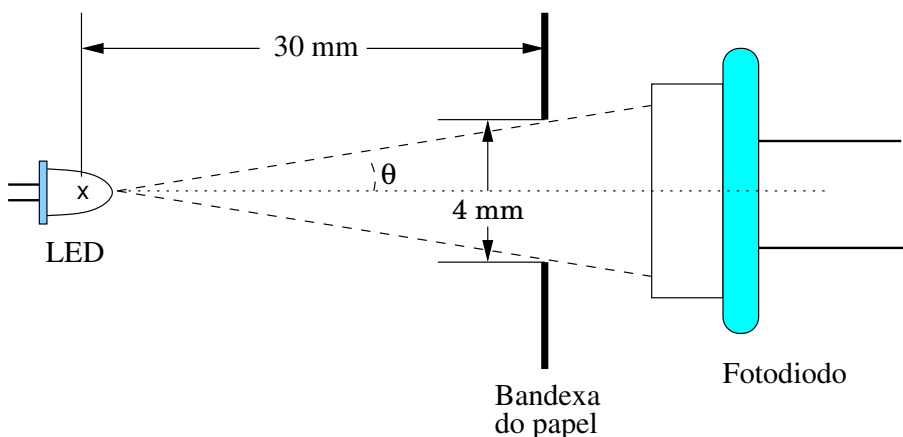


Figura 7: Esquema dun detector de papel dunha impresora

En cada elemento anular de ángulo sólido o fluxo elemental é:

$$dP = A_{\theta} d\Omega = 2\pi A_{\theta} \sin \theta d\theta ,$$

de xeito que o fluxo total para un ángulo θ será:

$$P_{\theta} = \int_0^{\theta} 2\pi A_{\theta} \sin \theta d\theta = 2\pi \int_0^{\theta} A_{\theta} \sin \theta d\theta .$$

Así para unha fonte lambertiana xeral o fluxo vén dado por tanto por:

$$P_{\theta} = 2\pi A_0 \int_0^{\theta} \cos^m \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\pi A_0}{m+1} (1 - \cos^{m+1} \theta) ,$$

e para obter os fluxos dunha fonte lambertiana e o dunha fonte puntual, non hai máis que substituír os valores correspondentes $m = 1$ e $m = 0$.

O fluxo total emitido pola fonte áchase substituíndo θ polo ángulo máximo, que en xeral é 90° , e por tanto:

$$P_{90} = \frac{2\pi A_0}{m+1} ,$$

excepto para fonte puntual, na cal o ángulo máximo é 180° , de maneira que neste caso $P_{180} = 4\pi A_0$.

Exemplo 1 Detector de papel nunha impresora

Na figura 7 tense un esquema dun detector de papel nunha impresora, que consta esencialmente dun LED de infravermello e dun fotodiodo. Se o LED ten un perfil de intensidade $A_{\theta} = A_0 \cos^5 \theta$, e unha intensidade radiante máxima $A_0 = 1'5 \text{ mW/sr}$, cal é o fluxo total emitido polo LED, e cal é o fluxo que atinxe o fotodiodo?

O fluxo emitido por un LED é $P_{\theta} = \frac{2\pi A_0}{m+1} (1 - \cos^{m+1} \theta)$. O fluxo total é o correspondente a $\theta = 90^\circ$, e para $m = 5$ e $A_0 = 1'5 \text{ mW/sr}$

$$P_{total} = \frac{2\pi 1'5 10^{-3}}{6} = 1'57 10^{-3} \text{ W} = 1'57 \mu\text{W} .$$

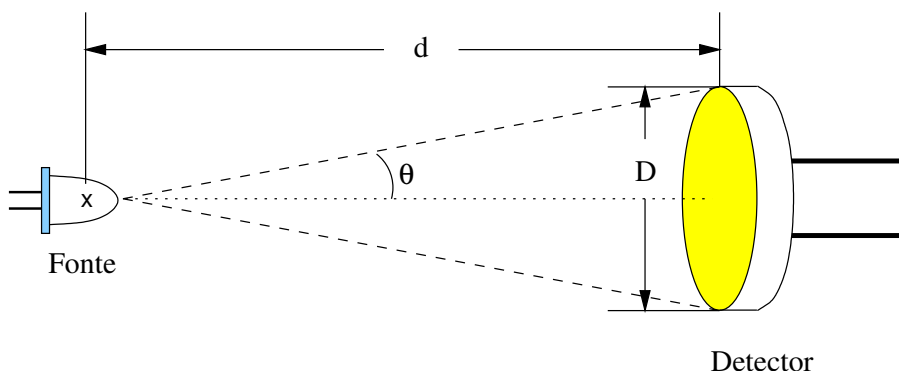


Figura 8: Fonte e detector enfrentados.

O fluxo que atinge o fotodíodo correspóndese, a vista da figura 7, co ángulo

$$\theta = \arctan \frac{4/2}{30} = \arctan\left(\frac{1}{15}\right) = 3^\circ 48' 51'',$$

co cal o fluxo que se pasa polo buraco da cinta e chega ao fotodíodo é:

$$P_\theta = \frac{2\pi \cdot 1'5 \cdot 10^{-3}}{6} [1 - \cos^6(3'81)] = 2'08 \cdot 10^{-5} W = 20'8 \mu W.$$

5.2. A función de transferencia óptica, OTF

Unha das principais cuestións que deben ser tidas en conta no deseño dun sistema optoelectrónico é o controlo do fluxo, i.e. como dirixilo da fonte ao detector do xeito máis eficiente. Na maioría dos casos deséxase que ao detector chegue a maior parte do fluxo posíbel. A función de transferencia óptica, OTF, expresa a eficiencia de acoplamento, definíndose como o cociente do fluxo que atinge a rexión sensíbel do detector entre o fluxo total emitido pola fonte:

$$OTF = \frac{P_d}{P_f}$$

sendo P_d o fluxo que chega ao detector en Watt ou lm, e P_f o fluxo total emitido pola fonte en Watt ou lm.

A OTF é por tanto unha grandeza adimensional que pode tomar valores entre 0 e 1. O cero significa que ao detector non chega nada do fluxo emitido pola fonte, encanto que o un correspóndese ao caso en que todo o fluxo emitido atinge o detector.

