José Carlos Díaz Ramos

CARACTERIZACIÓN DE VARIEDADES RIEMANNIANAS MEDIANTE CURVATURAS ESCALARES TOTAIS DE ESFERAS XEODÉSICAS

101
2003
Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

José Carlos Díaz Ramos

CARACTERIZACIÓN DE VARIEDADES RIEMANNIANAS MEDIANTE CURVATURAS ESCALARES TOTAIS DE ESFERAS XEODÉSICAS

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección do profesor Eduardo García Río, para obter o Diploma de Estudios Avanzados en Ciencias Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levouse a cabo a súa defensa o día 21 de Xullo de 2002 na Facultade de Matemáticas de dita Universidade, obtendo a cualificación de Sobresaliente.

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 84-89390-17-7

Dep. Leg.: C-2072-2003

Á memoria do meu avó.

Agradecementos

Esta memoria nunca tería visto a luz sen a participación do director deste traballo, Eduardo García Río, que durante estes dous últimos anos me prestou a súa axuda e apoio. Espero que estas breves liñas consigan expresar o meu máis sincero agradecemento.

Gustaríame facer extensivo este sentimento de gratitude a todos os membros do Departamento de Xeometría e Topoloxía polo grato que é traballar nun ambiente tan cordial e distendido, así como pola súa disposición para conseguir a financiación dos meus estudios.

É de xustiza tamén recordar ós compañeiros que durante esta última temporada traballaron comigo e, en xeral, a todas as persoas que amenizan os intervalos de descanso e de ocio que se intercalan dentro das horas de traballo na facultade. Espero que a miña actitude cotiá serva para expresar este recoñecemento, e evitar así escribir o nome de todos eles.

Por último, e especialmente, é ineludible agradecerlle tamén ós meus pais o esforzo que adicaron todos estes anos para que puidese realizar os meus estudios universitarios. Eles teñen tanto que ver coma min na realización desta memoria.

Abstract

In order to study Riemannian manifolds, certain geometrical objects naturally associated to the structure of the manifold are usually considered. Curvature is, by far, the more broadly studied of those objects since the very beginning of Riemannian Geometry. Curvature largely influences the geometrical properties of the manifold and can even determine its topology. Nevertheless, the curvature of a manifold is often difficult to handle and, as a consequence, certain simplifications are used. In this work, we will focus on what are known as scalar curvature invariants and their role in determining the local geometry of a manifold.

Apart from curvature, certain submanifolds naturally associated to the metric structure are used in the study of Riemannian manifolds. As an instance, we have the geodesic spheres of sufficiently small radius. It is well known that the curvature of a geodesic sphere (or any submanifold, in general) is determined from the curvature of the ambient manifold by means of the Gauss Equation. Conversely, it is important to know how the geometry of small geodesic spheres influences, or even determines, the geometry of the ambient manifold. This question was deeply discussed in [6] and [13] among others. The purpose of this memory is to contribute to the answer of the former problem, and try to determine to what extent scalar curvature invariants of small geodesic spheres characterize the geometry of the ambient manifold.

Since geodesic spheres are compact manifolds and scalar curvature invariants are real valued functions, it is meaningful to integrate the scalar curvature invariants along geodesic spheres. These will be generically called total scalar curvatures and they are the main concern of this work.

Previously, in [9] and [10], the study of second order total scalar curvatures (that is, the integrals along geodesic spheres of second order scalar curvature invariants) was carried out. In this memory we will revise those results and extend our consideration to third order curvature invariants. More precisely, the work is structured as follows:

In Chapter 1 we introduce the notation and preliminary concepts to be used throughout this work. Section 1.1 is devoted to cover some basic definitions and in Section 1.2 the notions of scalar curvature invariants is introduced, with special attention to the first, second and third order curvature invariants. In sections 1.3, 1.4 and 1.5 we introduce the tools which are necessary to establish the power series expansion of the curvature tensor

and its covariant derivatives in a small geodesic sphere. This task will be accomplished in Section 1.6. Then, we recall in Section 1.7 some basic notations about several classes of manifolds which will be specially relevant in the rest of the work. Finally, in Section 1.8 we point out some generalities about integration on manifolds that will be used later for the particular case of geodesic spheres.

Chapter 2 is completely devoted to total scalar curvatures. They are defined in Section 2.1 where some further properties are established, together with several general methods for getting their power series expansions. The power series expansions for the scalar curvature invariants of first, second and third order are given afterwards. Then, these are integrated to obtain the corresponding formulae for the total scalar curvatures throughout theorems 2.4.18 to 2.4.30.

Chapter 3 is devoted to the study of comparison results by means of total scalar curvatures. We describe in Section 3.1 a general procedure to use in the subsequent sections and we state the theorems that will provide the characterizations of the model spaces using the total scalar curvatures of geodesic spheres. Section 3.2 recalls the results obtained in [9] and [10]. We emphasize

Corollary 3.2.2 *Let M be a Riemannian manifold of dimension $n \neq 5$ with holonomy adapted to a model space. If in each sufficiently small geodesic sphere $G_m(r)$, $\int_{G_m(r)} \|\widetilde{R}\|^2$ is the same as for a geodesic sphere of the same radius in that model space then, the manifold is locally isometric to that model space.*

Section 3.3 is devoted to study third order total scalar curvatures. The main result of this section is stated as follows

Theorem 3.3.1 *Let M be a Riemannian manifold of dimension $n \neq 7$ with holonomy group adapted to a model space. They are equivalent:*

(i) *for all sufficiently small geodesic sphere $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{R}\|^2$ coincides with the corresponding total scalar curvature in a geodesic sphere of the same radius in the model space.*

(ii) *for all sufficiently small geodesic sphere $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho}, \dot{\widetilde{R}} \rangle$ coincides with the corresponding total scalar curvature in a geodesic sphere of the same radius in the model space.*

(iii) *for all sufficiently small geodesic sphere $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{R}}$ coincides with the corresponding total scalar curvature in a geodesic sphere of the same radius in the model space.*

(iv) *M is locally isometric to that model space.*

We note at this point that the two previous theorems require the dimension to be different from 5 and 7 respectively. This is the case because for these dimensions, the second and third order total scalar curvatures respectively, are topological invariants in manifolds of constant sectional curvature. Hence, a characterization from the geometrical point of view is impossible. Even so, we can state partial results such as those of Subsection 3.3.4. Section 3.1 deals with this subject from a more general point of view.

In the remaining parts of Section 3.3 some partial results for third order scalar curvature invariants are stated, assuming additional hypotheses either on the curvature or on the dimension. In an imprecise way we could state:

If (M, g) *is an Einstein manifold and a second or third order total scalar curvature not involving covariant derivatives of the curvature tensor coincides with the corresponding total scalar curvature in a model space, then the manifold is locally isometric to that model space.*

Finally, formulae for scalar curvature invariants and total scalar curvatures including two further terms in the power series expansion are shown in the appendices. Moreover, explicit expressions for the model spaces are given.

Prefacio

No estudio das variedades de Riemann recórrese habitualmente ó emprego de certos obxectos xeométricos asociados de xeito natural á estructura da variedade. A curvatura é claramente o máis importante de tales obxectos, e desde o comenzo da Xeometría de Riemann é con diferencia o máis amplamente investigado. A curvatura influencia en grande medida as propiedades xeométricas da variedade e incluso en ocasións pode chegar a determinar a súa topoloxía. Sen embargo, a curvatura da variedade a miúdo é difícil de manexar e como consecuencia recórrese a certas simplificacións da mesma. Nesta memoria centrarémonos no que se coñece como os invariantes escalares da curvatura e na repercusión que estes teñen para determinar a xeometría local dunha variedade.

Á marxe da curvatura, tamén se fai uso no estudio das variedades de Riemann de certas subvariedades naturalmente asociadas á estructura métrica de tal variedade. Un exemplo disto son as esferas xeodésicas de radio suficientemente pequeno. É ben sabido que a curvatura dunha esfera xeodésica (ou de calquera subvariedade en xeral) está determinada a partir da curvatura da variedade ambiente segundo a Ecuación de Gauss. Reciprocamente, é importante saber ata que punto a xeometría das pequenas esferas xeodésicas influencia, ou incluso determina, a xeometría da variedade ambiente. Esta pregunta foi amplamente abordada en [6] e [13] entre outros.

As esferas xeodésicas de radio suficientemente pequeno son variedades de Riemann compactas. Como tales, teñen asociado un tensor de curvatura, e en consecuencia, invariantes da curvatura. O propósito desta memoria é contribuir á resposta do anterior problema e tratar de determinar en que medida os invariantes escalares da curvatura de pequenas esferas xeodésicas caracterizan a xeometría da variedade ambiente.

Dado que as esferas xeodésicas son variedades compactas e os invariantes da curvatura son funcións definidas na variedade, ten siso integrar os invariantes da curvatura en esferas xeodésicas. Tales valores que denominaremos xenericamente curvaturas totais son o obxecto principal deste traballo.

Con anterioridade, en [9] e [10] levouse a cabo o estudio das curvaturas totais de segunda orde, é dicir, das integrais ó longo de esferas xeodésicas de invariantes escalares da curvatura de segunda orde. Alí se probou que certos invariantes caracterizan a xeometría das variedades homoxéneas dous puntos. Nesta memoria revisamos tales resultados e ampliamos o estudio ata os invariantes de terceira orde. Máis concretamente, o traballo estructúrase como segue:

No Capítulo 1 introdúcese toda a notación e conceptos previos para o resto do traballo. Comenzamos na Sección 1.1 dando as definicións dos tensores de curvatura básicos para posteriormente definir na Sección 1.2 os invariantes da curvatura de primeira, segunda e terceira orde. Estes non só serán o obxecto de estudio nas esferas xeodésicas senón que ademais aparecerán nas fórmulas en desenvolvemento de potencias que empregaremos para os resultados de caracterización. Nas seccións 1.3, 1.4 e 1.5 introducimos, de feito, as ferramentas necesarias para dar o desenvolvemento en serie de potencias do tensor de curvatura e das súas derivadas covariantes nunha pequena esfera xeodésica, tarefa que será explicitada na Sección 1.6. A continuación, na Sección 1.7, recordaranse nocións básicas sobre algúns tipos de variedades que serán de especial relevancia no resto do traballo. Finalmente apuntamos algunhas xeneralidades sobre integración en variedades que posteriormente serán empregadas no caso particular das esferas xeodésicas. Isto realízase na Sección 1.8.

O Capítulo 2 trata enteiramente dos invariantes escalares totais. Na Sección 2.1 defínense estes e establécense algunhas das súas propiedades así como métodos xerais para obter os seus desenvolvementos en serie de potencias. No resto do capítulo danse as expresións en serie de potencias dos invariantes escalares da curvatura en esferas xeodésicas de primeira, segunda e terceira orde. Posteriorermente intégranse estes desenvolvementos para obter as correspondentes fórmulas dos invariantes totais.

O Capítulo 3 é o núcleo central desta memoria e nel establécense os resultados fundamentais acadados. Na Sección 3.1 descríbese de xeito xeral o procedemento a empregar no que resta de capítulo e enúncianse de forma abstracta os teoremas que posteriormente nos darán os resultados de caracterización desexados. A Sección 3.2 recorda os resultados acadados en anteriores traballos [9] e [10]. Entre estes resaltamos

Corolario 3.2.2 *Sexa M unha variedade de Riemann de dimensión $n \neq 5$ con grupo de holonomía adaptado a un espacio modelo. Se en toda esfera xeodésica $G_m(r)$ suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \|\widetilde{R}\|^2$ coincide coa dunha esfera xeodésica do mesmo radio no espacio modelo, entón a variedade é localmente isométrica a ese espacio modelo.*

A Sección 3.3 estudia as curvaturas escalares totais de terceira orde. O teorema máis importante desta sección é o seguinte:

Teorema 3.3.1 *Sexa M unha variedade de Riemann de dimensión $n \neq 7$ con grupo de holonomía adaptado a un espacio modelo. Equivalen:*

(i) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{R}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio no espacio modelo.*

(ii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho}, \dot{\widetilde{R}} \rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio no espacio modelo.*

(iii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena* $\int_{G_m(r)} \breve{\breve{R}}$ *coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio no espacio modelo.*

(iv) M *é localmente isométrica a ese espacio modelo.*

Facemos notar neste punto que os dous teoremas anteriormente enunciados esixen respectivamente que a dimensión sexa distinta de 5 e 7. A razón disto estriba en que para esas dimensións as curvaturas totais de orde dous e tres respectivamente son invariantes topolóxicos en variedades de curvatura seccional constante. Por tanto, unha caracterización dende o punto de vista xeométrico é imposible. Aínda así, pódense establecer resultados parciais como os enunciados na Subsección 3.3.4. A Sección 3.1 tamén trata este tema dende un punto de vista máis xeral.

No resto da Sección 3.3 establécense resultados parciais para o resto dos invariantes escalares de orde tres, ben asumindo hipóteses adicionais sobre a curvatura, ben mediante hipóteses sobre a dimensión. De xeito impreciso podemos dicir:

Se (M, g) *é unha variedade de Einstein e un invariante escalar total de orde dous ou tres que non involucre derivadas covariantes do tensor de curvatura coincide co correspondente a un espacio modelo, entón a variedade é localmente isométrica a ese espacio modelo.*

Por último, nos apéndices preséntanse as fórmulas dos invariantes escalares e das curvaturas totais incluindo dous termos máis no desenvolvemento en serie de potencias. Ademais tamén se dan expresións explícitas para os espacios modelo. Debido a que a súa importancia non é capital para os resultados de caracterización do Capítulo 3, non se inclúen no corpo principal da memoria.

Índice Xeral

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduciremos as ferramentas e convenios que precisaremos para o noso estudio. Seguiremos, en maior medida, as notacións de [19], se ben os conceptos básicos están asequibles en case calquera tratado adicado ó estudio da Xeometría de Riemann [17].

Na Sección 1.1 presentamos a definición dos distintos tensores de curvatura, así como certas identidades que verifican os mesmos. A continuación, na Sección 1.2 defínense os invariantes escalares da curvatura, que constitúen un dos obxectos xeométricos máis importantes nesta memoria. Posteriormente, revísanse os conceptos básicos relacionados coas coordenadas normais e os campos de vectores de Jacobi nas seccións 1.3 e 1.4 respectivamente. A estas alturas xa estaremos en disposición de definir e empezar a apuntar as primeiras propiedades das esferas xeodésicas dunha variedade de Riemann. Dado que estas son subvariedades introduciremos na Sección 1.5 un breve estudio sobre a Segunda Forma Fundamental. A continuación, na Sección 1.6 xa estaremos en condicións de dar os desenvolvementos en serie de potencias dos máis importantes tensores definidos en esferas xeodésicas. Os espacios modelo son o tipo especial de variedades de Riemann que serán o noso obxecto de caracterización. Estes, xunto con outras clases de variedades importantes que tamén se empregarán ó longo da memoria, son introducidos na Sección 1.7. Finalmente, conclúese cunha breve introducción sobre os conceptos e procedementos fundamentais no referente á integración en variedades de Riemann. Isto lévase a cabo na Sección 1.8.

No que segue, (M^n, g) representará unha variedade de Riemann de dimensión n, sendo g o seu tensor métrico. A conexión de Levi–Civita asociada denotarase por ∇ e vén dada pola fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \; & \tfrac{1}{2}\{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ & -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\} \end{aligned}$$

onde X, Y, Z son campos de vectores en M.

1.1 Tensores básicos

Definimos o *tensor de curvatura* na variedade seguindo o convenio:

$$R_{XY} = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$$

onde X, Y son campos de vectores en M. A partir del, constrúese o tensor de curvatura de tipo $(0,4)$ mediante

$$R_{XYZW} = g\left(R_{XY}Z, W\right)$$

Este tensor é habitualmente difícil de manexar, polo que se recorre ás súas contraccións.

Defínese o *tensor de curvatura de Ricci* como a traza

$$\rho_{XY} = tr\{Z \mapsto R_{XZ}Y\}$$

Se $m \in M$, o tensor de Ricci expresado nunha base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_mM escríbese:

$$\rho_{XY}(m) = \sum_{i=1}^{n} R_{Xe_iYe_i} \tag{1.1}$$

onde $X, Y \in T_mM$. O Lema 1.1.1 amosará que este é un tensor simétrico.

Defínese tamén a *curvatura escalar* como a traza do tensor de Ricci, $\tau = tr\,\rho$, que de novo, expresada nunha base ortonormal, se escribe como

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \rho_{ii} \tag{1.2}$$

Aquí, e no que segue ρ_{ij} significa $\rho_{e_ie_j}$ con respecto da base elexida anteriormente. Análogamente, R_{ijkl} significará $R_{e_ie_je_ke_l}$ e así sucesivamente.

Nos cálculos que faremos para este traballo será de vital importancia o uso de todas as identidades que poidamos deducir do tensor de curvatura. O seguinte lema resume as fundamentais.

Lema 1.1.1 *Con respecto a unha base ortonormal* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *o tensor de curvatura verifica as seguintes identidades:*

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$$

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$$

$$\nabla_i R_{jklr} + \nabla_j R_{kilr} + \nabla_k R_{ijlr} = 0$$

A partir delas pódense deducir tamén:

$$\sum_i \nabla_i R_{ijkl} = \nabla_k \rho_{jl} - \nabla_l \rho_{jk}$$
$$\sum_i \nabla_i \rho_{ij} = \tfrac{1}{2}\nabla_j \tau$$
$$\sum_{ij} R_{ijxy} R_{ivjw} = \tfrac{1}{2}\sum_{ij} R_{ijxy} R_{ijvw}$$
$$\sum_{ij} R_{ijxy} \nabla_i R_{ajvw} = \tfrac{1}{2}\sum_{ij} R_{ijxy} \nabla_a R_{ijvw}$$

Ademais, R_{ij} actua como unha derivación tensorial que anula a todas as funcións e verifica

$$\nabla^2_{ij} - \nabla^2_{ji} = -R_{ij}$$

sobre calquera tensor covariante.

Como última nota introductoria, se ω é un tensor, o seu *Laplaciano* con respecto a unha base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en $m \in M$, escríbese:

$$\Delta\,\omega = \sum_{i=1}^{n} \nabla^2_{ii}\,\omega$$

1.2 Invariantes escalares da curvatura

Un *invariante escalar da curvatura* é un polinomio nas compoñentes do tensor de curvatura e nas súas derivadas que non depende da elección da base ortonormal utilizada na súa construcción. A *orde* dun invariante escalar da curvatura é a metade do número total de derivadas do tensor métrico involucradas nel. Nótese que o tensor de curvatura xa contén dúas derivadas da métrica.

Unha base para os invariantes escalares de baixa orde foi calculada usando a teoría dos invariantes de Weyl. O Teorema de Weyl implica que os invariantes escalares son precisamente as contraccións totais nas compoñentes do tensor de curvatura e nas súas derivadas covariantes.

Denotemos con $I(k,n)$ o espacio dos invariantes escalares da curvatura de orde k para unha variedade de dimensión n.

É ben coñecido que se $n \geq 2$, $I(1,n)$ é un espacio vectorial de dimensión un xerado pola curvatura escalar τ.

Se $n \geq 4$, $I(2,n)$ é un espacio vectorial de dimensión catro xerado pola base:

$$\begin{array}{lcl} \tau^2 & & \\ \|\rho\|^2 & = & \sum \rho^2_{ij} \\ \|R\|^2 & = & \sum R^2_{ijkl} \\ \Delta\tau & = & \sum \nabla^2_{ii}\tau \end{array} \tag{1.3}$$

Finalmente, para $n \geq 6$, o espacio dos invariantes de orde tres $I(3,n)$ ten dimensión 17 e está xerado pola seguinte base:

$$
(1.4)\quad
\begin{array}{lcl}
\tau^3 & & \\
\tau\|\rho\|^2 & & \\
\tau\|R\|^2 & & \\
\breve{\rho} & = & \sum \rho_{ij}\rho_{jk}\rho_{ik} \\
\langle \rho\otimes\rho, \overline{R}\rangle & = & \sum \rho_{ij}\rho_{kl}R_{ikjl} \\
\langle \rho, \dot{R}\rangle & = & \sum \rho_{ij}R_{iklr}R_{jklr} \\
\breve{R} & = & \sum R_{ijkl}R_{ijrs}R_{klrs} \\
\breve{\breve{R}} & = & \sum R_{ijkl}R_{irks}R_{jrls}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\|\nabla\tau\|^2 & = & \sum(\nabla_i\tau)^2 \\
\|\nabla\rho\|^2 & = & \sum(\nabla_i\rho_{jk})^2 \\
\alpha(\rho) & = & \sum \nabla_i\rho_{jk}\nabla_j\rho_{ik} \\
\|\nabla R\|^2 & = & \sum(\nabla_i R_{jklr})^2 \\
\tau\Delta\tau & & \\
\langle \Delta\rho, \rho\rangle & = & \sum \rho_{ij}\nabla^2_{kk}\rho_{ij} \\
\langle \nabla^2\tau, \rho\rangle & = & \sum(\nabla^2_{ij}\tau)\,\rho_{ij} \\
\langle \Delta R, R\rangle & = & \sum R_{ijkl}\nabla^2_{rr}R_{ijkl} \\
\Delta^2\tau & &
\end{array}
$$

Nótense tamén as útiles ecuacións seguintes, que se seguen da definición por cálculo directo [11]:

$$\frac{1}{2}\Delta\,\|R\|^2 = \langle \Delta R, R\rangle + \|\nabla R\|^2 \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{2}\Delta\,\|\rho\|^2 = \langle \Delta\rho, \rho\rangle + \|\nabla\rho\|^2 \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{2}\Delta\,\tau^2 = \tau\Delta\tau + \|\nabla\tau\|^2 \tag{1.7}$$

Recentemente, unha aplicación interesante da teoría de invariantes escalares foi obtida en [16], onde se amosa que unha variedade de Riemann é localmente homoxénea se e só se todos os invariantes escalares da curvatura son constantes.

Remitímonos a [13] para máis información sobre estes invariantes. Asemade, consideramos convinte sinalar neste punto que o estudio destes invariantes é un elemento específico da xeometría de Riemann, presentando unha interpretación radicalmente distinta en xeometría indefinida.

1.3 Coordenadas normais

Dada unha curva $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ na variedade, denotaremos por $\frac{d}{dt}$ o campo de vectores paramétrico no intervalo I con respeco a t, e por $\gamma'(t) = \gamma_{*t}(\frac{d}{dt})$ o vector tanxente da curva γ correspondente ó valor t do parámetro. A derivada covariante dun campo de vectores X denotarémola por $\nabla_{\gamma'}X$ ou abreviadamante por X'.

Unha curva γ dise unha *xeodésica* se:

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$$

A condición anterior tradúcese nun sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde, co que se cumplen os requisitos necesarios para a existencia e unicidade do problema de valores iniciais. Así, dados $m \in M$ e $v \in T_mM$, existe unha única xeodésica maximal $\gamma_v : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ tal que $\gamma_v(0) = m$ e $\gamma_v'(0) = v$.

A *aplicación exponencial* é a aplicación

$$\begin{array}{rcl} exp_m : T_mM & \longrightarrow & M \\ v & \longmapsto & \gamma_v(1) \end{array}$$

Tal aplicación non está definida, en xeral, en todo T_mM, senón soamente nun entorno estrelado da orixe, pero por comodidade de notación omitiremos ese feito de agora en diante.

Xeometricamente, o punto $exp_m(v)$ está na xeodésica γ_v a unha distancia $\|v\|$ de m. Ademais, a aplicación exponencial é un difeomorfismo local dado que $exp_{m*0} = I_{T_mM}$ se identificamos T_mM con $T_0(T_mM)$. Isto significa que existe unha veciñanza $\mathfrak{U}$ de $0 \in T_mM$ e unha veciñanza $\mathfrak{V}$ de $m \in M$ tal que $exp_m : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{V}$ é un difeomorfismo. Unha veciñanza $\mathfrak{V}$ deste estilo é o que se chama unha *veciñanza normal* do punto $m \in M$.

Agora consideremos $S^{n-1}(r) = \{x \in T_mM : \|x\| = r\}$ a esfera de radio r en T_mM. Se o radio é tomado suficientemente pequeno como para que a esfera caia dentro da veciñanza $\mathfrak{U}$ definida anteriormente, a imaxe,

$$G_m(r) = exp_m(S^{n-1}(r))$$

é unha hipersuperficie en M consistente nos puntos localizados a unha distancia xeodésica r de m. Por tanto,

$$G_m(r) = \{p \in M : d(m,p) = r\}$$

Estas hipersuperficies son as *esferas xeodésicas* e o seu estudio constitúe o obxectivo do noso traballo. Para enfatizar que o radio se tomará suficientemente pequeno como para que a esfera xeodésica estea dentro dunha veciñanza normal, habitualmente nos referiremos a elas como *pequenas esferas xeodésicas*.

Para cada $p \in G_m(r)$, existe un único vector unitario $u \in T_mM$ tal que $p = exp_m(ru)$. Por tanto, existe unha única xeodésica parametrizada proporcionalmente ó arco, $\gamma(t) = exp_m(tu)$, conectando o centro da esfera xeodésica m co punto p da esfera. Tal xeodésica chámase *raio xeodésico* de m a p. En virtude do Lema de Gauss, o espacio tanxente a $G_m(r)$ en p é precisamente o conxunto de vectores en p que son ortogonais ó raio xeodésico γ.

A *bóla xeodésica* de centro m e radio r defínese de xeito natural como

$$B_m(r) = \{p \in M : d(m,p) \leq r\}$$

É importante sinalar que as bólas xeodésicas suficientemente pequenas corresponden coas bólas métricas determinadas pola topoloxía da variedade (que certamente é metrizable).

Para estudiar as esferas xeodésicas en veciñanzas normais cómpre un sistema de coordenadas axeitado. Dito sistema virá dado polas coordenadas normais de centro en m. A súa construcción é como segue. Sexa exp_m a aplicación exponencial e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ unha base ortonormal de T_mM. Cada punto $p \in \mathfrak{V}$ pode ser descrito de xeito único como $exp_m(v)$ con $v \in T_mM$. Descompoñendo v con respecto á base ortonormal dada podemos escribir $p = exp_m\left(\sum_{i=1}^n x^i(p)e_i\right)$, onde $x^1(p), \ldots, x^n(p)$ veñen determinadas de xeito único. De forma máis económica, sóese escribir,

$$x^i\left(exp_m\left(\sum_{j=1}^n t^j e_j\right)\right) = t^i$$

Este sistema de coordenadas así obtido é o que se chama *sistema de coordenadas normais* con respecto á base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en m.

Finalmente, introduciremos dous conceptos máis que serán necesarios no estudio das esferas xeodésicas. A *función distancia radial*, r, escríbese en coordenadas normais como

$$r(p) = d(m,p) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x^i(p)^2}$$

e, naturalmente, mide a distancia entre os puntos p e m para valores de r suficientemente pequenos.

O *campo de vectores radial* vén dado mediante

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{r}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.8}$$

Este campo, que está localmente definido, coincide co gradiente da función distancia radial, $\operatorname{grad} r = \frac{\partial}{\partial r}$. Ademais, ó longo de cada xeodésica radial parametrizada por arco temos

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\gamma(r)} = \gamma'(r)$$

co cal, $\frac{\partial}{\partial r}$ é un vector normal unitario de $G_m(r)$ que apunta ó exterior.

