MARÍA TRINIDAD PÉREZ LÓPEZ

CAMPOS DE VECTORES HARMÓNICOS-KILLING

102

2003

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

CAMPOS DE VECTORES HARMÓNICOS-KILLING

María Trinidad Pérez López

Memoria realizada baixo a dirección da Profesora Dra. María Elena Vázquez Abal da Universidade de Santiago de Compostela, para obter o título de Doutora en Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Realizado o acto público de Defensa desta Tese Doutoral o día 11 de setembro de 2003, na Universidade de Santiago de Compostela, ante o tribunal formado polos profesores:

Presidente:

Dr. D. Luis M. Hervella Torrón (Univ. de Santiago de Compostela)

Vocais:

Dr. D. Christopher T. J. Dodson (UMIST of Manchester)

Dr. D. Manuel de León Rodríguez (CSIC Madrid)

Dr. D. Oscar Adolfo Sánchez Valenzuela (CIMAT México)

Secretario:

Dr. D. Eduardo García Río

Obtivo a máxima calificación, APTO CUM LAUDEM.

Á miña familia

Moitísimas gracias...

Elena pola tua amabilidade, o teu bo humor, polo teu apoio e axuda constante que fan que todo pareza sinxelo, por facilitarme a asistencia a congresos e cursos, por ocuparte (e preocuparte) polos meus problemas académicos e administrativos, pola tua dispoñibilidade para responde-las miñas preguntas, por se-la miña directora de tese.

C.T.J. Dodson por propoñerme o tema da tese, así como pola permanente atención e axuda para levala a bo termo. Gracias tamén por facilitarme a estancia no Departamento de Matemáticas da UMIST en Manchester.

ó Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas pola axuda incondicional que sempre atopei en tódolos seus membros, en especial gracias a Eduardo García Río por estar sempre disposto a botar unha man.

Adolfo polas tuas múltiples indicacións e suxerencias.

Tomás polo teu apoio constante e incondicional, por facilitarme o hardware, por traer e levar cousas á Facultade, gracias mil por toda a tua atención e ánimo.

José Ramón pola tua paciencia e axuda cos meus problemas informáticos.

ós meus amigos de Santiago: Ana, Angel, Carlos, José Antonio e José Ramón por todo o seu apoio.

ás miñas amigas do Carballiño: Carmen e Elena por compartir conmigo os malos momentos.

á miña familia por axudarme tanto e incondicionalmente.

Finalmente, quero agradece-la axuda económica recibida durante a realización desta memoria por parte das seguintes institucións: Xunta de Galicia, Departamento de Matemáticas da UMIST de Manchester, Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) de Guanajuato, México, Departamento de Xeometría e Topoloxía e Rectorado da Universidade de Santiago de Compostela.

Índice Xeral

Introducción

Sobre unha variedade Riemanniana (M, g) son varias as propiedades que se teñen estudiado para o fluxo correspondente a campos de vectores sobre ela. Así temos as seguintes definicións clásicas:

- (i) X é chamado campo de vectores *Killing* se o grupo 1-paramétrico local de transformacións infinitesimais xerado por X é un grupo de isometrías. Equivalentemente, $\mathcal{L}_X g = 0$.
- (ii) X é chamado campo de vectores *afín-Killing* se o grupo 1-paramétrico local de transformacións infinitesimais xerado por X é un grupo de aplicacións totalmente xeodésicas. Equivalentemente, $\mathcal{L}_X \nabla = 0$.
- (iii) X é chamado campo de vectores *conforme* se o grupo 1-paramétrico local de transformacións infinitesimais xerado por X é un grupo de aplicacións conformes. Equivalentemente, $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$, para algunha función ρ.
- (iv) X é chamado campo de vectores *proxectivo* se o grupo 1-paramétrico local de transformacións infinitesimais xerado por X é un grupo de colineacións proxectivas, esto é, aplica xeodésicas en xeodésicas. Equivalentemente, $(\mathcal{L}_X \nabla)(X, Y) = p(X)Y + p(Y)X$, para algunha 1-forma p.

Nós, introducimos novas definicións para campos de vectores X, nunha variedade semi-Riemanniana de dimensión m, (M, g), utilizando outras propiedades para os grupos 1-paramétricos locais de transformacións infinitesimais.

Unha aplicación entre variedades de Riemann dise que é harmónica cando a traza da súa segunda forma fundamental (campo de tensión) é nula. No Capítulo 2, utilizando este concepto definimos un campo de vectores *harmónico-Killing* (h-K) como aquel no que o seu grupo 1-paramétrico de transformacións infinitesimais asociado é un grupo de aplicacións harmónicas. Para estes campos de vectores obtivmo-lo seguinte resultado:

Teorema 2.1.1 *Sexa* (M, g) *unha variedade semi-Riemanniana* m*-dimensional e* X *un campo de vectores en* M*. Se* X *é harmónico-Killing, entón para todo* $x \in M$*,*

$$\sum_{j=1}^{m} (\mathcal{L}_X \nabla)(Y_j, Y_j) = 0,$$

para cada referencia ortonormal, $\{Y_j\}$*,* $j = 1, \ldots, m$*, en* T_xM*.*

Atopamos exemplos nos que se pon de manifesto que a condición deste teorema é necesaria pero non suficiente, o que nos levou a amplia-la definición e introduci-los campos de vectores *1-harmónico-Killing* (1-h-K). Dicimos que X é *1-harmónico-Killing* se o grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado a X, $\{\varphi_t\}$ $t \in I$, verifica:

$$\frac{d\tau(\varphi_t)}{dt}|_{t=0} = 0,$$

é dicir, anúlase a parte liñal do seu campo de tensión.

A harmonicidade ten sido empregada para estudiar outros aspectos dos campos de vectores. En [53] defínense os campos de vectores harmónicos como aqueles que teñen a 1-forma asociada harmónica. Outros autores ([22], [39]) utilizan a harmonicidade das seccións inducidas no fibrado tanxente con diferentes levantamentos métricos: Sasaki, completo,.... No Teorema 2.1.2 relacionamos algúns destes resultados co concepto de campo de vectores 1-harmónico-Killing.

Teorema 2.1.2 *Nunha variedade semi-Riemanniana* (M, g) *as seguintes afirmacións son equivalentes:*

- **(i)** X *é un campo de vectores* 1*-harmónico-Killing.*

- **(ii)** $g^{ij}(\mathcal{L}_X\Gamma_{ij}^k) = 0$, $i, j, k = 1\ldots, m$, *onde* $\mathcal{L}$ *denota a derivada de Lie,* g^{ij} *son as compoñentes da matriz inversa da métrica* g *e* Γ_{ij}^k *son as compoñentes da conexión de Levi-Civita de* g.

- **(iii)** $X : (M, g) \longrightarrow (TM, g^C)$ *é unha sección harmónica, onde* g^c *denota o levantamento completo de* g.

- **(iv)** $\triangle X = 2Ric(X, .)$, *onde* $\triangle = d\delta + \delta d$, *(*$d$ *= diferencial,* δ *= codiferencial) e* Ric *denota o tensor de Ricci de* (M, g).

- **(v)** X *é un campo de vectores de Jacobi ó longo da identidade.*

En relación coa existencia dos campos de vectores 1-harmónicos-Killing obtivemos que nunha variedade Riemanniana, compacta e orientable, (M, g), con tensor de Ricci, Ric, semi-definido negativo, (é dicir, para todo campo de vectores V en M, $Ric(V, V) \leq 0$), entón un campo de vectores, X, é 1-harmónico-Killing, se e soamente se, X é paralelo. Nembargantes, se Ric é definido negativo, (é dicir, $Ric(V, V) = 0$, se e soamente se, $V = 0$), entón os únicos campos de vectores 1-harmónicos-Killing son as seccións nulas. Tamén probamos que unha variedade métrica contacto (M, ϕ, η, ξ, g) é K-contacto, se e soamente se, o campo de vectores característico, ξ, é 1-harmónico-Killing.

Estudiamos tamén no capítulo 2 relacións dos campos de vectores harmónicos e 1-harmónicos-Killing cos xa clásicos campos de vectores Killing, afíns-Killing, conformes e proxectivos. Así, un campo de vectores 1-harmónico-Killing nunha variedade Riemanniana, compacta e orientable, é Killing se e soamente se $\delta X = 0$. Se a variedade é Riemanniana, compacta, orientable e de dimensión 2, existe unha correspondencia bixectiva entre os campos de vectores conformes e os 1-harmónicos-Killing. Se a dimensión da variedade é máis grande que 2 e X é un campo de vectores conforme, entón é 1-harmónico-Killing se e soamente se $d\delta X = 0$. Nas condicións anteriores: se X é un campo de vectores 1-harmónico-Killing e conforme, 1-harmónico-Killing e proxectivo ou 1-harmónico-Killing e harmónico entón X é Killing e polo tanto harmónico-Killing.

Por outra parte se un campo de vectores X nunha variedade semi-Riemanniana (M, g) deixa o tensor de curvatura invariante, i.e., $\mathcal{L}_X \; R^i_{jkm} = 0$, é chamado *colineación de curvatura* (C.C.). Se en particular $\nabla_h \; (\mathcal{L}_X \Gamma^k_{ij}) = 0$, sendo Γ^k_{ij} os símbolos de Christoffel da variedade, dise que X é unha *colineación de curvatura especial* (C.C.E.). Se deixa a curvatura de Ricci invariante, i.e., $\mathcal{L}_X(Ric)_{ij} = 0$, X é chamado *colineación Ricci* (C.R.).

A partires de resultados xa coñecidos e os obtidos no Capítulo 2 podemos face-lo seguinte esquema:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{Afín-Killing} & \\
\swarrow & \downarrow & \searrow \\
\text{Proxect. + 1-h-K} & \text{C.C.E.} & \text{Conf. + 1-h-K} \\
\updownarrow & \downarrow & \updownarrow \\
\text{Killing} & \text{C.C.} & \text{Killing} \\
 & \downarrow & \\
 & \text{C.R. + 1-h-K} & \\
 & \updownarrow Ric = \text{constante} & \\
 & \text{Killing} &
\end{array}
$$

Con respecto ós levantamentos de campos de vectores ó fibrado tanxente coa métrica levantamento completo, temos que se denotamos por X^V e X^C os levantamentos vertical e completo de X, nunha variedade (M, g), a (TM, g^C), verifícase que :

- X^V é un campo de vectores harmónico-Killing en (TM, g^C), para todo campo de vectores X en (M, g).

- X^V é un campo de vectores afín-Killing en (TM, g^C) se e soamente se X é afín-Killing en (M, g).

- X^V é un campo de vectores conforme en (TM, g^C) se e soamente se X é un campo de vectores conforme en (M, g).

- X^V é un campo de vectores Killing en (TM, g^C) se e soamente se X é un campo de vectores Killing en (M, g).

- X^C é harmónico-Killing (resp., afín-Killing) en (TM, g^C) se e soamente se X é harmónico-Killing (resp., afín-Killing) en (M, g).

- Sexan X e Y dous campos de vectores nunha variedade (M, g), entón $[X^V, Y^C]$ é harmónico-Killing.

Utilizando a definición de campo de tensores de tipo $(1, 1)$ harmónico ([22]), como unha aplicación harmónica de (TM, g^C) en si mesmo, obtivemos que dado un campo de vectores 1-harmónico-Killing, X, nunha variedade semi-Riemanniana (M, g) e un campo de tensores de tipo $(1, 1)$, T, harmónico e paralelo, entón TX é 1-harmónico-Killing se e soamente se T conmuta co operador de Ricci de (M, g). Este resultado dá exemplos de campos de vectores 1-harmónicos-Killing en variedades Kähler e (co)-Kähler.

Un dos problemas que se presentan á hora de defini-los campos de vectores harmónicos-Killing é que a composición de aplicacións harmónicas non é en xeral unha aplicación ste tipo. Unha posible solución sería estudia-los campos de vectores con grupo 1-paramétrico local de transformacións infinitesimais asociado, $\{\varphi_t\}$ $t \in I$, formado por morfismos harmónicos. Ós campos de vectores verificando isto chamarémoslle *μ-harmónicos*. Neste caso $\{\varphi_t\}$ $t \in I$ forman evidentemente un grupo, é dicir, se φ_t e φ_s son morfismos harmónicos, $\varphi_t \circ \varphi_s$ é tamén desa misma clase. Nembargantes, obtivemos que se (M, g) é unha variedade Riemanniana de dimensión 2, os campos de vectores μ-harmónicos coinciden cos conformes, e se a dimensión é máis grande que 2 coinciden cos homotéticos.

No capítulo 3 estudiámo-los campos de vectores harmónicos-Killing nas variedades Kähler e os 1-harmónicos-Killing nas variedades Tachibana. Nas variedades

Tachibana obtivemos relacións entre os campos de vectores 1-harmónicos-Killing e os analíticos. Nas variedades Kähler obtivémo-lo seguinte resultado:

Teorema 3.1.1 *Sexa* (M, J, g) *unha variedade compacta Kähler,* X *un campo de vectores sobre* M *e* $\widetilde{X} = \frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}JX)$ *o campo de vectores complexo asociado a* X*. Son equivalentes:*

- *(1)* X *é un campo de vectores* 1*-harmónico-Killing,*
- *(2)* X *é un campo de vectores harmónico-Killing,*
- *(3)* X *é un campo de vectores analítico,*
- *(4)* $\widetilde{X}$ *é un campo de vectores holomorfo,*
- *(5)* X *é un campo de Jacobi ó longo da identidade de* M*.*

No Capítulo 4 estudiámo-los campos de vectores para os que o grupo 1-paramétrico local de transformacións consiste en aplicacións pluriharmónicas ós que lle chamamos *plurihármonicos*. Para este novo tipo de campos de vectores obtivémo-lo seguinte resultado:

Teorema 4.1.1 *Sexa* (M, J, g) *unha variedade* $2m$ *dimensional Kähler e* X *un campo de vectores en* M*. Se o campo de vectores* X *é un campo de vectores pluriharmónico, entón*

$$(\mathcal{L}_X\nabla)(Y, Z) + (\mathcal{L}_X\nabla)(JY, JZ) = 0,$$

$\forall Y, Z$ *campos de vectores en* M*.*

Nunha variedade Kähler (M, J, g) unha aplicación é pluriharmónica se a parte J-invariante da segunda forma fundamental se anula. Co propósito de utilizar este concepto para cando M non é necesariamente unha variedade Kähler, introducímo-los campos de vectores *α-plurihamónicos.* Deste xeito, un campo de vectores X nunha variedade semi-Riemanniana, (M, g), diremos que é α-plurihamónico se o grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado é α-pluriharmónico, onde α é unha

2-forma harmónica en M. Para os campos de vectores α-plurihamónicos obtivémo-lo seguinte resultado:

Teorema 4.2.1 *Sexa (M,g) unha variedade Riemanniana (ou semi-Riemanniana) e α unha 2-forma harmónica sobre M. Se o campo de vectores X en M é un campo de vectores α-pluriharmónico, entón para cada $x \in M$,*

$$\sum_{i=1}^{m} (\mathcal{L}_X \nabla)(e_i, .) \wedge \alpha(e_i, .) = 0,$$

para unha referencia ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^{i=m}$ en T_xM.

Analogamente ó caso dos campos de vectores harmónicos-Killing, atopamos exemplos nos que se pon de manifesto que as condicións que aparecen nestes teoremas son necesarias pero non suficientes, polo que, tamén no Capítulo 4, se definen os campos de vectores 1-*pluriharmónicos* e 1-α-*pluriharmónicos*, para os que obtemos novos resultados de caracterización.

Teorema 4.1.2 *Sexa X un campo de vectores nunha variedade $2m$-dimensional Kähler (M,J,g). As seguintes afirmacións son equivalentes:*

- *(i) X é un campo de vectores 1-pluriharmónico,*
- *(ii) $\mathcal{L}_X \nabla(Y_i, Y_j) + \mathcal{L}_X \nabla(JY_i, JY_j) = 0$, $\forall \{Y_k, JY_k\}$, $k = 1, \ldots, m$, referencia en TM.*
- *(iii) $X : (M,g) \longrightarrow (TM, g^C)$ é unha sección pluriharmónica, onde g^C denota o levantamento completo de g.*

Teorema 4.2.2 *Sexa X un campo de vectores nunha variedade semi-Riemanniana (M,g) e α unha 2-forma harmónica sobre M, entón as seguintes afirmacións son equivalentes:*

- *(i) X é un campo de vectores 1-α-pluriharmónico.*
- *(ii) $\sum_{i=1}^{m} (\mathcal{L}_X \nabla)(e_i, .) \wedge \alpha(e_i, .) = 0$, para unha referencia ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ en T_xM.*

- *(iii)* $X : (M, g) \longrightarrow (TM, g^C)$ *é unha aplicación* α*-pluriharmónica, onde* g^C *denota o levantamento completo de* g.

Introducimos o concepto de campo de tensores de tipo $(1, 1)$ pluriharmónico, e obtemos que se X é un campo de vectores 1-pluriharmónico e T é un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ paralelo, entón T é pluriharmónico, se e soamente se, TX é 1-pluriharmónico.

É ben sabido que as aplicacións pluriharmónicas son harmónicas e as aplicacións holomorfas son pluriharmónicas, asemade no caso de campos de vectores pluriharmónicos en variedades compactas Kähler obtivemo-las seguintes equivalencias:

- (1) X é un campo de vectores 1-harmónico-Killing,
- (2) X é un campo de vectores harmónico-Killing,
- (3) X é un campo de vectores analítico,
- (4) $\widetilde{X} = \frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}JX)$ é un campo de vectores holomorfo,
- (5) X é un campo de Jacobi ó longo da identidade de M,
- (6) X é un campo de vectores pluriharmónico.
- (7) X é ω-pluriharmónico, onde ω é unha 2-forma Kähler sobre M.

Co Capítulo 5 queremos abrir unha nova liña de investigación en variedades semi-Riemannianas, pois son moitos os resultados de variedades Riemannianas que non poden ser aplicados no caso semi-Riemanniano, por exemplo a Fórmula de Bochner clásica. Entre os resultados que obtemos neste capítulo está o seguinte:

Teorema 5.1.2 *Sexa* (M, g) *unha variedade Lorentz* m*-dimensional e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *unha referencia ortonormal, tal que* $g(e_1, e_1) = -1$, $g(e_i, e_i) = 1$ $i = 2, \ldots, m$. *Se a curvatura de Ricci é semi-definida negativa, os campos de vectores* 1*-harmónicos-Killing temporais e sen aceleración son paralelos. Se a curvatura de Ricci é definida* *negativa, non existen campos de vectores* 1*-harmónicos-Killing temporais sen aceleración non nulos.*

Ademais, obtemos exemplos no campo do electromagnetismo, nos fluídos perfectos, da relatividade xeral, nos espacio-tempo de Gödel, Schwarzchild e Robertson-Walker.

Finalmente, citámo-lo seguinte comentario de Daniel Rockmore nun recente libro, **The Universe and the Teacup: The Mathematics of Truth and Beauty** por K.C. Cole, 1998, ISBN 0-151-00323-8.

The connections between symmetry and beauty are a well-trodden area, with Hermann Weyl's Symmetry the classical reference. Ms. Cole sees invariance and symmetry as a way to get from truth to beauty, adding that deep truths can be defined as invariants-things that do not change no matter what; how invariants are defined by symmetries, which in turn define which properties of nature are conserved, no matter what. These are the selfsame symmetries that appeal to the senses in art and music and natural forms like snowflakes and galaxies. The fundamental truths are based on symmetry, and ther's a deep kind of beauty in that.

Capítulo 1

Preliminares

Introduciremos neste capítulo algúns resultados, fórmulas e conceptos que serán utilizados ó longo de todo o traballo.

1.1 Variedades Riemannianas

Sexa M unha variedade diferenciable conexa m-dimensional de clase C^∞ recuberta por un sistema de entornos coordenados $\{U; x^h\}$, onde U denota un entorno e x^h as coordenadas locais en U, con índices $h, i, j, k, \ldots$ tomando valores no rango $1, 2, \ldots, m$. Asumiremos que M posúe un campo de tensores simétrico, definido positivo de tipo $(0, 2)$, g, e de clase de diferenciabilidade C^∞, isto é, un campo de tensores g de tipo $(0, 2)$ tal que:

$$g(X, Y) = g(Y, X),\ g(X, X)\geq 0,$$

para cada par de campos de vectores X e Y, e $g(X, X) = 0$ se e soamente se $X = 0$.

A tal variedade M chamarémoslle variedade *Riemanniana*.

Denotando por $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ a base de vectores da chamada referencia natural temos entón,

$$X = X^h \partial_h,\ Y = Y^h \partial_h,$$

para cada par de campos de vectores X e Y, X^h e Y^h son as compoñentes locais dos campos de vectores X e Y, respectivamente, con respecto á referencia natural, onde estamos usando a notación de Einstein para representa-la suma.

Tense entón

$$g(X,Y) = g(X^j\partial_j, Y^i\partial_i) = g_{ji}X^jX^i,$$

onde $g_{ji} = g(\partial_j, \partial_i)$ son as compoñentes locais do campo de tensores g.

1.1.1 Derivada covariante

A ecuación diferencial da integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ji}(x(t))\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}}dt$$

é a ecuación das xeodésicas

$$\frac{d^2x^h}{ds^2} + \Gamma^h_{ji}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^i}{ds} = 0,$$

sendo s o parámetro lonxitude de arco da curva, e

$$\Gamma^h_{ji} = \frac{1}{2}g^{ht}(\partial_j g_{it} + \partial_i g_{jt} - \partial_t g_{ji}),$$

os símbolos de Christoffel.

Denotaremos por ∇_X o operador derivada covariante ó longo do campo de vectores X con respecto ós símbolos de Christoffel.

Deste xeito para unha función escalar f temos a derivada covariante $\nabla_X f$ de f ó longo do campo de vectores X. $\nabla_X f$ ten como compoñentes locais

$$\nabla_X f : Xf = X^i\partial_i f,$$

f e X^i son as compoñentes locais de f e X, respectivamente. $\nabla_X f$ define unha 1-forma que denotaremos por ∇f, así $(\nabla f)(X) = \nabla_X f$, ∇f exprésase como

$$\nabla f : \nabla_i f = \partial_i f.$$

∇f é algunha vez denotada por df.

Para un campo de vectores Y tense a derivada covariante $\nabla_X Y$ de Y ó longo do campo de vectores X. $\nabla_X Y$ ten compoñentes locais

$$\nabla_X Y : X^j \nabla_j Y^h \;\; = \;\; X^j(\partial_j Y^h + \Gamma^h_{ji} Y^i),$$

X^h e Y^h son as compoñentes locais de X e Y respectivamente. $\nabla_X Y$ define un campo de tensores de tipo $(1,1)$ que denotaremos por ∇Y e que localmente exprésase como

$$\nabla Y : \nabla^j Y^h \;\; = \;\; \partial_j Y^h + \Gamma^h_{ji} Y^i.$$

Nótese que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0,$$

o cal significa que a conexión ∇ non ten torsión, onde $[X,Y]$ representa o campo de vectores definido por $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$, para unha función arbitraria f, e localmente

$$[X,Y] : X^i \partial_i Y^h - Y^i \partial_i X^h,$$

onde X^h e Y^h son as compoñentes locais de X e Y respectivamente.