Exemplo 2 Fonte lambertiana xeral.

Cando a fonte e o receptor están enfrentados, tal e con se ve na figura 8, pódese calcular facilmente a OTF.

— Fonte lambertiana

$$OTF = \frac{\pi A_0 \sin^2 \theta}{\pi A_0} = \sin^2 \theta$$

A miúdo emprégase a abertura numérica do receptor, $NA = \sin \theta$, con o cal $OTF = NA^2$.

— Fonte lambertiana xeral. Neste caso:

$$OTF = \frac{\frac{2\pi A_0}{n+1} (1 - \cos^{n+1} \theta)}{\frac{2\pi A_0}{n+1}} = (1 - \cos^{n+1} \theta)$$

Téñase en conta que no caso da figura

$$\theta = \arctan \frac{D/2}{d} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin \theta = D/\sqrt{4d^2 + D^2} \\ \cos \theta = 2d/\sqrt{4d^2 + D^2} \end{cases}$$

6. Correntes de fotóns

Para estudarmos boa parte dos dispositivos que aparecen nos temas vindeiros cómpre considerarmos a natureza cuántica da radiación electromagnética. Isto é, que a dita radiación pode ser considerada como composta por cuantos de enerxía propagándose coa mesma velocidade e dirección. Cada cuanto de radiación, chamado fotón, ten asociada unha frecuencia ν e unha enerxía e_ν

$$e_\nu = h \nu$$

onde $h = 6'63 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ é a constante de Planck. Tendo en conta que $c = \lambda \cdot \nu$, podemos escribir a enerxía do fotón en función da súa longura de onda

$$e_\lambda = \frac{h c}{\lambda}.$$

Esta ecuación dá a enerxía dun fotón en joules, mais en moitas ocasións resulta máis conveniente expresar a enerxía do fotón en electrón-volts. O denominador da expresión anterior é igual a

$$h \cdot c = 1'987624 \cdot 10^{-25} J \cdot m$$

e tendo en conta que $1 eV = 1'60219 \cdot 10^{-19} J$

$$h \cdot c = 1'24 eV \cdot \mu m.$$

Logo

$$e_\lambda (eV) = \frac{1'24}{\lambda(\mu m)}.$$

A continuación imos ver unha serie de conceptos que caracterizan unha corrente de fotóns, e a relación destes cos conceptos radiométricos vistos na sección 1.

- NÚMERO DE FOTÓNS, N_{ph} , é o número de fotóns emitidos por unha fonte, ou que inciden, atravesan ou emerxen dunha superficie dada nun intervalo de tempo determinado. Incluíndose todos os fotóns de todas as longuras de onda contidas no feixe de radiación. Se chamamos N_{ph}^ν ao número de fotóns no

intervalo $[\nu, \nu + d\nu]$, entón a enerxía radiante espectral correspondente a ese intervalo será igual ao número de fotóns, N_{ph}^ν , pola enerxía de cada fotón, $h\nu$:

$$E_\nu = N_{ph}^\nu e_\nu = N_{ph}^\nu h\nu$$

e por tanto

$$N_{ph}^\nu = \frac{E_\nu}{h\nu}.$$

Analogamente se N_{ph}^λ é o número de fotóns no intervalo $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, entón:

$$E_\lambda = N_{ph}^\lambda \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad N_{ph}^\lambda = \frac{\lambda E_\lambda}{hc}.$$

O número de fotóns é por tanto

$$N_{ph} = \int N_{ph}^\lambda d\lambda = \int \frac{\lambda E_\lambda}{hc} d\lambda,$$

ou considerando as frecuencias:

$$N_{ph} = \int N_{ph}^\nu d\nu = \int \frac{E_\nu}{h\nu} d\nu.$$

O número de fotóns N_{ph} , é unha grandeza adimensional, medíndose na pseudo-unidade q ($\equiv$ nº de fotóns), encanto N_{ph}^ν ten por dimensións [T], medíndose en q/Hz , e N_{ph}^λ ten por dimensións [L^{-1}], medíndose en q/nm . Nunha radiación cuasemonocromática de frecuencia central $\bar{\nu}$ o número de fotóns ven dado por

$$\overline{N_{ph}} = \frac{E}{h\bar{\nu}} = \frac{\bar{\lambda} E}{hc}.$$

- FLUXO FOTÓNICO, ϕ_{ph} , é o número de fotóns que flúen ao través dunha superficie ou rexión do espazo por unidade de tempo

$$\phi_{ph} = \frac{dN_{ph}}{dt}.$$

Incluíndose neste fluxo todos os fotóns de todas as longuras de onda contidas no feixe de radiación. Considerando unicamente o fluxo dos fotóns de longuras de onda no intervalo $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ temos o fluxo fotónico espectral, ϕ_{ph}^λ , que está relacionado directamente co fluxo radiante espectral:

$$P_\lambda = \phi_{ph}^\lambda \frac{hc}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \phi_{ph}^\lambda = \frac{\lambda P_\lambda}{hc} \quad \Rightarrow \quad \phi_{ph} = \int \frac{\lambda P_\lambda}{hc} d\lambda.$$

Analogamente

$$P_\nu = \phi_{ph}^\nu h\nu \quad \Rightarrow \quad \phi_{ph}^\nu = \frac{P_\nu}{h\nu} \quad \Rightarrow \quad \phi_{ph} = \int \frac{P_\nu}{h\nu} d\nu.$$

O fluxo fotónico ten dimensións de $[T^{-1}]$ medíndose en q/s , encanto ϕ_{ph}^ν é adimensional medíndose en $q/s\ Hz$, e ϕ_{ph}^λ ten dimensións de $[L^{-1}T^{-1}]$ medíndose en $q/s\ nm$. Nunha radiación cuasemonocromática e frecuencia central $\bar{\nu}$ o fluxo fotónico vén dado por:

$$\overline{\phi_{ph}} = \frac{P}{h\bar{\nu}} = \frac{\bar{\lambda}P}{h\ c}.$$

— IRRADIANCIA FOTÓNICA, I_{ph} , é a densidade superficial de fluxo fotónico:

$$I_{ph} = \frac{d\phi_{ph}}{ds_o}.$$

Evidentemente tamén neste caso se poden definir as correspondentes grandezas espectrais

$$I_{ph}^\lambda = \frac{\lambda I_\lambda}{h\ c} \quad I_{ph}^\nu = \frac{I_\nu}{h\ \nu} \quad I_{ph} = \int \frac{\lambda I_\lambda}{h\ c} d\lambda = \int \frac{I_\nu}{h\ \nu} d\nu$$