1.4 Campos de vectores de Jacobi

Sexa $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ unha xeodésica en M. Un campo de vectores X ó longo de γ é un *campo de vectores de Jacobi* se satisfai a ecuación diferencial de Jacobi

$$X'' + R_\gamma(X) = 0 \tag{1.9}$$

onde R_γ denota o *operador de Jacobi* definido por

$$R_\gamma(X) = R_{\gamma' X}\gamma' \tag{1.10}$$

Os campos de vectores de Jacobi están fortemente relacionados coa curvatura da variedade e serán a ferramenta fundamental do noso traballo. A súa interpretación xeométrica aparece vencellada ó estudio das variacións xeodésicas, no intento de atopar as curvas de mínima lonxitude unindo dous puntos dados.

Unha *variación* dunha curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ é unha aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) & \longrightarrow & M \\ (s, t) & \longmapsto & \Gamma(s, t) \end{array}$$

tal que $\Gamma(s, 0) = \gamma(s)$ para todo s. Fixadas constantes s_0 e t_0, a curva $\Gamma(s_0, \cdot\,)$ chámase transversal e a curva $\Gamma(\cdot, t_0)$ lonxitudinal. Unha variación dise unha variación xeodésica ou unha familia uniparamétrica de xeodésicas se toda curva lonxitudinal é unha xeodésica. Chamamos campo de vectores variacional de Γ ó campo ó longo de γ que para cada s nos dá a velocidade da curva transversal $\Gamma(s, \cdot)$. Verifícase que un campo de vectores X ó longo dunha xeodésica γ é un campo de vectores de Jacobi se e só se X é o campo de vectores variacional dunha variación xeodésica da curva γ. Deste xeito, podemos interpretar estes intuitivamente dicindo que un campo de vectores de Jacobi ó longo dunha xeodésica dá unha indicación infinitesimal de como as xeodésicas veciñas se comportan con respecto da xeodésica dada.

Para aqueles campos de vectores de Jacobi X que verifican $X(0) = 0$, podemos obter a expresión seguinte:

$$X(s) = exp_{\gamma(0)*s\gamma'(0)}(sv) \tag{1.11}$$

para todos os valores de s ó longo da xeodésica γ e onde $X'(0) = v$.

O noso interés polos campos de Jacobi na realización do presente traballo, céntrase na súa relación cos campos coordenados asociados a sistemas de coordenadas normais. Para amosar esta relación procedemos como segue:

Sexan $m \in M$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ unha base ortonormal de T_mM. Denotemos as coordenadas normais asociadas á base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ en m por $(x^1, \ldots, x^n)$. Para un punto $p \in G_m(r)$ consideramos o raio xeodésico γ conectando m e p. Escribiremos $\gamma(t) = exp_m(tu)$ sendo $u \in T_mM, \|u\| = 1$. Así, $p = exp_m(ru)$. Ó longo da xeodésica γ podemos construir de xeito natural tres campos de vectores:

En primeiro lugar, podemos simplemente restrinxir os campos coordenados correspondentes ó sistema de coordenadas normais $\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\gamma(t)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_{\gamma(t)}\}$ á curva γ.

En segundo lugar, e supoñendo que $u = \gamma'(0) = e_1$, podemos definir os campos de vectores $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ onde cada $E_i(t)$ é obtido desplazando paralelamente e_i ó longo de γ. Nótese que con esta elección de e_1 temos que $\gamma'(t) = E_1(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\gamma(t)}$. Deste xeito, aplicando o Lema de Gauss, $T_p\, G_m(r) = \gamma'(r)^{\perp}$ está xerado por $\{E_2(r), \ldots, E_n(r)\}$.

Por último, introduciremos unha base de campos de vectores de Jacobi ó longo de γ, $\{Y_2(t), \ldots, Y_n(t)\}$, satisfacendo as condicións iniciais

$$Y_i(0) = 0, \quad Y_i'(0) = e_i, \qquad i \in \{2, \ldots, n\} \tag{1.12}$$

Para valores de t suficientemente pequenos como para non chegar ó primeiro punto conxugado de $m = \gamma(0)$, ó longo de γ, temos que $\{Y_2(t), \ldots, Y_n(t)\}$ é base de $\gamma'(t)^{\perp}$.

Usando a Ecuación 1.11 é fácil ver que

$$Y_i(t) = t \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(t)}$$

o que pon de manifesto a relación existente entre os campos de Jacobi anteriormente construidos e os campos coordenados normais.

A continuación, a relación que hai entre os campos de vectores de Jacobi e a base ortonormal paralela $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ permítenos derivar unha grande cantidade de información sobre a xeometría da esfera no punto p. Sexa $A(t)$ o endomorfismo de $T_{\gamma(t)}\, G_m(t)$ que expresa o cambio de base. Poñamos

$$Y_i(t) = A(t)\, E_i(t), \qquad i \in \{2, \ldots, n\} \tag{1.13}$$

Utilizando (1.9), (1.10), (1.12) e (1.13) obtemos que a familia de endomorfismos $A(t)$ satisfai a ecuación de Jacobi matricial

$$A'' + R_\gamma \circ A = 0 \tag{1.14}$$

$$A(0) = 0, \quad A'(0) = I \tag{1.15}$$

Como aplicación dos resultado anteriores, xa somos quen de expresar as funcións compoñentes do tensor métrico en coordenadas normais nun punto $p = exp_m(ru)$ situado sobre a esfera xeodésica $G_m(r)$ en termos do endomorfismo A. Claramente, $g_{11}(p) = 1$, e, aplicando o Lema de Gauss, $g_{1i}(p) = 0$, $i \in \{2, \ldots, n\}$. Por último,

$$g_{ij}(p) = \frac{1}{r^2}\, g\left(r\, \frac{\partial}{\partial x^i}, r\, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)(\gamma(r)) = \frac{1}{r^2}\, g\left(A\, E_i, A\, E_j\right)(r) = \frac{1}{r^2}\, \left({}^{T}\!A\, A\right)_{ij}(r)$$

En consecuencia, as compoñentes do tensor métrico con respecto das coordenadas normais veñen dadas por

$$g_p = (g_{ij})(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2}\left({}^{T}\!A\, A\right)(r) \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

A *función densidade de volume* defínese como

$$\theta_m(p) = \sqrt{\det\, g_p} \tag{1.17}$$

polo que, como aplicación de (1.16), temos

$$\theta_m(p) = \frac{\det(A(r))}{r^{n-1}} \tag{1.18}$$

1.5 Segunda forma fundamental de esferas xeodésicas

A definición do tensor de curvatura é aplicable a calquera variedade de Riemann en xeral. Para subvariedades, e máis especificamente para hipersuperficies (como é o caso das esferas xeodésicas), a segunda forma fundamental, ou operador de configuración permite relacionar a xeometría intrínseca da subvariedade con aquela do seu espacio ambiente. En primeiro lugar trataremos o caso máis xeral para logo particularizar no caso das esferas xeodésicas.

Sexa $(\widetilde{M}, g)$ unha subvariedade de (M, g). Xa que o tensor métrico non é máis ca unha restricción do da variedade ambiente, denotaremos os dous coa mesma letra. A conexión de Levi–Civita da subvariedade escribirase como $\widetilde{\nabla}$.

A segunda forma fundamental, II, é definida descompoñendo $\nabla_X Y$ nas súas compoñentes tanxencial e normal á subvariedade segundo o isomorfismo canónico en cada punto $T_m M = T_m\widetilde{M} \oplus T_m\widetilde{M}^{\perp}$, $m \in M$, para obter,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathit{II}(X, Y)$$

onde X, Y son campos de vectores en $\widetilde{M}$ (ou calquera extensión súa a M). Por tanto,

$$\mathit{II}(X, Y) = -(\nabla_X Y)^{\perp}$$

Se $\widetilde{M}$ é unha hipersuperficie, a segunda forma fundamental pode ser expresada como,

$$\mathit{II}(X, Y) = \sigma(X, Y)\zeta$$

onde ζ é un campo de vectores unitario normal á hipersuperficie. É claro entón que todos os cálculos que involucran a segunda forma fundamental dependen, a partir de aquí, dun signo (segundo cal sexa o vector normal elexido), pero este signo nas fórmulas que necesitaremos cancelarase. Así, σ é un tensor de tipo (0,2) en $\widetilde{M}$, que tamén se pode ver como,

$$\sigma(X, Y) = g(\mathit{II}(X, Y), \zeta)$$

O tensor σ, que tamén recibe o nome de *segunda forma fundamental* é metricamente equivalente ó *operador de configuración*, T, dado por

$$\sigma(X, Y) = g(TX, Y) \tag{1.19}$$

Ademais, verifícase que,

$$TX = \nabla_X \zeta \tag{1.20}$$

A función *curvatura media* obtense como o invariante alxebraico do operador de configuración dado pola súa traza. Así, con respecto a unha base ortonormal $\{e_2, \ldots, e_n\}$ de $\widetilde{M}$, exprésase,

$$h = \sum_{i=2}^{n} \sigma(e_i, e_i) \tag{1.21}$$

A ecuación básica que relaciona a xeometría intrínseca coa extrínseca é a *ecuación de Gauss*, que mide a diferencia entre a curvatura da subvariedade e a do espacio ambiente en termos da segunda forma fundamental:

$$\widetilde{R}_{XYZW} = R_{XYZW} + \sigma(X,Z)\sigma(Y,W) - \sigma(X,W)\sigma(Y,Z) \tag{1.22}$$

sendo X, Y, Z, W campos de vectores en $\widetilde{M}$. Deste xeito, a segunda forma fundamental ten toda a información suplementaria para determinar a curvatura dunha subvariedade a partir da curvatura da variedade ambiente.

É neste momento cando podemos empregar os desenvolvementos xerais feitos anteriormente e particularizar para o caso dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$.

Neste caso, o *operador de configuración dunha esfera xeodésica* vén dado por

$$T_m(p)\, X = \left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial\, r} \right)(p) \tag{1.23}$$

onde utilizamos (1.20) para o vector normal unitario saínte $\frac{\partial}{\partial\, r}$, dado por (1.8).

Tamén se verifica que

$$T_m\, Y_i = \nabla_{Y_i} \frac{\partial}{\partial r} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\, Y_i = Y_i'$$

Entón usando (1.13) chegamos a que

$$T_m\, A = A' \tag{1.24}$$

ou ben,

$$T_m(p) = \left(A' A^{-1} \right)(r) \tag{1.25}$$

Contraendo o operador de configuración segundo (1.21) obtemos unha expresión para a curvatura media:

$$h_m(p) = tr\, T_m(p) = tr\, \left(A'\, A^{-1} \right)(r) = \frac{(\det\, A)'}{\det\, A}\,(r)$$

Empregando (1.18), finalmente obtemos

$$h_m(p) = \frac{n-1}{r} + \frac{\theta_m'(p)}{\theta_m(p)} \tag{1.26}$$

1.6 Series de potencias

Os campos de vectores de Jacobi son de vital importancia á hora de deducir información sobre a curvatura da variedade. Na anterior sección vimos como podiamos expresar os conceptos xeométricos que nos interesan en función do endomorfismo A. Sen embargo, a ecuación de Jacobi, que en última instancia nos permite expresar todos os anteriores resultados, non é, en xeral, resoluble en termos elementais. Agora ben, podemos utilizar esta para aproximar todas as expresións anteriores pola súa serie de Taylor, método que desenvolveremos no que segue. Véxase [19] para ampliar información e máis referencias.

Derivando a igualdade (1.24) séguese que

$$T_m\, A' + T'_m\, A = A''$$

co que empregando de novo (1.14), chegamos á *ecuación diferencial de Riccati*

$$T'_m + T_m^2 + R_\gamma = 0 \tag{1.27}$$

Para obter as fórmulas correspondentes ás series de potencias dos distintos tensores, utilizaremos o método de Ledger. Para iso definimos

$$C(r) = r\, T_m(p) \tag{1.28}$$

Está claro que podemos facer o desenvolvemento en serie de potencias como

$$C(r) = C(0) + \frac{r}{1!}\, C'(0) + \frac{r^2}{2!}\, C''(0) + \dots$$

e tendo en conta que (1.27) é equivalente a

$$r\, C' + C^2 - C + r^2\, R_\gamma = 0 \tag{1.29}$$

tomando a derivada n-ésima e avaliando en $r = 0$ obtemos finalmente a *fórmula de recursión de Ledger*:

$$(n-1)\, C^{(n)}(0) = -n\,(n-1)\, R^{(n-2)}(0) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^{(k)}(0)\, C^{(n-k)}(0),\ n \in \mathbb{N} \tag{1.30}$$

Empregando a fórmula de recursión de Ledger obtemos un importante método para derivar as expresións de todos os tensores de curvatura que necesitaremos para este traballo.

Tendo en conta que o noso obxectivo último é o de atopar os primeiros termos no desenvolvemento en serie de Taylor das integrais dos invariantes escalares da curvatura das esferas xeodésicas, precisamos coñecer os correspondentes á segunda forma fundamental de ditas esferas (Lema 1.6.1), á función densidade de volume (Lema 1.6.3) e ó tensor curvatura na súa forma de tipo (0,4) (Lema 1.6.4).

O seguinte resultado consiste sinxelamente en empregar a fórmula (1.30) xunto con (1.28) e (1.19). A expresión obtida pode atoparse, por exemplo, en [6] e [11].

Lema 1.6.1 [6] *Sexa $\sigma(p)$ a segunda forma fundamental da esfera xeodésica $G_m(r)$ en $p = exp_m(ru)$. Entón:*

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(p) &= \frac{1}{r}\,\delta_{ij} - \frac{r}{3}\,R_{iuju}(m) - \frac{r^2}{4}\,(\nabla_u R_{iuju})(m) \\ &\quad - r^3\left(\frac{1}{10}\,\nabla^2_{uu}R_{iuju} + \frac{1}{45}\sum_{c=1}^{n} R_{cuiu}R_{cuju}\right)(m) + O(r^4)\end{aligned}$$

Tomando trazas na anterior ecuación segundo a definición (1.21) chegamos ó seguinte resultado.

Lema 1.6.2 [6] *Sexa $h(p)$ a curvatura media da esfera xeodésica $G_m(r)$ en $p = exp_m(ru)$. Entón:*

$$\begin{aligned}h(p) &= \frac{n-1}{r} - \frac{r}{3}\,\rho_{uu}(m) - \frac{r^2}{4}\,(\nabla_u \rho_{uu})(m) \\ &\quad - r^3\left(\frac{1}{10}\,\nabla^2_{uu}\rho_{uu} + \frac{1}{45}\sum_{c,d=1}^{n} R^2_{cudu}\right)(m) + O(r^4)\end{aligned}$$

Procedendo de xeito análogo e utilizando agora (1.26), tense

Lema 1.6.3 [6] *Sexa θ_m a función densidade de volume con respecto a unha carta normal centrada en $m \in M$. Se $p = exp_m(ru)$, entón:*

$$\begin{aligned}\theta_m(p) &= 1 - \frac{r^2}{6}\,\rho_{uu}(m) - \frac{r^3}{12}\,(\nabla_u \rho_{uu})(m) \\ &\quad + \frac{r^4}{24}\left(-\frac{3}{5}\,\nabla^2_{uu}\rho_{uu} + \frac{1}{3}\,\rho^2_{uu} - \frac{2}{15}\sum_{c,d=1}^{n} R^2_{cudu}\right)(m) + O(r^5)\end{aligned}$$

A continuación calcularemos os desenvolvementos en serie de potencias dos tensores de curvatura intrínsecos das esferas xeodésicas. Posteriormente, utilizaremos estes desenvolvementos para calcular as series de potencias dos invariantes da curvatura e das curvaturas totais de segunda e terceira orde, núcleo esencial deste traballo.

Lema 1.6.4 [6] *Sexa $\widetilde{R}$ o tensor de curvatura dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = exp_m(ru)$, entón:*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}_{ijkl}(p) \;=\;& \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}}{r^2} + \Bigg(R_{ijkl} - \frac{1}{3}\,R_{julu}\delta_{ik} + \frac{1}{3}\,R_{juku}\delta_{il} \\
& + \frac{1}{3}\,R_{iulu}\delta_{jk} - \frac{1}{3}\,R_{iuku}\delta_{jl}\Bigg)(m) + \Bigg(\nabla_u R_{ijkl} - \frac{1}{4}\,\nabla_u R_{julu}\delta_{ik} + \frac{1}{4}\,\nabla_u R_{juku}\delta_{il} \\
& + \frac{1}{4}\,\nabla_u R_{iulu}\delta_{jk} - \frac{1}{4}\,\nabla_u R_{iuku}\delta_{jl}\Bigg)(m)\,r + \Bigg(\frac{1}{2}\,\nabla^2_{uu} R_{ijkl} \\
& - \frac{1}{10}\,\nabla^2_{uu} R_{julu}\delta_{ik} + \frac{1}{10}\,\nabla^2_{uu} R_{juku}\delta_{il} + \frac{1}{10}\,\nabla^2_{uu} R_{iulu}\delta_{jk} - \frac{1}{10}\,\nabla^2_{uu} R_{iuku}\delta_{jl} \\
& - \frac{1}{45}\sum_{c=1}^{n} R_{cuju}R_{culu}\delta_{ik} + \frac{1}{45}\sum_{c=1}^{n} R_{cuju}R_{cuku}\delta_{il} + \frac{1}{45}\sum_{c=1}^{n} R_{cuiu}R_{culu}\delta_{jk} \\
& - \frac{1}{45}\sum_{c=1}^{n} R_{cuiu}R_{cuku}\delta_{jl} - \frac{1}{9}\,R_{iulu}R_{juku} + \frac{1}{9}\,R_{iuku}R_{julu}\Bigg)(m)\,r^2 + O\left(r^3\right)
\end{aligned}
$$

Demostración.
Se $\{E_1,\ldots,E_n\}$ é unha base paralela ó longo dunha xeodésica temos o seguinte desenvolvemento en serie de Taylor:

$$
R_{ijkl}(p) \;=\; R_{ijkl}(m) + \frac{r}{1!}\,\left(\nabla_u R_{ijkl}\right)(m) + \frac{r^2}{2!}\,\left(\nabla^2_{uu} R_{ijkl}\right)(m) + \ldots
$$

Este resultado, xunto co Lema 1.6.1 permiten, por medio da Ecuación de Gauss (1.22), obter o tensor de curvatura de Riemann dunha esfera xeodésica despois dunha serie de cálculos longos pero elementais. $\square$

Utilizaremos tamén a expansión do tensor de curvatura de Ricci nunha esfera xeodésica, que consiste únicamente en contraer a serie anterior segundo (1.1).

Lema 1.6.5 *Sexa $\widetilde{\rho}$ o tensor de Ricci dunha esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = exp_m(ru)$, entón:*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\rho}_{ij}(p) \;=\;& \frac{n-2}{r^2}\,\delta_{ij} + \left(\rho_{ij} - \frac{1}{3}\,\rho_{uu}\delta_{ij} - \frac{n}{3}\,R_{iuju}\right)(m) \\
& + \left(\nabla_u\rho_{ij} - \frac{1}{4}\,\nabla_u\rho_{uu}\delta_{ij} - \frac{n+1}{4}\,\nabla_u R_{iuju}\right)(m)\,r \\
& + \Bigg(\frac{1}{2}\,\nabla^2_{uu}\rho_{ij} - \frac{1}{10}\,\nabla^2_{uu}\rho_{uu}\delta_{ij} - \frac{n+2}{10}\,\nabla^2_{uu}R_{iuju} + \frac{1}{9}\,\rho_{uu}R_{iuju} \\
& \quad - \frac{1}{45}\sum_{c,d=1}^{n} R^2_{cudu}\delta_{ij} - \frac{n+2}{45}\sum_{c=1}^{n} R_{cuiu}R_{cuju}\Bigg)(m)\,r^2 + O\left(r^3\right)
\end{aligned}
$$

1.6.1 Derivación covariante en esferas xeodésicas

O propósito do que segue é conseguir os desenvolvementos en serie de potencias de tensores en esferas xeodésicas que involucran derivadas covariantes (intrínsecas). Nótese que o método empregado ata o de agora non nos é útil pois non coñecemos unha fórmula explícita para a derivada covariante de tensores nunha esfera xeodésica.

Como anteriormente, sexa $(x^1, \ldots, x^n)$ un sistema de coordenadas normais asociadas á base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ nun punto $m \in M$. Sexa $p = exp_m(ru)$ un punto da esfera xeodésica con $\|u\| = 1$, e supoñamos $e_1 = u$.

Para cada dirección ξ (suficientemente próxima a u) podemos construir unha base en m, $\{e_1(\xi) = \xi, \ldots, e_n(\xi)\}$, que sexa ortonormal e dependa diferenciablemente da anterior, é dicir, se

$$e_a(\xi) = \sum_{b=1}^{n} A_a^b(\xi) e_b, \quad a \in \{1, \ldots, n\}$$

entón $\left(A_a^b\right) \in O(n)$ é diferenciable nun entorno da identidade e $A_a^b(u) = \delta_a^b$.

Para cada ξ sexa $\{E_1(\xi), \ldots, E_n(\xi)\}$ a base obtida mediante desplazamento paralelo de $\{e_1(\xi), \ldots, e_n(\xi)\}$ ó longo da xeodésica $t \mapsto exp_m(t\xi)$. Por simplicidade denotaremos $\{E_1, \ldots, E_n\}$ a $\{E_1(u), \ldots, E_n(u)\}$. Sexa agora $\{F_1, \ldots, F_n\}$ a referencia ortonormal (base das seccións locais do fibrado de referencias ortonormais) obtida desplazando paralelamente $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ó longo de cada xeodésica radial. Verifícase que os F_i son diferenciables [15, páx. 85]. Ademais, se P denota o transporte paralelo ó longo de xeodésicas,

$$E_a(\xi) = P\left(e_a(\xi)\right) = P\left(\sum_{b=1}^{n} A_a^b(\xi) e_b\right) = \sum_{b=1}^{n} A_a^b(\xi) P(e_b) = \sum_{b=1}^{n} A_a^b(\xi) F_b, \quad a \in \{1, \ldots, n\}$$

co cal os E_a son diferenciables para direccións próximas a u, e $\{E_2(\xi)_q, \ldots, E_n(\xi)_q\}$ é base de $T_q G_m(r)$, sendo $q = exp_m(t\,\xi)$.

Denotemos os símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{E_a} E_b &= \sum_{c=2}^{n} \widetilde{\Gamma}_{ab}^c E_c, \quad a, b \in \{2, \ldots, n\} \\ \nabla_{F_a} F_b &= \sum_{c=1}^{n} \Gamma_{ab}^c F_c, \quad a, b \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

onde $\widetilde{\Gamma}_{ab}^c + \widetilde{\Gamma}_{ac}^b = 0$ e $\Gamma_{ab}^c + \Gamma_{ac}^b = 0$, xa que $\{E_1, \ldots, E_n\}$ e $\{F_1, \ldots, F_n\}$ son ortonormais.

Lema 1.6.6 *Empregando as notacións anteriores, verifícase*

$$\begin{aligned} E_a\left(A_b^c\right)(p) &= \widetilde{\Gamma}_{ab}^c(p) - \Gamma_{ab}^c(p) \\ E_a\left(A_b^1\right)(p) &= -\Gamma_{ab}^1(p) - \sigma_{ab}(p) \\ E_a\left(A_1^c\right)(p) &= -\Gamma_{a1}^c(p) + \sigma_{ac}(p) \\ E_a\left(A_1^1\right)(p) &= -\Gamma_{a1}^1(p) \end{aligned}$$

para $a, b, c \in \{2, \dots, n\}$.

Demostración.
Sexan $a, b \in \{2, \dots, n\}$. A menos que explicitamente se especifique o contrario, índices repetidos significan que se realiza unha suma de 1 a n. Por definición da derivada covariante,

$$\left(\widetilde{\nabla}_{E_a} E_b\right)(p) = \sum_{c=2}^{n} \left(\widetilde{\Gamma}^c_{ab} E_c\right)(p) = \sum_{c=2}^{n} \left(\widetilde{\Gamma}^c_{ab} A^i_c F_i\right)(p) = \sum_{i=2}^{n} \widetilde{\Gamma}^i_{ab}(p) F_i(p)$$

pero por outra banda, por definición da Segunda Forma Fundamental

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{\nabla}_{E_a} E_b\right)(p) &= \left(\nabla_{E_a} E_b + \sigma_{ab} E_1\right)(p) \\
&= \left(E_a\left(A^c_b\right) F_c + A^c_b \nabla_{E_a} F_c + \sigma_{ab} E_1\right)(p) \\
&= \left(E_a\left(A^c_b\right) F_c + A^c_b A^d_a \nabla_{F_d} F_c + \sigma_{ab} E_1\right)(p) \\
&= \left(E_a\left(A^i_b\right) + \Gamma^i_{ab} + \sigma_{ab}\delta^i_1\right)(p) F_i(p)
\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
E_a\left(A^c_b\right)(p) &= \widetilde{\Gamma}^c_{ab}(p) - \Gamma^c_{ab}(p), \quad c \in \{2, \dots, n\} \\
E_a\left(A^1_b\right)(p) &= -\Gamma^1_{ab}(p) - \sigma_{ab}(p)
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_a} E_1, E_b \rangle(p) &= \langle\, E_a\left(A^i_1\right) F_i + A^c_1 A^d_a \Gamma^i_{dc} F_i, A^j_b F_j \rangle(p) \\
&= E_a(A^b_1)(p) + \Gamma^b_{a1}(p)
\end{aligned}$$

e empregando (1.23),

$$\langle \nabla_{E_a} E_1, E_b \rangle(p) = \langle T E_a, E_b \rangle(p) = \sigma_{ab}(p)$$

Despexando:

$$E_a(A^b_1)(p) = -\Gamma^b_{a1}(p) + \sigma_{ab}(p)$$

Por último,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_a} E_1, E_1 \rangle(p) &= \langle\, E_a\left(A^i_1\right) F_i + A^c_1 A^d_a \Gamma^i_{dc} F_i, A^j_1 F_j \rangle(p) \\
&= E_a\left(A^1_1\right)(p) + \Gamma^1_{a1}(p) \\
\langle \nabla_{E_a} E_1, E_1 \rangle(p) &= \frac{1}{2} E_a \langle E_1, E_1 \rangle(p) = 0
\end{aligned}$$

en consecuencia

$$E_a\left(A^1_1\right)(p) = -\Gamma^1_{a1}(p)$$

□

Lema 1.6.7 *A derivada covariante do tensor de curvatura dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ en $p = exp_m(ru)$ é:*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_a \widetilde{R}_{ijkl}(p) \;=\; & -\frac{1}{r}\Big(R_{ujkl}\delta_{ai} - R_{uikl}\delta_{aj} + R_{ulij}\delta_{ak} - R_{ukij}\delta_{al} \\
& + \frac{1}{3}R_{ukai}\delta_{jl} + \frac{1}{3}R_{uiak}\delta_{jl} + \frac{1}{3}R_{ulaj}\delta_{ik} + \frac{1}{3}R_{ujal}\delta_{ik} \\
& -\frac{1}{3}R_{ukaj}\delta_{il} - \frac{1}{3}R_{ujak}\delta_{il} - \frac{1}{3}R_{ulai}\delta_{jk} - \frac{1}{3}R_{uial}\delta_{jk}\Big)(m) + \\
& \Big(\nabla_a R_{ijkl} - \delta_{ia}\nabla_u R_{ujkl} + \delta_{ja}\nabla_u R_{uikl} - \delta_{ka}\nabla_u R_{ulij} + \delta_{la}\nabla_u R_{ukij} \\
& - \frac{1}{4}\delta_{jl}\nabla_a R_{uiuk} + \frac{1}{4}\delta_{jk}\nabla_a R_{uiul} + \frac{1}{4}\delta_{il}\nabla_a R_{ujuk} - \frac{1}{4}\delta_{ik}\nabla_a R_{ujul} \\
& - \frac{1}{4}\delta_{jl}\nabla_u R_{ukai} + \frac{1}{4}\delta_{jk}\nabla_u R_{ulai} + \frac{1}{4}\delta_{il}\nabla_u R_{ukaj} - \frac{1}{4}\delta_{ik}\nabla_u R_{ulaj} \\
& - \frac{1}{4}\delta_{jl}\nabla_u R_{uiak} + \frac{1}{4}\delta_{jk}\nabla_u R_{uial} + \frac{1}{4}\delta_{il}\nabla_u R_{ujak} - \frac{1}{4}\delta_{ik}\nabla_u R_{ujal}\Big)(m) \\
& + O(r)
\end{aligned}
$$

Demostración.
Por definición

$$
(1.31)\;\; \widetilde{\nabla}_a \widetilde{R}_{ijkl}(p) = E_a(\widetilde{R}_{ijkl})(p) - \sum_{\alpha=2}^{n}\Big(\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{ai}\widetilde{R}_{\alpha jkl} + \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{aj}\widetilde{R}_{i\alpha kl} + \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{ak}\widetilde{R}_{ij\alpha l} + \widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{al}\widetilde{R}_{ijk\alpha}\Big)(p)
$$

Usamos agora o desenvolvemento en serie de $\widetilde{R}$, e substituimos no primeiro sumando da ecuación anterior. Como exemplo calculamos:

$$
\begin{aligned}
E_a(R_{julu}\delta_{ik})(p) &= E_a(R_{julu})(p) + R_{julu}(p)E_a(\delta_{ik}) \\
&= E_a\left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\epsilon=1}^{n} R_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(m)A_j^{\alpha}A_1^{\beta}A_l^{\gamma}A_1^{\epsilon}\right)(p)\delta_{ik} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\epsilon=1}^{n} R_{\alpha\beta\gamma\epsilon}(m)\Big(E_a(A_j^{\alpha})(p)\,\delta_1^{\beta}\delta_l^{\gamma}\delta_1^{\epsilon} + \delta_j^{\alpha}E_a(A_1^{\beta})(p)\,\delta_l^{\gamma}\delta_1^{\epsilon} \\
&\quad + \delta_j^{\alpha}\delta_1^{\beta}E_a(A_l^{\gamma})(p)\,\delta_1^{\epsilon} + \delta_j^{\alpha}\delta_1^{\beta}\delta_l^{\gamma}E_a(A_1^{\epsilon})(p)\Big)\,\delta_{ik} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n}\Big(R_{\alpha ulu}E_a(A_j^{\alpha})(p)\,\delta_{ik} + R_{j\alpha lu}E_a(A_1^{\alpha})(p)\,\delta_{ik} \\
&\quad + R_{ju\alpha u}E_a(A_l^{\alpha})(p)\,\delta_{ik} + R_{jul\alpha}E_a(A_1^{\alpha})(p)\,\delta_{ik}\Big)
\end{aligned}
$$

Procedemos de xeito análogo para o resto dos termos en $E_a(\widetilde{R}_{ijkl})$ e substituimos en (1.31) a serie do Lema 1.6.4.