Para unha 1-forma ω, tense a derivada covariante $\nabla_X \omega$ ó longo de X, a cal é unha 1-forma definida por

$$(\nabla_X \omega)(Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y),$$

para cada par de campos de vectores X e Y. $\nabla_X \omega$ ten compoñentes locais

$$\nabla_X \omega : X^j \nabla_j \omega_i = X^j(\partial_j \omega_i - \Gamma^h_{ji} \omega_h).$$

Nótese que

$$(\nabla\omega)(X,Y) - (\nabla\omega)(Y,X),$$

exprésase localmente $\partial_j \omega_i - \partial_i \omega_j$ e é independente dos símbolos de Christoffel.

Para un campo de tensores xeral, S, de tipo $(1,2)$ a derivada covariante $\nabla_X S$ ó longo do campo de vectores X, é un campo de tensores de tipo $(1,2)$ definido por

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \nabla_X(S(Y,Z)) - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla_X Z),$$

para calesquera campos X,Y e Z. Localmente

$$\nabla_X S : X^k \nabla_k S^h_{ji} = X^k(\partial_k S^h_{ji} + \Gamma^h_{kt} S^t_{ji} - \Gamma^t_{kj} S^h_{ti} - \Gamma^t_{ki} S^h_{jt}),$$

S^t_{ji} e X^h son as compoñentes locais de S e X respectivamente. $\nabla_X S$ define un campo de tensores de tipo $(1,3)$ que denotaremos por ∇S, así $(\nabla S)(X,Y,Z) = (\nabla_X S)(Y,Z)$. Polo tanto

$$\nabla S : \nabla_k S^h_{ji} = \partial_k S^h_{ji} + \Gamma^h_{kt} S^t_{ji} - \Gamma^t_{kj} S^h_{ti} - \Gamma^t_{ki} S^h_{jt}.$$

É ben sabido que a conexión definida polos símbolos de Christoffel é a única conexión que non ten torsión e cumpre $\nabla g = 0$. Esta conexión é chamada conexión de Riemann ou Levi-Civita.

1.2 Variedades Semi-Riemannianas

Sexa M unha variedade C^∞ m-dimensional e g un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ en M. Entón asigna a cada punto $p \in M$, unha forma bilineal simétrica g_p no espacio tanxente $T_p(M)$. Supoñamos que g_p é non dexenerada e de índice constante para todo $p \in M$. Esta condición significa que cada $T_p(M)$ é un espacio semi-Euclideo m-dimensional.

Sexa $X_p = X^i \partial_i$, $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, $i,j \in \{1, \ldots, m\}$ e $\{\partial_i\}$ a base natural de $T_p(M)$. Entón X_p é chamado:

Espacial se $g_{ij} X^i X^j > 0$ ou $X_p = 0$,

Temporal se $g_{ij} X^i X^j < 0$,

Nulo se $g_{ij} X^i X^j = 0$ e $X_p \neq 0$.

O conxunto de tódolos campos de vectores nulos de $T_p(M)$ é chamado cono nulo en p, definido por

$$\wedge_p = \{X_p \in (T_p(M) - \{0\}),\ g_{ij} X^i X^j = 0\}.$$

En base ó anterior, g é chamada métrica semi-Riemanniana e (M, g) variedade semi-Riemanniana (ver O'Neill [40]). Por exemplo, M é variedade Riemanniana ou variedade Lorentz segundo g sexa de índice 0 ou 1 respectivamente. No caso $0 <$índice$< m$, dise que M é unha variedade semi-Riemanniana propia.

Unha conexión lineal ∇ nunha variedade semi-Riemanniana (M, g) é chamada conexión métrica se g é paralela con respecto a ∇, é dicir

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0.$$

1.3 Aplicacións harmónicas

Sexan (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas (ou semi-Riemannianas) con dim$M$ $= m$ e dim$N = n$; denotaremos por ∇^M e ∇^N as conexións de Levi-Civita en M e N, respectivamente. Unha aplicación C^∞, $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$, define un fibrado vectorial $\phi^*TN \hookrightarrow TM$, con proxección $\pi_1 : \phi^*TN \longrightarrow M$. O conxunto $\Gamma(\phi^*TN)$, de seccións de ϕ^*TN, son chamados campos de vectores ó longo de ϕ. Existe unha única conexión lineal $\phi^*\nabla^N$, inducida por ϕ en $\phi^*(TN)$, definida para todo $x \in M$, $X \in \Gamma(TM)$ e $Y' \in \Gamma(TN)$ por

$$(\phi^*\nabla^N)_X (Y' \circ \phi)(x) = (\nabla^N_{d\phi(X)} Y') \circ \phi(x) = \nabla^N_{(d\phi)_x(X(x))}(Y'(\phi(x))).$$

Denotaremos por ∇' a conexión inducida de forma natural no producto tensorial $T^*M \otimes \phi^*(TM)$ pola conexión ∇^M en T^*M e a conexión $\phi^*\nabla^N$ en $\phi^*(TN)$. Entón

$$\nabla'(d\phi)_X(Y) = (\phi^*\nabla^N)_X(d\phi(Y)) - (d\phi)(\nabla^M_X Y),$$

é a segunda forma fundamental de ϕ e a sección de $\phi^*(TN)$,

$$\tau(\phi) = trace_g(\nabla'(d\phi)),$$

é chamado campo de tensión de ϕ. Diremos que ϕ é unha aplicación harmónica se $\tau(\phi) = 0$, e totalmente xeodésica se $\nabla'(d\phi) = 0$. (Ver [14],[15] entre outros).

Sexan $U\subset M$ e $V\subset N$ entornos con coordenadas $(x^1,\ldots,x^m)$ e $(y^1,\ldots,y^n)$ respectivamente, tal que $\phi(U)\subset V$. Localmente, a aplicación ϕ ten a seguinte representación, $y^a = \phi(x^1,\ldots,x^m)$. Entón a segunda forma fundamental de ϕ en $x\in U$ pode ser expresada localmente por

$$(\nabla'(d\phi)) = (\nabla'(d\phi))^a_{ij}dx^i\otimes dx^j\otimes\partial_a,$$

para $i,j,k = 1,\ldots,m; a,b,c = 1,\ldots,n$, onde

$$(\nabla'(d\phi))^a_{ij}(x) = \frac{\partial^2\phi^a}{\partial x^i\partial x^j}(x) -^g \Gamma^k_{ij}(x)\frac{\partial\phi^a}{\partial x^k}(x) +^h \Gamma^a_{bc}(\phi(x))(\frac{\partial\phi^b}{\partial x^i}(x)\frac{\partial\phi^c}{\partial x^j}(x)).$$

Con respecto á base usual $dx^i\otimes\partial_a$ da fibra de $T^*M\otimes\phi^*TN$ en $x\in M$, tense a seguinte expresión: $(i,j = 1,\ldots,m; a = 1,\ldots,n)$

$$\tau(\phi) = \tau(\phi)^a\partial_a = g^{ij}(\nabla'(d\phi))^a_{ij}\partial_a\in(\phi^*TN)_x.$$

1.4 Métrica levantamento completo en TM

Sexa M unha variedade (semi-)Riemanniana m-dimensional con métrica g e conexión de Levi-Civita ∇. Denotaremos por TM o fibrado tanxente a M con proxección $\pi_{TM} : TM\longrightarrow M$. Esta variedade $2m$-dimensional pode ser equipada coa métrica semi-Riemanniana g^C, levantamento completo de g ([55]), de signatura (m,m) e definida por:

$$\begin{aligned} g^C(X^H,Y^H) &= g^C(X^V,Y^V) = 0,\\ g^C(X^H,Y^V) &= g^C(X^V,Y^H) = (g(X,Y))^V. \end{aligned}$$

Aquí os levantamentos verticais e horizontais dos vectores tanxentes X,Y en M, están referidos á descomposición do espacio tanxente, TM, en cada punto, en vectores horizontais con respecto a ∇ e vectores verticais canónicos. Para campos de vectores X,Y en M a función $g(X,Y)^V$ definida en TM é o *pull-back* de $g(X,Y)$ ó longo da proxección π_{TM}.

Sexan $\mathcal{U} = \{U{\subset}M,\ (x^1,\ldots x^m)\}$ unha veciñanza de coordenadas en TM, $T\mathcal{U} = \{\pi_{TM}^{-1}(\mathcal{U}),\ (x^1,\ldots,x^m,x^{\bar{1}},\ldots,q^{\bar{m}}\}$. Temos así que a expresión local de g^C e mais da súa inversa en $T\mathcal{U}$ veñen dadas polas seguintes matrices:

$$\mathbf{g^C} = \begin{pmatrix} x^{\bar{k}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{g^C})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} \\ g^{ij} & x^{\bar{k}}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \end{pmatrix},$$

con respecto á base

$$\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots\frac{\partial}{\partial x^m};\frac{\partial}{\partial x^{\bar{1}}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{\bar{m}}}\}, \tag{1.4.1}$$

do espacio tanxente a TM en cada punto. Por g_{ij} estamos denotando as compoñentes locais de g con respecto a

$$\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots\frac{\partial}{\partial x^m}\},$$

e por g^{ij}, as da súa inversa.

Nun punto do fibrado tanxente, denotaremos por

$${}^{TM}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta},\ (\alpha,\beta,\gamma = 1,\ldots,2m),$$

os símbolos de Christoffel da conexión de Levi-Civita, ∇^C, asociada a g^C. Localmente exprésanse como

$$\mathbf{{}^{TM}\Gamma^{k}} = \begin{pmatrix} \Gamma^k_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{{}^{TM}\Gamma^{\bar{k}}} = \begin{pmatrix} x^{\bar{l}}\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^l} & \Gamma_{ij} \\ \Gamma_{ij} & 0 \end{pmatrix},$$

onde Γ^k_{ij} son os símbolos de Christoffel de ∇ e

$$\bar{k} = k+m,\ (i,j,k = 1,\ldots,m).$$

A variedade semi-Riemanniana (TM, g^C) posúe propiedades xeométricas importantes, herdadas algunhas da variedade (M, g).

Proposición 1.4.1.

[55][56] Sexa (M, g) unha variedade (semi-)Riemanniana e (TM, g^C) o seu fibrado tanxente coa métrica levantamento completo de g, g^C. Daquela verifícase:

- (i) Se (M, g) é localmente simétrica, entón (TM, g^C) é localmente simétrica.
- (ii) (TM, g^C) ten curvatura escalar cero.
- (iii) (TM, g^C) é unha variedade Einstein se e soamente se (M, g) ten curvatura escalar nula.
- (iv) Se (M, g) ten curvatura constante K. Entón (TM, g^C) ten curvatura constante se e soamente se $K = 0$. $\square$

Ademáis a métrica g^C é utilizada en temas de harmonicidade.

Proposición 1.4.2.

[55] Sexan (M, g) e (N, h) dúas variedades semi-Riemannianas e $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ unha aplicación diferenciable. Entón $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ é harmónica se e soamente se $df : (TM, g^C) \longrightarrow (TN, h^C)$ é harmónica. $\square$

Capítulo 2

Campos de vectores harmónicos-Killing e 1-harmónicos-Killing

2.1 Definicións, caracterizacións e exemplos

Os campos de vectores harmónicos-Killing caracterizaranse pola propiedade de que o seu fluxo integral actúa na variedade como difeomorfismos harmónicos (locais). Teremos en conta que en xeral, as aplicacións harmónicas non se conservan pola composición, deste xeito ter un grupo formado por aplicacións harmónicas non é un feito trivial.

Definición 2.1.1.

Un campo de vectores X nunha variedade semi-Riemanniana (M, g) dirase harmónico-Killing (h-K) se o grupo 1-paramétrico local de transformacións infinitesimais asociado a X, $\{\varphi_t\}_{t\in I}$, é un grupo de aplicacións harmónicas.

É ben sabido que cada campo de vectores $X\in\Gamma(TM)$ da lugar a un grupo 1-paramétrico local de difeomorfismos $I\ni t\mapsto\varphi_t\in Diff(M)$, onde I é un entorno do $0\in\mathbb{R}$, resolvendo o sistema autónomo de ecuacións diferenciais ordinarias,

$$ev|_{t=t_0}\circ\frac{\partial}{\partial t}\circ\varphi_t^* = ev|_{t=t_0}\circ\varphi_t^*\circ X,$$

coa igualdade entendida como aplicacións de $C^\infty(M)$ en si mesmo, e suxeito ás condicións iniciais $ev|_{t=t_0}\circ\varphi_t^* = id$; entendida como unha igualdade entre automorfismos da álxebra $C^\infty(M)$. Esta ecuación ten solución única; concretamente, $\varphi_t^* = \exp(tX)$, onde a exp se define a través da súa expansión en serie de Taylor, e X^k enténdese como $X\circ\ldots\circ X(k$ veces).

O noso propósito é estudiar cando φ_t é harmónica para todo $t\in I$. A acción da álxebra de Lie de $\Gamma(TM)$ nos distintos obxectos xeométricos definidos en M vén dada a través da seguinte "regra": Tomar a derivada con respecto a t, evaluada en $t=0$ da acción dos $Diff(M)$ definida polo grupo 1-paramétrico de difeomorfismos $\varphi_t\in Diff(M)$ asociada a $X\in\Gamma(TM)$.

Entón, a acción da álxebra de Lie de $\Gamma(TM)$ en $C^\infty(M)$ ven dada por:

$$C^\infty(M)\times\Gamma(TM)\to C^\infty(M),\ (f,X)\mapsto\mathcal{L}_X f = X(f),$$

xa que $X(f)= ev|_{t=0}\circ\ \frac{\partial}{\partial t}\circ\varphi_t^* f$, e o termo do lado dereito da igualdade, observando a ecuación diferencial, é igual a $ev|_{t=0}\circ\varphi_t^*\circ X(f) = X(f)$.

De forma similar, a acción da álxebra de Lie de $\Gamma(TM)$ nas conexións en M, $(Con(M))$, ven dada por

$$Con(M)\times\Gamma(TM)\to Con(M),\ (\nabla,X)\mapsto\mathcal{L}_X\nabla.$$

Máis concretamente, $\mathcal{L}_X\nabla = ev|_{t=0}\circ\frac{\partial}{\partial t}\circ\ \nabla^{\varphi_t}$, onde ∇^{φ_t} é o resultado da acción natural de $\Gamma(TM)$ en $Con(TM)$, esto é,

$$\nabla_Z^{\varphi_t} = \varphi_t^*\circ(\nabla_{Z^{\varphi_{-t}}}Y^{\varphi_{-t}})\circ\varphi_{-t}^*,$$

e por Z^φ denotamos a acción pola dereita dos $Diff(M)$ en $\Gamma(TM)$, i.e., $Z^\varphi = \varphi^*\circ Z\circ\varphi^{-1*}$, $\varphi\in Diff(M)$, $Z\in\Gamma(TM)$.

Agora estamos en condicións de da-lo seguinte resultado:

Teorema 2.1.1.

Sexa (M,g) unha variedade semi-Riemanniana m-dimensional e X un campo de vectores en M. Se X é harmónico-Killing entón, para todo $x \in M$, $\sum_{j=1}^{m}(\mathcal{L}_X\nabla)(Y_j,Y_j)=0$, para cada referencia ortonormal, $\{Y_j\}$, $j=1,\ldots,m$, en T_xM.

Demostración

Denotemos por φ_t o grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado a X. Entón a diferencial $d\varphi_t$ define unha sección do fibrado vectorial $T^*M \otimes \varphi_t^*(TM) \simeq Hom(TM,\varphi_t^*(TM))$, onde $\varphi_t^*(TM)$ é o fibrado pull-back de TM ó longo de φ_t. En efecto:

$$\Gamma(TM) \ni Z \mapsto d\varphi_t(Z) = Z \circ \varphi_t^* \in \Gamma(\varphi_t^*(TM)),$$

onde

$$Z \circ \varphi_t^* = \varphi_t^* \circ \varphi_{-t}^* \circ Z \circ \varphi_t^* = \varphi_t^* \circ Z^{\varphi_{-t}}.$$

Denotamos por ∇' a conexión inducida de maneira natural no producto tensorial $T^*M \otimes\, \varphi_t^*(TM)$ pola conexión ∇ en T^*M, e a conexión $\varphi_t^*\nabla$ en $\varphi_t^*(TM)$, entón

$$\begin{aligned}(\nabla'(d\varphi_t))_Z(Y) &= (\varphi_t^*\nabla)_Z(d\varphi_t(Y)) - (d\varphi_t)(\nabla_Z Y)\\ &= \varphi_t^* \circ \nabla_{Z^{\varphi_{-t}}} Y^{\varphi_{-t}} - (d\varphi_t)(\nabla_Z Y).\end{aligned}$$

Notar, en particular, que a asignación $(Z,Y) \mapsto (\nabla'(d\varphi_t))_Z(Y)$ é simétrica cando a conexión en TM é a conexión de Levi-Civita, debido a que a diferencia $(\nabla'(d\varphi_t))_Z(Y) - (\nabla'(d\varphi_t))_Y(Z)$ é igual a $\varphi_t^*([Z^{\varphi_{-t}},Y^{\varphi_{-t}}]) - (d\varphi_t)([Z,Y])$ a cal se anula identicamente.

Seguindo [14], dicir que φ_t é harmónica, é dicir que $trace_g(\nabla'(d\varphi_t)) = \tau(\varphi_t) = 0$; como $(\nabla'(d\varphi_t))_Z \in \Gamma(Hom(TM,\varphi_t^*(TM)))$, se $Z,Y \in \Gamma(TM)$, entón

$$(\nabla'(d\varphi_t))_Z(Y) \in \Gamma(\varphi_t^*(TM))$$

non é un campo de vectores en TM, pero $(\nabla'(d\varphi_t))_Z(Y) \circ \varphi_t^{-1}$ define unha sección de TM. Entón a traza debe ser entendida como a da aplicación

$$\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \ni (Z,Y) \mapsto (\nabla'(d\varphi_t))_Z(Y) \circ \varphi_t^{-1} \in \Gamma(TM).$$

A traza métrica pode agora ser calculada coa axuda dunha referencia ortonormal local $\{Y_j\}$ para TM, e a métrica Riemanniana g

$$\tau(\varphi_t) = \sum_j ((\nabla'(d\varphi_t))_{Y_j}(Y_j)\circ\varphi_t^{-1}).$$

Así, despois de sustituí-la coñecida expresión de $(\nabla'(d\varphi_t))$, conseguímo-lo seguinte:

$$(\nabla'(d\varphi_t))_{Y_j}(Y_j)\circ\varphi_t^{-1} = \nabla_{Y_j^{\varphi_{-t}}} Y_j^{\varphi_{-t}} - (\nabla_{Y_j} Y_j)^{\varphi_{-t}}.$$

Polo tanto:

$$\tau(\varphi_t) = \sum_j \nabla_{Y_j^{\varphi_{-t}}} Y_j^{\varphi_{-t}} - (\nabla_{Y_j} Y_j)^{\varphi_{-t}},$$

e a afirmación é que, φ_t é harmónica, se e soamente se, $\tau(\varphi_t) = 0$. A correspondente condición infinitesimal é entón

$$0 = \sum_j ev|_{t=0} \frac{\partial}{\partial t} \circ \nabla_{Y_j^{\varphi_{-t}}} Y_j^{\varphi_{-t}} - (\nabla_{Y_j} Y_j)^{\varphi_{-t}}.$$

Calculando as derivadas ó lado dereito do signo igual, e simplificando, obtemos:

$$0 = \sum_j (\nabla_{[Y_j,X]} Y_j + \nabla_{Y_j}[Y_j, X] - [\nabla_{Y_j} Y_j, X]) = \sum_j \mathcal{L}_X \nabla(Y_j, Y_j),$$

onde X é un campo de vectores con grupo 1-paramétrico de difeomorfismos φ_t, e esto proba o resultado. $\square$

Esta técnica de demostración non nos permite probar que a condición é suficiente, de feito analizando o seguinte exemplo podemos ver que a suficiencia non se verifica.

Exemplo 2.1.1.

Consideremos $(\mathbb{R}^2, g)$, onde $g_{ij} = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ é a métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$ e sexa $X = X^i(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$ un campo de vectores arbitrario. A condición do Teorema 2.1.1 exprésase aquí como

$$\frac{\partial^2 X^k}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 X^k}{\partial (x^2)^2} = 0, k = 1, 2.$$

O campo de vectores $X = \exp(x^2)\sin(x^1) \frac{\partial}{\partial x^1}$ verifica trivialmente a condición. A expresión local en serie de Taylor do grupo 1-paramétrico de transformacións φ_t, asociado a X ven dado pola expresión

$$\varphi_t(x^1, x^2) = (x^1, x^2) + t(\exp(x^1)\sin(x^2), 0) + \frac{1}{2}t^2(\exp(2x^1)\sin^2(x^2), 0) + \theta(t^3),$$

onde $\theta(t^3)$ denota un infinitésimo de orden t^3; e concretamente, o campo de tensión é o seguinte:

$$\tau(\varphi_t)(x^1, x^2) = t^2(\exp(2x^1), 0) + \theta(t^3).$$

Neste caso a parte lineal do campo de tensión anúlase, pero o grupo 1-paramétrico de transformacións φ_t, asociado a X non está formado por aplicacións harmónicas.

Este exemplo induce á seguinte definición:

Definición 2.1.2.

Un campo de vectores X nunha variedade semi-Riemanniana de dimensión m, (M, g) é chamado 1-harmónico-Killing (1-h-K) se o grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado a X, $\{\varphi_t\}_{t\in I}$, verifica:

$$\frac{d\tau(\varphi_t)}{dt}|_{t=0} = 0,$$

onde $\tau(\varphi_t)$ é o campo de tensión de φ_t.

Observación 2.1.1.

O. Nouhaud en [38] utiliza o termo transformación infinitesimal harmónica nun contexto similar. Análogas definicións son dadas en [54] para transformacións infinitesimais isométricas, totalmente xeodésicas, ("motions"e "afin motions"na súa terminoloxía) e conformes.

Téñense os seguintes resultados:

Teorema 2.1.2.

Nunha variedade semi-Riemanniana (M, g) as seguintes afirmacións son equivalentes:

- **(i)** *X é un campo de vectores 1-harmónico-Killing.*

- **(ii)** $g^{ij}(\mathcal{L}_X\Gamma^k_{ij}) = 0,\ i,j,k = 1\ldots,m,$ *onde* $\mathcal{L}$ *denota a derivada de Lie,* g^{ij} *son as compoñentes da matriz inversa da métrica* g *e* Γ^k_{ij} *son as compoñentes da conexión de Levi-Civita de* g.

- **(iii)** $X : (M,g) \longrightarrow (TM, g^C)$ *é unha sección harmónica, onde* g^C *denota o levantamento completo de* g.

- **(iv)** $\triangle X = 2Ric(X,.)$, *onde* $\triangle = d\delta + \delta d$, *(*$d =$ *diferencial,* $\delta =$ *codiferencial) e* Ric *denota o tensor de Ricci de* (M,g).

- **(v)** X *é un campo de vectores de Jacobi ó longo da identidade.*

Demostración

Sexa $x^i,\ i = 1,\ldots,m$, un sistema de coordenadas locais en M e $X = X^i(x^i)\,\frac{\partial}{\partial x^i}$ un campo de vectores en M con grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado $\{\varphi_t\}_{t\in I}$. Tense que, localmente a expansión en serie de Taylor de φ_t é

$$\varphi_t(x^i) = x^i + tX^i(x^i) + \theta(t^2),\ t\in I,$$

onde $\theta(t^2)$ é o resto de orden 2.

