Miguel Brozos Vázquez

VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS

CON TENSOR DE CURVATURA ESPECIAL

100

2003

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Miguel Brozos Vázquez

VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS CON TENSOR DE CURVATURA ESPECIAL

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección dos profesores Eduardo García Río e Luis M. Hervella Torrón, para obter o grao de Licenciado en Ciencias Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levouse a cabo a súa defensa o día 21 de Xullo de 2003 na Facultade de Matemáticas de dita Universidade, obtendo a cualificación de Sobresaliente.

IMPRIME:	Imprenta Universitaria Pavillón de Servicios Campus Universitario
ISBN:	84-89390-18-5
Dep. Leg.:	C-2073-2003

Á miña irmá.

Agradecementos

Sen dúbida esta é a páxina máis difícil de escribir do traballo, seguramente pola súa importancia. A dificultade radica en escoller as persoas que deben figurar aquí cando o espacio semella tender a pouco para escribilos, e a importancia está, coido que sobra dicilo pero fareino igualmente, en que sen elas non sería posible facelo.

Como é costume, por razóns obvias, comezo estes agradecementos dirixíndoos ós profesores Eduardo García Río e Luis M. Hervella Torrón, directores do traballo, destacando a paciencia e bo facer que me levan adicado. Tamén quixera agradecer a todo o Departamento de Xeometría e Topoloxía as súas ensinanzas e en xeral o bo ambiente no que "traballamos". En especial, debo salientar a dedicación da profesora Elena Vázquez Abal e a súa sempre boa disposición.

Unha mención sobresaliente merecen José Carlos Díaz Ramos, polo seu soporte en coñecemento informático, e Ramón Vázquez Lorenzo, a quen se debe algún dos resultados presentados.

Non podo esquecer, neste o meu primeiro traballo de investigación, á persoa que me abriu as portas ó universo matemático, a profesora Covadonga Rodríguez-Moldes Rey, a quen agradezo non só o tempo que me adicou a min, senón toda a súa incansable labor pola Matemática e, en concreto, pola súa ensinanza. Ademais, debo facer extensiva esta gratitude a tantos bos profesores que me guiaron ó longo dos anos, superando en moitos casos a condición de ensinantes; aquí quero mencionar o nome de Concepción Hernández Martín, a quen sei que lle gustará lerse.

Como non podía faltar, para facer este traballo gocei das boas condicións humanas que precisei, e contei co apoio incondicional da miña familia, pais e irmá, a quen quero adicar o esforzo aquí derrochado, e quero agradecer tamén a meus avós, Manolo e Elena, o estar sempre que semella haber un atisbo de falta. Por último, e neste mesmo ámbito, quero mencionar tan grandes amigos que me acompañaron como Alexandre A. Cortés Ayaso, Daniel Souto García, Agustín Sastre Sánchez, Óscar Fernández Ferreiro, Iria Fernández Sobrado, Sandra Sambade Nieto, Ana B. Rodríguez Raposo,... e marco cos puntos suspensivos o carácter aproximado que acarrean estas palabras, pois moitos foron os apoios recibidos. A todos vós, moitas gracias.

Abstract

The notion of *curvature* played a basic role in the development of geometry since the XIX century with the initial work of many mathematicians, among them Gauss and Riemann. Even though the curvature tensor of a semi-Riemannian manifold carries a lot of information, it is a difficult object to deal with. Therefore, many attempts have been done in considering other kinds of objects which, being easier to handle, somehow reflect the properties of the curvature tensor. Among those objects, curvature operators have received much attention for the last years. Indeed, motivated by a conjecture of Osserman in the 90's [23], spectral properties of Jacobi operators, generalized Jacobi operators, skew-symmetric curvature operators, Szabó operators, ... have been considered.

The so-called *Osserman problem* consists of the characterization of those (semi)-Riemannian manifolds whose Jacobi operators have constant eigenvalues on the (pseudo)-unit sphere bundle. Due to the complexity of this problem, it is usually considered under additional conditions on the manifold (such us being locally symmetric, Kähler, etc). Our purpose in this work is to contribute to the study of the Osserman problem by imposing two kind of restrictions on the geometry of the manifold: the first one is on the local structure of the manifold, which should correspond to a twisted product, being the second a condition on the curvature tensor, which should be expressed by a Clifford module structure.

More precisely, this work is organized as follows. In Chapter 1 we fix the notation and recall some basic definitions to be used in the sequel. Pointwise Osserman manifolds are considered in Chapter 2, with special attention to the four-dimensional case. This is the main concern of Chapter 3, were we prove the following

Theorem 3.4.1 *Let* (P, g) *a 4-dimensional semi-Riemannian manifold with a local structure of a twisted product, then* P *is pointwise Osserman if and only if it is a space of constant sectional curvature.*

The theorem above is a consequence of the following property: *A* 4*-dimensional manifold with the local structure of a warped product is self-dual if and only it it is anti-self-dual.*

Chapter 4 is devoted to study semi-Riemannian manifolds whose curvature tensor is

expressed by a Clifford module structure, i.e.,

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \lambda_0\Big(\langle Y,Z\rangle X-\langle X,Z\rangle Y\Big)\\
&\quad +\tfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\Big(\langle J_iX,Z\rangle J_iY-\langle J_iY,Z\rangle J_iX+2\langle J_iX,Y\rangle J_iZ\Big)
\end{aligned}
$$

where $\lambda_0,\ldots,\lambda_\nu$ are (nonzero) real functions and $J_1,\ldots,J_\nu$ are linear operators satisfying:

$$
\begin{aligned}
J_iJ_j+J_jJ_i &= 0, && i\neq j\\
<J_iX,Y>+<X,J_iY> &= 0, && \forall i\in\{1,\ldots\nu\}\\
J_i^2 &= \epsilon_i id, && \forall i\in\{1,\ldots,\nu\},\epsilon_i=\pm 1.
\end{aligned}
$$

The purpose of this chapter is to show that, under mild conditions, a semi-Riemannian manifold as above is indeed globally Osserman and locally symmetric, as stated in the following

Proposition 4.2.2 *A connected semi-Riemannian manifold with dimension different from* 2*,* 4*,* 8 *and* 16*, whose curvature tensor is given by a Clifford module structure, is a globally Osserman space.*

Theorem 4.2.1 *A connected semi-Riemannian manifold with dimension different from* 2*,* 4*,* 8 *and* 16*, whose curvature tensor is given by a Clifford module structure, is a locally symmetric space.*

It is worth mentioning at this point that the consideration of semi-Riemannian manifolds whose curvature tensor is given by a Clifford module structure is motivate by [14] and [15], where the tight relation between Osserman manifolds and Clifford module structures is pointed out through the consideration of Osserman algebraic curvature tensors.

Finally, an Appendix which contains a short program in Mathematica is attached. This allows to perform the calculus of the principal geometric objects related with curvature, such as the curvature tensor, the Ricci tensor, the Jacobi operator, the eigenvalues of Jacobi operator,... needed in this work. We also show some examples of Osserman metrics with interesting properties.

Prefacio

O concepto de *curvatura* desempeña un papel fundamental na Xeometría, principalmente a partir do século XIX cando, a raíz dos traballos de Gauss e, posteriormente, de Riemann, alcanza o seu auxe en canto a comprensión e estudio. Neste ámbito de traballo, que a grandes rasgos podemos dicir, prolóngase ata os nosos días, xorde na década dos 90 motivado por unha conxetura proposta por R. Osserman en [23], un novo aspecto a estudiar do tensor curvatura: a invarianza dos autovalores do *Operador de Jacobi* respecto da dirección considerada e do punto base na variedade. Os intentos de resolución da *conxetura de Osserman* abriron novos campos de investigación e motivaron diversos enfoques para o estudio de variedades semi-riemannianas en xeral, e moi en concreto do tensor curvatura. Nesta liña englóbase este traballo.

Debido á dificultade do problema de Osserman en Xeometría Semi-Riemanniana, é frecuente reducir o campo de actuación impoñendo condicións sobre a xeometría da variedade. Esta é precisamente a tarefa que levamos a cabo neste contexto. Por un lado impoñemos condicións sobre a dimensión e a estructura local da variedade, analizando o caso de variedades con estructura local de producto deformado en dimensión catro. No segundo caso, consideraremos variedades onde o tensor de curvatura satisfai a condición especial de ser expresado por medio dunha estructura de módulo de Clifford. No referente ás variedades verificando a primeira das condicións anteriores, probamos un resultado xeral:

Unha variedade 4-dimensional con estructura local de producto warped é auto-dual se e só se é anti-autodual (e, por tanto, localmente conforme a unha variedade chá).

Como consecuencia, obtemos o primeiro resultado deste traballo en relación ó problema de Osserman:

Teorema 3.4.1 *Sexa (P, g) unha variedade semi-riemanniana de dimensión 4 que localmente é un producto twisted. Entón P é puntualmente Osserman se e soamente se tén curvatura seccional constante.*

Este teorema supón o obxectivo do Capítulo 3, que se fundamenta no estudio de propiedades de variedades que verifican a condición de Osserman en cada punto, así coma na análise minuciosa do tensor de Weyl para espacios con estructura local de producto deformado.

No Capítulo 4 abordamos o estudio de variedades semi-riemannianas con estructura de módulo de Clifford, é dicir, variedades nas que o tensor curvatura se expresa como combinación linear de certo tipo de tensores curvatura como,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \lambda_0\Big(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\Big) \\ &\quad + \tfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\Big(\langle J_iX,Z\rangle J_iY - \langle J_iY,Z\rangle J_iX + 2\langle J_iX,Y\rangle J_iZ\Big) \end{aligned}$$

onde $\lambda_0,\ldots,\lambda_\nu$ son funcións reais que non se anulan e $J_1,\ldots,J_\nu$ son operadores verificando:

$$\begin{aligned} J_iJ_j + J_jJ_i &= 0, & & i \neq j \\ < J_iX, Y > + < X, J_iY > &= 0, & & \forall i \in \{1,\ldots \nu\} \\ J_i^2 &= \epsilon_i id, & & \forall i \in \{1,\ldots,\nu\}, \epsilon_i = \pm 1. \end{aligned}$$

O principal resultado do Capítulo 4 amosa que este tipo de variedades son de feito globalmente Osserman e localmente simétricas:

Proposición 4.2.2 *Toda variedade semi-riemanniana conexa con dimensión distinta de* 2*,* 4*,* 8 *e* 16*, na que o tensor curvatura vén dado por unha estructura de módulo de Clifford, é globalmente Osserman.*

Teorema 4.2.1 *Toda variedade semi-riemanniana conexa con dimensión distinta de* 2*,* 4*,* 8 *e* 16*, na que o tensor curvatura vén dado por unha estructura de módulo de Clifford, é un espacio localmente simétrico.*

Consideramos importante sinalar neste intre que a elección desta familia de tensores curvatura está motivada por traballos como [15] e resultados sobre tensores de curvatura alxébricos de [14], onde se mostra que, baixo certas hipóteses, eses son precisamente os tensores curvatura alxébricos que verifican a propiedade de Osserman a nivel alxébrico.

Dun xeito resumido, esta memoria estructúrase como segue: no Capítulo 1 fixamos a notación que empregaremos e recordamos algúns conceptos básicos que nos serán de utilidade. Ademais, introducimos obxectos que serán a base do noso estudio, como son os *módulos de Clifford*, e veremos algunhas das súas propiedades. A continuación, no Capítulo 2, analizamos algúns casos particulares de variedades Osserman por presentaren unha interese especial, ademais, sentamos as bases para poder desenvolver o Capítulo 3. Os capítulos 3 e 4 están adicados, respectivamente, ó estudio das variedades de Osserman con estructura local de producto deformado e baixo a condición de vir o tensor curvatura definido por unha estructura de módulo de Clifford, como xa se matizou anteriormente.

No Apéndice preséntase un código de programa implementado en Mathematica, que permite facer os cálculos dos principais obxectos xeométricos relacionados coa curvatura, como son: tensor curvatura, tensor de Ricci, operador de Jacobi, autovalores do Operador de Jacobi,... Este programa acompáñase de algún exemplo de métrica de Osserman cos cálculos correspondentes.

Índice Xeral

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo de preliminares persegue o obxectivo de introducir os conceptos básicos en que se fundamenta este traballo, así como senta-las bases da terminoloxía e notación que se empregará ó longo dos capítulos restantes. A Sección 1.1 está adicada preferentemente a repasar algúns conceptos básicos co fin de fixar a notación, para na Sección 1.2 introducir as definicións de *variedades de Osserman puntuais e globais*, así como dar condicións suficientes para a súa equivalencia. Será na Sección 1.3 onde introduciremos as estructuras de *módulos de Clifford*, dando algunhas das súas propiedades máis elementais, amosando os exemplos máis sinxelos onde atoparmos estas estructuras e poñendo de manifesto a relación que existe entre elas e a condición de Osserman.

1.1 Introducción

Tomando como punto de partida unha variedade semi-riemanniana (M, g) de dimensión n e signatura $(p, q), p, q \geq 0$, ambas arbitrarias, comezamos dando unha serie de definicións que permiten fixar a notación e nomenclatura a empregar; para iso tomamos como referencias básicas [23], [14] e [10]. A primeira delas hérdase da xeometría de Lorentz utilizada na *Teoría da Relatividade*:

Definición 1.1.1 *Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana, un vector $x \in T_pM$ diremos que é*

- *temporal se $g(x, x) < 0$*
- *espacial se $g(x, x) > 0$*
- *nulo se $g(x, x) = 0$ e $x \neq 0$*
- *non nulo se $g(x, x) \neq 0$*

e ademais, a un vector non nulo x tal que $\mid g(x, x) \mid = 1$ chamarémoslle unitario.

Denotamos por $S_p^-(M)$, $S_p^+(M)$ e $S_p(M)$ os conxuntos

$$\begin{aligned} S_p^-(M) &= \{x \in T_pM : g(x,x) = -1\} \\ S_p^+(M) &= \{x \in T_pM : g(x,x) = 1\} \\ S_p(M) &= \{x \in T_pM : \mid g(z,z) \mid = 1\} \end{aligned}$$

de vectores unitarios temporais, espaciais e non nulos, respectivamente, do espacio tanxente á variedade no punto p. O análogo para campos de vectores será:

$$\begin{aligned} S^-(M) &= \bigcup_{p\in M} S_p^-(M) = \{X \in TM : \, g(X,X) = -1\} \\ S^+(M) &= \bigcup_{p\in M} S_p^+(M) = \{X \in TM : \, g(X,X) = 1\} \\ S(M) &= \bigcup_{p\in M} S_p(M) = \{X \in TM : \, |g(X,X)| = 1\} \end{aligned}$$

chamados *fibrados unitarios temporal*, *espacial* e *non nulo* da variedade (M,g), respectivamente. En xeral, notaránse os vectores con letras latinas minúsculas: $x, y, z, v, w, \ldots$, e os campos de vectores coas correspondentes maiúsculas: $X, Y, Z, V, W, \ldots$

Dada a variedade semi-riemanniana (M,g), tense determinada de forma única a *conexión de Levi–Civita* asociada a (M,g) como a conexión simétrica que fai paralela a métrica g. A *fórmula de Koszul* dános a expresión de tal conexión:

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_X Y, Z\right) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde X, Y, Z son campos de vectores sobre M. Unha vez temos unha conexión sobre M, definimos o tensor curvatura de tipo $(1,3)$ segundo:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.2}$$

que verifica as identidades:

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z \tag{1.3}$$

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \tag{1.4}$$

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = 0 \tag{1.5}$$

para X, Y, Z, V campos de vectores en M, onde $[\, ,\,]$ denota o corchete de Lie de campos de vectores en M. A identidade (1.4) é coñecida co nome de *Primeira Identidade de Bianchi* ou *Identidade de Bianchi Alxébrica* e (1.5) co de *Segunda Identidade de Bianchi* ou *Identidade de Bianchi Diferencial*.

En ocasións consideraremos o tensor curvatura de tipo $(0,4)$ asociado:

$$R(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z,V)$$

que, ademais, cumple:

(1.6) $$R(X,Y,Z,V) = R(Z,V,X,Y)$$

(1.7) $$R(X,Y,Z,V) = -R(X,Y,V,Z)$$

de novo para X, Y, Z, V campos sobre M.

Debido á dificultade que entraña traballar con un campo de tensores tipo $(1,3)$ ou $(0,4)$, téñense definido obxectos máis sinxelos que permiten recuperar información relevante sobre o tensor curvatura. Entre eles, o máis significativo é a curvatura seccional. Así, defínese a *curvatura seccional* sobre os planos non dexenerados, é dicir, sobre os planos Π que verifican $g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2 \neq 0$, onde x e y son vectores que xeneran o plano Π, como segue:

$$K(\Pi) = \frac{R(x,y,y,x)}{g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2}$$

A importancia do concepto de curvatura seccional radica non só en que permite dar unha interpretación xeométrica da curvatura como a curvatura da superficie tanxente ó plano considerado, senón que, ademais, é posible reconstruir o tensor curvatura a partir da curvatura seccional dos planos do espacio tanxente.

Unha consecuencia importante do feito de non estar a curvatura seccional definida sobre toda a Grassmanniana de 2-planos en cada punto, é que non está necesariamente acotada, nin toma valores nun conxunto conexo de $\mathbb{R}$. Tanto así, que a posibilidade de extender con continuidade dita función a toda a Grassmanniana é equivalente á súa acotación, o que só é posible se K é constante [6], [18].

Resultará de vital importancia para o desenvolvemento desta memoria o emprego de dúas contraccións do tensor curvatura, defínense o tensor de Ricci e a curvatura escalar como

$$Ric\,(X,Y) = tr\,\{Z \to R(Z,X)Y\}$$

e

$$Sc = tr(Ric),$$

respectivamente. Localmente, para unha referencia ortonormal $E_1, \ldots, E_n$, o tensor de Ricci pódese expresar do seguinte xeito:

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} R(E_i, X, Y, E_i)$$

e a curvatura escalar:

$$Sc = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} Ric(E_i, E_i) = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{E_i}\varepsilon_{E_j} R(E_j, E_i, E_i, E_j)$$

onde $\varepsilon_{E_k} = g(E_k, E_k)$, para todo $k = 1, \ldots, n$.

Unha situación na que a curvatura da variedade é relativamente simple, é aquela na que o tensor de Ricci pode expresarse coma un múltiplo escalar do tensor métrico, é dicir

$$Ric = \lambda\, g$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Neste caso $\lambda = \frac{Sc}{dimM}$ e dicimos que a variedade é *Einstein*. Para $dimM = 2$, temos que toda superficie cumple que $Ric = \lambda g$ para algunha función λ, polo que a propiedade de ser Einstein é equivalente á constancia da curvatura de Gauss. Analogamente, a anulación do tensor de Weyl en $dimM = 3$ (véxase Observación 2.2.6) permite amosar que unha variedade 3-dimensional é Einstein se e só se a curvatura seccional é constante. Sen embargo, para $dimM > 4$, a situación cambia radicalmente e as variedades Einstein están lonxe de ser determinadas.

Sexa $z \in T_pM$ e consideremos a aplicación linear

$$\begin{array}{rccc} R(\cdot, z)z: & T_pM & \longrightarrow & T_pM \\ & x & \mapsto & R(x,z)z \end{array}$$

Dado que $g(R(x,z)z,z) = 0$ e $g(R(z,z)z,x) = 0$, podemos restrinxir o percorrido da aplicación anterior ó subespacio ortogonal a z e considerar así a aplicación

$$R(\cdot, z)z : z^{\perp} \longrightarrow z^{\perp}$$

Estamos agora en condicións de introducir o operador de Jacobi na seguinte

Definición 1.1.2 Sexa (M,g) unha variedade semi-riemanniana e $Z \in S(M)$. A restrición $R_Z : Z^{\perp} \longrightarrow Z^{\perp}$ da aplicación linear $R(\cdot, Z)Z$ a $Z^{\perp}$ denomínase *operador de Jacobi con respecto a* Z:

$$R_Z X = R(X,Z)Z, \text{ con } X \in Z^{\perp}.$$

Observación 1.1.1 Para campos de vectores $X, Y \in Z^{\perp}$ temos

$$\begin{aligned} g(R_Z X, Y) &= g(R(X,Z)Z,Y) = g(R(Z,Y)X,Z) \\ &= g(R(Y,Z)Z,X) = g(R_Z Y, X) \end{aligned}$$

logo o operador de Jacobi é unha aplicación autoadxunta.

Por ser o operador de Jacobi unha aplicación autoadxunta, no caso en que a métrica sexa definida positiva, será diagonalizable. En xeral, a situación non é tan sinxela, podendo presentar R_X autovalores complexos ou raíces múltiples do seu polinomio mínimo. Ademais, é importante sinalar que o espectro de R_X non determina completamente o operador de Jacobi en métricas indefinidas, sendo preciso o estudio dos polinomios mínimos de R_X. Esta consideración achéganos á seguinte sección.

1.2 Variedades de Osserman

Coma na sección anterior, partimos dunha variedade semi-riemanniana (M, g), consideramos un campo de vectores $Z \in S(M)$, e denotamos por $R_Z : Z^\perp \longrightarrow Z^\perp$ o operador de Jacobi asociado. Como comentabamos ó remate da sección precedente, no caso de ser (M, g) unha variedade riemanniana, o operador de Jacobi R_Z é diagonalizable, sen embargo, isto non é certo en xeral para métricas g non definidas. É por iso que damos a seguinte definición xeral

Definición 1.2.1 Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana e $p \in M$.

i) (M, g) dise *Osserman temporal* (resp. *Osserman espacial*) en p se o polinomio característico de R_z é independente de $z \in S_p^-(M)$ (resp. $z \in S_p^+(M)$) ; equivalentemente, se os autovalores de R_z son constantes en $S_p^-(M)$ (resp. $z \in S_p^+(M)$).

ii) (M, g) dise *Jordan-Osserman temporal* (resp. *Jordan-Osserman espacial*) en p se a forma canónica de Jordan de R_z é independente de $z \in S_p^-(M)$ (resp. $z \in S_p^+(M)$).

No caso riemanniano as dúas condicións da definición quedan reducidas á constancia dos autovalores do operador de Jacobi en $S_p(M)$, por termos garantida a súa diagonalizabilidade. Sen embargo, ambas definicións son diferentes en xeometría semi-riemanniana.

O seguinte teorema simplifica a situación en que nos achamos, pois amosa que é equivalente a condición Osserman temporal e espacial:

Teorema 1.2.1 [10, Teorema 1.2.1] *Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana e $p \in M$. Entón (M, g) é Osserman temporal en p se e só se é Osserman espacial en p.*

Unha demostración deste feito pódese ver, por exemplo, en [10]. Este teorema dá coherencia á seguinte definición, que vén a substituir á Definición 1.2.1:

Definición 1.2.2 Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana. Entón (M, g) é *Osserman en $p \in M$* se é Osserman temporal e espacial en p.

Hai que ter en conta que o polinomio característico do operador de Jacobi R_z non tén que ser constante para $z \in S_p(M)$, pois pode ser diferente segundo o vector z sexa espacial ou temporal, é dicir, $z \in S_p^-(M)$ ou $z \in S_p^+(M)$. De feito, no caso máis sinxelo dun espacio de curvatura seccional constante c, tense que $R_z = c \cdot Id$ se $z \in S_p^+(M)$ e $R_z = -c \cdot Id$ se $z \in S_p^-(M)$.

Observación 1.2.2 Sen embargo, as condicións Jordan-Osserman espacial e temporal non son equivalentes [14],[10, Observación 1.2.6.].

Un primeiro resultado concerninte á condición puntual de ser Osserman é o seguinte:

Proposición 1.2.3 [10, Proposicion 1.2.1] *Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana. Se (M, g) é Osserman en $p \in M$ entón é Einstein en p.*

Demostración.
Sexa (M, g) Osserman espacial en p. Entón o polinomio característico $f_z(t) = det(R_z - t \cdot Id) = \sum_{i=0}^{n} c_i t^i$, do operador de Jacobi R_z, non depende de $z \in S_p^+(M)$. A traza de R_z é $tr(R_z) = -c_{n-2}$ e, por outro lado, $tr(R_z) = Ric(z, z)$, de onde segue que $Ric(z, z) = -c_{n-2}$, co que o tensor de Ricci é independente de $z \in S_p^-(M)$. Pero de aquí dedúcese que $Ric = \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{R}$, empregando o seguinte resultado. □

Lema 1.2.4 [19] *Sexa $(M, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial cun producto interior indefinido $\langle , \rangle$ e ϕ unha forma bilinear sobre V.*

i) Se $\phi(x, x) = 0$ para todo vector nulo $x \in V$ entón $\phi = \lambda\langle , \rangle$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Se $|\phi(x, x)| \leq k$, onde $k \in \mathbb{R}$ para todo vector unitario temporal $x \in V$ (respectivamente unitario espacial), entón $\phi = \lambda\langle , \rangle$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

iii) Se $| \phi(x, x) | \leq k_1$, onde $k \in \mathbb{R}$ para todo vector unitario temporal(resp. espacial) $x \in V$ e $\phi(y, y) \geq k_2 \in \mathbb{R}$ para todo vector unitario espacial (resp. temporal) $y \in V$ entón $\phi = \lambda\langle , \rangle$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ata agora a condición de ser Osserman considerouse como unha condición meramente alxébrica, definida sobre un so punto. As definicións seguintes extenden esta condición a toda a variedade de dous modos diferentes: puntual e globalmente, se ben, como veremos máis adiante, en ocasións ambas condicións son equivalentes.

Definición 1.2.3 Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana. Diremos que (M, g) é *puntualmente Osserman* se (M, g) é Osserman en cada punto $p \in M$.

Definición 1.2.4 Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana. Diremos que (M, g) é *globalmente Osserman* se os autovalores de $\langle Z, Z\rangle R_Z$ son constantes en $S(M)$ (i.e., son independentes da dirección $z \in S_p^{\pm}(M)$ e do punto base $p \in M$).

En vista das dúas definicións anteriores, é obvio que a condición de ser globalmente Osserman é máis restrictiva que a de ser puntualmente Osserman, sen embargo, o seguinte teorema proporciona condicións sobre a variedade coas que ambas equivalen.

Para unha variedade (M, g) puntualmente Osserman, tense, pola proposición 1.2.3, que é Einstein en cada punto $p \in M$. Se ademais engadimos a M a hipótese de conexidade e $n \geq 3$, entón, polo Lema de Schur, (M, g) é unha variedade Einstein: $Ric = \lambda\, g$, para un $\lambda \in \mathbb{R}$, concretamente $\lambda = \frac{Sc}{n}$.

Teorema 1.2.5 [10, Teorema 1.3.1] *Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana conexa puntualmente Osserman tal que*

i) o operador de Jacobi R_Z ten un único autovalor en cada $p \in M$ e $dimM \geq 3$, ou *ii) o operador de Jacobi R_Z ten dous autovalores distintos, reais con multiplicidade constante ou ben complexos, en cada $p \in M$ e $dim M > 4$,*

entón (M, g) é globalmente Osserman.

A demostración deste teorema pódese atopar en [10].

1.3 Módulos de Clifford

No estudio do operador de Jacobi e, en concreto, do carácter Osserman de variedades riemannianas, xorden naturalmente, como veremos nesta sección, certas estructuras coñecidas co nome de *módulos de Clifford*, e estas presentan certas propiedades que son obxecto de estudio deste traballo.

1.3.1 Definicións

Comezamos dando as primeiras definicións a nivel alxébrico sobre espacios vectoriais, facendo así unha primeira aproximación ás estructuras no espacio tanxente a unha variedade nun punto, que identificamos co espacio vectorial considerado, para, posteriormente, extende-las a toda a variedade.

Definición 1.3.1 Sexa V un espacio vectorial de dimensión n. Unha *estructura de módulo de Clifford(ν) real en V*, con $\nu \leq n$, é unha colección de aplicacións lineares J_i en V con un conxunto de xeneradores $\{J_1, \ldots, J_\nu\}$ verificando a *relación de Clifford*:

$$J_i J_j + J_j J_i = -2\, \delta_{ij}\, Id \tag{1.8}$$

As estructuras de módulo de Clifford aparecen de forma natural en espacios de moi diversa natureza; pasando por alto o caso trivial $\nu = 0$ no que calquera espacio vectorial satisfai vacuamente as condicións da definición, veremos agora algúns exemplos sinxelos. O máis simple deles é o plano complexo, no que consideramos como J_1 a multiplicación pola unidade imaxinaria i. A relación de Clifford satisfaise trivialmente, pois $i^2 = -1$, e así temos no plano complexo un exemplo de estructura de módulo de Clifford(1). Análogamente, unha estructura complexa definida nun espacio vectorial arbitrario, dótao dunha estructura de *módulo de Clifford(1)*. Este feito é esperable, pois a relación de Clifford no caso $\nu = 1$ queda reducida a $J_1^2 = -Id$.

Definición 1.3.2 Sexa V un espacio vectorial de dimensión n. Unha *estructura de módulo de Clifford(ν, η) real xeneralizada en V*, con $\nu + \eta \leq n$, é unha colección de aplicacións lineares en V con un conxunto de xeneradores $\{J_1, \ldots, J_\nu, H_1, \ldots, H_\eta\}$ verificando as condicións:

$$\begin{array}{rcll} J_i J_j + J_j J_i & = & -2\, \delta_{ij}\, id & i, j = 1, \ldots, \nu \\ H_i H_j + H_j H_i & = & 2\, \delta_{ij}\, id & i, j = 1, \ldots, \eta \\ J_i H_j + H_j J_i & = & 0 & i = 1, \ldots, \nu \quad j = 1, \ldots, \eta \end{array} \tag{1.9}$$

Comparando as definicións 1.3.1 e 1.3.2, é doado xustificar a segunda coma xeneralización da primeira, e así podemos aplicar cada un dos exemplos anteriores a este novo caso. Pero agora temos tamén estructuras relativamente sinxelas que verifican as novas condicións e non as anteriores. Tales estructuras son as *estructuras producto*: Sendo V un espacio vectorial, unha estructura producto sobre V é unha aplicación linear $J : V \longrightarrow V$ verificando $J^2 = id$. É obvio que tal J dota a V dunha *estructura de módulo de Clifford*$(0,1)$ *xeneralizada*[5].