Como os campos F_i son diferenciables é posible facer o desenvolvemento en serie de Taylor con residuo dos Γ_{ij}^k, ó longo da xeodésica radial $t \mapsto exp_m(tu)$. Así podemos escribir

$$\Gamma_{ij}^k(p) = \Gamma_{ij}^k(m) + \left(\nabla_u \Gamma_{ij}^k\right)(m)\, r + \dots$$

Agora ben,

$$\Gamma_{ij}^k(m) = \langle \nabla_{e_i} F_j, e_k \rangle = 0$$

xa que F_j é paralelo ó longo de xeodésicas radiais.

Por último, empregamos os lemas 1.6.6 e 1.6.1 deducindo así o resultado. $\square$

Simplemente tomando trazas na anterior ecuación obtense a derivada covariante do tensor de Ricci. Este resultado explicítase no teorema seguinte.

Lema 1.6.8 *A derivada covariante do tensor de Ricci dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ en $p = exp_m(ru)$ é:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_a\, \widetilde{\rho}_{ij}(p) \;=\; & -\frac{1}{r}\left(\rho_{ju}\delta_{ai} + \rho_{iu}\delta_{aj} + \frac{2}{3}\rho_{au}\delta_{ij} + \frac{n}{3}R_{ujai} + \frac{n}{3}R_{uiaj}\right)(m) \\
& + \Big(\nabla_a\rho_{ij} - \frac{1}{4}\nabla_a\rho_{uu}\delta_{ij} - \frac{1}{2}\nabla_u\rho_{au}\delta_{ij} - \nabla_u\rho_{iu}\delta_{aj} - \nabla_u\rho_{ju}\delta_{ai} \\
& - \frac{n+1}{4}\nabla_a R_{uiuj} - \frac{n+1}{4}\nabla_u R_{ujai} - \frac{n+1}{4}\nabla_u R_{uiaj}\Big)(m) + O(r)
\end{aligned}$$

De xeito similar ó Lema 1.6.7 obtense a segunda derivada covariante do tensor de curvatura. A demostración non aporta ningunha técnica nova e por tanto omítese.

Lema 1.6.9 *A segunda derivada covariante do tensor de curvatura dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ en $p = exp_m(ru)$ é:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}^2_{ab}\widetilde{R}_{ijkl}(p) \;=\; & \frac{1}{r^2}\Big(-R_{ajkl}\delta_{bi} - \frac{1}{3}R_{ajbl}\delta_{ik} - \frac{1}{3}R_{bjal}\delta_{ik} + \frac{2}{3}R_{ujul}\delta_{ab}\delta_{ik} \\
& + \frac{1}{3}R_{ajbk}\delta_{il} + \frac{1}{3}R_{bjak}\delta_{il} - \frac{2}{3}R_{ujuk}\delta_{ab}\delta_{il} - \frac{1}{3}R_{ubul}\delta_{ik}\delta_{aj} \\
& + \frac{1}{3}R_{ubuk}\delta_{il}\delta_{aj} - R_{iakl}\delta_{bj} + \frac{1}{3}R_{aibl}\delta_{jk} + \frac{1}{3}R_{bial}\delta_{jk} \\
& - \frac{2}{3}R_{uiul}\delta_{ab}\delta_{jk} + \frac{1}{3}R_{ubul}\delta_{ai}\delta_{jk} - \frac{1}{3}R_{aibk}\delta_{jl} - \frac{1}{3}R_{biak}\delta_{jl} \\
& + \frac{2}{3}R_{uiuk}\delta_{ab}\delta_{jl} - \frac{1}{3}R_{ubuk}\delta_{ai}\delta_{jl} + R_{ujul}\delta_{bi}\delta_{ak} + \frac{1}{3}R_{ujub}\delta_{il}\delta_{ak} \\
& - R_{uiul}\delta_{bj}\delta_{ak} - \frac{1}{3}R_{uiub}\delta_{jl}\delta_{ak} - R_{ijal}\delta_{bk} + R_{ujul}\delta_{ai}\delta_{bk}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - R_{uiul}\delta_{aj}\delta_{bk} - R_{ujuk}\delta_{bi}\delta_{al} - \frac{1}{3}R_{ujub}\delta_{ik}\delta_{al} + R_{uiuk}\delta_{bj}\delta_{al} \\
& + \frac{1}{3}R_{uiub}\delta_{jk}\delta_{al} - R_{ijka}\delta_{bl} - R_{ujuk}\delta_{ai}\delta_{bl} + R_{uiuk}\delta_{aj}\delta_{bl}\Big)(m) \\
+\frac{1}{r}\Big(& -\frac{1}{4}\nabla_a R_{ukbi}\delta_{jl} + \frac{1}{4}\nabla_a R_{ulbi}\delta_{jk} + \frac{1}{4}\nabla_a R_{ukbj}\delta_{il} - \frac{1}{4}\nabla_a R_{ulbj}\delta_{ik} \\
& + \nabla_a R_{ukij}\delta_{bl} - \nabla_a R_{ulij}\delta_{bk} + \nabla_a R_{uikl}\delta_{bj} - \frac{1}{4}\nabla_a R_{uibk}\delta_{jl} \\
& + \frac{1}{4}\nabla_a R_{uibl}\delta_{jk} + \frac{1}{4}\nabla_a R_{ujbk}\delta_{il} - \frac{1}{4}\nabla_a R_{ujbl}\delta_{ik} - \nabla_a R_{ujkl}\delta_{bi} \\
& - \frac{1}{4}\nabla_b R_{ukai}\delta_{jl} + \frac{1}{4}\nabla_b R_{ulai}\delta_{jk} + \frac{1}{4}\nabla_b R_{ukaj}\delta_{il} - \frac{1}{4}\nabla_b R_{ulaj}\delta_{ik} \\
& + \nabla_b R_{ukij}\delta_{al} - \nabla_b R_{ulij}\delta_{ak} + \nabla_b R_{uikl}\delta_{aj} - \frac{1}{4}\nabla_b R_{uiak}\delta_{jl} \\
& + \frac{1}{4}\nabla_b R_{uial}\delta_{jk} + \frac{1}{4}\nabla_b R_{ujak}\delta_{il} - \nabla_b R_{ujkl}\delta_{ia} - \frac{1}{4}\nabla_u R_{aibk}\delta_{jl} \\
& - \frac{1}{4}\nabla_b R_{ujal}\delta_{ik} + \frac{1}{4}\nabla_u R_{aibl}\delta_{jk} + \frac{1}{4}\nabla_u R_{ajbk}\delta_{il} - \frac{1}{4}\nabla_u R_{ajbl}\delta_{ik} \\
& - \nabla_u R_{ajkl}\delta_{bi} - \frac{1}{4}\nabla_u R_{biak}\delta_{jl} + \frac{1}{4}\nabla_u R_{bial}\delta_{jk} + \frac{1}{4}\nabla_u R_{bjak}\delta_{il} \\
& - \frac{1}{4}\nabla_u R_{bjal}\delta_{ik} - \nabla_u R_{iakl}\delta_{bj} - \nabla_u R_{ijal}\delta_{bk} - \nabla_u R_{ijka}\delta_{bl} \\
& - \nabla_u R_{ijkl}\delta_{ab} + \frac{1}{4}\nabla_u R_{ubuk}\delta_{il}\delta_{aj} - \frac{1}{4}\nabla_u R_{ubuk}\delta_{ai}\delta_{jl} \\
& - \frac{1}{4}\nabla_u R_{ubul}\delta_{ik}\delta_{aj} + \frac{1}{4}\nabla_u R_{ubul}\delta_{ai}\delta_{jk} - \frac{1}{4}\nabla_u R_{uiub}\delta_{jl}\delta_{ak} \\
& + \frac{1}{4}\nabla_u R_{uiub}\delta_{jk}\delta_{al} + \frac{3}{4}\nabla_u R_{uiuk}\delta_{ab}\delta_{jl} + \nabla_u R_{uiuk}\delta_{bj}\delta_{al} \\
& + \nabla_u R_{uiuk}\delta_{aj}\delta_{bl} - \frac{3}{4}\nabla_u R_{uiul}\delta_{ab}\delta_{jk} - \nabla_u R_{uiul}\delta_{bj}\delta_{ak} \\
& - \nabla_u R_{uiul}\delta_{aj}\delta_{bk} + \frac{1}{4}\nabla_u R_{ujub}\delta_{il}\delta_{ak} - \frac{1}{4}\nabla_u R_{ujub}\delta_{ik}\delta_{al} \\
& - \frac{3}{4}\nabla_u R_{ujuk}\delta_{ab}\delta_{il} - \nabla_u R_{ujuk}\delta_{bi}\delta_{al} - \nabla_u R_{ujuk}\delta_{ai}\delta_{bl} \\
& + \frac{3}{4}\nabla_u R_{ujul}\delta_{ab}\delta_{ik} + \nabla_u R_{ujul}\delta_{bi}\delta_{ak} + \nabla_u R_{ujul}\delta_{ai}\delta_{bk}\Big)(m) + O(1)
\end{aligned}
$$

Simplemente tomando trazas na anterior fórmula obtense o Laplaciano do tensor de curvatura que se inclúe para completar fórmulas posteriores.

Lema 1.6.10 *O Laplaciano do tensor de curvatura dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ en $p = exp_m(ru)$ é:*

$$
\widetilde{\Delta}\widetilde{R}_{ijkl}(p) = \frac{1}{r^2}\Big(-4R_{ijkl} + \frac{2(n+2)}{3}R_{ujul}\delta_{ik} - \frac{2(n+2)}{3}R_{ujuk}\delta_{il} - \frac{2(n+2)}{3}R_{uiul}\delta_{jk}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2(n+2)}{3}R_{uiuk}\delta_{jl}-\frac{2}{3}\rho_{ik}\delta_{jl}+\frac{2}{3}\rho_{il}\delta_{jk}+\frac{2}{3}\rho_{jk}\delta_{il}-\frac{2}{3}\rho_{jl}\delta_{ik}\Big)(m)\\
+\frac{1}{r}\Big(&-2\nabla_i R_{ujkl}+\frac{1}{2}\nabla_i\rho_{ku}\delta_{jl}-\frac{1}{2}\nabla_i\rho_{lu}\delta_{jk}+2\nabla_j R_{uikl}-\frac{1}{2}\nabla_j\rho_{ku}\delta_{il}\\
&+\frac{1}{2}\nabla_j\rho_{lu}\delta_{ik}-2\nabla_k R_{ulij}+\frac{1}{2}\nabla_k\rho_{iu}\delta_{jl}-\frac{1}{2}\nabla_k\rho_{ju}\delta_{il}+2\nabla_l R_{ukij}\\
&-\frac{1}{2}\nabla_l\rho_{iu}\delta_{jk}+\frac{1}{2}\nabla_l\rho_{ju}\delta_{ik}-(n+3)\nabla_u R_{ijkl}\\
&+\frac{3(n+3)}{4}\nabla_u R_{uiuk}\delta_{jl}-\frac{3(n+3)}{4}\nabla_u R_{uiul}\delta_{jk}-\frac{3(n+3)}{4}\nabla_u R_{ujuk}\delta_{il}\\
&+\frac{3(n+3)}{4}\nabla_u R_{ujul}\delta_{ik}-\frac{3}{2}\nabla_u\rho_{ik}\delta_{jl}+\frac{3}{2}\nabla_u\rho_{il}\delta_{jk}+\frac{3}{2}\nabla_u\rho_{jk}\delta_{il}\\
&-\frac{3}{2}\nabla_u\rho_{jl}\delta_{ik}\Big)(m)+O(1)
\end{aligned}
$$

De novo, sen máis que contraer a anterior fórmula obtemos a expresión do Laplaciano do tensor de Ricci.

Lema 1.6.11 *O Laplaciano do tensor de curvatura dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ en $p = exp_m(ru)$ é:*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}\widetilde{\rho}_{ij}(p) \;=\;& \frac{2}{3\,r^2}\Big(n(n-1)R_{uiuj}-\tau\delta_{ij}-(n+3)\rho_{ij}+(n+3)\rho_{uu}\delta_{ij}\Big)(m)\\
&+\frac{1}{r}\Big(-\frac{5(n+1)}{2}\nabla_u\rho_{ij}+\frac{n-3}{2}\nabla_i\rho_{ju}+\frac{n-3}{2}\nabla_j\rho_{iu}+\frac{3n+11}{4}\nabla_u\rho_{uu}\delta_{ij}\\
&\quad-\nabla_u\,\tau\delta_{ij}+\frac{(n+1)(3n+1)}{4}\nabla_u R_{uiuj}\Big)(m)+O(1)
\end{aligned}
$$

1.7 Algunhas clases especiais de variedades

A última parte desta memoria estará adicada a caracterizar os espacios modelo a partir do que chamaremos as curvaturas totais de esferas xeodésicas. Por esta razón introducimos brevemente tales espacios modelo co fin de enfatizar aqueles resultados que posteriormente serán de utilidade para levar a cabo aquelas caracterizacións.

Unha variedade de Riemann (M, g) dise *homoxénea dous puntos* se para calquera $p, q, p', q' \in M$ verificando que $d(p, q) = d(p', q')$ existe unha isometría ϕ de M tal que $\phi(p) = p'$ e $\phi(q) = q'$.

Esta condición tan restrictiva dá lugar a fortes imposicións sobre a xeometría da variedade de tal sorte que as variedades homoxéneas dous puntos están totalmente clasificadas. En [18] probouse que toda variedade homoxénea dous puntos é localmente simétrica. Aínda máis, toda variedade homoxénea dous puntos é localmente isométrica a unha das seguintes variedades:

(i) Un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

(ii) Unha variedade de curvatura seccional constante, logo localmente isométrica á esfera $\mathbb{S}^n = SO(n+1)/SO(n)$ ou ó espacio proxectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = SO(n+1)/O(n)$ se a curvatura é positiva ou ó espacio hiperbólico real $\mathbb{H}^n(\mathbb{R}) = SO^1(n+1)/SO(n)$ se a curvatura é negativa.

(iii) Unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante, por tanto, localmente isométrica ó espacio proxectivo complexo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = SU(n+1)/U(n)$ ou ó espacio hiperbólico complexo $\mathbb{H}^n(\mathbb{C}) = SU^1(n+1)/SU(n)$.

(iv) Unha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q–seccional constante, por tanto, localmente isométrica ó espacio proxectivo cuaterniónico $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) = Sp(n+1)/Sp(n)\times Sp(1)$ ou ó espacio hiperbólico cuaterniónico $\mathbb{H}^n(\mathbb{Q}) = Sp^1(n+1)/Sp(n)\times Sp(1)$.

(v) O plano de Cayley proxectivo $\mathbb{P}^2(Cay) = F_4/Spin(9)$ ou o plano de Cayley hiperbólico $\mathbb{H}^2(Cay) = F_4^*/Spin(9)$.

Por definición, unha variedade que estea na lista anterior dise que é un *espacio modelo.*

Empezaremos antes de nada polas variedades Einstein, xa que elas tamén teñen un importante valor por elas mesmas e porque serán esenciais na caracterización do resto dos espacios modelo. Ó final da sección damos tamén uns breves apuntes sobre variedades conformemente chás e Bochner chás, xa que estas tamén entrarán en consideración máis adiante.

1.7.1 Variedades de Einstein

Unha variedade $(M^n, g), n > 2$, dise unha *variedade Einstein*, se o seu tensor de Ricci é proporcional ó tensor métrico, isto é,

$$\rho = \lambda\, g \tag{1.32}$$

onde $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función diferenciable. Contraendo a anterior igualdade, é claro que $\lambda = \frac{\tau}{n}$. Ademais, como $n > 2$, τ resulta ser constante en virtude do Lema de Schur.

É importante sinalar que toda variedade Einstein é analítica en coordenadas normais [8]. Ademais, como toda variedade Einstein verifica

$$\rho(X,Y) = \frac{\tau}{n}\, g(X,Y)$$

a norma do tensor de Ricci, $\|\rho\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij}^2$, dunha variedade Einstein cumple que

$$\|\rho\|^2 = \frac{\tau^2}{n}$$

En xeral, é posible detectar as variedades Einstein a partir da relación anterior. Dado que dita caracterización será necesitada ó longo desta memoria, é importante destacar:

Proposición 1.7.1 [2] *Para calquera variedade de Riemann M^n, con $n > 2$, temos que*

$$\|\rho\|^2 \geq \frac{1}{n}\tau^2$$

con igualdade se e só se M é Einstein.

Observación 1.7.2 Coa definición dada anteriormente, todas as variedades de dimensión 2 resultarían ser Einstein. Por esta razón, unha variedade Einstein de dimensión 2 é aquela que verifica (1.32) esixindo ademais que λ sexa constante. Así, as variedades Einstein en dimensión dous compórtanse como as superfices de curvatura de Gauss constante.

En dimensión 3, a situación non é tan ríxida, aínda que o tensor de Ricci determina por completo o tensor de curvatura:

$$R = R^1 - \frac{\tau}{2} R^0$$

onde R^0 e R^1 son os tensores curvatura alxebraicos dados por:

$$\begin{aligned} R^0(X,Y,Z,W) &= g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z) \\ R^1(X,Y,Z,W) &= \rho(X,Z)g(Y,W) + g(X,Z)\rho(Y,W) \\ &\quad -\rho(X,W)g(Y,Z) - g(X,W)\rho(Y,Z) \end{aligned}$$

A situación en dimensión 4 é moito máis complexa, se ben existen importantes relacións entre a curvatura e a topoloxía da variedade subxacente (xeneralizacións do Teorema de Gauss–Bonnet), que resultan especialmente simples cando a variedade é Einstein. Así, a característica de Euler dunha variedade 4–dimensional compacta e orientada verifica [7]

$$\chi(M^4) = \frac{1}{32\,\pi^2} \int_M \left\{ \tau^2 - 4\,\|\rho\|^2 + \|R\|^2 \right\} dM$$

Esta ecuación resulta especialmente sinxela se a variedade é Einstein, pois en tal caso, a integral de $\|R\|^2$ é determinada completamente pola característica de Euler de M^4.

1.7.2 Variedades de curvatura seccional constante

Sexa $(M^n, g), n \geq 2$, unha variedade de Riemann.

Se Σ_m é un plano xerado por dous vectores linearmente independentes $X, Y \in T_mM$, definimos a *curvatura seccional* de Σ_m como

$$K(\Sigma_m) = K(X,Y) = \frac{R_{XYXY}}{g(X,X)\,g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

Pódese ver que, en efecto, esta definición non depende da base elexida do plano Σ_m. Por outra banda, a curvatura seccional do plano tanxente Σ_m corresponde coa curvatura de Gauss no punto m da superficie obtida ó proxectar o plano Σ_m pola aplicación exponencial.

Se $K(\Sigma_m)$ é constante para todos os planos $\Sigma_m \subset T_mM$ e para todos os puntos $m \in M$, M dise un *espacio de curvatura seccional constante* ou unha *forma espacial real*. Ademais, un Lema de Schur establece que, se a curvatura seccional dunha variedade Riemanniana conexa de dimensión maior ou igual ca tres é puntualmente constante, entón a variedade ten curvatura seccional constante.

Proposición 1.7.3 *Sexa $(M^n, g), n \geq 2$, unha variedade Riemanniana conexa de curvatura seccional constante λ. Entón o tensor de curvatura de Riemann vén dado por*

$$R_{XY}Z = \lambda \{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\}$$

Reciprocamente, unha variedade cun tensor de curvatura como o anterior ten curvatura seccional constante λ.

En [2] podemos atopar o útil resultado seguinte que caracteriza as variedades de curvatura seccional constante en termos de certas relacións entre os invariantes escalares de segunda orde. Véxase tamén [6].

Proposición 1.7.4 [6] *Para calquera variedade de Riemann M^n, con $n > 2$ temos que*

$$\|R\|^2 \geq \frac{2}{n-1}\|\rho\|^2, \qquad \|R\|^2 \geq \frac{2}{n(n-1)}\tau^2$$

con igualdade se e só se M ten curvatura seccional constante.

Facemos notar tamén neste punto o feito de que toda esfera xeodésica nunha variedade de curvatura constante é umbílica e de curvatura constante. Ademais, pódense obter os seguintes dous resultados [6].

Teorema 1.7.5 *Unha variedade Riemanniana de dimensión $n \geq 3$ é unha variedade de curvatura seccional constante se e só se toda esfera xeodésica suficientemente pequena é umbílica.*

Teorema 1.7.6 *Unha variedade Riemanniana de dimensión $n \geq 3$ é unha variedade de curvatura seccional constante se e só se toda esfera xeodésica suficientemente pequena é Einstein.*

1.7.3 Variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante

Unha variedade $2n$–dimensional dirase unha *variedade complexa* cando sobre ela sexa posible construir un sistema de coordenadas complexas, isto é, un atlas de homeomorfismos valuados en $\mathbb{C}^n$ de tal xeito que os cambios de coordenadas sexan funcións holomorfas. Tal condición supón unha reducción do grupo estructural da variedade ó grupo linear complexo $Gl(n, \mathbb{C})$. Así, unha variedade dirase unha *variedade case complexa* se o seu grupo de estructura admite unha reducción a $Gl(n, \mathbb{C})$. Tal reducción é equivalente á existencia dun campo de tensores J de tipo $(1, 1)$ de tal xeito que $J^2 = -I$. Este chamarase *estructura case complexa*, e o par (M, J), *variedade case complexa.*

A existencia dunha estructura case complexa non permite , en xeral, asegurar que unha variedade é unha variedade complexa. De feito, unha condición necesaria e suficiente para que isto ocorra é que se anule o tensor de Nijenhuis [20], é dicir, $[J, J] = 0$, sendo

$$[J, J](X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y].$$

En tal caso, dirase que J é unha *estructura complexa* e que (M, J) é unha *variedade complexa.*

Dicimos que unha métrica de Riemann g en (M, J) é unha *métrica case hermítica* se $g(JX, JY) = g(X, Y)$, para calquera campos de vectores X, Y en M. Agora, o triple (M, g, J) chámase *variedade case hermítica.* Nunha variedade case hermítica defínese a *forma de Kähler* como

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY),$$

que é unha 2–forma non dexenerada. Dise que (g, J) é unha *estrutura Kähler* se J é unha estructura complexa e a 2–forma de Kähler asociada é pechada. A expresión

$$2\, g((\nabla_X J)Y, Z) = -3\, d\Omega(X, Y, Z) + 3\, d\Omega(X, JY, JZ) + g(JX, [J, J](Y, Z))$$

permite caracterizar as variedades Kähler mediante a propiedade $\nabla J = 0$.

Debido a esta última caracterización, podemos obter as *identidades de Kähler* do tensor de curvatura:

$$R(X, Y, JZ, JW) = R(JX, JY, Z, W) = R(X, Y, Z, W)$$

$$\rho(JX, JY) = \rho(X, Y)$$

para X, Y, Z, W campos de vectores arbitrarios. Estas condicións son fortemente restrictivas, xa que, por exemplo, unha variedade Kähler de curvatura seccional constante de dimensión complexa maior ca 1 é necesariamente chá. Isto significa que o estudio da curvatura seccional non é moi interesante no caso das variedades Kähler, razón pola cal se introduce o concepto moito máis convinte de curvatura seccional holomorfa.

A *curvatura seccional holomorfa* determinada por X é, por definición, a curvatura seccional do plano xerado por $\{X, JX\}$, e denotarase $H(X)$. Se $H(X)$ é constante para todo $X \in T_m M$ e todo $m \in M$, a variedade dirase un *espacio de curvatura seccional holomorfa constante* ou unha *forma espacial complexa.* Un análogo do Lema de Schur establece que para que a curvatura seccional holomorfa sexa constante nunha variedade Kähler conexa, é suficiente con que sexa puntualmente constante.

Proposición 1.7.7 *Sexa $(M^{2n}, g, J), n \geq 2$, unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ. Entón o tensor de curvatura vén dado por*

$$\begin{aligned} R_{XY}Z &= \frac{\mu}{4}\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X \\ &\quad + g(JX,Z)JY - g(JY,Z)JX + 2\,g(JX,Y)JZ\} \end{aligned}$$

Reciprocamente, unha variedade Kähler cun tensor de curvatura como o anterior ten curvatura seccional holomorfa constante μ.