Despois dalgún cálculo obtense que a segunda forma fundamenteal de φ_t, localmente, ven dada por

$$\begin{aligned}(\nabla(d\varphi_t))^k_{ij} &= [\frac{\partial^2 X^k}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^l_{ij}\frac{\partial X^k}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}X^l + \Gamma^k_{il}\frac{\partial X^l}{\partial x^j} + \Gamma^k_{lj}\frac{\partial X^l}{\partial x^i}]t + \theta(t^2)\\ &= (\mathcal{L}_X\Gamma^k_{ij})t + \theta(t^2),\ i,j,k,l = 1,\ldots,m.\end{aligned}$$

En consecuencia a parte lineal do campo de tensión é

$$\frac{d\tau(\varphi_t)^k}{dt}|_{t=0} = g^{ij}(\mathcal{L}_X\Gamma^k_{ij}),\ i,j,k = 1,\ldots,m,$$

e esto proba a equivalencia $(i)\Leftrightarrow(ii)$.

Se consideramos $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ como aplicación de (M,g) en (TM, g^C) temos en coordenadas:

$$X : (M,g)\longrightarrow(TM,g^C),\ x^i\mapsto X(x^i) = (x^i, X^i),\ i = 1\ldots m,$$

e o campo de tensión da aplicación X é exactamente:

$$\begin{aligned} \tau(X)^k &= 0, \\ \tau(X)^{k+m} &= g^{ij}(\mathcal{L}_X \Gamma^k_{ij}),\ i,j,k = 1,\ldots m, \end{aligned}$$

esto proba a equivalencia $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.

En coordenadas locais a exprexión $\triangle X = 2Ric(X,.)$ ven dada por:

$$-(g^{kj}\nabla_k \nabla_j X_i - (Ric)^h_i X_h) = 2(Ric)_{ij} X^j, \tag{2.1.1}$$

onde $(Ric)_{ij} = (Ric)^h_i g_{hj}$ e $X_i = g_{ih} X^h$ son as compoñentes da 1-forma asociada o campo de vectores X. A partires de (2.1.1) obtense:

$$-g^{kj}\nabla_k \nabla_j X_i - (Ric)_{ij} X^j = 0,$$

e polo tanto

$$g^{kj}(\mathcal{L}_X \Gamma^i_{kj}) = g^{kj}\nabla_k \nabla_j X^i + (Ric)^i_j X^j = 0.$$

Así temos que $(ii) \Leftrightarrow (iv)$.

A equivalencia $(iii) \Leftrightarrow (v)$ é un caso particular do seguinte teorema de Ferreira [17]:

Teorema 2.1.3.

Sexa $X : (M,g) \longrightarrow (TM, g^C)$ un campo de vectores nunha variedade semi-Riemanniana (M,g), e a proxección do fibrado tanxente $\pi : (TM, g^C) \longrightarrow (M,g)$. Entón π é totalmente xeodésica e:

$$\begin{aligned} \tau(X) &= H(\tau(\pi \circ X)) + V(J_{\pi \circ X}(X)) \\ &= H(\tau(id)) + V(J_{id}(X)), \end{aligned}$$

onde H e V denotan a descomposición canónica horizontal e vertical e id denota a identidade de (M,g). □

Claramente a harmonicidade implica 1-harmonicidade, pero o inverso non é certo en xeral.

Observación 2.1.2.

Sexa (M, g) unha variedade Riemanniana compacta llana. Se X é un campo de vectores 1-harmónico-Killing entón (usando técnicas Bochner) X é un campo de vectores paralelo e polo tanto Killing. Como as isometrías son aplicacións harmónicas, obtemos que X é un campo de vectores harmónico-Killing. En conclusión, para unha variedade Riemanniana compacta llana os campos de vectores 1-harmónico-Killing e harmónico-Killing coinciden.

Observación 2.1.3.

Sexa (M, g) unha variedade Kähler compacta. Usando o Teorema de Rixidez de Lichnérowicz ([14], p.38), que afirma que se as tranformacións infinitesimais son variacións harmónicas da identidade, a cal é holomorfa, entón son variacións holomorfas, temos que X é un campo de vectores harmónico-Killing nunha variedade compacta Kähler se e soamente se X é holomorfo. Esto será tratado con detalle no capítulo 3.

Sexa $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ unha aplicación harmónica dunha variedade Riemanniana compacta, (M, g), nunha variedade Riemanniana completa, (N, h). Un campo de vectores X ó longo de f define unha variación dada por $f_t = \exp' \circ (t.X)$, $t \in \mathbb{R}$, onde $\exp'$ denota a exponencial de (N, h). En [48] a tales variacións chámaselles variacións xeodésicas e próbase o seguinte:

Teorema 2.1.4.

Sexa $f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ unha aplicación harmónica dunha variedade Riemanniana compacta, (M, g), nunha variedade Riemanniana completa de curvatura constante σ, (N, h). Entón X define unha variación de f por aplicacións harmónicas se e soamente se $\|X\|$ =const. e se cumpren as seguintes ecuacións:

- *(i)* $trace R'(df, X) df = \nabla^2 X$,

- *(ii)* $traceR'(df, X)\nabla X = 0.$

onde R' *denota a curvatura da variedade* (N, h). □

O teorema anterior permítenos dar unha caracterización dos campos de vectores harmónicos-Killing no caso particular de que o seu fluxo sexan xeodésicas.

Corolario 2.1.1.

Sexa X un campo de vectores nunha variedade Riemanniana, compacta, de curvatura constante σ, (M, g). Supoñamos que o fluxo de X son xeodésicas. Entón X é harmónico-Killing se e soamente se $\|X\|$ =const. e se cumpren as seguintes ecuacións:

- (i) $traceR(d\varphi_t, X)d\varphi_t = \nabla^2 X,$
- (ii) $traceR(d\varphi_t, X)\nabla X = 0.$

onde R denota o tensor curvatura da variedade (M, g).

Demostración

Por se-lo fluxo de X xeodésicas o grupo 1-paramétrico de transformacións asociado a X pódese expresar do seguinte xeito: $\varphi_t = \exp\circ(tX)$, $t\in\mathbb{R}$. Estas aplicacións definen unha variación xeodésica da $id : (M, g)\longrightarrow(M, g)$ e estamos nas condicións do Teorema 2.1.4. Polo tanto as aplicacións φ_t son harmónicas se e soamente se cumpren as condicións do corolario. □

Nótese que a condición (i) é equivalente a pedir que o campo sexa 1-harmónico-Killing.

Reescrito [57] na nosa teminoloxía, tense o resultado equivalente relacionado coa curvatura de Ricci:

Proposición 2.1.1.

Se nunha variedade Riemanniana, compacta e orientable, (M, g), o tensor de Ricci, Ric, é semi-definido negativo, (é dicir para todo campo de vectores V en M, $Ric(V, V) \leq 0$), entón un campo de vectores, X, é 1-harmónico-Killing se e soamente se X é paralelo. Nembargantes, se Ric é definido negativo, (é dicir $Ric(V, V) = 0$ se e soamente se $V = 0$), entón os únicos campos de vectores 1-harmónicos-Killing son as seccións nulas.

Demostración

Por ser $X = X^h \frac{\partial}{\partial x^h}$ un campo de vectores 1-harmónico-Killing verifica en coordenadas a seguinte ecuación:

$$g^{ij}\nabla_i\nabla_j X^h + (Ric)_i^h X^i = 0. \tag{2.1.2}$$

A seguinte fórmula integral é ben coñecida ([54]):

$$\begin{aligned}\int_M &\quad [(g^{ji}\nabla_j\nabla_i X^h - (Ric)_i^h X^i)X_h + \frac{1}{2}(\nabla^j X^i - \nabla^i X^j)(\nabla_j X_i - \nabla_i X_j) \\ + &\quad (\nabla_i X^i)^2]d\sigma = 0,\end{aligned}$$

onde $d\sigma$ denota o elemento de volume do espacio.

Sustituindo

$$g^{ji}\nabla_j\nabla_i X^h = -(Ric)_i^h X^i$$

na ecuación anterior temos:

$$\int_M (Ric)_{ji} X^j X^i d\sigma = \int_M [\frac{1}{4}(\nabla^j X^i - \nabla^i X^j)(\nabla_j X_i - \nabla_i X_j) + \frac{1}{2}(\nabla_i X^i)^2]d\sigma,$$

de onde

$$\int_M (Ric)_{ji} X^j X^i d\sigma \geq 0.$$

Se a igualdade se da na anterior desigualdade, entón temos

$$\nabla_j X_i - \nabla_i X_j = 0$$
$$\nabla_i X^i = 0.$$

Combinando con (2.1.2) e $\nabla_i X^i = 0$, implica que X é un campo de vectores Killing. Polo tanto

$$\nabla_j X_i + \nabla_i X_j = 0,$$

que xunto con

$$\nabla_j X_i - \nabla_i X_j = 0,$$

implica $\nabla_j X_i = 0$, o que proba o resultado. □

A proba desta proposición está baseada na técnica de Bochner clásica para variedades Riemannianas compactas (coma na Observación 2.1.2), a cal non é válida no caso de variedades semi-Riemannianas. Trataremos esto cun pouco máis de detalle no derradeiro capítulo.

Como exemplo estudiarémo-las variedades métricas contacto. Unha variedade diferenciable $(2m+1)$-dimensional M é chamada variedade contacto se ten unha 1-forma diferencial global η tal que $\eta \wedge (d\eta)^m \neq 0$ en tódolos puntos de M. Para unha forma de contacto dada η, existe un único campo de vectores ξ, chamado campo de vectores característico, satisfacendo $\eta(\xi) = 1$, $d\eta(\xi, X) = 0$, $\forall X \in \chi(M)$.

A definición de estructura contacto implica que a distribución contacto (subfibrado de $T(M)$) D, dada por $\eta = 0$, está lonxe de ser integrable. É ben sabido (ver [2]) que a dimensión máxima dunha subvariedade integral de D é m. Unha métrica Riemanniana dirase que está asociada á estructura contacto se existe un campo de tensores de tipo $(1,1)$, ϕ, tal que:

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= g(X,\phi Y),\ g(X,\xi) = \eta(X), \\ \phi^2(X) &= -X + \eta(X)\xi,\ \forall X, Y \in \chi(M). \end{aligned}$$

Estas métricas poden ser construidas pola polarización de $d\eta$ avaliada nunha base ortonormal local do espacio tanxente con respecto a unha métrica arbitraria, no subfibrado contacto D. A estructura (ϕ, η, ξ, g) en M é chamada estructura métrica contacto e a súa variedade asociada é chamada variedade métrica contacto, a cal é orientable e de dimensión impar con $m \geq 3$. Entón, as variedades métricas contacto son o análogo a variedades casi-Hermíticas , en dimensión impar.

Nas variedades métricas contacto temos o seguinte resultado:

Proposición 2.1.2.

Unha variedade métrica contacto (M, ϕ, η, ξ, g) é K-contacto se e soamente se o campo de vectores característico, ξ, é 1-harmónico-Killing.

Demostración

Unha variedade métrica contacto é K-contacto se e soamente se o campo de vectores característico ξ é Killing con respecto a g, ou equivalentemente, se a curvatura de Ricci, $Ric(\xi, \xi)$, na dirección de ξ é igual a $2m$.

Se supoñemos que ξ é 1-harmónico-Killing tense que

$$trace_g \nabla^2 \xi + Q\xi = 0,$$

onde Q é o operador de Ricci definido por $g(QA, B) = Ric(A, B)$, A, B campos de vectores en M. Por outra parte para unha variedade métrica contacto é ben coñecido que

$$trace_g \nabla^2 \xi = Q\xi - 4m\xi.$$

Polo tanto ξ é 1-harmónico-Killing se e soamente se

$$Q\xi = 2m\xi.$$

Deste xeito

$$Ric(\xi, \xi) = g(Q\xi, \xi) = g(2m\xi, \xi) = 2mg(\xi, \xi) = 2m\eta(\xi) = 2m.$$

Esto proba que se ξ é 1-harmónico-Killing entón M é K-contacto. O recíproco é trivial. $\square$

2.2 Interpretación xeométrica dos campos de vectores 1-harmónicos-Killing

A equivalencia $(i)\Leftrightarrow(iv)$ do Teorema 2.1.2 permítenos dar unha interpretación xeométrica dos mesmos. É a seguinte:

Empregando a definición de campo de vectores afín-Killing (ou totalmente xeodésico) unha condición necesaria e suficiente para que a transformación infinitesimal:

$$x^h \rightsquigarrow x^h + tX^h(x)$$

leve a xeodésica $x^h(s)$ noutra xeodésica e preserve o carácter afín da lonxitude de arco s é que:

$$(\nabla_j \nabla_i X^h + R^h_{kji} X^k)\frac{dX^j}{ds}\frac{dX^i}{ds} = 0.$$

Entón para un campo de vectores unitario u^h no punto (x^h), denotamos

$$g^h = (\nabla_j \nabla_i X^h + R^h_{kji} X^k) u^j u^i,$$

o vector de desviación xeodésica de u^h con respecto a X^h.

Agora, tomamos m vectores unitarios mutuamente ortogonais u^h_a, $(a = 1, \ldots, m)$ no punto (x^h) dunha variedade Riemanniana m-dimensional e calculamo-la media dos vectores de desviación xeodésica g^h_a, $(a = 1, \ldots, m)$ de u^h_a con respecto a X^h:

$$\frac{1}{m}\sum_{a=1}^{m} g^h_a = \frac{1}{m}\sum_{a=1}^{m} (\nabla_j \nabla_i X^h + R^h_{kji} X^k) u^j_a u^i_a$$

ou

$$\frac{1}{m}\sum_{a=1}^{m} g^h_a = \frac{1}{m}(g^{ji}\nabla_j \nabla_i X^h + (Ric)^h_i X^i) \tag{2.2.1}$$

tendo en conta que

$$g^{ji} = \sum_{a=1}^{m} u^j_a u^i_a.$$

Entón a media destes vectores de desviación xeodésica non depende da elección dos m vectores unitarios mutuamente ortogonais. Así (2.2.1) representa o vector de desviación media xeodésica de (x^h) con respecto a X^h. Empregando a equivalencia $(i)\Leftrightarrow(iv)$ do Teorema 2.1.2 temos que os campos de vectores 1-harmónicos-Killing son tales que o vector de desviación media xeodésica anúlase, esto é:

$$g^{ji}\nabla_j\nabla_i X^h + (Ric)_i^h X^i = 0.$$

Por este motivo os campos de vectores verificando a ecuación anterior ((iv) Teorema 2.1.2) son chamados campos de vectores xeodésicos por Yano e Nagano en [57]. Estes autores conxeturaron que o fluxo de tales campos preserva xeodésicas "en promedio". De modo máis preciso: ¿O fluxo dos campos de Jacobi ó longo da identidade está formado por aplicacións harmónicas?. O Teorema 2.1.2 afirma que os campos de vectores de Jacobi ó longo da identidade son campos de vectores 1-harmónico-Killing.

Observación 2.2.1.

Os campos de vectores harmónicos-Killing nunha variedade de Riemann dan lugar a un tipo especial de variación harmónica da id_M. Smith [45] estudiou as variacións da id_{S^n}, obtendo que neste caso para $n\geq 3$ tódalas variacións harmónicas da identidade de S^n veñen dadas por isometrías infinitesimais. Deste xeito, os campos de vectores harmónicos-Killing en S^n con $n\geq 3$, son os Killing.

Smith [45] proba que os campos de Jacobi ó longo da identidade en S^2 están xerados por 6 campos de vectores; 3 deles veñen dados por isometrías infinitesimais e os outros por transformacións conformes de S^2 en S^2, as cales son tamén aplicacións harmónicas. Podemos dicir entón que hay 6 xeradores dos campos de vectores 1-harmónicos-Killing en S^2 e todos son harmónicos-Killing. Notar que Lee e Tóth [31] probaron que non existen variacións harmónicas xeodésicas en S^2.

Lee e Tóth [31] estudian tamén cando un campo de vectores X xera variacións xeodésicas da id_{S^n}. Para esto denotan por $V(id_{S^n})$ os campos de vectores X tal que

$$t\mapsto(id_{S^n})_t = \exp\circ(tX),$$

é unha aplicación harmónica para todo $t\in\mathbb{R}$. Os autores proban que $V(id_{S^n}) = 0$

cando n é par, e $V(id_{S^{2n-1}})$ é un doble cono sobre $SO(2n)/U(n)$. Este resultado resalta a diferencia coas variacións obtidas das transformacións infinitesimais asociadas a X.

Empregando a equivalencia $(i)\Leftrightarrow(iv)$ entre os campos de vectores 1-harmónicos-Killing e os definidos por Yano e Nagano podemos reescribi-los seguintes resultados ([57]) na nosa terminoloxía.

Teorema 2.2.1.

- *(1) Sexa (M, g) unha variedade Riemanniana, compacta, Einstein e orientable. A diverxencia dun campo de vectores 1-harmónico-Killing X, $\nabla_i X^i$, é solución da ecuación:*

$$\triangle f = -2cf,$$

onde $(Ric)_{ij} = cg_{ij}$ e $c = \frac{K}{n} > 0$ a curvatura escalar da variedade Einstein.

- *(2) Sexa (M, g) unha variedade Riemanniana compacta, Einstein e orientable. Se a ecuación $\triangle f = -2cf$ admite como solución unha función f non nula, entón un campo de vectores 1-harmónico-Killing é Killing.*

- *(3) Sexa (M, g) unha variedade Riemanniana, compacta, Einstein e orientable. Un campo de vectores 1-harmónico-Killing descomponse do seguinte xeito:*

$$X^h = Y^h + \nabla^h f,$$

onde Y^h é un campo de vectores Killing e f é solución de $\triangle f = -2cf$. O campo de vectores Killing Y^h e a función f están determinados de maneira única. $\square$

Ademais se denotamos por L o espacio vectorial dos campos de vectores 1-harmónicos-Killing, por L_1 a álxebra de Lie dos campos de vectores Killing, por L_2 o espacio vectorial dos gradientes de solucións de $\triangle f = -2cf$ e por L_3 a álxebra de Lie de campos de vectores con diverxencia nula, entón temos que nunha variedade compacta, Einstein e orientable con curvatura escalar positiva tense

$$L = L_1 + L_2,\ [L_1, L_2] \subset L_2,\ [L_2, L_2] \subset L_3.$$

2.3 Relacións dos campos de vectores 1-h-K e h-K con outros campos de vectores

2.3.1 Campos de vectores Killing, afíns-Killing, conformes e proxectivos

En primeiro lugar lembrámo-la seguinte terminoloxía clásica:

- (i) X é chamado campo de vectores *Killing* se o grupo 1-paramétrico local de transformacións infinitesimais xerado por X é un grupo de isometrías. Equivalentemente, $\mathcal{L}_X g = 0$.
- (ii) X é chamado campo de vectores *afín-Killing* se o grupo 1-paramétrico local de transformacións infinitesimais xerado por X é un grupo de aplicacións totalmente xeodésicas. Equivalentemente, $\mathcal{L}_X \nabla = 0$.
- (iii) X é chamado campo de vectores *conforme* se o grupo 1-paramétrico local de transformacións infinitesimais xerado por X é un grupo de aplicacións conformes. Equivalentemente, $\mathcal{L}_X g = 2\rho g$, para algunha función ρ.
- (iv) X é chamado campo de vectores *proxectivo* se o grupo 1-paramétrico local de transformacións infinitesimais xerado por X é un grupo de colineacións proxectivas, esto é, aplica xeodésicas en xeodésicas. Equivalentemente, $(\mathcal{L}_X \nabla)(X,Y)$=$p(X)Y + p(Y)X$, para algunha 1-forma p.

É importante ter en conta que para estes campos de vectores non ten sentido falar de 1-Killing, 1-afín-Killing , 1-conforme e 1-proxectivo coma casos distintos de Killing, afíns-Killing, conformes e proxectivos. Nos anos cincuenta (ver [54]) os correspondentes conceptos de aplicación 1-isométrica, 1-afín, 1-conforme e 1-proxectiva para o grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado ó campo de vectores X, $\{\varphi_t\}_{t\in I}$, foron chamadas *movemento infinitesimal, colineación afín infinitesimal, transformación conforme infinitesimal e transformación proxectiva infinitesimal.* É ben coñecido que a caracterización moderna destes tipos de campos de vectores inclúe a proba da equivalencia entre *movemento infinitesimal* e isometría, *colineación afín infinitesimal* e aplicación afín (ou totalmente xeodésica), entre *transformación conforme infinitesimal* e aplicación conforme, e finalmente, entre *transformación proxectiva infinitesimal* e aplicación proxectiva para a aplicación φ_t (ver [27]). Nembargantes, o caso 1-harmónico e harmónico e completamente diferente tal e como amosamos no Exemplo 2.1.1.

Sexa (M, g) unha variedade semi-Riemanniana e X un campo de vectores en M. O pull-back da métrica g^C pola sección $X : (M, g) \longrightarrow (TM, g^C)$, $(X^* g^C)$, ten a seguinte expresión:

$$\begin{aligned}(X^* g^C)(A, B) &= g((\nabla X)(A), B) + g(A, (\nabla X)(B)) \\ &= (\mathcal{L}_X g)(A, B)\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

para tódolos campos de vectores A, B en M. Entón, como no Teorema 2.1.2, os campos de vectores definidos antes poden ser caracterizados polas propiedades de $X : (M, g) \longrightarrow (TM, g^C)$.

A ecuación (2.3.1) proba que X é Killing, se e soamente se, $Null(g^C) = dX(TM)$. Asemade, cun sinxelo cálculo pódese comprobar que a segunda forma fundamental da sección X é igual a $\mathcal{L}_X \nabla$ (demostración do Teorema 2.1.2) . Deste xeito, X é afín-Kiling se e soamente se X é unha sección totalmente xeodésica. Finalmente é ben coñecido [53] que X é conforme se e soamente se $\mathcal{L}_X g = -\frac{2 div X}{m} g$, o cal implica que $(X^* g^C)(A, B) = -\frac{2 div X}{m} g(A, B)$, para tódolos campos de vectores A, B en M. Esto amosa que X é un campo de vectores conforme se e soamente se X define unha sección conforme de (TM, g^C).

Exemplo 2.3.1.

Cosiderémo-lo plano real $\mathbb{R}^2$ coa métrica Euclidea $g_{ij} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$, e o campo de vectores

$$X(x^1, x^2) = X^1(x^1, x^2)\frac{\partial}{\partial x^1} + X^2(x^1, x^2)\frac{\partial}{\partial x^2}$$

satisfacendo:

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^1 \partial x^1} = -\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^2 \partial x^2} \neq 0,$$

con $i = 1, 2$. Esto é, $X^i, i = 1, 2$, son funcións harmónicas non nulas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

A condición afín-Killing para este tipo de exemplos é equivalente a:

$$\frac{\partial^2 X^k}{\partial x^i \partial x^j} = 0,$$

para todo $i, j, k = 1, 2$.

Noutras palabras, o campo de vectores X é 1-harmónico-Killing se e soamente se

$$div(grad(X^i)) = 0,$$

para $i = 1, 2$, e afín-Killing se e soamente se a matriz Xacobiana de $(grad(X^i))$ se anula.

A condición Killing é

$$\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^k} = 0,$$

para todo $i, k = 1, 2$.

Finalmente a condición para que un campo de vectores sexa conforme é

$$\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^k} = 2\rho(x^1, x^2)\delta_{ik},$$

sendo ρ unha función diferenciable e $i, k = 1, 2$.