A irradiancia fotónica ten dimensións de $[L^{-2}T^{-1}]$ medíndose en $q/s\ m^2$, encanto I_{ph}^ν ten dimensións de $[L^{-2}]$ medíndose en $q/s\ m^2\ Hz$, e I_{ph}^λ ten dimensións de $[L^{-3}T^{-1}]$ medíndose en $q/s\ m^2\ nm$. Nunha radiación cuasemonocromática de frecuencia central $\bar{\nu}$ a irradiancia fotónica vén dada por:

$$\overline{I_{ph}} = \frac{I_e}{h\bar{\nu}} = \frac{\bar{\lambda}I_e}{h\ c}.$$

— INTENSIDADE FOTÓNICA, A_{ph} , é densidade angular de fluxo fotónico:

$$A_{ph} = \frac{d\phi_{ph}}{d\omega}.$$

Evidentemente tamén neste caso se poden definir as correspondentes grandezas espectrais

$$A_{ph}^\lambda = \frac{\lambda A_\lambda}{h\ c} \quad A_{ph}^\nu = \frac{A_\nu}{h\ \nu} \quad A_{ph} = \int \frac{\lambda A_\lambda}{h\ c} d\lambda = \int \frac{A_\nu}{h\ \nu} d\nu$$

A intensidade fotónica ten dimensións de $[T^{-1}]$ medíndose en $q/s\ sr$, encanto A_{ph}^ν é adimensional medíndose en $q/s\ sr\ Hz$, e A_{ph}^λ ten dimensións de $[L^{-1}T^{-1}]$ medíndose en $q/s\ sr\ nm$. Nunha radiación cuasemonocromática e frecuencia central $\bar{\nu}$ a intensidade fotónica vén dada por:

$$\overline{A_{ph}} = \frac{A_e}{h\bar{\nu}} = \frac{\bar{\lambda}A_e}{h\ c}.$$

— RADIANCIA FOTÓNICA, L_{ph} , é densidade angular e superficial de fluxo fotónico:

$$L_{ph} = \frac{d^2\phi_p}{d\omega\ ds}.$$

Tamén neste caso se poden definir as correspondentes grandezas espectrais

$$L_{ph}^{\lambda} = \frac{\lambda L_{\lambda}}{h c} \quad L_{ph}^{\nu} = \frac{L_{\nu}}{h \nu} \quad L_{ph} = \int \frac{\lambda L_{\lambda}}{h c} d\lambda = \int \frac{L_{\nu}}{h \nu} d\nu$$

A radiancia fotónica ten dimensións de $[L^{-2}T^{-1}]$ medíndose en $q/s m^2 sr$, encanto L_p^{ν} ten dimensións de $[L^{-2}]$ medíndose en $q/s m^2 sr Hz$, e L_p^{λ} ten dimensións de $[L^{-3}T^{-1}]$ medíndose en $q/s m^2 sr nm$. Nunha radiación cuasemonocromática e frecuencia central $\bar{\nu}$ a radiancia fotónica ven dada por:

$$\overline{L_{ph}} = \frac{L_e}{h \bar{\nu}} = \frac{\bar{\lambda} L_e}{h c}.$$

Exemplo 3 Fotóns por segundo nun lumen.

Cantos fotóns por segundo ten 1 lm de radiación monocromática con longura de onda:

1. $\lambda = 465 \text{ nm}$ (Azul)
2. $\lambda = 545 \text{ nm}$ (Verde)
3. $\lambda = 610 \text{ nm}$ (Vermello)

$$\phi_{ph} = \frac{P_e \lambda}{h c} = \frac{P_v \lambda}{K_{\lambda} h c} = \frac{P_v \lambda}{h c K_{\lambda}}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_v = 1 \text{ lm} \\ h c = 1'24 \text{ eV} \cdot \mu\text{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{P_v}{h c} = \frac{1 \text{ lm}}{1'24 \text{ eV} \cdot \mu\text{m}} = 0'806 \frac{\text{lm}}{\text{eV} \cdot \mu\text{m}}$$

$$1 \text{ W} = 6'24145 \cdot 10^{18} \frac{\text{eV}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{P_v}{h c} = 0'806 \frac{\text{lm}}{\text{eV} \cdot \mu\text{m}} \cdot 6'24145 \cdot 10^{18} \frac{\text{eV}}{\text{W s}} = 5'03 \cdot 10^{18} \frac{\text{lm}}{\text{W} \mu\text{m s}}$$

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} \lambda = 465 \text{ nm} = 0'465 \mu\text{m} \\ K_{\lambda} = 683 \cdot 0'0739 = 50'47 \text{ lm/W} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\lambda}{K_{\lambda}} = 9'21 \cdot 10^{-3} \frac{\mu\text{m W}}{\text{lm}}$$

$$\phi_{ph} = 5'03 \cdot 10^{18} \frac{\text{lm}}{\text{W} \mu\text{m s}} \cdot 9'21 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W} \mu\text{m}}{\text{lm}} = 4'63 \cdot 10^{16} \frac{\text{q}}{\text{s}}$$

$$2. \quad \left. \begin{array}{l} \lambda = 545 \text{ nm} = 0'545 \mu\text{m} \\ K_{\lambda} = 683 \cdot 0'9083 = 620'37 \text{ lm/W} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\lambda}{K_{\lambda}} = 8'79 \cdot 10^{-4} \frac{\mu\text{m W}}{\text{lm}}$$

$$\phi_{ph} = 5'03 \cdot 10^{18} \frac{\text{lm}}{\text{W} \mu\text{m s}} \cdot 8'79 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W} \mu\text{m}}{\text{lm}} = 4'42 \cdot 10^{15} \frac{\text{q}}{\text{s}}$$

$$3. \quad \left. \begin{array}{l} \lambda = 610 \text{ nm} = 0'61 \mu\text{m} \\ K_{\lambda} = 683 \cdot 0'503 = 343'55 \text{ lm/W} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\lambda}{K_{\lambda}} = 1'78 \cdot 10^{-3} \frac{\mu\text{m W}}{\text{lm}}$$

$$\phi_{ph} = 5'03 \cdot 10^{18} \frac{\text{lm}}{\text{W} \mu\text{m s}} \cdot 1'78 \cdot 10^{-3} \frac{\text{W} \mu\text{m}}{\text{lm}} = 8'95 \cdot 10^{15} \frac{\text{q}}{\text{s}}$$