De novo é posible caracterizar as variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante en termos de certas relacións entre os invariantes escalares de segunda orde.

Proposición 1.7.8 [6] *Se M é unha variedade Kähler de dimensión complexa n,*

$$\|R\|^2 \geq \frac{4}{n+1}\|\rho\|^2$$

con igualdade se e só se M ten curvatura seccional holomorfa constante.

1.7.4 Variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura Q-seccional constante

Unha *estructura case cuaterniónica* V sobre unha variedade diferenciable M é un subfibrado 3–dimensional do fibrado de endomorfismos do fibrado tanxente, xerado localmente por tres estructuras case complexas $\{J_1, J_2, J_3\}$ de xeito que

$$J_i J_j = -J_j J_i = J_k$$

onde (i, j, k) é unha permutación cíclica de (1,2,3). A unha base como $\{J_1, J_2, J_3\}$ chámaselle unha *base adaptada*. O par (M, V) denomínase unha *variedade case cuaterniónica*. Se ademais existe unha conexión libre de torsión ∇ que deixa invariante a estructura case cuaterniónica V, diremos que tal estructura V é unha *estructura cuaterniónica* e que o par (M, V) é unha *variedade cuaterniónica*.

Unha métrica de Riemann g sobre M dise *hermítica* con respecto á estructura case cuaterniónica V se

$$g(J_iX, J_iY) = g(X,Y), \quad i \in \{1,2,3\}$$

para calquera campos de vectores X, Y na variedade e calquera base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ de V. Neste caso dicimos que (g, V) é unha *estructura case cuaterniónica hermítica* e que (M, g, V) é unha *variedade case cuaterniónica hermítica*. Se alén disto, V é unha estructura cuaterniónica con respecto á conexión de Levi–Civita determinada por g, o par (g, V) chámase *estructura cuaterniónica Kähler* e a terna (M, g, V) unha *variedade cuaterniónica Kähler*. Nótese que toda variedade case cuaterniónica ten como dimensión un múltiplo de 4.

Nunha variedade case cuaterniónica hermítica o caracter invariante do fibrado V pola conexión de Levi–Civita determinada por g é equivalente a que

$$\begin{array}{rcl} \nabla_X J_1 &=& \qquad\qquad r(X)J_2 \quad -q(X)J_3 \\ \nabla_X J_2 &=& -r(X)J_1 \qquad\qquad +p(X)J_3 \\ \nabla_X J_3 &=& q(X)J_1 \quad -p(X)J_2 \end{array}$$

para calquera campo de vectores X e calquera base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$, e sendo p, q, r 1-formas locais.

Definimos unha *Q-sección* nun punto $m \in M$ determinada por un $u \in T_mM$ non nulo, como o menor subespacio non trivial de T_mM que contén a u e é invariante baixo todos os tensores de V. Por tanto, unha Q-sección en $m \in M$ determinada por $u \in T_mM$ é do tipo:

$$Q_m(u) = \{a_0u + a_1J_1u + a_2J_2u + a_3J_3u : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

Dicimos que unha variedade cuaterniónica Kähler ten *curvatura Q-seccional constante* en m con respecto de u, se todos os planos de $Q_m(u)$ teñen a mesma curvatura seccional constante. Unha *variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q-seccional constante* ou unha *forma espacial cuaterniónica* é unha variedade cuaterniónica Kähler que ten curvatura Q-seccional constante con respecto de todos os puntos e todas as direccións. Como anteriormente, tamén temos un análogo ó Lema de Schur: se a variedade ten dimensión maior ou igual ca oito, é suficiente para que teña curvatura Q-seccional constante, con que teña curvatura Q-seccional constante con respecto a todas as direccións en cada punto.

En dimensión catro, as variedades cuaterniónicas Kähler correspóndense coas variedades orientables, e a curvatura Q-seccional é constante se e só se o é a curvatura seccional. Cando a dimensión é maior ou igual ca 8, verifícanse dúas propiedades importantes [20]: por un lado, que a variedade é Einstein, e, en segundo lugar, que a curvatura seccional de tales variedades é constante se e só se é nula. Este último feito motiva que só esteamos interesados en estudiar a curvatura Q-seccional. O seguinte teorema caracteriza as variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura Q-seccional constante.

Proposición 1.7.9 *Sexa $(M^{4n}, g, V), n \geq 2$, unha variedade cuaterniónica Kähler conexa con curvatura Q-seccional constante ν. Entón, o tensor de curvatura ten a forma:*

$$\begin{aligned} R_{XY}Z &= \frac{\nu}{4}\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\} \\ &\quad + \frac{\nu}{4}\sum_{i=1}^{3}\{g(J_iX,Z)J_iY - g(J_iY,Z)J_iX + 2\,g(J_iX,Y)J_iZ\} \end{aligned}$$

para calquera base adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ do fibrado V. Reciprocamente, se o tensor de curvatura dunha variedade cuaterniónica Kähler é como o anterior, entón a variedade ten curvatura Q-seccional constante ν.

O seguinte resultado podemos atopalo en [6].

Proposición 1.7.10 *Se M é unha variedade cuaterniónica Kähler de dimensión real $4n$, entón*

$$\|R\|^2 \geq \frac{5\,n+1}{4\,n(n+2)^2}\tau^2$$

e a igualdade cúmplese se e só se M ten curvatura Q-seccional constante.

1.7.5 Variedades conformemente chás

Unha aplicación diferenciable $F : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ entre variedades de Riemann dise unha *aplicación conforme* se $F^*h = \phi^2 g$ para certa función diferenciable $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Se ademais ϕ é constante, a aplicación F dise unha *homotecia*.

Dada unha variedade de Riemann M de dimensión n con tensor métrico g, e ϕ unha función en M, $h := \phi^2 g$ define outra métrica en M que non cambia o ángulo entre dous vectores tanxentes nun punto. Dise que h é un cambio conforme de métrica en M ou que h está *conformemente relacionada* con g. Se unha métrica Riemanniana está conformemente relacionada con outra métrica que é localmente chá, entón a variedade Riemanniana dise que é *conformemente chá*.

Defínese o *tensor de Weyl* en M como o campo de tensores de tipo (0,4)

$$\begin{aligned} C(X,Y,Z,W) &= R(X,Y,Z,W) + \frac{1}{n-2}\Big(\rho(X,Z)g(Y,W) + \rho(Y,W)g(X,Z) \\ &\quad -\rho(X,W)g(Y,Z) - \rho(Y,Z)g(X,W)\Big) \\ &\quad -\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\Big(g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\Big) \end{aligned}$$

para calquera campos de vectores X, Y, Z e W. Dito doutro xeito,

$$C = R + \frac{1}{n-2}R^1 - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}R^0$$

sendo R^0 e R^1 os tensores de curvatura alxebraicos definidos na Observación 1.7.2.

Nótese que para $n = 3$ o tensor de Weyl é identicamente nulo, tal e como se fixo notar na anteriormente citada Observación 1.7.2. En xeral, sen embargo, o tensor de Weyl encerra máis información xeométrica sobre a variedade. De feito, o tensor de Weyl é invariante baixo calquera cambio conforme da métrica. Ademais temos o seguinte resultado [20].

Teorema 1.7.11 *Unha variedade M de dimensión $n > 3$ é conformemente chá se e só se o tensor de Weyl é idénticamante nulo.*

Para os nosos propósitos será máis útil o seguinte resultado.

Corolario 1.7.12 *Unha variedade de dimensión $n > 3$ é conformemente chá se e só se*

$$\|R\|^2 = \frac{4}{n-2}\,\|\rho\|^2 - \frac{2}{(n-2)(n-1)}\,\tau^2$$

1.7.6 Variedades Bochner chás

Sexa (M^{2n}, g, J) unha variedade Kähler de dimensión complexa n. Defínese o *tensor de Bochner*, B, como o campo de tensores de tipo (0,4) dado pola fórmula:

$$\begin{aligned} B(X,Y,Z,W) &= R(X,Y,Z,W) + \frac{1}{4(n+2)}\Big(\rho(X,Z)g(Y,W) + \rho(Y,W)g(X,Z) \\ &\quad -\rho(X,W)g(Y,Z) - \rho(Y,Z)g(X,W) \\ &\quad +\rho(X,JZ)g(Y,JW) + \rho(Y,JW)g(X,JZ) \\ &\quad -\rho(X,JW)g(Y,JZ) - \rho(Y,JZ)g(X,JW) \\ &\quad +2\rho(JX,Y)g(JZ,W) + 2\rho(JZ,W)g(JX,Y)\Big) \\ &\quad - \frac{\tau}{4(n+1)(n+2)}\Big(g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z) \\ &\quad +g(JX,Z)g(JY,W) - g(JX,W)g(JY,Z) + 2\, g(JX,Y)g(JZ,W)\Big) \end{aligned}$$

Diremos que unha variedade Kähler é *Bochner chá* se e só se o seu tensor de Bochner é identicamente nulo.

Tomando trazas na expresión do tensor de Bochner obtense o seguinte resultado que será o que empregaremos no resto da memoria.

Proposición 1.7.13 *Unha variedade Kähler de dimensión complexa $n > 2$ é Bochner chá se e só se*

$$\|R\|^2 = \frac{8}{n+2}\,\|\rho\|^2 - \frac{2}{(n+2)(n+1)}\,\tau^2$$

1.8 Integración en variedades de Riemann

Unha variedade diferenciable M de dimensión n dise *orientable* se existe unha n–forma, chamada *forma de volume* que é non nula en cada punto. Unha *orientación* é unha clase de equivalencia de n–formas baixo a relación:

$$\omega \sim \eta :\Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{F}(M) \mid f > 0,\, \eta = f\omega$$

onde $\mathcal{F}(M)$ denota o conxunto de todas as funcións diferenciables sobre M. Unha variedade pode non ser orientable, e aínda séndoo pode ter distintas orientacións. Así, unha variedade dise *orientada* se é orientable e nela se escolleu unha determinada orientación $[\omega]$. Unha base ordenada do tanxente $(E_1, \ldots, E_n)$ dise *positivamante orientada* se $\omega(E_1, \ldots, E_n) > 0$, e unha carta $(x^1, \ldots, x^n)$ dise *positivamente orientada* se $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ é positivamente orientada. No que segue asumirase que cando unha variedade sexa orientada, todas as formas de volume consideradas son compatibles coa súa orientación.

En xeral, nunha variedade diferenciable orientada, a elección dun elemento de volume permítenos integrar funcións nesa variedade. Este xeito de integrar, sen embargo, non é a priori canónico, xa que a medida dos conxuntos e as integrais de funcións dependen esencialmente deste. Sen embargo, no caso dunha variedade de Riemann pódese elexir un elemento de volume natural tal e como amosa o seguinte lema.

Lema 1.8.1 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann orientada. Entón, existe unha única forma de volume ω tal que $\omega\,(E_1, \ldots, E_n) = 1$ para toda base ortonormal positivamente orientada $(E_1, \ldots, E_n)$. Con respecto a unha carta $\big(U, (x^1, \ldots, x^n)\big)$ a forma anterior escríbese:*

$$\omega = \sqrt{\det(g_{ij})}\; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

A n–forma anterior chámase o *elemento de volume Riemanniano*, aínda que por comodidade chamarémoslle simplemente elemento de volume.

O lema anterior de feito xustifica o nome que se lle deu á función densidade de volume definida en (1.17).

Nunha variedade orientada podemos integrar n–formas con soporte compacto, xa que as variedades son localmente Euclídeas. A continuación describimos brevemente o procedemento. Unha explicación máis rigurosa pode ser atopada en calquera tratado sobre variedades.

Supoñamos que o soporte dunha n–forma ω está contido nunha carta positivamante orientada $\big(U, \phi = (x^1, \ldots, x^n)\big)$. Entón defínese

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} \left(\phi^{-1}\right)^* \left(\omega\big(\tfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x^n}\big)\right)$$

No caso xeral de que o soporte da forma non estea contido nunha carta, defínese a integral empregando unha partición da unidade $\{f_i\}$ subordinada a un recubrimento por abertos coordenados $\{(U_i, \phi_i)\}$:

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{\phi_i(U_i)} f_i\, \omega$$

Pode en efecto comprobarse que esta definición é correcta e que non depende dos elementos elexidos na súa definición, agás a orientación da variedade.

O significado da forma de volume Riemanniana é que nos permite definir a integral de funcións, non soamente de formas. Se f é unha función diferenciable con soporte compacto nunha variedade de Riemann orientada (M, g), entón $f\omega$ é unha n–forma con soporte compacto, sendo ω a forma de volume de M. Entón, defínese a *integral* de f como:

$$\int_M f = \int_M f\, \omega$$

Análogamente, defínese o *volume* de M como

$$\mathrm{vol}(M) = \int_M \omega$$

O seguinte teorema é unha versión simplificada do Teorema de Stokes. A partir del é sinxelo deducir os resultados que seguen.

Teorema 1.8.2 *Sexa M unha variedade diferenciable orientada compacta de dimensión n. Sexa ω unha $(n-1)$–forma en M. Entón,*

$$\int_M d\omega = 0$$

O Teorema anterior ten coñecidas consecuencias no ámbito das variedades de Riemann. Entre elas destacamos

Corolario 1.8.3 *Sexa M unha variedade de Riemann compacta. Entón*

(i) (Teorema da Diverxencia) *Se X é un campo de vectores entón*

$$\int_M \mathrm{div}\, X = 0$$

(ii) Se f é unha función diferenciable entón

$$\int_M \Delta f = 0$$

(iii) (Identidade de Green) *Sexan f e g dúas funcións diferenciables entón*

$$\int_M f\,\Delta\, g = \int_M g\,\Delta\, f = -\int_M \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, g\rangle$$

Corolario 1.8.4 *Sexa M unha variedade de Riemann orientada e compacta. Sexan ω un tensor de tipo $(0,k)$ e η un tensor de tipo $(0,k+1)$. Entón:*

$$\int_M \langle \nabla\omega, \eta\rangle = -\int_M \langle \omega, \mathrm{div}\,\eta\rangle$$

Demostración.
Sexa $\{E_1,\ldots,E_n\}$ unha base ortonormal. Definimos a seguinte 1–forma:

$$\alpha(X) = \langle \omega, \imath_X \eta\rangle = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \omega_{i_1\ldots i_k}\eta_{Xi_1\ldots i_k}$$

É claro que, se X e Y son campos de vectores arbitrarios verifícase:

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = \langle \nabla_X \omega, \imath_Y \eta \rangle + \langle \omega, \imath_Y \nabla_X \eta \rangle$$

A continuación consideramos o campo de vectores dual a α, $A := {}^\natural \alpha$. Usando a expresión anterior temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A &= \sum_{j=1}^{n} \big(\nabla_{E_j} \alpha\big)(E_j) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_k,j=1}^{n} (\nabla_j \,\omega)_{i_1\ldots i_k} \eta_{j\, i_1\ldots i_k} + \sum_{i_1,\ldots,i_k,j=1}^{n} \omega_{i_1\ldots i_k} (\nabla_j \,\eta)_{j\, i_1\ldots i_k} \\ &= \langle \nabla\omega, \eta \rangle + \langle \omega, \operatorname{div} \eta \rangle \end{aligned}$$

Agora ben, polo Teorema da Diverxencia 1.8.3 obtemos

$$0 = \int_M \operatorname{div} A = \int_M \Big(\langle \nabla\omega, \eta \rangle + \langle \omega, \operatorname{div} \eta \rangle \Big)$$

que é equivalente ó resultado. □

Observación 1.8.5 O resultado anterior pode ser escrito utilizando unha base ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ dun xeito máis cómodo para os nosos propósitos:

$$\int_M \nabla_j \,\omega_{i_1\ldots i_k} \,\eta_{j\, i_1\ldots i_k} = -\int_M \omega_{i_1\ldots i_k} \,\nabla_j \,\eta_{j\, i_1\ldots i_k}$$

onde se entende que se suma en todos os índices.

Capítulo 2

Invariantes escalares totais

A curvatura de Gauss K dunha superficie arbitraria nun punto m pode ser expresada en termos da lonxitude dun círculo xeodésico de radio r en m como

$$K(m) = \lim_{r \to 0} \frac{3\,(2\pi r - S_m(r))}{\pi r^3}$$

o que nos dá unha definición moi xeométrica deste concepto. Ademais, a fórmula anterior evidencia a próxima relación existente entre a curvatura de Gauss dunha superficie e a lonxitude dos pequenos círculos xeodésicos que se atopan nela.

A existencia de relacións entre a curvatura dunha variedade e a xeometría das súas esferas xeodésicas levou a unha serie de autores a considerar o seguinte problema:

¿Ata que punto a xeometría dunha variedade Riemanniana está influenciada, ou incluso determinada, polas propiedades de certas familias de obxectos xeométricos definidos naturalmente dentro desa variedade?

No noso traballo trataremos en certa medida o anterior problema para o caso das esferas xeodésicas, aínda que é posible considerar outro tipo de obxectos, tales como discos ou tubos.

No que nun siso amplo se soen chamar os espacios modelo (no noso caso os espacios homoxéneos dous puntos), é esperable que as esferas xeodésicas teñan un alto grao de simetría herdada en grande medida das propias simetrías da variedade ambiente. Reciprocamente, tamén é esperable que aquelas variedades que teñen esferas xeodésicas con estructuras altamente simétricas sexan elas mesmas altamente simétricas (é dicir, sexan localmente isométricas ós espacios modelo).

Facemos notar neste punto que unha esfera xeodésica nunha variedade de Riemann é tamén unha variedade de Riemann. Os invariantes escalares consitúen un dos mellores exemplos en canto ó que se refire a obxectos xeométricos asociados a unha variedade, e como tales ten tamén siso estudiar estes no contexto das esferas xeodésicas. En particular estamos interesados en calcular as integrais dos invariantes escalares da curvatura nunha esfera xeodésica. A integración de funcións definidas en esferas xeodésicas foi feita, por exemplo, en [6] e [11] para invariantes da curvatura extrínsecos (en concreto para a curvatura media e norma cuadrática da segunda forma fundamental) e para a curvatura escalar (un invariante intrínseco de primeira orde). No que segue estudiaremos as integrais nunha esfera xeodésica dos invariantes de primeira, segunda e terceira orde. Tales integrais son o que se chaman as curvaturas totais. Por tanto, no marco do problema xeral establecido anteriormente, nós pretendemos resolver a seguinte pregunta:

¿Podemos determinar, usando as curvaturas totais de pequenas esferas xeodésicas, se unha variedade de Riemann dada é localmente isométrica a un espacio modelo?

Para resolver esta cuestión, adicaremos este capítulo a dar as fórmulas dos desenvolvementos en serie de potencias das integrais dos invariantes escalares, que empregaremos no capítulo seguinte para caracterizar os espacios modelo e deste xeito tratar de contestar afirmativamente á anterior pregunta.

Máis explicitamente, na Sección 2.1 comenzamos dando unha fórmula xeral para a integración de funcións en esferas xeodésicas, para posteriormente introducir os invariantes escalares totais en esferas xeodésicas e poder así establecer algunhas das propiedades que verifica o seu desenvolvemento en serie de potencias. O resto do capítulo estará adicado a dar as expresións explícitas para os invariantes totais de primeira, segunda e terceira orde. Isto farase respectivamente nas seccións 2.2, 2.3 e 2.4. O estudio dos invariantes de primeira orde xa era coñecido en [6] ou [11], mentres que os invariantes de segunda orde foron estudiados recentemente en [9] e [10]. Aquí completamos os anteriores estudios dando os desenvolvementos en serie de potencias dos invariantes de orde tres en esferas xeodésicas, así como as correspondentes curvaturas escalares totais. Tamén se presentan na Sección 2.4 algunhas relacións existentes entre as anteriormente ditas curvaturas totais de orde tres.

2.1 Consideracións xerais

De agora en diante denotaremos por

$$c_{n-1} = \frac{n\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

o volume da esfera unidade $S^{n-1}(1)$ no espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Aquí $\left(\frac{n}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$, onde Γ é a función gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} |t|^{2\alpha-1} dt$$

Véxase [12] para unha discusión máis detallada deste cálculo.

O seguinte lema danos unha fórmula explícita para calcular o desenvolvemento en serie de potencias da integral dunha función nunha esfera xeodésica. O procedemento para conseguilo está explicado esencialmente en [12] ou [13].

Lema 2.1.1 *Sexa f a función na esfera xeodésica $G_m(r)$ dada en coordenadas normais por:*

$$f(exp_m(ru)) = f^{(0)}(m) + f_u^{(1)}(m)\, r + f_{uu}^{(2)}(m)\, r^2 + f_{uuu}^{(3)}(m)\, r^3 + f_{uuuu}^{(4)}(m)\, r^4 + O\left(r^5\right)$$

sendo cada $f^{(i)}$ i–linear. Entón

$$\int_{G_m(r)} f = c_{n-1}\, r^{n-1} \left\{ \alpha_0 + \alpha_2\, r^2 + \alpha_4\, r^4 + O(r^5) \right\}$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= f^{(0)}(m) \\
\alpha_2 &= \frac{1}{n} \left\{ -\frac{1}{6} \tau\, f^{(0)} + \sum_{i=1}^{n} f_{ii}^{(2)} \right\} (m) \\
\alpha_3 &= \frac{1}{n(n+2)} \left\{ \left(-\frac{1}{120} \|R\|^2 + \frac{1}{45} \|\rho\|^2 + \frac{1}{72} \tau^2 - \frac{1}{20} \Delta\tau \right) f^{(0)} \right. \\
&\quad - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \nabla_i \tau f_i^{(1)} - \frac{1}{6} \tau \sum_{i=1}^{n} f_{ii}^{(2)} - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{n} \rho_{ij} f_{ij}^{(2)} - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{n} \rho_{ij} f_{ji}^{(2)} \\
&\quad \left. + \sum_{i,j=1} f_{iijj}^{(4)} + \sum_{i,j=1} f_{ijij}^{(4)} + \sum_{i,j=1} f_{ijji}^{(4)} \right\} (m)
\end{aligned}$$

Demostración.
En [13] probouse que o elemento de volume dunha esfera xeodésica suficientemente pequena $G_m(r)$ é $r^{n-1}\theta_m du$, sendo du o elemento de volume da esfera euclídea $S^{n-1}(1)$. En consecuencia, a integral dunha función f nunha esfera xeodésica é:

$$\int_{G_m(r)} f = r^{n-1} \int_{S^{n-1}} (f\theta_m)(exp_m(ru))du \tag{2.1}$$

No primeiro capítulo acadamos os primeiros termos do desenvolvemento en serie de potencias da función densidade de volume θ_m. Tendo en conta como é o desenvolvemento en serie de potencias da función f chegamos a unha expresión do tipo:

$$\begin{aligned}
(f\theta_m)(exp_m(ru)) &= f^{(0)} + f_u^{(1)}\, r + \left(f_{uu}^{(2)} + f^{(0)} \gamma_{uu}^{(2)} \right) r^2 \\
&\quad + \left(f_{uuu}^{(3)} + f_u^{(1)} \gamma_{uu}^{(2)} + \gamma_{uuu}^{(3)} \right) r^3 \\
&\quad + \left(f_{uuuu}^{(4)} + f_{uu}^{(2)} \gamma_{uu}^{(2)} + f_u^{(1)} \gamma_{uuu}^{(3)} + \gamma_{uuuu}^{(4)} \right) r^4 + O\left(r^5\right)
\end{aligned}$$

onde os $\gamma^{(i)}$ correspóndense cos coeficientes dados no Lema 1.6.3. Substituindo en (2.1) obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} f &= r^{n-1}\left(c_{n-1}f^{(0)} + r\int_{S^{n-1}} f^{(1)}_u du + r^2\int_{S^{n-1}}\left(f^{(2)}_{uu} + f^{(0)}\gamma^{(2)}_{uu}\right)du\right.\\ &+ r^3\int_{S^{n-1}}\left(f^{(3)}_{uuu} + f^{(1)}_u\gamma^{(2)}_{uu} + \gamma^{(3)}_{uuu}\right)du\\ &\left.+ r^4\int_{S^{n-1}}\left(f^{(4)}_{uuuu} + f^{(2)}_{uu}\gamma^{(2)}_{uu} + f^{(1)}_u\gamma^{(3)}_{uuu} + \gamma^{(4)}_{uuuu}\right)du + O\left(r^5\right)\right)\end{aligned}$$

Empregamos agora unha fórmula dada en [12] para a integración de polinomios en esferas. Sexan $i_1, \ldots, i_k$ índices distintos. En primeiro lugar, debido ás simetrías da esfera

$$\int_{S^{n-1}} x^{j_1}_{i_1} \ldots x^{j_k}_{i_k} du = 0 \tag{2.2}$$

se algún j_i é impar. Denotemos agora $l = j_1 + \ldots + j_k$, e definamos:

$$k) = (k-1)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 1$$

para k par. Entón, cando $j_1, \ldots, j_k$ son todos pares:

$$\int_{S^{n-1}} x^{j_1}_{i_1} \ldots x^{j_k}_{i_k} du = c_{n-1}\frac{j_1) \ldots j_k)}{n(n+2)\cdot \ldots \cdot (n+l-2)} \tag{2.3}$$

Fixada unha base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_mM e un tensor ω de tipo (0,k) en T_mM, podemos escribir

$$\omega_{u\ldots u} = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} x_{i_1}\cdot \ldots \cdot x_{i_k}\omega_{i_1\ldots i_k}$$

sendo $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Logo, se k é impar, empregando (2.2) dedúcese que

$$\int_{S^{n-1}} \omega_{u\ldots u} du = 0$$

En particular, isto significa que

$$\int_{S^{n-1}} f^{(1)}_u du = \int_{S^{n-1}}\left(f^{(3)}_{uuu} + f^{(1)}_u\gamma^{(2)}_{uu} + \gamma^{(3)}_{uuu}\right)du = 0$$

Se k é par, non é difícil obter, empregando (2.3) que para os primeiros valores pares de k é:

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \omega_{uu} du &= c_{n-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_{ii} \\
\int_{S^{n-1}} \omega_{uuuu} du &= c_{n-1} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \omega_{iijj} + \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ijij} + \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ijji} \right)
\end{aligned}$$

Tendo en conta a expresión anterior, e empregando reiteradamente o Lema 1.1.1, obtéñense as seguintes expresións:

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \rho_{uu} du &= \frac{c_{n-1}}{n} \tau \\
\int_{S^{n-1}} \rho_{uu}^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n(n+2)} \left(2 \|\rho\|^2 + \tau^2 \right) \\
\int_{S^{n-1}} \nabla_{uu}^2 \rho_{uu} du &= \frac{2\, c_{n-1}}{n(n+2)} \Delta\tau \\
\int_{S^{n-1}} \sum_{i,j=1}^{n} R_{iuju}^2 du &= \frac{c_{n-1}}{n} \left(\frac{3}{2} \|R\|^2 + \|\rho\|^2 \right)
\end{aligned}$$

O resultado séguese agora facendo operacións. □

2.1.1 Propiedades das curvaturas escalares totais

Sexa (M, g) unha variedade de Riemann. Un *invariante escalar total* $\widetilde{F}$ é, por definición

$$\widetilde{F}(m, r) = \int_{G_m(r)} \widetilde{f}$$

sendo $\widetilde{f}$ un invariante escalar intrínseco da esfera xeodésica $G_m(r)$. A *orde* dun invariante escalar total é a orde do invariante intrínseco a partir do cal foi construido.