1.3.2 Cliff(2), Cliff(3) e outras estructuras sinxelas

No apartado anterior consideramos os casos máis sinxelos, correspondentes a unha estructura complexa ou producto. Neste epígrafe atendemos o caso seguinte, analizando os módulos de Clifford con dous xeneradores. O seguinte exemplo de estructura de módulo de Clifford, o que corresponde a dous xeneradores $\{J_1, J_2\}$, tamén o podemos atopar nun espacio coñecido: *o espacio cuaterniónico*. Consideramos o espacio $\mathbb{R}^4$ no que definimos dúas aplicacións i, j verificando $i^2 = -Id, j^2 = -Id, i \circ j + j \circ i = 0$ e unha terceira aplicación k composición das dúas anteriores: $k = j \circ i$ e que denotamos $k = ij$. Entre estas aplicacións coa notación establecida temos as coñecidas relacións do espacio cuaterniónico. Se consideramos $J_1 = i, J_2 = j$ verifícanse as relacións (1.8) da definición. Obsérvese que considerando os xeneradores J_1, J_2 temos unha estructura de *módulo de Clifford*(2), pero basta considerar a composición de ambas aplicacións para obter unha terceira que automáticamente dota ó espacio dunha estructura de *módulo de Clifford*(3). Comentaremos de novo este feito máis adiante, en relación ás restriccións que unha estructura de módulo de Clifford impón sobre a dimensión do espacio.

Algo similar sucede cando tratamos coas estructuras de módulos de Clifford xeneralizados. O exemplo máis sinxelo que atopamos con algunha estructura producto é o *espacio paracuaterniónico*[12]: partindo dun espacio vectorial V, temos definidas tres estructuras J_1, J_2, J_3 anticonmutativas e de forma que J_1 e J_2 son paracomplexas e $J_3 = J_1 J_2$. Definido deste xeito, é doado ver que un espacio paracuaterniónico posúe unha estructura de *módulo de Clifford*$(1,2)$ *xeneralizada*.

1.3.3 Obstruccións á existencia de módulos de Clifford nunha variedade

O feito de non poder definir unha estructura cuaterniónica nun espacio vectorial de dimensión par arbitraria, fai pensar que, no caso máis xeral dos módulos de Clifford, poidamos atopar tamén importantes restriccións para a súa existencia. É importante sinalar que toda estructura de módulo de Clifford(ν) admite métricas adaptadas, i.e., existe un producto interior $\langle , \rangle$ tal que

$$\langle x, \phi y \rangle + \langle \phi x, y \rangle = 0, \forall \phi \in \{J_1, \ldots, J_\nu\}.$$

Polo tanto, as posibles obstruccións xeneralizan as coñecidas á existencia de estructuras Hermíticas, para-Hermíticas, cuaterniónicas, para-cuaterniónicas, etc. O seguinte teorema amosa cales son esas restriccións sobre a dimensión para un módulo de Clifford cun número de estructuras arbitrario:

Teorema 1.3.1 [1] *Sexa $n = 2^r n_0$, con n_0 impar. Un espacio vectorial V, de dimensión n, admite unha estructura de módulo de Clifford(ν) se e só se $\nu \leq \rho(r)$, onde*

$$\begin{aligned} \rho(i+4) &= \rho(i) + 8 \\ \rho(i) &= 2^i - 1, \qquad i = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Deste teorema deducimos inmediatamente que a dimensión dun espacio vectorial con estructura de módulo de Clifford ten que ser par. Se particularizamos o teorema ós casos Clifford(2) e Clifford(3), obtemos que é necesario un espacio vectorial de dimensión múltiplo de 4 para definir sobre el unha estructura cuaterniónica. Atendendo a un comentario anterior, pódese observar que a dimensión necesaria para albergar unha estructura de módulo de Clifford(2) ou de módulo de Clifford(3) é $4k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, é dicir, a mesma en ambos casos, como era de esperar, xa que dados dous xeneradores dunha estructura de módulo de Clifford(2), a composición deles proporciona un novo xenerador que, cos anteriores, da lugar a un módulo de Clifford(3). Na seguinte sección daremos algúns exemplos de tensores Osserman con estas estructuras, pero antes amosaremos unha táboa que resultará ilustrativa das restriccións que nos ofrece o Teorema 1.3.1.

Na táboa apréciase cómo os espacios vectoriais de dimensión impar non admiten estructuras deste tipo, como xa advertimos anteriormente. Ademais, o crecemento é aproximado a exponencial da dimensión fronte a $\nu(r)$, así, precisamos unha dimensión igual a 4096 para albergar un módulo de Clifford(24), por exemplo, mentres basta dimensión 2 para dotar ó espacio dunha estructura complexa. O feito de que en dimensión 4 e 8 existan tódolos posibles módulos de Clifford, está relacionado coa paralelizabilidade das esferas S^3 e S^7. En dimensión 16, sen embargo, non ocorre o análogo, a pesar de comportarse esta dimensión tamén dun xeito especial no Teorema 4.0.4.

Dimensión n	r	$\rho(r)$	Estructuras que admite
0	0	0	
1	1	0	
2	1	1	Cliff(1)
3	0	0	
4	2	3	Cliff(1), Cliff(2), Cliff(3)
5	0	0	
6	1	1	Cliff(1)
7	0	0	
8	3	7	Clif(1), Cliff(2), ..., Cliff(7)
9	0	0	
10	1	1	Cliff(1)
11	0	0	
12	2	3	Cliff(1), Cliff(2), Cliff(3)
13	0	0	
14	1	1	Cliff(1)
15	0	0	
16	4	8	Cliff(1),Cliff(2),...,Cliff(8)
18	1	1	Cliff(1)
20	2	3	Cliff(1), Cliff(2)
24	3	7	Cliff(1), Cliff(2), ..., Cliff(7)
32	5	9	Cliff(1), Cliff(2), ..., Cliff(9)
64	6	11	Cliff(1), Cliff(2), ..., Cliff(11)
128	7	15	Cliff(1), Cliff(2), ..., Cliff(15)
256	8	16	Cliff(1), Cliff(2), ..., Cliff(16)
512	9	17	Cliff(1), Cliff(2), ..., Cliff(17)
1024	10	19	Cliff(1), Cliff(2), ..., Cliff(19)
2048	11	23	Cliff(1), Cliff(2), ..., Cliff(23)
4096	12	24	Cliff(1), Cliff(2), ..., Cliff(24)

1.3.4 Exemplos de tensores curvatura alxébricos Osserman

Adicaremos este apartado a varios exemplos que permitirán relacionar en casos sinxelos os módulos de Clifford coa condición de ser Osserman. Para iso facemos un achegamento dende o punto de vista alxébrico, equivalente a considerar o exemplo no espacio tanxente á variedade nun punto.

Sexa V un espacio vectorial, a unha aplicación cuadrilinear $\phi : V \times V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

verificando

$$\begin{aligned}
&\phi(x,y,z,w) = -\phi(y,x,z,w) = -\phi(x,y,w,z)\\
&\phi(x,y,z,w) = \phi(z,w,x,y)\\
&\phi(x,y,z,w) + \phi(y,z,x,w) + \phi(z,x,y,w) = 0
\end{aligned}$$

para $x,y,z,w \in V$ chamámoslle *tensor de curvatura alxébrico*. No caso en que teñamos un producto interior en V, sexa este $\langle , \rangle$, definimos sobre $(V, \langle , \rangle)$ a aplicación $\widetilde{\phi} : V \times V \times V \longrightarrow V$ de forma única como $\langle \widetilde{\phi}(x,y,z), w\rangle = \phi(x,y,z,w)$, para $x,y,z,w \in V$; referirémonos a esta nova aplicación tamén co nome de *tensor de curvatura alxébrico*, se ben do contexto deducirase en cada caso de cal dos dous estamos a falar. De xeito análogo a como se definiron o operador de Jacobi e a propiedade de ser Osserman nun punto, faise para o tensor curvatura alxébrico, así, $\widetilde{\phi}_z : z^\perp \longrightarrow z^\perp$ é o operador de Jacobi de $\widetilde{\phi}$ para un vector non nulo $z \in V$; e $\widetilde{\phi}$ dise Osserman se o polinomio característico de $\widetilde{\phi}_z$ é independente de $z \in V$, con z espacial ou temporal, pero, en xeral, non independente do carácter de z. Atendendo a esta terminoloxía, os seguintes exemplos amosan casos sinxelos que atoparemos como compoñentes de exemplos máis complicados en capítulos posteriores.

Exemplo 1.3.2 Sexa $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial cun producto interior. Definimos un tensor curvatura alxébrico $R^0 : V \times V \times V \longrightarrow V$ como

$$R^0(x,y)z = \langle y,z\rangle x - \langle x,z\rangle y$$

Para un vector unitario $z \in V$ o operador de Jacobi vén dado por $R^0_z = \langle z,z\rangle Id$; polo tanto R^0 é Osserman e posúe como único autovalor $\langle z,z\rangle$.

Nótese que a expresión que define o tensor curvatura deste exemplo é a correspondente ó tensor curvatura nun punto dunha variedade onde a curvatura seccional é constante e igual a 1. En xeral, temos que calquera variedade con curvatura seccional constante nun punto p é Osserman en p.

Exemplo 1.3.3 Sexa (V, J) un espacio vectorial complexo e $\langle , \rangle$ un producto hermítico con respecto a J, i.e., $\langle Jx, y\rangle + \langle x, Jy\rangle = 0$ para calesquera $x, y \in V$. Neste contexto definimos o tensor curvatura alxébrico $R^J : V \times V \times V \longrightarrow V$ en función do producto interior $\langle , \rangle$ e a estructura complexa J:

$$R^J(x,y)z = \langle Jx,z\rangle Jy - \langle Jy,z\rangle Jx + 2\langle Jx,y\rangle Jz$$

para vectores $x,y,z \in V$. O operador de Jacobi R^J_z, para $z \in V$ vector unitario é

$$R^J_z = \begin{cases} -3\langle z,z\rangle id & \text{no subespacio} \quad \langle Jz\rangle \\ \quad 0 & \text{no subespacio} \quad \langle Jz\rangle^\perp \cap z^\perp \end{cases}$$

co cal, o tensor é Osserman con autovalores 0 e -3 e autoespacios asociados de dimensións 1 e $n-2$ respectivamente.

Os dous tensores curvatura alxébricos anteriores non só están relacionados con certos espacios modelo, senón que proporcionan a clave para obter a estructura xeral de calquera tensor curvatura alxébrico. Así, denotamos por $\mathcal{R}(V)$ o espacio dos tensores curvatura alxébricos, sexa $\mathcal{S}(V)$ o espacio dos tensores de tipo $(0,2)$ simétricos e $\mathcal{A}(V)$ o espacio dos tensores de tipo $(0,2)$ antisimétricos. Definimos

$$R_\phi^{\mathcal{S}}(x,y,z,w) = \phi(y,z)\phi(x,w) - \phi(x,z)\phi(y,w)$$

$$R_\psi^{\mathcal{A}}(x,y,z,w) = \psi(y,z)\psi(x,w) - \psi(x,z)\psi(y,w) - 2\psi(x,y)\psi(z,w)$$

onde ϕ é un tensor simétrico e ψ antisimétrico. Sexa

$$\mathcal{S}(V) := \langle R_\phi^{\mathcal{S}} : \phi \in \mathcal{S} \rangle$$

$$\mathcal{A}(V) := \langle R_\phi^{\mathcal{A}} : \psi \in \mathcal{A} \rangle$$

Tense o seguinte teorema

Teorema 1.3.4 [14, Teorema 1.8.2] *Sexa V un espacio vectorial cun producto interior de signatura arbitraria, entón $\mathcal{R}(V) = \mathcal{S}(V) = \mathcal{A}(V)$.*

Exemplo 1.3.5 Dado un espacio vectorial V, cun producto interior $\langle , \rangle$, e unha *estructura paracomplexa*(ou sexa, unha estructura producto na que os autoespacios correspondentes ós autovalores 1 e -1 teñen a mesma dimensión), dicimos que o producto interior $\langle , \rangle$ é parahermítico se $\langle Jx, y\rangle + \langle x, Jy\rangle = 0$. Nesta situación definimos a aplicación $R^J : V \times V \times V \longrightarrow V$ como

$$R^J(x,y)z = \langle Jx, z\rangle Jy - \langle Jy, z\rangle Jz + 2\langle Jx, y\rangle Jz$$

onde $x, y, z \in V$. O operador de Jacobi asociado tamén é Osserman con autovalores 0 e 3 e autoespacios de dimensións 1 e $n-2$ á vista da expresión seguinte

$$R_z^J = \begin{cases} 3\langle z, z\rangle id & \text{no subespacio} \quad \langle Jz\rangle \\ 0 & \text{no subespacio} \quad \langle Jz\rangle^\perp \cap z^\perp \end{cases}$$

Os tres exemplos anteriores ilustran cómo se comporta o operador de curvatura correspondente ós casos máis sinxelos de variedades de Osserman:

– (M,g) é un espacio de curvatura seccional constante c se e só se $R = cR^0$ [23], [27]

– (M,g,J) é unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante c se e só se [2]
$$R = \frac{c}{4}(R^0 - R^J)$$

– (M, g, J) é unha variedade para-Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante c se e só se [9]
$$R = \frac{c}{4}(R^0 + R^J)$$

Analizamos agora o caso moito máis xeral dunha variedade cunha estructura de módulo de Clifford xeneralizada, e facémolo mediante o seguinte teorema:

Teorema 1.3.6 *Sexa $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial cun producto interior e estructura de módulo de Clifford(ν, η). Sexa $\{J_1, \dots, J_\nu, H_1, \dots, H_\eta\}$ unha familia de xeradores verificando a relación de Clifford. Para os escalares $\lambda_0, \dots, \lambda_\nu, \mu_1, \dots, \mu_\eta$ definimos o tensor*

$$R = \lambda_0 R^0 + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{3}(\lambda_0 - \lambda_i) R^{J_i} + \sum_{j=1}^{\eta} \frac{1}{3}(\mu_j - \lambda_0) R^{H_j}$$

que é un tensor curvatura alxébrico con operador de Jacobi

$$R_z = \begin{cases} \lambda_1 \langle z, z\rangle id & \textit{no subespacio } \langle J_1 z\rangle \\ \quad \dots & \\ \lambda_\nu \langle z, z\rangle id & \textit{no subespacio } \langle J_\nu z\rangle \\ \mu_1 \langle z, z\rangle id & \textit{no subespacio } \langle H_1 z\rangle \\ \quad \dots & \\ \mu_\eta \langle z, z\rangle id & \textit{no subespacio } \langle H_\eta z\rangle \\ \lambda_0 \langle z, z\rangle id & \textit{no subespacio } \langle z, J_1 z, \dots, J_\nu z, H_1 z, \dots, H_\eta z\rangle^\perp \end{cases}$$

e, polo tanto, é Osserman.

Demostración.
O resultado séguese dos exemplos 1.3.2, 1.3.3 e 1.3.5, tendo en conta que, dado que a métrica é adaptada ás estructuras $J_1, \dots, J_\nu, H_1, \dots, H_\eta$, os subespacios $\langle z\rangle$, $\langle J_1 z\rangle$, …, $\langle J_\nu z\rangle$, $\langle H_1 z\rangle$, …, $\langle H_\eta z\rangle$ son dous a dous ortogonais.

1.3.5 Relación coas métricas de Osserman

Os exemplos da sección anterior proporcionan unha ampla variedade de tensores curvatura alxébricos Osserman con calesquera autovalores, pero cómpre preguntarse se existirán variedades nas que se realicen estes tensores curvatura.

Dado que podemos considerar o tensor curvatura alxébrico como o tensor curvatura da variedade M definido no espacio tanxente a un punto $p \in M$, podemos extender o tensor empregando coordenadas normais, de xeito que o tensor alxébrico inicial, sexa a realización no punto $p \in M$ do tensor curvatura asociado a unha métrica semi-riemanniana definida nunha veciñanza normal de $p \in M$.

Así, se R é un tensor curvatura alxébrico, $M = \mathbb{R}^n$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ unha base ortonormal, definimos o tensor métrico g na bola unidade con centro en θ mediante a seguinte expresión

$$g = \sum_{i,j} \left\{ \delta_{ij} + \sum_{k,l} R(e_i, e_j, e_k, e_l) x^k x^l \right\} dx^i dx^j + \mathcal{O}(x^3)$$

O tensor curvatura asociado a g así definida, coincide con R na orixe.

Sen embargo, existen resultados que amosan que non é posible, en xeral, atopar unha variedade riemanniana que realice os tensores de curvatura anteriores en tódolos seus puntos:

Teorema 1.3.7 [25] *Sexa (M, g, J) unha variedade case-Hermítica de dimensión $n > 4$ con tensor curvatura*

$$R = \lambda_0 R^0 + \lambda_1 R^J$$

onde λ_0, λ_1 son funcións reais con λ_0 non constantemente nula. Entón $\lambda_0 = \lambda_1$ e M é localmente isométrica a $\mathbb{C}P(n/2)$ ou ó seu dual non compacto.

O resultado tamén é válido para dimensión 4 asumindo que λ_0 ou λ_1 sexa constante. Esta nova hipótese é necesaria, pois Olszak atopou exemplos, como veremos no seguinte capítulo, de variedades case-Hermíticas de dimensión 4 co tensor curvatura $R = \lambda_0 R^0 + \lambda_1 R^J$ con λ_0 e λ_1 non constantes.

O resultado anterior foi xeneralizado por Gilkey para a situación máis xeral onde a curvatura está dada por certos módulos de Clifford [13].

Capítulo 2

Variedades puntualmente Osserman en dimensión 4

Neste capítulo trataremos o caso particular de variedades de dimensión 4, poñendo de manifesto o especial que resulta o comportamento destas variedades fronte á condición de Osserman. Dunha banda temos, Proposición 1.2.3, que toda variedade Osserman é Einstein, polo que o interese no estudio do carácter Einstein é certamente relativo neste aspecto. Por outro lado, como se amosa no Teorema 1.2.5, a dimensión 4 supón unha situación particular na análise da relación entre as variedades Osserman e puntualmente Osserman.

Neste segundo capítulo, continuamos introducindo algúns conceptos que serán importantes no Capítulo 3, para iso descompoñemos o tensor curvatura en tensores ortogonais respecto a unha certa métrica, e será unha desas compoñentes, o *tensor de Weyl*, a que nos permitirá deducir resultados de interese. A introducir este tensor e algunhas das súas propiedades está adicada a Sección 2.2.1. Na Sección 2.2.2, relacionaremos o tensor de Weyl coa condición de Osserman, amosando resultados de vital importancia para o desenvolvemento do Capítulo 3. Pero antes de introducírmonos nestes aspectos, recordamos na Sección 2.1 algúns resultados coñecidos sobre as variedades 4-dimensionais de Osserman, ó tempo que amosamos exemplos coñecidos de variedades puntualmente Osserman que non son globalmente Osserman.

2.1 Variedades puntualmente e globalmente Osserman

Comentabamos no Capítulo 1 ó dar as definicións sobre as condicións de Osserman global e puntual, cómo a primeira delas é máis restrictiva que a segunda. Así, toda variedade globalmente Osserman tamén o é puntualmente. Ademais, dabamos condicións suficientes no Teorema 1.2.5 para a equivalencia de ambas condicións en dimensións maiores que 4. Resulta de interese, polo tanto, presentar exemplos de variedades 4-dimensionais puntualmente Osserman que non sexan globalmente Osserman.

Cómpre sinalar neste punto que as condicións puntual e global de Osserman son equivalentes en xeometría Lorentziana [10]. Polo tanto, no que segue unicamente prestaremos atención ós casos riemanniano e de signatura $(--++)$. As variedades riemannianas que verifican a condición global de Osserman en dimensión 4 foron clasificadas por Chi, quen demostrou que se corresponden localmente cos espacios de curvatura seccional constante ou as variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante [4]. Un resultado análogo non é certo en signatura $(--++)$, onde se presentan numerosos exemplos de variedades non simétricas que verifican a condición global de Osserman. Tales exemplos baséanse no feito de que os operadores de Jacobi non son necesariamente diagonalizables. Sen embargo, asumindo esta última condición, Blažić, Bokan e Z. Rakić probaron que as variedades 4-dimensionais de Osserman con operadores de Jacobi diagonalizables son localmente isométricas a un espacio de curvatura seccional constante, unha variedade Kähler indefinida de curvatura seccional holomorfa constante ou unha variedade para-Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante [3].

Continuando os derradeiros resultados do Capítulo 1, podemos dicir que, neste mesmo senso, adquire especial importancia o resultado seguinte de Olszak, que ofrece unha familia de variedades que son puntualmente Osserman pero non globalmente, pois as funcións λ_0, λ_1 determinan os autovalores dos operadores de Jacobi e, como se deduce do teorema anterior, do Teorema 1.3.6 e dos resultados da sección 1.3.5, non son necesariamente constantes.

Teorema 2.1.1 [21, Teorema 1] *Sexa $(M, J, \widetilde{g})$ unha variedade kähleriana Bochner chá de dimensión 4. Ademais, a curvatura escalar $\widetilde{Sc}$ non se anula en todo M e non é constante. Sexa $g = e^{\sigma}\widetilde{g}$, onde $\sigma = -log(C \cdot \widetilde{Sc})$, $C = cte > 0$. Entón a variedade Hermítica (M, J, g) é un espacio complexo xeneralizado, i.e., o tensor curvatura é da forma $R = \lambda_0 R^0 + \lambda_1 R^J$, para a que $\lambda_1 \neq 0$ en calquera punto de M e λ_1 non é constante.*

Finalmente, sinalemos que o mellor xeito que coñecemos para dar exemplos de variedades que non son globalmente Osserman pero si puntualmente, ofrécenolo o Teorema 2.2.11 que veremos ó remate do capítulo, pois, atendendo a este, basta dar variedades Einstein e auto-duais non globalmente Osserman. Polo tanto, temos aquí unha fonte de exemplos que acada especial relevancia no caso de dimensión 4.

2.2 Condición puntual de Osserman e auto-dualidade

2.2.1 Tensor de Weyl

Esta sección está adicada a introducir o tensor de Weyl, que nos permitirá avanzar no estudio de variedades puntual e globalmente Osserman.

Dado V un espacio vectorial n-dimensional con base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, definimos os *bivectores* como os elementos da forma

$$\sum_{i<j} a_{ij}\, e_i \wedge e_j$$

para $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Nótese que o sumatorio representa unha suma ordeada e, ademais, entenderemos que $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$. Denotamos o espacio dos bivectores en V por $\Lambda^2 V$, que é un espacio vectorial de dimensión $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$.

Existen grandes analoxías de tipo alxébrico entre o espacio dos bivectores e o espacio das 2-formas, tense de feito

$$\begin{aligned}
\Lambda^2 V^* := \left(\Lambda^2 V\right)^* &= \left\{\omega : \Lambda^2 V \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \text{ é linear}\right\} \\
&= \{\omega : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \text{ é linear e antisimétrica}\} \\
&= \{\omega : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} : \omega \text{ é bilinear e antisimétrica}\}
\end{aligned}$$

Pretendemos relacionar a antisimetría dos bivectores coa antisimetría que presenta o tensor curvatura nos primeiro e segundo argumentos e nos terceiro e cuarto. Se fixamos dous vectores x, y e pensamos o tensor de curvatura alxébrico R como a aplicación

$$R(x, y) : \Lambda^2(T_p M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

temos reflexada a antisimetría nos dous últimos argumentos de R co emprego dos bivectores. Deste mesmo xeito, podemos facer o correspondente para x e y, pensándoo como un bivector $x \wedge y$, e teriamos así un endomorfismo que denotaremos $\widetilde{R}$ en $\Lambda^2(T_p M)$ (de agora en diante abreviaremos con Λ^2_p):

$$\widetilde{R} : \Lambda^2(T_p M) \longrightarrow \Lambda^2(T_p M)$$

Sen embargo, e pese a ter representadas nesta aplicación as dúas antisimetrías mencionadas anteriormente, fáltanos estructura alxébrica sobre o espacio para ter en conta tódalas simetrías do tensor curvatura.

Observación 2.2.1 [17, Lema 8.18] Sexa Λ^2_p o espacio de bivectores sobre o espacio tanxente $T_p M$ dunha variedade semi-riemanniana (M, g)

i) Defínese un producto interior $\langle\langle , \rangle\rangle$ en Λ^2_p mediante

$$\langle\langle x \wedge y, z \wedge w \rangle\rangle := \langle R^0(x, y)z, w\rangle = \langle x, w\rangle\langle y, z\rangle - \langle x, z\rangle\langle y, w\rangle$$

ii) Unha base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en $T_p M$ induce unha base ortonormal $\{e_i \wedge e_j : i < j\}$ en $(\Lambda^2_p, \langle\langle , \rangle\rangle)$.

iii) Definimos, no espacio dos endomorfismos simétricos de Λ^2_p, un producto interior mediante

$$\langle\langle\langle A, B\rangle\rangle\rangle := Tr(A \circ B)$$

Esta observación proporciónanos a estructura que nos permite relacionar cada tensor curvatura alxébrico en $(T_pM, \langle , \rangle)$ cun endomorfismo autoadxunto en $(\Lambda^2_p, \langle\langle , \rangle\rangle)$. Dado un tensor curvatura

$$R(x, y, z, w) := \langle R(x, y)z, w\rangle$$

defínese un endomorfismo

$$\widetilde{R} : \Lambda^2_p \longrightarrow \Lambda^2_p$$

verificando a condición

$$\langle\langle \widetilde{R}(x \wedge y), z \wedge w\rangle\rangle := R(x, y, z, w),\ \forall x, y, z, w \in T_pM.$$

Así definido, $\widetilde{R}$ é un endomorfismo autoadxunto, xa que $R(x, y, z, w) = R(z, w, x, y)$ polas simetrías do tensor curvatura alxébrico. Hai que ter en conta que, con esta definición, o endomorfismo non reflexa que o tensor curvatura verifica a Primeira Identidade de Bianchi, mentres ese é precisamente un dos requisitos na definición de tensor curvatura alxébrico. Denotamos por $\mathcal{R}$ o conxunto dos tensores de curvatura alxébricos, e por $\widetilde{\mathcal{R}}$ o conxunto de endomorfismos de Λ^2 asociados a tensores de $\mathcal{R}$; así, a correspondencia

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{R}} \\ R & \mapsto & \widetilde{R} \end{array}$$

é bixectiva, trivialmente.

Observación 2.2.2 Nesta correspondencia biunívoca, o endomorfismo asociado a R^0 é precisamente a identidade

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \leftrightarrow & \widetilde{\mathcal{R}} \\ R^0 & \mapsto & \widetilde{R^0} = Id \end{array}$$

como se deduce das definicións anteriores.

Definición 2.2.1 Sexan A, B tensores simétricos de tipo $(0, 2)$. Defínese o *producto de Kulkarni-Nomizu* como segue:

$$\begin{array}{rcl} (A \bullet B)(x, y, z, w) & := & A(x, w)B(y, z) + A(y, z)B(x, w) \\ & & -A(x, z)B(y, w) - A(y, w)B(x, z) \end{array}$$

Así definido, $\bullet$ é un producto exterior simétrico e para calesquera A, B tensores simétricos de tipo $(0, 2)$ tense que $A \bullet B$ é un tensor curvatura alxébrico.

Empregaremos este producto para expresar a forma das diferentes compoñentes do tensor curvatura que nos dan os dous teoremas seguintes

Teorema 2.2.3 [17, Teorema 8.21] $\widetilde{\mathcal{R}}$ *descomponse en tres subespacios ortogonais respecto da métrica* $\langle\langle\langle , \rangle\rangle\rangle$

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \widetilde{\mathcal{U}} \oplus \widetilde{\mathcal{Z}} \oplus \widetilde{\mathcal{W}}$$

onde

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{U}} &= \langle Id\rangle \\ \widetilde{\mathcal{Z}} &= \langle\Big\{\widetilde{A\bullet g} : A\acute{e}\ sim\acute{e}trico, Tr_g A = 0\Big\}\rangle \\ \widetilde{\mathcal{W}} &= \widetilde{\mathcal{R}} - \widetilde{\mathcal{U}} - \widetilde{\mathcal{Z}}\end{aligned}$$

Podemos facer unha descomposición análoga para $\mathcal{R} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}$, onde $\mathcal{U}$ está xenerado por $R^0(= g \bullet g)$ e Z está xenerado polos tensores da forma $A \bullet g$, con A simétrico e de traza cero.