Entón $X^1 = \frac{1}{2}(x^1)^2 - \frac{1}{2}(x^2)^2$ e $X^2 = 0$ proporciona un campo de vectores X que é 1-harmónico-Killing pero non é afín-Killing porque $\frac{\partial^2 X^1}{\partial x^1 \partial x^1} \neq 0$, non Killing porque $\frac{\partial X^1}{\partial x^1} \neq 0$, non conforme porque $\frac{\partial X^1}{\partial x^2} \neq 0$ e non harmónico-Killing porque $\tau(\varphi_t)(x, y) = t^2(x, 0) + O(t^3)$. Este exemplo pode xeneralizarse a $\mathbb{R}^n$, tomando n funcións harmónicas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Observación 2.3.1.

En [53] úsase a notación, $\Box X = \triangle X - 2QX$ onde $\triangle X =: \triangle\xi = (d\delta + \delta d)\xi$, ($\xi$ é a 1-forma asociada a X) e QX é un campo de tensores de tipo $(1,1)$ chamado operador de Ricci e definido por $g(QA, B) = Ric(A, B)$; A, B campos de vectores en M. No noso contexto:

$$\Box X = -g^{ij}(x)(\mathcal{L}_X \Gamma_{ij}^k(x)) = -\tau(\varphi_t)^{k+m}(x)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Claramente os campos de vectores Killing e afíns-Killing son harmónicos-Killing. No caso de campos de vectores 1-harmónicos-Killing o seguinte resultado danos a condición para ter o recíproco.

Proposición 2.3.1.

Sexa X un campo de vectores 1-harmónico-Killing nunha variedade Riemanniana, compacta e orientable. Entón é Killing se e soamente se $\delta X = 0$.

Demostración

Un campo de vectores X nunha variedade compacta orientable Riemanniana sen fronteira é Killing se e soamente se $\Box X = \triangle X - 2Ric(X, .) = 0$ e $\delta X = \nabla_i X^i = -divX = 0$, onde $\triangle = d\delta + \delta d$.

Temos que X é 1-harmónico-Killing se e soamente se, $\triangle X - 2Ric(X, .) = 0$ polo Teorema 2.1.2, e esto proba o resultado. $\Box$

Proposición 2.3.2.

Sexa (M, g) unha variedade (semi-)Riemanniana, Y un campo de vectores Killing e X un campo de vectores 1-harmónico Killing. Entón $[Y, X]$ é 1-harmónico-Killing.

Demostración

Sexa φ_t o fluxo local de Y. Por ser φ_t isometrías locais entón temos

$$\widetilde{\varphi}_t trace_g \nabla^2 X = trace_g \nabla^2 \widetilde{\varphi}_t X$$

e

$$\widetilde{\varphi}_t trace_g R(X,.). = trace_g R(\widetilde{\varphi}_t X,.).$$

onde

$$\widetilde{\varphi}_t(X) := d\varphi_t \circ X \circ \varphi_t^{-1}.$$

Estas ecuacións e a harmonicidade de X implican que

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_t(trace_g \nabla^2 X + trace_g R(X,.).)|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt}\{trace_g \nabla^2 \widetilde{\varphi}_t X + trace_g R(\widetilde{\varphi}_t X,.).\}|_{t=0} \\ &= trace_g \nabla^2 [Y,X] + trace_g R([Y,X],.). \end{aligned}$$

A última ecuación é equivalente a

$$\triangle[Y,X] = 2Ric([Y,X],.) = 0,$$

onde $\triangle = d\delta + \delta d$ e polo tanto $[Y,X]$ é 1-harmónico-Killing polo Teorema 2.1.2. Ademais por se-la multiplicación por -1 unha isometría $[X,Y]$ tamén é 1-harmónico-Killing. □

Para campos de vectores conformes témo-lo seguinte resultado:

Proposición 2.3.3.

Os campos de vectores conformes e 1-harmónicos-Killing nunha variedade Riemanniana m-dimensional, compacta e orientable están relacionados do seguinte xeito:

- Para $m = 2$ existe unha correspondencia bixectiva entre os campos de vectores conformes e 1-harmónicos-Killing.
- Para $m > 2$ se X é un campo de vectores conforme entón é 1-harmónico-Killing, se e soamente se, $d\delta X = 0$.

Demostración:

A demostración obtense utilizando o feito de que unha condición necesaria e suficiente para que un campo de vectores X, nunha variedade Riemanniana m-dimensional compacta orientable sen fronteira, sexa un campo de vectores conforme é:

$$\square X + \frac{m-2}{m} D\delta X = 0,$$

onde $D\delta X$é o campo de vectores asociado a 1-forma $d\delta X$. $\square$

Outros resultados que relacionan os diversos campos de vectores son os seguintes:

Proposición 2.3.4.

Sexa (M, g) unha variedade Riemanniana m-dimensional, compacta e orientable. Se X é un campo de vectores 1-harmónico-Killing e conforme en (M, g) entón X é un campo de vectores Killing e polo tanto harmónico-Killing.

Demostración

Por ser X un campo de vectores conforme

$$\mathcal{L}_X g_{ij} = 2\rho g_{ij},$$

sendo g_{ij} as compoñentes locais da métrica g e ρ unha función en M. Polo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \Gamma^k_{ij} &= \nabla_i \nabla_j X^k + R^k_{hij} X^h \\ &= \rho_i \delta^h_j + \rho_j \delta^h_i - g_{ij}\rho^h, \end{aligned}$$

onde Γ^k_{ij} denotan os símbolos de Christoffel da conexión de Levi-Civita de g, R^k_{hij} as compoñentes do tensor curvatura, X^i as compoñentes de X, $\rho_j = \nabla_j \rho$, $\rho^h = \rho_i g^{ih}$ e δ^i_l=$g^{ij} g_{jl}$. Calculando a traza da ecuación anterior e tendo en conta que

$$\rho_j = \frac{1}{2m} \nabla_j \nabla_r X^r,$$

obtemos

$$g^{ij} \nabla_i \nabla_j X^k + R^k_i X^i = -\frac{m-1}{m} \nabla^k \nabla_r X^r. \tag{2.3.2}$$

A parte esquerda do signo igual de (2.3.2) anúlase por se-lo campo de vectores X 1-harmónico-Killing. E así

$$\nabla^k \nabla_r X^r = 0,$$

polo tanto $\nabla_r X^r$ = cte. Ademais nun espacio compacto e orientable polo teorema de Green:

$$\int_M (\nabla_r X^r) d\sigma = 0,$$

e por ser $\nabla_r X^r$ =const. Entón $\nabla_r X^r = 0$, que pola Proposición 2.3.1 proba o resultado. □

Proposición 2.3.5.

Sexa (M, g) unha variedade Riemanniana m-dimensional compacta e orientable. Se X é un campo de vectores 1-harmónico-Killing e proxectivo en (M, g) entón X é un campo de vectores Killing e polo tanto harmónico-Killing.

Demostración

Por ser X un campo de vectores proxectivo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \Gamma_{ij}^k &= \nabla_i \nabla_j X^k + R_{hij}^k X^h \\ &= p_j \delta_i^k + p_i \delta_j^k, \end{aligned}$$

onde Γ_{ij}^k denotan os símbolos de Christoffel da conexión de Levi-Civita de g, R_{hij}^k as compoñentes do tensor curvatura de (M, g), X^k as compoñentes do campo de vectores X, $\delta_l^i = g^{ij} g_{jl}$ e p_j as compoñentes dunha 1-forma p en M. Contraendo a ecuación anterior en k e en i tense:

$$p_j = \frac{1}{2m+1} \nabla_j \nabla_r X^r.$$

Por outra parte, calculando a traza con respecto a g^{ij}:

$$g^{ij} \nabla_i \nabla_j X^h + K_i^h = \frac{2}{2m+1} \nabla^h \nabla_r X^r. \tag{2.3.3}$$

A parte esquerda do signo igual de (2.3.3) anúlase por se-lo campo de vectores X 1-harmónico-Killing. E así

$$\nabla^k \nabla_r X^r = 0,$$

polo tanto $\nabla_r X^r =$ cte. Ademais nun espacio compacto e orientable polo teorema de Green:

$$\int_M (\nabla_r X^r) d\sigma = 0,$$

e por ser $\nabla_r X^r$ =const. Entón $\nabla_r X^r = 0$, que pola Proposición 2.3.1 proba o resultado. $\square$

Un campo de vectores X nunha variedade semi-Riemanniana (M, g) que deixa o tensor de curvatura invariante, é dicir, $\mathcal{L}_X \; R^i_{jkm} = 0$ é chamado *colineación de curvatura* (C.C.). Se en particular $\nabla_h \; (\mathcal{L}_X \Gamma^k_{ij}) = 0$, sendo Γ^k_{ij} os símbolos de Christoffel da variedade, dise que X é unha *colineación de curvatura especial* (C.C.E.). Se deixa a curvatura de Ricci invariante, é dicir , $\mathcal{L}_X (Ric)_{ij} = 0$ X é chamado *colineación Ricci* (C.R.).

Obviamente, se X é un campo de vectores Killing ou afín-Killing entón X é unha colineación de curvatura. Ademais, tendo en conta que as operacións de derivada de Lie e contracción conmutan, se X é unha colineación de curvatura entón é unha colineación Ricci. Pero os recíprocos non son necesariamente certos.

Téñense os seguintes resultados ([26]):

Proposición 2.3.6.

Sexa (M, g) unha variedade Einstein, de dimensión $m > 2$, con curvatura escalar non nula. Un campo de vectores X en M é Killing se e soamente se X é unha colineación Ricci.

Demostración

Por ser M unha variedade Einstein de dimensión $m > 2$ a curvatura de Ricci, $Ric = \frac{r}{m}g$, onde r denota a curvatura escalar e é constante. Entón

$$\mathcal{L}_X Ric = \mathcal{L}_X(\frac{r}{m}g) = \frac{r}{m}\mathcal{L}_X g,$$

e esto proba o resultado. □

Por outra parte, cada variedade de dimensión 2 é unha variedade Einstein, pero r non é necesariamente constante. Se X é unha colineación Ricci tense:

$$(\mathcal{L}_X r)g_{ij} + r\mathcal{L}_X g_{ij} = 0.$$

Entón asumindo $r \neq 0$, obtense:

$$\mathcal{L}_X g_{ij} = -(\frac{\mathcal{L}_X r}{r})g_{ij},$$

e polo tanto:

Proposición 2.3.7.

Cada colineación Ricci X nunha variedade de dimensión 2 é un campo de vectores conforme, (ou Killing cando $\mathcal{L}_X r = 0$). □

Tendo en conta que cada colineación de curvatura é unha colineación Ricci obtéñense os seguintes corolarios:

Corolario 2.3.1.

Sexa (M, g) unha variedade Einstein, de dimensión $m > 2$, con curvatura escalar non nula. Un campo de vectores X en M é Killing se e soamente se X é unha colineación de curvatura. □

Corolario 2.3.2.

Cada colineación de curvatura X nunha variedade de dimensión 2 é un campo de vectores conforme, (ou Killing cando $\mathcal{L}_X r = 0$). $\square$

En relación cos campos de vectores 1-harmónicos-Killing e as colineacións Ricci tense o seguinte:

Proposición 2.3.8.

Sexa (M, g) unha variedade semi-Riemanniana con curvatura de Ricci constante. Un campo de vectores, X, é Killing se e soamente se é 1-harmónico-Killing e é unha colineación Ricci.

Demostración

Se X é un campo de vectores 1-harmónico-Killing

$$\square X = 0.$$

Por ser X unha colineación Ricci:

$$\mathcal{L}_X (Ric)_{ij} = V^k \nabla_k (Ric)_{ij} + (Ric)_{ik} \nabla_j V^k + (Ric)_{kj} \nabla_i V^k = 0.$$

Se a curvatura de Ricci é constante $= k$:

$$\mathcal{L}_X (Ric)_{ij} = k(\nabla_j V^k + \nabla_i V^k) = 0, \tag{2.3.4}$$

contraendo (2.3.4) séguese que:

$$\nabla_k V^k = 0. \tag{2.3.5}$$

Utilizando que é 1-harmónico-Killing e a Proposición 2.3.1 tense que X é un campo de vectores Killing.

O recíproco é trivial. $\square$

A partir dos resultados xa coñecidos e os obtidos neste capítulo podemos face-lo seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Afín-Killing} & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ \text{Proxect. + 1-h-K} & \text{C.C.E.} & \text{Conf. + 1-h-K} \\ \updownarrow & \downarrow & \updownarrow \\ \text{Killing} & \text{C.C.} & \text{Killing} \\ & \downarrow & \\ & \text{C.R. + 1-h-K} & \\ & \updownarrow Ric = \text{constante} & \\ & \text{Killing} & \end{array}$$

2.3.2 Campos de vectores harmónicos

Na terminoloxía clásica tense tamén a seguinte definición:

Definición 2.3.1.

Un campo de vectores X é *harmónico*, ou a 1-forma asociada ξ é *harmónica* se satisfai:

$$d\xi = 0, \ \delta\xi = 0.$$

É ben coñecido que un campo de vectores é harmónico se e soamente se $\nabla_j X_i - \nabla_i X_j = 0$ e $\nabla_i X^i = 0$, ou equivalentemente se $g^{bc} \ \nabla_b \nabla_c X_i - (Ric)_{ai} X^a = 0$. Ademais, nunha variedade Riemanniana, compacta e orientable, o número de campos de vectores harmónicos (con coeficientes constantes) é igual o primeiro número de Betti da variedade, B_1.

En relación cos campos de vectores 1-harmónicos-Killing témo-los seguintes resultados:

Proposición 2.3.1.

Sexa (M, g) unha variedade Riemanniana compacta e orientable con curvatura de Ricci definida positiva ou definida negativa. Se X é un campo de vectores harmónico e 1-harmónico-Killing entón $X = 0$.

Demostración

Por ser X un campo de vectores 1-harmónico-Killing

$$g^{bc}\nabla_b\nabla_c X_i = -(Ric)_{ai}X^a,$$

e por ser X harmónico

$$g^{bc}\nabla_b\nabla_c X_i = (Ric)_{ai}X^a.$$

Polo tanto

$$g^{bc}\nabla_b\nabla_c X_i = (Ric)_{ai}X^a = 0.$$

E así

$$(Ric)_{ai}X^a X^i = 0.$$

Se a curvatura de Ricci é definida positiva ou definida negativa entón $X^i = 0$ e esto proba o resultado. $\square$

Proposición 2.3.2.

Sexa (M, g) unha variedade Riemanniana compacta e orientable con curvatura de Ricci semidefinida positiva ou semidefinida negativa. Se X é un campo de vectores harmónico e 1-harmónico-Killing entón X é paralelo.

Demostración

Se X é 1-harmónico-Killing e a curvatura de Ricci é semidefinida positiva pola Proposición 2.1.1 X é un campo de vectores paralelo.

Por outra parte é ben coñecido, (ver [53]), que para un campo de vectores harmónico

X:

$$\int_M Ric(X,X) + |\nabla X|^2 d\sigma = 0.$$

Polo tanto se a curvatura de Ricci é semidefinida positiva entón X é paralelo. E esto proba o resultado. □

Proposición 2.3.3.

Sexa (M, g) unha variedade Riemanniana compacta e orientable. Se X é un campo de vectores harmónico e 1-harmónico-Killing entón é Killing.

Demostración

X é un campo de vectores Killing, se e soamente se,

$$g^{bc}\nabla_b\nabla_c X_i + (Ric)_{ai}X^a = 0,$$

e

$$\nabla_i X^i = 0.$$

A primeira condición cúmprese por se-lo campo de vectores 1-harmónico-Killing e a segunda por ser harmónico, o cal proba o resultado. □

2.4 Campos de tensores harmónicos

2.4.1 Levantamentos de campos de vectores

En primeiro lugar consideremos unha función C^∞, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Entón o levantamento vertical f^V de f é unha función $f^V : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f^V = f \circ \pi$. Por outra parte, o levantamento completo f^C de f defínese do xeito seguinte $f^C = idf$, onde $i : \Gamma(T^*M) \longrightarrow C^\infty(TM)$ é a aplicación natural $(i\theta)(v) := \theta(v)$, para cada $\theta \in \Gamma(T^*M)$ e $v \in TM$, é dicir, en coordenadas locais:

$$f^C(x^i, x^{\bar{i}}) = x^{\bar{i}}\frac{\partial f}{\partial x^i},\ i = 1, \ldots, m,\ \bar{i} = i + m.$$

Para estas funcións tense o seguinte resultado ([21]):

Proposición 2.4.1.

- (i) Sexa f unha función C^∞ en (M,g). Entón f^V é sempre harmónica en (TM,g^C) e é totalmente xeodésica, se e soamente se, f é totalmente xeodésica.
- (ii) f^C é harmónica (resp., totalmente xeodésica) en (TM,g^C), se e soamente se, f é harmónica (resp., totalmente xeodésica) en (M,g). □

Agora sexa X un campo de vectores en (M,g) con grupo 1-paramétrico local de difeomorfismos $\{\varphi_t\}_{t\in I}$. Denotemos por X^V o levantamento vertical de X. X^V é o campo de vectores en TM determinado de maneira única pola seguinte propiedade:

$$X^V(i\theta)=\theta\circ\pi,$$

para toda 1-forma θ en M, onde $i:\Gamma(T^*M)\longrightarrow C^\infty(TM)$ é a aplicación natural seguinte: $(i\theta)(v):=\theta(v)$, para cada $\theta\in\Gamma(T^*M)$ e $v\in TM$.

Proposición 2.4.2.

X^V é un campo de vectores harmónico-Killing en (TM,g^C), para todo campo de vectores X en (M,g).

Demostración

O grupo 1-paramétrico local de difeomorfismos asociado a X^V denotarémolo por $\{(\varphi_t)^V\}$ $t\in I$. Se $\mathcal{U}=\{U\in M,\ (x^1,\ldots,x^m)\}$ é unha veciñanza de coordenadas en M, entón pódese considerar a veciñanza de coordenadas en TM, $T\mathcal{U}=\{\pi_{TM}^{-1}(\mathcal{U}),$ $(x^1,\ldots,x^m;x^{\bar{1}},\ldots,x^{\bar{m}})\}$, (ver sección 1.4).

Nestas coordenadas

$$(\varphi_t)^V(x^i,x^{\bar{i}})=(\varphi_t(x^i),0).$$

A única compoñente non nula da segunda forma fundamental de $(\varphi_t)^V$ é a seguinte:

$$(\nabla d(\varphi_t)^V)^k_{ij}=(\nabla d\varphi_t)^k_{ij}.$$

E calculando o campo de tensión temos que:

$$\begin{aligned} \tau^k((\varphi_t)^V) &= \tau^k(\varphi_t) \\ \tau^{\bar{k}}((\varphi_t)^V) &= 0. \end{aligned}$$

o cal proba o resultado. □

Corolario 2.4.1.

X^V é un campo de vectores afín-Killing en (TM, g^C), se e soamente se, X é afín-Killing en (M, g).

Demostración

Basta ter en conta a expresión da segunda forma fundamental de $(\varphi_t)^V$ calculada na demostración anterior. □

Observación 2.4.1.

Usando [21] e a equivalencia (iii) do Teorema 2.1.2 pódese demostrar de xeito alternativo que X^V sempre é 1-harmónico-Killing, pero non se pode demostrar que é harmónico-Killing.

Proposición 2.4.3.

X^V é un campo de vectores conforme en (TM, g^C), se e soamente se, X é un campo de vectores conforme en (M, g).

Demostración

Tendo en conta que $\mathcal{L}_{X^V} g^C = \mathcal{L}_X g$, dedúcese o que queremos. □

Corolario 2.4.2.

X^V é un campo de vectores Killing en (TM, g^C), se e soamente se, X é un campo de vectores Killing en (M, g). $\square$

O levantamento completo a TM, X^C, dun campo de vectores X en M está unicamente determinado pola seguinte propiedade:

$$f \in C^\infty, \; X^C(idf) = id(X(f)).$$

Para estes campos podemos afirma-lo seguinte:

Proposición 2.4.4.

X^C é harmónico-Killing (resp., afín-Killing) en (TM, g^C), se e soamente se, X é harmónico-Killing (resp., afín-Killing) en (M, g).

Demostración

Se $\{\varphi_t\}_{t \in I}$ denota o grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado a X, $\{d\varphi_t\}_{t \in I}$ é o grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado a X^C en TM. Por outra parte é un resultado coñecido (ver [49]) que unha aplicación é harmónica, se e soamente se, a sua diferencial é harmónica con respecto ó levantamento completo e esto proba o resultado. $\square$

Outro resultado en relación cos levantamentos vertical e completo é o seguinte:

Proposición 2.4.5.

Sexan X e Y dous campos de vectores nunha variedade (M, g), entón $[X^V, Y^C]$ é harmónico-Killing.

Demostración

Tense que $[X^V, Y^C] = [X, Y]^V$, o que xunto coa Proposición 2.4.3 proba o resultado.

$\square$

2.4.2 Campos de tensores de tipo $(1,1)$ harmónicos

Sexa M unha variedade (semi-)Riemanniana m-dimensional con métrica g e conexión de Levi-Civita ∇. Denotaremos por TM o fibrado tanxente a M con proxección:

$$\pi_{TM} : TM \longrightarrow M,\ (x^i, x^{\bar{i}}) \mapsto (x^i), i = 1, \ldots, m,\ \bar{i} = i + m.$$

Esta variedade $2m$-dimensional pode ser equipada coa métrica semi-Riemanniana g^C, levantamento completo de g, de signatura (m,m) e que foi definida nos preliminares.

Tendo en mente a definición de campo de tensores de tipo $(1,1)$ harmónico [22], como unha aplicación harmónica de (TM, g^C) en si mesmo, a caracterización (iii) de campo de vectores 1-harmónico-Killing e o feito de que a composición de aplicacións harmónicas non é, en xeral, unha aplicación harmónica, téñense os seguintes resultados:

Lema 2.4.1.

Sexa (M,g) unha variedade semi-Riemanniana m-dimensional, X un campo de vectores 1-harmónico-Killing e T un campo de tensores de tipo $(1,1)$ en M, entón TX é un campo de vectores $1-$harmónico-Killing, se e soamente se:

$$\begin{aligned} g^{ij}X^l \quad & [\partial^2_{ij}T^k_l - \Gamma^t_{ij}(\partial_t T^k_l) - (\partial_l \Gamma^t_{ij})T^k_t + (\partial_t \Gamma^k_{ij})T^t_l \\ (\partial_t \Gamma^k_{ij}) \quad & T^t_l + \Gamma^k_{it}(\partial_j T^t_l) + \Gamma^k_{jt}(\partial_i T^t_l) + (\nabla_i T)^k_j + (\nabla_j T)^k_i] = 0, \end{aligned}$$

onde $i,j,k,l,t = 1, \ldots, m$, X^i, T^k_j son as compoñentes do campo de vectores X e o campo de tensores de tipo $(1,1)$, respectivamente, e $(\nabla_i T)^k_j$ denotan as compoñentes da derivada covariante de T con respecto a $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Demostración

O campo de tensión de TX pode ser considerado como o da aplicación composición:

$$T \circ X : (M,g) \longrightarrow (TM, g^C) \longrightarrow (TM, g^C).$$

Usando a expresión do campo de tensión dunha composición de aplicacións tense:

$$\tau(T\circ X) = \tau(T\circ X)^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \tau(T\circ X)^{k+m}\frac{\partial}{\partial x^{k+m}},$$

e

$$\begin{aligned}\tau(T\circ X)^{k+m} &= \tau(X)^{l+m}T_l^k + g^{ij}X^l[\partial^2_{ij}T_l^k - \Gamma^t_{ij}(\partial_t T_l^k) - (\partial_l\Gamma^t_{ij})T_t^k \\ &+ (\partial_t\Gamma^k_{ij})T_l^t + \Gamma^k_{it}(\partial_j T_l^t) + \Gamma^k_{jt}(\partial_i T_l^t) + (\nabla_i T)^k_j + (\nabla_j T)^k_i], \\ \tau(T\circ X)^k &= 0,\end{aligned}$$

$i, j, k, l, t = 1, \ldots, m.$

Se X é un campo de vectores 1-harmónico-Killing en M entón X é unha sección harmónica de TM co que $\tau(X) = 0$, e obtense o resultado. □

Teorema 2.4.1.