6.1. Variación temporal do feixe de fotóns

Se a irradiancia é unha función do tempo, a irradiancia fotónica tamén será unha función temporal, e así considerando unha radiación cuasemonocromática

$$\overline{I_{ph}}(\vec{r}, t) = \frac{I_e(\vec{r}, t)}{h \bar{\nu}}.$$

Evidentemente neste caso o fluxo radiante e o fluxo fotónico tamén son funcións do tempo:

$$\phi_{ph}(t) = \int_{\Sigma} I_{ph}(\vec{r}, t) d\Sigma = \frac{P(t)}{h \bar{\nu}}$$

onde Σ é a superficie onde incide, que atravesa, ou de onde emerxe a radiación. O número de fotóns rexistrados nun intervalo temporal, entre $t = 0$ e $t = T$, tamén varia con o tempo, i.e. considerando distintos intervalos da mesma duración,

$$N_{ph} = \int_0^T \phi_{ph}(t) dt = \frac{E}{h \bar{\nu}}$$

onde

$$E = \int_0^T P_e(t) dt = \int_0^T \int_{\Sigma} I_e(\vec{r}, t) d\Sigma dt$$

é a enerxía radiante.

6.2. Estatística fotónica

Viuse anteriormente como as grandezas radiantes e as fotónicas están relacionadas. Agora ben, as relacións vistas son válidas cando o número de fotóns é relativamente alto, e para o termo medio, mais non para os fotóns individuais. Así se medimos cun detector unha irradiancia constante, esta grandeza é constante a nivel macroscópico, mais en realidade os fotóns non inciden no detector a intervalos estritamente regulares, e o valor que indica o detector é o valor medio, constante, dos fotóns detectados.

Consideremos por exemplo un feixe monocromático cunha longura de onda $\lambda_0 = 620$ nm e un fluxo radiante constante de 32 nW. Este feixe consta por termo medio de 100 fotóns por nanosegundo, e por tanto de 0'1 fotón por picosegundo. Mais os fotóns non son divisíbeis, de maneira que se considerarmos 10 intervalos contiguos de 1 ps, podemos esperar que nun deles haxa un fotón, e nos outros 9 non. Así, o feito de os fotóns seren cuantos discretos de enerxía dá lugar a fluctuacións estatísticas en intervalos temporais curtos, inducendo unha certa disonancia na relación entre grandezas radiantes e fotónicas. Mais este non é o fenómeno máis rechamante.

Como o feixe considerado ten un fluxo radiante constante, poderíamos esperar que os fotóns viaxasen equiespaciados, ou sexa, dividindo o eixo temporal en intervalos de 10 ps, que en cada un deses intervalos houbera un fotón. E máis, que ao subdividir cada un dese intervalos en 10 subintervalos de 1 ps, o fotón correspondente a cada intervalo de 10 ps, estivese sempre no mesmo subintervalo, por exemplo sempre nos segundos subintervalos, ou sempre nos quintos subintervalos. Porén na realidade os fotóns non viaxan equiespaciados, existindo sempre un certo grao de aleatoriedade. Así no exemplo anterior, considerando intervalos de 10 ps, nalgúns deles viaxará un fotón, noutros non viaxará ningún fotón, e noutros viaxaran dous ou máis fotóns.

Se a irradiancia varia co tempo, a densidade dos tempos de detección dos fotóns segue aproximadamente a función $I_e(t)$, mais os instantes exactos dos impactos presenta unha certa aleatoriedade. Cando a potencia é elevada o número medio de

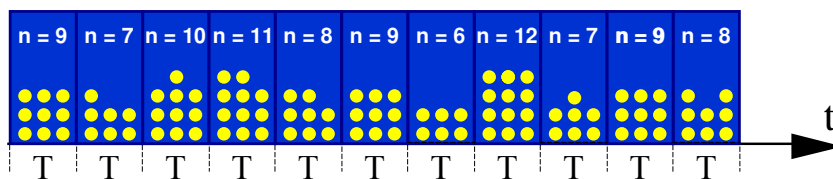


Figura 9: Incidencias de fotóns con fluxo radiante constante.

fotóns é alto, e cando a potencia é pequena os fotóns chegan máis espazados, mais non hai unha relación determinística directa entre o fluxo radiante e o número de fotóns que inciden nun intervalo de tempo pequeno.

A aleatoriedade do fluxo fotónico é unha fonte importante de ruído, que cobra máis importancia canto menor é o número de fotóns implicados, e que depende da natureza da fonte de luz.

6.2.1. Luz coherente

Cando a luz é coherente, e o fluxo constante, a probabilidade de nun determinado subintervalo viaxar un fotón é independente da presenza de fotóns nos subintervalos próximos. Ou dito doutro xeito, a chegada de fotóns a un detector pode considerarse como ocorrencias independentes dunha secuencia de sucesos aleatorios. Tendo esta secuencia unha “velocidade” igual ao fluxo fotónico, que é proporcional ao fluxo radiante ou potencia óptica. Se pola contra a luz é incoherente ou parcialmente coherente, a chegada de fotóns non pode ser considerada como unha secuencia de sucesos aleatorios, i.e. a probabilidade de nun determinado subintervalo viaxar un fotón depende da presenza de fotóns nos subintervalos próximos.

Consideremos un fluxo radiante constante P_e . O fluxo fotónico correspondente, $\phi_{ph} = P_e/h\nu$, é tamén constante, mais os tempos exactos de incidencia dos fotóns nunha superficie dada son aleatorios. Na figura 9 represéntanse as incidencias dos fotóns do dito fluxo. O intervalo total esta dividido en subintervalos iguais de largura T , e como podemos ver o número de incidencias fotónicas non é constante. Sexa n o número de fotóns que incide nun deses subintervalos, sabemos que o valor medio de n é

$$\bar{n} = N_{ph} = \phi_{ph} T = \frac{P_e T}{h\nu}$$

mais como se ilustra na figura o número de incidencias fotónicas nun intervalo dado non ten porque coincidir con ese valor medio, senón que existe unha certa aleatoriedade.