Teorema 2.2.4 [17, Teorema 8.24] *As compoñentes do tensor curvatura veñen dadas por*

$$\begin{aligned}U &= \tfrac{S_c}{n(n-1)} R^0 \\ Z &= \tfrac{1}{n-2}\left(Ric - \tfrac{S_c}{n} g\right) \bullet g \\ W &= R - U - Z = R - C \bullet g = R - \tfrac{1}{n-2}\left(Ric - \tfrac{S_c}{2(n-1)}\, g\right) \bullet g\end{aligned}$$

Cada unha destas compoñentes tén un significado xeométrico, e a súa anulación impón fortes condicións sobre a xeometría da variedade. A compoñente que nos interesa para cálculos posteriores é o tensor de Weyl, que vimos de denotar por W. O seguinte corolario resume algunhas propiedades das compoñentes anteriores do tensor curvatura

Corolario 2.2.5 [17, Corolario 8.25] *Sexa (M, g) unha variedade riemanniana n-dimensional, con $n \geq 3$. Tense:*

i) *(M, g) ten curvatura constante se e só se $Z = W = 0$.*

ii) *(M, g) é Einstein se e só se $Z = 0$.*

iii) $S_c = 0 \Leftrightarrow U = 0$.

iv) $Ric_g = 0 \Leftrightarrow U = Z = 0$.

Demostración.

i) Sabemos que se unha variedade ten curvatura seccional constante, o seu tensor curvatura é un múltiplo de R^0, co que as compoñentes Z e W son nulas. Recíprocamente, se as compoñentes Z e W son nulas, o tensor curvatura é un múltiplo de R^0, co cal a variedade ten curvatura constante.

ii) Unha variedade é Einstein se e só se $Ric = \frac{S_c}{n} g$, e esta condición equivale a que $Z = 0$ dada a expresión de Z do Teorema 2.2.4.

iii) Dedúcese directamente da expresión de U dada no Teorema 2.2.4.

iv) De novo atendemos ás expresións de U e Z que nos proporciona o Teorema 2.2.4. Se $Ric = 0$, necesariamente temos que $S_c = 0$, anulándose a compoñente Z, e,por *iii*), $S_c = 0$ equivale a $U = 0$. Recíprocamente, se $U = 0$ temos que $S_c = 0$, o cal, unido a que $Z = 0$ implica que o tensor de Ricci é nulo, outra vez polo Teorema 2.2.4.

□

Observación 2.2.6 Nunha variedade 3-dimensional o tensor de Weyl é nulo, dado que o tensor de Ricci determina completamente a curvatura da variedade (omitimos os detalles da proba por brevidade [17, Corolario 8.25]).

Observación 2.2.7 Dos apartados *i*) e *ii*) do corolario anterior extráese que unha variedade ten curvatura seccional constante se e só se é Einstein e $W = 0$. Este feito empregarémolo na proba do principal resultado do Capítulo 3.

O tensor de Weyl está relacionado coa *clase conforme* da métrica, como veremos nos seguintes resultados que enunciamos. Pero antes, recordamos que dúas métricas en M, $g, \widetilde{g}$, dinse *conformemente equivalentes* se os ángulos teñen a mesma magnitude medidos coas dúas métricas, é dicir, se existe unha función escalar φ tal que $\widetilde{g} = e^{-2\varphi} g$.

Corolario 2.2.8 [17, Corolario 8.28] *Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana de dimensión n, con $n \geq 3$, tense:*

– *g é conformemente equivalente a unha métrica de Einstein se e só se*

$$e^{\varphi} Ric + (n-2)\nabla^2(e^{\varphi})$$

é un múltiplo escalar de g para certa elección de φ.

– *Se g é unha métrica de Einstein, entón $\widetilde{g} = e^{-2\varphi} g$ é unha métrica de Einstein se e só se $\nabla^2(e^{\varphi}) = \lambda g$ para unha función escalar λ.*

Onde ∇^2 representa a segunda derivada covariante.

Este teorema débese a H.Weyl, e vén a completar, xunto ó seguinte, a relación comentada anteriormente entre a conformidade da métrica e o tensor de Weyl.

Teorema 2.2.9 [17, Lema 8.30] *O tensor de Weyl dun tensor curvatura é conformemente invariante, esto é, dadas $g, \widetilde{g}$ conformemente equivalentes ($\widetilde{g} = e^{-2\varphi} g$), tense $W = \widetilde{W}$ para os tensores de tipo $(0, 3)$, e $\widetilde{W} = e^{-2\varphi} W$ para os tensores de tipo $(0, 4)$. En particular, $W = 0$ se g é localmente conformemente chá.*

Teorema 2.2.10 [17, Teorema 8.31] *Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana de dimensión n. Se $n \geq 4$, g é conformemente chá se e só se $W = 0$. Para o caso en que $n = 3$, g é conformemente chá se*

$$(\nabla_X C)(Y, Z) = (\nabla_Y C)(X, Z)$$

para calesquera campos de vectores X,Y,Z. Onde C denota o tensor de Schouten ($R = C \bullet g + W$).

Co enunciado deste último teorema, de J.A.Schouten, pechamos a presente sección na que introducimos o tensor de Weyl, para, na sección vindeira, relaciona-lo coa condición de Osserman dunha variedade.

2.2.2 Condición de Osserman e auto-dualidade

Sexa V un espacio vectorial n-dimensional cun producto interior $\langle , \rangle$ de signatura (ν, η). Denotamos por v_g o elemento de volume. O producto interior que definimos na Observación 2.2.1, pódese expresar tamén do seguinte xeito equivalente:

$$\langle\langle e^i \wedge e^j, e^k \wedge e^l \rangle\rangle = det \begin{pmatrix} \langle e_i, e_k \rangle & \langle e_i, e_l \rangle \\ \langle e_j, e_k \rangle & \langle e_j, e_l \rangle \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

A signatura da métrica $\langle\langle , \rangle\rangle$ depende da signatura da métrica $\langle , \rangle$ de V. Consideremos $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ unha base ortonormal de $(V, \langle , \rangle)$, e $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ a base dual asociada. Independentemente da signatura de $\langle , \rangle$,

$$\mathcal{B} = \{e^1 \wedge e^2, e^1 \wedge e^3, e^1 \wedge e^4, e^2 \wedge e^3, e^2 \wedge e^4, e^3 \wedge e^4\}$$

é unha base ortonormal de $\Lambda^2 V^*$. Así, temos que, se a métrica $\langle , \rangle$ é riemanniana, tamén $\langle\langle , \rangle\rangle$ será definida positiva, pois $\langle\langle v, v \rangle\rangle > 0$, $\forall v \in \mathcal{B}$; sen embargo, se g é unha métrica de Lorentz, temos que $\langle\langle , \rangle\rangle$ ten signatura $(3, 3)$, pois, asumindo e_1 temporal e e_2, e_3, e_4 espaciais,

$$\langle\langle e^1 \wedge e^2, e^1 \wedge e^2 \rangle\rangle = \langle\langle e^1 \wedge e^3, e^1 \wedge e^3 \rangle\rangle = \langle\langle e^1 \wedge e^4, e^1 \wedge e^4 \rangle\rangle = -1$$

$$\langle\langle e^2 \wedge e^3, e^2 \wedge e^3 \rangle\rangle = \langle\langle e^2 \wedge e^4, e^2 \wedge e^4 \rangle\rangle = \langle\langle e^3 \wedge e^4, e^3 \wedge e^4 \rangle\rangle = 1$$

Por último, no caso en que g teña signatura $(- - ++)$, a signatura de $\langle\langle , \rangle\rangle$ será $(4, 2)$, xa que, sendo e_1, e_2 vectores temporais e e_3, e_4 vectores espaciais,

$$\begin{aligned} \langle\langle e^1 \wedge e^3, e^1 \wedge e^3 \rangle\rangle &= \langle\langle e^1 \wedge e^4, e^1 \wedge e^4 \rangle\rangle = \langle\langle e^2 \wedge e^3, e^2 \wedge e^3 \rangle\rangle \\ &= \langle\langle e^2 \wedge e^4, e^2 \wedge e^4 \rangle\rangle = -1 \\ \langle\langle e^1 \wedge e^2, e^1 \wedge e^2 \rangle\rangle &= \langle\langle e^3 \wedge e^4, e^3 \wedge e^4 \rangle\rangle = 1 \end{aligned}$$

Introducimos o *operador estrela de Hodge* $*$ como o isomorfismo

$$*: \Lambda^k V^* \longrightarrow \Lambda^{n-k} V^*$$

definido por $\alpha \wedge *\beta = \langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle\, v_g$ para todo $\alpha, \beta \in \Lambda^k V^*$. Así, o operador verifica $*^2 = (-1)^{k(n-k)+\eta} Id_{\Lambda^k V^*}$.

O contexto de maior interese para nós será o de dimensión 4, no que o operador $*$ admite unha interpretación moi concreta para o caso riemanniano en función da bi-ortogonalidade do espacio: fixada unha orientación no espacio (tomemos a xa asumida v_g), dados e^i, e^j elementos básicos, $*(e^i \wedge e^j)$ é o bivector dado por $e^k \wedge e^l$ onde e^k, e^l son ambos ortogonais a e^i, e^j e de forma que $e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^l$ ten a mesma orientación que v_g. Nunha variedade semi-riemanniana pódese dar a mesma interpretación, como se deduce da expresión que define o operador de Hodge, salvo que é necesario variar a orientación segundo sexa o carácter (espacial ou temporal) dos vectores do dominio. Tamén en dimensión 4, temos que $*^2 = Id$ se a métrica é definida ou de signatura $(2, 2)$. No caso lorentziano o operador de Hodge $*$ define unha estructura complexa no espacio, pois teriamos $*^2 = -Id$.
Restrinxirémonos ós casos riemanniano e de signatura $(2, 2)$, así, baixo estas condicións, o operador de Hodge é autoadxunto, como se deduce da súa definición, pois

$$\langle\langle \alpha, *\beta \rangle\rangle\, v_g = \alpha \wedge **\beta = \alpha \wedge \beta = **\alpha \wedge \beta = \langle\langle *\alpha, \beta \rangle\rangle\, v_g$$

Nesta situación, $\Lambda^2 V^*$ descomponse en suma ortogonal dos autoespacios correspondentes ós autovalores 1 ($\Lambda_+ = \{\alpha \in \Lambda^2 V^* : *\alpha = \alpha\}$) e -1 ($\Lambda_- = \{\alpha \in \Lambda^2 V^* : *\alpha = -\alpha\}$):

$$\Lambda^2 V^* = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$$

Chamaremos *autoduais* ás 2-formas de Λ_+ e *anti-autoduais* ás de Λ_-.

Temos así descomposto o espacio $\Lambda^2 V^*$ en suma directa de dous subespacios de dimensión 3. Para os cálculos que faremos na seguinte sección, cómpre coñecer unha base de cada un dos autoespacios. Distinguimos os dous casos a estudiar:

Caso riemanniano

Sexa $(V, \langle,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interior definido positivo. Coma antes $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é unha base ortonormal positivamente orientada e $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ a base dual da precedente. Temos para os espacios Λ_+ e Λ_- que, recordemos, son riemannianos, as seguintes bases ortonormais:

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &= \langle \{(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4)/\sqrt{2}, (e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4)/\sqrt{2}, \\ &\qquad (e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3)/\sqrt{2}\} \rangle \\ \Lambda_- &= \langle \{(e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4)/\sqrt{2}, (e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4)/\sqrt{2}, \\ &\qquad (e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3)/\sqrt{2}\} \rangle \end{aligned} \tag{2.2}$$

Non faremos a proba de que estes elementos forman unha base ortonormal, mais, con finalidade ilustrativa da dependencia que posúe a signatura de $\langle\langle , \rangle\rangle$ da signatura de g, faremos os cálculos para un dos vectores en cada caso:

$$\langle\langle \frac{e^1\wedge e^3-e^2\wedge e^4}{\sqrt{2}}, \frac{e^1\wedge e^3-e^2\wedge e^4}{\sqrt{2}}\rangle\rangle$$
$$= det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_1,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_1,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_3,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_3,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_2,e_2\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_2,e_4\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_4,e_2\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_4,e_4\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + 0 + 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Polo tanto, o vector considerado é unitario. Vexamos que é ortogonal ós outros dous vectores que compoñen a base de Λ_+:

$$\langle\langle \frac{e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4}{\sqrt{2}}, \frac{e^1\wedge e^3-e^2\wedge e^4}{\sqrt{2}}\rangle\rangle$$
$$= det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_1,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_1,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_2,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_2,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_3,e_4\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_3,e_2\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_4,e_4\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_4,e_2\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_1,e_4\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_1,e_2\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_2,e_4\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_2,e_2\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$+det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_3,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_3,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_4,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_4,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\langle\langle \frac{e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^3}{\sqrt{2}}, \frac{e^1\wedge e^3-e^2\wedge e^4}{\sqrt{2}}\rangle\rangle$$
$$= det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_1,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_1,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_4,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_4,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_2,e_4\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_2,e_2\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_3,e_4\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_3,e_2\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_1,e_4\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_1,e_2\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_4,e_4\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_4,e_2\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$+det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_2,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_2,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_3,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_3,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0,$$

co que o vector $e^1\wedge e^3 - e^2\wedge e^4$ é unitario e ortogonal a $e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4$ e $e^1\wedge e^4 + e^2\wedge e^3$.

Caso semi-riemanniano con métrica de signatura $(--++)$

Sexa $(V, \langle , \rangle)$ espacio vectorial con producto interior de signatura $(--++)$. Sexa $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ unha base ortonormal positivamente orientada, sendo e_1, e_2 vectores unitarios temporais, e base dual asociada $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$. Λ_+ e Λ_- son agora dous espacios lorentzianos de signatura $(--+)$. Pódese comprobar, mediante cálculos sinxelos, que os seguintes bivectores forman unha base ortonormal para cadanseu autoespacio:

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &= \langle \big\{(e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4)/\sqrt{2}, (e^1\wedge e^3 + e^2\wedge e^4)/\sqrt{2}, \\ &\qquad (e^1\wedge e^4 - e^2\wedge e^3)/\sqrt{2}\big\}\rangle \\ \Lambda_- &= \langle \big\{(e^1\wedge e^2 - e^3\wedge e^4)/\sqrt{2}, (e^1\wedge e^3 - e^2\wedge e^4)/\sqrt{2}, \\ &\qquad (e^1\wedge e^4 + e^2\wedge e^3)/\sqrt{2}\big\}\rangle \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ó igual que para variedades riemannianas faremos os cálculos correspondentes a un dos vectores, para ver que é unitario e ortogonal ós outros dous elementos da base de Λ_+.

$$\langle\langle \frac{e^1\wedge e^3+e^2\wedge e^4}{\sqrt{2}}, \frac{e^1\wedge e^3+e^2\wedge e^4}{\sqrt{2}} \rangle\rangle$$
$$= det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_1,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_1,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_3,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_3,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_2,e_2\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_2,e_4\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_4,e_2\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_4,e_4\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + 0 + 0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$\langle\langle \frac{e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4}{\sqrt{2}}, \frac{e^1\wedge e^3+e^2\wedge e^4}{\sqrt{2}} \rangle\rangle$$
$$= det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_1,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_1,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_2,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_2,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_3,e_2\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_3,e_4\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_4,e_2\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_4,e_4\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_1,e_2\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_1,e_4\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_2,e_2\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_2,e_4\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$+ det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_3,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_3,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_4,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_4,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle\langle \frac{e^1\wedge e^4-e^2\wedge e^3}{\sqrt{2}}, \frac{e^1\wedge e^3+e^2\wedge e^4}{\sqrt{2}} \rangle\rangle$$
$$= det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_1,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_1,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_4,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_4,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_3,e_2\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_3,e_4\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_2,e_2\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_2,e_4\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_1,e_2\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_1,e_4\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_4,e_2\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_4,e_4\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$+ det\begin{pmatrix} \frac{\langle e_3,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_3,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle e_2,e_1\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{\langle e_2,e_3\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0$$

Consideremos agora as restriccións do tensor de Weyl W a Λ_+ e Λ_-, e denotémolas por W_+ e W_-, respectivamente. Entón estamos en condicións de dar a seguinte definición

Definición 2.2.2 Sexa $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial 4-dimensional cun producto interior definido positivo ou indefinido de signatura $(2, 2)$. Sexa R un tensor curvatura alxébrico. Entón, o triple $(V, \langle , \rangle, R)$ dise *autodual* se $W_- \equiv 0$ e *anti-autodual* se $W_+ \equiv 0$.

Extendendo a definición anterior para variedades

Definición 2.2.3 Sexa (M, g) unha *variedade semi-riemanniana*, diremos que (M, g) é *autodual* (resp., *anti-autodual*) se está orientada e o tensor curvatura é auto-dual (resp., anti-autodual) en cada punto $p \in M$.

O seguinte teorema mostra a estreita relación que existe entre a autodualidade (ou anti-autodualidade) e a condición de Osserman para métricas riemannianas e de signatura $(- - ++)$ en dimensión 4, sendo nesta onde radica o noso interese polo estudio do tensor de Weyl.

Teorema 2.2.11 [10, Teoremas 2.1.8 e 4.2.5] *Sexa* (M, g) *unha variedade* 4*-dimensional riemanniana ou de signatura* $(2, 2)$. *Entón equivalen*

– (M, g) *é puntualmente Osserman.*

– *Localmente existe unha orientación de* M *para a que é Einsten e autodual (ou anti-autodual).*

Ó longo deste capítulo, estudiando variedades de dimensión 4, e moi en concreto no teorema precedente, analizamos unicamente os casos de signatura $(+ + ++)$ e $(- - ++)$, quedando sen tratar só o caso lorentziano. O motivo deste enfoque é que o caso lorentziano ten unha relevancia moi limitada, pois unha variedade de Lorentz é autodual (ou anti-autodual) se e só se $W = 0$. Ademais, as variedades puntualmente Osserman lorentzianas son precisamente as de curvatura seccional constante; é por isto, por estaren totalmente determinadas, que non temos para o caso de signatura $(- + ++)$ un teorema análogo ó Teorema 2.2.11 que, se ben sería certo, non aportaría ningunha información por termos garantido que tanto as variedades puntualmente Osserman coma as Einstein e autoduais (ou anti-autoduais) coinciden cos espacios de curvatura seccional constante.

Capítulo 3

Variedades puntualmente Osserman con estructura local de producto deformado

O obxectivo principal deste capítulo é probar que unha variedade de dimensión 4 con estructura local de producto deformado é puntualmente Osserman se e só se é un espacio de curvatura seccional constante. Para iso, na Sección 3.1 recordamos as definicións e propiedades básicas, tales como a expresión da curvatura e o tensor de Ricci, dos productos warped e twisted. Empregamos a Sección 3.2 para achegarmos algunhas propiedades básicas do tensor de Weyl nunha variedade producto warped. Na Sección 3.3 probaremos o resultado pretendido cando a estructura local da veriedade é de producto warped, para, na Sección 3.4, concluir finalmente o resultado para productos twisted.

3.1 Productos deformados

No estudio da xeometría semi-riemanniana, un tema que cobra especial importancia é o estudio de variedades producto. A partir de dúas variedades semi-riemannianas (M, g_M) e (N, g_N), podemos considerar a variedade producto $M \times N$ dotada da métrica producto $g_M \oplus g_N$. Esta nova variedade $M \times N$ herda moitas propiedades de M e N, polo que supón un modo moi axeitado de proporcionar exemplos aumentando a dimensión. Sen embargo, esta estructura é tremendamente ríxida, e é tan forte a dependencia que teñen as propiedades de $M \times N$ das variedades que a compoñen, i.e., de M e N, que non é moi habitual atopar novos exemplos con propiedades interesantes máis aló das que presentan M e N. Mais, o que en principio poden parecer pequenos cambios na métrica dunha variedade producto, estende en gran medida o seu interese á hora de proporcionar exemplos característicos. En concreto, énos de interese o estudio de variedades producto nas que a métrica sofre unha modificación homotética ou conforme na compoñente métrica correspondente a unha das dúas variedades, poñamos N.

Definición 3.1.1 Sexan (M, g_M) e (N, g_N) dúas variedades semi-riemannianas, f unha función diferenciable positiva definida en M, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Defínese o *producto warped* $P = M \times_f N$ como a variedade producto $M \times N$ equipada coa métrica

$$g = \pi^*(g_M) \oplus (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_N)$$

onde π denota a proxección canónica de P en M e σ a correspondente proxección de P en N.

As variedades producto warped teñen interese dende moitos puntos de vista da xeometría, destacando a importancia que presentan á hora de buscar exemplos de variedades con propiedades que se conservan mediante transformacións conformes. En particular, este tipo de variedades aparecen en exemplos modelo do espacio-tempo da teoría relativista, e foron estudiados dende o punto de vista da curvatura dun modo sistemático en [23].

Unha xeneralización dos productos warped, para a cal empregaron a nomenclatura de *productos twisted*, foi introducida en [24]. A definición deste novo tipo de variedades é a que segue:

Definición 3.1.2 Sexan (M, g_M) e (N, g_N) dúas variedades semi-riemannianas e sexa $f : M \times N \longrightarrow \mathbb{R}^+$ unha función positiva definida no producto $M \times N$. Defínese o *producto twisted* de ambas variedades como a variedade producto $M \times N$ dotada coa métrica

$$g = \pi^* g_M \oplus f^2 \sigma^* g_N$$

onde $\pi : M \times N \longrightarrow M$ e $\sigma : M \times N \longrightarrow N$ son as proxeccións canónicas.

Nótese que se $f : M \times N \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é unha función tal que $f(p, \cdot) : N \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é constante para todo $p \in M$, entón $M \times_f N$ é un producto warped, pois a función de deformación f só depende de M. É por isto que consideramos os productos twisted unha xeneralización dos productos warped, e atendendo a esta, daremos ó longo da sección certas propiedades, nun primeiro lugar para productos twisted, presentando consecutivamente cada resultado particularizado a productos warped.

A continuación enunciamos o seguinte teorema que permite caracterizar o tipo de variedade: producto directo, producto warped e producto twisted segundo a xeometría das foliacións canónicas respectivas, $\mathcal{L}_M$(foliación canónica horizontal) e $\mathcal{L}_N$(foliación canónica vertical), da variedade $P = M \times N$.

Proposición 3.1.1 [24, Proposición 3] *Sexa $(P = M \times N, g)$ unha variedade semi-riemanniana tal que as folicacións canónicas $\mathcal{L}_M$ e $\mathcal{L}_N$ se intersecan perpendicularmente. Entón g é a métrica dun*

i) producto twisted $M \times_h N$ se e só se $\mathcal{L}_M$ é unha foliación totalmente xeodésica e $\mathcal{L}_N$ unha foliación totalmente umbílica, *ii) producto warped $M \times_f N$ se e só se $\mathcal{L}_M$ é unha foliación totalmente xeodésica e $\mathcal{L}_N$ é unha foliación totalmente esférica,*

iii) producto directo $M \times N$ se e só se $\mathcal{L}_M$ e $\mathcal{L}_N$ son foliación totalmente xeodésicas.

Certos conceptos típicos da xeometría diferencial euclídea de dimensión 3, como son o gradiente ou o laplaciano, ou en xeral da xeometría euclídea en dimensión arbitraria, como o hessiano, admiten unha xeneralización á xeometría semi-riemanniana (véxase, por exemplo [11]). Nunha variedade semi-riemanniana (M, g) consideremos unha función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. O *gradiente* de f, que denotamos por ∇f defínese como segue:

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = Xf, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

é dicir, o gradiente de f é o campo de vectores metricamente equivalente a df ou, con outra terminoloxía, $\nabla f = {}^{\natural}df$. Definimos agora o *hessiano* de f como a segunda derivada covariante, $H^f(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y f$, tendo as seguintes igualdades

$$H^f(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle$$

Empregando esta fórmula próbase sen dificultade que o hessiano é un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico. Por último, definimos o *laplaciano* de f, Δf, en función do hessiano, coma a contración deste, é dicir,

$$\Delta f = \mathrm{C}_{12}(H^f)$$

ou, equivalentemente, $\Delta f = div(\nabla f)$ onde a diverxencia, div, dun campo de vectores X vén dada por $divX = \sum_i \epsilon_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle$ para $\{E_i\}_i$ base ortonormal de $\mathfrak{X}(M)$.

Estes conceptos serán utilizados para expresar a xeometría dunha variedade producto $P = M \times_f N$ cunha alteración na métrica, ben sexa un producto twisted en xeral ou un producto warped en concreto, en base á xeometría das variedades factores (M, g_M) e (N, g_N). Denotaremos por ∇^M e ∇^N as conexións de Levi-Civita de (M, g_M) e (N, g_N), e faremos os cálculos coa función $\xi = log(f)$, o que permite traballar máis comodamente coas expresións que irán aparecendo. Así, a conexión de Levi-Civita ∇ de P vén dada por

Proposición 3.1.2 [7, Proposición 1.3.1.] *Sexa $P = M \times_f N$ un producto twisted, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $U, V \in \mathfrak{X}(N)$ campos de vectores. A conexión da variedade producto P descríbese en función das conexións dos factores M e N como segue*

i) $\nabla_X Y$ *é o levantado a $M \times N$ de* $\nabla^M_X Y$

ii) $\nabla_X U = X(\xi)U$

iii) $\nabla_U V = \nabla^N_U V + U(\xi)V + V(\xi)U - g(U, V)\nabla\xi$

Agora particularizamos o resultado para productos warped, mantendo a mesma notación, salvo que preferimos obter os cálculos en función de f no canto de ξ, por considerar que deste xeito resultará máis intuitivo. Este criterio será mantido en vindeiros cálculos.

Proposición 3.1.3 [22, Proposicion 35] *En $P = M \times_f N$ producto warped, con $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $U, V \in \mathfrak{X}(N)$, a conexión de Levi-Civita vén dada por:*

i) $\nabla_X Y$ *é o levantado a* $M \times N$ *de* $\nabla^M_X Y$.

ii) $\nabla_X U = \nabla_U X = \frac{Xf}{f} U$.

iii) $nor(\nabla_U V) = -\frac{\langle U,V \rangle}{f} grad\, f$.

iv) $tan(\nabla_U V)$ *é o levantado a* $M \times N$ *de* $\nabla^N_U V$.

onde tan e nor denotan, respectivamente, as compoñentes de $\nabla_U V$ tanxencial e normal a N.

Unha vez coñecida a conexión de Levi-Civita, a curvatura exprésase tamén en termos da xeometría dos factores:

Proposición 3.1.4 [7, Proposición 1.3.4.] *Para $P = M \times_f N$ producto twisted, a curvatura está completamente determinada por:*

i) $R(X,Y)Z = R^M(X,Y)Z$

ii) $R(X,U)Y = (H^\xi(X,Y) + X(\xi)Y(\xi))U$

iii) $R(U,X)V = g(U,V)(X(\xi)\nabla\xi + h^\xi(X)) - XV(\xi)U$

iv) $R(U,V)X = XU(\xi)V - XV(\xi)U$

v)
$$\begin{aligned} R(U,V)W = R^N(U,V)W &+ g(\nabla\xi,\nabla\xi)(g(V,W)U - g(U,W)V) \\ &+ H^\xi(U,W)V - H^\xi(V,W)U \\ &+ g(U,W)h^\xi(V) - g(V,W)h^\xi(U) \\ &+ W(\xi)(U(\xi)V - V(\xi)U) \\ &+ (V(\xi)g(U,W) - U(\xi)g(V,W))\nabla\xi \end{aligned}$$

onde denotamos por $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $U, V, W \in \mathfrak{X}(N)$ os campos de vectores, e por R^M e R^N os tensores curvatura de M e N respectivamente. Ademais, $h^\xi(X) = \nabla_X(\nabla\xi)$ denota o hessiano de ξ en P e H^ξ a aplicación linear que cumple $H^\xi(X,Y) = g(h^\xi(X), Y)$ e que tamén chamamos hessiano.

Proposición 3.1.5 [22, Proposicion 42] *En $P = M \times_f N$ producto warped, con $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $U, V, W \in \mathfrak{X}(N)$, e tensor curvatura R, temos*

i) $R(X,Y)Z$ *é o levantado a* $M \times N$ *de* $R^M(X,Y)Z$ *en* M.

ii) $R(X,U)Y = \frac{H^f(X,Y)}{f} U$, *sendo* H^f *o hessiano da función* f.

iii) $R(X,Y)U = R(U,V)X = 0$.

iv) $R(U,X)V = \frac{\langle U,V\rangle}{f}\nabla_X(grad\, f)$.

v) $R(U,V)W = R^N(U,V)W + \frac{\langle grad\, f, grad\, f\rangle}{f^2}(\langle U,W\rangle V - \langle V,W\rangle U)$.

Por último, das proposicións anteriores podemos obter as respectivas expresións do tensor de Ricci

Proposición 3.1.6 [7, Proposición 1.3.6.] *Sexa $P = M^m \times_f N^n$ un producto twisted. Para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $V,W \in \mathfrak{X}(N)$ campos de vectores en M e N temos*

i) $Ric(X,Y) = Ric^M(X,Y) - n(X(\xi)Y(\xi) + H^\xi(X,Y))$

ii) $Ric(X,V) = (1-n)XV(\xi)$

iii) $$\begin{aligned} Ric(V,W) = Ric^N(V,W) &+ (2-n)(V(\xi)W(\xi) + H^\xi(V,W)) \\ &+ (n-2)g(V,W)g(\nabla\xi,\nabla\xi) - g(V,W)\Delta\xi \end{aligned}$$

onde $\Delta\xi$ é o laplaciano de ξ en P e $n = dimN$.

Corolario 3.1.7 [22, Corolario 43] *Sexa $P = M^m \times_f N^n$ un producto warped, $n = dim\, N$, para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $U,V \in \mathfrak{X}(N)$, verifícase:*

i) $Ric(X,Y) = Ric^M(X,Y) - \frac{n}{f}H^f(X,Y)$

ii) $Ric(X,U) = 0$

iii) $Ric(U,V) = Ric^N(U,V) - \langle U,V\rangle\left(\frac{\Delta_M f}{f} + (n-1)\frac{\langle grad\, f, grad\, f\rangle}{f^2}\right)$

sendo $\Delta_M f$ o Laplaciano de f en M.