Se X é un campo de vectores 1-harmónico-Killing en M e T é un campo de tensores de tipo $(1,1)$ paralelo, entón TX é un campo de vectores 1-harmónico-Killing en M se e soamente se $T(Q(X)) = Q(T((X))$, onde Q é o operador de Ricci.

Demostración

Se T é un campo de tensores de tipo $(1,1)$ paralelo entón

$$\partial^2_{ij}T_l^k = \Gamma^t_{lj}(\partial_i T_t^k) + (\partial_i\Gamma^t_{lj})T_t^k - \Gamma^k_{tj}(\partial_i T_l^t) - (\partial_i\Gamma^k_{tj})T_l^t,$$

deste xeito as expresións non nulas do campo de tensión da composición $T\circ X$ redúcese a

$$\begin{aligned}\tau(T\circ X)^{k+m} &= g^{ij}X^l[T_t^k(\partial_i\Gamma^t_{lj} - \partial_l\Gamma^t_{ij} + \Gamma^t_{in}\Gamma_l j^n - \Gamma^t_{nl}\Gamma^n_{ij}) \\ &+ T_l^n(\partial_n\Gamma^k_{ij} - \partial_i\Gamma^k_{nj} + \Gamma^k_{nt}\Gamma^t_{ij} - \Gamma^k_{it}\Gamma^t_{nj})],\end{aligned}$$

$i, j, k, l, n, t = 1, \ldots, m.$

Considerando as compoñentes locais da curvatura

$$R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^l} = R^k_{ijl}\frac{\partial}{\partial x^k} = [\partial_i\Gamma^k_{lj} - \partial_j\Gamma^k_{il} + \Gamma^k_{it}\Gamma^t_{lj} - \Gamma^k_{tj}\Gamma^t_{il}]\frac{\partial}{\partial x^k},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\tau(T\circ X)^{k+m} &= g^{ij}X^l[T_t^kR_{ilj}^t + T_l^tR_{tij}^k]\\ &= g^{ij}X^l[T_t^kR_{ilj}^t - T_l^tR_{itj}^k]\\ &= T_t^kR_l^tX^l - R_t^kT_l^tX^l,\end{aligned}$$

$i,j,k,l,t = 1,\ldots m$. Deste xeito, $T\circ X$ é harmónico, se e soamente se, $T_t^kR_l^tX^l = R_t^kT_l^tX^l$, $k,l,t = 1,\ldots,m$, é dicir $T(Q(X)) = Q(T(X))$. □

Exemplo 2.4.1.

Nunha variedade Kähler (M,g,J), a estructura complexa J satistai $\nabla J = 0$ e $QJ = JQ$, entón para todo campo de vectores 1-harmónico-Killing en (M,g,J), JX é tamén 1-harmónico-Killing.

Exemplo 2.4.2.

Unha variedade co-Kähler $(2m+1)$-dimensional (M,g,φ,ξ,η) é unha variedade casi-contacto onde o campo de tensores de tipo $(1,1)$ φ satisfai $\nabla\varphi = 0$, con respecto a conexión de Levi-Civita asociada a g. Unha variedade co-Kähler (M,g,φ,ξ,η) é localmente o producto $(N\oplus\mathbb{R}, h\oplus dt^2, J\oplus 0, \frac{\partial}{\partial t}, dt)$, onde (N,h,J) é unha variedade Kähler $2m$-dimensional, asemade $Q\varphi = \varphi Q$. Así para un campo de vectores 1-harmónico-Killing en (M,g,φ,ξ,η), φX é tamén 1-harmónico-Killing.

Exemplo 2.4.3.

Sexa (M,g) unha variedade (semi)-Riemanniana con operador de Ricci paralelo, Q. Como Q é un campo de tensores de tipo $(1,1)$ autoconmutativo, entón, para todo campo de vectores 1-harmónico-Killing X, o campo de vectores QX é 1-harmónico-Killing.

2.4.3 Métricas harmónicas

Se (M, g) é unha variedade Riemanniana, conexa, m-dimensional e G é outra métrica Riemanniana en (M, g), en [5] Chen e Nagano introducen a seguinte definición:

Definición 2.4.1.

Dirase que G é unha métrica harmónica con respecto a g se a aplicación identidade $id : (M, g) \longrightarrow (M, G)$ é unha aplicación harmónica.

Empregando de novo a equivalencia $(i) \Leftrightarrow (iv)$ do Teorema 2.1.2 para os campos de vectores 1-harmónicos-Killing temos que un campo de vectores X nunha variedade Riemanniana (M, g) é un campo de vectores 1-harmónico-Killing se e soamente se $G = \mathcal{L}_X g$ é un tensor harmónico con respecto a g. X é 1-harmónico-Killing se e soamente se $id : (M, g) \longrightarrow (M, \mathcal{L}_X g)$ é unha aplicación harmónica, se e soamente se $X : (M, g) \longrightarrow (TM, g^C)$ é unha sección harmónica, se e soamente se $id : (TM, g^C) \longrightarrow (TM, (\mathcal{L}_X g)^C) = (TM, \mathcal{L}_{X^C} g^C)$ é unha aplicación harmónica, se e soamente se X^C é 1-harmónico-Killing en (TM, g^C). (Nótese que esto último xa o probamos na Proposición 2.4.4).

Temos ademais o seguinte resultado:

Proposición 2.4.1.

Se X é un campo de vectores afín-Killing nunha variedade Riemanniana (M, g) tal que a identidade $id : (M, g) \longrightarrow (M, \mathcal{L}_X g)$ é unha aplicación totalmente xeodésica, entón X é afín-Killing en $(M, \mathcal{L}_X g)$.

Demostración

Considerémo-lo seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccc}
(M,g) & \stackrel{id}{\longrightarrow} & (TM,\mathcal{L}_X g) \\
\downarrow^{X} & & \downarrow^{X^*} \\
(TM,g^C) & \stackrel{d(id)}{\longrightarrow} & (TM,(\mathcal{L}_X g)^C)=(TM,\mathcal{L}_{X^C} g^C)
\end{array}$$

onde X e X^* denotan o mesmo campo de vectores pero en (M,g) e $(M,\mathcal{L}_X g)$ respectivamente. Tense que $X^*\circ id= d(id)\circ X$, e calculando a segunda forma fundamental desta composición de aplicacións:

$$\begin{array}{rcl}
\nabla d((X^*\circ id)) & = & dX^*\circ\nabla(d(id))+\nabla(dX^*)(d(id),d(id)) \\
\| & & \\
\nabla d((d(id)\circ X)) & = & d(d(id))\circ\nabla(dX)+\nabla(d(d(id)))(dX,dX).
\end{array}$$

Tendo en conta que a sección X e a id son totalmente xeodésicas e que id é totalmente xeodésica se e soamente se $d(id)$ é totalmente xeodésica (ver [20]), obtemo-lo resultado desexado. □

2.5 Morfismos harmónicos

Un dos problemas que se presentan á hora de definir os campos de vectores harmónicos-Killing é que a composición de aplicacións harmónicas non é en xeral unha aplicación harmónica. Unha posible solución sería considerar morfismos harmónicos en lugar de aplicacións harmónicas. No que segue realizamos un pequeno estudio dos resultados que se obterían neste caso.

2.5.1 Morfismos harmónicos entre variedades Riemannianas

Definición 2.5.1.

Unha aplicación continua $\phi : X\longrightarrow Y$ é un morfismo harmónico se para cada subconxunto aberto V en Y e para cada función harmónica v en V, $v\circ\phi$ é harmónica en

$\phi^{-1}(V)$.

A composición de dous morfismos harmónicos é obviamente un morfismo harmónico.

O primeiro estudio xeral de morfismos harmónicos foi feito por Constantinescu e Cornea en 1965 no marco de espacios harmónicos en teoría potencial [7]. O seu obxectivo era xeraliza-la teoría de compactificacións de superficies de Riemann, sendo entón o modelo para morfismos harmónicos, as aplicacións conformes entre variedades Riemannianas.

Definición 2.5.2.

Un campo de vectores X nunha variedade Riemanniana (M, g) dirase que é *μ-harmónico* se o grupo local 1-paramétrico de transformacións infinitesimais asociado a X, $\{\varphi_t\}_{t\in I}$, é un grupo de morfismos harmónicos.

Observación 2.5.1.

Neste caso $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ forman evidentemente un grupo, é dicir, se φ_t e φ_s son morfismos harmónicos, $\varphi_t \circ \varphi_s$ é tamén un morfismo harmónico.

En relación cos morfismos harmónicos tense o seguinte resultado:

Teorema 2.5.1.

[18] Sexan M e N dúas variedades Riemannianas.

- *(i) Se $dimM < dimN$ os únicos morfismos harmónicos de $M \longrightarrow N$ son as aplicacións constantes.*

- *(ii) Se $dimN = 1$, $N = \mathbb{R}$, os morfismos harmónicos $M \longrightarrow \mathbb{R}$ son as funcións harmónicas en M.*

- *(iii) Se $dimM = dimN = 2$, esto é dicir que M e N son superficies Rieman-*

nianas, entón os morfismos harmónicos $M \longrightarrow N$ son as aplicacións conformes (considerando tamén os puntos onde $df = 0$).

- *(iv) Se dimM =dimN≠2 os únicos morfismos harmónicos non constantes, (se existen), son as aplicacións conformes con coeficiente de conformidade constante, (i.e., isometrías locais salvo cambios de escala).*

Para o caso particular de considera-los campos de vectores μ-harmónicos obtéñense os seguintes resultados:

Proposición 2.5.1.

Sexa (M, g) unha variedade Riemanniana:

- (i) Se dim$M = 2$ os campos de vectores μ-harmónicos coinciden cos conformes.
- (ii) Se dim$M > 2$ os campos de vectores μ-harmónicos coinciden cos conformes con coeficiente de conformidade constante, é dicir, cos homotéticos.

Demostración

Os resultados anteriores obtéñense como consecuencia do Teorema 2.5.1. □

Corolario 2.5.1.

Sexa (M, g) unha variedade Riemanniana:

- (i) Se dim$M = 2$ os campos de vectores μ-harmónicos forman unha álxebra de Lie.
- (ii) Se dim$M > 2$ o corchete de dous campos de vectores μ-harmónicos é un campo de vectores Killing, polo tanto forman un grupo pero non unha álxebra de Lie.

Demostración

Se X e Y son dous campos de vectores M-harmónicos tense que $\mathcal{L}_X g = 2\sigma_1 g$ e $\mathcal{L}_Y g = 2\sigma_2 g$. Para o $[X, Y]$ tense:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{[X,Y]} g &= \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y g - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X g = \mathcal{L}_X(2\sigma_2 g) - \mathcal{L}_Y(2\sigma_1 g) \\
&= 2(X\sigma_2)g + 4\sigma_1\sigma_2 g - 2(Y\sigma_1)g - 4\sigma_1\sigma_2 g \\
&= 2(X\sigma_2 - Y\sigma_1)g.
\end{aligned}$$

Notar que se σ_1 e σ_2 son constantes $2(X\sigma_2 - Y\sigma_1)g = 0$ o que proba o resultado. $\square$

Observación 2.5.2.

É ben coñecido que nunha variedade semi-Riemanniana compacta sen fronteira os campos de vectores homotéticos son Killing. Basta ter en conta que se V é un campo de vectores homotético $g(\nabla_X V, Y) + g(\nabla_Y V, X) = 2cg(X, Y)$, para algunha constante c. Contraendo esta ecuación obtense $divV = cm$, onde m é a dimensión da variedade. Integrando e empregando o teorema da diverxencia tense $0 = cm\ vol(M)$. Polo tanto $c = 0$ e V é Killing.

A partir do anterior deducimos que nunha variedade semi-Riemanniana, compacta, sen fronteira de dimensión $m > 2$ os campos de vectores μ-harmónicos son Killing.

En relación cos morfimos harmónicos tamén podemos da-lo seguinte resultado:

Proposición 2.5.2.

Sexa $\psi : (M, g) \longrightarrow (M, g)$ un morfismo harmónico entre dúas variedades Riemannianas e X un campo de vectores 1-harmónico-Killing en (M, g), ou equivalentemente, un campo de Jacobi ó longo da identidade de M. Entón $X \circ \psi$ é un campo de Jacobi ó longo de ψ.

Demostración

En xeral, se $\psi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ é un morfismo harmónico, $\phi : (N, h) \longrightarrow (P, h')$ unha aplicación harmónica e X un campo de vectores ó longo de ϕ, Entón o operador de Jacobi do campo de vectores $V \circ \psi$ ó longo de $\phi \circ \psi$ vén dado por:

$$J_{\phi \circ \psi}(V \circ \phi) = \lambda^2 J_\phi(V) \circ \psi,$$

onde λ é a función de dilatación de ψ. Esto é unha función tal que

$$h'_{\phi(x)}(d\phi_x(X), d\phi_x(X)) = \lambda^2 h_x(X, Y),$$

para todo $X, Y \in H_x$ e $x \in M$, $H_x = V_x^\perp$ e $V_x^\perp = Ker(d\phi_x)$. λ está definida nos puntos nos que o rango da $d\phi$ é maximal e exténdese como función nula ós restantes puntos de M. En particular λ^2 é C^∞. (As contas que se detallan a continuación aparecen en [35]).

En primeiro lugar nótese que a composición $\phi \circ \psi$ é harmónica. Sexa $W = V \circ \psi \in \Gamma(\psi^{-1}\phi^{-1}TP)$. Pola definición de conexión pull-back, para cada $X \in \Gamma(TM)$, temos:

$$\nabla_X^{\phi \circ \psi} W = \{\nabla_{d\psi(X)}^\phi V\} \circ \psi. \tag{2.5.1}$$

Sexa γ unha curva C^∞ en M tanxente a X e extendamos X a un campo de vectores ó longo de γ. Por (2.5.1), ámbolos lados da seguinte ecuación están ben definidos e temos

$$\nabla_X^{\phi \circ \psi}(\nabla_X^{\phi \circ \psi} W) = \{\nabla_{d\psi(X)}^\phi (\nabla_{d\psi(X)}^\phi V)\} \circ \psi.$$

Outra vez, por (2.5.1),

$$\nabla_{\nabla_X^M X}^{\phi \circ \psi} W = \{\nabla_{d\psi(\nabla_X^M X)}^\phi V\} \circ \psi,$$

así

$$\begin{aligned} \nabla_{X,X}^2 W &= \nabla_X^{\phi \circ \psi}(\nabla_X^\phi \circ \psi W) - \nabla_{\nabla_X X}^{\phi \circ \psi} W \\ &= \{\nabla_{d\psi(X)}^\phi (\nabla_{d\psi(X)}^\phi V) - \nabla_{d\psi(\nabla_X^M X)}^\phi V\} \circ \psi. \end{aligned}$$

Por ser ψ harmónica, para cada referencia ortonormal $\{e_i\}$ en M temos

$$\sum_{i=1}^{m} d\psi(\nabla^N_{e_i} d\psi(e_i)),$$

así

$$\begin{aligned} trace\nabla^2 W &= \sum_{i=1}^{m} \{\nabla^\phi_{d\psi(e_i)} \nabla^\phi_{d\psi(e_i)} V - \nabla^\phi_{\nabla^N_{d\psi(e_i)} d\psi(e_i)} V\} \circ \psi \\ &= \sum_{i=1}^{m} \{\nabla^2_{d\psi(e_i), d\psi(e_i)} V\} \circ \psi. \end{aligned}$$

Agora elixindo as bases $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ nos puntos x, $\psi(x)$ tal que $d\psi(e_i)=\lambda f_i$ para $i = 1, \ldots, M$ e $d\psi(e_i) = 0$ noutro caso, temos

$$\begin{aligned} trace\nabla^2 W &= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2_{d\psi(e_i), d\psi(e_i)} V \circ \psi \\ &= \lambda^2 trace\nabla^2 V \circ \psi. \end{aligned}$$

Un sinxelo cálculo da lugar ó seguinte

$$traceR^P(d(\phi\circ\psi), W)d(\phi\circ\psi) = \lambda^2 traceR^P(d\phi, V)d\phi,$$

e así

$$\begin{aligned} J_{\phi\circ\psi}(W) &= J_{\phi\circ\psi}(W)(V\circ\psi) = \lambda^2 trace\{-\nabla^2 V - R^P(d\phi, V)d\phi\}\circ\psi \\ &= \lambda^2 J_\phi(V)\circ\psi. \end{aligned}$$

Con esto temos probado o resultado. $\square$

Capítulo 3

Campos de vectores h-K en variedades K$\ddot{a}$hler

3.1 Variedades K$\ddot{a}$hler

Sexa M unha variedade C^∞ real $2m$-dimensional recuberta por entornos coordenados con coordenadas (x^a), onde a recorre $1, 2, \ldots, 2m$. M pode ser considerada unha *variedade complexa* de dimensión m se se definen as coordenadas complexas $(z^i = x^i + \sqrt{-1}x^{\bar{i}})$, $\bar{i} = i + m$, nun entorno de $z \in M$ tal que a intersección de cada dous entornos é regular. Existe un endomorfismo J, (un campo de tensores J de tipo $(1,1)$) do espacio tanxente T_pM, en cada punto p de M, tal que:

$$\begin{aligned} J(\frac{\partial}{\partial x^i}) &= \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}, \\ J(\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}) &= -(\frac{\partial}{\partial x^i}), \end{aligned}$$

e $J^2 = -I$, onde I é o morfismo identidade de TM.

A cuestión é se a anterior propiedade é suficiente para a existencia dunha estructura complexa en M. Fukami-Ishihara [19], en 1955, deron resposta negativa a esta pregunta probando que a esfera 6-dimensional S^6 non ten estructura complexa pero o seu fibrado tanxente admite tal endomorfismo. A unha variedade $2m$-dimensional M, dotada cunha estructura J satisfacendo $J^2 = -I$, chamaráselle variedade case complexa e J é o seu tensor de estructura case complexa. O campo de tensores N_J de tipo $(1,2)$ definido por:

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - J^2[X,Y] - J([X,JY] + [JX,Y]),$$

para cada $X, Y \in \chi(M)$, é chamado tensor de Nijenhuis de J. Newlander-Nirenberg [37] probaron que J define unha estructura complexa en M se e soamente se N, se anula en M, neste caso dise que a estructura case-complexa J é integrable.

Sexan M e N dúas variedades complexas con estructuras complexas J_M e J_N, respectivamente. Unha aplicación C^∞ $\phi : (M, J_M) \longrightarrow (N, J_N)$ entre dúas variedades complexas é holomorfa se a diferencial:

$$d\phi_x : T_xM \longrightarrow T_{\phi(x)}N, x \in M,$$

satisfai:

$$J_N \circ d\phi_x = d\phi_x \circ J_M,\ \forall x \in M.$$

Considérase una métrica Riemanniana g en (M,J). Dirase que o par (J,g) é unha estructura case Hermitiana en M, e M é unha variedade casi Hermitiana se

$$g(JX,JY) = g(X,Y),\ \forall X,Y \in \chi(M).$$

Ademais se J define unha estructura complexa en M, entón (J,g) e M son chamadas estructura Hermitiana e variedade Hermitiana, respectivamente. A 2-forma fundamental Ω da variedade casi Hermitiana defínese por

$$\Omega(X,Y) = g(X,JY),\ \forall X,Y \in \chi(M).$$

Unha métrica Hermitiana nunha variedade complexa M chámase métrica Kähler se Ω é pechada, esto é

$$3d\Omega(X,Y,Z) = (\nabla_X\Omega)(Y,Z) + (\nabla_Y\Omega)(Z,X) + (\nabla_Z\Omega)(X,Y) = 0, \tag{3.1.1}$$

onde ∇ é a conexión de Riemann de g. É ben sabido (ver Kobayashi- Nomizu [27]) que a condición Kähleriana (3.1.1) é equivalente a $\nabla J = 0$. A xeometría Kähler ten as súas raíces en 1933, introducida por Kähler [25].

Definición 3.1.3.

Dada unha variedade case-complexa $2m$-dimensional (M, J), un campo de vectores X sobre M dise analítico se define un automorfismo infinitesimal da estructura casi-complexa J, é dicir, se $\mathcal{L}_X J = 0$, onde por $\mathcal{L}_X$ denotámo-la derivada de Lie con respecto a X.

Dada unha variedade casie complexa (M, J) para cada punto $p \in M$, a complexificación do espacio tanxente T_pM denótase por $T_p^{\mathbb{C}}M = T_pM \otimes \mathbb{C}$. Entón a estructura case complexa de M, $J : T_pM \longrightarrow T_pM$, pode ser estendida de maneira única a unha aplicación lineal complexa da complexificación, denotada por $J : T_p^{\mathbb{C}}M \longrightarrow T_p^{\mathbb{C}}M$, e os autovalores de J son $\pm\sqrt{-1}$ debido a que $J^2 = -id$. Deste xeito $T_p^{\mathbb{C}}M$ pode descompoñerse nunha suma directa:

$$T_p^{\mathbb{C}}M = T_p^{(1,0)}M \oplus T_p^{(0,1)}M,$$

onde

$$T_p^{(1,0)}M := \{v \in T_p^{\mathbb{C}}M; Jv = \sqrt{-1}v\},$$
$$T_p^{(0,1)}M := \{v \in T_p^{\mathbb{C}}M; Jv = -\sqrt{-1}v\}.$$

E así:

$$T^{(1,0)}M := \bigcup_{p \in M} T_p^{(1,0)}M,$$
$$T^{(0,1)}M := \bigcup_{p \in M} T_p^{(0,1)}M.$$

Un campo de vectores (complexo) sobre M, Z, dise de tipo $(1,0)$ (respectivamente $(0,1)$) se $Z = X - \sqrt{-1}JX$ (respectivamente $Z = X + iJX$) para algún campo de vectores X real sobre M.

Podemos identificar $T^{(1,0)}M$ (chamado fibrado tanxente holomorfo) con TM mediante o isomorfismo lineal

$$T_pM \ni X \mapsto \widetilde{X} := \frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}JX) \in T_p^{(1,0)}M. \tag{3.1.2}$$

No caso de que a estructura case-complexa sexa integrable diremos que un campo de vectores Z de tipo $(1,0)$ sobre a variedade complexa (M,J) é holomorfo, se actuando sobre calquera función holomorfa definida (localmente) sobre M é holomorfo, é dicir, localmente as súas funcións compoñentes con respecto a un sistema de coordenadas complexas son funcións holomorfas. Outra caracterización dun campo de vectores holomorfo sería considera-lo como unha sección holomorfa de, $T^{(1,0)}M \longrightarrow M$, o fibrado tanxente holomorfo.