Queremos calcular agora a probabilidade de o número de incidencias ser un n determinado, por exemplo que $n = 8$ ou que $n = 11$. Para isto dividimos cada intervalo T nun grande número de subintervalos M cunha largura pequena o bastante para que en cada un deses subintervalos haxa unha probabilidade $p = \frac{\bar{n}}{M}$ de incidir un fotón, e unha probabilidade $1 - p$ de que non incida ningún fotón. A probabilidade de que incidan n fotóns no intervalo T é por tanto igual a probabilidade de termos n subintervalos contendo 1 fotón e $M - n$ subintervalos contendo 0 fotóns, en calquera

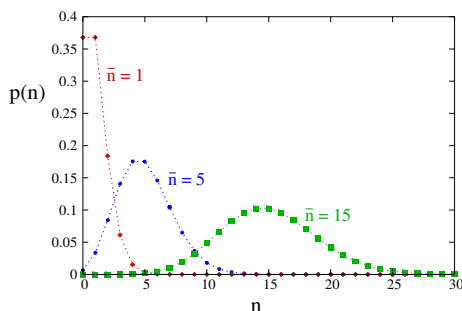


Figura 10: Distribución de Poisson para 3 valores de $\bar{n}$.

orde posíbel. Esta probabilidade é igual a distribución binomial⁸:

$$p(n) = C_M^n p^n (1-p)^{M-n} = \frac{M!}{n! (M-n)!} \left(\frac{\bar{n}}{M}\right)^n \left(1 - \frac{\bar{n}}{M}\right)^{M-n}.$$

Como

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M!}{(M-n)! M^n} = 1$$

e

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\bar{n}}{M}\right)^{M-n} = e^{-\bar{n}}$$

entón

$$p(n) = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!}.$$

Esta ecuación é coñecida por distribución de Poisson, e danos a probabilidade de que nun intervalo de largura T incidan n fotóns. Na figura 10 móstrase a distribución de Poisson para varios valores do valor medio $\bar{n}$. (Nótese que a distribución é discreta, e as liñas punteadas píntanse só para facer máis clara a gráfica).

Unha sucesión de sucesos caracterízase usualmente por dous parámetros, o seu valor medio

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n p(n)$$

e a varianza

$$\sigma_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^2 p(n).$$

Calculemos primeiramente o valor medio

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n p(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!} = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\bar{n}^n}{n!},$$

⁸O produto da combinación de orden n de M elementos por a probabilidade de incidir un fotón elevado a n , e a probabilidade de non incidir un fotón elevado a $M-n$.

e tendo en conta que $\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{x^n}{n!} = x e^x$

$$\bar{n} = e^{-\bar{n}} \cdot \bar{n} \cdot e^{\bar{n}} = \bar{n}.$$

Ou sexa, obtemos que o valor medio da distribución de Poisson é $\bar{n}$, e por tanto os nosos cálculos son coherentes.

Calculemos agora a varianza

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^2 \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!} = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^2 \frac{\bar{n}^n}{n!} = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + \bar{n}^2 - 2n\bar{n}) \frac{\bar{n}^n}{n!} \\ &= e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\bar{n}^n}{n!} + \bar{n}^2 e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} - 2\bar{n} e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\bar{n}^n}{n!}.\end{aligned}$$

Tendo en conta que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{x^n}{n!} = x(1+x)e^x, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{x^n}{n!} = x e^x, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

entón

$$\sigma_n^2 = \bar{n}(1 + \bar{n}) + \bar{n}^2 - 2\bar{n}^2 = \bar{n}.$$

Así se por exemplo $\bar{n} = 100$ o desvío padrón será $\sigma_n = 10$, i.e. un fluxo de 100 fotóns ven acompañada por unha inexactitude de ± 10 fotóns.

Como se dixo a aleatoriedade fotónica constitúe unha fonte de ruído fundamental, que debe ser tida en conta á hora de transmitir información usando radiación electromagnética. Unha medida moi utilizada para medir a bondade dun sistema de comunicacións é a razón sinal-ruído (SNR). Se representamos a media do sinal por $\bar{n}$ e o seu ruído polo desvío padrón σ_n , a razón sinal-ruído dun feixe fotónico é:

$$SNR = \frac{\text{media}^2}{\text{variáncia}} = \frac{\bar{n}^2}{\sigma_n^2}.$$

E caso de podermos aplicar a distribución de Poisson:

$$SNR = \frac{\bar{n}^2}{\bar{n}} = \bar{n}.$$

Cómpre salientar que neste caso a razón sinal-ruído aumenta sen límite ao medrar o número de fotóns.

6.2.2. Clasificación da luz

Do punto de vista clásico un feixe coherente con fluxo radiante constante é o tipo de luz máis estábel en que podemos pensar. Serve por tanto como unha referencia para clasificar a luz en función da súa aleatoriedade fotónica. E así unha dada radiación electromagnética vai ter unha estatística fotónica dalgún dos seguintes 3 tipos:

- super-poissoniana, $\sigma_n^2 > \bar{n}$,

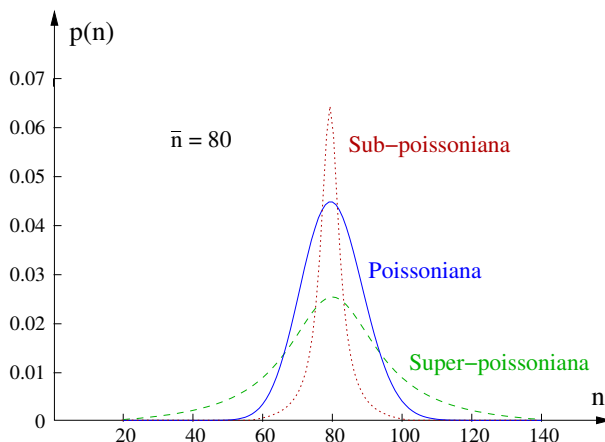


Figura 11: Comparativa de posíbeis estatísticas fotónicas da luz.