Desenvolvamos un invariante escalar total $\int_{G_m(r)} \widetilde{f}$ de orde k en serie de potencias. Supoñamos que tal desenvolvemento é do tipo:

$$\begin{aligned}
\int_{G_m(r)} \widetilde{f} \;&=\; c_{n-1} r^{n-1-2k} \Big\{ A(n) + \frac{r^2}{n} B(n)\tau + \frac{r^4}{n(n+2)} \big(C_1(n) \|R\|^2 \\
&\quad + C_2(n) \|\rho\|^2 + C_3(n)\, \tau^2 + C_4(n)\, \Delta\tau \big) + O\left(r^6\right) \Big\} (m)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde os coeficientes A, B, C_1, C_2, C_3, C_4 son polinomios na dimensión n da variedade ambiente, que non dependen da variedade considerada en particular.

Supoñamos agora que M é unha variedade de curvatura constante λ. No que segue tomamos os resultados de [9] e [11]. É sinxelo ver que se f é un invariante escalar de orde k, entón podemos poñer $f = a_f(n)\lambda^k$, onde $a_f(n)$ é un polinomio na dimensión da variedade n. Tamén é certo que toda esfera xeodésica suficientemente pequena nun espacio de curvatura constante λ é unha variedade de curvatura seccional constante $\widetilde{\lambda}$, onde.

$$\widetilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\sin^2 r\sqrt{\lambda}}$$

Nótese que estamos só considerando o caso dun espacio con curvatura positiva. Expresións análogas poden ser atopadas para variedades chás, así como en espacios de curvatura constante negativa substituíndo aquí e no que segue as funcións trigonométricas polas súas correspondentes funcións hiperbólicas. Por tanto, para cada invariante da curvatura ó longo dunha esfera xeodésica podemos poñer

$$\widetilde{f} = \left(\frac{\lambda}{\sin^2 r\sqrt{\lambda}}\right)^k a_{\widetilde{f}}(n-1)$$

Ademáis a función densidade de volume nun espacio de curvatura constante vén dada por:

$$\theta_m(exp_m(ru)) = \left(\frac{\sin\, r\sqrt{\lambda}}{r\sqrt{\lambda}}\right)^{n-1}$$

Así que podemos facilmente obter

$$\int_{G_m(r)} \widetilde{f} = c_{n-1}\, a_{\widetilde{f}}(n-1)\left(\frac{\sin\, r\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n-1-2k} \tag{2.5}$$

Facendo o desenvolvemento en serie de potencias da función anterior temos,

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \widetilde{f} \;=\; & c_{n-1}\, a_{\widetilde{f}}(n-1) r^{n-1-2k} \left(1 - \frac{n-1-2k}{6}\lambda\, r^2 \right. \\ & \left. + \frac{(n-1-2k)(5n-10k-7)}{360}\lambda^2\, r^4 + O\left(r^6\right)\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Agora, se M é unha variedade de curvatura constante sabemos que $\tau = n(n-1)\lambda$, $\|\rho\|^2 = n(n-1)^2\lambda^2$, $\|R\|^2 = 2n(n-1)\lambda^2$, e por tanto (2.4) convírtese en:

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \widetilde{f} \;=\; & c_{n-1} r^{n-1-2k} \Big\{ A(n) + B(n)\,(n-1)\lambda\, r^2 \\ & + \frac{n-1}{n+2}\Big(2C_1(n) + (n-1)C_2(n) + n(n-1)C_3(n)\Big)\lambda^2\, r^4 + O\left(r^6\right)\Big\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Comparando (2.6) e (2.7) temos

$$\begin{aligned} A(n) &= a_{\widetilde{f}}(n-1) \\ B(n) &= -\frac{n-1-2k}{6(n-1)}\, a_{\widetilde{f}}(n-1) \\ 2C_1(n)+(n-1)C_2(n)+n(n-1)C_3(n) &= \frac{(n+2)(n-1-2k)(5n-10k-7)}{360(n-1)} a_{\widetilde{f}}(n-1) \end{aligned}$$

Para cada invariante da curvatura f é claro que $a_f(0) = 0$ e $a_f(1) = 0$, xa que as variedades de dimensión un son chás. Isto significa que podemos poñer:

$$a_{\widetilde{f}}(n-1) = (n-2)(n-1)\bar{a}_{\widetilde{f}}(n-1)$$

e a expresión anterior pode ser escrita como segue

$$\begin{aligned} A(n) &= (n-2)(n-1)\, \bar{a}_{\widetilde{f}}(n-1) \\ B(n) &= -\frac{(n-2)(n-1-2k)}{6}\, \bar{a}_{\widetilde{f}}(n-1) \\ 2C_1(n)+(n-1)C_2(n)+n(n-1)C_3(n) &= \tfrac{(n-2)\,(n+2)\,(n-1-2\,k)\,(5\,n-10\,k-7)}{360}\, \bar{a}_{\widetilde{f}}(n-1) \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2 Invariantes de orde un

Tal e como foi visto na Sección 1.2, a curvatura escalar é, salvo producto por un escalar o único invariante de orde un. Aínda que a curvatura escalar total xa foi introducida en [6] e amplamente estudiada en [11], incluirémola aquí por razóns de completitude e para comparar os resultados obtidos alí cos correspondentes para os invariantes de orde dous e tres.

O seguinte lema dá os primeiros termos da expresión en serie de potencias para a curvatura escalar dunha esfera xeodésica.

Lema 2.2.1 [11] *Sexa $\widetilde{\tau}$ a curvatura escalar, dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = exp_m(ru)$, entón:*

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}(p) \;=\; & \frac{(n-1)(n-2)}{r^2} + \left(\tau - \frac{2(n+1)}{3}\rho_{uu}\right)(m) + \left(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\right)(m)\, r \\ & + \left(\frac{1}{2}\nabla^2_{uu}\tau - \frac{n+3}{5}\nabla^2_{uu}\rho_{uu} + \frac{1}{9}\rho^2_{uu} - \frac{2n+1}{45}\sum_{c,d=1}^{n} R^2_{cudu}\right)(m)\, r^2 + O\left(r^3\right) \end{aligned}$$

Demostración.
Unicamente tomar trazas no desenvolvemento do Lema 1.6.5 segundo a Definición 1.2. □

Defínese a *curvatura escalar total* como

$$\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}$$

A continuación calculamos a súa expresión en serie de potencias.

Lema 2.2.2 [11] *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \widetilde{\tau} &= c_{n-1}\, r^{n-1} \left\{ \frac{(n-2)\,(n-1)}{r^2} - \frac{(n-3)\ (n-2)}{6n}\, \tau(m) \right. \\ &\quad + \frac{1}{n\,(n+2)} \left(-\frac{(n+2)(n+3)}{120}\, \|R\|^2 + \frac{n^2+5\,n+21}{45}\, \|\rho\|^2 \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n^2-7\,n-6}{72}\, \tau^2 - \frac{(n-3)\ (n-2)}{20}\, \Delta\tau \right)(m)\, r^2 + O\left(r^3\right) \right\} \end{aligned}$$

Demostración.
Definimos

$$\begin{aligned} F(exp_m(ru)) &= (n-1)(n-2) - \frac{2(n+1)}{3}\, \rho_{uu}(m)\, r - \frac{n+2}{2}\, \nabla_u \rho_{uu}(m)\, r^3 \\ &\quad + \left(-\frac{n+3}{5}\, \nabla^2_{uu}\rho_{uu} + \frac{1}{9}\, \rho^2_{uu} - \frac{2n+1}{45} \sum_{c,d=1}^{n} R^2_{cudu} \right)(m)\, r^4 + O\left(r^5\right) \\ G(exp_m(ru)) &= \tau(m) + \left(\nabla_u \tau\right)(m)\, r + \frac{1}{2}\left(\nabla^2_{uu}\tau\right)(m)\, r^2 + O\left(r^3\right) \end{aligned}$$

En consecuencia, a nosa integral redúcese a:

$$\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau} = \int_{G_m(r)} \left(\frac{1}{r^2}\, F + G \right) = \frac{1}{r^2} \int_{G_m(r)} F + \int_{G_m(r)} G$$

e o Lema 2.1.1 danos a fórmula que necesitamos para acadar o resultado. □

2.3 Invariantes de orde dous

Na Sección 1.2 deuse unha base que xenera, no caso máis xeral, o espacio vectorial dos invariantes de orde dous. No que segue damos o desenvolvemento en serie de potencias en función do tensor de curvatura da variedade ambiente destes invariantes cando a variedade considerada é unha esfera xeodésica de radio suficientemente pequeno.

Os tres seguintes resultados simplemente empregan os lemas 1.6.4 e 1.6.5 xunto coas definicións de (1.3) para obter, despois de facer as operacións, os seguintes desenvolvementos en serie de potencias.

Lema 2.3.1 *Sexa $\widetilde{\tau}$ a curvatura escalar dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = exp_m(ru)$, entón:*

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}^2(p) &= \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{r^4} + \frac{2\,(n-2)(n-1)}{r^2}\left(\tau - \frac{2\,(n+1)}{3}\,\rho_{uu}\right)(m)\\ &+\frac{2\,(n-2)(n-1)}{r}\left(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\,\nabla_u\rho_{uu}\right)(m) + \Bigg((n-1)(n-2)\,\nabla^2_{uu}\tau\\ &-\frac{2\,(n-1)(n-2)(n+3)}{5}\,\nabla^2_{uu}\rho_{uu} + \tau^2 - \frac{4\,(n+1)}{3}\,\tau\rho_{uu}\\ &+\frac{2\,(3\,n^2+n+4)}{9}\,\rho^2_{uu} - \frac{2\,(n-2)(n-1)(2\,n+1)}{45}\sum_{c,d=1}^{n} R^2_{cudu}\Bigg)(m) + O\,(r)\end{aligned}$$

Lema 2.3.2 *Sexa $\|\widetilde{\rho}\|$ a norma do tensor de Ricci dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = exp_m(ru)$, entón:*

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\rho}\|^2(p) &= \frac{(n-1)(n-2)^2}{r^4} + \frac{2\,(n-2)}{r^2}\left(\tau - \frac{2\,(n+1)}{3}\,\rho_{uu}\right)(m)\\ &+\frac{2\,(n-2)}{r}\left(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\,\nabla_u\rho_{uu}\right)(m) + \Bigg((n-2)\,\nabla^2_{uu}\tau\\ &-\frac{2\,(n-2)(n+3)}{5}\,\nabla^2_{uu}\rho_{uu} - \frac{2}{3}\,\tau\rho_{uu} + \|\rho\|^2 - 2\sum_{c=1}^{n}\rho^2_{cu} + \frac{5\,(n+2)}{9}\,\rho^2_{uu}\\ &-\frac{2\,n}{3}\sum_{c,d=1}^{n}\rho_{cd}R_{cudu} + \frac{n^2+6\,n+4}{45}\sum_{c,d=1}^{n} R^2_{cudu}\Bigg)(m) + O\,(r)\end{aligned}$$

Lema 2.3.3 *Sexa $\|\widetilde{R}\|$ a norma do tensor de curvatura dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = exp_m(ru)$, entón:*

$$\begin{aligned}\|\widetilde{R}\|^2(p) &= \frac{2\,(n-1)(n-2)}{r^4} + \frac{4}{r^2}\left(\tau - \frac{2\,(n+1)}{3}\,\rho_{uu}\right)(m)\\ &+\frac{4}{r}\left(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\,\nabla_u\rho_{uu}\right)(m) + \Bigg(2\,\nabla^2_{uu}\tau - \frac{4\,(n+3)}{5}\,\nabla^2_{uu}\rho_{uu}\\ &-\frac{8}{3}\sum_{c,d=1}^{n}\rho_{cd}R_{cudu} + \frac{8}{9}\,\rho^2_{uu} + \|R\|^2 - 4\sum_{c,d,e=1}^{n} R^2_{cdeu}\\ &+\frac{4\,(3\,n+59)}{45}\sum_{c,d=1}^{n} R^2_{cudu}\Bigg)(m) + O\,(r)\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 1.6.11, podemos conseguir o Laplaciano da curvatura escalar que consiste, simplemente, en tomar trazas na fórmula do anteriormente citado Lema. Este resulado non é de capital importancia no que segue pero inclúese aquí por completitude. Ver tamén [6].

Lema 2.3.4 *Sexa $\widetilde{\Delta}\widetilde{\tau}$ o Laplaciano da curvatura escalar dunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$. Se $p = exp_m(ru)$, entón:*

$$(\widetilde{\Delta}\widetilde{\tau})(p) \;=\; \frac{4\,n\,(n+1)}{3\,r^2}\left(\rho_{uu} - \frac{\tau}{n}\right)(m) - \frac{3(n-1)}{r}\left(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\right)(m) + O\,(1)$$

A continuación damos os desenvolvementos en serie de potencias das curvaturas totais de segunda orde.

Entre todos os invariantes totais de segunda orde destacan especialmente os construidos a partir dos correspondentes invariantes escalares $\widetilde{\tau}^2$, $\|\widetilde{\rho}\|^2$, $\|\widetilde{R}\|^2$ e $\widetilde{\Delta}\widetilde{\tau}$, xa que, como vimos, estes forman unha base do conxunto dos invariantes de orde dous.

Observación 2.3.5 Cómpre sinalar que no noso estudio non se incluirá $\widetilde{\Delta}\widetilde{\tau}$ xa que o Corolario 1.8.3 asegúranos que:

$$\int_{G_m(r)} \widetilde{\Delta}\widetilde{\tau} \;=\; 0$$

e en consecuencia este invariante total carece de sentido xeométrico.

Lema 2.3.6 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}^2 \;=\; & c_{n-1}\, r^{n-1} \Bigg\{ \frac{(n-2)^2\,(n-1)^2}{r^4} - \frac{(n-5)\,(n-2)^2\,(n-1)}{6\,n\,r^2}\,\tau(m) \\ & + \frac{1}{n\,(n+2)}\Bigg(- \frac{(n-2)\,(n-1)\,(n^2+13\,n+10)}{120}\,\|R\|^2 \\ & + \frac{n^4+10n^3+43n^2-14n+120}{45}\,\|\rho\|^2 + \frac{n^4-14n^3+29n^2-60n-188}{72}\,\tau^2 \\ & - \frac{(n-5)\,(n-2)^2\,(n-1)}{20}\,\Delta\tau \Bigg)(m) + O\,(r^2) \Bigg\}\end{aligned}$$

Lema 2.3.7 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\rho}\|^2 \;=\; & c_{n-1}\, r^{n-1} \Bigg\{ \frac{(n-2)^2\,(n-1)}{r^4} - \frac{(n-5)\,(n-2)^2}{6\,n\,r^2}\,\tau(m) \\ & + \frac{1}{n\,(n+2)}\Bigg(- \frac{n^3-9\,n^2-16\,n-20}{120}\,\|R\|^2\end{aligned}$$

$$+\frac{n^3+31\,n^2-16\,n-120}{45}\,\|\rho\|^2+\frac{n^3-13\,n^2-16\,n+44}{72}\,\tau^2$$
$$\left.-\frac{(n-5)\,(n-2)^2}{20}\,\Delta\tau\right)(m)+O\left(r^2\right)\Big\}$$

Lema 2.3.8 *Sexa (M,g) unha variedade de Riemann e $m\in M$. Entón*

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)}\|\widetilde{R}\|^2 &= c_{n-1}\,r^{n-1}\left\{\frac{2\,(n-2)\,(n-1)}{r^4}-\frac{(n-5)\,(n-2)}{3\,n\,r^2}\,\tau(m)\right.\\ &\quad+\frac{1}{n\,(n+2)}\left(\frac{59\,n^2-93\,n-10}{60}\,\|R\|^2+\frac{2\,\left(n^2-37\,n+60\right)}{45}\,\|\rho\|^2\right.\\ &\quad\left.\left.+\frac{n^2-11\,n+2}{36}\,\tau^2-\frac{(n-5)\,(n-2)}{10}\,\Delta\tau\right)(m)+O\left(r^2\right)\right\}\end{aligned}$$

Observación 2.3.9 Ó igual que no Lema 2.2.2, para demostrar os tres lemas anteriores recórrese o resultado xeral de integración en esferas xeodésicas dado polo Lema 2.1.1. Ó igual que naquel, cómpre separar os desenvolvementos dados nos lemas 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3 nunha suma de dúas series, para poder aplicar directamente o anteriormente dito lema.

2.4 Invariantes de orde tres

Nas dúas anteriores seccións introducíronse as curvaturas totais de esferas xeodésicas asociadas a invariantes de orde un e dous, así como os primeiros termos do desenvolvemento en serie de potencias dos mesmos. A presente sección está adicada a completar a información sobre os desenvolvementos en serie dos invariantes de terceira orde, así como das curvaturas totais asociadas ós mesmos.

A partir dos lemas 1.6.4, 1.6.5 e 2.2.1 e empregando as definicións dadas en (1.4) é inmediato, se ben un proceso longo e tedioso, calcular os seguintes desenvolvementos en serie de potencias.

Lema 2.4.1 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p=exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}^3(p) &= \frac{(n-2)^3(n-1)^3}{r^6}+\frac{3(n-2)^2(n-1)^2}{r^4}\left(\tau-\frac{2(n+1)}{3}\rho_{uu}\right)(m)\\ &\quad+\frac{3(n-2)^2(n-1)^2}{r^3}\left(\nabla_u\tau-\frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\right)(m)\\ &\quad+\frac{(n-2)(n-1)}{r^2}\left(3\tau^2-4(n+1)\tau\rho_{uu}+\frac{5\,n^2+5\,n+6}{3}\rho_{uu}^2\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{3(n-2)(n-1)}{2}\nabla^2_{uu}\tau-\frac{3\,(n-2)(n-1)(n+3)}{5}\nabla^2_{uu}\rho_{uu}$$
$$\left.-\frac{(n-2)(n-1)(2\,n+1)}{15}\sum_{i,j=1}^{n}R^2_{iuju}\right)(m)+O\left(\frac{1}{r}\right)$$

Lema 2.4.2 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p=exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}\|\widetilde{\rho}\|^2(p) \;=\;& \frac{(n-2)^3(n-1)^2}{r^6}+\frac{3(n-2)^2(n-1)}{r^4}\left(\tau-\frac{2(n+1)}{3}\rho_{uu}\right)(m)\\
&+\frac{3(n-2)^2(n-1)}{r^3}\left(\nabla_u\tau-\frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\right)(m)\\
&+\frac{n-2}{r^2}\left((n-1)\|\rho\|^2+2\tau^2-\frac{2(5\,n+3)}{3}\tau\rho_{uu}+\frac{2n(7\,n+9)}{9}\rho^2_{uu}\right.\\
&+\frac{3(n-2)(n-1)}{2}\nabla^2_{uu}\tau-\frac{3(n-2)(n-1)(n+3)}{5}\nabla^2_{uu}\rho_{uu}\\
&-2(n-1)\sum_{i=1}^{n}\rho^2_{iu}-\frac{2n(n-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}\rho_{ij}R_{iuju}\\
&\left.-\frac{(n-1)(n^2-9\,n-6)}{45}\sum_{i,j=1}^{n}R^2_{iuju}\right)(m)+O\left(\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}$$

Lema 2.4.3 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p=exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}\|\widetilde{R}\|^2(p) \;=\;& \frac{2(n-2)^2(n-1)^2}{r^6}+\frac{6(n-2)(n-1)}{r^4}\left(\tau-\frac{2(n+1)}{3}\rho_{uu}\right)(m)\\
&+\frac{6(n-2)(n-1)}{r^3}\left(\tau-\frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\right)(m)\\
&+\frac{1}{r^2}\left((n-2)(n-1)\|R\|^2+4\tau^2-\frac{16(n+1)}{3}\tau\rho_{uu}+\frac{2(13\,n^2+n+18)}{9}\rho^2_{uu}\right.\\
&+3(n-2)(n-1)\nabla^2_{uu}\tau-\frac{6(n-2)(n-1)(n+3)}{5}\nabla^2_{uu}\rho_{uu}\\
&-\frac{8(n-2)(n-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}\rho_{ij}R_{iuju}+\frac{2(n-2)(n-1)(4\,n+117)}{45}\sum_{i,j=1}^{n}R^2_{iuju}\\
&\left.-4(n-2)(n-1)\sum_{i,j,k=1}^{n}R^2_{ijku}\right)(m)+O\left(\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}$$

Lema 2.4.4 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p = exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}
\breve{\widetilde{\rho}}(p) &= \frac{(n-2)^3(n-1)}{r^6} + \frac{3(n-2)^2}{r^4}\left(\tau - \frac{2(n+1)}{3}\rho_{uu}\right)(m) \\
&+ \frac{3(n-2)^2}{r^3}\left(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\right)(m) + \frac{n-2}{r^2}\Big(3\|\rho\|^2 - 2\tau\rho_{uu} \\
&+ \frac{4(n+3)}{3}\rho_{uu}^2 + \frac{3(n-2)}{2}\nabla^2_{uu}\tau - \frac{3(n-2)(n+3)}{5}\nabla^2_{uu}\rho_{uu} - 6\sum_{i=1}^n \rho_{iu}^2 \\
&- 2n\sum_{i,j=1}^n \rho_{ij}R_{iuju} + \frac{3\,n^2+3\,n+2}{15}\sum_{i,j=1}^n R_{iuju}^2\Big)(m) + O\left(\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}$$

Lema 2.4.5 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p = exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}
\langle\widetilde{\rho}\otimes\widetilde{\rho}, \overline{\widetilde{R}}\rangle(p) &= \frac{(n-2)^3(n-1)}{r^6} + \frac{3(n-2)^2}{r^4}\left(\tau - \frac{2(n+1)}{3}\rho_{uu}\right)(m) \\
&+ \frac{3(n-2)^2}{r^3}\left(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\right)(m) \\
&+ \frac{1}{r^2}\Bigg((2\,n+5)\|\rho\|^2 + \tau^2 - \frac{2(4\,n-3)}{3}\tau\rho_{uu} - \frac{2n(2\,n-5)}{3}\sum_{i,j=1}^n \rho_{ij}R_{iuju} \\
&+ \frac{3(n-2)^2}{2}\nabla^2_{uu}\tau - \frac{3(n-2)^2(n+3)}{5}\nabla^2_{uu}\rho_{uu} + \frac{13\,n^2+9\,n-54}{9}\rho_{uu}^2 \\
&- 2(2\,n-5)\sum_{i=1}^n \rho_{iu}^2 + \frac{4(n^3-n^2-3\,n-3)}{45}\sum_{i,j=1}^n R_{iuju}^2\Bigg)(m) + O\left(\frac{1}{r}\right)
\end{aligned}$$

Lema 2.4.6 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p = exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}
\langle\widetilde{\rho}, \dot{\widetilde{R}}\rangle(p) &= \frac{2(n-2)^2(n-1)}{r^6} + \frac{6(n-2)}{r^4}\left(\tau - \frac{2(n+1)}{3}\rho_{uu}\right)(m) \\
&+ \frac{6(n-2)}{r^3}\left(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\right)(m) \\
&+ \frac{1}{r^2}\Big((n-2)\|R\|^2 + 4\|\rho\|^2 - \frac{8}{3}\tau\rho_{uu} + \frac{2(11\,n+18)}{9}\rho_{uu}^2 + 3(n-2)\nabla^2_{uu}\tau \\
&- \frac{6(n-2)(n+3)}{5}\nabla^2_{uu}\rho_{uu} - 8\sum_{i=1}^n \rho_{iu}^2 - \frac{16(n-1)}{3}\sum_{i,j=1}^n \rho_{ij}R_{iuju}
\end{aligned}$$

$$+\frac{2(14\,n^2+109\,n-234)}{45}\sum_{i,j=1}^{n}R_{iuju}^2-4(n-2)\sum_{i,j,k=1}^{n}R_{ijku}^2\Bigg)(m)+O\left(\frac{1}{r}\right)$$

Lema 2.4.7 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p=exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}\breve{\tilde{R}}(p) &= \frac{4(n-2)(n-1)}{r^6}+\frac{12}{r^4}\left(\tau-\frac{2(n+1)}{3}\rho_{uu}\right)(m)+\frac{12}{r^3}\left(\nabla_u\tau-\frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\right)(m)\\ &+\frac{1}{r^2}\Bigg(6\|R\|^2+4\rho_{uu}^2+6\nabla_{uu}^2\tau-\frac{12(n+3)}{5}\nabla_{uu}^2\rho_{uu}-16\sum_{i,j=1}^{n}\rho_{ij}R_{iuju}\\ &+\frac{4(8\,n+119)}{15}\sum_{i,j=1}^{n}R_{iuju}^2-24\sum_{i,j,k=1}^{n}R_{ijku}^2\Bigg)(m)+O\left(\frac{1}{r}\right)\end{aligned}$$

Lema 2.4.8 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p=exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}\breve{\bar{\tilde{R}}}(p) &= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{r^6}+\frac{3(n-3)}{r^4}\left(\tau-\frac{2(n+1)}{3}\rho_{uu}\right)(m)\\ &+\frac{3(n-3)}{r^3}\left(\nabla_u\tau-\frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\right)(m)\\ &+\frac{1}{r^2}\Bigg(-\frac{3}{2}\|R\|^2+3\|\rho\|^2-2\tau\rho_{uu}+\frac{4\,n+9}{3}\rho_{uu}^2+\frac{3(n-3)}{2}\nabla_{uu}^2\tau\\ &-\frac{3(n-3)(n+3)}{5}\nabla_{uu}^2\rho_{uu}-6\sum_{i=1}^{n}\rho_{iu}^2-2(n-2)\sum_{i,j=1}^{n}\rho_{ij}R_{iuju}\\ &+\frac{3\,n^2-5\,n-117}{15}\sum_{i,j=1}^{n}R_{iuju}^2+6\sum_{i,j,k=1}^{n}R_{ijku}^2\Bigg)(m)+O\left(\frac{1}{r}\right)\end{aligned}$$

Os invariantes que imos considerar a continuación involucran derivadas covariantes do tensor de curvatura. Deste xeito, a ferramenta fundamental que temos que empregrar son os resultados e a notación da Seccion 1.6.1.