Se ben os productos twisted son unha xeneralización dos productos warped, en ocasións unha variedade $P = M \times_f N$ que é un producto twisted non é máis ca un producto warped de (M, g_M) e $(N, \tau^* g_N)$, onde τ é unha aplicación conforme. É por isto que, en certos casos, non se gaña en xeneralidade considerando productos twisted en vez de productos warped, e convén evitar este caso, pois, se ben non aporta situacións novas, si complica os cálculos.

Teorema 3.1.8 [8, Teorema 1] *Sexa $M \times_f N$ un producto twisted con $dimN > 1$. Entón, $Ric(X,V) = 0$ para calesquera X,V con X tanxente a M e V tanxente a N se e só se $M \times_f N$ pódese expresar como un producto warped $M \times_f N$ de (M, g_M) e $(N, \widetilde{g_N})$, onde $\widetilde{g_N}$ é unha métrica conformemente equivalente a g_N.*

O seguinte corolario amosa unha condición suficiente para que o producto twisted sexa simplemente un producto warped. Tal condición resulta de gran utilidade por mor da sinxeleza que presenta á hora de traballar con ela.

Corolario 3.1.9 [8, Corolario 1] *Sexa $P = M \times_f N$, con $dimN > 1$, unha variedade semi-riemanniana que é un producto twisted. Entón, se (P, g) é Einstein, pódese expresar como un producto warped.*

Observación 3.1.10 Dado un producto twisted $P = M \times_f N$ que sexa puntualmente Osserman e con $dimN > 1$, é necesariamente un producto warped. Este feito séguese da Proposición 1.2.3, que nos sitúa nas hipóteses do corolario anterior.

3.2 O tensor de Weyl en productos warped

Unha vez presentadas na sección anterior as expresións da curvatura e o tensor de Ricci para productos deformados, restrinximos o noso estudio na sección actual a variedades de dimensión 4 con estructura de producto warped. Cómprenos coñecer, para os cálculos que levaremos a cabo, algunhas propiedades do tensor de Weyl en variedades verificando tales condicións.

En xeral, a expresión do tensor de Weyl para A, B, C, D campos de vectores da variedade é

$$\begin{aligned} W(A,B,C,D) &= R(A,B,C,D) + \tfrac{Sc}{6}\{g(B,C)g(A,D) - g(A,C)g(B,D)\} \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\{Ric(B,C)g(A,D) - Ric(A,C)g(B,D) \\ &\qquad +g(B,C)Ric(A,D) - g(A,C)Ric(B,D)\} \end{aligned}$$

O seguinte lema simplifica, en certos casos, o tensor de Weyl para productos warped

Lema 3.2.1 *Sexa $P = M \times_f N$ un producto warped de variedades semi-riemannianas, e denotamos con $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $U, V, W \in \mathfrak{X}(N)$ campos de vectores ortogonais dous a dous. Entón tense*

i) $W(X, U, V, W) = 0$

ii) $W(X, U, U, V) = 0$

iii) $W(X, Y, U, V) = 0$

iv) $W(X, U, Y, V) = 0$

v) $W(X, Y, Y, U) = 0$

vi) $W(X, Y, Z, U) = 0$

vii) $W(X, U, V, X) = -\frac{1}{2}\, g(X, X)Ric(U, V)$

Demostración.
Nos casos $i), iii), vi)$ temos, pola ortogonalidade dos campos de vectores, $W(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) = R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$, que é nulo nos tres casos pola Proposición 3.1.5,iii). No caso $ii)$ temos

$$\begin{aligned}
W(X,U,U,V) &= R(X,U,U,V) \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\{Ric(U,U)g(X,V) - Ric(X,U)g(U,V) \\
&\quad +g(U,U)Ric(X,V) - g(X,U)Ric(U,V)\} \\
&\quad +\tfrac{Sc}{6}\{g(U,U)g(X,V) - g(X,U)g(U,V)\} \\
&= R(X,U,U,V) - \tfrac{1}{2}g(U,U)Ric(X,V) = 0
\end{aligned}$$

pola Proposición 3.1.5 e o Corolario 3.1.7. Para $iv)$,

$$\begin{aligned}
W(X,U,Y,V) &= R(X,U,Y,V) = -R(U,X,Y,V) \\
&= -g(R(U,X)Y,V) = g\left(\tfrac{H^f(X,Y)}{f}U,V\right) = 0
\end{aligned}$$

Para $v)$ temos

$$\begin{aligned}
W(X,Y,Y,U) &= R(X,Y,Y,U) - \tfrac{1}{2}g(Y,Y)Ric(X,Y) \\
&= R(Y,U,X,Y) = -R(U,Y,X,Y) \\
&= -g(R(U,Y)X,Y) = -g\left(\tfrac{H^f(Y,X)}{f}U,Y\right) = 0
\end{aligned}$$

Por último, o caso $vii)$

$$\begin{aligned}
W(X,U,V,X) &= R(X,U,V,X) - \tfrac{1}{2}g(X,X)Ric(U,V) \\
&= g(R(U,X)X,V) - \tfrac{1}{2}g(X,X)Ric(U,V) \\
&= g(\tfrac{H^f(X,X)}{f}U,V) - \tfrac{1}{2}g(X,X)Ric(U,V) \\
&= -\tfrac{1}{2}g(X,X)Ric(U,V)
\end{aligned}$$

□

3.3 Variedades puntualmente Osserman con estructura local de producto warped

O obxectivo desta sección é probar o teorema seguinte, que se verá xeneralizado ó remate do capítulo:

Teorema 3.3.1 *Sexa (P,g) unha variedade semi-riemanniana de dimensión 4 que localmente é un producto warped. Entón, P é puntualmente Osserman se e só se ten curvatura seccional constante.*

A proba do teorema obterase a partir do Teorema 2.2.11 e o seguinte teorema intermedio que posúe certo interés por si mesmo, pois amosa a equivalencia entre a autodualidade e a anti-autodualidade en variedades que son productos warped.

Teorema 3.3.2 *Un producto warped $P = M \times_f N$ de dimensión 4 é autodual se e só se é anti-autodual.*

Demostración.
Para probar este teorema iremos analizando un a un tódolos casos posibles de productos warped de variedades que teñan dimensión 4 e con signaturas $(++++)$ ou $(++--)$.

(P, g) ten estructura de producto warped riemanniano

Recordemos que unha base de $\Lambda^2 V^*$ para P variedade riemanniana vén dada pola expresión (2.2):

$$\begin{aligned} \Lambda_\pm \;=\; & \langle \{ E_1^\pm = (e^1 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^4)/\sqrt{2}, E_2^\pm = (e^1 \wedge e^3 \mp e^2 \wedge e^4)/\sqrt{2}, \\ & E_3^\pm = (e^1 \wedge e^4 \pm e^2 \wedge e^3)/\sqrt{2} \} \rangle \end{aligned} \tag{3.1}$$

Entón as compoñentes do tensor de Weyl para unha variedade riemanniana arbitraria de dimensión 4 teñen a expresión:

$$\begin{aligned}
W_{11}^+ &= \tfrac{1}{2} W(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4, e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4) \\
&= \tfrac{1}{2} (W_{1212} + W_{3434} + 2\, W_{1234}) \\
W_{11}^- &= \tfrac{1}{2} W(e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4, e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4) \\
&= \tfrac{1}{2} (W_{1212} + W_{3434} - 2\, W_{1234}) \\
\\
W_{22}^+ &= \tfrac{1}{2} W(e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4, e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4) \\
&= \tfrac{1}{2} (W_{1313} + W_{2424} - 2\, W_{1324}) \\
W_{22}^- &= \tfrac{1}{2} W(e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4, e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4) \\
&= \tfrac{1}{2} (W_{1313} + W_{2424} + 2\, W_{1324}) \\
\\
W_{33}^+ &= \tfrac{1}{2} W(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3, e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3) \\
&= \tfrac{1}{2} (W_{1414} + W_{2323} + 2\, W_{1423}) \\
W_{33}^- &= \tfrac{1}{2} W(e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3, e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3) \\
&= \tfrac{1}{2} (W_{1414} + W_{2323} - 2\, W_{1423}) \\
\\
W_{12}^+ &= \tfrac{1}{2} W(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4, e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4) \\
&= \tfrac{1}{2} (W_{1213} - W_{1224} + W_{3413} - W_{3424}) \\
W_{12}^- &= \tfrac{1}{2} W(e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4, e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4) \\
&= \tfrac{1}{2} (W_{1213} + W_{1224} - W_{3413} - W_{3424})
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} W_{13}^{+} & = & \frac{1}{2}W(e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4, e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3) \\ & = & \frac{1}{2}\left(W_{1214} + W_{1223} + W_{3414} + W_{3423}\right) \\ W_{13}^{-} & = & \frac{1}{2}W(e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4, e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3) \\ & = & \frac{1}{2}\left(W_{1214} - W_{1223} - W_{3414} + W_{3423}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} W_{23}^{+} & = & \frac{1}{2}W(e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4, e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3) \\ & = & \frac{1}{2}\left(W_{1314} + W_{1323} - W_{2414} - W_{2423}\right) \\ W_{23}^{-} & = & \frac{1}{2}W(e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4, e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3) \\ & = & \frac{1}{2}\left(W_{1314} - W_{1323} + W_{2414} - W_{2423}\right) \end{array}$$

Con fin de comprobar que $W_{ij}^{+} = \pm W_{ij}^{-}$, $\forall\, i, j = 1, 2, 3$, examinamos a continuación mediante apartados as distintas posibilidades no producto.

(P, g) ten estructura de producto warped riemanniano de tipo $1 + 3$

Sexa $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_1\}$ base de M e $\{e_2, e_3, e_4\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1, e tras unha serie de cálculos directos, obtense que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$\begin{array}{rcl} W_{1212} & = & R_{1212} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{22}\right) \\ W_{1313} & = & R_{1313} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{33}\right) \\ W_{1414} & = & R_{1414} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{44}\right) \\ W_{2323} & = & R_{2323} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} + Ric_{33}\right) \\ W_{2424} & = & R_{2424} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} + Ric_{44}\right) \\ W_{3434} & = & R_{3434} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{33} + Ric_{44}\right) \\ W_{1213} & = & \frac{1}{2}Ric_{23} \\ W_{1214} & = & \frac{1}{2}Ric_{24} \\ W_{1314} & = & \frac{1}{2}Ric_{34} \\ W_{2324} & = & R_{2324} + \frac{1}{2}Ric_{34} \\ W_{2334} & = & R_{2334} - \frac{1}{2}Ric_{24} \\ W_{2434} & = & R_{2434} + \frac{1}{2}Ric_{23} \end{array}$$

onde $Ric_{ij} = Ric(e_i, e_j)$ e $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$.

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando qué compoñentes do tensor de Weyl son nulas nos cálculos precedentes, obtemos:

$$\begin{aligned}
W_{11}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2\,W_{1234}) = \tfrac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434}) = W_{11}^{-}\\
W_{22}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} - 2\,W_{1324}) = \tfrac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424}) = W_{22}^{-}\\
W_{33}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} + 2\,W_{1423}) = \tfrac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323}) = W_{33}^{-}\\
W_{12}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1213} - W_{1224} + W_{3413} - W_{3424}) = \tfrac{1}{2}(W_{1213} - W_{3424}) = W_{12}^{-}\\
W_{13}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1214} + W_{1223} + W_{3414} + W_{3423}) = \tfrac{1}{2}(W_{1214} + W_{3423}) = W_{13}^{-}\\
W_{23}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1314} + W_{1323} - W_{2414} - W_{2423}) = \tfrac{1}{2}(W_{1314} - W_{2423}) = W_{23}^{-}
\end{aligned}$$

Así, chegamos a que a matriz asociada a $W_+ : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2$ vén dada por:

$$W_+ = \begin{pmatrix} W_{11}^{+} & W_{12}^{+} & W_{13}^{+} \\ W_{12}^{+} & W_{22}^{+} & W_{23}^{+} \\ W_{13}^{+} & W_{23}^{+} & W_{33}^{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}^{-} & W_{12}^{-} & W_{13}^{-} \\ W_{12}^{-} & W_{22}^{-} & W_{23}^{-} \\ W_{13}^{-} & W_{23}^{-} & W_{33}^{-} \end{pmatrix} = W_- \tag{3.2}$$

(P,g) ten estructura de producto warped riemanniano de tipo $2+2$

Sexa $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_1, e_2\}$ base de M e $\{e_3, e_4\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1, e tras unha serie de cálculos directos, obtense que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$\begin{aligned}
W_{1212} &= R_{1212} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{22}\right)\\
W_{1313} &= R_{1313} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{33}\right)\\
W_{1414} &= R_{1414} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{44}\right)\\
W_{2323} &= R_{2323} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{22} + Ric_{33}\right)\\
W_{2424} &= R_{2424} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{22} + Ric_{44}\right)\\
W_{3434} &= R_{3434} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{33} + Ric_{44}\right)\\
W_{1314} &= \tfrac{1}{2}Ric_{34}\\
W_{2324} &= \tfrac{1}{2}Ric_{34}\\
W_{1323} &= R_{1323} + \tfrac{1}{2}Ric_{12}\\
W_{1424} &= R_{1424} + \tfrac{1}{2}Ric_{12}
\end{aligned}$$

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando qué compoñentes do tensor de Weyl son nulas nos cálculos precedentes, obtemos:

$$\begin{aligned}
W_{11}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2\,W_{1234}) = \tfrac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434}) = W_{11}^{-}\\
W_{22}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} - 2\,W_{1324}) = \tfrac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424}) = W_{22}^{-}\\
W_{33}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} + 2\,W_{1423}) = \tfrac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323}) = W_{33}^{-}\\
W_{12}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1213} - W_{1224} + W_{3413} - W_{3424}) = 0 = W_{12}^{-}\\
W_{13}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1214} + W_{1223} + W_{3414} + W_{3423}) = 0 = W_{13}^{-}\\
W_{23}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1314} + W_{1323} - W_{2414} - W_{2423})\\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}Ric_{34} + W_{1323} - W_{2414} - \tfrac{1}{2}Ric_{34}\right) = -W_{23}^{-}
\end{aligned}$$

Así, chegamos a

$$(3.3) \qquad W_+ = \begin{pmatrix} W_{11}^+ & W_{12}^+ & W_{13}^+ \\ W_{12}^+ & W_{22}^+ & W_{23}^+ \\ W_{13}^+ & W_{23}^+ & W_{33}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}^- & W_{12}^- & W_{13}^- \\ W_{12}^- & W_{22}^- & -W_{23}^- \\ W_{13}^- & -W_{23}^- & W_{33}^- \end{pmatrix}$$

(P, g) **ten estructura de producto warped riemanniano de tipo** $3 + 1$

Sexa $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de M e $\{e_4\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1, e tras unha serie de cálculos directos, obtense que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$\begin{array}{rcl} W_{1212} & = & R_{1212} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{22}\right) \\ W_{1313} & = & R_{1313} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{33}\right) \\ W_{1414} & = & R_{1414} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{44}\right) \\ W_{2323} & = & R_{2323} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} + Ric_{33}\right) \\ W_{2424} & = & R_{2424} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} + Ric_{44}\right) \\ W_{3434} & = & R_{3434} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{33} + Ric_{44}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} W_{1213} & = & R_{1213} + \frac{1}{2}Ric_{23} \\ W_{1223} & = & R_{1223} - \frac{1}{2}Ric_{13} \\ W_{1323} & = & R_{1323} + \frac{1}{2}Ric_{12} \\ W_{1424} & = & R_{1424} + \frac{1}{2}Ric_{12} \\ W_{1434} & = & R_{1434} + \frac{1}{2}Ric_{13} \\ W_{2434} & = & R_{2434} + \frac{1}{2}Ric_{23} \end{array}$$

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando qué compoñentes do tensor de Weyl son nulas nos cálculos precedentes, obtemos:

$$\begin{array}{l} W_{11}^+ = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2\,W_{1234}) = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434}) = W_{11}^- \\ W_{22}^+ = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} - 2\,W_{1324}) = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424}) = W_{22}^- \\ W_{33}^+ = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} + 2\,W_{1423}) = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323}) = W_{33}^- \\ W_{12}^+ = \frac{1}{2}(W_{1213} - W_{1224} + W_{3413} - W_{3424}) = \frac{1}{2}(W_{1213} - W_{3424}) = W_{12}^- \\ W_{13}^+ = \frac{1}{2}(W_{1214} + W_{1223} + W_{3414} + W_{3423}) = \frac{1}{2}(W_{1223} + W_{3414}) = -W_{13}^- \\ W_{23}^+ = \frac{1}{2}(W_{1314} + W_{1323} - W_{2414} - W_{2423}) = \frac{1}{2}(W_{1323} - W_{2414}) = -W_{23}^- \end{array}$$

Así, chegamos a

$$(3.4) \qquad W_+ = \begin{pmatrix} W_{11}^+ & W_{12}^+ & W_{13}^+ \\ W_{12}^+ & W_{22}^+ & W_{23}^+ \\ W_{13}^+ & W_{23}^+ & W_{33}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}^- & W_{12}^- & -W_{13}^- \\ W_{12}^- & W_{22}^- & -W_{23}^- \\ -W_{13}^- & -W_{23}^- & W_{33}^- \end{pmatrix}$$

(P,g) ten estructura de producto warped semi-riemanniano

Unha base de $\Lambda^2 V^*$ vén dada pola expresión (2.3):

$$\begin{aligned}\Lambda_\pm &= \langle\{E_1^\pm = (e^1\wedge e^2 \pm e^3\wedge e^4)/\sqrt{2}, E_2^\pm = (e^1\wedge e^3 \pm e^2\wedge e^4)/\sqrt{2},\\ &\qquad E_3^\pm = (e^1\wedge e^4 \mp e^2\wedge e^3)/\sqrt{2}\}\rangle\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde é importante recalcar que $E_1^\pm$ é espacial, mentres que $E_2^\pm$ e $E_3^\pm$ son temporais.

Nesta base as compoñentes do tensor de Weyl autodual e anti-autodual, para calquera variedade de dimensión 4 con métrica de signatura $(2,2)$, teñen a expresión:

$$\begin{aligned}
W_{11}^+ &= \tfrac{1}{2}\left(W(e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4, e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(W_{1212} + W_{3434} + 2W_{1234}\right)\\
W_{11}^- &= \tfrac{1}{2}\left(W(e^1\wedge e^2 - e^3\wedge e^4, e^1\wedge e^2 - e^3\wedge e^4)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(W_{1212} + W_{3434} - 2W_{1234}\right)\\[1em]
W_{22}^+ &= \tfrac{1}{2}\left(W(e^1\wedge e^3 + e^2\wedge e^4, e^1\wedge e^3 + e^2\wedge e^4)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(W_{1313} + W_{2424} + 2W_{1324}\right)\\
W_{22}^- &= \tfrac{1}{2}\left(W(e^1\wedge e^3 - e^2\wedge e^4, e^1\wedge e^3 - e^2\wedge e^4)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(W_{1313} + W_{2424} - 2W_{1324}\right)\\[1em]
W_{33}^+ &= \tfrac{1}{2}\left(W(e^1\wedge e^4 - e^2\wedge e^3, e^1\wedge e^4 - e^2\wedge e^3)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(W_{1414} + W_{2323} - 2W_{1423}\right)\\
W_{33}^- &= \tfrac{1}{2}\left(W(e^1\wedge e^4 + e^2\wedge e^3, e^1\wedge e^4 + e^2\wedge e^3)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(W_{1414} + W_{2323} + 2W_{1423}\right)\\[1em]
W_{12}^+ &= \tfrac{1}{2}\left(W(e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4, e^1\wedge e^3 + e^2\wedge e^4)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(W_{1213} + W_{1224} + W_{3413} + W_{3424}\right)\\
W_{12}^- &= \tfrac{1}{2}\left(W(e^1\wedge e^2 - e^3\wedge e^4, e^1\wedge e^3 - e^2\wedge e^4)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(W_{1213} - W_{1224} - W_{3413} + W_{3424}\right)\\[1em]
W_{13}^+ &= \tfrac{1}{2}\left(W(e^1\wedge e^2 + e^3\wedge e^4, e^1\wedge e^4 - e^2\wedge e^3)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(W_{1214} - W_{1223} + W_{3414} - W_{3423}\right)\\
W_{13}^- &= \tfrac{1}{2}\left(W(e^1\wedge e^2 - e^3\wedge e^4, e^1\wedge e^4 + e^2\wedge e^3)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(W_{1214} + W_{1223} - W_{3414} - W_{3423}\right)\\[1em]
W_{23}^+ &= \tfrac{1}{2}\left(W(e^1\wedge e^3 + e^2\wedge e^4, e^1\wedge e^4 - e^2\wedge e^3)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(W_{1314} - W_{1323} + W_{2414} - W_{2423}\right)\\
W_{23}^- &= \tfrac{1}{2}\left(W(e^1\wedge e^3 - e^2\wedge e^4, e^1\wedge e^4 + e^2\wedge e^3)\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(W_{1314} + W_{1323} - W_{2414} - W_{2423}\right)
\end{aligned}$$

Comprobamos que $W^+_{ij} = \pm W^-_{ij}$, $\forall i, j = 1, 2, 3, 4$ en cada un dos casos:

(P, g) ten estructura de producto warped semi-riemanniano de tipo $1+3$, onde a signatura está dada por $((+), (+--))$

Sexa $\{e_1(-), e_2(-), e_3(+), e_4(+)\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_4\}$ base de M e $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1, e tras unha serie de cálculos directos, obtense que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$\begin{array}{rcl}
W_{1212} &=& R_{1212} - \frac{Sc}{6} - \frac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{22}\right)\\
W_{1313} &=& R_{1313} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} - Ric_{33}\right)\\
W_{1414} &=& R_{1414} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} - Ric_{44}\right)\\
W_{2323} &=& R_{2323} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} - Ric_{33}\right)\\
W_{2424} &=& R_{2424} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} - Ric_{44}\right)\\
W_{3434} &=& R_{3434} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{33} + Ric_{44}\right)\\
W_{1424} &=& \frac{1}{2}Ric_{12}\\
W_{1434} &=& \frac{1}{2}Ric_{13}\\
W_{2434} &=& \frac{1}{2}Ric_{23}\\
W_{1213} &=& R_{1213} - \frac{1}{2}Ric_{23}\\
W_{1223} &=& R_{1223} + \frac{1}{2}Ric_{13}\\
W_{1323} &=& R_{1323} + \frac{1}{2}Ric_{12}
\end{array}$$

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando nos cálculos precedentes que algunhas compoñentes do tensor de Weyl son nulas, obtemos:

$$\begin{array}{l}
W^+_{11} = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2W_{1234}) = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434}) = W^-_{11}\\
W^+_{22} = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} + 2W_{1324}) = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424}) = W^-_{22}\\
W^+_{33} = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} - 2W_{1423}) = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323}) = W^-_{33}\\
W^+_{12} = \frac{1}{2}(W_{1213} + W_{1224} + W_{3413} + W_{3424}) = \frac{1}{2}(W_{1213} + W_{3424}) = W^-_{12}\\
W^+_{13} = \frac{1}{2}(W_{1214} - W_{1223} + W_{3414} - W_{3423}) = \frac{1}{2}(-W_{1223} + W_{3414}) = -W^-_{13}\\
W^+_{23} = \frac{1}{2}(W_{1314} - W_{1323} + W_{2414} - W_{2423}) = \frac{1}{2}(-W_{1323} + W_{2414}) = -W^-_{23}
\end{array}$$

Así, chegamos a que a matriz asociada a $W_+ : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2$ pódese escribir como segue:

$$W_+ = \begin{pmatrix} W^+_{11} & W^+_{12} & W^+_{13}\\ -W^+_{12} & -W^+_{22} & -W^+_{23}\\ -W^+_{13} & -W^+_{23} & -W^+_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^-_{11} & W^-_{12} & -W^-_{13}\\ -W^-_{12} & -W^-_{22} & W^-_{23}\\ W^-_{13} & W^-_{23} & -W^-_{33} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

(P,g) **ten estructura de producto warped semi-riemanniano de tipo** $1+3$**, onde a signatura está dada por** $((-),(-++))$

Sexa $\{e_1(-),e_2(-),e_3(+),e_4(+)\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_1\}$ base de M e $\{e_2,e_3,e_4\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1, e tras unha serie de cálculos directos, obtense que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$\begin{array}{lcl}
W_{1212} &=& R_{1212}-\frac{Sc}{6}-\frac{1}{2}\left(Ric_{11}+Ric_{22}\right)\\
W_{1313} &=& R_{1313}+\frac{Sc}{6}+\frac{1}{2}\left(Ric_{11}-Ric_{33}\right)\\
W_{1414} &=& R_{1414}+\frac{Sc}{6}+\frac{1}{2}\left(Ric_{11}-Ric_{44}\right)\\
W_{2323} &=& R_{2323}+\frac{Sc}{6}+\frac{1}{2}\left(Ric_{22}-Ric_{33}\right)\\
W_{2424} &=& R_{2424}+\frac{Sc}{6}+\frac{1}{2}\left(Ric_{22}-Ric_{44}\right)\\
W_{3434} &=& R_{3434}-\frac{Sc}{6}+\frac{1}{2}\left(Ric_{33}+Ric_{44}\right)\\
W_{1213} &=& -\frac{1}{2}Ric_{23}\\
W_{1214} &=& -\frac{1}{2}Ric_{24}\\
W_{1314} &=& -\frac{1}{2}Ric_{34}\\
W_{2324} &=& R_{2324}-\frac{1}{2}Ric_{34}\\
W_{2334} &=& R_{2334}-\frac{1}{2}Ric_{24}\\
W_{2434} &=& R_{2434}+\frac{1}{2}Ric_{23}
\end{array}$$

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando nos cálculos precedentes que algunhas compoñentes do tensor de Weyl son nulas, obtemos:

$$\begin{array}{l}
W_{11}^{+}=\frac{1}{2}(W_{1212}+W_{3434}+2W_{1234})=\frac{1}{2}(W_{1212}+W_{3434})=W_{11}^{-}\\
W_{22}^{+}=\frac{1}{2}(W_{1313}+W_{2424}+2W_{1324})=\frac{1}{2}(W_{1313}+W_{2424})=W_{22}^{-}\\
W_{33}^{+}=\frac{1}{2}(W_{1414}+W_{2323}-2W_{1423})=\frac{1}{2}(W_{1414}+W_{2323})=W_{33}^{-}\\
W_{12}^{+}=\frac{1}{2}(W_{1213}+W_{1224}+W_{3413}+W_{3424})=\frac{1}{2}(W_{1213}+W_{3424})=W_{12}^{-}\\
W_{13}^{+}=\frac{1}{2}(W_{1214}-W_{1223}+W_{3414}-W_{3423})=\frac{1}{2}(W_{1214}-W_{3423})=W_{13}^{-}\\
W_{23}^{+}=\frac{1}{2}(W_{1314}-W_{1323}+W_{2414}-W_{2423})=\frac{1}{2}(W_{1314}-W_{2423})=W_{23}^{-}
\end{array}$$

Así, chegamos a

$$W_{+}=\begin{pmatrix} W_{11}^{+} & W_{12}^{+} & W_{13}^{+}\\ -W_{12}^{+} & -W_{22}^{+} & -W_{23}^{+}\\ -W_{13}^{+} & -W_{23}^{+} & -W_{33}^{+}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} W_{11}^{-} & W_{12}^{-} & W_{13}^{-}\\ -W_{12}^{-} & -W_{22}^{-} & -W_{23}^{-}\\ -W_{13}^{-} & -W_{23}^{-} & -W_{33}^{-}\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

(P,g) **ten estructura de producto warped semi-riemanniano de tipo** $2+2$**, onde a signatura está dada por** $((++),(--))$

Sexa $\{e_1(-),e_2(-),e_3(+),e_4(+)\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_3,e_4\}$ base de M e $\{e_1,e_2\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1), e tras unha serie de cálculos directos, obtense

que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$\begin{array}{rcl} W_{1212} & = & R_{1212} - \frac{Sc}{6} - \frac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{22}\right) \\ W_{1313} & = & R_{1313} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} - Ric_{33}\right) \\ W_{1414} & = & R_{1414} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} - Ric_{44}\right) \\ W_{2323} & = & R_{2323} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} - Ric_{33}\right) \\ W_{2424} & = & R_{2424} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} - Ric_{44}\right) \\ W_{3434} & = & R_{3434} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{33} + Ric_{44}\right) \\ W_{1323} & = & \frac{1}{2}Ric_{12} \\ W_{1424} & = & \frac{1}{2}Ric_{12} \\ W_{1314} & = & R_{1314} - \frac{1}{2}Ric_{34} \\ W_{2324} & = & R_{2324} - \frac{1}{2}Ric_{34} \end{array}$$

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando nos cálculos precedentes que algunhas compoñentes do tensor de Weyl son nulas, obtemos:

$$\begin{array}{l} W_{11}^{+} = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2W_{1234}) = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434}) = W_{11}^{-} \\ W_{22}^{+} = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} + 2W_{1324}) = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424}) = W_{22}^{-} \\ W_{33}^{+} = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} - 2W_{1423}) = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323}) = W_{33}^{-} \\ W_{12}^{+} = \frac{1}{2}(W_{1213} + W_{1224} + W_{3413} + W_{3424}) = 0 = W_{12}^{-} \\ W_{13}^{+} = \frac{1}{2}(W_{1214} - W_{1223} + W_{3414} - W_{3423}) = 0 = W_{13}^{-} \\ W_{23}^{+} = \frac{1}{2}(W_{1314} - W_{1323} + W_{2414} - W_{2423}) \\ \qquad = \frac{1}{2}(W_{1314} - \frac{1}{2}Ric_{34} + \frac{1}{2}Ric_{34} - W_{2423}) = W_{23}^{-} \end{array}$$