- poissoniana, $\sigma_n^2 = \bar{n}$, ou
- sub-poissoniana, $\sigma_n^2 < \bar{n}$.

A figura 11 mostra as distribucións de probabilidade de estatísticas super-poissoniana, poissoniana e sub-poissoniana, para un valor medio $\bar{n}$ igual a 80.

Un feixe láser monomodo, de potencia constante e estabilizada, presenta unha estatística practicamente poissoniana. As fontes térmicas e de descarga mostran estatística super-poissoniana, se ben en moitos casos non dista moito da estatística poissoniana. Para obter luz con estatística sub-poissoniana cómpre utilizar montaxes bastante sofisticadas, nas que a emisión dos fotóns da fonte, usualmente un LED ou un díodo láser, é controlada con bastante precisión.

6.2.3. Luz super-poissoniana

As fontes tradicionais; incandescentes, fluorescentes e de descarga, emiten luz super-poissoniana, e por tanto as razóns sinal-ruído que se obteñen son peores que para a luz coherente. Así en xeral o desvío padrón vén pode expresarse como:

$$\sigma_n = \sqrt{\bar{n}} + \sigma_t,$$

onde σ_t é o ruído a maiores debido a natureza estocástica da fonte. Este factor pode tomar valores moi diferentes, dependendo da fonte de luz, o seu grao de coherencia, o grao de polarización, etc.

Un caso extremo e interesante é o corpo negro, cuxa radiación é totalmente incoherente, é que serve de prototipo de fonte térmica. Neste caso para o cálculo da varianza cómpre utilizar a estatísticas de Bose-Einstein, obténdose que a dita varianza é igual a⁹:

$$\sigma_n^2 = \bar{n} \cdot \frac{e^{h\nu/k_B T}}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

⁹Véxase por exemplo a sección 1-6 da referencia[4].

ou sexa o produto da varianza do caso coherente por un cociente coñecido como factor de Boson, que pode tomar valores moi diferentes. O caso extremo dáse cando a enerxía dos fotóns é nula, entón cociente tende a infinito, mais para frecuencias ópticas, e temperaturas típicas o factor de Boson toma valores próximos a unidade. Así por exemplo, considerando que a temperatura do corpo negro é de 5300 K, temperatura da superficie do Sol, aos extremos do visíbel (360, 860) nm, correspóndenlle factores de Boson de 1.0006 e 1.046 respectivamente.

Cómpre sinalar que as fontes parcialmente coherentes, poden ser máis ruidosas que o corpo negro, e sempre van ser máis ruidosas que as fontes totalmente coherentes.

A razón sinal ruído dun corpo negro será lóxicamente:

$$SNR = \bar{n} \cdot \left[\frac{e^{h\nu/k_B T} - 1}{e^{h\nu/k_B T}} \right].$$

Referencias

- [1] McCluney W.R., *Introduction to Radiometry and Photometry*, ed. Artech House, Boston 1994.
- [2] E.F. Schubert, *Light-emitting diodes*, cap 11, Cambridge University Pres, 2003.
- [3] B.E.A. Saleh and M.C. Teich, *Fundamentals of photonics*, ed. Wisley, New York 1991.
- [4] Dereniak, E.L. and Crowe D.G., *Optical Radiation Detectors*, ed. John Wiley & Sons, 1984.
- [5] Uiga, E., *Optoelectronics*, ed. Prentice Hall, 1995.
- [6] Gros H., *Handbook of Optical Systems*, Volume 1, cap. 6 e 7, ed. Wiley-VCH, 2005.
- [7] Fox M., *Quantum Optics. An introduction*, Oxford University Pres, 2006.

Exercicios

1. O fluxo radiante espectral emitido polo corpo negro a temperatura T , ven descrito por:

$$P_\lambda = P_0 \cdot W(\lambda, T) \quad \text{con} \quad W(\lambda, T) = \lambda^{-5} \cdot \left[\exp \left\{ \frac{hc}{\lambda k_B T} \right\} - 1 \right]^{-1}$$

sendo P_0 un parámetro que non depende nin da temperatura nin da longura de onda, h a constante de Planck, c a velocidade da luz no vacuo e k_B a constante de Boltzmann. De maneira que $hc/k_B = 1'438775827 \cdot 10^7 \text{ nm K}$.

- Representétese graficamente P_λ/P_0 para $T = 2.000, 3.500$ e 5.000 K .
 - Calcúlese a eficacia luminosa de radiación como unha función da temperatura. Representétese a dita eficiencia no intervalo $[1.000, 15.000]$.
 - Para unha temperatura dada, T , calcúlese a longura de onda para a cal a función $W(\lambda, T)$ ten o seu máximo.
2. Da expresión que aparece no problema anterior dérvese o fluxo radiante espectral, a respecto da frecuencia, que emite o corpo negro á temperatura T .
3. A distribución espectral da radiación solar extraterrestre é semellante á do corpo negro a 5.800 K . Para esta radiación calcúlese:
- a eficacia luminosa, e
 - cuantos fotóns por segundo, no intervalo visíbel, ten 1 lumen.
4. Sexa unha lámpada incandescente de tungsteno coa as seguintes características:
- $P_v = 1.270 \text{ lm}$,
potencia (eléctrica consumida) = 100 W ,
voltaxe alimentación = 220 V , e
distribución espectral semellante á do corpo negro a 2.820 K .
- Calcúlese a eficacia luminosa.
 - Calcúlese a eficiencia radiante porcentual, i.e. $\frac{P_e}{P_{\text{eléctrica}}} \cdot 100$.
 - Cantos fotóns por segundo, no intervalo visíbel, ten 1 lumen?
 - Cantos fotóns por segundo emite a fonte?
5. Sexa unha lámpada haloxénea coa as seguintes características:
- $P_v = 2.070 \text{ lm}$,
potencia (eléctrica consumida) = 100 W ,
voltaxe alimentación = 220 V , e
distribución espectral semellante á do corpo negro a 3.130 K .
- Calcúlese a eficacia luminosa.
 - Calcúlese a eficiencia radiante porcentual, i.e. $\frac{P_e}{P_{\text{eléctrica}}} \cdot 100$.
 - Cantos fotóns por segundo, no intervalo visíbel, ten 1 lumen?
 - Cantos fotóns por segundo emite a fonte?
6. Médesa a distribución espectral dunha lámpada flash obtendo-se un fluxo espectral que axustamos á seguinte función:

$$P_\lambda = P_0 \cdot \exp \left\{ 30'1548 - 0'9688 \sqrt{\lambda} - \frac{2318470}{\lambda^2} \right\}$$

onde a longura de onda mídese en nanómetros.