Resulta sinxelo probar que sobre unha variedade complexa M con estructura casi-complexa J, se un campo de vectores (real) é analítico entón $\widetilde{X} = X - \sqrt{-1}JX$ é un campo de vectores (complexo) holomorfo. Ademais se Z é un campo de vectores (complexo) holomorfo, entón existe X un campo de vectores (real) analítico verificando $Z = \frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}JX)$.

Teorema 3.1.1.

Sexa (M,J,g) unha variedade compacta Kähler, X un campo de vectores sobre M e $\widetilde{X} = \frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}JX)$ o campo de vectores complexo asociado a X. Son equivalentes:

- *(1) X é un campo de vectores 1-harmónico-Killing,*
- *(2) X é un campo de vectores harmónico-Killing,*
- *(3) X é un campo de vectores analítico,*
- *(4) $\widetilde{X}$ é un campo de vectores holomorfo,*
- *(5) X é un campo de Jacobi ó longo da identidade de M.*

Demostración

Como estamos nunha variedade complexa (3)$\Leftrightarrow$(4).

Se X é un campo de vectores harmónico-Killing, entón o seu grupo 1-paramétrico de tranformacións asociado $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ constitúen unha variación da identidade de M

formada por aplicacións harmónicas, $\forall t \in I$. Polo teorema de Rixidez de Lichnérowicz [13] tódalas $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ son holomorfas, co que temos (2)$\Leftrightarrow$(3)($\Leftrightarrow$(4)).

Dado que nunha variedade Kähler toda aplicación holomorfa é harmónica temos (4)$\Rightarrow$(2).

Utilizando agora unha versión infinitesimal do Teorema de Lichnérowicz, tense que nunha variedade compacta Kähler os campos de Jacobi ó longo da identidade coinciden cos campos de vectores holomorfos sobre M, co que (5)$\Leftrightarrow$(4).

Polo teorema de caracterización de campos de vectores 1-harmónicos-Killing, Teorema 2.1.2, tense que (1)$\Leftrightarrow$(5) co que queda completada a demostración. $\square$

No caso en que (M, J, g) non é unha variedade compacta, e para campos de vectores 1-harmónicos-Killing a anterior proposición non é válida en xeral. Vémolo no seguinte exemplo.

Exemplo 3.1.1.

Considerémo-lo plano complexo Euclideo $\mathbb{C}$ coas coordenadas usuais $z = x + iy$, e a métrica Hermitiana $g = dx\otimes dx + dy\otimes dy$. Sexa X o seguinte campo de vectores:

$$X(x, y) = X^1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + X^2(x, y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

A condición para que o campo de vectores X sexa 1-harmónico-Killing é:

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 X^i}{\partial y^2},$$

con $i = 1, 2$, é dicir, X^i son funcións harmónicas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. A condición para que X sexa un campo de vectores holomorfo, neste caso, é a seguinte:

$$\frac{\partial X^1}{\partial x} = \frac{\partial X^2}{\partial y}, \ \frac{\partial X^1}{\partial y} = -\frac{\partial X^2}{\partial x}.$$

Entón $X^1 = \frac{1}{2}(x)^2 - \frac{1}{2}(y)^2$ e $X^2 = 0$ dá lugar a un campo de vectores X que é 1-harmónico-Killing pero non é holomorfo.

3.2 Campos 1-h-K en variedades Tachibana

Unha variedade case Tachibana é unha variedade case Hermitiana (M, J, g) onde a métrica Riemanniana g verifica

$$g(JX, JY) = g(X, Y),\ \forall X, Y \in \chi(M).$$

A anterior ecuación en coordenadas ten a seguinte expresión $J_j^t J_i^s g_{ts} = g_{ij}$, polo tanto $J_{ji} = -J_{ij}$ onde $J_{ji} = J_j^t g_{ti}$, $(i, j, t, s = 1, \ldots 2m)$.

Finalmente ten a propiedade de que o tensor antisimétrico J_{ih} é un tensor Killing:

$$\nabla_j J_{ih} + \nabla_i J_{jh} = 0,$$

de onde se segue que:

$$J_i = -\nabla_j J_i^j = 0.$$

Cando se anula o tensor de Nijenhuis, a variedade case Tachibana é chamada Tachibana. É ben coñecido que toda variedade Tachibana é unha variedade Kähler [52].

Proposición 3.2.1.

- (a) Unha condición necesaria para que un campo de vectores X nunha variedade casi Tachibana sexa analítico é que sexa 1-harmónico-Killing e que $J_{ji}^h(\mathcal{L}_X J^{ji}) = 0$, onde

$$J_{ji}^h = g^{hl} J_{lji} = g^{hl}(\nabla_l J_{ji} + \nabla_j J_{il} + \nabla_i J_{lj}),\ J^{ji} = g^{li} J_l^j.$$

- (b) Nunha variedade compacta casi Tachibana os campos de vectores 1-harmónicos-Killing son os analíticos se e soamente se $J_{ji}^h(\mathcal{L}_X J^{ji}) = 0$.

Demostración

A demostración é unha consecuencia inmediata da caracterización en coordenadas dos campos de vectores analíticos en variedades casi Tachibana [52] e do Teorema 2.1.2. $\square$

Observación 3.2.1.

Esta proposición pon de manifesto a necesidade da hipótesis K$\ddot{a}$hler do Teorema 3.1.1, que foi utilizada na aplicación do Teorema de Rixidez de Lichnérowicz.

Capítulo 4

Campos de vectores pluri-harmónicos e α-pluriharmónicos

Neste capítulo estudiarémo-los campos de vectores para os cales o grupo 1-paramétrico local de transformacións consiste en aplicacións pluriharmónicas ou α-pluriharmónicas; a tales campos de vectores chamarémo-los *pluriharmónicos* e *α-pluriharmónicos*, respectivamente. Daremos, asemade, diversas caracterizacións intrínsecas e relacións entre os novos campos de vectores e os xa coñecidos.

4.1 Campos de vectores pluriharmónicos: definicións, caracterizacións e exemplos

Sexa (M, J, g) unha variedade Kähler $2m$-dimensional e (N, h) unha variedade Riemanniana n-dimensional. Unha aplicación C^∞ $\phi : (M, J, g) \longrightarrow (N, h)$ é chamada pluriharmónica se a segunda forma fundamental da aplicación ϕ verifica:

$$(\nabla d\phi)(X, Y) + (\nabla d\phi)(JX, JY) = 0,\ X, Y \in T_xM,\ \forall x \in M.$$

Claramente unha aplicación pluriharmónica é harmónica. Tamén é coñecido que se N é unha variedade Kähler e ϕ unha aplicación holomorfa, entón ϕ é pluriharmónica.

Definimos agora uns novos tipos de campos de vectores en variedades Kähler.

Definición 4.1.1.

Un campo de vectores X nunha variedade Kähler $2m$-dimensional (M, J, g) é chamado *pluriharmónico* se o grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado a X, é un grupo de aplicacións pluriharmónicas. Neste caso diremos que a transformación infinitesimal é pluriharmónica.

Como xa diximos no capítulo 2, que cada campo de vectores $X \in \Gamma(TM)$ da lugar a un grupo 1-paramétrico local de difeomorfismos $I \ni t \mapsto \varphi_t \in Diff(M)$, onde I é un entorno do $0 \in \mathbb{R}$, resolvendo o sistema autónomo de ecuacións diferenciales ordinarias,

$$ev|_{t=t_0} \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \varphi_t^* = ev|_{t=t_0} \circ \varphi_t^* \circ X.$$

Esta ecuación ten solución única; concretamente, $\varphi_t^* = \exp(tX)$, onde a exp se define a través da súa expansión en serie de Taylor, e X^k se entende como $X \circ \ldots \circ X (k \text{ veces})$.

Agora o noso propósito é atopar condicións baixo as cales φ_t é pluriharmónica para todo $t \in I$. A acción da álxebra de Lie de $\Gamma(TM)$ en $C^\infty(M)$ vén dada por:

$$C^\infty(M) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M), \ (f, X) \mapsto \mathcal{L}_X f = X(f),$$

xa que $X(f) = ev|_{t=0} \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \varphi_t^* f$, e o termo do lado dereito da igualdade, observando a ecuación diferencial, é igual a $ev|_{t=0} \circ \varphi_t^* \circ X(f) = X(f)$.

Similarmente, a acción da álxebra de Lie de $\Gamma(TM)$ nas conexións en M, $(Con(M))$, ven dada por

$$Con(M) \times \Gamma(TM) \to Con(M), \ (\nabla, X) \mapsto \mathcal{L}_X \nabla.$$

Máis concretamente, $\mathcal{L}_X \nabla = ev|_{t=0} \circ \frac{\partial}{\partial t} \circ \nabla^{\varphi_t}$, onde ∇^{φ_t} é o resultado da acción natural de $\Gamma(TM)$ en $Con(TM)$, esto é,

$$\nabla_Z^{\varphi_t} = \varphi_t^* \circ (\nabla_{Z^{\varphi_{-t}}} Y^{\varphi_{-t}}) \circ \varphi_{-t}^*,$$

e por W^φ denotamos a acción pola dereita dos $Diff(M)$ en $\Gamma(TM)$, i.e., $W^\varphi = \varphi^*\circ W\circ\varphi^{-1*}$, $\varphi\in Diff(M)$, $W\in\Gamma(TM)$.

Teorema 4.1.1.

Sexa (M,J,g) unha variedade $2m$ dimensional Kähler e X un campo de vectores en M. Se o campo de vectores X é un campo de vectores pluriharmónico, entón

$$(\mathcal{L}_X\nabla)(Y,Z)+(\mathcal{L}_X\nabla)(JY,JZ)=0,$$

$\forall Y,Z$ campos de vectores en M.

Demostración

Se X é un campo de vectores en M a diferencial $d\varphi_t$ define unha sección do fibrado vectorial $T^*M\otimes\varphi_t^*(TM)\simeq Hom(TM,\varphi_t^*TM)$, onde $\varphi_t^*(TM)$ é o fibrado pull-back de TM ó longo de φ_t. En efecto,

$$\Gamma(TM)\ni Z\mapsto d\varphi_t(Z)=Z\circ\varphi_t^*\in\Gamma(\varphi_t^*TM).$$

Onde,

$$Z\circ\varphi_t^*=\varphi_t^*\circ\varphi_{-t}^*\circ Z\circ\varphi_t^*=\varphi_t^*\circ Z^{\varphi_{-t}}.$$

∇' denota a conexión inducida de maneira natural no producto tensorial

$$T^*M\otimes\varphi_t^*(TM)$$

pola conexión ∇ de T^*M, e $\varphi_t^*\nabla$ denota a conexión en $\varphi_t^*(TM)$, entón

$$\begin{aligned}(\nabla'(d\varphi_t))_Z(Y) &= (\varphi_t^*\nabla)_Z(d\varphi_t(Y))-(d\varphi_t)(\nabla_Z Y)\\ &= \varphi_t^*\circ\nabla_{Z^{\varphi_{-t}}}Y^{\varphi_{-t}}-(d\varphi_t)(\nabla_Z Y).\end{aligned}$$

Sabemos que a correspondencia $(Z,Y)\mapsto(\nabla'(d\varphi_t))_Z(Y)$ é simétrica cando a conexión en TM é unha conexión de Levi-Civita, xa que a diferencia:

$$(\nabla'(d\varphi_t))_Z(Y)-(\nabla'(d\varphi_t))_Y(Z)$$

é igual a

$$\varphi_t^*([Z^{\varphi_{-t}}, Y^{\varphi_{-t}}]) - (d\varphi_t)([Z, Y]),$$

a cal se anula identicamente.

Dicir que φ_t é pluriharmónica, é dicir que

$$(\nabla'(d\varphi_t))_{Y_i}(Y_j)\circ\varphi_t^{-1} + (\nabla'(d\varphi_t))_{JY_i}(JY_j)\circ\varphi_t^{-1} = 0, \ \forall i, j = 1, \ldots, m,$$

onde $\{Y_k, JY_k\}$, $k = 1, \ldots, m$, é unha referencia en TM. Así, despois de sustitui-la expresión de $\nabla'(d\varphi_t)$ temos

$$\nabla_{Y_i{}^{\varphi_{-t}}} Y_j^{\varphi_{-t}} - (\nabla_{Y_i} Y_j)^{\varphi_{-t}} + \nabla_{JY_i{}^{\varphi_{-t}}} JY_j^{\varphi_{-t}} - (\nabla_{JY_i} JY_j)^{\varphi_{-t}} = 0, \ \forall i, j = 1, \ldots, m.$$

A correspondente condición infinitesimal é,

$$ev|_{t=0}\frac{\partial}{\partial t}\circ(\nabla_{Y_i{}^{\varphi_{-t}}} Y_j^{\varphi_{-t}} - (\nabla_{Y_i} Y_j)^{\varphi_{-t}} + \nabla_{JY_i{}^{\varphi_{-t}}} JY_j^{\varphi_{-t}} - (\nabla_{JY_i} JY_j)^{\varphi_{-t}}) = 0.$$

Calculando as derivadas do lado esquerdo do signo igual, e simplificando, obtemos

$$\mathcal{L}_X\nabla(Y_i, Y_j) + \mathcal{L}_X\nabla(JY_i, JY_j) = 0, \ \forall i, j = 1, \ldots, m,$$

onde X é un campo de vectores que ten por grupo 1-paramétrico de difeomorfismos φ_t, e esto proporciona o resultado. □

Exemplo 4.1.1.

Consideremo-lo plano complexo Euclideo $\mathbb{C}$ coas coordenadas usuais $z = x + iy$, e a métrica $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$. Sexa X o seguinte campo de vectores:

$$X(x, y) = X^1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + X^2(x, y)\frac{\partial}{\partial y} = (e^y \sin(x))\frac{\partial}{\partial x}.$$

Consideremos a estructura complexa usual

$$J(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}, \ J(\frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial x},$$

as condicións do Teorema 4.1.1 neste caso son:

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X^i}{\partial y^2} = 0, \ i = 1, 2,$$

que X verifica trivialmente.

Por outra parte o grupo 1-paramétrico de transformacións φ_t, asociado a X ven dado pola expresión local en serie de Taylor:

$$\begin{aligned} \varphi_t(x,y) &= (x,y) + t(e^y \sin(x), 0) + \frac{1}{2} t^2 (e^{2y} \sin(x) \cos(x), 0) \\ &+ \frac{1}{3!} t^3 (e^{3y} (\sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x)), 0) + \theta(t^4), \end{aligned}$$

onde $\theta(t^4)$ denota o resto de orde 4. Polo tanto,

$$\begin{aligned} (\nabla d\varphi_t)(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) + (\nabla d\varphi_t)(J\frac{\partial}{\partial x}, J\frac{\partial}{\partial x}) &= \frac{-2}{3} t^3 e^{3y} (\sin(x) \cos^2(x) \\ &+ \sin^3(x), 0) + O(t^4). \end{aligned}$$

Co que X non é un campo de vectores pluriharmónico, nembargantes a parte liñal desta expresión é nula. Como no capítulo 2, este exemplo induce á seguinte definición.

Definición 4.1.2.

Un campo de vectores X nunha variedade Kähler $2m$-dimensional (M, J, g) é chamado 1-*pluriharmónico* se o grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado a X, $\{\varphi_t\}_{t \in I}$, verifica

$$\frac{d}{dt}[(\nabla d\varphi_t)(Y,Z) + (\nabla d\varphi_t)(JY, JZ)]|_{t=0} = 0, \ \forall Y, Z \in \chi(M).$$

Neste caso diremos que a transformación infinitesimal φ_t é 1-pluriharmónica.

Obtivemos a seguinte equivalencia.

Teorema 4.1.2.

Sexa X un campo de vectores nunha variedade $2m$-dimensional Kähler (M, J, g). As seguintes afirmacións son equivalentes:

- *(i) X é un campo de vectores 1-pluriharmónico,*
- *(ii) $\mathcal{L}_X\nabla(Y_i,Y_j)+\mathcal{L}_X\nabla(JY_i,JY_j)=0$, $\forall\{Y_k,JY_k\}$, $k=1,\ldots,m$, referencia en TM.*
- *(iii) $X:(M,g)\longrightarrow(TM,g^C)$ é unha sección pluriharmónica, onde g^C denota o levantamento completo de g.*

Demostración

Sexa x^a, $a=1,\ldots,2m$, un sistema de coordenadas locais en M e $X=X^a(x^a)\frac{\partial}{\partial x^a}$ un campo de vectores en M, con grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado $\{\varphi_t\}_{t\in I}$. Tense que, localmente a expansión en serie de Taylor de φ_t é:

$$\varphi_t(x^a)=x^a+tX^a(x^a)+O(t^2),\ t\in I$$

onde $O(t^2)$ é o resto de orde 2.

Segundo os cálculos do Teorema 2.1.2 a segunda forma fundamental de φ_t, localmente, vén dada por:

$$(\nabla(d\varphi_t))^c_{ab}=(\mathcal{L}_X\Gamma^c_{ab})t+O(t^2),\ a,b,c=1,\ldots,2m.$$

Sexa $\{Y_k,JY_k\}$, $k=1,\ldots m$, unha referencia en TM, entón a condición de 1-pluriharmonicidade para X exprésase como:

$$\frac{d}{dt}((\nabla d\varphi_t)(Y_i,Y_j)+(\nabla d\varphi_t)(JY_i,JY_j))|_{t=0}=\mathcal{L}_X\nabla(Y_i,Y_j)+\mathcal{L}_X\nabla(JY_i,JY_j)=0,$$

co que queda probado $(i)\Leftrightarrow(ii)$.

Se consideramos X como aplicación de (M,g) en (TM,g^C) temos en coordenadas:

$$X:(M,g)\longrightarrow(TM,g^C),\ x^a\rightsquigarrow X^a=(x^a,X^a),a=1,\ldots,2m,$$

e segundo os cálculos feitos na demostración do Teorema 2.1.2 a expresión da segunda forma fundamental de X vén dada por:

$$\begin{aligned}(\nabla dX)^c(Y,Z) &= 0,\\ (\nabla dX)^{c+m}(Y,Z) &= \mathcal{L}_X\nabla(Y,Z),\end{aligned}$$

$c = 1, \ldots, 2m$, $\forall Y, Z$ campos de vectores en M, co cal queda probado $(ii)\Leftrightarrow(iii)$. $\square$

En [22] definen os campos de tensores de tipo $(1,1)$ harmónicos do xeito seguinte:

Definición 4.1.3.

Un campo de tensores de tipo $(1,1)$, T, en (M,g) dise que é harmónico se a aplicación: $T : (TM, g^C)\longrightarrow(TM, g^C)$ é unha aplicación harmónica.

Seguindo nesta liña nos dámo-la seguinte definición para os campos de tensores de tipo $(1,1)$:

Definición 4.1.4.

Un campo de tensores de tipo $(1,1)$, T, nunha variedade Kähler (M,g,J) é *pluriharmónico* se a aplicación $T : (TM, g^C, J^C)\longrightarrow(TM, g^C, J^C)$ é unha aplicación pluriharmónica, onde g^C e J^C denotan, respectivamente, os levantamentos completos da métrica g e da estructura complexa J a TM.

Empregando a anterior definición tense o seguinte resultado:

Teorema 4.1.3.

Un campo de tensores de tipo $(1,1)$*,* T*, nunha variedade Kähler* (M,g,J) *é pluriharmónico se, e soamente se, se verifican as seguintes condicións:*

$$\begin{aligned} &(A) \quad \nabla(dT)^{\bar{k}}_{ij} + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{lh} J^l_i J^h_j + (\nabla_l T)^k_h [\frac{\partial J^h_i}{\partial x^t} J^l_j + J^l_i \frac{\partial J^h_j}{\partial x^t}] x^{\bar{t}} = 0, \\ &(B) \quad (\nabla_j T)^k_i + (\nabla_l T)^k_h J^h_i J^l_j = 0, \end{aligned}$$

$i, j, k, h, t = 1, \ldots, 2m$; $\bar{k} = k+2m$, *onde* $\{x^i, x^{\bar{i}}\}$ *é un sistema de coordenadas en* TM*,* Γ^k_{ij} *os símbolos de Christoffel da conexión de Levi-Civita de* M*,* J^i_j *as compoñentes locais da estructura complexa* J*,* $(\nabla_j T)^k_i$ *as compoñentes locais da derivada covariante do tensor* T *e por* $\nabla(dT)^{\bar{k}}_{ij}$ *denotamos a* $\bar{k}$*-compoñente da segunda forma fundamental* *de* T*:*

$$\nabla(dT)^{\bar{k}}_{ij} = (\frac{\partial^2 T^k_l}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^h_{ij}\frac{\partial T^k_l}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^l}T^k_h + \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^h}T^h_l + \Gamma^k_{ih}\frac{\partial T^h_l}{\partial x^j} + \Gamma^k_{hj}\frac{\partial T^h_l}{\partial x^i})x^{\bar{l}}.$$

Demostración

A condición de pluriharmonicidade para a aplicación

$$T : (TM, g^C, J^C) \longrightarrow (TM, g^C, J^C)$$

é

$$\nabla(dT)^{\gamma}_{\alpha\beta} + \nabla(dT)^{\gamma}_{\mu\sigma} J^{c\mu}_{\alpha} J^{c\sigma}_{\beta} = 0, \tag{4.1.1}$$

$\forall \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, 4m$, con $\mu, \sigma = 1, \ldots, 4m$.

A estructura complexa J^C en TM ten a seguinte expresión local ([55]):

$$\begin{aligned} J^C &= J^{Ci}_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j + J^{C\bar{i}}_j \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \otimes dx^j \\ &+ J^{Ci}_{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^{\bar{j}} + J^{C\bar{i}}_{\bar{j}} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \otimes dx^{\bar{j}}, \end{aligned}$$

onde

$$J^{Ci}_j = J^{C\bar{i}}_{\bar{j}} = J^i_j, \; J^{Ci}_{\bar{j}} = 0, \tag{4.1.2}$$

e

$$J^{C\bar{i}}_j = \frac{\partial J^i_j}{\partial x^h} x^{\bar{h}}, \tag{4.1.3}$$

$i, j, h = 1, \ldots, 2m$, $\bar{()} = () + 2m$, e J^i_j denotan as compoñentes locais da estructura complexa J en M.

Por outra parte, as únicas compoñentes non nulas da segunda forma fundamental do tensor T son as seguintes (ver [22]):

$$\nabla(dT)^{\bar{k}}_{ij} = x^{\bar{l}}[\frac{\partial^2 T^k_l}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^h_{ij}\frac{\partial T^k_l}{\partial x^h} - \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial x^l}T^k_h + \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^h}T^h_l + \Gamma^k_{ih}\frac{\partial t^h_l}{\partial x^j} + \Gamma^k_{hj}\frac{\partial T^h_l}{\partial x^i}], \tag{4.1.4}$$

$$\nabla(dT)^{\bar{k}}_{\bar{i}j} = (\nabla_j T)^k_i, \tag{4.1.5}$$

$i, j, k, l, h = 1, \ldots, 2m$, $\bar{k} = k + m$, onde Γ^k_{ij} e T^i_j denotan as compoñentes locais da conexión asociada a g e do tensor T, respectivamente, e $(\nabla_j T)^k_i$ as compoñentes locais da derivada covariante do tensor T.

Operando en (4.1.1) témo-las seguintes condicións:

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \nabla(dT)^{\bar{k}}_{ij} + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{lh} J^{Cl}_i J^{Ch}_j + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{\bar{l}h} J^{C\bar{l}}_i J^{Ch}_j + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{l\bar{h}} J^{Cl}_i J^{C\bar{h}}_j = 0,\\
&(b) \quad \nabla(dT)^{\bar{k}}_{\bar{i}j} + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{lh} J^{Cl}_{\bar{i}} J^{Ch}_j + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{\bar{i}h} J^{C\bar{l}}_{\bar{i}} J^{Ch}_j + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{l\bar{h}} J^{Cl}_{\bar{i}} J^{C\bar{h}}_j = 0,\\
&(c) \quad \nabla(dT)^{\bar{k}}_{lh} J^{Cl}_{\bar{h}} J^{Ch}_{\bar{j}} + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{\bar{l}h} J^{C\bar{l}}_{\bar{i}} J^{Ch}_{\bar{j}} + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{l\bar{h}} J^{Cl}_{\bar{i}} J^{C\bar{h}}_{\bar{j}} = 0,
\end{aligned}$$

$i, j, k, l, h, t = 1, \ldots, 2m$, $\bar{()} = () + 2m$. Sustituíndo en (a), (b) e (c) os valores de (4.1.2) e (4.1.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
&(d) \quad \nabla(dT)^{\bar{k}}_{ij} + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{lh} J^l_i J^h_j + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{\bar{l}h} [\frac{\partial J^h_i}{\partial x^t} J^l_j + J^l_i \frac{\partial J^h_j}{\partial x^t}] x^{\bar{t}} = 0,\\
&(e) \quad \nabla(dT)^{\bar{k}}_{\bar{i}j} + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{\bar{l}h} J^l_i J^h_j = 0,\\
&(f) \quad 0 = 0,
\end{aligned}$$

$i, j, k, l, h, t = 1, \ldots, 2m$, $\bar{k} = k + 2m$. Usando as ecuacións (4.1.4) e (4.1.5) témo-lo resultado. □

Teorema 4.1.4.

Sexa (M, g, J) unha variedade Kähler $2m$-dimensional, X un campo de vectores sobre M 1-pluriharmónico e T un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ sobre M, paralelo. Entón T é pluriharmónico se, e soamente se, TX é 1-pluriharmónico.

Demostración

TX pode ser considerado como a aplicación composición:

$$\begin{aligned}
T \circ X \quad : \quad & (M, g, J) \longrightarrow (TM, g^C, J^C) \longrightarrow (TM, g^C, J^C)\\
& x^i \rightsquigarrow (X^i, X^{\bar{i}}) = (x^i, X^i) \rightsquigarrow (T^i, T^{\bar{i}}) = (x^i, T^i_k X^k),
\end{aligned}$$

onde $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i, k = 1, \ldots, 2m$, $\bar{i} = i + 2m$.

Empregando a fórmula da segunda forma fundamental dunha composición de aplicacións tense que:

$$\nabla(d(TX))^{\gamma}_{ij} = \nabla(dX)^{\mu}_{ij} \frac{\partial T^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} + \nabla(dT)^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^j}, \tag{4.1.6}$$

$i, j = 1, \ldots, 2m; \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, 4m.$

Utilizando as expresións da segunda forma fundamental dun campo de vectores, o feito de que X é 1-pluriharmónico e (4.1.6), temos que a condición para a 1-pluriharmonicidade de TX resulta:

$$\begin{aligned}\nabla(dT)^{\bar{k}}_{ij} & +\nabla(dT)^{\bar{k}}_{i\bar{l}}\frac{\partial X^l}{\partial x^j} + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{\bar{l}j}\frac{\partial X^l}{\partial x^i} + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{lh}J^l_iJ^h_j + \\ \nabla(dT)^{\bar{k}}_{\bar{l}h} & \frac{\partial X^l}{\partial x^t}[J^t_iJ^h_j + J^h_iJ^t_j] = 0,\end{aligned}$$

$i, j, k, l, h, t = 1, \ldots, 2m,\ \bar{()} = () + 2m.$

Tendo en conta (4.1.4) e (4.1.5) e o feito de que T é paralelo, a ecuación anterior redúcese a

$$\nabla(dT)^{\bar{k}}_{ij} + \nabla(dT)^{\bar{k}}_{lh}J^l_iJ^h_j = 0, \tag{4.1.7}$$

$i, j, k, l, h = 1, \ldots, 2m,\ \bar{k} = k + m$, que é equivalente ás condicións expresadas no Teorema 4.1.3 no caso de que T sexa paralelo, co que queda demostrado o resultado.

□

É ben sabido que as aplicacións pluriharmónicas son harmónicas e as aplicacións holomorfas son pluriharmónicas, asemade no caso de campos de vectores pluriharmónicos en variedades compactas Kähler témo-las seguintes equivalencias.

Proposición 4.1.1.

Sexa (M, J, g) unha variedade compacta Kähler, X un campo de vectores sobre M e $\widetilde{X} = \frac{1}{2}(X - \sqrt{-1}JX)$ o campo de vectores complexo asociado a X. Son equivalentes:

- (1) X é un campo de vectores 1-harmónico-Killing,
- (2) X é un campo de vectores harmónico-Killing,
- (3) X é un campo de vectores analítico,
- (4) $\widetilde{X}$ é un campo de vectores holomorfo,

- (5) X é un campo de Jacobi ó longo da identidade de M,
- (6) X é un campo de vectores pluriharmónico.

Demostración

Toda aplicación pluriharmónica é harmónica e se N é unha variedade Kähler unha aplicación holomorfa $\phi : M \longrightarrow N$ é pluriharmónica. Entón, utilizando o Teorema 3.1.1 téñense as equivalencias. □

4.2 Campos de vectores α-pluriharmónicos

Nunha variedade Kähler (M, J, g) unha aplicación é pluriharmónica se a parte J-invariante da segunda forma fundamental se anula. O noso propósito é utilizar este concepto mais xeral para cando M non é necesariamente unha variedade Kähler. Seguindo con este obxectivo introducímo-lo formalismo de Clifford (ver [30] para unha descrición completa).

Sexan (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas (ou semi-Riemannianas), conexas, sen fronteira e con $dimM = m \geq 2$ e $dimN = n \geq 2$. Sexa $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ unha aplicación C^∞. Denotamos por $D = d + \delta$ o operador de Dirac do fibrado de Dirac de M, actuando nas formas diferenciais con valores en $\phi^*(TN)$. Se α é unha p-forma en M e σ é unha sección de $\phi^*(TN)$, a multiplicación de Clifford, $*$, vén definida por

$$\sigma * \alpha = \sigma \wedge \alpha - \imath(\sigma)\alpha,$$

e

$$\alpha * \sigma = (-1)^p(\sigma \wedge \alpha + \imath(\sigma)\alpha),$$

onde $\wedge$ e $\imath$ denotan o producto exterior e o producto interior das formas diferenciais, respectivamente.

Se $\{e_i\}_{i=1}^{i=m}$ é unha referencia ortonormal entón D ten a seguinte expresión:

$$D = \sum_i e_i * \nabla e_i.$$

Así, a aplicación C^∞ $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ dise que é *α-pluriharmónica*, onde α é unha 2-forma harmónica ($d\alpha = \delta\alpha = 0$) en M, cando

$$D(\alpha * d\phi) - \alpha * D(d\phi) = 0.$$

Seguindo a estructura das seccións previas introducímo-los campos de vectores α-pluriharmónicos caracterizados pola propiedade de que o seu fluxo integral actúa na variedade mediante difeomorfismos α-pluriharmónicos.

Definición 4.2.1.

Sexa (M, g) unha variedade semi-Riemanniana. Un campo de vectores X en M é chamado campo de vectores *α-pluriharmónico* se o grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado a X é un grupo de transformacións α-pluriharmónicas. Neste caso decimos que a transformación infinitesimal é unha transformación infinitesimal α-pluriharmónica.

Téñense os seguintes resultados:

Lema 4.2.1.

[41]Se α é unha 2-forma harmónica sobre M, entón para todo $x \in M$, temos o seguinte:

$$D(\alpha * d\phi) - \alpha * D(d\phi) = 2\sum_{i=1}^{m} \nabla d\phi(e_i, .) \wedge \alpha(e_i, .),$$

onde $*$ denota a multiplicación de Clifford e $\{e_i\}_{i=1}^{i=m}$ é unha referencia ortonormal en T_xM.

Teorema 4.2.1.

Sexa (M, g) unha variedade Riemanniana (ou semi-Riemanniana) e α unha 2-forma harmónica sobre M. Se o campo de vectores X en M é un campo de vectores α-pluriharmónico, entón para cada $x \in M$,

$$\sum_{i=1}^{m} (\mathcal{L}_X \nabla)(e_i, .) \wedge \alpha(e_i, .) = 0,$$

para unha referencia ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^{i=m}$ en T_xM.

Demostración

Seguimos coa notación das seccións previas. Se X é un campo de vectores en M con transformación infinitesimal φ_t, entón φ_t é α-pluriharmónica, seguindo o Lema 4.2.1, é dicir que, para cada $x \in M$,

$$\sum_{i=1}^{m} (\nabla d\varphi_t(e_i, .)) \circ \varphi_{-t} \wedge \alpha(e_i, .) = 0, \tag{4.2.1}$$

e (4.2.1) anúlase se e soamente se para cada referencia ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{i=m}$ en T_xM,

$$\sum_{i=1}^{m} [(\alpha(e_i, e_k)\nabla' d\varphi_t(e_i, e_j) \circ \varphi_{-t}) - (\alpha(e_i, e_j)\nabla' d\varphi_t(e_i, e_k) \circ \varphi_{-t})] = 0,$$

$\forall j, k = 1, \ldots m$.

Así, despois de sustitui-la expresión de $\nabla' d\varphi_t$ obtemos que (4.2.1) é equivalente a

$$\begin{array}{rl} \sum_{i=1}^{m} & \{\alpha(e_i, e_k)((\nabla_{e_i^{\varphi_t}} e_j^{\varphi_t}) - (\nabla_{e_i} e_j)^{\varphi^{-t}}) - \\ \alpha(e_i, e_j) & ((\nabla e_i^{\varphi_t} e_k^{\varphi_t}) - (\nabla_{e_i} e_k)^{\varphi^{-t}})\} = 0, \end{array}$$

$\forall j, k = 1, \ldots, m$.

A correspondente condición infinitesimal é

$$\begin{array}{rl} ev|_{t=0} & \dfrac{\partial}{\partial t} \circ \{\sum_{i=1}^{m} [\{\alpha(e_i, e_k)((\nabla_{e_i^{\varphi_t}} e_j^{\varphi_t}) - (\nabla_{e_i} e_j)^{\varphi^{-t}}) - \\ \alpha(e_i, e_j) & ((\nabla e_i^{\varphi_t} e_k^{\varphi_t}) - (\nabla_{e_i} e_k)^{\varphi^{-t}})\}]\} = 0, \end{array}$$

$\forall j, k = 1, \ldots, m$.

Calculando as derivadas do lado esquerdo do signo igual, e simplificando, obtemos

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha(e_i, e_k)(\mathcal{L}_X \nabla)(e_i, e_j) - \alpha(e_i, e_j)(\mathcal{L}_X \nabla)(e_i, e_k) = 0, \ \forall j, k = 1, \ldots m.$$

A condición é, entón,

$$\sum_{i=1}^{m} (\mathcal{L}_X \nabla)(e_i, .) \wedge \alpha(e_i, .) = 0,$$

onde X é un campo de vectores con grupo 1-paramétrico de difeomorfismos φ_t, e esto proba o resultado. $\square$

Vexamos co seguinte exemplo que a condición é necesaria pero non suficiente.

Exemplo 4.2.1.

Consideremo-lo plano complexo Euclideo $\mathbb{C}$ coas coordenadas usuais $z = x + iy$ e a métrica $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy$. Sexa X o seguinte campo de vectores:

$$X(x, y) = e^y \sin(x) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Consideremo-la 2-forma $\alpha = \omega$, onde $\omega(X, Y) := g(X, JY)$, en coordenadas: $\omega = dy \wedge dx - dx \wedge dy$, que é harmónica por se-la 2-forma dunha variedade Kähler, (ver [23] para máis detalles sobre campos de tensores harmónicos). A condición do teorema anterior neste caso tradúcese en

$$\frac{\partial^2 X^1}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 X^2}{\partial (x^1)^2} = 0,$$

que X verifica.

Por outra parte o grupo 1-paramétrico de transformacións φ_t, asociado a X vén dado pola expresión local en serie de Taylor:

$$\varphi_t(x, y) = (x, y) + t(e^y \sin y \cos^2 x - \sin^3 x, 0) + \theta(t^4),$$

onde $\theta(t^4)$ denota un infinitésimo de orden 4.

Entón as condicións de ω-pluriharmonicidade para X veñen dadas por

$$\nabla d\varphi_t(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) + \nabla d\varphi_t(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}) = \frac{-2}{3} t^3 e^{3y} (\sin x \cos^3 x + \sin^3 x) + O(t^4).$$

co que X non é un campo ω-pluriharmónico (poderiamos considera-lo Exemplo 4.1.1 xa que ω-pluriharmónico neste caso coincide con pluriharmónico). Igual que anteriormente podemos considera-la seguinte definición:

Definición 4.2.2.

Sexa (M,g) unha variedade semi-Riemaniana. Un campo de vectores X en M é chamado 1-α-pluriharmónico se o grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado a X, $\{\varphi_t\}_{t\in I}$, verifica

$$\frac{d}{dt}(D(\alpha * d\varphi_t) - \alpha * D(d\varphi_t))|_{t=0} = 0.$$

Neste caso diremos que a transformación infinitesimal φ_t é 1-α-pluriharmónica.

Teorema 4.2.2.

Sexa X un campo de vectores nunha variedade semi-Riemanniana (M,g) e α unha 2-forma harmónica sobre M, entón as seguintes afirmacións son equivalentes:

- *(i) X é un campo de vectores 1-α-pluriharmónico.*
- *(ii) $\sum_{i=1}^{m}(\mathcal{L}_X\nabla)(e_i,.)\wedge\ \alpha(e_i,.) = 0$, para unha referencia ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^m$ en T_xM.*
- *(iii) $X : (M,g)\longrightarrow(TM,g^C)$ é unha aplicación α-pluriharmónica, onde g^C denota o levantamento completo de g.*

Demostración

Sexa x^i, $i=1,\ldots,m$, un sistema de coordenadas locais en M e $X = X^i(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$ un campo de vectores en M con grupo 1-paramétrico local de transformacións asociado $\{\varphi_t\}_{t\in I}$. Como no teorema previo denotamos por

$$\varphi_t(x^a) = x^a + tX^a(x^a) + O(t^2),\ t\in I,$$

a expansión en serie de Taylor de φ_t, onde $O(t^2)$ é o resto de orden 2.

Sabemos tamén que a segunda forma fundamental $d\varphi_t$, localmente, vén dada por:

$$(\nabla(d\varphi_t))_{ij}^k = (\mathcal{L}_X\Gamma_{ij}^k)t + O(t^2),\ i,j,k=1,\ldots,m.$$

Sexa $\{e_i\}_{i=1}^m$ unha referencia ortonormal en TM, entón a condición de 1-α-pluriharmonicidade para X segundo o Lema 4.2.1 exprésase como:

$$\frac{d}{dt}(\sum\nolimits_{i=1}^{m}(\nabla d\varphi_t)(e_i,.)\wedge\alpha(e_i,.))|_{t=0} = \sum\nolimits_{i=1}^{m}(\mathcal{L}_X\nabla)(e_i,.)\wedge\alpha(e_i,.) = 0,$$

co que queda demostrado $(i)\Leftrightarrow(ii)$.

Se consideramos X como aplicación de (M,g) en (TM,g^C) sabemos pola demostración do teorema anterior que

$$\begin{aligned}(\nabla dX)^k(e_i,.) &= 0,\\ (\nabla dX)^{k+m}(e_i,.) &= \mathcal{L}_X\nabla(e_i,.),\end{aligned}$$

$k=1,\ldots,m$, co que utilizando a definición de α-pluriharmonicidade para a aplicación X temos $(ii)\Leftrightarrow(iii)$. □

Teorema 4.2.3.

Os campos de vectores α-pluriharmónicos (1-α-pluriharmónicos) nunha variedade (semi-)Riemanniana (M,g) son invariantes baixo cambios conformes da métrica.

Demostración

Basta ter en conta que o operador de Dirac é independente da elección da métrica na clase conforme, i.e., tense un operador de Dirac canónico asociado á estructura conforme (ver por exemplo [24]). □

Exemplo 4.2.2.

Considerémo-lo plano complexo Euclideo $\mathbb{C}$ coas coordenadas usuais $z=x+iy$ e a métrica $g=dx\otimes dx+dy\otimes dy$. Tomemos $\alpha=g$, que é unha 2-forma harmónica, (ver [23] para máis detalles sobre campos de tensores harmónicos) e a referencia ortonormal $\{\frac{\partial}{\partial x}, J\frac{\partial}{\partial x}\}$. Neste caso a condición de 1-g-pluriharmonicidade:

$$\sum_{i=1}^{i=m}\mathcal{L}_X\nabla(e_i,.)\wedge g(e_i,.)=0,$$

é equivalente a:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\nabla(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x})\wedge g(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}) &= 0,\\ \mathcal{L}_X\nabla(J\frac{\partial}{\partial x},J\frac{\partial}{\partial x})\wedge g(J\frac{\partial}{\partial x},J\frac{\partial}{\partial x}) &= 0.\end{aligned}$$

Tomando $X(x,y) = X^1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}$ a condición anterior redúcese a:

$$\frac{\partial^2 X^1}{\partial x^2} = 0, \ \frac{\partial^2 X^1}{\partial y^2} = 0.$$

Se agora consideramos $\alpha = \omega$, onde $\omega(X,Y) =: g(X,JY)$. En coordenadas: $\omega = dy \wedge dx - dx \wedge dy$.

Neste caso un campo $X(x,y) = X^1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}$ é 1-ω-pluriharmónico, se e soamente se,

$$\frac{\partial^2 X^1}{\partial x \partial y} = 0.$$

Análogas condicións se obterían considerando campos de vectores da forma $X(x,y) = X^2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$.

Polo tanto é sinxelo construír campos de vectores 1-g-pluriharmónicos e 1-ω-pluriharmónicos.

Proposición 4.2.1.

Sexa (M,J,g) unha variedade compacta, Kähler e X un campo de vectores en M. Entón as seguintes condicións son equivalentes:

- **(i)** X é analítico,
- **(ii)** X é harmónico-Killing,
- **(iii)**X é pluriharmónico,
- **(iv)** X é ω-pluriharmónico, onde ω é a 2-forma Kähler sobre M.

Demostración

As tres primeiras equivalencias son a Proposición 4.1.1. Ademais cuns sinxelos cálculos obtemos:

$$(D(\omega * d\varphi_t) - \omega * (d\varphi_t))(X,Y) = 2((\nabla d\varphi_t)(JX,Y) - (\nabla d\varphi_t)(X,JY)),$$

onde φ_t é o grupo 1-paramétrico de transformacións asociado a X. Así, temos a equivalencia $(iii)\Leftrightarrow(iv)$, e esto completa a proba. $\square$

En presencia de condicións para a curvatura na variedade, existen relacións entre estes conceptos. Se (M, g) é unha variedade Riemanniana compacta con curvatura seccional complexa non positiva e α é unha 2-forma paralela en M, entón, usando [16], un campo de vectores X en M é harmónico-Killing se e soamente se é α-pluriharmónico.

Capítulo 5

Algúns resultados en variedades Lorentz

5.1 Técnicas Bochner en variedades Lorentz

Existen técnicas e resultados para o caso en que (M, g) é unha variedade Riemanniana que non poden ser empregados no caso semi-Riemanniano nin, en particular, para variedades Lorentz. Algúns destes resultados son expostos a continuación.

Fórmula de Bochner clásica

Para unha variedade compacta M e para cada campo de vectores Z en (M, g),

$$\int_M (Ric(Z,Z) + trace(A_Z^2) - (traceA_Z)^2)dv = 0,$$

onde A é o campo de endomorfismos $v \longrightarrow \nabla_v Z$, $\forall v \in TM$. Observar que esta fórmula é válida tanto no caso en que g é unha métrica Riemanniana coma no caso en que é unha métrica Lorentz. En efecto, o único que expresa é que a integral da diverxencia do campo de vectores $X = A_Z(Z) - (divZ)Z$ se anula.

Dificultade do caso Lorentz:

Poñendo

$$\delta_Z = trace(A_Z^2) - (traceA_Z)^2,$$

se δ_Z ten un signo, a fórmula Bochner pode ser utilizada relacionando fortemente Z coa curvatura de Ricci. Como exemplo témo-la Proposición 5.1.1.

Proposición 5.1.1.

Se nunha variedade Riemanniana, compacta e orientable, (M, g), o tensor de Ricci, Ric, é semi-definido negativo, (é dicir para todo campo de vectores V en M, $Ric(V, V)\leq 0$), entón un campo de vectores, X, é 1-harmónico-Killing, se e soamente se, X é paralelo. Nembargantes, se Ric é definido negativo, (é dicir $Ric(V, V) = 0$ se e soamente se $V = 0$), entón os únicos campos de vectores 1-harmónicos-Killing son as seccións nulas.

Nembargantes, esto non é válido en xeometría Lorentz. Alfonso Romero e Miguel Sánchez en [44] atoparon xa algúns resultados alternativos en variedades Lorentz, por exemplo:

Teorema 5.1.1.

Sexa (M, g) unha variedade m-dimensional Lorentz, $m\geq 2$ admitindo un campo de vectores proxectivo $Z(\neq 0)$. Asumamos que $g(Z, Z)$ alcanza o máximo local en $p\in M$ e Z_p é causal. Entón:

$$g(R(v, Z_p)Z_p, v)\geq 0 \tag{5.1.1}$$

para todo $v\in T_pM$ ortogonal a Z_p, e ademáis $Ric(Z_p, Z_p)\geq 0$. En particular:

- *(i) Se Z_p é temporal entón a curvatura seccional de cada plano non dexenerado π contendo a Z_p verifica: $K(\pi)\leq 0$. Se se dá a igualdade para todos estes planos (ou, equivalentemente, se se dá a igualdade (5.1.1)) entón $\nabla_v Z = 0$ para todo v ortogonal a Z_p.*

- *(ii) Se Z_p é nulo entón $\nabla_{Z_p} Z$ é proporcional a Z_p. No caso $n\geq 3$ a curvatura seccional nula con respecto a Z_p para cada plano plano dexenerado contendo a*

Z_p verifica

$$K_{Z_p}(\pi) := \frac{g(R(Z_p, Z_p)Z_p, Z_p)}{g(Z_p, Z_p)} \geq 0.$$

Se se dá a igualdade para tódolos planos anteriores (ou, equivalentemente, se se dá igualdade en (2.1.1)), entón $\nabla_v Z$ é proporcional a Z_p para todo v ortogonal a Z_p. $\square$

No caso de campos de vectores 1-harmónicos-Killing témo-lo seguinte resultado:

Teorema 5.1.2.

Sexa (M, g) unha variedade Lorentz m-dimensional e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ unha referencia ortonormal, tal que $g(e_1, e_1) = -1$, $g(e_i, e_i) = 1$ $i = 2, \ldots, m$. Se a curvatura de Ricci é semi-definida negativa, os campos de vectores 1-harmónicos-Killing temporais e sen aceleración son paralelos. Se a curvatura de Ricci é definida negativa, non existen campos de vectores 1-harmónicos-Killing temporais sen aceleración non nulos.

Demostración

Por ser X un campo de vectores temporal non supón perda de xeralidade tomar $X = e_1$. Considerémo-la seguinte fórmula de Bochner (páx. 158, [42]):

$$2g(trace_g \nabla^2 e_1, e_1) + 2trace_g(\nabla e_1, \nabla e_1) + \triangle g(e_1, e_1) = 0. \qquad (5.1.2)$$

Tense que:

$$\triangle g(e_1, e_1) = div \nabla g(e_1, e_1) = 0,$$

e polo tanto a ecuación (5.1.2) redúcese a:

$$g(trace_g \nabla^2 e_1, e_1) + trace_g(\nabla e_1, \nabla e_1) = 0$$

Por ser e_1 un campo de vectores 1-harmónico-Killing verifica:

$$g(trace_g \nabla^2 e_1, e_1) = -Ric(e_1, e_1),$$

entón:

$$-Ric(e_1, e_1) - g(\nabla_{e_1} e_1, \nabla_{e_1} e_1) + \sum_{i=2}^{n} g(\nabla_{e_i} e_1, \nabla_{e_i} e_1) = 0.$$

Por ser e_1 un campo de vectores sen aceleración, esto é, $\nabla_{e_1} e_1 = 0$ entón:

$$Ric(e_1, e_1) = \sum_{i=2}^{n} g(\nabla_{e_i} e_1, \nabla_{e_i} e_1).$$

Nótese que $g(e_1, e_1) = -1$ e así

$$0 = (\nabla_Z g)(e_1, e_1) = 2g(\nabla_Z e_1, e_1),$$

polo tanto:

$$\nabla_Z e_1 \in e_1^{\perp},$$

entón

$$\sum_{i=2}^{n} g(\nabla_{e_i} e_1, \nabla_{e_i} e_1) \geq 0.$$

deste xeito se a curvatura de Ricci é semi-definida negativa e_1 é paralelo e se a curvatura de Ricci é definida negativa $e_1 = 0$. □

5.2 Espacios-tempo e cantidades cinemáticas

Sexa (M, g) unha variedade espacio-tempo de dimensión 4 en relatividade xeral. Esto significa que M é unha variedade C^{∞}, conexa, Hausdorff de dimensión 4 e g é unha métrica Lorentz orientable no tempo de signatura hiperbólica normal $(- + ++)$.

O conxunto de curvas integrais correspondentes a un campo de vectores X é chamado *congruencia de curvas temporais (espaciais ou nulas)*. As curvas temporais tamén son chamadas liñas de fluxo. A aceleración das liñas de fluxo ó longo de X vén dada por $\nabla_X X$, onde ∇ é a conexión de Levi-Civita en M. O tensor proxector, definido por

$$h_{ab} = g_{ab} + X_a X_b,$$

é usado para proxectar un vector tanxente nun punto p no espacio-tempo nun vector espacial ortogonal a X en p. A velocidade de cambio de separación das liñas de fluxo dunha curva temporal, C, tanxente a X vén dada polo tensor de expansión

$$\theta = h_a^c h_b^d \nabla_d X_c.$$

A expansión de volume θ, o tensor shear σ_{ab}, o tensor vorticidade ω_{ab} e o vector vorticidade ω^a defínense como segue:

$$\begin{aligned}
\theta &= divX, \\
\sigma_{ab} &= \theta_{ab} - \frac{\theta}{3} h_{ab}, \\
\omega_{ab} &= h_a^c h_b^d \nabla_d X_c, \\
\omega^a &= \frac{1}{2} \eta^{abcd} X_b \omega_{cd}.
\end{aligned}$$

Estas cantidades resultan da descomposición irreducible de $\nabla_b u_a$ con respecto a u_a, esto é:

$$\begin{aligned}
\nabla_b u_a &= \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{\theta}{3} h_{ab} - u_b(\nabla_a u^c u_c) \\
&= \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{\theta}{3} h_{ab} - u_b \dot{u}_a.
\end{aligned}$$

A continuación daremos uns exemplos de campos de vectores harmónicos-Killing neste contexto.

Campos electromagnéticos

O campo eléctrico e magnético poden ser combinados nun só campo de tensores $F = F_{ab}$ en M, esto é F é un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ antisimétrico. O tensor complexo auto-dual electromagnético, $F^\star$, vén definido por:

$$\begin{aligned}
F_{ab}^\star &= F_{ab} + i\widetilde{F}_{ab}, \; i = \sqrt{-1}, \\
\widetilde{F}_{ab} &= \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} F^{cd},
\end{aligned}$$

onde ϵ_{abcd} é o campo de tensores de Levi-Civita. As *ecuacións de Maxwell* son:

$$\begin{aligned} \nabla_c F_{ab} &= 0, \\ \nabla_b F^{ab} &= \frac{4\pi}{c} J^a, \end{aligned}$$

onde c é a velocidade da luz e J^a e o vector de corrente conservada de dimensión 4. Esto quere dicir que verifica a ecuación de continuidade definida por:

$$\nabla_a J^a = 0.$$

Alternativamente, as seguintes son as formas invariantes das tres ecuacións anteriores

$$\begin{aligned} dF &= 0, \\ divf &= \frac{4\pi}{c} J, \\ divJ &= 0, \end{aligned}$$

onde $g(X, fY) = F(X, Y)$, $\forall X, Y \in \chi(M)$ e J é a 1-forma de corrente.

O campo de vectores de corrente de dimensión 4 ten diverxencia nula e pola Proposición 2.3.1 do capítulo 2 tense que é 1-harmónico-Killing, se e soamente se, é Killing. Pero dado que todo campo Killing é harmónico-Killing e todo campo harmónico-Killing é 1-harmónico-Killing obtemos que o campo de vectores de corriente de dimensión 4 é harmónico-Killing, se e soamente se, é Killing.

Fluídos perfectos

Os fluídos son descritos pola súa densidade de masa ρ e unha congruencia de curvas temporais, chamadas liñas de fluxo. Supoñamos que u é o campo de vectores temporal da congruencia. Entón, o vector de fluído de corrente defínese por $j = \rho u$, tal que j é conservada, esto é $\nabla_a j^a = 0$. O fluxo do vector corriente proporciona unha enerxía interna, denotada por ϵ, como función de ρ.

Poderiamos ter tamén un fluído cunha carga eléctrica conservada, esto é, $divJ = 0$, onde $J = eu$ é a corrente eléctrica.

O campo de vectores fluído de corrente j e o campo de vectores de carga eléctrica conservada teñen diverxencia nula e pola Proposición 2.3.1 do Capítulo 2 tense que son 1-harmónicos-Killing, se e soamente se, son campos de vectores Killing. Pero dado que todo campo de vectores Killing é harmónico-Killing e todo campo harmónico-Killing é 1-harmónico-Killing obtemos que os campos anteriores son harmónicos-Killing, se e soamente se, son Killing.

Campos de vectores 1-harmónicos-Killing en relatividade xeral

En relatividade, as ecuacións de Einstein son un conxunto complicado de ecuacións diferenciais non liñais, as solucións máis explícitas foron atopadas utilizando campos de vectores Killing (ver [28]). Esto é debido ó feito de que os campos de vectores Killing deixan a conexión de Levi-Civita e tódalas cantidades de curvatura invariantes.

En xeral se u é a velocidade fluxo de fluído tense o seguinte resultado:

Teorema 5.2.1.

[12] Sexa (M, g) unha variedade espacio-tempo de dimensión 4, entón admite un campo de vectores Killing temporal V paralelo ó campo de vectores da velocidade do fluxo de fluiído u ($V = \lambda u$, $\lambda > 0$), se e soamente se

- *(1) M é libre de dilatación, esto é, $\theta \equiv 0$,*
- *(2) M é libre de shear, esto é, $\sigma_{ab} \equiv 0$,*
- *(3) $\mathcal{L}_V u = 0$, $\dot{\lambda} = 0$, $\dot{u}_a = \nabla_a (log\lambda)$,*

onde σ_{ab}, θ e $\dot{u}$ son as congruencias shear, de expansión e de aceleración xeradas por u. □

Con respecto ós campos de vectores 1-harmónicos-Killing témolo seguinte resultado:

Proposición 5.2.1.

Sexa (M, g) unha variedade espacio-tempo de dimensión 4, entón admite un campo de vectores 1-harmónico-Killing temporal V paralelo ó campo de vectores da velocidade do fluxo de fluído u ($V = \lambda u$, $\lambda > 0$), se e soamente se

- (1) M é libre de shear, esto é, $\sigma_{ab} \equiv 0$,
- (2) $\mathcal{L}_V u = 0$, $\dot{\lambda} = 0$, $\dot{u}_a = \nabla_a(log\lambda)$,

onde σ_{ab}, θ e $\dot{u}$ son as congruencias shear, de expansión e de aceleración xeradas por u.

Demostración

Pola Proposición 2.3.1 do capítulo 2 un campo de vectores 1-harmónico-Killing é Killing se e soamente se ten diverxencia nula. Se o campo de vectores é paralelo ó campo de vectores da velocidade do fluxo de fluído u $(V = \lambda u,\ \ \lambda > 0)$ que teña diverxencia nula é equivalente a que sexa libre de dilatación. Empregando o Teorema 5.2.1 $V = \lambda u$, é Killing, se e soamente se, é libre de dilatación e verifica as condicións do enunciado. Polo tanto (1) e (2) son equivalentes a que $V = \lambda u$, sexa 1-harmónico-Killing. $\square$

5.2.1 Outros exemplos

Espacios-tempo Gödel

Un espacio-tempo Gödel é unha variedade semi-Riemanniana (M, g) con

$$g = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + \frac{1}{2}e^{2Ax^1}(dx^2)^2 + (dx^3)^2 - 2e^{Ax^1}dx^0dx^2,$$

onde A é unha constante non nula e $(t = x^0, x^1, x^2, x^3)$ son coordenadas locais. Os símbolos de Christoffel non nulos son:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{01} &= \Gamma^0_{10} = A,\ \Gamma^2_{01} = \Gamma^2_{10} = -Ae^{-Ax^1},\\
\Gamma^0_{12} &= \Gamma^0_{21} = (\frac{A}{2})e^{Ax^1} = \Gamma^1_{02} = \Gamma^1_{20} = \Gamma^1_{22},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u^a &= \delta^a_0,\ \dot{u}^a = 0,\ \omega^a = (\frac{A}{\sqrt{2}})\delta^a_3,\\
\sigma_{ab} &= 0 = \theta,\ \nabla_b\omega_a = 0.
\end{aligned}$$

É ben coñecido que esta métrica admite os seguintes campos de vectores Killing:

$$\begin{aligned}
V^a_1 &= u^a,\ V^a_2 = \delta^a_2,\\
V^a_3 &= -2e^{-Ax^1}u^a + Ax^2\delta^a_1 + (e^{-2Ax^1} - \frac{1}{2}(Ax^2))\delta^a_2,\\
V^a_4 &= \delta^a_3,\ V^a_5 = \delta^a_1 - Ax^2\delta^a_2.
\end{aligned}$$

Aquí V_1, V_2 e V_3 son temporais, V_4 é espacial e V_5 é temporal, espacial ou nulo dependendo dos valores de A, x^1 e x^2.

Para os campos de vectores harmónicos-Killing tense o seguinte:

- $X = (ax^3 + b)\ \frac{\partial}{\partial x^0}$ é un campo de vectores harmónico-Killing.
  - Se $a = 0$ X é un campo de vectores Killing.
  - Se $a \neq 0$ X non é afín-Killing.
- $Y = (ax^3 + b)\ \frac{\partial}{\partial x^2}$ é un campo de vectores harmónico-Killing.
  - Se $a = 0$ Y é un campo de vectores Killing.
  - Se $a \neq 0$ Y non é afín-Killing.
- $Z = (ax^0 + bx^3 + c)\ \frac{\partial}{\partial x^3}$ é un campo de vectores harmónico-Killing.
  - Se $a = b = 0$ Z é un campo de vectores Killing.

– Se $a \neq 0$ Z non é afín-Killing.

Ademais nun espacio-tempo Gödel todo campo de vectores da forma:

$$X = X^0(x^1, x^2, x^3)\frac{\partial}{\partial x^0} + X^2(x^0, x^1, x^3)\frac{\partial}{\partial x^2} + X^3(x^0, x^1, x^2)\frac{\partial}{\partial x^3}$$

verifica $divX = \frac{\partial X^m}{\partial x^m}$. Polo tanto X é un campo de vectores Killing, se e soamente se, é 1-harmónico-Killing.

Espacio-tempo Schwarzchild

O espacio-tempo Schwarzschild é o modelo relativista máis simple dun universo contendo unha soa estrela. A estrela asúmese estática e esfericamente simétrica e é a única fonte de gravidade no espacio-tempo. O modelo resultante pode ser aplicado a rexións que están arredor dalgún obxecto astronómico que cumpre aproximadamente estas condicións. Por exemplo no caso do sol dá un modelo para o sistema solar incluso mellor que o pouco probable modelo Newtoniano. O modelo matemático é o seguinte:

$$\begin{array}{rcl} (N & \times & S^2, g_N + r^2 g_\sigma), \\ N & = & \{(t,r)\in\mathbb{R}^2 / r > 2m\}, \\ g_N & = & -(1 - \dfrac{2m}{r})dt^2 + \dfrac{1}{(1-\frac{2m}{r})}dr^2, \\ g_\sigma & = & d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2, \end{array}$$

onde θ e φ son as coordenadas esféricas na esfera unidade S^2 e t, r son o tempo e o radio Schvwarzschild usual. O producto (t, r, θ, φ) é chamado sistema de coordenadas esféricas-Schwarzchild. Neste espacio tense o seguinte:

- $\frac{\partial}{\partial t}$ é un campo de vectores Killing e polo tanto é harmónico-Killing.
- $\frac{\partial}{\partial r}$ non é un campo de vectores Killing nin tampouco 1-harmónico-Killing.
- $\frac{\partial}{\partial \theta}$ non é un campo de vectores Killing nin tampouco 1-harmónico-Killing.
- $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ é un campo de vectores Killing e polo tanto é harmónico-Killing.

Espacio-tempo Robertson-Walker

Dado que as ecuacións de Einstein son un conxunto complicado de ecuacións diferenciais non liñais, a miúdo asúmense certas condicións de simetría relevantes para a representación satistactoria do noso universo. Por observacións extragalacticas sábese que o universo é aproximadamente simétrico esfericamente con respecto a un observador. De feito, é máis razoable asumir que o universo é isotrópico que asumir que é esférico simétrico arredor de cada punto no espacio-tempo. Esto significa (ver Walker [50]) que o universo é espacialmente homoxéneo, esto é ,admite un grupo 6-paramétrico de isometrías G_6 de maneira que as superficies de transitividade son hipersuperficies de curvatura constante. Esto quere dicir que cada punto dunha destas hipersuperficies é equivalente a outro punto na mesma hipersuperficie. Tal espacio-tempo é chamado Robertson-Walker. O modelo matemático é:

$$(\mathbb{R}\times N, g),\ g = -dt^2 + f(t)g_N,\ f : N \longrightarrow \mathbb{R}^+.$$

Neste espacio-tempo tense o seguinte:

- $\frac{\partial}{\partial t}$ é 1-harmónico-Killing se e soamente se $f(t) = e^{At+B}$, $A, B \in \mathbb{R}$, esto implica que $\frac{\partial}{\partial t}$ é afín-Killing e polo tanto $\frac{\partial}{\partial t}$ é harmónico-Killing.
- $\frac{\partial}{\partial x^i}$ é 1-harmónico-Killing, $i = 1, \ldots, dimN$ e esto implica que $\frac{\partial}{\partial x^i}$ é 1-harmónico-Killing en N e $[(g_N)^{ab}\ \frac{\partial}{\partial x^i}\ ((g_N)_{ab})]\ \frac{f'(t)}{f(t)} = 0$.

Bibliografía

[1] V.I. Arnold, *Contact geometry: The geometrical method of Gibbs's Thermodynamics*, Proc. Gibbs Symposium, Yale University, (1989), 163-169.

[2] D.E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lecture notes in Math. Soc., 509, Springer-Verlag, Berlín, 1976.

[3] D.E. Blair, Two remarks on contact metric structures, *Tohoku Math. J.*, **29**, (1977), 319-324.

[4] D.E. Blair, J.N. Patnaik, Contact manifolds with characteristic vector field annihilated by the curvature, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, **9**, (1981), 533-545.

[5] B. Chen, T. Nagano, Harmonic metrics, harmonic tensors, and Gauss maps, *J. Math. Soc. Japan, 36*, **2**, (1981), 295-313.

[6] S. Bochner, Vector field and Ricci curvature, *Bull. Am. Math. J.*, **52**, (1946), 776-797.

[7] C. Constantinescu, A. Cornea, Compactifications of harmonic spaces, *Nagoya Math. J.*, **25**, (1965), 1-57.

[8] R. Couty, Transformations infinitésimales projectives, *Compt. Tend.*, **247**, (1958), 804-806.

[9] C.T.J. Dodson, E. García-Río, M.Trinidad Pérez, M.E. Vázquez-Abal, Harmonic-Killing vector fields on Lorentz geometry, *Preprint*

[10] C.T.J. Dodson, M. Trinidad Pérez, M.E. Vázquez-Abal, Harmonic-Killing vector fields, *Bull. Belg. Math. Soc.* **9**, (2002), 481-490.

[11] C.T.J. Dodson, M. Trinidad Pérez, M.E. Vázquez-Abal, Harmonic-Killing vector fields on Kähler manifolds, *Bull. Math. Soc. Roumanie*, **43**, (2000), 213-224.

[12] K.L. Duggal, R. Sharma, *Symmetries of Spacetimes and Riemannian Manifolds*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, vol. 487, 1999.

[13] J. Ells, *Selected topics in harmonic maps*, CBMS, Regional Conference Series in Math., vol. 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI,1983.

[14] J. Eells, L. Lemaire, *Two reports on harmonic maps*, World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1995.

[15] J. Eells, J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.*, **86**, (1976), 263-266.

[16] A. El Soufi, R. Petit, Applications harmoniques, applications pluriharmoniques et existence de 2-formes parallèles non nulles, *Comment. Math. Helv.*, **73**, (1998), 1-21.

[17] M.J. Ferreira, A characterization of Jacobi fields along harmonic maps, *Internat. J. Math.*, **4**, (1993), 545-550.

[18] B. Fuglede, Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **28**, 2, (1978), 107-144.

[19] T. Fukami, S. Ishihara, Almost Hermitian structure on S^6, *Ann. of Math.*, **39**, (1938), 762-785.

[20] E. García-Río, L. Vanhecke, M.E. Vázquez-Abal, Tangent bundles of order r and harmonicity of induced maps, *Boll. Un. Mat. Ital. (7)*, **11**-A, (1997), 809-813.

[21] E. García-Río, L. Vanhecke, M.E. Vázquez-Abal, Harmonic connections, *Acta Sci. Math.*, **62**, (1996), 583-607.

[22] E. García-Río, L. Vanhecke, M.E. Vázquez-Abal, Harmonic endomorphism fields, *Illinois J. Math.*, **41**, (1997), 23-29.

[23] E. García-Río, L. Vanhecke, M.E. Vázquez-Abal, Notes on harmonic tensor fields, *New developements in Differential Geometry, Budapest 1996, Kluwer Acad. Publ.*, (1999), 123-142.

[24] N. Hitchin, Harmonic Spinors, *Advances in Math.*, **14**, (1974), 1-55.

[25] E. Kaehler, Uber eine bemerkenswerte hermitische metrik, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **9**, (1993), 173-186.

[26] G.H. Katzin, J. Levine, W.R. Davis, Curvature Collineations: A Fundamental Symmetry Property of the Space-Times of General Relativity Defined by the Vanishing Lie Derivative of the Riemann Curvature Tensor, *J. Math. Phys.*, **10**, (1969), 617-619.

[27] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol I-II, Interscience Publishers, New York-London. 1963-1969.

[28] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field equations,* Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[29] J.J. Konderak, On harmonic vector fields, *Publications Matemàtiques*, **36**, (1992), 217-228.

[30] H.B. Lawson, M.L. Michelson, *Spin Geometry*, Princenton Univ. Press, Princenton, 1989.

[31] A. Lee, G. Tóth, On variation spaces of harmonic maps into spheres, *Acta. Sci. Math.*, **46**, (1983), 127-141.

[32] A. Lichnérowicz, Applications harmoniques et variétés kähleriennes, *Symp. Math. III Bologna*, (1970), 341-402.

[33] S. Maclane, *Geometrical Mechanics II*, Lecture Notes, University of Chicago, 1968.

[34] E. Mazet, La formule de la variation seconde de l'energie au voisinage d'une application harmonique, *J. Differ. Geom.*, **8**, (1973), 279-296.

[35] S. Montaldo, J.C. Wood, Harmonic morphism and Jacobi operator, *Rend. Sem. Fac. Sci. Unit. Cagliari*, **70**, (2000), n.2, 21-28.

[36] V.E. Nazaikinskii, V.E. Shatalov, B.Y. Sternin, *Contact geometry and linear differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[37] A. Newlander, L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Ann. Math.*, **65**, (1957), 391-404.

[38] O. Nouhaud, Transformations infinitésimales harmoniques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **274**, (1972), 573-576.

[39] O. Nouhaud, Applications harmoniques d'une variété riemannienne dans son fibré tangent, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **284**, (1977), 815-818.

[40] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[41] R. Petit, Sur la rigidité des inmersions minimales et des inmersions pluriharmoniques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **318**, (1994), 1125-1128.

[42] W.A. Poor, *Differential geometric structures*, McGraw-Hill, New York, 1981.

[43] A. Romero,M. Sánchez, An integral inequality on compact Lorentz manifolds and its applications, *Bull. London Math.*, **28**, (1996), 509-513.

[44] A. Romero, M. Sánchez, Projective vector fields on Lorentzian manifolds, *Geom. Dedicata*, **93**, (2002), 95-105.

[45] R.T. Smith, Harmonic mappings of spheres, PhD Thesis, Warwick University, (1972).

[46] R.T. Smith, The second variation formula for harmonic mappings, *Amer. Math. Soc.*, **47**, (1975), 229-237.

[47] T. Sunada, Holomorphic mappings into a compact quotient of a symmetric bounded domain, *Nagoya Math. J.*, **64**, (1976), 159-175.

[48] G. Tóth, *One-parameter families of harmonic maps into spaces of constant curvature*, Studia Sci. Math. Hungarica, **18**, (1983), 183-193.

[49] M.E. Vázquez-Abal, Harmonicity on the tangent bundle of order r, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **312** (1991), 131-136.

[50] A.G. Walker, Completely symmetric spaces, *J. London Math. Soc.*, **19**, (1944), 219-226.

[51] K. Yano, On harmonic and Killing vector fields, *Ann. Math.*, **55**, (1952), 38-45.

[52] K. Yano, *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*, Pergamon Press, New York, 1965.

[53] K. Yano, *Integral Formulas in Riemannian Geometry*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1970.

[54] K. Yano, S. Bochner, *Curvature and Betti Numbers*, Ann. Math. Studies, 32, Princenton University Press, New York, 1953.

[55] K. Yano, S. Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundles*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[56] K. Yano, S, Kobayashi, Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, **I**, General Theory, *J. Math. Soc. Japan*, **18**, (1996), 194-210.

[57] K. Yano, T. Nagano, On geodesic vector fields in a compact orientable Riemannian manifold, *Comment. Math. Helv.*, **35**(1), (1961), 55-64.