Así, chegamos a

$$W_{+} = \begin{pmatrix} W_{11}^{+} & W_{12}^{+} & W_{13}^{+} \\ -W_{12}^{+} & -W_{22}^{+} & -W_{23}^{+} \\ -W_{13}^{+} & -W_{23}^{+} & -W_{33}^{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}^{-} & W_{12}^{-} & W_{13}^{-} \\ -W_{12}^{-} & -W_{22}^{-} & -W_{23}^{-} \\ -W_{13}^{-} & -W_{23}^{-} & -W_{33}^{-} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

(P, g) ten estructura de producto warped semi-riemanniano de tipo $2+2$, onde a signatura está dada por $((--),(++))$

Sexa $\{e_1(-), e_2(-), e_3(+), e_4(+)\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_1, e_2\}$ base de M e $\{e_3, e_4\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1, e tras unha serie de cálculos directos, obtense

que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$\begin{array}{rcl}
W_{1212} & = & R_{1212} - \frac{Sc}{6} - \frac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{22}\right) \\
W_{1313} & = & R_{1313} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} - Ric_{33}\right) \\
W_{1414} & = & R_{1414} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} - Ric_{44}\right) \\
W_{2323} & = & R_{2323} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} - Ric_{33}\right) \\
W_{2424} & = & R_{2424} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} - Ric_{44}\right) \\
W_{3434} & = & R_{3434} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{33} + Ric_{44}\right) \\
W_{1314} & = & -\frac{1}{2}Ric_{34} \\
W_{2324} & = & -\frac{1}{2}Ric_{34} \\
W_{1323} & = & R_{1323} + \frac{1}{2}Ric_{12} \\
W_{1424} & = & R_{1424} + \frac{1}{2}Ric_{12}
\end{array}$$

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando nos cálculos precedentes que algunhas compoñentes do tensor de Weyl son nulas, obtemos:

$$\begin{array}{rl}
W_{11}^{+} & = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2W_{1234}) = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434}) = W_{11}^{-} \\
W_{22}^{+} & = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} + 2W_{1324}) = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424}) = W_{22}^{-} \\
W_{33}^{+} & = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} - 2W_{1423}) = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323}) = W_{33}^{-} \\
W_{12}^{+} & = \frac{1}{2}(W_{1213} + W_{1224} + W_{3413} + W_{3424}) = 0 = W_{12}^{-} \\
W_{13}^{+} & = \frac{1}{2}(W_{1214} - W_{1223} + W_{3414} - W_{3423}) = 0 = W_{13}^{-} \\
W_{23}^{+} & = \frac{1}{2}(W_{1314} - W_{1323} + W_{2414} - W_{2423}) \\
 & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}Ric_{34} - W_{1323} + W_{2414} + \frac{1}{2}Ric_{34}) = -W_{23}^{-}
\end{array}$$

Así, chegamos a

$$W_{+} = \begin{pmatrix} W_{11}^{+} & W_{12}^{+} & W_{13}^{+} \\ -W_{12}^{+} & -W_{22}^{+} & -W_{23}^{+} \\ -W_{13}^{+} & -W_{23}^{+} & -W_{33}^{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}^{-} & W_{12}^{-} & W_{13}^{-} \\ -W_{12}^{-} & -W_{22}^{-} & W_{23}^{-} \\ -W_{13}^{-} & W_{23}^{-} & -W_{33}^{-} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

(P, g) **ten estructura de producto warped semi-riemanniano de tipo** $2+2$**, onde a signatura está dada por** $((+-), (+-))$

Sexa $\{e_1(-), e_2(-), e_3(+), e_4(+)\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_1, e_3\}$ base de M e $\{e_2, e_4\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1, e tras unha serie de cálculos directos, obtense

que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$\begin{array}{rcl}
W_{1212} & = & R_{1212} - \frac{Sc}{6} - \frac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{22}\right) \\
W_{1313} & = & R_{1313} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} - Ric_{33}\right) \\
W_{1414} & = & R_{1414} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} - Ric_{44}\right) \\
W_{2323} & = & R_{2323} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} - Ric_{33}\right) \\
W_{2424} & = & R_{2424} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} - Ric_{44}\right) \\
W_{3434} & = & R_{3434} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{33} + Ric_{44}\right) \\
W_{1214} & = & -\frac{1}{2}Ric_{24} \\
W_{2334} & = & -\frac{1}{2}Ric_{24} \\
W_{1223} & = & R_{1223} + \frac{1}{2}Ric_{13} \\
W_{1434} & = & R_{1434} + \frac{1}{2}Ric_{13}
\end{array}$$

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando nos cálculos precedentes que algunhas compoñentes do tensor de Weyl son nulas, obtemos:

$$\begin{array}{l}
W^+_{11} = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2W_{1234}) = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434}) = W^-_{11} \\
W^+_{22} = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} + 2W_{1324}) = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424}) = W^-_{22} \\
W^+_{33} = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} - 2W_{1423}) = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323}) = W^-_{33} \\
W^+_{12} = \frac{1}{2}(W_{1213} + W_{1224} + W_{3413} + W_{3424}) = 0 = W^-_{12} \\
W^+_{13} = \frac{1}{2}(W_{1214} - W_{1223} + W_{3414} - W_{3423}) \\
\qquad = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}Ric_{24} - W_{1223} + W_{3414} + \frac{1}{2}Ric_{24}) = -W^-_{13} \\
W^+_{23} = \frac{1}{2}(W_{1314} - W_{1323} + W_{2414} - W_{2423}) = 0 = W^-_{23}
\end{array}$$

Así, chegamos a

$$W_+ = \begin{pmatrix} W^+_{11} & W^+_{12} & W^+_{13} \\ -W^+_{12} & -W^+_{22} & -W^+_{23} \\ -W^+_{13} & -W^+_{23} & -W^+_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^-_{11} & W^-_{12} & -W^-_{13} \\ -W^-_{12} & -W^-_{22} & -W^-_{23} \\ W^-_{13} & -W^-_{23} & -W^-_{33} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

(P, g) ten estructura de producto warped semi-riemanniano de tipo $3+1$, onde a signatura está dada por $((- - +), (+))$

Sexa $\{e_1(-), e_2(-), e_3(+), e_4(+)\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de M e $\{e_4\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1, e tras unha serie de cálculos directos, obtense

que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$\begin{array}{rcl}
W_{1212} & = & R_{1212} - \frac{Sc}{6} - \frac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{22}\right) \\
W_{1313} & = & R_{1313} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} - Ric_{33}\right) \\
W_{1414} & = & R_{1414} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} - Ric_{44}\right) \\
W_{2323} & = & R_{2323} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} - Ric_{33}\right) \\
W_{2424} & = & R_{2424} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} - Ric_{44}\right) \\
W_{3434} & = & R_{3434} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{33} + Ric_{44}\right) \\
W_{1213} & = & R_{1213} - \frac{1}{2}Ric_{23} \\
W_{1223} & = & R_{1223} + \frac{1}{2}Ric_{13} \\
W_{1323} & = & R_{1323} + \frac{1}{2}Ric_{12} \\
W_{1424} & = & R_{1424} + \frac{1}{2}Ric_{12} \\
W_{1434} & = & R_{1434} + \frac{1}{2}Ric_{13} \\
W_{2434} & = & R_{2434} + \frac{1}{2}Ric_{23}
\end{array}$$

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando nos cálculos precedentes que algunhas compoñentes do tensor de Weyl son nulas, obtemos:

$$\begin{array}{l}
W_{11}^{+} = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2W_{1234}) = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434}) = W_{11}^{-} \\
W_{22}^{+} = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} + 2W_{1324}) = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424}) = W_{22}^{-} \\
W_{33}^{+} = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} - 2W_{1423}) = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323}) = W_{33}^{-} \\
W_{12}^{+} = \frac{1}{2}(W_{1213} + W_{1224} + W_{3413} + W_{3424}) = \frac{1}{2}(W_{1213} + W_{3424}) = W_{12}^{-} \\
W_{13}^{+} = \frac{1}{2}(W_{1214} - W_{1223} + W_{3414} - W_{3423}) = \frac{1}{2}(-W_{1223} + W_{3414}) = -W_{13}^{-} \\
W_{23}^{+} = \frac{1}{2}(W_{1314} - W_{1323} + W_{2414} - W_{2423}) = \frac{1}{2}(-W_{1323} + W_{2414}) = -W_{23}^{-}
\end{array}$$

Así, chegamos a

$$W_{+} = \begin{pmatrix} W_{11}^{+} & W_{12}^{+} & W_{13}^{+} \\ -W_{12}^{+} & -W_{22}^{+} & -W_{23}^{+} \\ -W_{13}^{+} & -W_{23}^{+} & -W_{33}^{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}^{-} & W_{12}^{-} & -W_{13}^{-} \\ -W_{12}^{-} & -W_{22}^{-} & W_{23}^{-} \\ W_{13}^{-} & W_{23}^{-} & -W_{33}^{-} \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

(P, g) ten estructura de producto warped semi-riemanniano de tipo $3+1$, onde a signatura está dada por $((++-),(-))$

Sexa $\{e_1(-), e_2(-), e_3(+), e_4(+)\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_2, e_3, e_4\}$ base de M e $\{e_1\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1, e tras unha serie de cálculos directos, obtense

que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$
\begin{array}{rcl}
W_{1212} & = & R_{1212} - \frac{Sc}{6} - \frac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{22}\right) \\
W_{1313} & = & R_{1313} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} - Ric_{33}\right) \\
W_{1414} & = & R_{1414} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{11} - Ric_{44}\right) \\
W_{2323} & = & R_{2323} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} - Ric_{33}\right) \\
W_{2424} & = & R_{2424} + \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{22} - Ric_{44}\right) \\
W_{3434} & = & R_{3434} - \frac{Sc}{6} + \frac{1}{2}\left(Ric_{33} + Ric_{44}\right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
W_{1213} & = & R_{1213} - \frac{1}{2}Ric_{23} \\
W_{1214} & = & R_{1214} - \frac{1}{2}Ric_{24} \\
W_{1314} & = & R_{1314} - \frac{1}{2}Ric_{34} \\
W_{2324} & = & R_{2324} - \frac{1}{2}Ric_{34} \\
W_{2334} & = & R_{2334} - \frac{1}{2}Ric_{24} \\
W_{2434} & = & R_{2434} + \frac{1}{2}Ric_{23}
\end{array}
$$

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando nos cálculos precedentes que algunhas compoñentes do tensor de Weyl son nulas, obtemos:

$$
\begin{array}{l}
W^+_{11} = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2W_{1234}) = \frac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434}) = W^-_{11} \\
W^+_{22} = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} + 2W_{1324}) = \frac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424}) = W^-_{22} \\
W^+_{33} = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} - 2W_{1423}) = \frac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323}) = W^-_{33} \\
W^+_{12} = \frac{1}{2}(W_{1213} + W_{1224} + W_{3413} + W_{3424}) = \frac{1}{2}(W_{1213} + W_{3424}) = W^-_{12} \\
W^+_{13} = \frac{1}{2}(W_{1214} - W_{1223} + W_{3414} - W_{3423}) = \frac{1}{2}(W_{1214} - W_{3423}) = W^-_{13} \\
W^+_{23} = \frac{1}{2}(W_{1314} - W_{1323} + W_{2414} - W_{2423}) = \frac{1}{2}(W_{1314} - W_{2423}) = W^-_{23}
\end{array}
$$

Así, chegamos a

$$
W_+ = \begin{pmatrix} W^+_{11} & W^+_{12} & W^+_{13} \\ -W^+_{12} & -W^+_{22} & -W^+_{23} \\ -W^+_{13} & -W^+_{23} & -W^+_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^-_{11} & W^-_{12} & W^-_{13} \\ -W^-_{12} & -W^-_{22} & -W^-_{23} \\ -W^-_{13} & -W^-_{23} & -W^-_{33} \end{pmatrix} \tag{3.12}
$$

Temos, pois, que en calquera dos casos posibles anteriores, séguese que $W^+ = 0$ se e soamente se $W^- = 0$, sen máis que considerar as expresións (3.2), ..., (3.12). □

Demostración do Teorema 3.3.1.

Para demostrar o teorema basta ver que se (M, g) é puntualmente Osserman entón ten curvatura seccional constante, pois a implicación inversa obtémola a partir do Exemplo 1.3.2 do Capítulo 1. Supoñemos pois (M, g) puntualmente Osserman. O Teorema 2.2.11 permítenos concluir que (M, g) é Einstein e autodual ou anti-autodual.

O Teorema 3.3.2 garántenos a equivalencia entre a autodualidade e a anti-autodualidade para o caso que nos ocupa. Isto engadido a que M é autodual ou anti-autodual, lévanos a que é ambas cousas. Entón $W = 0$. Se temos en conta agora que a variedade é Einstein, estas dúas condicións equivalen a que a variedade ten curvatura seccional constante, como vimos na Observación 2.2.7. □

3.4 Producto twisted e condición de Osserman

Unha vez dispoñemos das expresións do tensor de Ricci sobre os distintos tipos de campos de vectores de P, e apoiándonos no Corolario 3.1.9, podemos xeneralizar o Teorema 3.3.1 a productos twisted.

Teorema 3.4.1 *Sexa (P, g) unha variedade semi-riemanniana de dimensión 4 que localmente é un producto twisted, é dicir, $(P, g) = (M \times_f N, g_M \oplus f^2 g_N)$. Tense que P é puntualmente Osserman se e só se ten curvatura seccional constante.*

Demostración.
Se a curvatura seccional é constante xa vimos que a variedade é puntualmente Osserman. Supoñamos pois que (P, g) é puntualmente Osserman, para probar a outra implicación. Distinguiremos dous casos:

Caso a: dim $N > 1$
Por ser (P, g) puntualmente Osserman, temos polo Teorema 2.2.11 que (P, g) é Einstein e autodual ou anti-autodual. Pero por ser a variedade Einstein e $dimN > 1$, polo Corolario 3.1.9 deducimos que a variedade pódese considerar como un producto warped de (M, g_M) e $(N, \widetilde{g_N})$. Chegados a este punto, só resta aplicar o Teorema 3.3.1 para concluir que a variedade ten curvatura seccional constante.

Caso b: dim $N = 1$
Agora non poderemos empregar o Corolario 3.1.9 por non achármonos nas súas hipóteses. É por isto que neste caso faremos as contas de xeito análogo a como fixemos para productos warped no Teorema 3.3.2, é dicir, veremos que se $dimN = 1$, o carácter autodual equivale ó anti-autodual, e, dado que a variedade é puntualmente Osserman por hipótese, temos garantido polo Teorema 2.2.11 que cumple unha das dúas condicións. Así pois, teremos que a variedade ten tensor de Weyl nulo, e iso unido a que é Einstein, de novo polo Corolario 3.1.9, implica que ten curvatura seccional constante.

Para comezar vexamos un lema análogo ó Lema 3.2.1 para un producto twisted $P = M \times_f N$ con $dimN = 1$

Lema 3.4.2 *Sexa $P = M \times_f N$ un producto twisted con $dimN = 1$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $U \in \mathfrak{X}(N)$ campos de vectores ortogonais dous a dous. Entón:*

i) $W(X, Y, Y, U) = 0$

ii) $W(X, Y, Z, U) = 0$

Demostración.
Facemos os cálculos para os dous casos:

$$\begin{aligned}
W(X,Y,Y,U) &= R(X,Y,Y,U) \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\{Ric(Y,Y)g(X,U) - Ric(X,Y)g(Y,U) \\
&\quad +g(Y,Y)Ric(X,U) - g(X,Y)Ric(Y,U)\} \\
&\quad +\tfrac{Sc}{6}\{g(Y,Y)g(X,U) - g(X,Y)g(Y,U)\} \\
&= R(X,Y,Y,U) + g(Y,Y)Ric(X,U) = 0
\end{aligned}$$

Vimos de aplicar en primeiro lugar a ortogonalidade entre X, Y, Z, U e, na última igualdade, as proposicións 3.1.4,i e 3.1.6,ii.

$$\begin{aligned}
W(X,Y,Z,U) &= R(X,Y,Z,U) \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\{Ric(Y,Z)g(X,U) - Ric(X,Z)g(Y,U) \\
&\quad +g(Y,Z)Ric(X,U) - g(X,Z)Ric(Y,U)\} \\
&\quad +\tfrac{Sc}{6}\{g(Y,Z)g(X,U) - g(X,Z)g(Y,U)\} \\
&= R(X,Y,Z,U) = 0
\end{aligned}$$

Onde empregamos, de novo, a ortogonalidade de X, Y, Z, U e a Proposición 3.1.4. □

Unha vez temos feito os cálculos deste lema, recuperamos as expresións das compoñentes do tensor de Weyl da demostración do Teorema 3.3.2 para comprobar que $W_+ = 0 \Leftrightarrow W_- = 0$. Comprobamos que as compoñentes do tensor de Weyl autodual e anti-autodual se anulan simultaneamente, e para iso empregamos o mesmo sistema que na demostración do Teorema 3.3.2, analizamos un a un as distintas posibilidades para o producto twisted, tendo en conta que neste caso a dimensión de N é 1.

(P, g) ten estructura de producto twisted riemanniano de tipo $3 + 1$

Unha base de $\Lambda^2 V^*$ vén dada pola expresión (3.1). Logo as compoñentes do tensor de Weyl teñen a expresión:

$$\begin{aligned}
W_{11}^+ &= \tfrac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2W_{1234}) \\
W_{11}^- &= \tfrac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} - 2W_{1234})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{22}^+ &= \tfrac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} - 2W_{1324}) \\
W_{22}^- &= \tfrac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} + 2W_{1324})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{33}^+ &= \tfrac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} + 2W_{1423}) \\
W_{33}^- &= \tfrac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} - 2W_{1423})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_{12}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1213} - W_{1224} + W_{3413} - W_{3424}) \\
W_{12}^{-} &= \tfrac{1}{2}(W_{1213} + W_{1224} - W_{3413} - W_{3424}) \\
W_{13}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1214} + W_{1223} + W_{3414} + W_{3423}) \\
W_{13}^{-} &= \tfrac{1}{2}(W_{1214} - W_{1223} - W_{3414} + W_{3423}) \\
W_{23}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1314} + W_{1323} - W_{2414} - W_{2423}) \\
W_{23}^{-} &= \tfrac{1}{2}(W_{1314} - W_{1323} + W_{2414} - W_{2423})
\end{aligned}
$$

Sexa $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de M e $\{e_4\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1, e tras unha serie de cálculos directos, obtense que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$
\begin{aligned}
W_{1212} &= R_{1212} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{22}\right) \\
W_{1313} &= R_{1313} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{33}\right) \\
W_{1414} &= R_{1414} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{11} + Ric_{44}\right) \\
W_{2323} &= R_{2323} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{22} + Ric_{33}\right) \\
W_{2424} &= R_{2424} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{22} + Ric_{44}\right) \\
W_{3434} &= R_{3434} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{33} + Ric_{44}\right) \\
W_{1213} &= R_{1213} + \tfrac{1}{2}Ric_{23} \\
W_{1223} &= R_{1223} - \tfrac{1}{2}Ric_{13} \\
W_{1323} &= R_{1323} + \tfrac{1}{2}Ric_{12} \\
W_{1424} &= R_{1424} + \tfrac{1}{2}Ric_{12} \\
W_{1434} &= R_{1434} + \tfrac{1}{2}Ric_{13} \\
W_{2434} &= R_{2434} + \tfrac{1}{2}Ric_{23}
\end{aligned}
$$

onde $Ric_{ij} = Ric(e_i, e_j)$ e $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$.

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando qué compoñentes do tensor de Weyl son nulas nos cálculos precedentes, obtemos:

$$
\begin{aligned}
W_{11}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2\,W_{1234}) = \tfrac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434}) = W_{11}^{-} \\
W_{22}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} - 2\,W_{1324}) = \tfrac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424}) = W_{22}^{-} \\
W_{33}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} + 2\,W_{1423}) = \tfrac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323}) = W_{33}^{-} \\
W_{12}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1213} - W_{1224} + W_{3413} - W_{3424}) = \tfrac{1}{2}(W_{1213} - W_{3424}) = W_{12}^{-} \\
W_{13}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1214} + W_{1223} + W_{3414} + W_{3423}) = \tfrac{1}{2}(W_{1223} + W_{3414}) = -W_{13}^{-} \\
W_{23}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1314} + W_{1323} - W_{2414} - W_{2423}) = \tfrac{1}{2}(W_{1323} - W_{2414}) = -W_{23}^{-}
\end{aligned}
$$

Así, chegamos a

$$
W_{+} = \begin{pmatrix} W_{11}^{+} & W_{12}^{+} & W_{13}^{+} \\ W_{12}^{+} & W_{22}^{+} & W_{23}^{+} \\ W_{13}^{+} & W_{23}^{+} & W_{33}^{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}^{-} & W_{12}^{-} & -W_{13}^{-} \\ W_{12}^{-} & W_{22}^{-} & -W_{23}^{-} \\ -W_{13}^{-} & -W_{23}^{-} & W_{33}^{-} \end{pmatrix} \tag{3.13}
$$

(P,g) ten estructura de producto twisted semi-riemanniano de tipo $3+1$

Para os dous casos en que a métrica do producto twisted é indefinida temos unha base de $\Lambda^2 V^*$, que vén dada pola expresión (3.5). Nesta base temos calculadas as compoñentes, recordamos a súa expresión:

$$\begin{aligned}
W_{11}^+ &= \tfrac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2\,W_{1234})\\
W_{11}^- &= \tfrac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} - 2\,W_{1234})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{22}^+ &= \tfrac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} + 2\,W_{1324})\\
W_{22}^- &= \tfrac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} - 2\,W_{1324})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{33}^+ &= \tfrac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} - 2\,W_{1423})\\
W_{33}^- &= \tfrac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} + 2\,W_{1423})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{12}^+ &= \tfrac{1}{2}(W_{1213} + W_{1224} + W_{3413} + W_{3424})\\
W_{12}^- &= \tfrac{1}{2}(W_{1213} - W_{1224} - W_{3413} + W_{3424})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{13}^+ &= \tfrac{1}{2}(W_{1214} - W_{1223} + W_{3414} - W_{3423})\\
W_{13}^- &= \tfrac{1}{2}(W_{1214} + W_{1223} - W_{3414} - W_{3423})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{23}^+ &= \tfrac{1}{2}(W_{1314} - W_{1323} + W_{2414} - W_{2423})\\
W_{23}^- &= \tfrac{1}{2}(W_{1314} + W_{1323} - W_{2414} - W_{2423})
\end{aligned}$$

(P,g) ten estructura de producto twisted semi-riemanniano de tipo $3+1$, onde a signatura está dada por $((--+),(+))$

Sexa $\{e_1(-), e_2(-), e_3(+), e_4(+)\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de M e $\{e_4\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1, e tras unha serie de cálculos directos, obtense que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$\begin{aligned}
W_{1212} &= R_{1212} - \tfrac{Sc}{6} - \tfrac{1}{2}\,(Ric_{11} + Ric_{22})\\
W_{1313} &= R_{1313} + \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\,(Ric_{11} - Ric_{33})\\
W_{1414} &= R_{1414} + \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\,(Ric_{11} - Ric_{44})\\
W_{2323} &= R_{2323} + \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\,(Ric_{22} - Ric_{33})\\
W_{2424} &= R_{2424} + \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\,(Ric_{22} - Ric_{44})\\
W_{3434} &= R_{3434} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\,(Ric_{33} + Ric_{44})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{1213} &= R_{1213} - \tfrac{1}{2}Ric_{23}\\
W_{1223} &= R_{1223} + \tfrac{1}{2}Ric_{13}\\
W_{1323} &= R_{1323} + \tfrac{1}{2}Ric_{12}\\
W_{1424} &= R_{1424} + \tfrac{1}{2}Ric_{12}\\
W_{1434} &= R_{1434} + \tfrac{1}{2}Ric_{13}\\
W_{2434} &= R_{2434} + \tfrac{1}{2}Ric_{23}
\end{aligned}$$

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando nos cálculos precedentes que algunhas compoñentes do tensor de Weyl son nulas, obtemos:

$$\begin{aligned}
W_{11}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1212}+W_{3434}+2W_{1234}) = \tfrac{1}{2}(W_{1212}+W_{3434}) = W_{11}^{-}\\
W_{22}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1313}+W_{2424}+2W_{1324}) = \tfrac{1}{2}(W_{1313}+W_{2424}) = W_{22}^{-}\\
W_{33}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1414}+W_{2323}-2W_{1423}) = \tfrac{1}{2}(W_{1414}+W_{2323}) = W_{33}^{-}\\
W_{12}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1213}+W_{1224}+W_{3413}+W_{3424}) = \tfrac{1}{2}(W_{1213}+W_{3424}) = W_{12}^{-}\\
W_{13}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1214}-W_{1223}+W_{3414}-W_{3423}) = \tfrac{1}{2}(-W_{1223}+W_{3414}) = -W_{13}^{-}\\
W_{23}^{+} &= \tfrac{1}{2}(W_{1314}-W_{1323}+W_{2414}-W_{2423}) = \tfrac{1}{2}(-W_{1323}+W_{2414}) = -W_{23}^{-}
\end{aligned}$$

Así, chegamos a

$$W_{+} = \begin{pmatrix} W_{11}^{+} & W_{12}^{+} & W_{13}^{+} \\ -W_{12}^{+} & -W_{22}^{+} & -W_{23}^{+} \\ -W_{13}^{+} & -W_{23}^{+} & -W_{33}^{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}^{-} & W_{12}^{-} & -W_{13}^{-} \\ -W_{12}^{-} & -W_{22}^{-} & W_{23}^{-} \\ W_{13}^{-} & W_{23}^{-} & -W_{33}^{-} \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

(P,g) **ten estructura de producto twisted semi-riemanniano de tipo** $3+1$**, onde a signatura está dada por** $((++-),(-))$

Sexa $\{e_1(-),e_2(-),e_3(+),e_4(+)\}$ unha base ortonormal de P con $\{e_2,e_3,e_4\}$ base de M e $\{e_1\}$ base de N. A partir do Lema 3.2.1, e tras unha serie de cálculos directos, obtense que as compoñentes non nulas do tensor de Weyl veñen dadas por:

$$\begin{aligned}
W_{1212} &= R_{1212} - \tfrac{Sc}{6} - \tfrac{1}{2}\left(Ric_{11}+Ric_{22}\right)\\
W_{1313} &= R_{1313} + \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{11}-Ric_{33}\right)\\
W_{1414} &= R_{1414} + \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{11}-Ric_{44}\right)\\
W_{2323} &= R_{2323} + \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{22}-Ric_{33}\right)\\
W_{2424} &= R_{2424} + \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{22}-Ric_{44}\right)\\
W_{3434} &= R_{3434} - \tfrac{Sc}{6} + \tfrac{1}{2}\left(Ric_{33}+Ric_{44}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{1213} &= R_{1213} - \tfrac{1}{2}Ric_{23}\\
W_{1214} &= R_{1214} - \tfrac{1}{2}Ric_{24}\\
W_{1314} &= R_{1314} - \tfrac{1}{2}Ric_{34}\\
W_{2324} &= R_{2324} - \tfrac{1}{2}Ric_{34}\\
W_{2334} &= R_{2334} - \tfrac{1}{2}Ric_{24}\\
W_{2434} &= R_{2434} + \tfrac{1}{2}Ric_{23}
\end{aligned}$$

Comparando as respectivas compoñentes autoduais e anti-autoduais, e comprobando nos cálculos precedentes que algunhas compoñentes do tensor de Weyl son nulas , obtemos:

$$\begin{aligned}
W^+_{11} &= \tfrac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434} + 2W_{1234}) = \tfrac{1}{2}(W_{1212} + W_{3434}) = W^-_{11}\\
W^+_{22} &= \tfrac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424} + 2W_{1324}) = \tfrac{1}{2}(W_{1313} + W_{2424}) = W^-_{22}\\
W^+_{33} &= \tfrac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323} - 2W_{1423}) = \tfrac{1}{2}(W_{1414} + W_{2323}) = W^-_{33}\\
W^+_{12} &= \tfrac{1}{2}(W_{1213} + W_{1224} + W_{3413} + W_{3424}) = \tfrac{1}{2}(W_{1213} + W_{3424}) = W^-_{12}\\
W^+_{13} &= \tfrac{1}{2}(W_{1214} - W_{1223} + W_{3414} - W_{3423}) = \tfrac{1}{2}(W_{1214} - W_{3423}) = W^-_{13}\\
W^+_{23} &= \tfrac{1}{2}(W_{1314} - W_{1323} + W_{2414} - W_{2423}) = \tfrac{1}{2}(W_{1314} - W_{2423}) = W^-_{23}
\end{aligned}$$

Así, chegamos a

$$W_+ = \begin{pmatrix} W^+_{11} & W^+_{12} & W^+_{13}\\ -W^+_{12} & -W^+_{22} & -W^+_{23}\\ -W^+_{13} & -W^+_{23} & -W^+_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^-_{11} & W^-_{12} & W^-_{13}\\ -W^-_{12} & -W^-_{22} & -W^-_{23}\\ -W^-_{13} & -W^-_{23} & -W^-_{33} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

Temos, deste xeito, que en calquera dos tres casos anteriores, a variedade é autodual se e só se é anti-autodual, como se segue das expresións (3.13), (3.14), (3.15). □

Capítulo 4

Variedades con tensor curvatura definido por un módulo de Clifford

Para motivar este capítulo e, en conxunto, todo este traballo, debemos referirnos obrigatoriamente ó *problema de Osserman*, o cal xorde coa conxetura que Robert Osserman fixo en [23], segundo a cal toda variedade riemanniana globalmente Osserman é homoxénea-dous-puntos. As tarefas encamiñadas a resolver a conxetura acarrearon unha profunda análise do operador de Jacobi e da condición de Osserman, non só en xeometría riemanniana, senón, en xeral, para métricas indefinidas: o noso ámbito de estudio. En 1993, P.Gilkey, A.Swann e L.Vanhecke [15] propoñen como método de achegamento un estudio en dúas etapas a raíz dun teorema análogo ó Teorema 1.3.6 únicamente con estructuras complexas. Estes dous pasos serían: en primeiro lugar amosar que a condición de ser Osserman puntual implica a existencia da estructura de módulo de Clifford, caso onde se coñecen os autovalores e autoespacios do operador de Jacobi, e , en segundo lugar, comprobar qué tensores de curvatura alxébricos deste tipo son de feito tensores de curvatura de variedades riemannianas. Nesta línea de actuación, Y. Nikolayevsky [20] proba os dous teoremas seguintes:

Teorema 4.0.3 [20, Teorema 1] *Sexa R un tensor curvatura alxébrico Osserman e λ un autovalor simple do operador de Jacobi. Entón existe un operador $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ortogonal antisimétrico tal que $R_X JX = \lambda ||X||^2 JX$ para todo $X \in \mathbb{R}^n$.*

Teorema 4.0.4 [20, Teorema 2] *Unha variedade riemanniana M con estructura real de módulo de Clifford(ν) é homoxénea-dous-puntos, salvo nos casos*

i) $n = 2$;

ii) $n = 4$;

iii) $n = 8$, $3 \leq \nu \leq 7$;

iv) $n = 16$, $\nu = 8$.

A proba do Teorema 4.0.4 baséase en demostrar que unha tal variedade é localmente simétrica, para, unha vez feito, aplicar o

Lema 4.0.5 [15, Lema 2.3] *Se unha variedade riemanniana M é puntualmente Osserman e localmente simétrica, entón M é localmente isométrica a un espacio homoxéneo-dous-puntos.*

Este modo de actuación non permite resolver a conxetura de Osserman no caso semi-riemanniano, pois, xa de comezo, non temos un lema análogo ó Lema 4.0.5. Sen embargo, si podemos xeneralizar para métricas indefinidas o resultado correspondente ó Teorema 4.0.4, incluso cunha estructura máis flexible, a de módulo de Clifford xeneralizada, onde temos tanto estructuras case-complexas como case-paracomplexas. Comprobar esta afirmación é o cometido deste capítulo. Comezaremos por uns lemas na Sección 4.1 que nos abrirán as portas para demostrar o teorema principal na Sección 4.2.

4.1 Consideracións xerais sobre os módulos de Clifford

Nesta sección daremos algunhas propiedades básicas sobre os espacios que soportan unha estructura de módulo de Clifford. Para iso presentamos dous apartados: o primeiro deles está adicado a unha serie de lemas de carácter alxébrico que posúen unha destacada importancia no desenvolvemento da proba do principal resultado deste capítulo, o Teorema 3.3.1 que veremos na seguinte sección. O segundo dos apartados que comentabamos é tamén un resultado previo ó Teorema 3.3.1, que describe o comportamento da métrica e a conexión fronte a unha estructura complexa ou paracomplexa.

4.1.1 Propiedades alxébricas dos módulos de Clifford

Trataremos, como vimos de mencionar, de ver algunhas propiedades puramente alxébricas dos espacios dotados de estructura de módulo de Clifford.

Dado que estamos interesados no estudio de propiedades, en principio, nun espacio vectorial, suporemos, por comodidade, que este espacio vectorial é $\mathbb{R}^n$, sen quedar comprometida a xeneralidade dos resultados por mor desta elección, xa que as propiedades que empregaremos serán, unicamente, aquelas propias dun espacio vectorial. Estes resultados que damos a continuación, baséanse na existencia de direccións ortogonais a outras fixadas previamente, é por iso que temos certas restriccións na dimensión do espacio; así, suporemos $n \geq 3\nu$, o cal, polo Teorema 1.3.1 supón eliminar $n = 2, 4, 8(3 \leq \nu \leq 7), 16(6 \leq \nu \leq 8)$ entre os casos onde poidamos definir estructuras de módulo de Clifford.

Por brevidade, establecemos a notación $JX = \langle\{J_1X, \ldots, J_\nu X\}\rangle$, que empregaremos ata o remate do capítulo.

Lema 4.1.1 *Sexa $S = \{(X,Y) : X, Y \neq 0, X \perp JY\}$. Entón existe $S' \subset S$, $S' \neq \emptyset$, aberto e verificando $(X,Y) \in S' \Rightarrow JX \bigcap JY = 0$.*

Demostración.
Sexa $R = \{(X,Y) : JX \bigcap JY = \emptyset\}$. R é aberto en $\mathbb{R}^{2n}$. Tomamos $(E_1, \ldots, E_n)$ unha base arbitraria de $\mathbb{R}^n$. Definimos:

$$G_\sigma(X,Y) = det\Big(JX\Big|JY\Big|E_{\sigma(2\nu+1)}\Big|\ldots\Big|E_{\sigma(n)}\Big), \quad \sigma \in S(n).$$

Entón

$$R = \bigcup_{\sigma \in S(n)} G_\sigma^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \tag{4.1}$$

e R é aberto. Existen $X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n$ cumplindo $X_0 \perp JY_0$ e $JX_0 \bigcap JY_0 = \emptyset$. Fixamos $Y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. O conxunto dos $X \in \mathbb{R}^n$ tales que $(X, Y_0) \notin R$ é o conxunto seguinte (usamos que $J_i^2 = \pm Id, \forall i = 1, \ldots, \nu$)

$$\begin{aligned} J^2Y_0 &= \{(\alpha_1 J_1 + \ldots + \alpha_\nu J_\nu)(\beta_1 J_1 + \ldots + \beta_\nu J_\nu) Y_0; \\ &\qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \beta_1, \ldots, \beta_\nu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha_1 J_1 + \ldots + \alpha_\nu J_\nu)(\beta_1 J_1 + \ldots + \beta_\nu J_\nu) Y_0; \\ &\qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \beta_1, \ldots, \beta_\nu \in \mathbb{R}, \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_\nu^2 = 1\big\} \end{aligned}$$

Da expresión anterir deducimos que $dim J^2 Y_0 = 2\nu - 1$. Por outro lado, dado que $n \geq 3\nu$, temos que $dim\,(JY_0)^\perp = n - \nu \geq 2\nu$. Polo tanto, existe $X_0 \in (JY_0)^\perp \setminus J^2Y_0$, e con esta elección temos que $JX_0 \bigcap JY_0 = 0$ e $X_0 \perp JY_0$. Definimos $S' := R \bigcap S$ e temos probado que $S' \neq \emptyset$ e S' aberto en S. □

Os lemas seguintes supoñen un pequeno estudio sobre ortogonalidade, baseado en propiedades que presenta un espacio vectorial onde temos definidas unha serie de estructuras, complexas ou para-complexas, que anticommutan. Esta será unha ferramenta fundamental, facéndoa extensiva ó fibrado tanxente dunha variedade, á hora de estudiar estructuras de módulo de Clifford(xeneralizada) definida sobre variedades. A importancia destes lemas radica en que xustifican a densidade de certos conxuntos que cumpren os requisitos de ortogonalidade apropiados, e así, bastará con probar os nosos cometidos para estes conxuntos, e, por densidade, será certo para todo o espacio.

Lema 4.1.2 *O conxunto*

$$\hat{S} = \big\{U : \exists X, Y \perp U, JU \ \ tal\ que\ \ X \perp Y, JY, \quad \langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2 \neq 0\big\}$$

é denso en $\mathbb{R}^n$.

Demostración.
Nas nosas hipóteses $n \geq 2\nu + 3$.

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \big\{U : \exists X, Y \perp U, JU \ | \ X \perp Y, JY; \langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2 \neq 0\big\} \\ &= \{U : \exists X, Y \perp U, JU \ | \ X \perp Y, JY, \|X\|\|Y\| \neq 0\} \end{aligned}$$

Veremos que $\{U : \|U\| \neq 0\} \subset \hat{S}$. Sexa $U \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|U\| \neq 0$. Entón $\langle U \rangle$ e $\langle U \rangle^\perp$ son non dexenerados, ó igual que $\langle \{U, JU\} \rangle$ e $\langle \{U, JU\} \rangle^\perp$. Polo tanto, podemos escoller $X, Y \in \langle \{U, JU\} \rangle^\perp$ con $||X|| \neq 0, ||Y|| \neq 0$ tal que $X \perp Y, JY$, xa que $dim\langle \{U, JU, X, JX\} \rangle \leq 2\nu + 2$. Dado que $\{U : \|U\| \neq 0\}$ é denso en $\mathbb{R}^n$, $\hat{S}$ é denso en $\mathbb{R}^n$. □

Lema 4.1.3 *Para* $1 \leq k \leq \nu$,$\{U : \exists Y, \|Y\| \neq 0, U \perp JY, J\left(J_k Y\right)\}$ *é denso en* $\mathbb{R}^n$.

Demostración.
Veremos que $\{U : \|U\| \neq 0\} \subset \{U : \exists Y, \|Y\| \neq 0, U \perp JY, J\left(J_k Y\right)\}$, coma fixemos no lema anterior. Sexa $U \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|U\| \neq 0$, o subespacio $\langle \{JU, J(J_k U)\} \rangle^\perp$ é non dexenerado.

Agora, como $dim\langle \{JU, J(J_k U)\} \rangle^\perp \geq n - 2\nu$, pero nas nosas hipóteses $n > 2\nu$, logo para todo U en $\mathbb{R}^n$ tal que $\|U\| \neq 0$, existe Y ,$\|Y\| \neq 0$, tal que $U \perp JY, J(J_k Y)$. □

Lema 4.1.4 *O conxunto* $\{U : \exists Y, \|Y\| \neq 0 \mid U \perp JY, J(J_k Y), J(J_s Y)\}$, *con* $1 \leq k \neq s \leq \nu$ *fixados, é denso en* $\mathbb{R}^n$.

Demostración.
De forma análoga a como fixemos nos dous lemas precedentes vemos que $\{U : \|U\| \neq 0\} \subset \{U : \exists Y, \|Y\| \neq 0 \mid U \perp JY, J(J_k Y), J(J_s Y)\}$. Sexa $U \in \mathbb{R}^n$, $\|U\| \neq 0$, temos $n \geq 3\nu - 1$, $dim\langle \{JU, J(J_k U), J(J_s U)\} \rangle < 3\nu - 1$ e $\langle \{JU, J(J_k U), J(J_s U)\} \rangle^\perp$ é non dexenerado, así que podemos escoller Y verificando $\|Y\| \neq 0$ e $U \perp JY, J(J_k Y), J(J_s Y)$. □

4.1.2 Propiedades diferenciais dos módulos de Clifford

Para traballar con estructuras de módulo de Clifford, convén saber cómo se comportan a métrica e a conexión da variedade con respecto a unha estructura complexa ou para-complexa. Con este fin dámos o seguinte resultado, que permitirá facer cálculos en sucesivas probas, simplificándoos de xeito considerable:

Lema 4.1.5 *Sexa* $(M, \langle , \rangle, J)$ *unha variedade semi-riemanniana e* J *unha estructura case-complexa ou case-paracomplexa. Para calesquera X,Y,Z campos de vectores verifícase:*

i) $\left(\nabla_X J\right) JY = -J\left(\nabla_X J\right) Y$

ii) $\langle \left(\nabla_X J\right) Y, Z \rangle = -\langle Y, \left(\nabla_X J\right) Z \rangle$

iii) $\langle \left(\nabla_X J\right) Y, Y \rangle = \langle \left(\nabla_X J\right) Y, JY \rangle = 0$

Demostración.
i)

$$\begin{aligned}(\nabla_X J)\, JY &= \nabla_X JJY - J\nabla_X JY = -J\nabla_X JY + JJ\nabla_X Y \\ &= -J\,(\nabla_X J)\, Y\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}&\langle(\nabla_X J)\, Y, Z\rangle + \langle Y, (\nabla_X J)\, Z\rangle \\ &\qquad = \langle \nabla_X JY, Z\rangle - \langle J\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X JZ\rangle - \langle Y, J\nabla_X Z\rangle \\ &\qquad = \langle \nabla_X JY, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X JZ\rangle + \langle \nabla_X Y, JZ\rangle + \langle JY, \nabla_X Z\rangle \\ &\qquad = \nabla_X\langle JY, Z\rangle + \nabla_X\langle Y, JZ\rangle = \nabla_X\left(\langle JY, Z\rangle + \langle Y, JZ\rangle\right) = 0\end{aligned}$$

iii) Tendo en conta que $\langle(\nabla_X J)\, Y, Y\rangle = -\langle(\nabla_X J)\, Y, Y\rangle$, séguese que $0 = \langle(\nabla_X J)\, Y, Y\rangle$. Por outro lado, como

$$\langle(\nabla_X J)\, Y, JY\rangle = -\langle J\,(\nabla_X J)\, Y, Y\rangle = \langle(\nabla_X J)\, JY, Y\rangle = -\langle JY, (\nabla_X J)\, Y\rangle,$$

temos finalmente que $\langle(\nabla_X J)Y, JY\rangle = 0$. □

4.2 Variedades con estructura de módulo de Clifford xeneralizada

Sexa (M,g) unha variedade semi-riemanniana de dimensión n e signatura (p,q), $p,q \geq 0$, con tensor de curvatura dado pola expresión:

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= \lambda_0\Big(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\Big) \\ &\quad + \tfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\Big(\langle J_iX,Z\rangle J_iY - \langle J_iY,Z\rangle J_iX + 2\langle J_iX,Y\rangle J_iZ\Big)\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $\lambda_0, \ldots, \lambda_\nu$ son funcións reais que non se anulan e $J_1, \ldots, J_\nu$ son operadores verificando:

$$\begin{aligned}J_iJ_j + J_jJ_i &= 0, \qquad i \neq j \\ < J_iX, Y > + < X, J_iY > &= 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots \nu\} \\ J_i^2 &= \epsilon_i id, \quad \forall i \in \{1, \ldots, \nu\}, \epsilon_i = \pm 1\end{aligned}$$

Unha variedade nestas condicións dise que ten estructura de *módulo de Clifford xeneralizada.*

Seguindo a línea de estudio que vimos de comentar, o seguinte teorema supón unha xeneralización dos resultados de [15] referentes a módulos de Clifford.

Teorema 4.2.1 *Nas condicións precedentes, exceptuando os casos* $n = 2$, 4, 8 $(3 \leq \nu \leq 7)$, 16 $(6 \leq \nu \leq 8)$, *tense* $\nabla R = 0$.

Demostración.
Comezamos a demostración facendo un primeiro cálculo que facilitará algunhas contas posteriores. Achamos a derivada covariante dun tensor da forma $T^J(X,Y,Z) = \langle JX, Y\rangle JZ$ con $J : TM \longrightarrow TM$ estructura case-complexa ou case-paracomplexa adaptada á métrica:

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_V T^J\right)(X,Y,Z) &= \nabla_V\left(\langle JX,Y\rangle JZ\right) - \langle J\nabla_V X, Y\rangle JZ \\
&- \langle JX, \nabla_V Y\rangle JZ - \langle JX,Y\rangle J\left(\nabla_V Z\right) \\
&= \left(\nabla_V\langle JX,Y\rangle\right) JZ + \langle JX,Y\rangle\left(\nabla_V JZ\right) \\
&- \langle J\nabla_V X,Y\rangle JZ - \langle JX,\nabla_V Y\rangle JZ - \langle JX,Y\rangle J\left(\nabla_V Z\right) \\
&= \left(\nabla_V\langle JX,Y\rangle - \langle JX,\nabla_V Y\rangle\right) JZ \\
&+ \langle JX,Y\rangle\left(\nabla_V JZ - J\left(\nabla_V Z\right)\right) - \langle J\nabla_V X,Y\rangle JZ \\
&= \langle\nabla_V JX,Y\rangle JZ + \langle JX,Y\rangle\left(\nabla_V J\right)Z - \langle J\nabla_V X,Y\rangle JZ \\
&= \langle\left(\nabla_V J\right)X,Y\rangle JZ + \langle JX,Y\rangle\left(\nabla_V J\right)Z
\end{aligned}
$$

Así, temos: $\left(\nabla_V T^J\right)(X,Y,Z) = \langle\left(\nabla_V J\right)X,Y\rangle JZ + \langle JX,Y\rangle\left(\nabla_V J\right)Z$ que empregaremos nos cálculos que seguen.

Agora podemos atopar sen dificultades a expresión da derivada covariante da curvatura:

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_U R\right)(X,Y)Z &= U(\lambda_0)\Big(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\Big) \\
&+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i U(\lambda_i)\Big(\langle J_iX,Z\rangle J_iY - \langle J_iY,Z\rangle J_iX + 2\langle J_iX,Y\rangle J_iZ\Big) \\
&+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\Big(\langle\left(\nabla_U J_i\right)X,Z\rangle J_iY + \langle J_iX,Z\rangle\left(\nabla_U J_i\right)Y \\
&\qquad -\langle\left(\nabla_U J_i\right)Y,Z\rangle J_iX - \langle J_iY,Z\rangle\left(\nabla_U J_i\right)X \\
&\qquad +2\langle\left(\nabla_U J_i\right)X,Y\rangle J_iZ + 2\langle J_iX,Y\rangle\left(\nabla_U J_i\right)Z\Big)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

onde empregamos que R^0 é paralelo.

Unha vez temos calculada a expresión da derivada covariante da curvatura, empregamos a *Segunda Identidade de Bianchi*, é dicir, sumamos cíclicamente en X, Y, U e igualamos a cero. Acto seguido facemos $Z = Y$ para obter:

$$
\begin{aligned}
0 &= U(\lambda_0)\Big(\langle Y,Y\rangle X - \langle X,Y\rangle Y\Big)\\
&+ \tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i U(\lambda_i)\Big(\langle J_iX,Y\rangle J_iY - \langle J_iY,X\rangle J_iX + 2\langle J_iX,Y\rangle J_iY\Big)\\
&+ \tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\Big(\langle(\nabla_U J_i)\,X,Y\rangle J_iY + gJ_iXY\,(\nabla_U J_i)\,Y - \langle(\nabla_U J_i)\,Y,Y\rangle J_iX\\
&- \langle J_iY,Y\rangle\,(\nabla_U J_i)\,X + 2\langle(\nabla_U J_i)\,X,Y\rangle J_iY + 2\langle J_iX,Y\rangle\,(\nabla_U J_i)\,Y\Big)\\
&+ X(\lambda_0)\Big(\langle U,Y\rangle Y - \langle Y,Y\rangle U\Big)\\
&+ \tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i X(\lambda_i)\Big(\langle J_iY,Y\rangle J_iU - \langle J_iU,Y\rangle J_iY + 2\langle J_iY,U\rangle J_iY\Big)\\
&+ \tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\Big(\langle(\nabla_X J_i)\,Y,Y\rangle J_iU + \langle J_iY,Y\rangle\,(\nabla_X J_i)\,U - \langle(\nabla_X J_i)\,U,Y\rangle J_iY\\
&- \langle J_iU,Y\rangle\,(\nabla_X J_i)\,Y + 2\langle(\nabla_X J_i)\,Y,U\rangle J_iY + 2\langle J_iY,U\rangle\,(\nabla_X J_i)\,Y\Big)\\
&+ Y(\lambda_0)\Big(\langle X,Y\rangle U - \langle U,Y\rangle X\Big)\\
&+ \tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i Y(\lambda_i)\Big(\langle J_iU,Y\rangle J_iX - \langle J_iX,Y\rangle J_iU + 2\langle J_iU,X\rangle J_iY\Big)\\
&+ \tfrac{1}{3}\textstyle\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\Big(\langle(\nabla_Y J_i)\,U,Y\rangle J_iX + \langle J_iU,Y\rangle\,(\nabla_Y J_i)\,X - \langle(\nabla_Y J_i)\,X,Y\rangle J_iU\\
&- \langle J_iX,Y\rangle\,(\nabla_Y J_i)\,U + 2\langle(\nabla_Y J_i)\,U,X\rangle J_iY + 2\langle J_iU,X\rangle\,(\nabla_Y J_i)\,Y\Big)
\end{aligned}
$$

Simplificamos esta expresión tendo en conta os resultados do Lema 4.1.5:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & U(\lambda_0)\Big(\langle Y,Y\rangle X - \langle X,Y\rangle Y\Big) + X(\lambda_0)\Big(\langle U,Y\rangle Y - \langle Y,Y\rangle U\Big)\\
&+Y(\lambda_0)\Big(\langle X,Y\rangle U - \langle U,Y\rangle X\Big)\\
&+\sum_{i=1}^{\nu}\Big[\epsilon_i U(\lambda_i)\langle J_iX,Y\rangle J_iY + \epsilon_i X(\lambda_i)\langle J_iY,U\rangle J_iY\\
&+\frac{\epsilon_i Y(\lambda_i)}{3}\left(\langle J_iU,Y\rangle J_iX - \langle J_iX,Y\rangle J_iU + 2\langle J_iU,X\rangle J_iY\right)\Big]\\
&+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\Big[\big(3\langle(\nabla_U J_i)\,X,Y\rangle + 3\langle(\nabla_X J_i)\,Y,U\rangle\\
&+2\langle(\nabla_Y J_i)\,U,X\rangle\big)\,J_iY + 3\langle J_iX,Y\rangle\,(\nabla_U J_i)\,Y\\
&-\langle(\nabla_Y J_i)\,Y,U\rangle J_iX + \langle(\nabla_Y J_i)\,Y,X\rangle J_iU + \langle J_iY,X\rangle\,(\nabla_Y J_i)\,U\\
&-\langle J_iY,U\rangle\,(\nabla_Y J_i)\,X + 2\langle J_iU,X\rangle\,(\nabla_Y J_i)\,Y\\
&+3\langle J_iY,U\rangle\,(\nabla_X J_i)\,Y\Big]
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Se facemos o producto interior da expresión anterior por X, obtemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= U(\lambda_0)\Big(\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2\Big) + X(\lambda_0)\Big(\langle X,Y\rangle\langle Y,U\rangle - \langle Y,Y\rangle\langle U,X\rangle\Big)\\
&\quad +Y(\lambda_0)\Big(\langle X,Y\rangle\langle X,U\rangle - \langle X,X\rangle\langle Y,U\rangle\Big) + \sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\Big[U(\lambda_i)\langle J_iX,Y\rangle\langle J_iY,X\rangle\\
&\quad +X(\lambda_i)\langle J_iY,U\rangle\langle J_iY,X\rangle + Y(\lambda_i)\langle J_iU,X\rangle\langle J_iY,X\rangle\Big]\\
&\quad +\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\Big[(3\langle(\nabla_U J_i)\,X,Y\rangle + 3\langle(\nabla_X J_i)\,Y,U\rangle\\
&\qquad\qquad +2\langle(\nabla_Y J_i)\,U,X\rangle)\,\langle J_iY,X\rangle + 3\langle J_iX,Y\rangle\langle(\nabla_U J_i)\,Y,X\rangle\\
&\qquad\qquad +3\langle J_iY,U\rangle\langle(\nabla_X J_i)\,Y,X\rangle + 2\langle J_iU,X\rangle\langle(\nabla_Y J_i)\,Y,X\rangle\\
&\qquad\qquad +\langle(\nabla_Y J_i)\,Y,X\rangle\langle J_iU,X\rangle + \langle(\nabla_Y J_i)\,U,X\rangle\langle J_iY,X\rangle\\
&\qquad\qquad -\langle J_iY,U\rangle\langle(\nabla_Y J_i)\,X,X\rangle\Big]
\end{aligned}
$$

Simplificando esta expresión, de novo cos resultados do Lema (4.1.5), e reordeando:

$$
\begin{aligned}
0 &= U(\lambda_0)\Big(\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2\Big)\\
&\quad +X(\lambda_0)\Big(\langle X,Y\rangle\langle Y,U\rangle - \langle Y,Y\rangle\langle U,X\rangle\Big)\\
&\quad +Y(\lambda_0)\Big(\langle X,Y\rangle\langle X,U\rangle - \langle X,X\rangle\langle Y,U\rangle\Big)\\
&\quad +\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\Big[-U(\lambda_i)\langle J_iY,X\rangle^2 + X(\lambda_i)\langle J_iY,U\rangle\langle J_iY,X\rangle\\
&\qquad +Y(\lambda_i)\langle J_iU,X\rangle\langle J_iY,X\rangle\Big] + \sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\Big[(2\langle(\nabla_U J_i)\,X,Y\rangle\\
&\qquad +\langle(\nabla_X J_i)\,Y,U\rangle + 2\langle(\nabla_Y J_i)\,U,X\rangle)\,\langle J_iY,X\rangle\\
&\qquad -\langle J_iY,U\rangle\langle(\nabla_X J_i)\,X,Y\rangle - \langle J_iX,U\rangle\langle(\nabla_Y J_i)\,Y,X\rangle\Big]
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Se nesta expresión tomamos $X \perp JY$ chegamos a:

$$
\begin{aligned}
0 &= U(\lambda_0)\Big(\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2\Big)\\
&\quad +X(\lambda_0)\Big(\langle X,Y\rangle\langle Y,U\rangle - \langle Y,Y\rangle\langle U,X\rangle\Big)\\
&\quad +Y(\lambda_0)\Big(\langle X,Y\rangle\langle X,U\rangle - \langle X,X\rangle\langle Y,U\rangle\Big)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\left(\langle(\nabla_X J_i)\,X,Y\rangle\langle J_iY,U\rangle + \langle(\nabla_Y J_i)\,Y,X\rangle\langle J_iX,U\rangle\right)
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Dado que a métrica é non dexenerada, podemos sacar U factor común para obter:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2\right)\nabla\lambda_0 + \left(Y(\lambda_0)\langle X,Y\rangle - X(\lambda_0)\langle Y,Y\rangle\right)X \\
&\quad + \left(X(\lambda_0)\langle X,Y\rangle - Y(\lambda_0)\langle X,X\rangle\right)Y \\
&\quad - \sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\left(\langle(\nabla_X J_i)X,Y\rangle J_iY + \langle(\nabla_Y J_i)Y,X\rangle J_iX\right)
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Afrontamos agora 7 etapas consecutivas que nos levarán ó resultado pretendido:

ETAPA 1: λ_0 é constante

Da última das expresións dedúcese que para $X\perp JY$ e $\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle-\langle X,Y\rangle^2\neq 0$ (esta condición equivale a que X e Y están nun plano non dexenerado), o vector $\nabla\lambda_0$ pertence ó subespacio $\langle\{X,Y,JX,JY\}\rangle$.

Tomando $Z\in\hat{S}=\{U:\exists X,Y\perp U, JU/X\perp JY,\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle\neq 0\}$ coma no Lema 4.1.2, necesariamente $Z(\lambda_0)=0$. Dado que $\hat{S}$ é denso en $\mathbb{R}^n$(polo Lema 4.1.2), deducimos que λ_0 é constante.

ETAPA 2: Para calquera X e $i\in\{1,\ldots,\nu\}$ tense: $(\nabla_X J_i)\,X\in JX$.

Fixamos $X_0\in\mathbb{R}^n$ e $k\in\{1,\ldots,\nu\}$. Tendo en conta a ETAPA 1, a expresión (4.7) queda:

$$\sum_{i=1}^{\nu}\epsilon_i\lambda_i\left(\langle(\nabla_X J_i)X,Y\rangle J_iY + \langle(\nabla_Y J_i)Y,X\rangle J_iX\right)=0$$

Como vimos na demostración do Lema 4.1.1, podemos escoller Y_0 de forma que $X_0\perp JY_0$ e $JX_0\bigcap JY_0=0$, é dicir, de forma que, para cada punto, os campos de vectores J_1X_0, …, $J_\nu X_0$, J_1Y_0, …, $J_\nu Y_0$ sexan linearmente independentes. Con esta escolla particular, da igualdade anterior obtemos directamente $\langle(\nabla_{X_0}J_k)\,X_0,Y_0\rangle=0$.

Queremos ver que $(\nabla_{X_0}J_k)\,X_0\perp Y$ para todo $Y\in\langle JX\rangle^\perp$, e así, teremos $(\nabla_{X_0}J_k)\,X_0\in\left((JX_0)^\perp\right)^\perp=JX_0$, que é o que pretendemos probar.

Notaremos por S_{X_0} o seguinte subespacio vectorial

$$S_{X_0}=\{Y:X_0\perp JY\}$$

Sexan $V,W\subset\mathbb{R}^n$ abertos, de forma que se cumple $V\times W\subset R=\{(X,Y):JX\bigcap JY=0\}$, sabemos que V e W existen porque na demostración do Lema 4.1.1 vimos que R é aberto, e ademais podemos facelo de forma que $(X_0,Y_0)\in V\times W$.

Para todo $Y\in S_{X_0}\bigcap W$ temos que $(X_0,Y)\in R\bigcap S$. Pero S_{X_0} é subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, e W é aberto en $\mathbb{R}^n$, así que $(X_0,Y)\in R\bigcap S$ para todo $Y\in S_{X_0}$. Dado que $S_{X_0}=(JX_0)^\perp$, e a elección de X_0 foi arbitraria, temos probado o resultado:$(\nabla_X J_i)\,X\in JX$.

ETAPA 3: λ_i é constante para todo $i\in\{1,\ldots,\nu\}$.