- (a) Represéntese o fluxo espectral normalizado á unidade.
 - (b) Correspondese este fluxo espectral co o do corpo negro?, a que temperatura?
 - (c) Calcúlese a eficacia luminosa.
 - (d) Cantos fotóns por segundo, no intervalo visíbel, ten 1 lumen?
7. Considérese a lámpada do problema 3 iluminando un cuarto cúbico de 9 m^3 . Asumindo que a lámpada é unha fonte puntual, que fica a $\frac{1}{2} \text{ m}$ do teito e no medio do cuarto, e que este está baleiro. Calcule-se:
- (a) a intensidade luminosa,
 - (b) a iluminancia nunha parede (ignorando a luz reflectida noutras paredes).
8. Represente-se o factor de Boson no espectro visíbel para o corpo negro ás seguintes temperaturas:
- (a) $T = 2.000 \text{ K}$
 - (b) $T = 4.000 \text{ K}$
 - (c) $T = 6.000 \text{ K}$

ANEXOS

1. Sensibilidade espectral do olho humano

- λ : longura de onda (en nanómetros)
- $V(\lambda)$: Sensibilidade espectral fotópica (visión diúrna)

$\lambda(\text{nm})$	$V(\lambda)$	$\lambda(\text{nm})$	$V(\lambda)$	$\lambda(\text{nm})$	$V(\lambda)$
380	2'00e-04	416	1'28e-02	453	4'98e-02
381	2'28e-04	417	1'40e-02	454	5'09e-02
382	2'61e-04	418	1'51e-02	455	5'21e-02
383	2'99e-04	419	1'63e-02	456	5'34e-02
384	3'44e-04	420	1'75e-02	457	5'49e-02
385	3'96e-04	421	1'86e-02	458	5'64e-02
386	4'55e-04	422	1'96e-02	459	5'81e-02
387	5'25e-04	423	2'07e-02	460	6'00e-02
388	6'04e-04	424	2'17e-02	461	6'26e-02
389	6'96e-04	425	2'27e-02	462	6'53e-02
390	8'00e-04	426	2'36e-02	463	6'80e-02
391	9'16e-04	427	2'46e-02	464	7'09e-02
392	1'05e-03	428	2'55e-02	465	7'39e-02
393	1'20e-03	429	2'64e-02	466	7'70e-02
394	1'36e-03	430	2'73e-02	467	8'03e-02
395	1'55e-03	431	2'83e-02	468	8'37e-02
396	1'75e-03	432	2'94e-02	469	8'72e-02
397	1'88e-03	433	3'04e-02	470	9'10e-02
398	2'23e-03	434	3'15e-02	471	9'49e-02
399	2'50e-03	435	3'26e-02	472	9'90e-02
390	8'00e-04	436	3'37e-02	473	1'03e-01
400	2'80e-03	437	3'47e-02	474	1'08e-01
401	3'12e-03	438	3'58e-02	475	1'13e-01
402	3'46e-03	439	3'69e-02	476	1'18e-01
403	3'83e-03	440	3'79e-02	477	1'23e-01
404	4'23e-03	441	3'88e-02	478	1'28e-01
405	4'66e-03	442	3'98e-02	479	1'33e-01
406	5'12e-03	443	4'06e-02	480	1'39e-01
407	5'62e-03	444	4'15e-02	481	1'45e-01
408	6'17e-03	445	4'24e-02	482	1'50e-01
409	6'76e-03	446	4'33e-02	483	1'56e-01
410	7'40e-03	447	4'41e-02	484	1'63e-01
411	8'15e-03	448	4'50e-02	485	1'69e-01
412	8'96e-03	449	4'59e-02	486	1'76e-01
413	9'83e-03	450	4'68e-02	487	1'84e-01
414	1'08e-02	451	4'77e-02	488	1'91e-01
415	1'18e-02	452	4'87e-02	489	1'99e-01

$\lambda(\text{nm})$	$V(\lambda)$	$\lambda(\text{nm})$	$V(\lambda)$	$\lambda(\text{nm})$	$V(\lambda)$
490	2'08e-01	536	9'24e-01	582	8'49e-01
491	2'17e-01	537	9'32e-01	583	8'39e-01
492	2'27e-01	538	9'40e-01	584	8'28e-01
493	2'37e-01	539	9'47e-01	585	8'16e-01
494	2'47e-01	540	9'54e-01	586	8'05e-01
495	2'59e-01	541	9'60e-01	587	7'93e-01
496	2'70e-01	542	9'66e-01	588	7'81e-01
497	2'82e-01	543	9'71e-01	589	7'69e-01
498	2'95e-01	544	9'76e-01	590	7'57e-01
499	3'09e-01	545	9'80e-01	591	7'45e-01
500	3'23e-01	546	9'84e-01	592	7'32e-01
501	3'38e-01	547	9'87e-01	593	7'20e-01
502	3'55e-01	548	9'90e-01	594	7'07e-01
503	3'72e-01	549	9'93e-01	595	6'95e-01
504	3'89e-01	550	9'95e-01	596	6'82e-01
505	4'07e-01	551	9'97e-01	597	6'69e-01
506	4'26e-01	552	9'98e-01	598	6'57e-01
507	4'44e-01	553	9'99e-01	599	6'44e-01
508	4'63e-01	554	1'00	590	7'57e-01
509	4'83e-01	555	1'00	600	6'31e-01
510	5'03e-01	556	1'00	601	6'18e-01
511	5'24e-01	557	9'99e-01	602	6'05e-01
512	5'45e-01	558	9'98e-01	603	5'92e-01
513	5'66e-01	559	9'97e-01	604	5'80e-01
514	5'87e-01	560	9'95e-01	605	5'67e-01
515	6'08e-01	561	9'93e-01	606	5'54e-01
516	6'29e-01	562	9'90e-01	607	5'41e-01
517	6'50e-01	563	9'86e-01	608	5'28e-01
518	6'71e-01	564	9'83e-01	609	5'16e-01
519	6'91e-01	565	9'79e-01	610	5'03e-01
520	7'10e-01	566	9'74e-01	611	4'90e-01
521	7'28e-01	567	9'69e-01	612	4'78e-01
522	7'45e-01	568	9'64e-01	613	4'66e-01
523	7'62e-01	569	9'58e-01	614	4'53e-01
524	7'78e-01	570	9'52e-01	615	4'41e-01
525	7'93e-01	571	9'45e-01	616	4'29e-01
526	8'08e-01	572	9'38e-01	617	4'17e-01
527	8'22e-01	573	9'31e-01	618	4'05e-01
528	8'36e-01	574	9'23e-01	619	3'93e-01
529	8'49e-01	575	9'15e-01	620	3'81e-01
530	8'62e-01	576	9'07e-01	621	3'69e-01
531	8'74e-01	577	8'98e-01	622	3'57e-01
532	8'85e-01	578	8'89e-01	623	3'45e-01
533	8'95e-01	579	8'80e-01	624	3'33e-01
534	9'05e-01	580	8'70e-01	625	3'21e-01
535	9'15e-01	581	8'60e-01	626	3'09e-01