Lema 2.4.9 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p=exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\nabla}\widetilde{\tau}\|^2(p) &= -\frac{16(n+1)^2}{9\,r^2}\left(\rho_{uu}^2-\sum_{i=1}^n\rho_{iu}^2\right)(m)\\
&+\frac{4(n+1)}{3r}\Big(-3(n+2)\nabla_u\rho_{uu}\rho_{uu}+2\nabla_u\tau\rho_{uu}+(n+2)\sum_{i=1}^n\nabla_i\rho_{uu}\rho_{iu}\\
&\quad+2(n+2)\sum_{i=1}^n\nabla_u\rho_{iu}\rho_{iu}-2\sum_{i=1}^n\nabla_i\tau\rho_{iu}\Big)(m)+O(1)
\end{aligned}$$

Demostración.
Tomando trazas no Lema 1.6.8 obtemos a seguinte fórmula para a derivada covariante da curvatura escalar

$$\widetilde{\nabla}_i\widetilde{\tau}(p) = -\frac{4(n+1)}{3r}\rho_{iu}(m)+\Big(\nabla_i\tau-\frac{n+2}{2}\nabla_i\rho_{uu}-(n+2)\nabla_u\rho_{iu}\Big)(m)+O(r)$$

Tomando trazas agora segundo a definición (1.4) séguese o resultado despois de facer operacións. □

Lema 2.4.10 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p = exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\nabla}\widetilde{\rho}\|^2(p) &= -\frac{1}{3\,r^2}\Big(\frac{2(9\,n+10)}{3}\rho_{uu}^2-\frac{2(9\,n+10)}{3}\sum_{i=1}^n\rho_{iu}^2-2\,n^2\sum_{i,j=1}^n R_{iuju}^2\\
&+n^2\sum_{i,j,k=1}^n R_{uijk}^2\Big)(m)+\frac{1}{r}\Big(-\frac{10}{3}\sum_{i=1}^n\nabla_i\tau\rho_{iu}+\frac{2(3n+5)}{3}\sum_{i=1}^n\nabla_i\rho_{uu}\rho_{iu}\\
&+\frac{4(2n+5)}{3}\sum_{i=1}^n\nabla_u\rho_{iu}\rho_{iu}-\frac{4n}{3}\sum_{i,j=1}^n\nabla_i\rho_{ju}R_{uiuj}-\frac{2(7n+15)}{3}\nabla_u\rho_{uu}\rho_{uu}\\
&+\frac{4n}{3}\sum_{i,j=1}^n\nabla_u\rho_{ij}R_{uiuj}+\frac{2n(n+1)}{3}\sum_{i,j,k=1}^n\nabla_u R_{uijk}R_{uijk}+\frac{10}{3}\nabla_u\tau\rho_{uu}\\
&-\frac{4n(n+1)}{3}\sum_{i,j=1}\nabla_u R_{uiuj}R_{uiuj}-\frac{4n}{3}\sum_{i,j,k=1}^n\nabla_i\rho_{jk}R_{ujik}\Big)(m)+O(1)
\end{aligned}$$

Demostración.
Utilícese o Lema 1.6.8 xunto coa definición dada en (1.4). O resultado séguese despois de facer operacións. □

Lema 2.4.11 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p = exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}
\alpha(\widetilde{\rho})(p) \;\; = \;\; & -\frac{1}{3\,r^2}\Big(\frac{23\,n+22}{3}\rho_{uu}^2 - \frac{23\,n+22}{3}\sum_{i=1}^{n}\rho_{iu}^2 - n^2\sum_{i,j=1}^{n}R_{iuju}^2 \\
& + \frac{n^2}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n}R_{uijk}^2\Big)(m) + \Big(-\frac{11}{3}\sum_{i=1}^{n}\nabla_i\tau\rho_{iu} + \frac{5n+11}{3}\sum_{i=1}^{n}\nabla_i\rho_{uu}\rho_{iu} \\
& + \frac{2(6n+11)}{3}\sum_{i=1}^{n}\nabla_u\rho_{iu}\rho_{iu} + \frac{2n}{3}\sum_{i,j=1}\nabla_i\rho_{ju}R_{uiuj} + \frac{11}{3}\nabla_u\tau\rho_{uu} \\
& - \frac{2n}{3}\sum_{i,j=1}^{n}\nabla_u\rho_{ij}R_{uiuj} - \frac{17n+33}{3}\nabla_u\rho_{uu}\rho_{uu} + \frac{2n}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\nabla_i\rho_{jk}R_{ujik} \\
& + \frac{2n(n+1)}{3}\sum_{i,j=1}\nabla_u R_{uiuj}R_{uiuj} - \frac{n(n+1)}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\nabla_u R_{uijk}R_{uijk}\Big)(m) + O(1)
\end{aligned}$$

Demostración.
O resultado tamén se segue do Lema 1.6.8 e da definición (1.4) despois de facer operacións. □

Lema 2.4.12 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p = exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\nabla}\widetilde{R}\|^2(p) \;\; = \;\; & -\frac{16}{3\,r^2}\left(\frac{2}{3}\,\rho_{uu}^2 - \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n}\rho_{iu}^2 - 2\,n\sum_{i,j=1}^{n}R_{iuju}^2 + n\sum_{i,j,k=1}^{n}R_{uijk}^2\right)(m) \\
& + \frac{16}{3\,r}\Big(\sum_{i=1}^{n}\nabla_i\rho_{uu}\rho_{iu} - 2\sum_{i=1}^{n}\nabla_u\rho_{iu}\rho_{iu} - 16\sum_{i,j=1}\nabla_i\rho_{ju}R_{uiuj} \\
& - 16(n+1)\sum_{i,j=1}^{n}\nabla_u R_{uiuj}R_{uiuj} + 16\sum_{i,j=1}^{n}\nabla_u\rho_{ij}R_{uiuj} + \nabla_u\rho_{uu}\rho_{uu} \\
& + 2(n+1)\sum_{i,j,k=1}^{n}\nabla_u R_{uijk}R_{uijk} - 16\sum_{i,j,k=1}^{n}\nabla_i\rho_{jk}R_{ujik}\Big)(m) + O(1)
\end{aligned}$$

Demostración.
Simplemente hai que tomar o desenvolvemento en serie de potencias do Lema 1.6.7 e facer as operacións segundo a definición (1.4). □

Lema 2.4.13 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p = exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}\widetilde{\Delta}\widetilde{\tau}(p) &= \frac{4\,n(n-1)(n-2)(n+1)}{3\,r^4}\left(\rho_{uu} - \frac{\tau}{n}\right)(m) \\ &\quad - \frac{3(n-2)(n-1)(n+1)}{r^3}\left(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\right)(m) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned}$$

Demostración.
Simplemente multiplíquense os desenvolvementos en serie de potencias dos lemas 2.2.1 e 2.3.4. □

Lema 2.4.14 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p = exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{\Delta}\widetilde{\rho}, \widetilde{\rho}\rangle(p) &= \frac{4n(n-2)(n+1)}{3\,r^4}\left(\rho_{uu} - \frac{\tau}{n}\right)(m) \\ &\quad - \frac{3(n-2)(n+1)}{r^3}\left(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\right)(m) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned}$$

Demostración.
Simplemente consiste en empregar os lemas 1.6.5 e 1.6.11 segundo a definición dada en (1.4). □

Lema 2.4.15 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p = exp_m(ru)$:*

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{\nabla}^2\widetilde{\tau}, \widetilde{\rho}\rangle(p) &= \frac{4\,n(n-2)(n+1)}{3\,r^4}\left(\rho_{uu} - \frac{\tau}{n}\right)(m) \\ &\quad - \frac{3(n-2)(n+1)}{r^3}(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\Big)(m) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\end{aligned}$$

Demostración.
Tomando dúas veces trazas na fórmula do Lema 1.6.9 obtemos despois de facer as contas que

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}^2_{ab}\widetilde{\tau}(p) &= -\frac{4(n+1)}{3\,r^2}\Big(\rho_{ab} - \rho_{uu}\delta_{ab}\Big)(m) + \frac{1}{r}\Big(-(n+2)\nabla_a\rho_{bu} - (n+2)\nabla_b\rho_{au} \\ &\quad -\nabla_u\tau\delta_{ab} - (n+2)\nabla_u\rho_{ab} + \frac{3(n+2)}{2}\nabla_u\rho_{uu}\delta_{ab}\Big)(m) + O(1)\end{aligned}$$

Agora só hai que empregar a fórmula anterior e a dada no Lema 1.6.5 e contraer segundo a Definición 1.4. □

Lema 2.4.16 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p = exp_m(ru)$:*

$$
\begin{aligned}
\langle \widetilde{\Delta}\widetilde{R}, \widetilde{R}\rangle(p) &= \frac{8n(n+1)}{3\,r^4}\Big(\rho_{uu} - \frac{\tau}{n}\Big)(m) \\
&\quad -\frac{6(n+1)}{r^3}\Big(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\Big)(m) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)
\end{aligned}
$$

Demostración.
De novo, é só empregar os lemas 1.6.4 e 1.6.10 e contraer segundo a definición correspondente en (1.4). □

Lema 2.4.17 *Nunha pequena esfera xeodésica $G_m(r)$ temos o seguinte desenvolvemento en serie de potencias entorno ó punto $p = exp_m(ru)$:*

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\Delta}^2\widetilde{\tau})(p) &= -\frac{8n^2(n+1)}{3\,r^4}\Big(\rho_{uu} - \frac{\tau}{n}\Big)(m) \\
&\quad +\frac{9(n+1)^2}{r^3}\Big(\nabla_u\tau - \frac{n+2}{2}\nabla_u\rho_{uu}\Big)(m) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)
\end{aligned}
$$

Demostración.
Este resultado obtense de xeito análogo a aqueles que aparecen na Sección 1.6.1. Os cálculos exactos no se explicitan aquí. □

No que queda desta sección adicarémonos a dar os desenvolvementos en serie de potencias dos invariantes totais asociados ás curvaturas escalares de orde tres. Aínda que os invariantes escalares da curvatura son independentes nunha variedade de Riemann en xeral, esta propiedade non se conserva cando consideramos as curvaturas escalares totais asociadas a eles. De feito, vimos na sección anterior que a integral do Laplaciano da curvatura escalar nunha esfera xeodésica é identicamente nula. Para os invariantes de orde tres a situación presentará aínda máis riqueza sendo as relacions obtidas consecuencia do Teorema de Stokes 1.8.2.

En primeiro lugar, empezamos cos desenvolvementos en serie dos invariantes que non involucran derivadas covariantes do tensor de curvatura, xa que estes son os máis simples e ditos desenvolvementos en serie soamente consisten en aplicar o Lema 2.1.1 ás fórmulas dadas nos lemas 2.4.1 a 2.4.8 empregando o mesmo procedemento ca no Lema 2.2.2.

Lema 2.4.18 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$
\begin{aligned}
\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}^3 &= c_{n-1} r^{n-1} \left\{ \frac{(n-2)^3(n-1)^3}{r^6} - \frac{(n-7)(n-2)^3(n-1)^2}{6\,n\,r^4} \tau(m) \right. \\
&+ \frac{(n-2)(n-1)}{n\,(n+2)\,r^2} \left(-\frac{(n-2)(n-1)(n^2+21\,n+14)}{120} \|R\|^2 \right. \\
&+ \frac{n^4+18\,n^3+118\,n^2+105\,n+238}{45} \|\rho\|^2 - \frac{(n-7)(n-2)^2(n-1)}{20} \Delta\tau \\
&\left. \left. + \frac{n^4-18\,n^3+49\,n^2-204\,n-524}{72} \tau^2 \right)(m) + O\left(1\right) \right\}
\end{aligned}
$$

Lema 2.4.19 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$
\begin{aligned}
\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau} \|\widetilde{\rho}\|^2 &= c_{n-1} r^{n-1} \left\{ \frac{(n-2)^3(n-1)^2}{r^6} - \frac{(n-7)(n-2)^3(n-1)}{6\,n\,r^4} \tau(m) \right. \\
&+ \frac{n-2}{n\,(n+2)\,r^2} \left(-\frac{(n-1)(n^3-n^2-28\,n-28)}{120} \|R\|^2 \right. \\
&+ \frac{n^4+38\,n^3+28\,n^2+15\,n+238}{45} \|\rho\|^2 - \frac{(n-7)(n-2)^3(n-1)}{20} \Delta\tau \\
&\left. \left. + \frac{n^4-18\,n^3+17\,n^2-84\,n-380}{72} \tau^2 \right)(m) + O\left(1\right) \right\}
\end{aligned}
$$

Lema 2.4.20 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$
\begin{aligned}
\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau} \|\widetilde{R}\|^2 &= c_{n-1} r^{n-1} \left\{ \frac{2(n-2)^2(n-1)^2}{r^6} - \frac{(n-7)(n-2)^2(n-1)}{3\,n\,r^4} \tau(m) \right. \\
&+ \frac{1}{n\,(n+2)\,r^2} \left(\frac{(n-2)(n-1)(59\,n^2-101\,n-14)}{60} \|R\|^2 \right. \\
&+ \frac{2(n^4-32\,n^3+248\,n^2-135\,n+238)}{45} \|\rho\|^2 \\
&+ \frac{n^4-18\,n^3+57\,n^2-172\,n-332}{36} \tau^2 \\
&\left. \left. - \frac{(n-7)(n-2)^2(n-1)}{10} \Delta\tau \right)(m) + O\left(1\right) \right\}
\end{aligned}
$$

Lema 2.4.21 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$
\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{\rho}} = c_{n-1} r^{n-1} \left\{ \frac{(n-2)^3(n-1)}{r^6} - \frac{(n-7)(n-2)^3}{6\,n\,r^4} \tau(m) \right.
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{n-2}{n\,(n+2)\,r^2}\left(-\frac{n^3-41\,n^2-28\,n-28}{120}\,\|R\|^2\right.\\
&+\frac{n^3+79\,n^2-73\,n-238}{45}\,\|\rho\|^2+\frac{n^3-17\,n^2-64\,n+92}{72}\,\tau^2\\
&\left.\left.-\frac{(n-7)(n-2)^2}{20}\,\Delta\tau\right)(m)+O\,(1)\right\}
\end{aligned}
$$

Lema 2.4.22 *Sexa (M,g) unha variedade de Riemann e $m\in M$. Entón*

$$
\begin{aligned}
\int_{G_m(r)}\langle\widetilde{\rho}\otimes\widetilde{\rho},\overline{\overline{\widetilde{R}}}\rangle &= c_{n-1}r^{n-1}\left\{\frac{(n-2)^3(n-1)}{r^6}-\frac{(n-7)(n-2)^3}{6\,n\,r^4}\tau(m)\right.\\
&+\frac{1}{n\,(n+2)\,r^2}\left(-\frac{n^4-23\,n^3+34\,n^2+28\,n+56}{120}\,\|R\|^2\right.\\
&+\frac{n^4+57\,n^3-141\,n^2-2\,n+476}{45}\,\|\rho\|^2-\frac{(n-7)(n-2)^3}{20}\,\Delta\tau\\
&\left.\left.+\frac{n^4-19\,n^3+2\,n^2+100\,n-328}{72}\,\tau^2\right)(m)+O\,(1)\right\}
\end{aligned}
$$

Lema 2.4.23 *Sexa (M,g) unha variedade de Riemann e $m\in M$. Entón*

$$
\begin{aligned}
\int_{G_m(r)}\langle\widetilde{\rho},\dot{\widetilde{R}}\rangle &= c_{n-1}r^{n-1}\left\{\frac{2(n-2)^2(n-1)}{r^6}-\frac{(n-7)(n-2)^2}{3nr^4}\tau\right.\\
&+\frac{1}{n(n+2)\,r^2}\left(\frac{59\,n^3-179\,n^2+188\,n+28}{60}\,\|R\|^2\right.\\
&+\frac{2(n^3+9\,n^2+77\,n-238)}{45}\,\|\rho\|^2+\frac{n^3-17\,n^2-24\,n+44}{36}\,\tau^2\\
&\left.\left.-\frac{(n-7)(n-2)^2}{10}\,\Delta\tau\right)(m)+O\,(1)\right\}
\end{aligned}
$$

Lema 2.4.24 *Sexa (M,g) unha variedade de Riemann e $m\in M$. Entón*

$$
\begin{aligned}
\int_{G_m(r)}\breve{\widetilde{R}} &= c_{n-1}r^{n-1}\left\{\frac{4(n-2)(n-1)}{r^6}-\frac{2(n-7)(n-2)}{3\,n\,r^4}\tau(m)\right.\\
&+\frac{1}{n\,(n+2)\,r^2}\left(\frac{179\,n^2-261\,n-14}{30}\,\|R\|^2\right.\\
&+\frac{4(n^2-129\,n-119)}{45}\,\|\rho\|^2+\frac{(n-13)(n-2)}{18}\,\tau^2\\
&\left.\left.-\frac{(n-7)(n-2)}{5}\,\Delta\tau\right)(m)+O\,(1)\right\}
\end{aligned}
$$

Lema 2.4.25 *Sexa (M,g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \check{\check{\tilde{\tilde{R}}}} &= c_{n-1} r^{n-1} \left\{ \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{r^6} - \frac{(n-7)(n-3)(n-2)}{6nr^4}\tau \right. \\ &+ \frac{1}{n(n+2)\,r^2} \left(-\frac{n^3+138\,n^2-289\,n-42}{120}\,\|R\|^2 \right. \\ &+ \frac{n^3+78\,n^2+56\,n-357}{45}\,\|\rho\|^2 + \frac{(n-1)(n^2-17\,n-66)}{72}\,\tau^2 \\ &\left.\left. - \frac{(n-7)(n-3)(n-2)}{20}\,\Delta\tau \right)(m) + O(1) \right\}\end{aligned}$$

A continuación procedemos co caso dos invariantes que involucran derivadas do tensor de curvatura. O seu tratamento é sen dúbida máis difícil có dos anteriores invariantes, xa que nunha serie de casos que se explicitarán a continuación, o desenvolvemento en serie das curvaturas totais asociadas non é simplemente integrar os desenvolvementos en serie dos invariantes nas esferas xeodésicas, senón que ademais cómpre aplicar certos resultados derivados do Teorema da Stokes 1.8.2.

Isto é así porque para as integrais que involucran Laplacianos do tensor de curvatura non é posible, para os nosos propósitos, a utilización do Lema 2.1.1 xunto cos desenvolvementos en serie obtidos anteriormente para os correspondentes invariantes escalares, debido ó feito de que tales desenvolvementos non foron acadados cunha cantidade de termos suficiente. A continuación veremos como os corolarios do Teorema de Stokes serven para o corrixir este problema.

Lema 2.4.26 *Sexa (M,g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\nabla}\widetilde{\tau}\|^2 &= -\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\widetilde{\Delta}\widetilde{\tau} = -2\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\nabla}^2\widetilde{\tau}, \widetilde{\rho}\rangle \\ &= c_{n-1} r^{n-1} \left\{ \frac{16\,(n+1)^2}{9\,(n+2)\,r^2} \left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n}\,\tau^2 \right)(m) + O(1) \right\}\end{aligned}$$

Demostración.
Empregando directamente o Corolario 1.8.3 obtense trivialmente a primeira igualdade. Asumindo as notacións da Observación 1.8.5 e o Lema 1.1.1 temos tamén a segunda parte:

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\nabla}^2\widetilde{\tau}, \widetilde{\rho}\rangle &= \int_{G_m(r)} \sum \widetilde{\nabla}_{ij}\,\widetilde{\tau}\,\widetilde{\rho}_{ij} \\ &= -\int_{G_m(r)} \sum \widetilde{\nabla}_j\,\widetilde{\tau}\,\widetilde{\nabla}_i\,\widetilde{\rho}_{ij}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int_{G_m(r)} \sum \left(\widetilde{\nabla}_i\,\widetilde{\tau}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\nabla}\widetilde{\tau}\|^2
\end{aligned}
$$

Por último, a terceira igualdade consiste sinxelamente en aplicar o Lema 2.1.1 ó desenvolvemento en serie do Lema 2.4.9. □

Lema 2.4.27 *Sexa (M,g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$
\begin{aligned}
\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\nabla}\widetilde{\rho}\|^2 &= -\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\Delta}\widetilde{\rho}, \widetilde{\rho}\rangle \\
&= c_{n-1} r^{n-1}\left\{ \frac{1}{n\,(n+2)\,r^2}\left(\frac{n^2(n-1)}{3}\,\|R\|^2 \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{4\,n(3\,n+5)}{9}\,\|\rho\|^2 - \frac{2(9\,n+10)}{9}\,\tau^2 \right)(m) + O\,(1) \right\}
\end{aligned}
$$

Demostración.
En primeiro lugar, empregando a igualdade (1.6) xunto co Corolario 1.8.3 obtemos:

$$
0 = \frac{1}{2}\int_{G_m(r)} \widetilde{\Delta}\|\widetilde{\rho}\|^2 = \int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\Delta}\widetilde{\rho}, \widetilde{\rho}\rangle + \int_{G_m(r)} \|\widetilde{\nabla}\widetilde{\rho}\|^2
$$

de onde se segue a primeira igualdade. Agora, o resto da demostración consiste sinxelamente en aplicar o Lema 2.1.1 ó desenvolvemento en serie do Lema 2.4.10. □

Lema 2.4.28 *Sexa (M,g) unha variedade de Riemann e $m \in M$. Entón*

$$
\begin{aligned}
\int_{G_m(r)} \alpha(\widetilde{\rho}) &= c_{n-1} r^{n-1}\left\{ \frac{1}{n\,(n+2)\,r^2}\left(-\frac{n^2(n-1)}{6}\,\|R\|^2 \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{2\,n(13\,n+11)}{9}\,\|\rho\|^2 - \frac{23\,n+22}{9}\,\tau^2 \right)(m) + O\,(1) \right\}
\end{aligned}
$$

Demostración.
Consiste sinxelamente en aplicar o Lema 2.1.1 ó desenvolvemento en serie do Lema 2.4.11. Facemos notar neste punto que no derradeiro resultado desta sección se conseguen máis formas de obter este desenvolvemento en serie de potencias empregando o Corolario 1.8.4. □

Lema 2.4.29 *Sexa* (M,g) *unha variedade de Riemann e* $m \in M$*. Entón*

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\nabla}\widetilde{R}\|^2 &= -\int_{G_m(r)} \langle\widetilde{\Delta}\widetilde{R},\widetilde{R}\rangle \\ &= c_{n-1}r^{n-1}\left\{\frac{16}{3\,n\,(n+2)\,r^2}\left(n(n-1)\,\|R\|^2\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. -\frac{8\,n}{3}\,\|\rho\|^2+\frac{2}{3}\,\tau^2\right)(m)+O\,(1)\right\}\end{aligned}$$

Demostración.
Utilizando a igualdade (1.5) e máis o Corolario 1.8.3 obtemos:

$$0=\frac{1}{2}\int_{G_m(r)}\widetilde{\Delta}\|\widetilde{R}\|^2=\int_{G_m(r)}\langle\widetilde{\Delta}\widetilde{R},\widetilde{R}\rangle+\int_{G_m(r)}\|\widetilde{\nabla}\widetilde{R}\|^2$$

o que proba a primeira igualdade. Agora, ó igual que nos resultados anteriores aplícase o Lema 2.1.1 ó desenvolvemento en serie do Lema 2.4.12. □

Lema 2.4.30 *Sexa* (M,g) *unha variedade de Riemann e* $m \in M$*. Entón*

$$\int_{G_m(r)} \widetilde{\Delta}^2\widetilde{\tau} \;=\; 0$$

Demostración.
É consecuencia do Corolario 1.8.3. □

Para rematar esta sección, e despois de ter obtido os tres primeiros termos da serie de potencias de todas as curvaturas totais asociadas a invariantes de orde tres, así como algunhas relacións entre tales curvaturas totais, incluimos un novo resultado que tamén relaciona algunhas curvaturas totais, e que esencialmente é unha consecuencia dos corolarios do Teorema de Stokes.

Teorema 2.4.31 *Sexa* (M,g) *unha variedade de Riemann compacta. Entón:*

(i) $\displaystyle\int_M \alpha(\rho)=\frac{1}{4}\int_M\|\nabla\tau\|^2-\int_M\breve{\rho}+\int_M\langle\rho\otimes\rho,\overline{R}\rangle$

(ii) $\displaystyle\int_M \alpha(\rho)=\int_M\|\nabla\rho\|^2+\frac{1}{4}\int_M\|\nabla R\|^2+\frac{1}{2}\int_M\langle\rho,\dot{R}\rangle-\int_M\breve{\breve{R}}-\frac{1}{4}\int_M\breve{R}$

(iii) $\displaystyle\int_M\left(\frac{1}{4}\|\nabla\tau\|^2-\breve{\rho}+\langle\rho\otimes\rho,\overline{R}\rangle-\|\nabla\rho\|^2-\frac{1}{4}\|\nabla R\|^2-\frac{1}{2}\langle\rho,\dot{R}\rangle+\breve{\breve{R}}+\frac{1}{4}\breve{R}\right)=0$

Demostración.
De novo asumimos as notacións da Observación 1.8.5 e empregamos o Corolario 1.8.4:

$$\int_M \alpha(\rho) = \int_M \sum \nabla_i \, \rho_{jk} \, \nabla_j \rho_{ik} = - \int_M \sum \rho_{jk} \, \nabla_{ij} \, \rho_{ik}$$

A utilización do Lema 1.1.1 danos que

$$\sum \nabla_{ij} \, \rho_{ik} \, \rho_{jk} = \frac{1}{2} \langle \nabla^2 \tau, \rho \rangle + \breve{\rho} - \langle \rho \otimes \rho, \overline{R} \rangle$$

En consecuencia, substituindo e mediante o Lema 2.4.26 (nótese que a primeira igualdade é válida para calquera variedade compacta) chegamos a que

$$\begin{aligned} \int_M \alpha(\rho) &= - \int_M \left(\frac{1}{2} \langle \nabla^2 \tau, \rho \rangle + \breve{\rho} - \langle \rho \otimes \rho, \overline{R} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_M \|\nabla \tau\|^2 - \int_M \breve{\rho} + \int_M \langle \rho \otimes \rho, \overline{R} \rangle \end{aligned}$$

que é a primeira igualdade.

Para a segunda procedemos de xeito similar utilizando previamente a Segunda Identidade de Bianchi do Lema 1.1.1 e o Corolario 1.8.4:

$$\begin{aligned} \int_M \alpha(\rho) &= \int_M \sum \nabla_i \, \rho_{jk} \, \nabla_j \, \rho_{ik} \\ &= \int_M \sum \nabla_i \, R_{jlkl} \, \nabla_j \, \rho_{ik} \\ &= - \int_M \sum \nabla_j \, R_{likl} \, \nabla_j \, \rho_{ik} - \int_M \sum \nabla_l \, R_{ijkl} \, \nabla_j \, \rho_{ik} \\ &= \int_M \sum (\nabla_j \, \rho_{ik})^2 - \int_M \sum R_{ijkl} \, \nabla_{lj} \, \rho_{ik} \end{aligned}$$

Pódese agora obter a partir do Lema 1.1.1, aínda que dun xeito máis elaborado que en anteriores casos, a seguinte identidade (véxase [13]):

$$\sum \nabla_{ij} \, \rho_{kl} \, R_{ikjl} = \frac{1}{4} \langle \Delta R, R \rangle - \frac{1}{2} \langle \rho, \dot{R} \rangle + \breve{\bar{R}} + \frac{1}{4} \breve{R}$$

En consecuencia, e facendo uso do Lema 2.4.29 (no que a primeira igualdade é válida para calquera variedade compacta)

$$\begin{aligned} \int_M \alpha(\rho) &= \int_M \|\nabla \rho\|^2 - \int_M \left(\frac{1}{4} \langle \Delta R, R \rangle - \frac{1}{2} \langle \rho, \dot{R} \rangle + \breve{\bar{R}} + \frac{1}{4} \breve{R} \right) \\ &= \int_M \|\nabla \rho\|^2 + \frac{1}{4} \int_M \|\nabla R\|^2 + \frac{1}{2} \int_M \langle \rho, \dot{R} \rangle - \int_M \breve{\bar{R}} - \frac{1}{4} \int_M \breve{R} \end{aligned}$$

co cal obtemos a segunda igualdade.

A terceira identidade obtense inmediatamente a partir das dúas primeiras. $\square$

Observación 2.4.32 Por suposto, como toda esfera xeodésica suficientemente pequena é unha variedade de Riemann compacta, o lema anterior aplícase a este caso e podemos obter as seguintes identidades entre os invariantes escalares totais de terceira orde sen máis que reescribir o anterior teorema:

(i) $$\int_{G_m(r)} \alpha(\widetilde{\rho}) = \frac{1}{4}\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\nabla}\widetilde{\tau}\|^2 - \int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{\rho}} + \int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho}\otimes\widetilde{\rho}, \overline{\overline{\widetilde{R}}}\rangle$$

(ii) $$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \alpha(\widetilde{\rho}) &= \int_{G_m(r)} \|\widetilde{\nabla}\widetilde{\rho}\|^2 + \frac{1}{4}\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\nabla}\widetilde{R}\|^2 + \frac{1}{2}\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho}, \dot{\widetilde{\widetilde{R}}}\rangle \\ &\quad - \int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{\widetilde{R}}} - \frac{1}{4}\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{R}}\end{aligned}$$

(iii) $$\int_{G_m(r)} \left(\frac{1}{4}\|\widetilde{\nabla}\widetilde{\tau}\|^2 - \breve{\widetilde{\rho}} + \langle \widetilde{\rho}\otimes\widetilde{\rho}, \overline{\overline{\widetilde{R}}}\rangle - \|\widetilde{\nabla}\widetilde{\rho}\|^2 - \frac{1}{4}\|\widetilde{\nabla}\widetilde{R}\|^2 - \frac{1}{2}\langle \widetilde{\rho}, \dot{\widetilde{\widetilde{R}}}\rangle + \breve{\widetilde{\widetilde{R}}} + \frac{1}{4}\breve{\widetilde{R}}\right) = 0$$

Capítulo 3

Caracterizacións

No capítulo anterior definimos as curvaturas totais de esferas xeodésicas e establecemos algunhas das propiedades dos seus desenvolvementos en serie de potencias. Neste capítulo empregaremos algunhas desas propiedades, así como os cálculos explícitos das seccións 2.3 e 2.4, para levar a cabo a caracterización dos espacios modelo descritos na Sección 1.7.

Previamente a este traballo, xa foran realizados estudios sobre a xeometría das esferas xeodésicas a partir de integrais de funcións definidas naquelas. Así, en [13], A. Gray e L. Vanhecke calcularon o desenvolvemento en serie de Taylor do volume dunha esfera xeodésica, que no noso contexto se pode entender como unha curvatura escalar total de orde cero. Alí conxeturaron que o volume das esferas xeodésicas caracterizaría as variedades planas, conxetura que ata o de agora aínda non foi resolta no caso máis xeral. Posteriormente, en [6] levouse a cabo o estudio das integrais da curvatura media e da norma L^2 da segunda forma fundamental das esferas xeodésicas. Aínda que para o caso da norma L^2 da segunda forma fundamental foi posible realizar a caracterización dos espacios modelo en dimensión suficientemente baixa, o caso xeral segue sen poder ser resolto. Xa no marco de traballo que vimos realizando, en [6] tamén se levou a cabo o estudio da integral da curvatura escalar dunha esfera xeodésica, ou ben da curvatura escalar total. Sen embargo, de novo foron infructuosas as tentativas de caracterización dos espacios modelo e mesmo das variedades planas.

Foi en [9] onde por primeira vez se acadou unha caracterización sen hipóteses adicionais dos espacios modelo por medio dun único invariante escalar total. De feito, no anterior traballo amósase que a norma L^2 do tensor de curvatura coincide con aquela dun espacio modelo se e só se a variedade de partida é localmente isométrica a ese espacio modelo. Isto significa que este invariante escalar total nos dá unha medida da curvatura das esferas xeodésicas bastante máis satisfactoria e eficiente cá que dá o volume ou as integrais de invariantes extrínsecos.

É ben sabido que os invariantes escalares da curvatura dunha variedade non desempeñan papeis equivalentes no sentido de que cada un deles mide aspectos distintos da xeometría, a miúdo non equiparables. Noutros casos , tal información si é comparable, dándonos así unha idea de que invariantes son os que posúen unha maior relevancia. A este respecto compárense por exemplo os resultados 1.7.1 e 1.7.4.

Veremos, efectivamente, que tal información prevalece aínda nas curvaturas totais pois a caracterización dos espacios modelo é factible para aqueles invariantes que teñen máis información sobre o tensor de curvatura intrínseco das esferas xeodésicas.

Estructuramos este capítulo como segue. Na Sección 3.1 obtemos enunciados de carácter xeral que, empregando os resultados da Sección 2.1.1, permiten resolver de modo abstracto o problema de caracterización que nos ocupa. Na Sección 3.2 particularizamos tales resultados para os invariantes de orde dous, e na Sección 3.3 para os de orde tres. Iso premitirá evidenciar o diferente comportamento amosado polos distintos invariantes da curvatura. Na Sección 3.3 estructúrase o estudio como segue. Primeiramente trátase o caso no que é posible caracterizar os espacios modelo mediante invariantes totais de orde tres sen necesidade de hipóteses adicionais, para posteriormente abordar o problema cando é necesario asumir condicións máis restrictivas, ben sobre a dimensión da variedade, ben sobre a súa curvatura. Seguidamente veremos que en dimensión sete é imposible unha caracterización das variedades de curvatura constante debido ó feito de que nestas, as curvaturas totais de orde tres son invariantes topolóxicos. Finalmente apuntamos algúns resultados adicionais que se poden obter con aqueles invariantes que involucran derivadas covariantes do tensor de curvatura, xa que estes non se enmarcan no método de traballo que se desenvolveu na Sección 3.1.

3.1 Resultados xerais

Na Sección 2.1.1 observouse o feito de que as curvaturas totais asociadas a invariantes intrínsecos das esferas xeodésicas teñen uns desenvolvementos en serie de potencias que en moitos casos experimentan unha serie de regularidades. O obxectivo desta sección é considerar a expresión en serie de potencias máis xeral posible dunha curvatura total dunha esfera xeodésica (2.4) e deducir os seguintes teoremas de caracterización dos espacios modelo.

Lema 3.1.1 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann de dimensión n. Supoñamos que a integral ó longo de toda esfera xeodésica suficientemente pequena dun invariante escalar da curvatura que ten unha expresión do tipo*

$$\begin{aligned}(3.1) \qquad \int_{G_m(r)} \widetilde{f} \;=\; & c_{n-1} r^{n-1-2k} \Big\{ A(n) + \frac{1}{n} B(n) \tau\, r^2 + \frac{1}{n(n+2)} \Big(C_1(n)\, \|R\|^2 \\ & + C_2(n)\, \|\rho\|^2 + C_3(n)\, \tau^2 + C_4(n)\, \Delta\tau \Big) r^4 + O\left(r^6\right) \Big\}(m)\end{aligned}$$

é a mesma que a correspondente para unha variedade de curvatura seccional constante λ.

Se

$$B(n) \neq 0, \qquad C_1(n) \neq 0$$

$$(3.2) \qquad C_1(n)\left(C_2(n) + \frac{2}{n-1}C_1(n)\right) \geq 0$$

entón M ten curvatura seccional constante λ.

Demostración.
Nunha variedade de curvatura seccional constante λ o desenvolvemento en serie de potencias da curvatura escalar asociada a $\widetilde{f}$ ten a forma:

$$(3.3) \qquad \begin{aligned}\int_{G_m(r)} \widetilde{f} \;=\; & c_{n-1}\, r^{n-1-2\,k}\Big\{A(n) + B(n)(n-1)\lambda\, r^2 + \frac{n-1}{n+2}\Big(2\,C_1(n) \\ & +(n-1)C_2(n) + n(n-1)C_3(n)\Big)\lambda^2\, r^4 + O(r^6)\Big\}\end{aligned}$$

de xeito que comparando obtemos $\tau = n(n-1)\lambda$, xa que $B(n) \neq 0$. En consecuencia, a integral (3.1) na variedade de partida convírtese en

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \widetilde{f} \;=\; & c_{n-1}\, r^{n-1-2\,k}\Big\{A(n) + B(n)(n-1)\lambda\, r^2 + \frac{1}{n(n+2)}\Big(C_1(n)\,\|R\|^2 \\ & +C_2(n)\,\|\rho\|^2 + n^2(n-1)^2 C_3(n)\lambda^2\Big)(m)\, r^4 + O(r^6)\Big\}\end{aligned}$$

e comparando de novo con (3.3) obtemos, despois de cálculos inmediatos que

$$C_1(n)\left(\|R\|^2 - \frac{2}{n-1}\,\|\rho\|^2\right) + \left(C_2(n) + \frac{2}{n-1}C_1(n)\right)\left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{n}\,\tau^2\right) = 0$$

Nas condicións do enunciado do lema e tendo en conta as proposicións 1.7.1 e 1.7.4, é claro que os sumandos da primeira parte da igualdade son ambos non negativos ou non positivos, dependendo do signo de $C_1(n)$, e por tanto deben ser nulos. Iso implica en particular que

$$\|R\|^2 - \frac{2}{n-1}\,\|\rho\|^2 = 0$$

de onde se deduce que a variedade ten curvatura seccional constante. Por último, tendo en conta que $\tau = n(n-1)\lambda$ é claro que a curvatura é precisamente λ. □

Para variedades Kähler e variedades cuaterniónicas Kähler obtéñense resultados similares ó anterior:

Lema 3.1.2 *Sexa (M, g, J) unha variedade Kähler de dimensión complexa n. Supoñamos que para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $G_m(r)$ a curvatura total que ten un desenvolvemento en serie de potencias do tipo*

$$(3.4) \qquad \begin{aligned}\int_{G_m(r)} \widetilde{f} \;=\; & c_{2\,n-1} r^{2\,n-1-2k}\Big\{A(2\,n) + \frac{1}{2\,n}\,B(2\,n)\tau\, r^2 + \frac{1}{4\,n(n+1)}\Big(C_1(2\,n)\,\|R\|^2 \\ & +C_2(2\,n)\,\|\rho\|^2 + C_3(2\,n)\,\tau^2 + C_4(2\,n)\,\Delta\tau\Big)\, r^4 + O\left(r^6\right)\Big\}(m)\end{aligned}$$

coincide coa correspondente á curvatura total dunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ. Se

$$\begin{gathered} B(2n) \neq 0, \qquad C_1(2\,n) \neq 0 \\ C_1(2\,n)\left(C_2(2n) + \frac{4}{n+1}C_1(2n)\right) \geq 0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

entón M ten curvatura seccional holomorfa constante μ.

Demostración.
Para unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante a fórmula (3.4) convírtese en

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \widetilde{f} \;&=\; c_{2n-1}\, r^{2n-1-2k}\Big\{A(2n) + B(2n)\frac{n+1}{2}\mu\, r^2 + \frac{1}{8}\Big(4\,C_1(2n) \\ &\quad +(n+1)C_2(2n) + 2n(n+1)C_3(2n)\Big)\mu^2\, r^4 + O(r^6)\Big\} \end{aligned}$$

Procedendo de xeito análogo ó Lema 3.1.1, obtense facilmente $\tau = n(n+1)\mu$ e

$$C_1(2n)\left(\|R\|^2 - \frac{4}{n+1}\,\|\rho\|^2\right) + \left(C_2(2n) + \frac{4}{n+1}C_1(2n)\right)\left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{2n}\,\tau^2\right) = 0$$

Por tanto, é suficiente con empregar as proposicións 1.7.1 e 1.7.8 xunto coa hipótese (3.5) e o feito de que $\tau = n(n+1)\mu$ para deducir o resultado. $\square$

Lema 3.1.3 *Sexa M unha variedade cuaterniónica Kähler de dimensión $4n$. Supoñamos que para toda esfera xeodésica suficientemente pequena a curvatura escalar total, que ten como desenvolvemento en serie de potencias*

$$\begin{aligned} \int_{G_m(r)} \widetilde{f} \;&=\; c_{4\,n-1} r^{4n-1-2k}\Big\{A(4\,n) + \frac{1}{4\,n}\,B(4\,n)\tau\, r^2 + \frac{1}{8\,n(2n+1)}\Big(C_1(4\,n)\,\|R\|^2 \\ &\quad +C_2(4\,n)\,\|\rho\|^2 + C_3(4\,n)\,\tau^2 + C_4(4\,n)\,\Delta\tau\Big)\, r^4 + O\left(r^6\right)\Big\}(m) \end{aligned} \tag{3.6}$$

coincide coa curvatura escalar total correspondente dunha exfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q–seccional constante ν. Se

$$B(4n) \neq 0 \qquad C_1(4n) \neq 0 \tag{3.7}$$

entón M ten curvatura Q–seccional constante ν.

Demostración.
En primeiro lugar omitimos o caso de dimensión 4, porque é sabido que unha variedade cuaterniónica Kähler de dimensión 4 ten curvatura Q–seccional constante se e só se ten

curvatura seccional constante, o cal nos reduce ó Lema 3.1.1. Para unha variedade Kähler de curvatura Q–seccional constante ν, a expresión (3.6) redúcese a

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \widetilde{f} &= c_{4n-1}\, r^{4n-1-2k}\Big\{A(4n) + B(4n)(n+2)\nu\, r^2 + \frac{1}{2(2\,n+1)}\Big((5\,n+1)\,C_1(4n) \\ &\quad +(n+2)^2 C_2(4n) + 4n(n+2)^2 C_3(4n)\Big)\nu^2\, r^4 + O(r^6)\Big\}\end{aligned}$$

Como nos lemas previos, obtemos $\tau = 4n(n+2)\nu$. Facemos notar agora que toda variedade cuaterniónica Kähler de dimensión maior ca 4 é Einstein, e por tanto, $\|\rho\|^2 = \frac{\tau^2}{4n}$. En consecuencia, tamén deducimos

$$C_1(4n)\left(\|R\|^2 - \frac{5\,n+1}{4\,n(n+2)^2}\,\tau^2\right) = 0$$

Finalmente, a Proposición 1.7.10 xunto co feito de que $C_1(4n) \neq 0$ proban que a variedade ten curvatura Q–seccional constante. Tal constante é ν en vista de que $\tau = 4n(n+2)\nu$. □

Observación 3.1.4 Na Sección 1.7 non se incluiu o estudio do Plano de Cayley nin do seu dual non compacto, variedades que se inclúen entre os espacios modelo por seren homoxéneas dous puntos. É neste momento cando resulta imprescindible facer un comentario sobre eles co gallo de enunciar un resultado xeral para a clasificación dos espacios modelo mediante as curvaturas totais de esferas xeodésicas.

É ben sabido que o plano de Cayley $Cay\,P^2$ (ou o seu dual non compacto) ten unha estructura adicional que fai que o seu grupo de holonomía se reduza a $Spin(9)$. Por outra banda, se unha variedade de Riemann ten como grupo de holonomía un subgrupo de $Spin(9)$, entón ela mesma é localmente isométrica ó plano de Cayley, o seu dual non compacto ou a unha variedade chá de dimensión 16 [13]. Deste xeito, a caracterización dunha variedade con grupo de holonomía adaptado a $Spin(9)$ é un problema trivial que nen sequera precisa de hipóteses adicionais.

Observación 3.1.5 Representemos por $\widetilde{f}$ a un invariante escalar da curvatura. Supoñamos que a curvatura total asociada ten un desenvolvemento en serie de potencias do tipo

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \widetilde{f} &= c_{n-1} r^{n-1-2k}\Big\{A(n) + \frac{1}{n}\,B(n)\tau\, r^2 + \frac{1}{n(n+2)}\Big(C_1(n)\,\|R\|^2 \\ &\quad +C_2(n)\,\|\rho\|^2 + C_3(n)\,\tau^2 + C_4(n)\,\Delta\tau\Big)\, r^4 + O\left(r^6\right)\Big\}(m)\end{aligned}$$

definido en toda esfera xeodésica de radio suficientemente pequeno, onde as funcións A, B, C_1, C_2, C_3 e C_4 son polinomios que só dependen da dimensión da variedade en cuestión.

É sinxelo ver que se as condicións (3.2) se verifican, tamén se verifican automáticamente (3.5) e (3.7) en variedades Kähler e variedades cuaterniónicas Kähler, respectivamente. En consecuencia, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.1.6 *Sexa M unha variedade de Riemann con grupo de holonomía adaptado a un espacio modelo. Se para toda esfera xeodésica de radio suficientemente pequeno $\int_{G_m(r)} \widetilde{f}$ é a mesma que para unha esfera xeodésica do mesmo radio nese espacio modelo e se verifican as condicións* (3.2)*, entón M é localmente isométrica a ese espacio modelo.*

Observación 3.1.7 Se M é unha variedade Einstein, o desenvolvemento (2.4) simplifícase en virtude da Proposición 1.7.1 para obter unha fórmula do tipo:

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \widetilde{f} \;=\; & c_{n-1} r^{n-1-2k}\Big\{A(n) + \frac{1}{n}\,B(n)\tau\, r^2 + \frac{1}{n(n+2)}\Big(\bar{C}_1(n)\,\|R\|^2 \\ & +\bar{C}_3(n)\,\tau^2\Big)\, r^4 + O\left(r^6\right)\Big\}(m)\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde evidentemente, $\bar{C}_1(n) = C_1(n)$ e $\bar{C}_3(n) = \frac{C_2(n)}{n} + C_3(n)$ na fórmula (2.4). O lema seguinte proba que no caso dunha variedade Einstein a caracterización dos espacios modelo é moitísimo máis sinxela.

Teorema 3.1.8 *Sexa M unha variedade Einstein de dimensión n con grupo de holonomía adaptado a un espacio modelo. Supoñamos que para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{f}$, que ten un desenvolvemento en serie de potencias do tipo* (3.8)*, é a mesma que para unha exfera xeodésica do mesmo radio nese espacio modelo. Se*

$$B(n) \neq 0 \qquad C_1(n) \neq 0$$

entón M é localmente isométrica a dito espacio modelo.

Demostración.
Cando a variedade é Einstein o desenvolvemento (2.4) transfórmase nunha expresión do tipo (3.8). É inmediato ver que para este caso particular as inecuacións (3.2) se cumplen trivialmente, e en consecuencia basta con aplicar o Teorema 3.1.6. $\square$

Por último, tamén se poden obter resultados de caracterización baixo outro tipo de hipóteses adicionais.

Teorema 3.1.9 *Sexa M unha variedade conformemente chá de dimensión $n > 2$. Se para toda esfera xeodésica suficientemente pequena a integral dun invariante escalar da curvatura que ten unha expresión do tipo* (2.4) *é a mesma que para unha variedade de curvatura seccional constante λ e ademais*

$$B(n) \neq 0, \qquad C_1(n) + \frac{n-2}{4}\,C_2(n) \neq 0$$

entón, a variedade ten curvatura seccional constante λ.

Demostración.
Procedendo de xeito análogo ó Lema 3.1.1 obtemos primeiramente que $\tau = n(n-1)\lambda$ empregando que $B(n) \neq 0$ e posteriormente, empregando a relación da Proposición 1.7.12 obtemos a igualdade

$$\frac{2(n-1)}{n}\left(C_1(n) + \frac{n-2}{4}C_2(n)\right)\left(\|R\|^2 - \frac{2}{n-1}\|\rho\|^2\right) = 0$$

O resultado séguese de novo da Proposición 1.7.4. □

Teorema 3.1.10 *Sexa (M, g, J) unha variedade Kähler Bochner chá de dimensión complexa $n > 2$. Se para toda esfera xeodésica suficientemente pequena a integral dun invariante escalar da curvatura que ten unha expresión do tipo* (3.4) *é a mesma que para unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ e ademais*

$$B(2n) \neq 0, \qquad C_1(2n) + \frac{n+2}{8}C_2(2n) \neq 0$$

entón, a variedade ten curvatura seccional constante μ.

Demostración.
Ó igual ca no Lema 3.1.2 e dado que $B(2n) \neq 0$ temos $\tau = n(n+1)\mu$. Agora, tendo en conta a Proposición 1.7.13, a condición obtida no anteriormente citado lema redúcese a

$$\frac{2(n+1)}{n}\left(C_1(2n) + \frac{n+2}{8}C_2(2n)\right)\left(\|R\|^2 - \frac{4}{n+1}\|\rho\|^2\right) = 0$$

e o resultado séguese da Proposición 1.7.8. □

Observación 3.1.11 Rematamos esta sección facendo un breve comentario sobre a imposibilidade de caracterizar certas variedades de curvatura seccional constante a partir das curvaturas totais de esferas xeodésicas.

En primero lugar, nunha variedade de dimensión 3, as esferas xeodésicas teñen, obviamente, dimensión 2. Ademais, é ben coñecido que para unha superficie, $\tau = 2K$ sendo K a curvatura de Gauss. Tendo isto en conta, e empregando o coñecido Teorema de Gauss–Bonnet, verifícase que nunha variedade de dimensión 3

$$\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau} = 8\pi$$

o que nos indica que neste caso a curvatura escalar total é un invariante topolóxico. Isto, por suposto, implica que caracterizar a curvatura, ou calquera aspecto xeométrico da variedade vai a resultar imposible empregando este invariante total.

En [9] estudiamos o que sucedía para os invariantes de segunda orde, e obtivemos (véxase tamén a sección seguinte) que as curvaturas totais de segunda orde son invariantes topolóxicos nas variedades de curvatura seccional constante de dimensión 5. Isto significa que é imposible caracterizar a curvatura dunha variedade de curvatura seccional constante mediante curvaturas totais desta orde. Aínda así podemos caracterizar as variedades de curvatura seccional constante entre aquelas que non o son.

A continuación veremos que situacións análogas suceden en dimensións superiores. Para iso consideremos unha curvatura total de orde k cun desenvolvemento do tipo

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \widetilde{f} \;=\; & c_{n-1} r^{n-1-2k} \Big\{ A(n) + \frac{1}{n}\, B(n) \tau\, r^2 + \frac{1}{n(n+2)} \Big(C_1(n)\, \|R\|^2 \\ & + C_2(n)\, \|\rho\|^2 + C_3(n)\, \tau^2 + C_4(n)\, \Delta\tau \Big)\, r^4 + O\left(r^6\right) \Big\}(m)\end{aligned}$$

Vimos na expresión (2.8) que hasta certo punto os coeficientes do anterior desenvolvemento en serie de potencias poden ser determinados a partir do que alí denotamos $\bar{a}_{\widetilde{f}}(n-1)$.

Neste caso, se M ten dimensión $n = 2\,k + 1$ entón está claro que

$$B(2\,k+1) = 0$$

Por tanto, non se cumplen as hipóteses do Lema 3.1.1. De feito, se analizamos máis detidamente o problema, da ecuación (2.5) deducimos que efectivamente

$$\int_{G_m(r)} \widetilde{f} = c_{2\,k}\, a_{\widetilde{f}}(2\,k) \tag{3.9}$$

co cal, *nunha variedade de dimensión* $2\,k+1$ *de curvatura seccional constante unha curvatura total de orde* k *non depende nin do punto nin do radio da esfera xeodésica nin sequera da curvatura da variedade.* Isto significa, en particular, que é imposible caracterizar a curvatura dunha variedade de curvatura seccional constante de dimensión $2\,k+1$ por medio das curvaturas totais de orde k.

Nótese que queda, sen embargo, o problema de caracterizar a clase das variedades de curvatura seccional constante entre aquelas que non o son. Como veremos é posible aínda respostar afirmativamente a esta cuestión nun grande número de casos.

3.2 Invariantes de orde dous

Aínda que o estudio das curvaturas totais de segunda orde xa foi realizado en [9] e [10] incluímos, por razóns de completitude, un enunciado que resume brevemente os resultados obtidos alí.

Teorema 3.2.1 *Sexa M unha variedade de Riemann de dimensión $n \neq 5$ con grupo de holonomía adaptado a un espacio modelo. Consideremos a curvatura total asociada ó invariante escalar de segunda orde*

$$\widetilde{f} = \alpha \,\|\widetilde{R}\|^2 + \beta \,\|\widetilde{\rho}\|^2 + \gamma \,\widetilde{\tau}^2 + \epsilon \,\widetilde{\Delta}\widetilde{\tau}$$

sendo α, β, γ e ϵ constantes. Se para toda pequena esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{f}$ é a mesma que para o espacio modelo e ademais

$$2\,\alpha + (n-2)\,\beta + (n-2)(n-1)\,\gamma \neq 0$$

$$2(59n^2 - 93n - 10)\,\alpha - (n^3 - 9n^2 - 16n - 20)\,\beta - (n-2)(n-1)(n^2 + 13n + 10)\,\gamma \neq 0$$

$$\begin{gathered}\big(2(59n^2 - 93n - 10)\,\alpha - (n^3 - 9n^2 - 16n - 20)\,\beta - (n-2)(n-1)(n^2 + 13n + 10)\big)\\ (2(4n^3 + 25n^2 + 109n - 270)\,\alpha + (4n^4 + 117n^3 - 161n^2 - 368n + 540)\,\beta\\ +(n-1)(4n^4 + 37n^3 + 139n^2 - 8n + 540)\,\gamma) \geq 0\end{gathered}$$

entón M é localmente isométrica a ese espacio modelo.

Demostración.
Empregando a Observación 2.3.5 e os lemas 2.3.6, 2.3.7 e 2.3.8 é inmediato obter, simplemente facendo operacións, a seguinte expresión:

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \widetilde{f} = c_{n-1}\, r^{n-1} \Bigg\{ & \frac{(n-2)(n-1)(2\,\alpha+(n-2)\,\beta+(n-2)(n-1)\,\gamma)}{r^4}\\ & - \frac{(n-5)(n-2)(2\,\alpha+(n-2)\,\beta+(n-2)(n-1)\,\gamma)}{6\,n\,r^2}\,\tau(m)\\ & \frac{1}{n\,(n+2)}\Bigg[\left(\frac{59\,n^2-93\,n-10}{60}\,\alpha - \frac{n^3-9\,n^2-16\,n-20}{120}\,\beta - \frac{(n-2)\,(n-1)\,(n^2+13\,n+10)}{120}\,\gamma\right)\|R\|^2\\ & + \left(\frac{2\,(n^2-37\,n+60)}{45}\,\alpha + \frac{n^3+31\,n^2-16\,n-120}{45}\,\beta + \frac{n^4+10n^3+43n^2-14n+120}{45}\,\gamma\right)\|\rho\|^2\\ & + \left(\frac{n^2-11\,n+2}{36}\,\alpha + \frac{n^3-13\,n^2-16\,n+44}{72}\,\beta + \frac{n^4-14n^3+29n^2-60n-188}{72}\,\gamma\right)\tau^2\\ & - \frac{(n-5)(n-2)(2\,\alpha+(n-2)\,\beta+(n-2)(n-1)\,\gamma)}{72}\,\Delta\tau\Bigg](m) + O\left(r^2\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

O resultado séguese agora trivialmente do Teorema 3.1.6 despois de facer cálculos. □

Dous casos particulares importantes, por corresponder a curvaturas totais asociadas a invariantes escalares que forman parte da base descrita en (1.3), ós que se aplica o teorema anterior, recóllense nos corolarios seguintes.

Corolario 3.2.2 *Sexa M unha variedade de Riemann de dimensión $n \neq 5$ con grupo de holonomía adaptado a un espacio modelo. Se en toda esfera xeodésica $G_m(r)$ suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \|\widetilde{R}\|^2$ coincide coa dunha esfera xeodésica do mesmo radio no espacio modelo, entón a variedade é localmente isométrica a ese espacio modelo.*

Demostración.
Tómese $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ e $\epsilon = 0$ no teorema anterior e obsérvese que as funcións $59\,n^2 - 93\,n - 10$ e $4\,n^3 - 329\,n^2 + 667\,n - 210$ son positivas para $n > 1$. □

Corolario 3.2.3 *Sexa M unha variedade de Riemann con grupo de holonomía adaptado a un espacio modelo e de dimensión $n \in \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Se en toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\rho}\|^2$ coincide coa dunha esfera xeodésica do mesmo radio no espacio modelo, entón a variedade é localmente isométrica a ese espacio modelo. No caso particular de que M teña por grupo de holonomía $Sp(1){\cdot}Sp(n)$ a restricción sobre a dimensión pode ser eliminada.*

Demostración.
Tómese $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ e $\epsilon = 0$ no teorema anterior. A función $4\,n^4 + 123\,n^3 - 215\,n^2 - 464\,n + 420$ é positiva para $n > 1$, mentres que $-(n^3 - 9\,n^2 - 16\,n - 20)$ só é positiva con $2 \leq n \leq 10$. O caso cuaterniónico pode deducirse directamente do Lema 3.1.3. □

Observación 3.2.4 Se M é unha variedade Einstein de dimensión $n \neq 5$ e tomamos unha curvatura total de segunda orde coma no Teorema 3.2.1 con

$$2\,\alpha + (n-2)\,\beta + (n-2)(n-1)\,\gamma \neq 0$$
$$2(59n^2 - 93n - 10)\,\alpha - (n^3 - 9n^2 - 16n - 20)\,\beta - (n-2)(n-1)(n^2 + 13n + 10)\,\gamma \neq 0$$

entón o teorema de caracterización tamén é certo, isto é, se M ten grupo de holonomía adaptado a un espacio modelo e a curvatura total considerada é a mesma que para unha esfera xeodésica do mesmo radio nese espacio modelo, verifícase que a variedade é localmente isométrica a ese espacio modelo.

En particular este comentario aplícase ó caso en que se considera $\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\rho}\|^2$ ou $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}^2$.

Observación 3.2.5 Se M é unha variedade conformemente chá de dimensión $n \neq 5$, $n > 3$ e tomamos unha curvatura total de segunda orde coma no Teorema 3.2.1 con

$$2\,\alpha + (n-2)\,\beta + (n-2)(n-1)\,\gamma \neq 0$$
$$\begin{gathered} 2(2n^3 + 99n^2 - 11n - 270)\,\alpha + (2n^4 + 55n^3 - 129n^2 - 128n + 540)\,\beta \\ +(n-2)(2n^4 + 17n^3 + 50n^2 - 19n + 270)\,\gamma \neq 0 \end{gathered}$$

entón se a curvatura total considerada é a mesma que para unha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante λ, verifícase que a variedade tamén ten curvatura constante λ.

En particular, este comentario tamén se aplica ó caso en que se considera $\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\rho}\|^2$ ou $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}^2$.

Como última nota nesta sección queda por apuntar que é o que sucede no caso de dimensión 5 para as variedades de curvatura seccional constante. Aínda que os resultados non son tan fortes como anteriormente, poden obterse resultados satisfactorios como o seguinte teorema.

Teorema 3.2.6 *Sexa M unha variedade de Riemann de dimensión 5. Consideremos a curvatura total asociada ó invariante escalar de segunda orde*

$$\widetilde{f} = \alpha\,\|\widetilde{R}\|^2 + \beta\,\|\widetilde{\rho}\|^2 + \gamma\,\widetilde{\tau}^2 + \epsilon\,\widetilde{\Delta}\widetilde{\tau}$$

sendo α, β, γ e ϵ constantes. Se para toda pequena esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{f}$ é a mesma que para unha variedade de curvatura seccional constante e ademais

$$10\,\alpha + \beta - 6\,\gamma \neq 0$$

$$(10\,\alpha + \beta - 6\,\gamma)(14\,\alpha + 59\,\beta + 222\,\gamma) \geq 0$$

entón M é unha variedade de curvatura seccional constante.

Demostración.
Neste caso o desenvolvemento en serie de potencias é:

$$\begin{aligned}
\int_{G_m(r)} \widetilde{f} &= c_4 \Big\{ 12(2\,\alpha + 3\,\beta + 12\,\gamma) + \frac{r^4}{630}\Big[30(10\,\alpha + \beta - 6\,\gamma)\,\|R\|^2 \\
&\quad -40(2\,\alpha - 7\,\beta - 30\,\gamma)\,\|\rho\|^2 - (14\,\alpha + 59\,\beta + 222\,\gamma)\,\tau^2\Big](m) + O\left(r^6\right)\Big\} \\
&= c_4 \Big\{ 12(2\,\alpha + 3\,\beta + 12\,\gamma) + \frac{r^4}{630}\Big[30(10\,\alpha + \beta - 6\,\gamma)\left(\|R\|^2 - \frac{1}{2}\,\|\rho\|^2\right) \\
&\quad +5(14\,\alpha + 59\,\beta + 222\,\gamma)\left(\|\rho\|^2 - \frac{1}{5}\,\tau^2\right)\Big](m) + O\left(r^6\right)\Big\}
\end{aligned}$$

e tendo en conta que para una variedade de curvatura constante se verifica que tal integral é constante, tal e como se viu en (3.9), xa só hai que aplicar as proposicións 1.7.1 e 1.7.4 xunto coa hipótese para deducir o resultado. □

En particular, o teorema anterior aplícase para o caso de $\int_{G_m(r)} \|\widetilde{R}\|^2$ e $\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\rho}\|^2$.

Enfatizamos de novo que non podemos neste casos caracterizar a curvatura da variedade senón só o feito de pertencer á clase das variedades de curvatura seccional constante.

Observación 3.2.7 Se no teorema anterior supoñemos ademais que a variedade M é Einstein podemos eliminar a segunda condición sobre os coeficientes, é dicir, só hai que esixir

$$10\,\alpha + \beta - 6\,\gamma \neq 0$$

Por outra banda, no caso de que M sexa conformemente chá basta esixir en cambio que

$$\alpha + \beta + 3\,\gamma \neq 0$$

3.3 Invariantes de orde tres

No que segue desta sección levaremos a cabo o estudio da caracterización dos espacios modelo a partir das curvaturas escalares totais de terceira orde, completando así dito estudio para todos os membros das bases coñecidas para os invariantes de orde dous e tres (1.3), (1.4). Posteriormente tamén sinalaremos algúns resultados adicionais que se poden obter a partir dos desenvolvementos en serie obtidos na Sección 2.4.

En primeiro lugar empezamos por aquelas curvaturas escalares totais nas que a caracterización dos espacios modelo é totalmente posible, agás no caso excepcional das variedades de curvatura seccional constante de dimensión 7, onde, como vimos, tales curvaturas totais son invariantes topolóxicos. A continuación tratamos todos aqueles casos nos que a caracterización dos espacios modelo só é posible cando se asumen hipóteses adicionais sobre a variedade, ben sexa sobre a dimensión ou sobre estructuras adicionais do tensor de curvatura.

Asumiremos que a dimensión da variedade é maior ou igual ca 3 en todo o que segue.

3.3.1 Caracterizacións sen hipóteses adicionais

Os seguintes tres invariantes de orde tres caracterizan totalmente os espacios modelo agás en dimensión sete.

Teorema 3.3.1 *Sexa M unha variedade de Riemann de dimensión $n \neq 7$ con grupo de holonomía adaptado a un espacio modelo. Equivalen:*

(i) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{R}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio no espacio modelo.*

(ii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)}\langle\widetilde{\rho}, \dot{\widetilde{R}}\rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio no espacio modelo.*

(iii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{R}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio no espacio modelo.*

(iv) *M é localmente isométrica a ese espacio modelo.*

Demostración.
É claro que (iv) implica calquera dos outros tres resultados. O noso obxectivo será probar que eses tres implican o cuarto. Para iso utilizaremos o Teorema 3.1.6.

Para o caso de $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{R}\|^2$ botando un vistazo ó Lema 2.4.20 vemos que

$$\begin{aligned}
B(n) &= -\frac{(n-7)(n-2)^2(n-1)}{3}\\
C_1(n) &= \frac{(n-2)(n-1)(59\,n^2-101\,n-14)}{60}\\
C_2(n)+\frac{2}{n-1}\,C_1(n) &= \frac{4\,n^4+49\,n^3+335\,n^2+24\,n+1036}{90}
\end{aligned}$$

e unha pequena análise destas funcións serve para comprobar que efectivamente se cumplen as inecuacións (3.2).

Para $\int_{G_m(r)} \langle\widetilde{\rho},\dot{\widetilde{R}}\rangle$ temos segundo o Lema 2.4.23

$$\begin{aligned}
B(n) &= -\frac{(n-7)(n-2)^2}{3}\\
C_1(n) &= \frac{(n-2)(n-1)(59\,n^3-179\,n^2+188n+28)}{60}\\
C_2(n)+\frac{2}{n-1}\,C_1(n) &= \frac{4\,n^4+209\,n^3-265\,n^2-696\,n+1036}{90(n-1)}
\end{aligned}$$

e ó cumplírense as inecuacións (3.2) séguese que tamén a variedade é localmente isométrica ó espacio modelo.

Finalmente, $\int_{G_m(r)} \check{\breve{R}}$ verifica, segundo o Lema 2.4.24

$$\begin{aligned}
B(n) &= -\frac{2(n-7)(n-2)}{3}\\
C_1(n) &= \frac{179n^2-261\,n-14}{30}\\
C_2(n)+\frac{2}{n-1}\,C_1(n) &= \frac{(n-2)(4\,n^2+25\,n+259)}{45(n-1)}
\end{aligned}$$

co cal, de novo despois de ver que se verifican as inecuacións (3.2) tamén se segue o resultado. □

3.3.2 Caracterizacións con hipóteses sobre a dimensión

A continuación, expoñemos unha serie de resultados onde os invariantes de terceira orde, sen hipótese adicionais, son suficientes para caracterizar os espacios modelo cando a dimensión é suficientemente baixa.

Teorema 3.3.2 *Sexa M unha variedade de Riemann con grupo de holonomía adaptado a un espacio modelo e de dimensión $n \in \{3,4,5,6\}$. Se en toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{\rho}\|^2$ coincide coa dunha esfera xeodésica do mesmo radio no espacio modelo, entón a variedade é localmente isométrica a ese espacio modelo.*

Demostración.
Segundo o Lema 2.4.19 verifícase

$$\begin{aligned} B(n) &= -\frac{(n-7)(n-2)^3(n-1)}{6} \\ C_1(n) &= -\frac{(n-2)(n-1)(n^3-n^2-28\,n-28)}{120} \\ C_2(n)+\frac{2}{n-1}\,C_1(n) &= \frac{(n-2)(n+2)(n^3+34\,n^2-38\,n+147)}{45} \end{aligned}$$

Resulta agora que a función $C_1(n)$ é positiva cando $2 \le n \le 6$, mentres que $C_2(n) + \frac{2}{n-1}\,C_1(n)$ é positiva con $n \ge 2$. Aplicando o Teorema 3.1.6 dedúcese o resultado. □

Teorema 3.3.3 *Sexa M unha variedade de Riemann con grupo de holonomía adaptado a un espacio modelo e de dimensión $3 \le n \le 41$, $n \neq 7$. Se en toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{\rho}}$ coincide coa dunha esfera xeodésica do mesmo radio no espacio modelo, entón a variedade é localmente isométrica a ese espacio modelo.*

Demostración.
O desenvolvemento en serie do Lema 2.4.21 implica

$$\begin{aligned} B(n) &= -\frac{(n-7)(n-2)^3}{6} \\ C_1(n) &= -\frac{(n^3-41\,n^2-28\,n-28)(n-2)}{120} \\ C_2(n)+\frac{2}{n-1}\,C_1(n) &= \frac{(n-2)(4\,n^4+309\,n^3-485\,n^2-576\,n+1036)}{180(n-1)} \end{aligned}$$

sendo $C_1(n)$ positiva cando $2 \le n \le 41$, e $C_2(n) + \frac{2}{n-1}\,C_1(n)$ positiva se $n \ge 2$. Co Teorema 3.1.6 deducimos o resultado. □

Teorema 3.3.4 *Sexa M unha variedade de Riemann con grupo de holonomía adaptado a un espacio modelo e de dimensión $3 \le n \le 21$, $n \neq 7$. Se en toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\rho}, \overline{\overline{R}} \rangle$ coincide coa dunha esfera xeodésica do mesmo radio no espacio modelo, entón a variedade é localmente isométrica a ese espacio modelo.*

Demostración.
A partir do Lema 2.4.22 obtemos

$$\begin{aligned} B(n) &= -\frac{(n-7)(n-2)^3}{6} \\ C_1(n) &= -\frac{n^4-23\,n^3+34\,n^2+28\,n+56}{120} \\ C_2(n)+\frac{2}{n-1}\,C_1(n) &= \frac{4\,n^5+221\,n^4-723\,n^3+454\,n^2+1828\,n-2072}{180(n-1)} \end{aligned}$$

onde a función $C_1(n)$ é positiva se $2 \leq n \leq 21$, e $C_2(n) + \frac{2}{n-1} C_1(n)$ é positiva se $n \geq 2$. De novo, o Teorema 3.1.6 implica o resultado. $\square$

3.3.3 Caracterizacións con hipóteses sobre o tensor de curvatura

Como se fai notar no Teorema 3.1.8, nas variedades Einstein o problema de caracterización dos espacios modelo é máis sinxelo. A continuación veremos que todos os invariantes de orde tres que non involucran derivadas covariantes do tensor de curvatura serven para caracterizar ós espacios modelo entre todas aquelas variedades que son Einstein.

Teorema 3.3.5 *Sexa (M, g) unha variedade Einstein de dimensión $n \neq 7$ e N un certo espacio modelo da mesma dimensión. Os seguintes enunciados son equivalentes:*

(i) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}^3$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio en N.*

(ii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{\rho}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio en N.*

(iii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{R}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio en N.*

(iv) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{\rho}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio en N.*

(v) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\rho}, \overline{\widetilde{R}} \rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio en N.*

(vi) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho}, \dot{\widetilde{R}} \rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio en N.*

(vii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{R}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio en N.*

(viii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\bar{\widetilde{R}}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio en N.*

(ix) *M e N son localmente isométricas.*

Demostración.
Consiste en aplicar soamente o Teorema 3.1.8 ós desenvolvementos en serie de potencias dados polos lemas 2.4.18 a 2.4.25. $\square$

As variedades conformaemente chás tamén nos dan unha estructura adicional do tensor de curvatura que permite, neste caso, caracterizar as variedades de curvatura seccional constante.

Teorema 3.3.6 *Sexa (M, g) unha variedade conformemente chá de dimensión $n \neq 7$. Os seguintes enunciados son equivalentes:*

(i) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}^3$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante λ.*

(ii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{\rho}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante λ.*

(iii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{R}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante λ.*

(iv) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{\rho}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante λ.*

(v) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\rho}, \overline{\widetilde{R}} \rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante λ.*

(vi) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho}, \dot{\widetilde{R}} \rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante λ.*

(vii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{R}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante λ.*

(viii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\bar{\widetilde{R}}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante λ.*

(ix) *M é unha variedade de curvatura constante λ.*

Demostración.
Aplicar o Teorema 3.1.9 ós desenvolvementos en serie de potencias dados polos lemas 2.4.18 a 2.4.25, e observar que o polinomio a estudiar $C_1(n) + \frac{n-2}{4} C_2(n)$ non ten raíces naturais para $n > 3$. $\square$

As variedades Kähler Bochner chás tamén teñen unha estructura adicional no tensor de curvatura que permite caracterizar as variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante.

Teorema 3.3.7 *Sexa (M, g, J) unha variedade Kähler Bochner chá. Os seguintes enunciados son equivalentes:*

(i) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}^3$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ.*

(ii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{\rho}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ.*

(iii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{R}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ.*

(iv) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{\rho}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ.*

(v) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\rho}, \overline{\overline{\widetilde{R}}} \rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ.*

(vi) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho}, \dot{\widetilde{R}} \rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ.*

(vii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{R}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ.*

(viii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\bar{\widetilde{R}}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ.*

(ix) *M é unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante μ.*

Demostración.
Aplicar o Teorema 3.1.10 ós desenvolvementos en serie de potencias dados polos lemas 2.4.18 a 2.4.25. É sinxelo verificar que o polinomio $C_1(2n) + \frac{n+2}{8} C_2(2n)$ non ten raíces naturais. $\square$

En último lugar enfatizamos o feito de que como as variedades cuaterniónicas Kähler son Einstein (Sección 1.7.4), aplícase o Teorema 3.3.5 e obtemos o seguinte resultado que presentamos sen demostración.

Teorema 3.3.8 *Sexa M unha variedade cuaterniónica Kähler de dimensión $4n$ con $n > 1$. Os seguintes enunciados son equivalentes:*

(i) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}^3$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q–seccional constante ν.*

(ii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{\rho}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q–seccional constante ν.*

(iii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{R}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q–seccional constante ν.*

(iv) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{\rho}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q–seccional constante ν.*

(v) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\rho}, \overline{\overline{\widetilde{R}}} \rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q–seccional constante ν.*

(vi) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho}, \dot{\widetilde{R}} \rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q–seccional constante ν.*

(vii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{R}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q–seccional constante ν.*

(viii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\bar{\widetilde{R}}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q–seccional constante ν.*

(ix) *M é unha variedade cuaterniónica Kähler de curvatura Q–seccional constante ν.*

3.3.4 O caso excepcional de dimensión sete

En dimensión 7, como vimos anteriormente, non se pode obter unha caracterización das variedades de curvatura seccional constante. Sen embargo, aínda é posible, enunciar o seguinte teorema de caracterización.

Teorema 3.3.9 *Sexa (M,g) unha variedade de Riemann de dimensión 7. Os seguintes enunciados son equivalentes:*

(i) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{R}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante.*

(ii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{\rho}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante.*

(iii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\rho}, \overline{\widetilde{R}} \rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante.*

(iv) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho}, \dot{\widetilde{R}} \rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante.*

(v) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{R}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante.*

(vi) *M é unha variedade de curvatura constante.*

Demostración.
A partir dos lemas 2.4.20, 2.4.21, 2.4.22, 2.4.23 e 2.4.24 obtemos despois de cálculos inmediatos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{R}\|^2 &= c_6\Big\{1800 + r^4\Big[\tfrac{155}{9}\left(\|R\|^2 - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2\right) + \tfrac{629}{81}\left(\|\rho\|^2 - \tfrac{1}{7}\tau^2\right)\Big] + O\left(r^6\right)\Big\} \\
\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{\rho}} &= c_6\Big\{750 + r^4\Big[\tfrac{17}{36}\left(\|R\|^2 - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2\right) + \tfrac{1823}{324}\left(\|\rho\|^2 - \tfrac{1}{7}\tau^2\right)\Big] + O\left(r^6\right)\Big\} \\
\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\rho}, \overline{\widetilde{R}} \rangle &= c_6\Big\{120 + r^4\Big[\tfrac{11}{3}\left(\|R\|^2 - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2\right) + \tfrac{5}{27}\left(\|\rho\|^2 - \tfrac{1}{7}\tau^2\right)\Big] + O\left(r^6\right)\Big\} \\
\int_{G_m(r)} \langle \widetilde{\rho}, \dot{\widetilde{R}} \rangle &= c_6\Big\{750 + r^4\Big[\tfrac{5}{4}\left(\|R\|^2 - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2\right) + \tfrac{235}{36}\left(\|\rho\|^2 - \tfrac{1}{7}\tau^2\right)\Big] + O\left(r^6\right)\Big\} \\
\int_{G_m(r)} \breve{\widetilde{R}} &= c_6\Big\{300 + r^4\Big[\tfrac{61}{18}\left(\|R\|^2 - \tfrac{1}{3}\|\rho\|^2\right) + \tfrac{307}{162}\left(\|\rho\|^2 - \tfrac{1}{7}\tau^2\right)\Big] + O\left(r^6\right)\Big\}
\end{aligned}$$

Por outra banda a Ecuación (3.9) indica que nun espacio de curvatura constante as integrais anteriores son constantes, e en particular, os termos correspondentes ó coeficiente de r^4 son todos nulos. Así, en vista dos Teoremas 1.7.4 e 1.7.1 séguese o resultado. $\square$

De novo enfatizamos que o anterior teorema non implica que a variedade sexa localmente isométrica á variedade de curvatura constante considerada, xa que as curvaturas non teñen porqué ser iguais.

Na clase das variedades Einstein e das variedades conformemente chás, podemos completar o anterior resultado. A demostración é análoga e por esa razón omitímola.

Teorema 3.3.10 *Sexa M unha variedade de dimensión 7 que é Einstein ou conformalmente plana. Os seguintes enunciados son equivalentes:*

(i) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}^3$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura seccional constante.*

(ii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\|\widetilde{\rho}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura seccional constante.*

(iii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \breve{\bar{\tilde{R}}}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura seccional constante.*

(iv) *M ten curvatura seccional constante.*

3.3.5 Outros resultados

Para acabar o noso estudio, trataremos agora cunha serie de invariantes, que se ben non se adaptan ó tipo de teoremas que foron probados con anterioridade, presentan un certo interese derivado do feito de que se poden enunciar resultados que aportan información sobre a xeometría do espacio ambiente.

Teorema 3.3.11 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann. Equivalen:*

(i) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\nabla}\widetilde{\rho}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante.*

(ii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle\widetilde{\Delta}\widetilde{\rho}, \widetilde{\rho}\rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio nunha variedade de curvatura constante.*

(iii) *M é unha variedade de curvatura constante.*

Demostración.
Escribindo a fórmula do Lema 2.4.27 do xeito:

$$\begin{aligned}\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\nabla}\widetilde{\rho}\|^2 &= -\int_{G_m(r)} \langle\widetilde{\Delta}\widetilde{\rho},\widetilde{\rho}\rangle\\ &= c_{n-1}r^{n-1}\left\{\frac{1}{n\,(n+2)\,r^2}\left(\frac{n^2(n-1)}{3}\left(\|R\|^2-\frac{2}{n-1}\,\|\rho\|^2\right)\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.+\frac{2\,n(9\,n+10)}{9}\left(\|\rho\|^2-\frac{1}{n}\,\tau^2\right)\right)(m)+O\,(1)\right\}\end{aligned}$$

está claro que o resultado se segue dos Teoremas 1.7.4 e 1.7.1. □

Observación 3.3.12 En [6] existe unha versión máis forte do teorema anterior que foi obtida empregando o desenvolvemento en serie de potencias do Lema 1.6.8. Este resultado di:

O tensor de Ricci de toda esfera xeodésica suficientemente pequena é Codazzi se e só se a variedade ambiente ten curvatura seccional constante.

O tensor de Ricci é Codazzi se $\nabla_X\rho_{YZ} = \nabla_Y\rho_{XZ}$ para calquera campos de vectores X, Y e Z.

Empregando este último enunciado podemos tamén probar o teorema anterior. De feito, nunha variedade de curvatura seccional constante as esferas xeodésicas tamén teñen curvatura seccional constante, e en particular o seu tensor de Ricci é paralelo. Isto significa que $\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\nabla}\widetilde{\rho}\|^2 = 0$ xa que por hipótese tal curvatura escalar coincide coa correspondente nun espacio de curvatura seccional constante. En consecuencia, $\widetilde{\nabla}\widetilde{\rho} = 0$ de onde o tensor de Ricci das esferas xeodésicas é paralelo e por tanto Codazzi. O resultado séguese pois do enunciado anterior.

Teorema 3.3.13 *Sexa (M, g) unha variedade de Riemann. Equivalen:*

(i) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \|\widetilde{\nabla}\widetilde{\tau}\|^2$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio dalgunha variedade Einstein.*

(ii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \widetilde{\tau}\widetilde{\Delta}\widetilde{\tau}$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio dalgunha variedade Einstein.*

(iii) *Para toda esfera xeodésica suficientemente pequena $\int_{G_m(r)} \langle\widetilde{\nabla}^2\widetilde{\tau},\widetilde{\rho}\rangle$ coincide coa correspondente curvatura escalar total nunha esfera xeodésica do mesmo radio dalgunha variedade Einstein.*

(iv) *M é unha variedade Einstein.*

Demostración.
Séguese inmediatamente de 2.4.26 e do Lema 1.7.1. □

Observación 3.3.14 O resultado anterior tamén ten unha xeneralización que foi probada en [6]. Esta é:

Se (M, g) *é unha variedade de Riemann analítica, a curvatura escalar de pequenas esferas xeodésicas é unha función radial se e só se a variedade é harmónica.*

A partir dela podemos probar agora o anterior corolario empregando o feito de que toda variedade harmónica é Einstein.

Apéndice A

Desenvolvemento en serie dos invariantes escalares totais de esferas xeodésicas

A.1 Invariantes de orde un

A.2 Invariantes de orde dous

A.3 Invariantes de orde tres

Apéndice B

Expresión dos invariantes escalares de orde tres de esferas xeodésicas nos espacios modelo

B.1 Variedades de curvatura seccional constante

B.2 Variedades Kähler de curvatura seccional holomorfa constante

B.3 Variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura Q–seccional constante

Bibliografía

[1] D. Alekseevski; On holonomy groups of Riemannian manifolds, *Ukrain. Math. Z.* **19** (1967), 100–104

[2] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet; *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, **194**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.

[3] J. Berndt, L. Vanhecke; Two natural generalizations of locally symmetric spaces, *Differential Geom. Appl.* **2** (1992), 57–80.

[4] Arthur L. Besse; *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik, **93**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1978.

[5] B.-Y. Chen,L. Vanhecke; Total curvatures of geodesic spheres, *Archiv der Mathematik*, **32**, (1979), 404 – 411.

[6] B.-Y. Chen,L. Vanhecke; Differential geometry of geodesic spheres, *J. Reine Angew. Math.*, **325**, (1981), 28 – 67.

[7] J. C. Dessertine; Expressions nouvelles de la formule de Gauss-Bonnet en dimension 4 et 6, *C. R. Acad. Sc. Paris Sér. A*, **273**, (1971), 164 – 167.

[8] D. M. DeTurck; Existence of metrics with prescribed Ricci curvature: local theory, *Invent. Math.*, **65**, (1981/82), 179 – 207.

[9] J. C. Díaz Ramos; *Curvaturas totais de esferas xeodésicas*, Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, **97**, 2002.

[10] J. C. Díaz Ramos, E. García Río, L. M. Hervella; *Total curvatures of geodesic spheres associated to quadratic curvature invariants*, Pendente de publicación.

[11] J. Gillard; *Pointwise and global aspects of the geometry of geodesic spheres and tubes*, Tese doutoral, Katholieke Universiteit Leuven, 1999.

[12] A. Gray; *Tubes*, Addison–Wesley, Redwood City, 1990.

[13] A. Gray, L. Vanhecke; Riemannian geometry as determined by the volumes of small geodesic balls, *Acta Math.*, **142** (1979), 157 – 198.

[14] A. Gray, L. Vanhecke; The volume of tubes about curves in a Riemannian manifold, *Proc. London Math. Soc.*, **44** (1982), 215 – 243.

[15] B. O'Neill; *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983

[16] F. Prüfer, F. Tricerri, L. Vanhecke; Curvature invariants, differential operators and local homogeneity, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996) 4643–4652.

[17] T. Sakai; *Riemannian Geometry*, Providence, RI, 1996.

[18] Z. I. Szabó; A short topological proof for the symmetry of 2-point homogeneous spaces, *Invent. Math.* **106** (1991), 61–64.

[19] L. Vanhecke; Geometry in normal and tubular neighborhoods, *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, supplemento al vol.* **58** (1988), 73 – 176.

[20] K. Yano, M. Kon; *Structures on Manifolds*, Series in Pure Math., **3**, World Scientific, Singapore, 1984.