Fixamos $k \in \{1, \ldots, \nu\}$. Na expresión 4.5 tomamos $X = J_kY, U \perp JX, JY$ e obtemos:

$$\begin{gathered}\epsilon_k U(\lambda_k)\langle J_kY, J_kY\rangle^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \epsilon_i\lambda_i \left(2\langle (\nabla_U J_i)\, J_kY, Y\rangle\right. \\ \left. +\langle (\nabla_{J_kY} J_i)\, Y, U\rangle + \langle (\nabla_Y J_i)\, U, J_kY\rangle\langle J_iY, J_kY\rangle\right)\end{gathered}$$

Simplificando:

$$\begin{gathered}\epsilon_k U(\lambda_k)\langle Y, Y\rangle^2 = \epsilon_k\lambda_k\langle Y, Y\rangle \left(2\langle (\nabla_U J_k)\, J_kY, Y\rangle\right. \\ \left. +\langle (\nabla_{J_kY} J_k)\, Y, U\rangle + \langle (\nabla_Y J_k)\, U, J_kY\rangle\langle J_kY, J_kY\rangle\right)\end{gathered}$$

Para U con norma distinta de cero é posible escoller X, Y verificando: $X = J_kY$, $U \perp JX, JY$ e $\|Y\| \neq 0$. Neste caso temos:

$$-\frac{U(\lambda_k)\langle Y, Y\rangle}{\lambda_k} = 2\langle (\nabla_U J_k)\, J_kY, Y\rangle + \langle (\nabla_{J_kY} J_k)\, Y, U\rangle + \langle (\nabla_Y J_k)\, U, J_kY\rangle$$

Vexamos agora que os tres sumandos da dereita da igualdade son nulos:

i) $\langle (\nabla_U J_k)\, J_kY, Y\rangle = 0$ por Lema 4.1.5

ii) $\langle (\nabla_Y J_k)\, U, J_kY\rangle = -\langle U, (\nabla_Y J_k)\, J_kY\rangle = \langle U, J_k\, (\nabla_Y J_k)\, Y\rangle$ Pero pola ETAPA 2: $(\nabla_Y J_k)\, Y \in JY$, por outro lado $U \perp J(J_kY)$, pois $X = J_kY$ e $U \perp JX$, así que $U \perp J_k\, (\nabla_Y J_k)\, Y$.

iii) Analizamos agora o termo $\langle (\nabla_{J_kY} J_k)\, Y, U\rangle$. Polarizando obtemos:

$$\begin{aligned}(\nabla_{Y+J_kY} J_k)\,(Y + J_kY) &= (\nabla_Y J_k)\, Y + (\nabla_{J_kY} J_k)\,(J_kY) \\ &\quad + (\nabla_Y J_k)\,(J_kY) + (\nabla_{J_kY} J_k)\, Y\end{aligned}$$

Pero:

$$(\nabla_{Y+J_kY} J_k)\,(Y + J_kY) \in J(Y + J_kY) \subset JY + J(J_kY)$$

$$(\nabla_Y J_k)\, Y \in JY$$

$$(\nabla_{J_kY} J_k)\,(J_kY) \in J(J_kY)$$

e de aquí deducimos que $(\nabla_Y J_k)\,(J_kY) + (\nabla_{J_kY} J_k)\, Y \in JY + J(J_kY)$.

Temos que $U \perp JY, J(J_kY)$, e $U \perp (\nabla_Y J_k)\,(J_kY)$ polo visto en ii). De esto e a conclusión precedente obtemos que $U \perp (\nabla_{J_kY} J_k)\, Y$, que era o que buscabamos.

Polo tanto, $U(\lambda_k) = 0$ para U tal que $\|U\| \neq 0$, pero como $\{U : \|U\| \neq 0\}$ é denso en $\mathbb{R}^n$, concluimos que λ_k é constante, e o resultado é certo para todo $k \in \{1, \ldots, \nu\}$, xa que foi escollido arbitrariamente.

Proposición 4.2.2 *Toda variedade semi-riemanniana conexa, na que o tensor curvatura vén dado pola expresión 4.2 é globalmente Osserman.*

Demostración.
Séguese das etapas 1 e 3 anteriores. □

ETAPA 4: Para calquera X e $i \in \{1, \dots, \nu\}$, $(\nabla_X J_i)\, X$ descomponse como combinación linear de $J_1X, \dots, J_\nu X$ con coeficientes lineares.

Tendo en conta as etapas 1 e 3, e tomando vectores $X, U \perp JY$, a expresión (4.4) queda reducida a:

$$\sum_{i=1}^{\nu} \epsilon_i \lambda_i \Big[(3\langle (\nabla_U J_i)\, X, Y\rangle + 3\langle (\nabla_X J_i)\, Y, U\rangle + 2\langle (\nabla_Y J_i)\, U, X\rangle)\, J_i Y + 2\langle J_i U, X\rangle\, (\nabla_Y J_i)\, Y \Big] = 0.$$

Fixamos $k \in \{1, \dots, \nu\}$, escollemos $U = J_k X$, con $\|X\| \neq 0$, entre os $X, U \perp JY$, o cal é posible sempre que $\|Y\| \neq 0$. Con vectores nestas condicións temos (empregando notación de Einstein):

$$(\nabla_Y J_k)\, Y = \alpha_k^i(Y) J_i Y \tag{4.8}$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_k^i(Y) \; &= \; \frac{1}{2\langle J_k X, J_k X\rangle} \sum_{i=1}^{\nu} \epsilon_i \lambda_i\, (3\langle (\nabla_{J_k X} J_i)\, X, Y\rangle \\ &\qquad + 3\langle (\nabla_X J_i)\, Y, J_k X\rangle + 2\langle (\nabla_Y J_i)\, J_k X, X\rangle) \end{aligned}$$

onde se observa que os α_k^i son lineares en Y.

Vexamos agora o caso en que $\|Y\| = 0$. Pola ETAPA 2 sabemos que $(\nabla_Y J_k)\, Y \in JY$, logo existen coeficientes que expresan $(\nabla_Y J_k)\, Y$ en función de $J_1 Y, \dots, J_\nu Y$ e son continuos. Por outro lado, temos que as α_k^i son continuas en $\{U : \|U\| \neq 0\}$. Definimos, para Y tal que $\|Y\| = 0$:

$$\alpha_k^i(Y) = \lim_{\substack{Z \to Y \\ \|Z\| \neq 0}} \alpha_k^i(Z)$$

Extendidas deste xeito, as α_k^i son lineares en Y.

Observación 4.2.3 As funcións α definidas na ETAPA 4 verifican para calquera $i, k \in \{1, \dots, \nu\}$: $\epsilon_i \alpha_k^i + \epsilon_k \alpha_i^k = 0$. Para ver que isto é certo, collamos Y vector unitario espacial:

$$\begin{aligned} -\epsilon_i \alpha_k^i(Y) &= \langle (\nabla_Y J_k)\, Y, J_i Y\rangle = \langle \nabla_Y J_k Y, J_i Y\rangle - \langle J_k \nabla_Y Y, J_i Y\rangle \\ -\epsilon_k \alpha_i^k(Y) &= \langle (\nabla_Y J_i)\, Y, J_k Y\rangle = \langle \nabla_Y J_i Y, J_k Y\rangle - \langle J_i \nabla_Y Y, J_k Y\rangle \\ \epsilon_i \alpha_k^i(Y) + \epsilon_k \alpha_i^k(Y) &= \langle J_k \nabla_Y Y, J_i Y\rangle + \langle J_i \nabla_Y Y, J_k Y\rangle \\ &\qquad - (\langle \nabla_Y J_k Y, J_i Y\rangle + \langle \nabla_Y J_i Y, J_k Y\rangle) \\ &= \nabla_Y \langle J_k Y, J_i Y\rangle = 0 \end{aligned}$$

De forma similar demóstrase o resultado para vectores unitarios temporais, e, por linearidade, exténdese a $\{Y : \|Y\| \neq 0\}$. Logo, por continuidade, a todo o espacio.

Observación 4.2.4 As funcións α_i^i son nulas para todo $i \in 1, \ldots, \nu$. Sexa X un vector non nulo. Entón, polo Lema 4.1.5:

$$-\epsilon_i \langle X, X \rangle \alpha_i^i(X) = \langle J_i X, J_i X \rangle \alpha_i^i(X) = \langle (\nabla_X J_i)\, X, J_i X \rangle = 0$$

De novo por continuidade extendemos o resultado a todo o espacio.

ETAPA 5: Cando $\lambda_k \neq \pm\lambda_s$, $\alpha_k^s(X) = 0$.

Polarizando na expresión (4.8):

$$(\nabla_{X+Y} J_k)\,(X+Y) = \alpha_k^i(X+Y) J_i(X+Y)$$

tense que

$$\begin{aligned}(\nabla_X J_k)\,(X) + (\nabla_Y J_k)\,(Y) + (\nabla_X J_k)\,(Y) + (\nabla_Y J_k)\,(X) \\ = \alpha_k^i(X) J_i(X) + \alpha_k^i(Y) J_i(Y) + \alpha_k^i(X) J_i(Y) + \alpha_k^i(Y) J_i(X)\end{aligned}$$

e así:

$$(\nabla_X J_k)\,(Y) + (\nabla_Y J_k)\,(X) = \alpha_k^i(X) J_i(Y) + \alpha_k^i(Y) J_i(X) \tag{4.9}$$

e isto é certo para todo $k \in \{1, \ldots, \nu\}$ e X, Y vectores de $\mathbb{R}^n$.

Fixamos $k \in \{1, \ldots, \nu\}$.

Tomando na expresión (4.4) $X \perp JY$, $U = J_k Y$, con $\|Y\| \neq 0$, a fórmula redúcese a:

$$\begin{aligned} 0 &= 3\epsilon_k \lambda_k \langle J_k Y, J_k Y \rangle\, (\nabla_X J_k)\, Y - \epsilon_k \lambda_k \langle J_k Y, J_k Y \rangle\, (\nabla_Y J_k)\, X \\ &- \textstyle\sum_{i=1}^{\nu} \epsilon_i \lambda_i \langle (\nabla_Y J_i)\, Y, J_k Y \rangle J_i X + \sum_{i=1}^{\nu} \epsilon_i \lambda_i \Big[(3 \langle (\nabla_{J_k Y} J_i)\, X, Y \rangle \\ &+ 3 \langle (\nabla_X J_i)\, Y, J_k Y \rangle + 2 \langle (\nabla_Y J_i)\, J_k Y, X \rangle)\, J_i Y + 2 \langle J_i J_k Y, X \rangle\, (\nabla_Y J_i)\, Y \Big] \end{aligned}$$

e de aquí:

$$3\,(\nabla_X J_k)\, Y - (\nabla_Y J_k)\, X = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{\epsilon_i \lambda_i}{\epsilon_k \lambda_k} \alpha_i^k(Y) J_i X + \sigma_i^k(X, Y) J_i Y \right) \tag{4.10}$$

onde as σ son funcións dadas polas expresión anterior que non empregaremos de agora en adiante.

Por continuidade, (4.10) tamén é certa para Y con $\|Y\| = 0$.

Restrinximos agora os vectores X, Y ós do conxunto S' do Lema 4.1.1, e así, de (4.9) e (4.10) obtemos

$$(\nabla_Y J_k)\, X = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{3\lambda_k + \lambda_i}{4\lambda_k} \alpha_k^i(Y) J_i X + \widetilde{\sigma}_k^i(X, Y) J_i Y \right)$$

A escolla que fixemos dos vectores X, Y permítenos intercambialos sen máis que pedir $\|X\| \neq 0$, e, de (4.9) e (4.10) intercambiando X e Y, temos:

$$(\nabla_Y J_k)\, X = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_i}{4\lambda_k} \alpha_k^i(X) J_i Y + \hat{\sigma}_i^k(X,Y) J_i X \right)$$

Nas expresións anteriores $\widetilde{\sigma}_i^k$ e $\hat{\sigma}_k^i$ son funcións continuas, determinadas polos cálculos, pero que non empregaremos e por iso non as explicito.

Como $J_1X, \ldots, J_\nu X, J_1Y, \ldots, J_\nu Y$ son linearmente independentes, obtemos:

$$(\nabla_Y J_k)\, X = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\frac{3\lambda_k + \lambda_i}{4\lambda_k} \alpha_k^i(Y) J_i X + \frac{\lambda_k - \lambda_i}{4\lambda_k} \alpha_k^i(X) J_i Y \right) \tag{4.11}$$

dado que esto é certo para $(X, Y) \in S'$, polo Lema 4.1.1 e repetindo o argumento empregado na ETAPA 2, concluimos que é certo para todo $(X, Y) \in S$.

Fixamos $1 \leq k \neq s \leq \nu$ para escollermos X, Y coma no Lema 4.1.4, é dicir, $X \perp JY, J(J_kY), J(J_sY)$, con $\|X\| \neq 0$. Multiplicamos (4.11) por J_sX e chegamos a:

$$\langle (\nabla_Y J_k)\, X, J_s X\rangle = \frac{3\lambda_k + \lambda_s}{4\lambda_k} \alpha_k^s(Y)(-\epsilon_s)\langle X, X\rangle$$

Vimos que $\langle (\nabla_Y J_k)\, X, J_s X\rangle + \langle (\nabla_Y J_s)\, X, J_k X\rangle = 0$, así que:

$$\frac{3\lambda_k + \lambda_s}{4\lambda_k} \alpha_k^s(Y)(-\epsilon_s)\langle X, X\rangle + \frac{3\lambda_s + \lambda_k}{4\lambda_s} \alpha_s^k(Y)(-\epsilon_k)\langle X, X\rangle = 0$$

dado que $\epsilon_s \alpha_k^s(Y) + \epsilon_k \alpha_s^k = 0$, reducimos a expresión anterior á seguinte:

$$-\frac{3\lambda_k + \lambda_s}{4\lambda_k} \alpha_k^s(Y)\epsilon_s + \frac{3\lambda_s + \lambda_k}{4\lambda_s} \alpha_k^s(Y)\epsilon_s = 0$$

de onde obtemos que $\alpha_k^s(Y) = 0$ ou $\lambda_k = \pm\lambda_s$.

ETAPA 6: $\alpha_k^s(X) = 0$ se $\lambda_k \neq \lambda_s$.

Sabemos pola etapa anterior que $\alpha_k^s(X) = 0$ se $\lambda_k \neq \pm\lambda_s$, co cal só resta verificar que $\alpha_k^s(X) = 0$ para $\lambda_k = -\lambda_s$. Fixamos, pois, $1 \leq k \neq s \leq \nu$ tales que $\lambda_k = -\lambda_s$(de non existir s e k nestas condicións, o enunciado satisfaise vacuamente).

Trala ETAPA 5 a expresión (4.11) queda reducida a:

$$\begin{aligned}(\nabla_Y J_k)\, X = & \sum_{i:\lambda_i=\lambda_k} \alpha_k^i(Y) J_i X + \sum_{i:\lambda_i=-\lambda_k} \frac{1}{2}\alpha_k^i(Y) J_i X \\ & + \sum_{i:\lambda_i=-\lambda_k} \frac{1}{2}\alpha_k^i(X) J_i Y\end{aligned} \tag{4.12}$$

con $X \perp JY$.

Agora tomamos na expresión (4.5) vectores U, X, Y tales que $U \perp JX, JY$, co cal queda:

$$\sum_{i=1}^{\nu} 2\epsilon_i \lambda_i \langle J_i Y, X\rangle \langle (\nabla_U J_i)\, X, Y\rangle = 0$$

e substituindo pola expresión (4.12):

$$\sum_{i=1}^{\nu} 2\epsilon_i \lambda_i \langle J_i Y, X\rangle \Big(\sum_{j:\lambda_j=\lambda_i} \alpha_i^j(U)\langle J_j X, Y\rangle + \sum_{j:\lambda_j=-\lambda_i} \frac{1}{2}\alpha_i^j(U)\langle J_j X, Y\rangle \Big) = 0$$

Polo Lema 4.1.4, podemos tomar $Y = J_k X + J_s X$ de forma que se siga verificando $U \perp JX, JY$, e así:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \sum_{i=1}^{\nu} 2\epsilon_i \lambda_i \langle J_i(J_k X + J_s X), X\rangle \Big(\sum_{j:\lambda_j=\lambda_i} \alpha_i^j(U)\langle J_j X, J_k X + J_s X\rangle \\ & \qquad + \sum_{j:\lambda_j=-\lambda_i} \frac{1}{2}\alpha_i^j(U)\langle J_j X, J_k X + J_s X\rangle \Big) \end{aligned}$$

Analicemos agora os diferentes termos que compoñen esta expresión:

$$\langle J_i(J_k X + J_s X), X\rangle = -\langle J_k X + J_s X, J_i X\rangle = (\epsilon_k \delta_{ik} + \epsilon_s \delta_{is})\langle X, X\rangle$$

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{j:\lambda_j=\lambda_i} \alpha_i^j(U)\langle J_j X, J_k X\rangle \\ & \quad = \delta_{\lambda_i=\lambda_k}\alpha_i^k(U)\langle J_k X, J_k X\rangle + \delta_{\lambda_i=\lambda_s}\alpha_i^s(U)\langle J_s X, J_s X\rangle \\ & \quad = \big(\delta_{\lambda_i=\lambda_k}(-\epsilon_k)\alpha_i^k(U) + \delta_{\lambda_i=\lambda_s}(-\epsilon_s)\alpha_i^s(U)\big)\langle X, X\rangle \end{aligned}$$

Reparamos en que o producto destas dúas expresións é sempre nulo, pois a primeira sería distinta de cero se $i = k$ ou $i = s$, pero en calquera destes dous casos é cero a segunda.

Vexamos que sucede co outro termo:

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{j:\lambda_j=-\lambda_i} \alpha_i^j(U)\langle J_j X, J_k X + J_s X\rangle = \\ & \quad = \delta_{\lambda_i=-\lambda_s}\alpha_i^s(U)\langle J_s X, J_s X\rangle + \delta_{\lambda_i=-\lambda_k}\alpha_i^k(U)\langle J_k X, J_k X\rangle \end{aligned}$$

En definitiva temos, xuntando estes cálculos:

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{i=1}^{\nu} \epsilon_i \lambda_i \left(\epsilon_k \delta_{ik} + \epsilon_s \delta_{is}\right) \big(\delta_{\lambda_i=-\lambda_s}(-\epsilon_s)\alpha_i^s(U) \\ & \qquad + \delta_{\lambda_i=-\lambda_k}(-\epsilon_k)\alpha_i^k(U)\big)\langle X, X\rangle^2 = 0 \end{aligned}$$

Simplificamos a expresión considerando vectores X non nulos:

$$\lambda_k(-\epsilon_s)\alpha_k^s + \lambda_s(-\epsilon_k)\alpha_s^k = 0$$

Como $\epsilon_s \alpha_k^s + \epsilon_k \alpha_s^k = 0$:

$$-\lambda_k \epsilon_s \alpha_k^s + \lambda_s \epsilon_s \alpha_s^k = 0$$

Por tanto $\alpha_k^s(U) = 0$ ou $\lambda_s = \lambda_k$.

ETAPA 7: $(\nabla_X R)(X, Y)X = 0$

Empregando os resultados obtidos nas etapas anteriores, e substituindo a expresión (4.8) en (4.3):

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X R)(X,Y)X = \\
&\quad = \textstyle\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\epsilon_i \lambda_i}{3} \Big(2\langle (\nabla_X J_i)\, X, Y\rangle J_i X + 2\langle J_i X, \left(\nabla_{\rangle} X\right) J_i X \\
&\qquad\quad + \langle (\nabla_X J_i)\, X, X\rangle J_i Y + \langle J_i X, X\rangle\, (\nabla_X J_i)\, Y \\
&\qquad\quad - \langle (\nabla_X J_i)\, Y, X\rangle J_i X - \langle J_i Y, X\rangle\, (\nabla_X J_i)\, X \Big) \\
&\quad = \textstyle\sum_{i=1}^{\nu} \frac{\epsilon_i \lambda_i}{3} \left(3\langle (\nabla_X J_i)\, X, Y\rangle J_i X + 3\langle J_i X, Y\rangle\, (\nabla_X J_i)\, X \right) \\
&\quad = \textstyle\sum_{i=1}^{\nu} \epsilon_i \lambda_i \left(\langle (\nabla_X J_i)\, X, Y\rangle J_i X + \langle J_i X, Y\rangle\, (\nabla_X J_i)\, X \right) \\
&\quad = \textstyle\sum_{i,j=1}^{\nu} \epsilon_i \lambda_i \left(\langle \alpha_i^j(X) J_j X, Y\rangle J_i X + \langle J_i X, Y\rangle \alpha_i^j(X) J_j X \right) \\
&\quad = \textstyle\sum_{i,j=1}^{\nu} \epsilon_i \lambda_i \langle J_j X, Y\rangle \alpha_i^j(X) J_i X + \sum_{i,j=1}^{\nu} \epsilon_i \lambda_i \langle J_i X, Y\rangle \alpha_i^j(X) J_j X \\
&\quad = \textstyle\sum_{i,j=1}^{\nu} \epsilon_i \lambda_i \langle J_j X, Y\rangle \alpha_i^j(X) J_i X + \sum_{i,j=1}^{\nu} \epsilon_j \lambda_j \langle J_j X, Y\rangle \alpha_j^i(X) J_i X \\
&\quad = \textstyle\sum_{i,j=1}^{\nu} \left(\epsilon_i \lambda_i \alpha_i^j(X) + \epsilon_j \lambda_j \alpha_j^i(X) \right) \langle J_j X, Y\rangle J_i X \\
&\quad = \textstyle\sum_{i,j=1}^{\nu} \left(\epsilon_i \lambda_i \alpha_i^j(X) - \epsilon_i \lambda_j \alpha_i^j(X) \right) \langle J_j X, Y\rangle J_i X \\
&\quad = \textstyle\sum_{i,j=1}^{\nu} (\lambda_i - \lambda_j)\, \epsilon_i \alpha_i^j(X) \langle J_j X, Y\rangle J_i X = 0
\end{aligned}$$

A última igualdade dase, posto que, ou ben $\lambda_i = \lambda_j$, ou ben $\alpha_i^j(X) = 0$, pola ETAPA 6.

O lema seguinte remata a demostración do teorema. □

Lema 4.2.5 *Sexa (M, g) unha variedade semi-riemanniana,∇ a conexión de Levi-Civita de (M, g) e R o seu tensor de curvatura. Entón son equivalentes:*

$$\begin{aligned}
&i) \quad \nabla R = 0 \\
&ii) \quad (\nabla_X R)(X, Y)X = 0, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)
\end{aligned}$$

Demostración.

i)$\Rightarrow$ ii) Obvio.

ii)$\Rightarrow$ i)

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_{\alpha X + \beta Y + \gamma Z} R)\, (\alpha X + \beta Y + \gamma Z, V)\, (\alpha X + \beta Y + \gamma Z) \\
&= \ldots + \alpha\beta\gamma \left[(\nabla_X R)\, (Y, V)\, Z + (\nabla_X R)\, (Z, V)\, Y + (\nabla_Y R)\, (X, V)\, Z \right] \\
&\quad\; [+ (\nabla_V R)\, (Z, V)\, Y + (\nabla_Z R)\, (X, V)\, Y + (\nabla_Z R)\, (Y, V)\, X] + \ldots
\end{aligned}$$

Empregando a Segunda Identidade de Bianchi chegamos a:

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X R)(Y,V)Z + [(\nabla_Z R)(X,V)Y + (\nabla_V R)(Z,X)Y] \\ &\quad + [(\nabla_X R)(Y,V)Z + (\nabla_V R)(X,Y)Z] + (\nabla_Y R)(Z,V)X \\ &\quad + (\nabla_Z R)(X,V)Y + [(\nabla_Y R)(Z,V)X + (\nabla_V R)(Y,Z)X] \\ &= 2(\nabla_X R)(Y,V)X + 2(\nabla_Z R)(X,V)Y + 2(\nabla_Y R)(Z,V)X \end{aligned}$$

Onde empregamos a Primeira Identidade de Bianchi na segunda igualdade.

$$(\nabla_X R)(Y,V)Z + (\nabla_Y R)(Z,V)X + (\nabla_Z R)(X,V)Y = 0 \tag{4.13}$$

Intercambiamos V e Z:

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(V,Z)X + (\nabla_V R)(X,Z)Y = 0 \tag{4.14}$$

Restando (4.13) e (4.14):

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X R)(Y,V)Z - (\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,V)X \\ &\quad - (\nabla_Y R)(V,Z)X + (\nabla_Z R)(X,V)Y - (\nabla_V R)(X,Z)Y \end{aligned}$$

$$(\nabla_X R)(V,Z)Y + 2(\nabla_Y R)(Z,V)X + (\nabla_X R)(Z,V)Y = 0$$

$$(\nabla_X R)(V,Z)Y + (\nabla_Y R)(Z,V)X = 0$$

Sumando (4.13) e a Primeira Identidade de Bianchi chegamos a:

$$2(\nabla_X R)(V,Z)Y + (\nabla_Y R)(X,Z)V + (\nabla_X R)(Y,V)Z = 0 \tag{4.15}$$

Intercambiando V e Z:

$$(\nabla_X R)(Z,V)Y + (\nabla_Y R)(X,V)Z + (\nabla_X R)(Y,Z)V = 0 \tag{4.16}$$

Sumando as dúas expresións anteriores:

$$(\nabla_Y R)(X,Z)V + (\nabla_X R)(Y,V)Z + (\nabla_Y R)(X,V)Z + (\nabla_X R)(Y,Z)V = 0$$

Facendo $X = Y$:

$$(\nabla_X R)(X,Z)V + (\nabla_X R)(X,V)Z = 0$$

Na expresión (4.15) facemos $X = Y$:

$$2(\nabla_X R)(Z,V)X + (\nabla_X R)(X,V)Z + (\nabla_X R)(X,Z)V = 0$$

Entón

$$(\nabla_X R)(Z,V)X = 0$$

$$\begin{aligned} 0 = (\nabla_{X+Y} R)(V,Z)(X+Y) &= (\nabla_X R)(V,Z)Y + (\nabla_Y R)(V,Z)X \\ &= 2(\nabla_X R)(V,Z)Y \end{aligned}$$

Polo tanto $(\nabla_X R)(V,Z)Y = 0$ para calesquera X, Y, Z campos de vectores en M. $\square$

O Operador de Jacobi

O operador de Jacobi desempeña un papel fundamental no estudio da xeometría dunha variedade, en concreto no estudio das xeodésicas e variacións de curvas. Ademais, o operador de Jacobi ten interese por si mesmo, como mostra este traballo, e, en ocasións, permite deducir moitas propiedades da variedade coñecendo o seu espectro. Sen embargo, o cálculo do operador de Jacobi adoita ser longo e tedioso; é por isto que decidimos implementar un programa en Mathematica que realice esas contas. Partindo da expresión da métrica en coordenadas locais, programamos en cálculo simbólico para obter a expresión do operador de Jacobi e dos seus autovalores. Deste xeito, coñecendo a expresión en coordenadas da métrica da variedade, coñecemos a matriz correspondente ó operador de Jacobi e os seus autovalores.

En canto á estructura do programa, está dividido en diferentes bloques pois, dado que para calcular o operador de Jacobi a partir da métrica é necesario calcular nun primeiro lugar os símbolos de Christoffel, en segundo lugar o tensor curvatura, despois fixar un vector e, por último, calcular o operador de Jacobi asociado a ese vector, dividimos o programa como segue:

■ Símbolos de Christoffel

Neste apartado calculamos os símbolos de Christoffel Γ a partir da expresión da métrica.

```
der[i_, n_: 4] := Derivative @@ Array[KroneckerDelta[#, i] &, n];

Γ[g_][coor__] := Module[{i, j, k, l, nablas, inversa, n = Length[List[coor]]},
   nablas = Table[der[i, n][g][coor], {i, n}];
   inversa = Inverse[g[coor]];
   Table[
      n
     ∑ inversa[[k, l]] (nablas[[i, j, l]] + nablas[[j, i, l]] - nablas[[l, i, j]]) /
    l=1
       2, {i, n}, {j, n}, {k, n}]];
```

■ Curvatura

Este apartado posúe un considerable interese propio, pois nel calculamos as compoñentes do tensor curvatura da variedade, que pode ser interesante en moitos casos, por exemplo, deduciriamos de inmediato se a variedade é cha sen máis que executar este apartado do programa. En ocasións convén considerar o tensor curvatura de tipo (1,3), se ben noutros casos cómpre empregar o tensor curvatura de tipo (0,4), por este motivo calculamos ambos nas función R(tensor (1,3)) e Rc(tensor(0,4)). Asemesmo, e aínda que non é necesario para o cálculo do operador de Jacobi, podemos calcular o tensor de Ricci, o cal, como vimos ó longo do traballo, posúe unha gran importancia no estudio da xeometría da variedade; segundo contraiamos R ou Rc temos as respectivas funcións Ricci ou Riccic. Tamén aquí calculamos a curvatura seccional para calesquera dous vectores fixados que se introducen como argumentos.

```
R[g_][coor__] :=
 Module[{i, j, k, s, m, gama, gamaAux, matdersim, n = Length[List[coor]]},
  gama = Evaluate[Γ[g] @@ Array[Slot, n]] &;
  matdersim = Table[der[s, n][gama][coor], {s, n}];
  gamaAux = gama[coor];
  Table[matdersim[[i, j, k, s]] -
    matdersim[[j, i, k, s]] + Sum[(gamaAux[[j, k, m]] gamaAux[[i, m, s]] -
       gamaAux[[i, k, m]] gamaAux[[j, m, s]]), {m, 1, n}], {i, n}, {j, n}, {k, n}, {s, n}]]

Rc[g_][coor__] := Module[{i, j, k, l, s, curvatura, n = Length[{coor}]},
  curvatura = R[g][coor];
  Table[Sum[curvatura[[i, j, k, l]] g[coor][[l, s]], {l, 1, n}],
   {i, 4}, {j, 4}, {k, 4}, {s, 4}]]

Ricci[g][coor__] := Module[{i, j, k, n = Length[{coor}]},
  curvatura = R[g][coor];
  Table[Sum[curvatura[[k, i, j, k]], {k, 1, n}], {i, n}, {j, n}]]

Riccic[g][coor__] := Module[{i, j, k, l, n = Length[{coor}]},
  curvatura = Rc[g][coor];
  inversa = Inverse[g[coor]];
  Table[Sum[Sum[inversa[[k, l]] curvatura[[i, k, l, j]], {l, 1, n}], {k, 1, n}], {i, n}, {j, n}]]

K[g][coor__][vector1_][vector2_] :=
 Module[{i, j, k, l, n = Length[{coor}]}, curvatura = Rc[g][coor];
  (Sum[Sum[Sum[Sum[vector1[[i]] vector1[[l]]
          vector2[[j]] vector2[[k]] curvatura[[i, j, k, l]], {l, 1, n}], {k, 1, n}], {j, 1, n}], {i, 1, n}]) /
   (vector1.g[coor].vector1 vector2.g[coor].vector2 -
     (vector1.g[coor].vector2)^2)]
```

Derivada covariante do tensor curvatura

O presente apartado non está relacionado estrictamente co operador de Jacobi, pois permite calcular a derivada covariante do tensor curvatura e, desta forma, comprobar se a variedade é localmente simétrica, o cal, como vimos no Capítulo 4 deste traballo está moi en relación coa constancia dos autovalores do operador de Jacobi, i.e., coa condición de Osserman.

```
DR[g_][coor__] := Module[
  {i, j, k, l, a, b, curvatura, cur, christoffel, matder, n = Length[{coor}]},
  curvatura = Evaluate[R[g] @@ Array[Slot, n]] &;
  matder = Table[der[i, n][curvatura][coor], {i, n}];
  cur = curvatura[coor];
  christoffel = Γ[g][coor];
  Table[matder[[a, i, j, k, l]] + Sum[cur[[i, j, k, b]] christoffel[[a, b, l]], {b, 1, n}] -
    Sum[christoffel[[a, i, b]] cur[[b, j, k, l]], {b, 1, n}] -
    Sum[christoffel[[a, j, b]] cur[[i, b, k, l]], {b, 1, n}] -
    Sum[christoffel[[a, k, b]] cur[[i, j, b, l]], {b, 1, n}],
   {i, n}, {j, n}, {k, n}, {l, n}, {a, n}]]
```

■ Operador de Jacobi

Este derradeiro apartado está adicado ó que en principio era o noso obxectivo: calcular o operador de Jacobi J. Co fin de profundizar no seu estudio, calcula os seus autovalores e o polinomio característico, o cal permite estudiar a condición de Osserman, tanto o aspecto puntual coma global, no aberto coordenado.

```
J[g_][coor__][v_] := Module[{i, j, k, s, curvatura, n = Length[List[coor]]},
   curvatura = R[g][coor];
   Transpose[
    Table[Sum[Sum[curvatura[[i, j, k, s]] v[[j]] v[[k]], {k, 1, n}], {j, 1, n}], {i, n}, {s, n}]]];

pcaracterístico[g_][coor__][v_] :=
 Module[{n = Length[{coor}]}, Det[J[g][coor][v] - λ IdentityMatrix[n]]]

autovalores[g_][coor__][v_] := Module[{jacobi},
  jacobi = J[g][coor][v];
  Eigenvalues[jacobi]]
```

Exemplos

Co fin de mostrar cómo funciona o programa, presentamos algúns exemplos de cálculos realizados con el. Para empezar vexamos os cálculos realizados sobre un espacio coñecido e cunha xeometría relativamente simple: o espacio hiperbólico en R^4.

■ Espacio hiperbólico 4-dimensional

De comezo introducimos a expresión da métrica:

```
g[x_, y_, z_, t_] = IdentityMatrix[4] / t^2
```

$$\left\{\left\{\frac{1}{t^2}, 0, 0, 0\right\}, \left\{0, \frac{1}{t^2}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, \frac{1}{t^2}, 0\right\}, \left\{0, 0, 0, \frac{1}{t^2}\right\}\right\}$$

A continuación calculamos certos elementos de interese, coma o tensor curvatura de tipo (1,3) e o correspon dente tensor de Ricci

```
R[g][x, y, z, t]
```

$$\left\{\left\{\{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\},\right.\right.$$
$$\left\{\left\{0, \frac{1}{t^2}, 0, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{t^2}, 0, 0, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\right\},$$
$$\left\{\left\{0, 0, \frac{1}{t^2}, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{t^2}, 0, 0, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0\}\right\},$$
$$\left.\left\{\left\{0, 0, 0, \frac{1}{t^2}\right\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{t^2}, 0, 0, 0\right\}\right\}\right\},$$
$$\left\{\left\{\left\{0, -\frac{1}{t^2}, 0, 0\right\}, \left\{\frac{1}{t^2}, 0, 0, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\right\},\right.$$
$$\{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\},$$
$$\left\{\{0, 0, 0, 0\}, \left\{0, 0, \frac{1}{t^2}, 0\right\}, \left\{0, -\frac{1}{t^2}, 0, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0\}\right\},$$
$$\left.\left\{\{0, 0, 0, 0\}, \left\{0, 0, 0, \frac{1}{t^2}\right\}, \{0, 0, 0, 0\}, \left\{0, -\frac{1}{t^2}, 0, 0\right\}\right\}\right\},$$
$$\left\{\left\{\left\{0, 0, -\frac{1}{t^2}, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0\}, \left\{\frac{1}{t^2}, 0, 0, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0\}\right\},\right.$$
$$\left\{\{0, 0, 0, 0\}, \left\{0, 0, -\frac{1}{t^2}, 0\right\}, \left\{0, \frac{1}{t^2}, 0, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0\}\right\},$$
$$\{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}\},$$
$$\left.\left\{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \left\{0, 0, 0, \frac{1}{t^2}\right\}, \left\{0, 0, -\frac{1}{t^2}, 0\right\}\right\}\right\},$$

$$\left\{\left\{\left\{0,0,0,-\frac{1}{t^2}\right\},\{0,0,0,0\},\{0,0,0,0\},\left\{\frac{1}{t^2},0,0,0\right\}\right\},\right.$$
$$\left\{\{0,0,0,0\},\left\{0,0,0,-\frac{1}{t^2}\right\},\{0,0,0,0\},\left\{0,\frac{1}{t^2},0,0\right\}\right\},$$
$$\left\{\{0,0,0,0\},\{0,0,0,0\},\left\{0,0,0,-\frac{1}{t^2}\right\},\left\{0,0,\frac{1}{t^2},0\right\}\right\},$$
$$\left.\{\{0,0,0,0\},\{0,0,0,0\},\{0,0,0,0\},\{0,0,0,0\}\}\right\}$$

```
DR[g][x, y, z, t] == Table[0, {i, 4}, {j, 4}, {k, 4}, {l, 4}, {m, 4}]
True
```

Vemos que o espacio hiperbólico ten curvatura seccional constante -1:

```
K[g][x, y, z, t][{v1, v2, v3, v4}][{w1, w2, w3, w4}] // Simplify
-1
```

O operador de Jacobi e os seus autovalores:

```
v = {v1, v2, v3, v4};
J[g][x, y, z, t][v] // Simplify
```

$$\left\{\left\{-\frac{v2^2+v3^2+v4^2}{t^2},\frac{v1\,v2}{t^2},\frac{v1\,v3}{t^2},\frac{v1\,v4}{t^2}\right\},\left\{\frac{v1\,v2}{t^2},-\frac{v1^2+v3^2+v4^2}{t^2},\frac{v2\,v3}{t^2},\frac{v2\,v4}{t^2}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\frac{v1\,v3}{t^2},\frac{v2\,v3}{t^2},-\frac{v1^2+v2^2+v4^2}{t^2},\frac{v3\,v4}{t^2}\right\},\left\{\frac{v1\,v4}{t^2},\frac{v2\,v4}{t^2},\frac{v3\,v4}{t^2},-\frac{v1^2+v2^2+v3^2}{t^2}\right\}\right\}$$

```
autovalores[g][x, y, z, t][v]
```

$$\left\{0,\frac{-v1^2-v2^2-v3^2-v4^2}{t^2},\frac{-v1^2-v2^2-v3^2-v4^2}{t^2},\frac{-v1^2-v2^2-v3^2-v4^2}{t^2}\right\}$$

Para comprobar que os autovalores son constantes, restrinxímonos ós vectores da esfera unitaria, logo:

```
norma1 = Factor[v.g[x, y, z, t].v] → 1;

Factor[autovalores[g][x, y, z, t][{v1, v2, v3, v4}]] //. norma1

{0, -1, -1, -1}
```

■ Métrica de Osserman con polinomio mínimo λ^3

Das variedades de Osserman en R^4, a maioría teñen polinomio mínimo λ^2e non resulta doado dar a expresión local dunha métrica de Osserman con polinomio mínimo λ^3. En [26] móstrase cómo sempre que $\frac{\partial f_1}{\partial y} \neq 0$ a métrica que vén dada por:

$$g(x,y,z,t)=\begin{pmatrix} z\,f_1(x,y) & a & b & 0\\ a & t\,f_2(x,y) & 0 & b\\ b & 0 & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0\end{pmatrix},\ \text{onde}\ \frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial x}=0,$$

ten polinomio mínimo λ^3. Empregando este programa atopamos unha xeralización na expresión desta métrica, que é a seguinte:

```
regra = a_. Derivative[0, 1][f11][x_, y_] + a_. Derivative[1, 0][f22][x_, y_] → 0;
```

```
g[x_, y_, z_, t_] =
```

$$\begin{pmatrix} (c\,z+d)\,f11[x,y]+j11[x,y] & f12[x,y] & b & 0\\ f12[x,y] & (c\,t+e)\,f22[x,y]+j22[x,y] & 0 & b\\ b & 0 & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & 0\end{pmatrix};$$

```
Factor[autovalores[g][x, y, z, t][{v1, v2, v3, v4}]] //. regra
```

{0, 0, 0, 0}

```
j = J[g][x, y, z, t][{v1, v2, v3, v4}] //. regra;
```

```
j2 = Factor[j.j] //. regra // Simplify
```

$$\Big\{\{0,0,0,0\},\ \{0,0,0,0\},$$

$$\Big\{-\frac{1}{4\,b^3}\Big(c^2\,v2^2\,\Big(v1\,(4\,b\,v3+2\,v1\,(d+c\,z)\,f11[x,y]+v2\,(d+c\,z)\,f22[x,y]+2\,v1\,j11[x,y])\;f11^{(0,1)}[x,y]^2+v1\,(2\,b\,v3+(d\,v1+e\,v2+c\,t\,v2+c\,v1\,z)\,f11[x,y]-3\,v2\,f12[x,y]+d\,v2\,f22[x,y]+c\,v2\,z\,f22[x,y]+v1\,j11[x,y])\;f11^{(0,1)}[x,y]\;f22^{(1,0)}[x,y]+v2\,(2\,b\,v4+(e+c\,t)\,v1\,f11[x,y]-v1\,f12[x,y]+e\,v2\,f22[x,y]+c\,t\,v2\,f22[x,y]+v2\,j22[x,y])\;f22^{(1,0)}[x,y]^2\Big)\Big),$$

$$\frac{1}{4\,b^3}\Big(c^2\,v1\,v2\,\Big(v1\,(3\,b\,v3+2\,v1\,(d+c\,z)\,f11[x,y]+v2\,(d+c\,z)\,f22[x,y]+2\,v1\,j11[x,y])\;f11^{(0,1)}[x,y]^2+\big(b\,v1\,v3+b\,v2\,v4+v1\,(d\,v1+e\,v2+c\,t\,v2+c\,v1\,z)\,f11[x,y]-3\,v1\,v2\,f12[x,y]+d\,v1\,v2\,f22[x,y]+c\,v1\,v2\,z\,f22[x,y]+v1^2\,j11[x,y]\big)\;f11^{(0,1)}[x,y]\;f22^{(1,0)}[x,y]+v2\,(3\,b\,v4+(e+c\,t)\,v1\,f11[x,y]-v1\,f12[x,y]+e\,v2\,f22[x,y]+c\,t\,v2\,f22[x,y]+v2\,j22[x,y])\;f22^{(1,0)}[x,y]^2\Big)\Big),\ 0,\ 0\Big\},$$

$$\Big\{\frac{1}{4\,b^3}\Big(c^2\,v1\,v2\,\Big(v1\,(3\,b\,v3+v1\,(d+c\,z)\,f11[x,y]-v2\,f12[x,y]+d\,v2\,f22[x,y]+c\,v2\,z\,f22[x,y]+v1\,j11[x,y])\;f11^{(0,1)}[x,y]^2+\big(b\,v1\,v3+b\,v2\,v4+(e+c\,t)\,v1\,v2\,f11[x,y]-3\,v1\,v2\,f12[x,y]+d\,v1\,v2\,f22[x,y]+e\,v2^2\,f22[x,y]+c\,t\,v2^2\,f22[x,y]+c\,v1\,v2\,z\,f22[x,y]+v2^2\,j22[x,y]\big)\;f11^{(0,1)}[x,y]\;f22^{(1,0)}[x,y]+v2\,(3\,b\,v4+(e+c\,t)\,v1\,f11[x,y]+2\,(e+c\,t)\,v2\,f22[x,y]+2\,v2\,j22[x,y])\;f22^{(1,0)}[x,y]^2\Big)\Big),$$

$$-\frac{1}{4\,b^3}\Big(c^2\,v1^2\,\Big(v1\,(2\,b\,v3+v1\,(d+c\,z)\,f11[x,y]-v2\,f12[x,y]+d\,v2\,f22[x,y]+c\,v2\,z\,f22[x,y]+v1\,j11[x,y])\;f11^{(0,1)}[x,y]^2+$$

```
v2 (2 b v4 + (e + c t) v1 f11[x, y] - 3 v1 f12[x, y] + d v1 f22[x, y] + e v2 f22[x, y] +
    c t v2 f22[x, y] + c v1 z f22[x, y] + v2 j22[x, y]) f11^(0,1)[x, y] f22^(1,0)[x, y] +
v2 ((e + c t) v1 f11[x, y] + 2 (2 b v4 + (e + c t) v2 f22[x, y] + v2 j22[x, y]))
 f22^(1,0)[x, y]^2)), 0, 0}}
```

Desta expresión é posible deducir cando o polinomio mínimo é λ^3, dando condicións necesarias e suficientes sobre as funcións f_{11}, f_{22}, f_{12} e as constantes b, c, d, e. Finalmente obtemos:

-Condición necesaria e suficiente para que o polinomio mínimo non sexa λ^3 é que $\frac{\partial}{\partial y} f_{11}$(x,y)=0

Calculando as compoñentes do tensor curvatura, tamén obtemos que, se $\frac{\partial}{\partial y} f_{11}$11(x,y)=0, a variedade é chá se e só se:

$-2\, b\, \frac{\partial}{\partial y} f_{12}$(x,y)=0

$$-c^2 f_{11}(x,\ y)\, f_{12}(x,\ y)\, f_{22}(x.y) +$$
$$2\, b \left\{ b(d + \mathrm{cz}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_{11}(x,\ y) - \mathrm{cf}_{22}(x,\ y) \frac{\partial}{\partial x} f_{12}(x,\ y) + b\left(-2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f_{12}(x,\ y) + (e + \mathrm{ct}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{22}(x,\ y)\right)\right\} = 0$$

Métrica de Osserman diagonal

Presentamos neste exemplo unha métrica moi sinxela, pois é cha, pero que non o semella vendo a súa expresión en coordenadas locais.

$$\mathbf{g[x\_,\ y\_,\ z\_,\ t\_]} = \begin{pmatrix} (x^2+y^2)^{-n1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (x^2+y^2)^{-n1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (z^2+t^2)^{-n2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (z^2+t^2)^{-n2} \end{pmatrix};$$

```
autovalores[g][x1, x2, y1, y2][v] // Simplify
```

```
{0, 0, 0, 0}
```

```
R[g][x1, x2, y1, y2] // Simplify
```

```
{{{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}},
 {{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}},
 {{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}},
 {{{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
  {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}}}
```

■ Familia 1 de métricas Osserman en R^4

Este é outro exemplo dunha métrica Osserman en R^4, en que la métrica depende de tódalas coordenadas.

$$\mathtt{g[x\_,\,y\_,\,z\_,\,t\_]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k[x]\,h[t] \\ 0 & 0 & f[y]\,m[z] & 0 \\ 0 & f[y]\,m[z] & a[z,t] & l[z,t] \\ k[x]\,h[t] & 0 & l[z,t] & b[z,t] \end{pmatrix};$$

```
J[g][x, y, z, t][{v1, v2, v3, v4}] // Simplify
```

$$\Big\{\Big\{0,\,0,\,\frac{1}{2\,h[t]^2\,k[x]\,m[z]}\Big(v3\,v4\,\big(-2\,l[z,t]\,h'[t]\,m'[z]+h[t]\,m'[z]\,\big(2\,l^{(0,1)}[z,t]-b^{(1,0)}[z,t]\big)+m[z]\,\big(-h'[t]\,\big(a^{(0,1)}[z,t]-2\,l^{(1,0)}[z,t]\big)+h[t]\,\big(a^{(0,2)}[z,t]-2\,l^{(1,1)}[z,t]+b^{(2,0)}[z,t]\big)\big)\big)\Big),$$

$$\frac{1}{2\,h[t]^2\,k[x]\,m[z]}\Big(v3^2\,\big(2\,l[z,t]\,h'[t]\,m'[z]+h[t]\,m'[z]\,\big(-2\,l^{(0,1)}[z,t]+b^{(1,0)}[z,t]\big)+m[z]\,\big(h'[t]\,\big(a^{(0,1)}[z,t]-2\,l^{(1,0)}[z,t]\big)-h[t]\,\big(a^{(0,2)}[z,t]-2\,l^{(1,1)}[z,t]+b^{(2,0)}[z,t]\big)\big)\big)\Big)\Big\},$$

$$\Big\{0,\,0,\,\frac{1}{2\,f[y]\,h[t]\,m[z]^2}\Big(v4^2\,\big(2\,l[z,t]\,h'[t]\,m'[z]+h[t]\,m'[z]\,\big(-2\,l^{(0,1)}[z,t]+b^{(1,0)}[z,t]\big)+m[z]\,\big(h'[t]\,\big(a^{(0,1)}[z,t]-2\,l^{(1,0)}[z,t]\big)-h[t]\,\big(a^{(0,2)}[z,t]-2\,l^{(1,1)}[z,t]+b^{(2,0)}[z,t]\big)\big)\big)\Big),$$

$$\frac{1}{2\,f[y]\,h[t]\,m[z]^2}\Big(v3\,v4\,\big(-2\,l[z,t]\,h'[t]\,m'[z]+h[t]\,m'[z]\,\big(2\,l^{(0,1)}[z,t]-b^{(1,0)}[z,t]\big)+m[z]\,\big(-h'[t]\,\big(a^{(0,1)}[z,t]-2\,l^{(1,0)}[z,t]\big)+h[t]\,\big(a^{(0,2)}[z,t]-2\,l^{(1,1)}[z,t]+b^{(2,0)}[z,t]\big)\big)\big)\Big)\Big\},\,\{0,0,0,0\},\,\{0,0,0,0\}\Big\}$$

```
autovalores[g][x, y, z, t][{v1, v2, v3, v4}]
```

$\{0, 0, 0, 0\}$

■ Familia 2 de métricas Osserman en R^4

Neste caso temos unha métrica de signatura (2,2), que ó igual que no exemplo anterior depende de tódalas coordenadas.

$$\mathtt{g[x\_,\,y\_,\,z\_,\,t\_]} := \begin{pmatrix} f11[x,y] & f12[x,y] & c[z] & a[t] \\ f12[x,y] & f22[x,y] & b[z] & d[t] \\ c[z] & b[z] & 0 & 0 \\ a[t] & d[t] & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
autovalores[g][x, y, z, t][{v1, v2, v3, v4}]
```

$\{0, 0, 0, 0\}$

■ Familia 3 de métricas Osserman en R^4

$$\text{g[x\_, y\_, z\_, t\_]} = \begin{pmatrix} \text{f11[x]} & 0 & 0 & \text{a[x]} \\ 0 & \text{f22[y]} & 0 & \text{c[y]} \\ 0 & 0 & 0 & \text{b[z]} \\ \text{a[x]} & \text{c[y]} & \text{b[z]} & 0 \end{pmatrix};$$

```
autovalores[g][x, y, z, t][v]
```

{0, 0, 0, 0}

```
J[g][x, y, z, t][{v1, v2, v3, v4}]
```

$$\Bigg\{\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\},$$
$$\Bigg\{v1\, v3 \left(\frac{a'[x]\, b'[z]}{b[z]^2} - \frac{a[x]\, b'[z]\, f11'[x]}{2\, b[z]^2\, f11[x]} - \frac{b'[z] \left(\frac{a'[x]}{b[z]} - \frac{a[x]\, f11'[x]}{2\, b[z]\, f11[x]}\right)}{b[z]}\right),$$
$$v2\, v3 \left(\frac{b'[z]\, c'[y]}{b[z]^2} - \frac{c[y]\, b'[z]\, f22'[y]}{2\, b[z]^2\, f22[y]} - \frac{b'[z] \left(\frac{c'[y]}{b[z]} - \frac{c[y]\, f22'[y]}{2\, b[z]\, f22[y]}\right)}{b[z]}\right),$$
$$v1^2 \left(-\frac{a'[x]\, b'[z]}{b[z]^2} + \frac{a[x]\, b'[z]\, f11'[x]}{2\, b[z]^2\, f11[x]} + \frac{b'[z] \left(\frac{a'[x]}{b[z]} - \frac{a[x]\, f11'[x]}{2\, b[z]\, f11[x]}\right)}{b[z]}\right) +$$
$$v2^2 \left(-\frac{b'[z]\, c'[y]}{b[z]^2} + \frac{c[y]\, b'[z]\, f22'[y]}{2\, b[z]^2\, f22[y]} + \frac{b'[z] \left(\frac{c'[y]}{b[z]} - \frac{c[y]\, f22'[y]}{2\, b[z]\, f22[y]}\right)}{b[z]}\right), 0\Bigg\}, \{0, 0, 0, 0\}\Bigg\}$$

■ Métricas Osserman en R^2

Partimos dunha métrica en R^2:

$$\text{g[x\_, y\_]} = \begin{pmatrix} \text{g11[x, y]} & \text{g12[x, y]} \\ \text{g12[x, y]} & \text{g22[x, y]} \end{pmatrix};$$

```
v = {v1, v2};
regra := Factor[v.g[x, y].v] → 1;
```

Calculamos os autovalores do operador de Jacobi, e vemos que non depende do vector v:

```
Factor[autovalores[g][x, y][{v1, v2}]] //. regra // Simplify
```

$$\Big\{0, \Big(g11[x, y] \left(g11^{(0,1)}[x, y]\, g22^{(0,1)}[x, y] - 2\, g22^{(0,1)}[x, y]\, g12^{(1,0)}[x, y] + g22^{(1,0)}[x, y]^2\right) +$$
$$g12[x, y] \Big(g22^{(0,1)}[x, y]\, g11^{(1,0)}[x, y] + 2\, g12^{(1,0)}[x, y]$$
$$\left(2\, g12^{(0,1)}[x, y] - g22^{(1,0)}[x, y]\right) - g11^{(0,1)}[x, y] \left(2\, g12^{(0,1)}[x, y] + g22^{(1,0)}[x, y]\right)\Big) +$$
$$2\, g12[x, y]^2 \left(g11^{(0,2)}[x, y] - 2\, g12^{(1,1)}[x, y] + g22^{(2,0)}[x, y]\right) +$$

$$g22[x,y]\left(g11^{(0,1)}[x,y]^2+g11^{(1,0)}[x,y]\left(-2\,g12^{(0,1)}[x,y]+g22^{(1,0)}[x,y]\right)-2\,g11[x,y]\left(g11^{(0,2)}[x,y]-2\,g12^{(1,1)}[x,y]+g22^{(2,0)}[x,y]\right)\right)\right)\Big/\left(4\left(g12[x,y]^2-g11[x,y]\,g22[x,y]\right)^2\right)\Big\}$$

Polo tanto, temos que en R^2 toda métrica é puntualmente Osserman. Se escollemos g11, g12 e g22 de forma que o operador de Jacobi dependa do punto en que nos achamos, temos un exemplo dunha variedade puntualmente Osserman que non é globalmente Osserman, exemplos similares vimos no Capítulo 2 en dimensión 4.

■ Exemplo de comprobación

Ata agora demos certos exemplos de métricas de Osserman, e achamos algunha das súas propiedades. Mais, debido a que traballamos con cálculo simbólico, podemos facer certo tipo de comprobacións comparando expresións obtidas para os diferentes elementos. Para ilustrar este feito propoñemos un exemplo:

Sexa

$$g[x\_,y\_,z\_,t\_]=\begin{pmatrix} h[z,t]^2\,g11[x,y] & h[z,t]^2\,g12[x,y] & 0 & 0\\ h[z,t]^2\,g12[x,y] & h[z,t]^2\,g22[x,y] & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

```
autovalores[g][x, y, z, t][{v1, v2, v3, v4}]
```

```
R[g][x, y, z, t]
```

Obtendo as expresións dos autovalores e do tensor curvatura e comparándoas, chégase a que R^4 con esta métrica é Osserman con autovalores nulos se e só se é chá.

Bibliografía

[1] J. Adams, Vector fields on spheres, *Annals of Math.* **75** (1962), 603-632.

[2] M. Barros, A. Romero, Indefinite Kähler manifolds, *Math. Ann.*, **261** (1982), 55-62.

[3] N. Blažić, N. Bokan, Z. Rakić, Osserman pseudo-Riemannian manifolds of signature (2,2), *J. Austral Math. Soc.* **71** (2001), 367-395.

[4] Q. S. Chi, A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces, *J. Diff. Geom.*, **28** (1988), 187-202.

[5] V. Cruceanu, P. Fortuny, P. M. Gadea, A survey on paracomplex geometry, *Rocky Mount. J. Math.* **26** (1996), 83-115.

[6] M. Dajczer, K. Nomizu, On sectional curvature of indefinite metrics II, *Math. Ann.* **247** (1980), 279-282.

[7] M. Fernández López, *Resultados de descomposición asociados á ecuación de Möbius*, Publicaciónes del Departamento de Geometría y Topología **96**, 2002, Universidade de Santiago de Compostela.

[8] M. Fernández López, E. García Río, D. N. Kupeli, B. Ünal; A curvature condition for a twisted product to be a warped product, *Manuscripta Math.* **106** (2001), 213-217.

[9] P. M. Gadea, A. Montesinos, Spaces of constant para-holomorphic sectional curvature, *Pacific J. Math***136**(1989), 85-101.

[10] E. García Río, D. N. Kupeli, R. Vázquez Lorenzo; *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry*, Lecture Notes in Mathematics **1777**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2002.

[11] E.García Río, D. N. Kupeli, *Semi-Riemannian maps and their applications*, Mathematics an its Applications **475** (1999), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[12] E. García Río, Y. Matsushita, R. Vázquez Lorenzo, Paraquaternionic Kähler manifolds, *Rocky Mount. J. Math.* **31** (2001), 237-260.

[13] P. Gilkey, Manifolds whose curvature operator has constant eigenvalues at the basepoint, *J. Geom. Anal.* **4** (1994), 155-158.

[14] P. Gilkey, *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemann Curvature Tensor*, World Scientific(2001).

[15] P. Gilkey, A. Swann, L. Vanhecke, Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator, *Quart. J. Math. Oxford(2)* **46** (1995), 299-320.

[16] H. Kamada, Y. Machida, Serf-duality of metrics of type (2,2) on four-dimensional manifolds, *Tôhoku Math. J.* **49** (1997), 259-275.

[17] W. Kühnel; *Differential Geometry. Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library **16**, American Mathematical Society 2002.

[18] R. S. Kulkarni,The values of sectional curvature in indefinite metrics, *Comment. Maht. Helv.* **54** (1979), 173-176.

[19] D. N. Kupeli, *Singular Semi-Riemannian geometry*, Mathematics and its Applications **366** (1996), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[20] Y. Nikolayevsky; Osserman manifolds and Clifford structures, *Houston J. Math* **29** (2003), 59-75.

[21] Z. Olszack, On the existence of generalized complex space forms, *Israel J. Math.* **65** (1989), 214-218.

[22] Barret O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry. With aplications to relativity*, Academic Press **103**, 1983.

[23] R.Osserman, Curvature in the eighties, *Amer.Math.Monthly* **97** (1990), 731-756.

[24] R. Ponge, H. Reckziegel, Twisted products in pseudo-riemannian geometry, *Geom. Dedicata* **48** (1993), 15-15.

[25] F. Tricerri, L. Vanhecke, Curvature tensors on almost Hermitian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981), 365-398.

[26] R. Vázquez Lorenzo, *Estudio del operador de Jacobi en geometría semi-Riemanniana*, Publicaciónes del Departamento de Geometría y Topología **88**, 1997, Universidade de Santiago de Compostela.

[27] K. Yano, M. Kon, *Structures in Manifolds*, Series in Pure Math., **3**, World Scientific, Singapore, 1984.