$\lambda(\text{nm})$	$V(\lambda)$	$\lambda(\text{nm})$	$V(\lambda)$	$\lambda(\text{nm})$	$V(\lambda)$
627	2'98e-01	673	2'63e-02	718	1'20e-03
628	2'87e-01	674	2'47e-02	719	1'12e-03
629	2'76e-01	675	2'32e-02	720	1'05e-03
630	2'65e-01	676	2'18e-02	721	9'77e-04
631	2'55e-01	677	2'05e-02	722	9'11e-04
632	2'45e-01	678	1'93e-02	723	8'50e-04
633	2'35e-01	679	1'81e-02	724	7'93e-04
634	2'26e-01	680	1'70e-02	725	7'40e-04
635	2'17e-01	681	1'59e-02	726	6'90e-04
636	2'08e-01	682	1'48e-02	727	6'43e-04
637	2'00e-01	683	1'38e-02	728	5'99e-04
638	1'91e-01	684	1'28e-02	729	5'58e-04
639	1'83e-01	685	1'19e-02	730	5'20e-04
640	1'75e-01	686	1'11e-02	731	4'84e-04
641	1'67E-01	687	1'03e-02	732	4'50e-04
642	1'60e-01	688	9'53e-03	733	4'18e-04
643	1'52e-01	689	8'85e-03	734	3'89e-04
644	1'45e-01	690	8'21e-03	735	3'61e-04
645	1'38e-01	691	7'62e-03	736	3'35e-04
646	1'32e-01	692	7'09e-03	737	3'11e-04
647	1'25e-01	693	6'59e-03	738	2'89e-04
648	1'19e-01	694	6'14e-03	739	2'68e-04
649	1'13e-01	695	5'72e-03	740	2'49e-04
650	1'07e-01	696	5'34e-03	741	2'31E-04
651	1'01e-01	697	5'00e-03	742	2'15e-04
652	9'62e-02	698	4'68e-03	743	1'99e-04
653	9'11e-02	699	4'38e-03	744	1'85e-04
654	8'63e-02	700	8'21e-03	745	1'72e-04
655	8'16e-02	701	4'10e-03	746	1'60e-04
656	7'71e-02	702	3'84e-03	747	1'49e-04
657	7'28e-02	703	3'59e-03	748	1'38e-04
658	6'87e-02	704	3'35e-03	749	1'29e-04
659	6'48e-02	705	3'13e-03	750	1'20e-04
660	6'10e-02	706	2'93e-03	751	1'12e-04
661	5'74e-02	707	2'74e-03	752	1'04e-04
662	5'40e-02	708	2'56e-03	753	9'73e-05
663	5'07e-02	709	2'39e-03	754	9'08e-05
664	4'75e-02	710	2'24e-03	755	8'48e-05
665	4'46e-02	711	2'09e-03	756	7'91e-05
666	4'18e-02	712	1'95e-03	757	7'39e-05
667	3'91e-02	713	1'82e-03	758	6'89e-05
668	3'66e-02	714	1'70e-03	759	6'43e-05
669	3'42e-02	715	1'59e-03	760	6'00e-05
670	3'20e-02	716	1'48e-03	761	5'60e-05
671	3'00e-02	717	1'38e-03	762	5'22e-05
672	2'81e-02		1'29e-03	763	4'87e-05

$\lambda(\text{nm})$	$V(\lambda)$	$\lambda(\text{nm})$	$V(\lambda)$	$\lambda(\text{nm})$	$V(\lambda)$
764	4'54e-05	770	3'00e-05	776	1'98e-05
765	4'24e-05	771	2'80e-05	777	1'85e-05
766	3'96e-05	772	2'61e-05	778	1'72e-05
767	3'69e-05	773	2'44e-05	779	1'61e-05
768	3'44e-05	774	2'27e-05	780	1'50e-05
769	3'21e-05	775	2'12e-05		

2. Grandezas de interese

Constantes físicas

Grandeza	Símbolo	Valor numérico	Unidades
Carga elemental do electrón	e	$1'6021892 \cdot 10^{-19}$	C
Masa do electrón en repouso	m_0	$9'109534 \cdot 10^{-31}$	kg
Constante de Boltzmann	k_B	$1'380662 \cdot 10^{-23}$	J/K
Constante de Planck	h	$6'626176 \cdot 10^{-34}$	J/Hz
	h	$4'134599 \cdot 10^{-15}$	eV/Hz
Constante de Planck reducida	$\hbar$	$1'054589 \cdot 10^{-34}$	J/Hz
Velocidade da luz no vácuo	c	299.792.458	m/s
Constante dieléctrica do vácuo	ε_0	$8'85418782 \cdot 10^{-12}$	F/m
Electron-volt	eV	$1'60219 \cdot 10^{-19}$	J
	$h \cdot c$	$1'986478 \cdot 10^{-25}$	J m
	$h \cdot c$	1'239851	eV μm



Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA