Iago García Ramírez

Aplicación de las fórmulas de Bochner al estudio de variedades 4–dimensionales doblemente casi–hermíticas

103
2003
Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Iago García Ramírez

APLICACIÓN DE LAS FÓRMULAS DE BOCHNER AL ESTUDIO DE VARIEDADES 4–DIMENSIONALES DOBLEMENTE CASI–HERMÍTICAS

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas, bajo la dirección del profesor Eduardo García Río, para obtener el Diploma de Estudios Avanzados en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela.

Índice general

Prefacio

Una estructura doblemente casi-hermítica (g, J, J') es un par de estructuras casi-complejas conmutativas $(JJ' = J'J)$ junto con una métrica adaptada sobre una variedad dada. Estas estructuras, asociadas a la reducción del grupo de estructura a $U(p) \times U(q)$, aparecen de forma natural en el estudio de diversos problemas geométricos, en especial sobre dimensión cuatro. Así, es conocido que [18] la existencia de tales estructuras es equivalente a la de un campo de 2-planos orientados sobre M^4 y, por tanto, a la existencia de determinadas métricas de signatura $(++--)$. Geométricamente, la equivalencia anterior puede ser realizada a través de una estructura casi-producto Q obtenida a partir de la estructura doblemente casi-compleja como $Q = -JJ'$. Por tanto, y como parecería razonable esperar, las propiedades de las estructuras casi-hermíticas (g, J) y (g, J') influyen en las propiedades de la estructura casi-producto (g, Q) y recíprocamente. A modo de ejemplo señalemos aquí que una variedad es doblemente Kähler si y sólo si la variedad es localmente isométrica a un producto de variedades Kählerianas.

Es bien conocido que las distintas clases de estructuras casi-hermíticas influyen en las propiedades de la curvatura de la variedad y recíprocamente, determinadas propiedades de la curvatura determinan la estructura casi-hermítica. Señalemos a modo de ejemplo la situación de los espacios complejos generalizados [24], donde una fuerte restricción en la curvatura conlleva la integrabilidad de la estructura casi-compleja y, en dimensiones superiores a seis, el carácter Kähleriano de la misma. Sin embargo, existen otras condiciones más débiles sobre la curvatura que son todavía cuestión de análisis en la actualidad. Así, la conjetura de Goldberg, que afirma la integrabilidad de las estructuras simplécticas sobre variedades compactas de Einstein es todavía hoy en día un problema abierto (véase, por ejemplo [1] para más información)

Recientemente se ha iniciado un programa general para tratar de dar respuesta a problemas análogos a los anteriores a partir del uso de ciertas expresiones que relacionan aspectos de la curvatura con las propiedades de una estructura casi-hermítica dada. Tales expresiones vienen dadas por las denominadas "fórmulas de Bochner", cuya utilidad se hace extensiva a otras estructuras definidas a partir de una forma dada sobre la variedad [7], [13]. Nuestro objetivo en esta memoria es obtener relaciones entre las distintas clases de estructuras doblemente casi-hermíticas a partir de condiciones en su curvatura. Para ello, será de vital importancia el uso intensivo de las fórmulas de Bochner asociadas.

De una forma más precisa, el contenido de esta memoria se estructura de la siguiente manera: en el Capítulo 1 presentamos una serie de conceptos preliminares necesarios para facilitar la lectura del trabajo de tal forma que resulte auto-contenido en la medida de lo posible. Desarrollamos algunos aspectos básicos referentes a las teorías de representaciones y estructuras casi-hermíticas, que serán empleados en el Capítulo 2 donde se establecen las fórmulas de Weitzenbock y de Bochner. En especial la fórmula de Bochner asociada a la 2-forma de Kähler de una estructura casi-hermítica dada por (2.9) será una herramienta esencial en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 3 presentamos las estructuras doblemente casi-hermíticas, cuyo estudio es el objetivo real de esta memoria. Además de fijar la notación a utilizar, presentamos una serie de ejemplos, entre los que destacamos la clasificación de estructuras doblemente Kähler invariantes a la izquierda sobre grupos de Lie 4-dimensionales:

Teorema 3.2.3 *Sea (g, J, J') una estructura doblemente Kähler invariante a la izquierda en un grupo de Lie 4-dimensional G. Entonces el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = Lie(G)$ ha de ser isomorfa a una de las siguientes:*

1) $\mathfrak{g} = \{X, Y, Z, T\}$, *donde*

$$\begin{aligned} [X, Y] &= aX + bY \\ [Z, T] &= cZ + dT \end{aligned}$$

2) $\mathfrak{g} = \{X, Y, Z, T\}$, *donde*

$$\begin{aligned} [X, T] &= aY \\ [Y, T] &= -aX \\ [Z, T] &= bZ \end{aligned}$$

3) $\mathfrak{g} = \{X, Y, Z, T\}$, *donde*

$$\begin{aligned} [X, Z] &= aY & \qquad [X, T] &= bY \\ [Y, Z] &= -aX & \qquad [Y, T] &= -bX \\ [Z, T] &= -\tfrac{cb}{a} Z + cT \end{aligned}$$

El objetivo del Capítulo 4 es presentar condiciones en la curvatura de una variedad doblemente casi-hermítica que permitan garantizar que su estructura se corresponde con una doblemente Kähleriana. Analizamos este problema para las distintas clases de estructuras consideradas en el capítulo 3, obteniendo, entre otras las siguientes:

Teorema 4.2.1 *Sea (M^4, g, J, J') una variedad doblemente almost-Kähler. Si la curvatura seccional es no negativa, entonces (g, J, J') es una estructura doblemente Kähler sobre M.*

Teorema 4.4.1 *Sea (M^4, g, J, J') una variedad compacta doblemente compleja. Si la curvatura seccional es no positiva, entonces (g, J, J') es una estructura doblemente Kähler sobre M.*

Capítulo 1

Preliminares

Comenzaremos este capítulo dando una serie de definiciones que serán necesarias a lo largo del trabajo. Para detalles y más referencias nos remitimos a textos básicos de Geometría Diferencial como [6] y [16]. Los pormenores de la sección dedicada a fibrados se pueden consultar en [15].

1.1. Conceptos previos

Sea V un espacio vectorial y denotamos con $\bigotimes^p V$ el conjunto de los p–tensores y con $\bigwedge^p V$ el conjunto de los p-tensores alternantes. Se define la *aplicación alternante*

$$alt : \bigotimes^p V \quad \longrightarrow \quad \bigwedge^p V$$

como

$$alt(\xi) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} sgn(\sigma)\sigma\xi$$

donde S_p es el conjunto de todas las permutaciones de p-índices y $sgn(\sigma)$ denota el signo de la permutación $\sigma \in S_p$.

Es claro que $alt^2 = alt$, más aún, $alt(\xi) = \xi$ si y sólo si $\xi \in \bigwedge^p$. Además, si $\alpha \in \bigwedge^p, \beta \in \bigwedge^q$ se define el *producto exterior* como $\alpha \wedge \beta = alt(\alpha \otimes \beta)$.

Sea M una variedad diferenciable, denotamos por $\bigwedge^p(M)$ al conjunto de las p–formas. Definimos la *aplicación diferencial* $d : \bigwedge^p(M) \longrightarrow \bigwedge^{p+1}(M)$ como aquella determinada por las propiedades siguientes:

$$\begin{array}{ll} a) & d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{deg\,\alpha}\alpha \wedge d\beta \\ b) & d^2 = 0 \\ c) & df(X) = X(f), \text{ para todo campo de vectores } X \in \mathfrak{X}(M) \end{array}$$

Sea (M^n, g) una variedad de Riemann de dimensión n, siendo g su tensor métrico de tipo (0,2) (i.e., un campo de tensores simétrico y definido positivo). La *conexión de Levi–Civita* asociada se denotará por ∇ y viene dada por la fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \ & \frac{1}{2}\{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ & +g(X,[Z,Y]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\} \end{aligned}$$

donde X, Y, Z son campos de vectores en M.

Una de las consecuencias de la existencia de una métrica de Riemann es la posibilidad de identificar campos de tensores y 1–formas mediante los isomorfismos musicales. Así, el gradiente de una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como $\nabla f =: df^\sharp$, donde $\sharp : T^*M \longrightarrow TM$ es el isomorfismo correspondiente a levantar índices. El gradiente está caracterizado por $g(\nabla f, X) = X(f)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Además, pensando la conexión de Levi–Civita como una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \bigwedge^1(M) \otimes \mathfrak{X}(M)$ podemos describirla del siguiente modo:

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{X}(M)$ y $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ su base dual, entonces

$$\nabla = \sum_i \omega_i \otimes \nabla_{e_i}$$

El proceso de derivación dado por la conexión de Levi–Civita puede extenderse a objetos más complejos que los campos de vectores. Concretamente, a nosotros nos interesará poder derivar campos de tensores. Así, si $\phi \in \bigwedge^p(M)$, entonces $\nabla\phi \in \bigwedge^1(M) \otimes \bigwedge^p(M)$ está definida del siguiente modo:

$$(\nabla_Y \phi)(X_1, \ldots, X_p) = \nabla_Y \phi(X_1, \ldots, X_p) - \sum_i \phi(X_1, \ldots, \nabla_Y X_i, \ldots, X_p)$$

Lema 1 *Sea ϕ una p–forma en M. Entonces se tiene que*

$$d\phi = alt(\nabla\phi)$$

Demostración.
Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal en $m \in M$, $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ su base dual. Veamos que

$$d\phi = \sum_i \omega_i \wedge \nabla_{e_i}\phi$$

Sea $\phi = f_I dx_I$, donde $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$. De este modo

$$d\phi = df_I \wedge dx_I = \frac{\partial f_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$$

Por otra parte

$$\sum_i \omega_i \wedge \nabla_{e_i}\phi = \sum_i dx_i \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(f_I dx_I) = \sum_i dx_i \wedge \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_I$$

y el resultado se sigue comparando las dos expresiones anteriores. □

Sea V un espacio vectorial de dimensión n dotado de un producto interior $\langle\ ,\ \rangle$. Definimos la aplicación *producto interior*, denotada por int, como

$$int : V \otimes \bigwedge^p(V) \quad \longrightarrow \quad \bigwedge^{p-1}(V)$$

de tal forma que:
i) Si $p = 1,\ v \otimes \omega \mapsto \omega(v)$
ii) Si $p > 1$ se extiende como anti–derivación

$$\begin{aligned} int(v \otimes \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p) &= \omega_1(v)\, \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_p - \omega_2(v)\, \omega_1 \wedge \hat{\omega}_2 \wedge \ldots \wedge \omega_p + \\ &\quad + \ldots \pm \omega_p(v)\, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \hat{\omega}_p \\ &= \sum_j (-1)^{j+1} \omega_j(v)\ \ \omega_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \ldots \wedge \omega_p \end{aligned}$$

El isomorfismo existente entre campos de vectores y 1–formas en variedades Riemannianas nos permite extender la definición de producto interior a

$$int : V^* \otimes \bigwedge^p(V^*) \longrightarrow \bigwedge^{p-1}(V^*)$$

y, de esta forma, podemos definir

Definición 1 Sea (M^n, g) una variedad n–dimensional. Definimos el operador *coderivada*

$$\delta : \bigwedge^p(M) \longrightarrow \bigwedge^{p-1}(M)$$

como:

$$\delta\phi = -int(\nabla\phi) = -\sum_i int_{e_i}(\nabla_{e_i}\phi)$$

donde $int_v\phi = int(v \otimes \phi)$

A continuación veremos la definición del operador estrella de Hodge, el cual nos va a resultar de mucha utilidad a lo largo del trabajo.
La métrica Riemanniana $\langle\, ,\, \rangle$ de una variedad puede extenderse al espacio de p–formas, definiendo su producto interior $\langle\langle\, ,\, \rangle\rangle$ como

$$\langle\langle X_1 \wedge \ldots \wedge X_p, Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_p \rangle\rangle = \det \begin{pmatrix} \langle X_1, Y_1\rangle & \langle X_1, Y_2\rangle & \cdots & \langle X_1, Y_p\rangle \\ \langle X_2, Y_1\rangle & \langle X_2, Y_2\rangle & \cdots & \langle X_2, Y_p\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle X_p, Y_1\rangle & \langle X_p, Y_2\rangle & \cdots & \langle X_p, Y_p\rangle \end{pmatrix}$$

Así pues, definimos el *operador estrella de Hodge*, $*$, como la aplicación

$$* : \bigwedge^p \longrightarrow \bigwedge^{n-p}$$

construida de la siguiente manera. Dada una base ortonormal de V positivamente orientada $\{e_1, \ldots, e_n\}$, entonces

$$(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) \wedge *(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Ahora puede probarse que el operador $*$ verifica:

$$*^2 = (-1)^{p(n-p)}$$
$$\alpha \wedge *\beta = \langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle \; e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \quad \text{para cualesquiera p–formas } \alpha, \beta.$$

Aplicando las definiciones anteriores tenemos

Lema 2 *Los operadores diferencial exterior, coderivada y estrella de Hodge están relacionados como:*

$$\delta \;=\; \pm * d *$$

Definición 2 Sea (M^n, g) una variedad de Riemann n–dimensional. Definimos el *laplaciano* Δ como el operador $\Delta = d\delta + \delta d$ actuando sobre p–formas.

Lema 3 *Sea (M, g) una variedad de Riemann compacta, entonces se verifica*

$$\int_M \langle\langle \delta\alpha, \beta \rangle\rangle = \int_M \langle\langle \alpha, d\beta \rangle\rangle$$

para cualesquiera p–formas α, β en M.

Demostración.
Mediante un cálculo directo, utilizando las propiedades anteriores, se tiene:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_M \langle\langle \delta\alpha, \beta \rangle\rangle &= \pm \textstyle\int_M \langle\langle *d*\alpha, \beta \rangle\rangle = \pm \textstyle\int_M *(*d*\alpha) \wedge \beta \\ &= \pm \textstyle\int_M (d*\alpha) \wedge \beta \\ &= \pm \textstyle\int_M [d(*\alpha \wedge \beta) \pm *\alpha \wedge d\beta] = \textstyle\int_M *\alpha \wedge d\beta \\ &= \textstyle\int_M \langle\langle \alpha, d\beta \rangle\rangle \qquad \square \end{aligned}$$

Como consecuencia inmediata se tiene que

$$\int_M \Delta f = 0 \tag{1.1}$$

para toda función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en una variedad compacta, ya que

$$\int \Delta f = \int \delta df = \int \langle\langle df, d(1)\rangle\rangle = 0$$

A raiz de estos últimos resultados se obtienen obstrucciones a la existencia de funciones armónicas no constantes. Además, el Teorema de Hodge, que establece que cada clase de cohomología tiene un representante armónico, guarda una estrecha relación con los conceptos anteriores.

Observación 4 Sea ahora V un espacio vectorial n–dimensional dotado de un producto interior g. Podemos establecer un isomorfismo canónico entre $\bigwedge^2 V^*$ y los endomorfismos antisimétricos de V, $\bigwedge^2 V^* \longrightarrow \{T \in End(V)/g(Tu, v) = -g(u, Tv)\}$, de la siguiente manera:

$$T \to \alpha(X, Y) := g(TX, Y)$$

y reciprocamente

$$\alpha = \omega_i \wedge \omega_j \to T = \begin{cases} T(e_i) = e_j \\ T(e_j) = -e_i \\ T(e_k) = 0 \quad \forall k \neq i, j \end{cases}$$

Como además End(V) actúa sobre $\bigwedge^p(V^*)$, entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcll} End(V) \times V^* & \longrightarrow & V^* & \\ (T, \omega) & \mapsto & T \cdot \omega & \text{donde} \quad (T \cdot \omega)(v) = -\omega(Tv), \ \text{si p=1} \end{array}$$

extendiéndose a las formas de orden superior como derivación:

$$T \cdot \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p = \sum_j \omega_1 \wedge \ldots \wedge T \cdot \omega_j \wedge \ldots \wedge \omega_p$$

Vía la identificación de $\bigwedge^2 V^*$ con un subespacio de $End(V)$, tenemos que $\bigwedge^2 V^*$ actúa en $\bigwedge^p(V^*)$ de la siguiente manera

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \cdot \phi = -\omega_1 \wedge int_{e_2}\phi + \omega_2 \wedge int_{e_1}\phi \tag{1.2}$$

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, (M^n, g) una variedad de Riemann n–dimensional. Se define el *tensor curvatura de Riemann* , usando el siguiente convenio para el signo, por:

$$\begin{array}{rcl} R_{XY}:\mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ Z & \mapsto & R_{XY}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \end{array}$$

para todo X, Y, Z campos de vectores sobre M.

Observación 5 Sea R el tensor curvatura de una variedad de Riemann (M^n, g). Se verifica que

$$R \in \bigwedge^2(M) \otimes End(TM) \subset S^2(\bigwedge^2(M) \otimes \bigwedge^2(M))$$

Si escribimos el tensor R en coordenadas tenemos la siguiente expresión:

$$R = \sum_{i<j} \omega_i \wedge \omega_j \otimes R_{ij} \quad \text{donde } R_{ij} \text{ es un endomorfismo antisimétrico.}$$

Observación 6 Sea ϕ una p–forma en una variedad de Riemann, entonces el tensor curvatura actúa sobre ϕ del siguiente modo

$$(R_{XY}\phi)(Z_1, \ldots, Z_p) = -\sum_j \phi(Z_1, \ldots, R_{XY}Z_j, \ldots, Z_p)$$

Además, este tensor satisface las siguientes identidades:

$$R_{XY}Z = -R_{YX}Z, \tag{1.3}$$

$$R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0, \tag{1.4}$$

$$(\nabla_X R_{YZ})W + (\nabla_Y R_{ZX})W + (\nabla_Z R_{XY})W = 0, \tag{1.5}$$

para todo X, Y, Z, W campos de vectores sobre la variedad M. Nos referiremos a (1.4) y (1.5) como *la primera y la segunda identidad de Bianchi* respectivamente. A veces, denotaremos $R_{XY}Z$ por $R(X, Y)Z$. También escribiremos el tensor curvatura como un campo de tensores de tipo (0,4), definido por la expresión:

$$R(X, Y, Z, W) = g(R_{XY}Z, W),$$

que satisface, además de las identidades que se deducen de modo inmediato de las que verifica $R_{XY}Z$, las siguientes:

$$\begin{array}{rcl} R(X, Y, Z, W) & = & -R(X, Y, W, Z) \\ R(X, Y, Z, W) & = & R(Z, W, X, Y). \end{array}$$

El tensor curvatura de Riemann de una variedad parece un concepto abstracto un tanto arbitrario. Sin embargo, su significado geométrico aparece al estudiar la curvatura seccional. Sea m un punto de la variedad M y denotemos por T_mM el espacio tangente de M en m. Dado un subespacio bidimensional π de T_mM, se define la curvatura seccional de π como el número real

$$K(\pi) = K(X,Y) = \frac{R(X,Y,Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

donde X e Y son dos vectores linealmente independientes de T_mM que generan π. De las propiedades del tensor curvatura enunciadas anteriormente se sigue que $K(\pi) = K(X,Y)$ es independiente de la elección de la base $\{X,Y\}$ de π.

Como ya dijimos, el concepto de curvatura seccional permite interpretar el significado geométrico del tensor curvatura de Riemann y, además, el conocimiento de la curvatura seccional de cada plano contenido en el espacio tangente en cada punto de la variedad determina completamente el tensor curvatura R.

Pasamos ahora a definir dos contracciones importantes del tensor curvatura, que son el tensor de Ricci y la curvatura escalar. El *tensor de Ricci* Ric está definido por

$$Ric(X,Y) = tr\{Z \rightsquigarrow R_{ZX}Y\},$$

y la *curvatura escalar* s está dada por

$$s = tr(Ric).$$

1.2. Representaciones

Sea G un grupo y V un espacio vectorial (real o complejo). Llamaremos *grupo lineal de* V a las aplicaciones lineales inversibles de V en V.

$$GL(V) = \{T : V \longrightarrow V / T \;\; es \;\; lineal \;\; e \;\; inversible\}$$

Una *representación (lineal) de* G es un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ para algún espacio vectorial V. A las representaciones lineales de G las notaremos a partir de ahora por (V,ρ). Sea (V,ρ) una representación de G. Sea W un subespacio vectorial de V. Decimos que W es un *subespacio invariante* si se transforma en si mismo bajo la acción del grupo, i.e., $\rho(g)(w) \in W$ para cualesquiera $g \in G$, $w \in W$.

Definición 3 Sean (V,ρ) y (W,σ) dos representaciones de G y $T : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Decimos que T es *G–equivariante* si conmuta con las dos acciones, esto es, si

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \rho(g)\uparrow & & \uparrow\sigma(g) \\ V & \xrightarrow{T} & W \end{array}$$

es un diagrama conmutativo para todo $g \in G$.

Definición 4 Dos representaciones son *isomorfas* o *equivalentes* si existe un isomorfismo equivariante entre ellas.

Construcciones.
Sean (V_1, ρ_1) y (V_2, ρ_2) dos representaciones lineales de un grupo G.

1) Es posible definir una representación $\rho_1 \oplus \rho_2$ del espacio $V_1 \bigoplus V_2$ de la siguiente manera
$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1, v_2) := (\rho_1(g)v_1, \rho_2(g)v_2)$$

2) Así mismo tenemos la representación $\rho_1 \otimes \rho_2$ del espacio $V_1 \bigotimes V_2$ dada por
$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_1 \otimes v_2) := \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2$$

3) En el espacio V_1^* definimos la representación
$$(\rho_1^*(g)\omega)v_1 := \omega(\rho_1(g)v_1)$$

4) De igual forma, sobre el espacio $Hom(V_1, V_2)$, definimos la representación ρ tal que
$$\rho(g)T := \rho_2(g)^{-1} T \rho_1(g)$$

Definición 5 Una representación (V, ρ) es *irreducible* si no hay subespacios propios invariantes distintos de 0.

Definición 6 Una representación (V, ρ) es *completamente reducible* si es isomorfa a una suma $(\bigoplus_j V_j, \oplus \rho_j)$ donde cada (V_j, ρ_j) es irreducible.

Por simplicidad, a partir de ahora asumiremos que $\rho(g)v = gv$ para cualesquiera $g \in G$, $v \in V$, siendo (V, ρ) una representación dada.

Ejemplo 7 El hecho de que una representación no sea irreducible no significa que forzosamente sea completamente reducible. Así, por ejemplo, supongamos que $G = \mathbb{Z}$ y que $V = \mathbb{R}^2$. Tenemos la acción
$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathbb{Z} & \longrightarrow & GL(\mathbb{R}^2) \\ n & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta acción no es irreducible ya que el eje OX es invariante. Además, esta acción tampoco es completamente reducible ya que la matriz anterior no es diagonalizable.

Teorema 8 *Toda representación de dimensión finita de un grupo finito G es completamente reducible.*

Demostración.
Veamos en primer lugar que la existencia de una representación de un grupo finito G en un espacio vectorial dotado de un producto interior $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ permite definir en V un nuevo producto escalar $\langle\langle\, ,\, \rangle\rangle$ que es invariante por G

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle = \sum_{g\in G} \langle gu, gv\rangle$$

Ahora, si (V, ρ) no es irreducible, entonces existe un subgrupo no trivial $W \neq 0$, $W \subset V$ invariante por la acción de G. Sea ahora $W^{\perp}$ el complemento $\langle\langle\, ,\, \rangle\rangle$–ortogonal de W en V y $W^{\perp}$ también es invariante.

Sea $u \in W^{\perp}$ y $g \in G$, entonces para cada $w \in W$

$$\langle\langle gu, w\rangle\rangle = \langle\langle u, g^{-1}w\rangle\rangle = 0$$

con lo que se obtiene que $(V\rho) \cong (W \oplus W^{\perp}, \rho_{|W} \oplus \rho_{|W^{\perp}})$ □

El resultado del teorema anterior puede ser extendido a la situación correspondiente a grupos topológicos compactos mediante un proceso análogo. La principal diferencia estriba en la construcción del producto interior invariante, que en esta ocasión se obtiene a partir de las medidas de Haar bi–invariantes (cuya existencia está garantizada sobre grupos topológicos compactos). estas medidas verifican

$$\begin{array}{l} \mu(G) = 1 \\ \mu(A) = \mu(Ag) = \mu(gA) \end{array}$$

esto es, la medida es invariante por traslaciones. Entonces se define el producto escalar en V como

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle = \int_G \langle gu, gv\rangle d\mu$$

y se tiene

Teorema 9 *Toda representación de dimensión finita de un grupo topológico compacto G es completamente reducible.*

A continuación estudiaremos el comportamiento de las aplicaciones G–equivariantes bajo determinadas condiciones sobre la representación del grupo G.

Lema 10 *(Lema de Schur)*
Sean V, W dos representaciones irreducibles de G. Si $T : V \longrightarrow W$ G–equivariante, entonces T es isomorfismo ó $T \equiv 0$.

Demostración.
Teniendo en cuenta que $\ker T$ e $Im\, T$ son ambos invariantes, entoces ha de verificarse una de las dos posibilidades siguientes

a) $\ker T = 0$ e $Im\, T = W$, con lo que T es un isomorfismo

b) $\ker T = V$ e $Im\, T = 0$, de donde se obtiene que $T \equiv 0$ $\square$

Lema 11 *(Lema de Schur complejo)*
Sea V un espacio vectorial irreducible, complejo y de dimensión finita.Si $T : V \longrightarrow V$ es una aplicación G–equivariante, entonces $T \equiv \lambda I$

Demostración.
Sea λ un autovalor de T. Su autoespacio asociado V_λ es invariante. Por tanto, al ser V irreducible $V_\lambda = V$ lo que implica que $T = \lambda I$. $\square$

Corolario 12 *Sean V, W dos G–módulos complejos, donde V es irreducible y de dimensión finita. Supongamos que ambos están equipados con productos hermitianos $(V, \langle\, , \,\rangle_V)$, $(W, \langle\, , \,\rangle_W)$ y que dichos productos son preservados por G.*

Si $T : V \longrightarrow W$ es una aplicación G–equivariante, entonces es una homotecia, esto es, existe $\lambda \geq 0$ tal que

$$\| Tv \|_W^2 = \lambda \| v \|_V^2 \quad \textit{para todo } v \in (V, \langle\, , \,\rangle_V).$$

Demostración.
Sea T^* la aplicación adjunta de T, esto es

$$\langle T^* w, v\rangle_V = \langle w, Tv\rangle_W$$

Entonces T^* es G–equivariante ya que

$$\begin{aligned}\langle T^*(\rho(g)w), v\rangle_V &= \langle \rho(g)w, Tv\rangle_W = \langle w, \rho(g)^{-1}Tv\rangle_W = \langle w, T(\rho(g)^{-1}v)\rangle_W \\ &= \langle T^*w, \rho(g)^{-1}v\rangle_V = \langle \rho(g)T^*w, v\rangle_V\end{aligned}$$

Si ahora tomamos la aplicación $T^*T : V \longrightarrow V$, por el anterior lema podemos afirmar que existe $\lambda \geq 0$ tal que $T^*Tv = \lambda v$ para cualquier $v \in (V, \langle\, , \,\rangle)$. Por tanto, podemos concluir que $\| Tv \|_W^2 = \langle T^*Tv, v\rangle_V = \lambda \| v \|_V^2$ $\square$

Corolario 13 *Sean V, W dos G–módulos, donde V es un espacio vectorial real e irreducible para G. Supongamos que ambos están dotados de un producto interior $(V, \langle\, , \,\rangle_V)$, $(W, \langle\, , \,\rangle_W)$ y que G preserva dichos productos.*

Si $T : V \longrightarrow W$ es una aplicación G–equivariante, entonces existe $a \geq 0$ tal que

$$\| Tv \|_W^2 = \lambda \| v \|_V^2 \quad \textit{para todo } v \in (V, \langle\, , \,\rangle_V).$$

Demostración.
La misma prueba usada en el corolario precedente nos sirve para probar que la aplicación adjunta $T^* : W \longrightarrow V$ es G–equivariante. Por tanto, la aplicación $T^*T : V \longrightarrow V$ también es G–equivariante.
Podemos afirmar que la aplicación T^*T es diagonalizable ya que es simétrica.
Sea $a \geq 0$ un autovalor y V_a el autoespacio asociado. Entonces $V_a \neq 0$ es irreducible y, por ser V irreducible $V_a = V$ y $T^*T = aI$ □

El siguiente lema nos permitirá afirmar que, bajo ciertas condiciones, una descomposición en subespacios irreducibles es ortogonal, lo que será de gran trascendencia a la hora de aplicar las fórmulas de Bochner.

Lema 14 *Sea $(W, \langle\, ,\, \rangle_W)$ una representación de G tal que G preserva $\langle\, ,\, \rangle_W$. Supongamos que $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$ donde W_j es irreducible. Si $W_i \ncong W_j$, entonces $W_i \perp W_j$.*

Demostración.
Sea $u \in W_i$, entonces definimos $\omega_u \in W_j^*$ de la siguiente forma $\omega_u(v) = \langle u, v\rangle_W$. Por tanto podemos definir la proyección ortogonal $T : W_i \longrightarrow W_j$ que es G–equivariante. Por el lema de Schur podemos concluir que $T = 0$ y por tanto $W_i \perp W_j$ □

1.3. Fibrados Principales

Un *fibrado principal con grupo G* es un fibrado(localmente trivial)

$$P \xrightarrow{\pi} M$$

tal que cada fibra $\pi^{-1}(x)$ es difeomorfa al grupo de Lie G y donde G actúa por la derecha en P.

Si $e \in P$ y $g \in G$ notamos la acción como $e \cdot g$ tal que las órbitas de la acción son las fibras y la acción en las fibras es la multiplicación del grupo.

Ejemplo 15 Sea M^n una variedad diferenciable. Tomamos $FM = \sqcup_p F_pM$ donde $F_pM = \{\beta/\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $T_pM\}$. Entonces

$$\begin{array}{c} FM \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$$

es un fibrado principal para el grupo $GL_n(\mathbb{R})$. Definimos la acción como sigue

$$\beta \in FM \;\; g \in Gl_n \Rightarrow \beta \cdot g = (v_1, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = (v_k g_{k1}, \ldots, v_k g_{kn})$$

A este fibrado lo conocemos como el *fibrado de referencias.*

Definición 7 Sea G un subgrupo de $Gl_n(\mathbb{R})$. Una *G–estructura* en M^n es un G–fibrado principal $P \subset FM$.

Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un G–fibrado principal y denotamos con (V, ρ) una representación de G de dimensión finita, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$. La aplicación $E = P \times_\rho V \longrightarrow M$, donde $P \times_\rho V$ es el espacio cociente de $P \times V$ bajo la relación de equivalencia $(x, v) \sim (x.g, \rho(g^{-1})v) \quad g \in G$, es un fibrado vectorial con fibra V denominado *fibrado vectorial asociado.*

Ejemplo 16 Sea $FM \xrightarrow{\pi} M$ el fibrado de referencias de una variedad M^n y tomemos $V = \mathbb{R}^n$ con la representación identidad de $Gl(\mathbb{R}^n)$. De esta forma el fibrado vectorial asociado es $FM \times_\rho \mathbb{R}^n = TM$, el *fibrado tangente* a M.

Ejemplo 17 Partiendo de nuevo del fibrado de referencias $FM \xrightarrow{\pi} M$, pero tomando ahora $V = \bigwedge^2 \mathbb{R}^n$ junto con la representación

$$\begin{array}{rcl} \sigma : Gl(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & Gl(\bigwedge^2 \mathbb{R}^n) \\ T & \mapsto & [u \wedge v \mapsto Tu \wedge Tv] \end{array}$$

el fibrado vectorial asociado resultante será $FM \times_\sigma \bigwedge^2 \mathbb{R}^n = \bigwedge^2 TM$

Observación 18 Todos los fibrados vectoriales se obtienen a partir de alguna representación. A un subespacio invariante W de una representación le corresponde un subfibrado vectorial.

$$\rho : Gl_n(\mathbb{R}) \longrightarrow Gl(V) \qquad W \subset V$$

Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrado. Llamaremos *sección* a una aplicación $\phi : M \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ \phi = Id_M$.

Teorema 19 *Sea $P \xrightarrow{\pi} M$ un G–fibrado principal. Entonces P es trivial si y sólo si P admite una sección.*

Demostración.
Si P es trivial, esto es, $P \simeq M \times G$, entonces claramente admite una sección. Reciprocamente, supongamos que P admite una sección ϕ. Entonces tenemos

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{\Psi} & M \times G \\ \phi \uparrow\downarrow & & \downarrow \\ M & & M \end{array}$$

donde la aplicación Ψ está definida como

$$\Psi(x, g) = \phi(x) \cdot g$$

Ahora se sigue que Ψ es un isomorfismo. $\square$

A fin de caracterizar las secciones de un fibrado vectorial asociado, será útil el resultado del siguiente teorema. A tal efecto, diremos que una *función* es *G–equivariante* si

$$f(x \cdot g) = \rho(g^{-1})f(x) \text{ para todo } g \in G$$

Teorema 20 *Existe una biyección entre las secciones del fibrado vectorial asociado $P \times_\rho V \longrightarrow M$ y las funciones $f : P \longrightarrow V$ G–equivariantes.*

Demostración.
Supongamos que tenemos ϕ una sección del fibrado vectorial $P \times_\rho V \xrightarrow{q} M$. Por otra parte tenemos nuestro fibrado $P \xrightarrow{\pi} M$. Si tomamos un elemento $\beta \in P$, entonces $\pi(\beta) \in M$ y por tanto $\phi(\pi(\beta)) = [(\beta \cdot g, w)] = [(\beta, \rho(g^{-1})w)]$.
Llamamos $v_\beta = \rho(g^{-1})w$ y definimos

$$\begin{array}{rcl} f : P & \longrightarrow & V \\ \beta & \mapsto & f(\beta) = v_\beta \end{array}$$

Veamos que este v_β es único.

Si $[(\beta, v_\beta)] = [(\beta, v'_\beta)]$ entonces, por la definición de la relación de equivalencia, $v_\beta = v'_\beta$.
Se puede demostrar facilmente que la aplicación f es G–equivariante.
Sea ahora

$$f : P \longrightarrow V \;\; tal \;\; que \;\; f(x \cdot g) = \rho(g^{-1})f(x)$$

definimos

$$\sigma : M \longrightarrow P \times_\rho V \;\; tal \;\; que \;\; \sigma(p) = [(\beta, f(\beta))] \;\; con \;\; \pi(\beta) = p$$

A continuación veremos un sencillo ejemplo de aplicación G–equivariante que, por el teorema previo, es lo mismo que tener una sección de un fibrado asociado.

Ejemplo 21 Sea $P \longrightarrow M$ un G–fibrado y sea $\rho : G \longrightarrow Gl(V)$ una representación de G con un punto fijo. Sea v_0 tal que $\rho(g)v_0 = v_0$, entonces

$$\begin{array}{rcl} f : P & \longrightarrow & V \\ \beta & \mapsto & v_0 \end{array}$$

es una aplicación G–equivariante.

El problema de la reducción del grupo de estructura que ahora nos planteamos es el siguiente. Sea $P \longrightarrow M$ un G–fibrado principal. Lo que nos interesa estudiar es si dado H un subgrupo de G existe un H–fibrado principal $Q \subset P \longrightarrow M$. En el caso de que este subfibrado exista, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 22 *Sea H un subgrupo de G y notamos por $P \longrightarrow M$ y $Q \longrightarrow M$ un G–fibrado y un H–fibrado respectivamente con $Q \subset P$. Sea $\rho : G \longrightarrow Gl(V)$ una representación del grupo G, entonces:*

$$\begin{array}{ccc} P \times_\rho V & & Q \times_{\rho_{|H}} V \\ \downarrow & \cong & \downarrow \\ M & & M \end{array}$$

La existencia de secciones para un cierto fibrado asociado permite caracterizar la reduccibilidad del grupo de estructura como se pone de manifiesto en el siguiente teorema:

Teorema 23 *[14] Sea $P \longrightarrow M$ un G–fibrado principal y $H \prec G$ un subgrupo. Entonces el grupo de estructura admite una reducción a H si y sólo si el fibrado asociado $P \times_\pi G/H$ admite una sección, donde $\pi : G \longrightarrow G/H$ es la proyección.*

Corolario 24 *Sea $P \longrightarrow M$ un G–fibrado principal y (V, ρ) una representación de G. Tomamos $\phi_0 \in V$ y llamamos $H = stab(\phi_0) = \{g \in G/\rho(g)\phi_0 = \phi_0\}$.*
Supongamos que existe $\phi : P \longrightarrow V$ G–equivariante tal que para cada $\beta \in P$ exista $g_\beta \in G$ con $\phi(\beta \cdot g_\beta) = \phi_0$. Entonces P reduce grupo a H.

Demostración.
Por el teorema 23 sólo habría que probar que el fibrado $P \times_\pi G/H$ admite una sección, pero por el teorema 20 esto es equivalente a encontrar una una función $f : P \longrightarrow G/H$ que sea G–equivariante.
Sea
$$\begin{array}{rcl} f : P & \longrightarrow & G/H \\ \beta & \mapsto & g_\beta H \end{array}$$
Veamos que esta aplicación f está bien definida, es decir que g_β es única.
Supongamos que existe $k \in G$ tal que $\phi(\beta \cdot k) = \phi_0$. Por tanto
$$\rho(g_\beta^{-1} k)\phi_0 = \rho(g_\beta^{-1} k)\phi(\beta \cdot k) = \phi(\beta \cdot k k^{-1} g_\beta) = \phi_0$$
y entonces $g_\beta^{-1} k \in H$ y la aplicación ϕ está bien definida.
Ahora habría que verificar que esta función así definida es G–equivariante. Para ello tenemos que probar que $f(\beta \cdot k) = k^{-1} f(\beta) = k^{-1} g_\beta H$ (i.e. que $g_{\beta \cdot k} = k^{-1} g_\beta$).
Pero
$$\phi((\beta \cdot k) \cdot g_{\beta \cdot k}) = \phi(\beta \cdot k g_{\beta \cdot k}) = \phi_0 = \phi(\beta \cdot g_\beta) = \phi(\beta \cdot k k^{-1} g_\beta) = \phi((\beta \cdot k) \cdot k^{-1} g_\beta)$$
Por tanto se verifica que $f(\beta \cdot k) = k^{-1} g_\beta H$ □

Corolario 25 *Sea*
$$\begin{array}{cl} FM & \\ \downarrow & \quad \textit{Fibrado de referencias} \\ M^n & \end{array}$$
Sea ϕ un tensor (i.e. una sección de un fibrado vectorial asociado a alguna representación V de $Gl_n(\mathbb{R})$).
Sea $\phi_0 \in V$ y $stab(\phi_0) = H$.
Si $\forall p \in M$, con respecto a alguna referencia, $\phi_p = \phi_0 \Rightarrow \phi$ nos da una $H - estructura$.

Ejemplo 26 Sea M^n una variedad, siempre admite métricas riemannianas.
Sea g una métrica riemanniana en M^n.
g es una sección del fibrado

$$\begin{array}{c} S^2(TM) \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

que es un fibrado vectorial con la representación $\rho : Gl_n(\mathbb{R}) \longrightarrow Gl(S^2(\mathbb{R}^n))$
$stab(g_0) = O_n$.
Por tanto una métrica riemanniana g es una $O_n - estructura$

1.4. Variedades casi–hermíticas

Sea ahora (M^n, g) una variedad de Riemann n–dimensional. Decimos que J es una *estructura casi–compleja* si y sólo si J es un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ tal que $J^2 = -Id$.

Si M es una variedad compleja siempre posee una estructura casi compleja, ya que si tenemos las coordenadas complejas $(z^1, \ldots, z^n)$ donde $z^k = x^k + iy^k$, podemos construir la siguiente estructura casi–compleja J:

$$J\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial y^k} \qquad\qquad J\frac{\partial}{\partial y^k} = -\frac{\partial}{\partial x^k}$$

Sin embargo, no toda estructura casi–compleja proviene de una estructura compleja, siendo posible probar que la condición necesaria y suficiente para que ello ocurra es la anulación del tensor de Nijenhuis, i.e. que $[J, J] = 0$ siendo

$$[J, J](X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$$

Decimos que una métrica Riemanniana es *casi–hermítica* (o *adaptada* a una estructura casi–compleja J) si $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para cualesquiera X, Y campos de vectores sobre la variedad M.

Notar que siempre podemos encontrar una métrica adaptada sobre cualquier variedad casi–compleja (M, J) ya que, si h es una métrica arbitraria, entonces

$$g(X, Y) = \frac{1}{2}\{h(X, Y) + h(JX, JY)\}$$

es una métrica adaptada. Si tenemos una variedad (M, g, J) donde g es una métrica adaptada y J es una estructura casi–compleja diremos que (M, g, J) es una *variedad casi–hermítica*. Véanse, por ejemplo, [8], [23] y [27] para más información sobre estructuras casi–hermíticas.

En una variedad casi–hermítica definimos $\omega(X,Y) = g(JX,Y)$ que es una 2–forma ya que

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y) = -g(X,JY) = -g(JY,X) = -\omega(Y,X)$$

A esta 2–forma le llamaremos la *2–forma de Kähler de la variedad* o bien la *2–forma fundamental* de la variedad.

Volviendo ahora al final de la sección anterior donde tratábamos sobre la reducción del grupo de estructura, a continuación veremos como una estructura casi–compleja J es una $Gl_n(\mathbb{C}) - estructura$ mientras que si además, esta estructura casi–compleja es compatible con la métrica g, se trata de una $U_n - estructura$. Supongamos que M^{2n} tiene una estructura casi–compleja J. Entonces existe una base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de TM de tal forma que la estructura J se expresa como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así el estabilizador de J, que coincide con $Gl_n(\mathbb{C})$ es un subgrupo de Gl_{2n} que muestra como la estructura casi–compleja es una $Gl_n(\mathbb{C}) - estructura$.

Sea J una estructura casi–compleja sobre la variedad M y g su métrica adaptada tal que $g(JX,JY) = g(X,Y)$. Entonces $stab(g,J) = Gl_n(\mathbb{C}) \cap O_{2n} = U_n$. Por tanto, una estructura casi–hermítica es una $U_n - estructura$.

Estudiando la derivada de la 2–forma de Kähler de la variedad, $\nabla\omega$, se obtiene que esta toma valores en un cierto espacio vectorial W definido del siguiente modo:
Sea V un espacio vectorial real 2n–dimensional dotado de una estructura casi–compleja J y un producto interior real definido positivo $\langle\, ,\, \rangle$. Supongamos que J y $\langle\, ,\, \rangle$ son compatibles en el sentido de que $\langle Jx, Jy\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in V$. Sea V^* el espacio dual de V, y consideremos el espacio $V^* \otimes V^* \otimes V^*$. Este espacio es naturalmente isomorfo al espacio de todos los tensores covariantes trilineares en V. Sea W el subespacio de $V^* \otimes V^* \otimes V^*$ definido por

$$W = \{\alpha \in V^* \otimes V^* \otimes V^* / \alpha(x,y,z) = -\alpha(x,z,y) = -\alpha(x,Jy,Jz) \text{ para todo } x,y,z \in V\}.$$

Este espacio W ha sido analizado por A. Gray y L. Hervella obteniendo el siguiente resultado.

Teorema 27 *[11]*

Se tiene que $W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$. *Esta suma directa es ortogonal, y se preserva* *bajo la representación inducida de U_n en W. La representación inducida de U_n en W_i es irreducible. Para $n = 1$, $W = \{0\}$; para $n = 2$, $W_1 = W_3 = \{0\}$, así que $W = W_2 \oplus W_4$. Para $n = 2$, W_2 y W_4 son no triviales, y para $n \geq 3$ todos los W_i son no triviales.*

Estos subespacios aparecen reflejados en la tabla siguiente dando lugar a las distintas clases de variedades casi–hermíticas.

TABLA I - Variedades casi–hermíticas de dimensión ≥ 6

Clase	**Condiciones que la definen**
$\mathcal{K}$	$\nabla\omega = 0$
$W_1 = \mathcal{NK}$	$\nabla_X(\omega)(X,Y) = 0 \quad (\text{o } 3\nabla\omega = d\omega)$
$W_2 = \mathcal{AK}$	$d\omega = 0$
$W_3 = \mathcal{SK} \cap \mathcal{H}$	$\delta\omega = [J,J] = 0 \;$ (*o* $\nabla_X(\omega)(Y,Z) - \nabla_{JX}(\omega)(JY,Z) = \delta\omega = 0$)
W_4	$\nabla_X(\omega)(Y,Z) = -\dfrac{1}{2(n-1)}\{\langle X,Y\rangle\delta\omega(Z) - \langle X,Z\rangle\delta\omega(Y) - \langle X,JY\rangle\delta\omega(JZ) + \langle X,JZ\rangle\delta\omega(JY)\}$
$W_1 \oplus W_2 = \mathcal{QK}$	$\nabla_X(\omega)(Y,Z) + \nabla_J X(\omega)(JY,Z) = 0$
$W_3 \oplus W_4 = \mathcal{H}$	$[J,J] = 0 \quad$ (*o* $\nabla_X(\omega)(Y,Z) - \nabla_J X(\omega)(JY,Z) = 0$)
$W_1 \oplus W_3$	$\nabla_X(\omega)(X,Y) + \nabla_J X(\omega)(JX,Y) = \delta\omega = 0$
$W_2 \oplus W_4$	$\mathfrak{S}_{XYZ}\left\{\nabla_X(\omega)(Y,Z) - \dfrac{1}{n-1}\omega(X,Y)\delta\omega(JZ)\right\} = 0$
$W_1 \oplus W_4$	$\nabla_X(\omega)(X,Y) = -\dfrac{1}{2(n-1)}\{\lVert X\rVert^2\delta\omega(Y) - \langle X,Y\rangle\delta\omega(X) - \langle JX,Z\rangle\delta\omega(JX)\}$
$W_2 \oplus W_3$	$\mathfrak{S}_{XYZ}\{\nabla_X(\omega)(Y,Z) - \nabla_{JX}(\omega)(JY,Z)\} = \delta\omega = 0$
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 = \mathcal{SK}$	$\delta\omega = 0$
$W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$	$\nabla_X(\omega)(Y,Z) + \nabla_{JX}(\omega)(JY,Z) = -\dfrac{1}{n-1}\{\langle X,Y\rangle\delta\omega(Z) - \langle X,Z\rangle\delta\omega(Y) - \langle X,JY\rangle\delta\omega(JZ) + \langle X,JZ\rangle\delta\omega(JY)\}$
$W_1 \oplus W_3 \oplus W_4 = \mathcal{G}_1$	$\nabla_X(\omega)(X,Y) - \nabla_{JX}(\omega)(JX,Y) = 0$ (*o* $\langle [J,J](X,Y),X\rangle = 0$)
$W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 = \mathcal{G}_2$	$\mathfrak{S}_{XYZ}\{\nabla_X(\omega)(Y,Z) - \nabla_{JX}(\omega)(JY,Z)\} = 0$ (*o* $\mathfrak{S}_{XYZ}\langle [J,J](X,Y),JZ\rangle = 0$)
W	Sin condiciones

De entre las 16 clases anteriores, merecen especial atención las siguientes:

- *Variedades hermíticas*: la estructura casi–compleja es integrable (equivalente a la clase $W_3 \oplus W_4$).
- *Variedades simplécticas*: la 2–forma de Kähler es cerrada (equivalente a la clase W_2).
- *Variedades Kähler*: son complejas y simplécticas.

Sin embargo, la clasificación de las variedades casi–hermíticas 4–dimensionales es algo distinta, ya que $W_1 \equiv W_3 \equiv 0$, y este hecho hace que muchos de los tipos anteriormente citados se anulen, quedando sólamente 4 tipos distintos de 0. Este caso particular será de vital importancia en el posterior desarrollo del trabajo, ya que el estudio de la aplicación de las fórmulas de Bochner a variedades doblemente casi–hermíticas lo desarrrollaremos sólamente en el caso 4–dimensional. Así pues, la clasificación de variedades casi–hermíticas 4–dimensionales nos queda

TABLA II - Variedades casi–hermíticas de dimensión 4

Clase	**Condiciones que la definen**
$\mathcal{K}$	$\nabla\omega = 0$
$\mathcal{AK} = W_2$	$d\omega = 0$
$\mathcal{H} = W_4$	$[J, J] = 0$
W	Sin condiciones

Capítulo 2

Fórmulas de Bochner–Weitzenbock

El objetivo de este capítulo es obtener la fórmula de Bochner para estructuras casi–hermíticas (2.9) establecida en la sección 2.2. Dicha expresión es consecuencia de dos resultados más generales que se denominan primera fórmula de Weitzenbock (Teorema 28) y segunda fórmula de Weitzenbock (Teorema 29) establecidas para p–formas arbitrarias en la sección 2.1.

2.1. Fórmulas de Weitzenbock

Sea (M, g) una variedad de Riemann, donde ∇ es la conexión de Levi–Civita de la variedad y $R = \sum_{i<j} \omega_i \wedge \omega_j \otimes R_{ij}$ su operador curvatura. Denotamos con ∇^2 el operador derivada covariante de segundo orden definido como:

$$\nabla^2_{X,Y} := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla_X Y} \qquad \text{para cualesquiera } X, Y \text{ campos de vectores en } M$$

Teorema 28 (Primera fórmula de Weitzenbock)*[26]*
Sea ϕ una p–forma en (M, g), entonces su laplaciano verifica

$$\Delta\phi = -\nabla^2\phi + \widetilde{R}\phi \tag{2.1}$$

donde, dada $\{e_i\}$ una referencia local ortonormal y $\{w_i\}$ su dual, $\nabla^2\phi := \sum_i \nabla^2_{e_i,e_i}\phi$ y $\widetilde{R}$ es el operador curvatura dado por $\widetilde{R}\phi := \sum_{i<j} \omega_i \wedge \omega_j \cdot (R_{ij} \cdot \phi)$

Demostración.
Por la definición del laplaciano podemos escribir

$$\Delta\phi = d\delta\phi + \delta d\phi$$

Fijamos ahora un punto $m \in M$ y consideramos $\{e_i\}$ una referencia local ortonormal en un entorno del punto m. Entonces

$$\begin{aligned}
\delta d\phi &= \delta(\sum_i \omega_i \wedge \nabla_{e_i}\phi) \\
&= -\sum_{i,j} int_{e_j}[\nabla_{e_j}(\omega_i \wedge \nabla_{e_i}\phi)] \\
&= -\sum_{i,j} int_{e_j}(\omega_i \wedge \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\phi) \\
&= -\sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\phi + \sum_{i,j} \omega_i \wedge int_{e_j}(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\phi) \\
d\delta\phi &= d[-int_{e_j}(\nabla_{e_j}\phi)] \\
&= -\sum_{i,j} \omega_i \wedge \nabla_{e_i}(int_{e_j}\nabla_{e_j}\phi) \\
&= -\sum_{i,j} \omega_i \wedge int_{e_j}(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\phi)
\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\nabla^2\phi = \sum_i \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\phi$ y utilizando las identidades anteriores, resulta

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= -\nabla^2\phi - \sum_{i,j} \omega_i \wedge int_{e_j}[(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i})\phi] \\
&= -\nabla^2\phi - \sum_{i,j} \omega_i \wedge int_{e_j}(R_{ij}\cdot\phi) \\
&= -\nabla^2\phi + \sum_{i<j} \omega_i \wedge \omega_j \cdot (R_{ij}\cdot\phi)
\end{aligned}$$

□

Teorema 29 (Segunda fórmula de Weitzenbock)*[26]*
Sea ϕ una $p-forma$ cualquiera en (M,g). Se verifica la segunda fórmula de Weitzenbock

$$-\frac{1}{2}\Delta \mid \phi \mid^2 = p! \mid \nabla\phi \mid^2 + \langle \nabla^2\phi, \phi\rangle \tag{2.2}$$

Combinando las dos fórmulas de Weitzenbock (2.1) y (2.2) podemos expresar $\langle\Delta\phi,\phi\rangle$ para una una p–forma ϕ arbitraria como:

$$\begin{aligned}\langle\Delta\phi,\phi\rangle &= \langle-\nabla^2\phi+\widetilde{R}\phi,\phi\rangle\\ &= -\langle\nabla^2\phi,\phi\rangle+\langle\widetilde{R}\phi,\phi\rangle\\ &= p!\mid\nabla\phi\mid^2+\frac{1}{2}\Delta\mid\phi\mid^2+\langle\widetilde{R}\phi,\phi\rangle\end{aligned}$$

A continuación, asumiendo que la variedad M es compacta, se tiene

Corolario 30 *Sea (M,g) una variedad de Riemann compacta y ϕ una p–forma en M. Entonces*

$$\int_M\langle\widetilde{R}\phi,\phi\rangle=\int_M\left\{\mid d\phi\mid^2+\mid\delta\phi\mid^2-p!\mid\nabla\phi\mid^2\right\}\tag{2.3}$$

Demostración.
Integrando sobre M en

$$\langle\Delta\phi,\phi\rangle=p!\mid\nabla\phi\mid^2+\frac{1}{2}\Delta\mid\phi\mid^2+\langle\widetilde{R}\phi,\phi\rangle$$

y utilizando el lema 3, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_M\langle\widetilde{R}\phi,\phi\rangle &= \int_M\langle\Delta\phi,\phi\rangle-p!\int_M\mid\nabla\phi\mid^2\\ &= \int_M\langle\delta d\phi+d\delta\phi,\phi\rangle-p!\int_M\mid\nabla\phi\mid^2\\ &= \int_M\langle\delta d\phi,\phi\rangle+\int_M\langle d\delta\phi,\phi\rangle-p!\int_M\mid\nabla\phi\mid^2\\ &= \int_M\langle d\phi,d\phi\rangle+\int_M\langle\delta\phi,\delta\phi\rangle-p!\int_M\mid\nabla\phi\mid^2\\ &= \int_M\left\{\mid d\phi\mid^2+\mid\delta\phi\mid^2-p!\mid\nabla\phi\mid^2\right\}\end{aligned}$$

□

Ejemplo 31 A continuación calcularemos $\langle\widetilde{R}\phi,\phi\rangle$ para el caso en que ϕ es una 1–forma $\phi=\phi_s\omega_s$. Teniendo en cuenta que $R_{ij}=\frac{1}{2}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l$, entonces

$$\begin{aligned}R_{ij}\cdot\phi &= \frac{1}{2}R_{ijkl}(\omega_k\wedge\omega_l)\cdot(\phi_s\omega_s)\\ &= \frac{1}{2}R_{ijkl}(-\omega_k\delta_{ls}\phi_s+\omega_l\delta_{ks}\phi_s)\\ &= \frac{1}{2}R_{ijks}(-\omega_k\phi_s)+\frac{1}{2}R_{ijsl}(\omega_l\phi_s)\\ &= -R_{ijks}\omega_k\phi_s\end{aligned}$$

Así pues

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}\phi &= \sum_{i<j} \omega_i \wedge \omega_j \cdot (R_{ij} \cdot \phi) \\
&= -\phi_s \omega_i \wedge \omega_j \cdot \omega_k R_{ijks} \\
&= \omega_i \delta_{jk} R_{ijks} \phi_s - \omega_j \delta_{ik} R_{ijks} \phi_s \\
&= -R_{ijis} \phi_s \omega_j - R_{ijsj} \phi_s \omega_i
\end{aligned}
$$

Aplicando este último resultado al producto que queremos calcular

$$
\begin{aligned}
\langle \widetilde{R}\phi, \phi \rangle &= \langle -R_{ijis} \phi_s \omega_j - R_{ijsj} \phi_s \omega_i, \phi_r \omega_r \rangle \\
&= -R_{iris} \phi_s \phi_r - R_{rjsj} \phi_s \phi_r \\
&= 2Ric(\phi^\sharp, \phi^\sharp)
\end{aligned}
$$

donde $\phi^\sharp = \sum_s \phi_s e_s$ es el campo de vectores asociado a la 1–forma ϕ.
Así pues, la expresión (2.3) resulta ser

$$
2 \int_M Ric(\phi^\sharp, \phi^\sharp) = \int_M \left\{ \mid d\phi \mid^2 + \mid \delta\phi \mid^2 - \mid \nabla\phi \mid^2 \right\}
$$

Como consecuencia directa de estos resultados podemos demostrar fácilmente algunos teoremas clásicos de cohomología como son los dos teoremas de Bochner que nos afirman que dada (M, g) una variedad compacta verificando que $Ric > 0$ entonces se anula su primer número de Betti. Si la variedad verifica una condición de positividad sobre el tensor curvatura R, entonces se anulan todos los números de Betti de orden menor que dim M.

2.2. Fórmulas de Bochner en variedades casi–hermíticas

El objetivo de esta sección será aplicar la fórmula (2.3), obtenida en la sección previa por aplicación directa de las dos fórmulas de Weitzenbock, a la 2–forma de Kähler ω de una variedad casi–hermítica. Así pues, en este caso, la fórmula será

$$
\int_M \langle \widetilde{R}\omega, \omega \rangle = \int_M \left\{ \mid d\omega \mid^2 + \mid \delta\omega \mid^2 -2 \mid \nabla\omega \mid^2 \right\} \tag{2.4}
$$

Recordar que $\nabla\omega \in W$ donde este espacio W se descompone como suma directa de subespacios irreducibles bajo la acción de U_n según [11]

$$
W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4
$$

y además estos subespacios W_i son ortogonales. Utilizando esta descomposición tenemos que

$$
\nabla\omega = (\nabla\omega)_1 + (\nabla\omega)_2 + (\nabla\omega)_3 + (\nabla\omega)_4 \tag{2.5}
$$

donde denotamos con $(\nabla\omega)_i$ la proyección de $\nabla\omega$ sobre W_i.

En primer lugar calcularemos la parte derecha de la fórmula (2.4), expresándola en función de esta descomposición ortogonal.

Partimos del hecho de que W está contenido en $\bigwedge^1 \otimes \bigwedge^2$ y sobre este último espacio hemos definido en el primer capítulo las aplicaciones alternante $alt : \bigwedge^1 \otimes \bigwedge^2 \longrightarrow \bigwedge^3$ y producto interior $int : \bigwedge^1 \otimes \bigwedge^2 \longrightarrow \bigwedge^1$. Es inmediato probar que ambas aplicaciones son Gl_n–equivariantes y, en consecuencia, también serán U_n–equivariantes.

Si ahora restringimos ambas aplicaciones a los subespacios W_i invariantes bajo la acción de U_n

$$\begin{aligned} alt : W_i &\longrightarrow \textstyle\bigwedge^3 \\ int : W_i &\longrightarrow \textstyle\bigwedge^1 \end{aligned}$$

estamos en condiciones de aplicar el corolario 13 del Lema de Schur por el cual existen $a_i, b_i \geq 0$ tales que $|alt\ w|^2 = a_i\,|w|^2$ e $|int\ w|^2 = b_i\,|w|^2$ para cualquier $w \in W_i$. Además estas constantes a_i y b_i han sido calculadas obteniéndose que $a_1 = 6$, $a_3 = a_4 = 2$, $b_4 = 2(n-1)$ y el resto nulas, donde $2n$ es la dimensión de la variedad [7].

Como consecuencia de este último resultado y utilizando (2.5) y que $d\omega = alt(\nabla\omega)$ (Lema 1) se sigue que

$$\begin{aligned} \mid d\omega \mid^2 &= \mid alt(\nabla\omega) \mid^2 \\ &= \mid \textstyle\sum alt(\nabla\omega)_j \mid^2 = \sum \mid alt(\nabla\omega)_j \mid^2 = \sum a_j \mid (\nabla\omega)_j \mid^2 \\ &= 6|(\nabla\omega)_1|^2 + 2|(\nabla\omega)_3|^2 + 2|(\nabla\omega)_4|^2 \end{aligned}$$

Del mismo modo, a partir de (2.5) y de la propia definición del operador coderivada (Definición 1) obtenemos que

$$\begin{aligned} \mid \delta\omega \mid^2 &= |-int(\nabla\omega)|^2 \\ &= \textstyle\sum b_j \mid (\nabla\omega)_j \mid^2 = 2(n-1)|(\nabla\omega)_4|^2 \end{aligned}$$

Entonces podemos escribir

$$\left\{ \begin{aligned} &\mid d\omega \mid^2 = 6|(\nabla\omega)_1|^2 + 2|(\nabla\omega)_3|^2 + 2|(\nabla\omega)_4|^2 \\ &\mid \delta\omega \mid^2 = 2(n-1)|(\nabla\omega)_4|^2 \end{aligned} \right. \tag{2.6}$$

Como consecuencia, la parte de la derecha en (2.4) resulta

$$\int_M \left\{ \mid d\omega \mid^2 + \mid \delta\omega \mid^2 - 2 \mid \nabla\omega \mid^2 \right\} = 4E_1 - 2E_2 + 2(n-1)E_4 \tag{2.7}$$

donde notamos por $E_j = \int_M |(\nabla\omega)_j|^2$.

Pasemos ahora a calcular la parte de la izquierda en (2.4). Para ello partimos del hecho de que $\langle \widetilde{R}\omega, \omega\rangle = c\, tr(R_{|_{\mathcal{U}_n^\perp}})$ donde c es una constante que se puede calcular del siguiente modo:

Tomamos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \cdot\,\omega : \mathcal{U}_n^\perp & \longrightarrow & \bigwedge^2 \\ \alpha & \mapsto & \alpha \cdot \omega \end{array}$$

que no es más que hacer actuar una 2–forma $\alpha \in \mathcal{U}_n^\perp$ sobre la 2–forma de Kähler de la variedad mediante la acción (1.2) de las 2–formas sobre las p–formas que definimos en el primer capítulo.

Como $\mathcal{U}_n^\perp$ es irreducible y esta aplicación es U_n–equivariante, podemos aplicar el corolario 13 del Lema de Schur que nos asegura que existe una constante $c \geq 0$ de tal forma que $|\alpha \cdot \omega|^2 = c|\alpha|^2$. Tras unos sencillos cálculos se obtiene que $c = 4$.

Tomemos ahora el espacio de las 2–formas $\bigwedge^2$. Existe un isomorfismo

$$\mathcal{SO}_n \cong \bigwedge^2$$

entre este espacio y el álgebra de Lie de los endomorfismos antisimétricos. Puesto que $\mathcal{U}_n$ está contenido en $\mathcal{SO}_{2n}$, podemos escribir $\mathcal{SO}_{2n} = \mathcal{U}_n \oplus \mathcal{U}_n^\perp$. Por tanto

$$\bigwedge^2 \cong \mathcal{U}_n \oplus \mathcal{U}_n^\perp$$

donde $\mathcal{U}_n$ y $\mathcal{U}_n^\perp$ se corresponden con los subespacios

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_n &= [[\bigwedge^{1,1}]] \\ \mathcal{U}_n^\perp &= [[\bigwedge^{2,0} \oplus \bigwedge^{0,2}]] \end{aligned}$$

con [[ ]] denotando la parte real.
Para más detalles sobre estas descomposiciones ver [22].

Si ahora consideramos el tensor curvatura R como un endomorfismo de 2-formas,

$$\begin{array}{rcl} R : \bigwedge^2 & \longrightarrow & \bigwedge^2 \\ \alpha & \mapsto & R(\alpha) = -\sum_{i<j} \langle R_{ij}, \alpha\rangle \omega_i \wedge \omega_j \end{array}$$

y definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \widehat{J} : \bigwedge^2 & \longrightarrow & \bigwedge^2 \\ u \wedge v & \mapsto & \widehat{J}(u \wedge v) = Ju \wedge Jv, \end{array}$$

escribiendo R y $\widehat{J}R$ en forma matricial tenemos

$$R = \begin{pmatrix} R_{|\mathcal{U}_n} & * \\ * & R_{|_{\mathcal{U}_n^\perp}} \end{pmatrix} \qquad \widehat{J}R = \begin{pmatrix} R_{|\mathcal{U}_n} & * \\ * & -R_{|_{\mathcal{U}_n^\perp}} \end{pmatrix}$$

ya que $\widehat{J}_{|_{\mathcal{U}_n}} = 1$ y $\widehat{J}_{|_{\mathcal{U}_n^\perp}} = -1$.

Por tanto, $\langle \widetilde{R}\omega, \omega\rangle = 4\, tr(R_{|_{\mathcal{U}_n^\perp}}) = 2\,(tr(R) - tr(\widehat{J}R))$.

En estos momentos es importante tener en cuenta la siguiente consideración sobre el tensor curvatura de una variedad casi-hermítica. Si (M, g, J) es una variedad Kähler, entonces

$$R(X, Y, JZ, JW) = R(X, Y, Z, W)$$

pero esta identidad no es cierta en general. Así, dado que los operadores $R(X, Y)$ y J no conmutan necesariamente, es preciso introducir dos nuevas funciones curvatura, Ric^* y s^* que, de alguna forma relacionan la estructura métrica con la estructura compleja de la variedad. Análogamente al tensor de Ricci definimos el *tensor de Ricci** como

$$Ric^*(X, Y) = tr\{Z \rightsquigarrow R_{XJZ}JY\},$$

y la *curvatura escalar* s^* como

$$s^* = tr(Ric^*).$$

Entonces se tiene que, teniendo en cuenta las identidades anteriores: $2\ tr(R) = s$ y $2\, tr(\widehat{J}R) = s^*$. Así, la parte izquierda de (2.4) nos quedará

$$\int_M \langle \widetilde{R}\omega, \omega\rangle = \int_M (s - s^*) \tag{2.8}$$

Si ahora escribimos la fórmula (2.4) junto con los resultados (2.8) y (2.7) obtenidos previamente, tenemos que la *fórmula de Bochner en variedades casi–hermíticas* es

$$\boxed{2E_1 - E_2 + (n-1)E_4 = \frac{1}{2}\int_M (s - s^*)} \tag{2.9}$$

donde recordemos que $E_j = \int_M |(\nabla\omega)_j|^2$.

Capítulo 3

Estructuras doblemente casi–hermíticas

3.1. Introducción

Definición 8 *[3]* Una *estructura doblemente casi–hermítica* en una variedad diferenciable M es un par de estructuras casi–complejas (J, J') tales que

$$JJ' = J'J$$

y una métrica adaptada g tal que

$$g(JX, JY) = g(X, Y) = g(J'X, J'Y) \qquad \forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Una *estructura casi–producto* Q es un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ sobre M tal que $Q^2 = Id$. Dado que $Q^2 = Id$, toda estructura casi–producto es diagonalizable con autovalores ± 1. Así pues, equivalentemente una estructura casi–producto consiste en dos distribuciones complementarias sobre la variedad (correspondientes a los autoespacios asociados a los autovalores 1 y -1 de Q). Una métrica g se dice adaptada si hace ortogonales a ambas distribuciones o, equivalentemente si $g(QX, QY) = g(X, Y)$ para cualesquiera campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. En tal caso diremos que (M, g, Q) es una *variedad casi–producto.*

Observación 32

1) Toda estructura doblemente casi–hermítica determina un campo de planos. De hecho $Q = -JJ'$ es una estructura casi–producto sobre M y por tanto $\ker(Q - Id)$ y $\ker(Q + Id)$ son campos de planos invariantes por J y J'.

2) Considerando la terna de elementos (J, J', Q) asociada a una estructura doblemente casi–hermítica, es importante señalar que dos de ellos determinan el tercero, ya que se verifican trivialmente las relaciones:

$$Q = -JJ' \quad , \quad J = QJ' \quad , \quad J' = QJ$$

3) La existencia de una estructura doblemente casi–hermítica es equivalente a la reducción del grupo de estructura a $U(p) \times U(q)$.

4) Una variedad 4–dimensional M admite un campo de 2–planos orientados si y sólo si admite una estructura doblemente casi–hermítica [18].
Es posible expresar condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una estructura doblemente casi–hermítica en términos de la característica de Euler y la signatura de una variedad 4–dimensional. Tales condiciones resultan especialmente manejables si la variedad dada es el espacio subyacente a una variedad compleja, en cuyo caso se tiene que una superficie compleja admite una estructura casi–compleja opuesta (y, por tanto, una estructura doblemente casi–hermítica) si y sólo si la característica de Euler de M es par [4].

3.2. Algunas clases de variedades doblemente casi–hermíticas

En esta sección daremos algunas defniciones y propiedades básicas de las clases de variedades doblemente casi–hermíticas en las que estamos interesados. Así, sea (g, J, J', Q) una estructura doblemente casi–hermítica sobre M. Denotando con $\mathfrak{X}^{\pm}(M)$ los subespacios de $\mathfrak{X}(M)$ asociados a los valores propios ± 1 de Q. Dado que

$$JJ' = J'J \quad , \quad QJ = JQ \quad , \quad QJ' = J'Q$$

se tiene que $\mathfrak{X}^{\pm}(M)$ son invariantes por J y J'.
Así pues, localmente es posible construir bases ortonormales

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^{+}(M) &= \{e_1, \dots, e_p, Je_1, \dots, Je_p\} \\ \mathfrak{X}^{-}(M) &= \{e_{p+1}, \dots, e_{p+q}, Je_{p+1}, \dots, Je_{p+q}\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} J'(e_i) &= J(e_i) & , \quad i = 1 \dots p \\ J'(e_{p+i}) &= -J(e_{p+i}) & , \quad i = 1 \dots q \end{aligned}$$

Observación 33 Sea ahora (M, g, J, J') una variedad doblemente casi–hermítica y $Q = -JJ'$ su estructura casi–producto asociada. Sea $2q = \dim[Ker(Q + Id)]$. Entonces J y J' inducen la misma orientación en M si y sólo si q es par. De hecho, la forma de orientación asociada a J viene dada por

$$\Omega_J = e_1 \wedge Je_1 \wedge e_2 \wedge Je_2 \wedge \dots \wedge e_p \wedge Je_p \wedge e_{p+1} \wedge Je_{p+1} \wedge \dots \wedge e_{p+q} \wedge Je_{p+q},$$

mientras que la forma de orientación asociada a J' es

$$\begin{aligned} \Omega'_J &= e_1 \wedge J'e_1 \wedge e_2 \wedge J'e_2 \wedge \dots \wedge e_p \wedge J'e_p \wedge e_{p+1} \wedge J'e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_{p+q} \wedge J'e_{p+q} \\ &= e_1 \wedge Je_1 \wedge e_2 \wedge Je_2 \wedge \dots \wedge e_p \wedge Je_p \wedge e_{p+1} \wedge (-Je_{p+1}) \wedge \dots \wedge e_{p+q} \wedge (-Je_{p+q}) \\ &= (-1)^q \Omega_J \end{aligned}$$

Por tanto, en $\dim M = 4$ todo par de estructuras doblemente casi–hermíticas inducen orientaciones opuestas en la variedad.

3.2.1. Variedades doblemente Kähler

Definición 9 Decimos que una variedad (M, g, J, J') es *doblemente Kähler* si y sólo si (g, J) y (g, J') son ambas estructuras Kählerianas.

Teorema 34 *Sea (M, g, J, J') una variedad doblemente Kähler. Entonces M es localmente isomorfa al producto de dos variedades Kähler.*

Demostración.
La variedad doblemente casi–hermítica (M, g, J, J') es Kähler y opuesta Kähler si y sólo si la conexión métrica ∇ hace paralelas a ambas estructuras complejas $\nabla J = \nabla J' = 0$. Por tanto, hace paralela a la estructura casi–producto, $\nabla Q = 0$, lo que prueba que las distribuciones $\mathfrak{X}^{\pm}(M)$ son integrables y sus hojas subvariedades totalmente geodésicas. En consecuencia, M es localmente isométrica a un producto. □

El siguiente resultado presenta, por un lado, una amplia familia de estructuras doblemente Kähler y, al mismo tiempo, proporciona una clasificación de tales estructuras cuando se consideran invariantes a la izquierda sobre grupos de Lie 4–dimensionales.

Teorema 35 *Sea (g, J, J') una estructura doblemente Kähler invariante a la izquierda en un grupo de Lie 4–dimensional G. Entonces el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathcal{L}ie(G)$ha de ser isomorfa a una de las siguientes*

1) $\mathfrak{g} = \{X, Y, Z, T\}$ *donde*

$$[X, Y] = aX + bY$$
$$[Z, T] = cZ + dT$$

2) $\mathfrak{g} = \{X, Y, Z, T\}$ *donde*

$$[X, T] = aY$$
$$[Y, T] = -aX$$
$$[Z, T] = bZ$$

3) $\mathfrak{g} = \{X, Y, Z, T\}$ *donde*

$$[X, Z] = aY$$
$$[X, T] = bY$$
$$[Y, Z] = -aX$$
$$[Y, T] = -bX$$
$$[Z, T] = -\frac{cb}{a}Z + cT$$

Demostración.

Haremos la demostración en dos etapas. En una primera etapa obtendremos las condiciones necesarias y suficientes para que una estructura (g, J, J') sobre G sea doblemente almost–Kähler (establecidas en las ecuaciones (3.2) y (3.3) que serán de utilidad en lo que sigue de la memoria) y, posteriormente, imponiendo la integrabilidad de las estructuras J y J', se obtendrá el resultado buscado.

Así, recordemos que (M^4, g, J, J') es una variedad 4–dimensional doblemente almost–Kähler si y sólo si $\mathfrak{X}^+(M)$ y $\mathfrak{X}^-(M)$ definen foliaciones minimales complementarias sobre M (Teorema 39).

Vamos a tomar como variedad un grupo de Lie G 4–dimensional tal que su álgebra de Lie sea $\mathfrak{g}$. Por existir en la variedad G dos foliaciones minimales complementarias, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ debe de verificar:

a) Existen 2 subálgebras complementarias

$$\mathfrak{g}_1 = \{X, Y\} \qquad \mathfrak{g}_2 = \{Z, T\}$$

Por tanto

$$[X, Y] = aX + bY \qquad [Z, T] = cZ + dT$$

b) Cada subálgebra es minimal
$\mathfrak{g}_1$ es minimal si

$$\frac{1}{2}(nor(\nabla_X X + \nabla_Y Y)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \nabla_X X, Z\rangle + \langle \nabla_Y Y, Z\rangle = 0 \\ \langle \nabla_X X, T\rangle + \langle \nabla_Y Y, T\rangle = 0 \end{cases}$$

$\mathfrak{g}_2$ es minimal si

$$\frac{1}{2}(nor(\nabla_Z Z + \nabla_T T)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \nabla_Z Z, X\rangle + \langle \nabla_T T, X\rangle = 0 \\ \langle \nabla_Z Z, Y\rangle + \langle \nabla_T T, Y\rangle = 0 \end{cases}$$

Si ahora escribimos la *fórmula de Koszul*

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \; & \frac{1}{2}\{Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ & +g(X, [Z, Y]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])\} \end{aligned}$$

podemos reescribir las igualdades anteriores del siguiente modo

- $\langle [Z, X], X\rangle = -\langle [Z, Y], Y\rangle$
- $\langle [X, Z], Z\rangle = -\langle [X, T], T\rangle$
- $\langle [T, X], X\rangle = -\langle [T, Y], Y\rangle$
- $\langle [Y, Z], Z\rangle = -\langle [Y, T], T\rangle$

Por tanto tenemos ciertas restricciones sobre los coeficientes que nos pueden aparecer al hacer los productos corchete de los elemetos del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
Escribimos los corchetes

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ [X,Y] &&= aX + bY\\
&\bullet\ [X,Z] &&= eX + fY + gZ + hT\\
&\bullet\ [X,T] &&= iX + jY + kZ - gT\\
&\bullet\ [Y,Z] &&= mX - eY + nZ + oT\\
&\bullet\ [Y,T] &&= qX - iY + pZ - nT\\
&\bullet\ [Z,T] &&= cZ + dT
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Si tenemos en cuenta que este producto debe de verificar la condición de Jacobi $[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0 \quad \forall\, A,B,C \in \mathfrak{X}(M)$, se establecen las siguientes relaciones entre los coeficientes

$$
\begin{aligned}
&fn + jo + be + eg + hi - af = 0\\
&ch + eg + fn + hi + jo - dg = 0\\
&ae + bm + gm + hq - en - io = 0\\
&in + ai + bq + km - ep - gq = 0\\
&dk + gi + jn + cg - ek - fp = 0\\
&dp + ep + gq + cn - km - in = 0\\
&fp + bi + ek - jn - aj - gi = 0\\
&co + gm + hq - en - dn - io = 0\\
&ko - ag - bn - hp = 0\\
&fq - ce - di - jm = 0\\
&2go + bo + ah - 2hn = 0\\
&2kn + bp + ak - 2gp = 0\\
&2fi + cf + dj - 2ej = 0\\
&2eq + cm + dq - 2im = 0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Sin embargo, si lo que queremos obtener es que el grupo de Lie G esté dotado de una estructura doblemente Kähler, hemos de imponer que tanto la estructura J como la estructura J' sean complejas, i.e. que $[J,J] = [J',J'] = 0$. Esto nos llevará a encontrar nuevas restricciones sobre los coeficientes como veremos a continuación.

En primer lugar vamos a imponer la condición de que la estructura J sea compleja, para ello exigiremos que $[J,J]=0$ sobre los elementos de la base.

$$\begin{aligned}\bullet[J,J](X,Y) &= [JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]-[X,Y]\\ &= -[Y,X]-J[Y,Y]+J[X,X]-[X,Y]=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet[J,J](X,Z) &= [JX,JZ]-J[JX,Z]-J[X,JZ]-[X,Z]\\ &= [Y,T]-J[Y,Z]-J[X,T]-[X,Z]\\ &= qX-iY+pZ-nT-mY-eX-nT+oZ\\ &\quad -iY+jX-kT-gZ-eX-fY-gZ-hT=0\end{aligned}$$

Así pues de esta igualdad deducimos las ecuaciones

$$\begin{aligned}&q+j-2e=0\\ &m+f+2i=0\\ &p+o-2g=0\\ &k+h+2n=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet[J,J](X,T) &= [JX,JT]-J[JX,T]-J[X,JT]-[X,T]\\ &= -[Y,Z]-J[Y,T]+J[X,Z]-[X,T]\\ &= -mX+eY-nZ-oT-qY-iX-pT-nZ+\\ &\quad +eY-fX+gT-hZ-iX-jY-kZ+gT=0\end{aligned}$$

Por tanto obtenemos

$$\begin{aligned}&m+f+2i=0\\ &q+j-2e=0\\ &k+h+2n=0\\ &p+o-2g=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet[J,J](Y,Z) &= [JY,JZ]-J[JY,Z]-J[Y,JZ]-[Y,Z]\\ &= -[X,T]+J[X,Z]-J[Y,T]-[Y,Z]\\ &= -iX-jY-kZ+gT+eY-fX+gT-hZ\\ &\quad -qY-iX-pT-nZ-mX+eY-nZ-oT=0\end{aligned}$$

Y ahora las ecuaciones que aparecen son

$$\begin{aligned}&m+f+2i=0\\ &q+j-2e=0\\ &k+h+2n=0\\ &p+o-2g=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet[J,J](Y,T) &= [JY,JT]-J[JY,T]-J[Y,JT]-[Y,T]\\ &= [X,Z]+J[X,T]+J[Y,Z]-[Y,T]\\ &= eX+fY+gZ+hT+iY-jX+kT+gZ\\ &\quad +mY+eX+nT-oZ-qX+iY-pZ+nT=0\end{aligned}$$

Y nos vuelven a aparecer las ecuaciones

$$\begin{aligned}&q+j-2e=0\\ &m+f+2i=0\\ &p+o-2g=0\\ &k+h+2n=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet[J,J](Z,T) &= [JZ,JT]-J[JZ,T]-J[Z,JT]-[Z,T]\\ &= -[T,Z]-J[T,T]+J[Z,Z]-[Z,T]=0\end{aligned}$$

Por tanto, observamos que si la estructura J es compleja se deben de verificar además las ecuaciones

$$\begin{aligned}&q+j-2e=0\\ &m+f+2i=0\\ &p+o-2g=0\\ &k+h+2n=0\end{aligned} \tag{3.4}$$

Repitiendo exactamente el mismo procedimiento para la estructura opuesta J', tenemos que, para que esta sea compleja, se debe verificar

$$\begin{aligned}&q+j+2e=0\\ &p+o+2g=0\\ &2i-f-m=0\\ &2n-h-k=0\end{aligned} \tag{3.5}$$

De este modo, podemos afirmar que si los coeficientes del producto corchete de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ verifican las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5), el grupo de Lie que determina será una variedad doblemente Kähler.

Resolviendo el sistema lineal dado por las ecuaciones (3.4) y (3.5) tenemos

$$\begin{aligned}&e=g=n=i=0\\ &m=-f\\ &q=-j\\ &k=-h\\ &o=-p\end{aligned}$$

Aplicando estos resultados a las ecuaciones (3.3), estas nos quedan reducidas a

$$\begin{aligned}
pj + af &= 0\\
pj + ch &= 0\\
bf + hj &= 0\\
bj - hf &= 0\\
dh + fp &= 0\\
dp - hf &= 0\\
fp - aj &= 0\\
cp + hj &= 0\\
bp - ah &= 0\\
cf + dj &= 0
\end{aligned}$$

Llegados a este punto, podemos resolver este sistema y obtenemos cinco soluciones que darán lugar a distintas álgebras de Lie cuyos grupos de Lie asociados poseen una estructura doblemente Kähler.

TIPO I

Viene dado por la solución $f = h = j = p = 0$ y está caracterizado por un producto corchete de la forma

- $[X, Y] = aX + bY$
- $[X, Z] = 0$
- $[X, T] = 0$
- $[Y, Z] = 0$
- $[Y, T] = 0$
- $[Z, T] = cZ + dT$

TIPO II

Viene dado por la solución $a = b = d = f = h = p = 0$ y está caracterizado por un producto corchete de la forma

- $[X, Y] = 0$
- $[X, Z] = 0$
- $[X, T] = aY$
- $[Y, Z] = 0$
- $[Y, T] = -aX$
- $[Z, T] = bZ$

TIPO III

Viene dado por la solución $b = c = d = f = h = j = 0$ y está caracterizado por un producto corchete de la forma

- $[X, Y] = aX$
- $[X, Z] = 0$
- $[X, T] = 0$
- $[Y, Z] = bT$
- $[Y, T] = -bZ$
- $[Z, T] = 0$

TIPO IV

Viene dado por la solución $a = b = h = p = 0$ y $c = -\dfrac{dj}{f}$ y está caracterizado por un producto corchete de la forma

- $[X, Y] = 0$
- $[X, Z] = aY$
- $[X, T] = bY$
- $[Y, Z] = -aX$
- $[Y, T] = -bX$
- $[Z, T] = -\dfrac{cb}{a}Z + cT$

TIPO V

Viene dado por la solución $c = d = f = j = 0$ y $a = \dfrac{bp}{h}$ y está caracterizado por un producto corchete de la forma

- $[X, Y] = \dfrac{ac}{b}X + aY$
- $[X, Z] = bT$
- $[X, T] = -bZ$
- $[Y, Z] = -cT$
- $[Y, T] = cZ$
- $[Z, T] = 0$

A pesar de que en un principio pudiera parecer que estos cinco tipos son distintos ya que provienen de distintas soluciones del sistema, vamos a probar que realmente son tres puesto que podemos encontrar un isomorfismo de álgebras de Lie entre los tipos II y III y otro isomorfismo entre los tipos IV y V.

Si denotamos por $\mathfrak{g} = \{X, Y, Z, T\}$ a un álgebra de Lie de tipo II y denotamos por $\mathfrak{g}' = \{X', Y', Z', T'\}$ a un álgebra de Lie de tipo III, tenemos el siguiente isomorfismo de álgebras de Lie entre ellas

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g}' \\ X & \mapsto & Z' \\ Y & \mapsto & T' \\ Z & \mapsto & X' \\ T & \mapsto & Y' \end{array}$$

Se puede probar de manera sencilla que esta aplicación α verifica la condición

$$\alpha[A, B] = [\alpha A, \alpha B] \qquad \forall\, A, B \in \mathfrak{g}$$

y es, por tanto, un isomorfismo de álgebras de Lie.

Del mimo modo, denotando por $\mathfrak{g} = \{X, Y, Z, T\}$ a un álgebra de Lie de tipo IV y por $\mathfrak{g}' = \{X', Y', Z', T'\}$ a un álgebra de Lie de tipo V, la misma aplicación α que en el caso anterior nos da igualmente un isomorfismo de álgebras de Lie, puesto que α vuelve a verificar la condición

$$\alpha[A, B] = [\alpha A, \alpha B] \qquad \forall\, A, B \in \mathfrak{g}$$

y, por tanto, esto nos prueba que los tipos IV y V también son isomorfos.

De esta forma, tal y como anunciábamos anteriormente, estos cinco tipos nos quedan reducidos a los siguientes:

TIPO 1

Está caracterizado por un producto corchete de la forma

$$\begin{array}{ll} \bullet\ [X,Y] = aX + bY & \bullet\ [Y,Z] = 0 \\ \bullet\ [X,Z] = 0 & \bullet\ [Y,T] = 0 \\ \bullet\ [X,T] = 0 & \bullet\ [Z,T] = cZ + dT \end{array} \tag{3.6}$$

TIPO 2

Son los que tienen un producto corchete determinado por el siguiente modelo

$$\begin{array}{ll} \bullet\ [X,Y] = 0 & \bullet\ [Y,Z] = 0 \\ \bullet\ [X,Z] = 0 & \bullet\ [Y,T] = -aX \\ \bullet\ [X,T] = aY & \bullet\ [Z,T] = bZ \end{array} \tag{3.7}$$

TIPO 3

Los álgebras de Lie de este tipo poseen un producto corchete de la forma

$$\begin{array}{ll} \bullet\ [X,Y] = 0 & \bullet\ [Y,Z] = -aX \\ \bullet\ [X,Z] = aY & \bullet\ [Y,T] = -bX \\ \bullet\ [X,T] = bY & \bullet\ [Z,T] = -\dfrac{cb}{a}Z + cT \end{array} \tag{3.8}$$

□

Observación 36 Ahora pasaremos a estudiar algunas características de estos tres tipos, como son la resolubilidad y la nilpotencia, probando que todas ellas son resolubles y no nilpotentes, salvo el caso trivial del álgebra conmutativa. Para ello comenzaremos por definir ambos conceptos.

Definición 10 Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Denotamos por

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \quad , \quad \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad , \cdots , \quad \mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n]$$

Es claro que

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^{n+1}$$

Se dirá que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *nilpotente en k pasos* si

$$\exists\, k \in \mathbb{N}/\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0 \quad \mathfrak{g}^k = 0$$

Un álgebra de Lie se dirá *nilpotente* si es nilpotente en k pasos para algún $k \in \mathbb{N}$.

Definición 11 Al igual que venimos notando hasta ahora, $\mathfrak{g}$ será un álgebra de Lie y sean

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} \quad , \quad \mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad , \quad \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] \quad , \cdots , \quad \mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}]$$

Del mismo modo que antes se tiene que

$$\mathfrak{g}^{(0)} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^{(n+1)}$$

Diremos que $\mathfrak{g}$ es *resoluble* si $\exists\, n \in \mathbb{N}/\mathfrak{g}^{(n)} = 0$.

Es sencillo probar que $\mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{g}^{n+1}$ y como consecuencia de este resultado y de las propias definiciones se tiene que todo álgebra de Lie nilpotente es resoluble.

Una vez que hemos visto qué significa que un álgebra de Lie sea nilpotente y resoluble, vamos a estudiar si las álgebras de Lie de los tres tipos de variedades doblemente Kähler que teníamos lo son.

TIPO 1

Teniendo en cuenta la definición de álgebra de Lie nilpotente y que el producto corchete en este caso debe de ser de la forma (3.6), vemos que este álgebra **no es nilpotente** ya que

$$[X, Y] = aX + bY$$
$$[X, [X, Y]] = b(aX + bY)$$
$$[X, [X, [X, Y]]] = b^2(aX + bY)$$
$$\ldots$$
$$[\overbrace{X, [X, \ldots [X, [X}^{n+1\ veces}, Y]] \ldots]] = b^n(aX + bY)$$

Sin embargo si que **es resoluble**, ya que $\mathfrak{g}^{(1)} = \{aX + bY, cZ + dT\}$ (siguiendo la notación anterior) y $[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = 0$ puesto que

$$[aX + bY, cZ + dT] = 0$$

TIPO 2

Al igual que en el caso anterior, la definición de álgebra de Lie nilpotente y la forma de su producto corchete como aparece en (3.7), nos afirman que un álgebra de Lie de tipo 2 **no es nilpotente** ya que

$$[T, X] = -aY$$

$$[T, [T, X]] = -a^2 X$$

$$[T, [T, [T, X]]] = a^3 Y$$

$$\dots$$

$$[\overbrace{T, [T, \dots [T, [T}^{2n\ veces}, X]] \dots]] = (-1)^{n+1} a^{2n} X$$

$$[\overbrace{T, [T, \dots [T, [T}^{2n+1\ veces}, X]] \dots]] = (-1)^{n+1} a^{2n+1} Y$$

Del mismo modo que antes este álgebra **es resoluble**, ya que $\mathfrak{g}^{(1)} = \{X, Y, Z\}$ y $[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = 0$ puesto que

$$[X, Y] = 0 \qquad [X, Z] = 0 \qquad [Y, Z] = 0$$

TIPO 3

Como sucedía en los anteriores casos, la definición de álgebra de Lie nilpotente y la forma de su producto corchete como en (3.8), nos indican que un álgebra de Lie de tipo 3 **no es nilpotente** ya que

$$[Z, X] = -aY$$

$$[Z, [Z, X]] = -a^2 X$$

$$[Z, [Z, [Z, X]]] = a^3 Y$$

$$\dots$$

$$[\overbrace{Z, [Z, \dots [Z, [Z}^{2n\ veces}, X]] \dots]] = (-1)^{n+1} a^{2n} X$$

$$[\overbrace{Z, [Z, \dots [Z, [Z}^{2n+1\ veces}, X]] \dots]] = (-1)^{n+1} a^{2n+1} Y$$

Como en los anteriores casos este álgebra **es resoluble**, ya que $\mathfrak{g}^{(1)} = \{X, Y, -\frac{b}{a} Z + T\}$

y $[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = 0$ puesto que

$$[X, Y] = 0$$
$$[X, -\frac{b}{a}Z + T] = -\frac{b}{a}[X, Z] + [X, T] = -bY + bY = 0$$
$$[Y, -\frac{b}{a}Z + T] = -\frac{b}{a}[Y, Z] + [Y, T] = bX - bZ = 0$$

Así pues hemos probado que los 3 tipos de álgebras de Lie que dan lugar a variedades doblemente Kähler son **resolubles pero no nilpotentes**.

3.2.2. Variedades doblemente almost–Kähler

Denotamos ahora con ω, ω' las 2–formas de Kähler asociadas a las estructuras (g, J) y (g, J') respectivamente:

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y) \qquad , \qquad \omega'(X, Y) = g(J'X, Y)$$

Definición 12 Decimos que una variedad (M, g, J, J') es *doblemente almost–Kähler* si y sólo si $d\omega = 0 = d\omega'$.

Teorema 37 *Si la estructura doblemente casi–hermítica (M, g, J, J') es almost–Kähler y opuesta almost–Kähler, entonces las distribuciones espacial y temporal definen foliaciones minimales sobre M.*

Demostración.
Definimos las 2–formas $\Omega_{(\pm)}$ del modo siguiente

$$\Omega_+ = \frac{1}{2}(\omega - \omega') \qquad \qquad \Omega_- = -\frac{1}{2}(\omega + \omega')$$

En términos de estas 2–formas las distribuciones espacial y temporal están caracterizadas por:

$$\mathfrak{X}^+(M) = \{X \in \mathfrak{X}(M) / i_X\Omega_+ = 0\}$$
$$\mathfrak{X}^-(M) = \{X \in \mathfrak{X}(M) / i_X\Omega_- = 0\}$$

donde $(i_X\Omega_{(\pm)})(Z) = \Omega_{(\pm)}(X, Z)$ denota el producto interior de formas y campos de vectores.

El siguiente Lema nos permitirá relacionar la integrabilidad de las distribuciones $\mathfrak{X}^+(M)$ y $\mathfrak{X}^-(M)$ con el hecho de definir ω y ω' estructuras simplécticas sobre M.

Lema 38 *[3] La diferencial de las 2–formas $\Omega_{(\pm)}$ verifica las siguientes relaciones:*

(a) $d\Omega_+(X, Y, Z) = 0$
$d\Omega_-(U, V, W) = 0$

(b) $d\Omega_+(U,V,W) = -d\omega'(U,V,W)$
$d\Omega_-(X,Y,Z) = -d\omega(X,Y,Z)$

(c) $d\Omega_+(X,Y,U) = (i_{[X,Y]}\Omega_+)(U)$
$d\Omega_-(U,V,X) = (i_{[U,V]}\Omega_-)(X)$

(d) $d\Omega_+(U,V,X) = -d\omega'(U,V,X) - (i_{[U,V]}\Omega_-)(X)$
$d\Omega_-(X,Y,U) = -d\omega(X,Y,U) - (i_{[X,Y]}\Omega_+)(U)$

donde X,Y,Z (respect. U,V,W) son campos de vectores tangentes a la distribución $\mathfrak{X}^+(M)$ (respect. $\mathfrak{X}^-(M)$).

Sea D una distribución arbitraria k–dimensional sobre una variedad de Riemann (M,g). Se define el vector *curvatura media* H_D de la distribución como:

$$H_D = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} nor(\nabla_{e_i}e_i) \tag{3.9}$$

donde $\{e_i, i=1,\ldots,k\}$ es una referencia ortonormal en D y $nor(\nabla_X Y)$es la componente normal de la conexión de Levi Civita cuando se aplica a vectores tangentes a la distribución. Se dirá que la distribución D define una *foliación minimal* si $H_D = 0$ y D es involutiva.

Teniendo en cuenta los resultados del anterior Lema, las distribuciones $\mathfrak{X}^{\pm}(M)$ son integrables si y sólo si

$$d\Omega_{(\pm)}(\mathfrak{X}^{\pm}(M), \mathfrak{X}^{\pm}(M), -) = 0$$

Ahora bien, si $d\omega = d\omega' = 0$, entonces $\Omega_{(\pm)}$ son 2–formas cerradas, y por tanto, $\mathfrak{X}^{\pm}(M)$ definen foliaciones complementarias sobre M. De (3.9) obtenemos que el vector curvatura media de la distribución $\mathfrak{X}^-(M)$ se expresa como:

$$H_{\mathfrak{X}^-(M)} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}\{nor(\nabla_{U_i}U_i) + nor(\nabla_{JU_i}JU_i)\}$$

donde $\{U_i, JU_i; i = 1,\ldots,q\}$ es una referencia ortonormal es $\mathfrak{X}^-(M)$. Considerando la relación entre las estructuras casi–complejas J y J', se sigue que:

$$d\Omega_+(U,JU,X) = -g(\nabla_U U + \nabla_{JU}JU, X) \tag{3.10}$$

y por tanto, si la 2–forma Ω_+ es cerrada, entonces la distribución $\mathfrak{X}^-(M)$ es minimal, y el resultado se sigue mendiante el mismo argumento para Ω_-. □

En el caso en que la dimensión de M es cuatro se puede establecer un recíproco del Teorema anterior.

Teorema 39 *Sea (M, g) una variedad de Riemann 4–dimensional. Entonces, las distribuciones $\mathfrak{X}^+(M)$ y $\mathfrak{X}^-(M)$ definen foliaciones minimales sobre M si y sólo si las estructuras casi–complejas asociadas J y J' definen estructuras almost–Kähler y opuesta almost–Kähler respectivamente, sobre M.*

Demostración.

Probaremos que las 2–formas $\Omega_{(\pm)}$ son cerradas si y sólo si las distribuciones $\mathfrak{X}^\pm(M)$ son integrables y $\mathfrak{X}^\mp(M)$ minimales. La necesidad está probada en el Teorema anterior. Veamos la suficiencia:

La diferencial $d\Omega_+$ es nula cuando se aplica a tres vectores en $\mathfrak{X}^\pm(M)$ puesto que ambas distribuciones son de dimensión dos. Así, tal y como nos afirma el Lema 38, $d\Omega_+(\mathfrak{X}^+(M), \mathfrak{X}^+(M), \mathfrak{X}^-(M)) = 0$ si y sólo si la distribución $\mathfrak{X}^+(M)$ es integrable, y además, de (3.10) se sigue que $d\Omega_+(U, JU, X) = 0$ si y sólo si $\mathfrak{X}^-(M)$ es minimal.

Teniendo en cuenta que las distribuciones $\mathfrak{X}^\pm(M)$ tienen dimensión dos, y denotando con $\{U, JU\}$ una referencia local ortonormal de la distribución $\mathfrak{X}^-(M)$, se tiene que $d\Omega_+(\mathfrak{X}^-(M), \mathfrak{X}^-(M), \mathfrak{X}^+(M)) = 0$ si y sólo si $\mathfrak{X}^-(M)$ es minimal. □

3.2.3. Variedades doblemente complejas

Definición 13 Una variedad (M, g, J, J') se dirá *doblemente compleja* si ambas estructuras J y J' son complejas, i.e. $[J, J] = 0 = [J', J']$.

Aunque existen similitudes formales entre las estructuras cuaterniónicas y las doblemente casi–complejas, la integrabilidad de dos de estas últimas no conlleva la integrabilidad de la tercera. Esto se puede ver en el siguiente ejemplo del fibrado tangente, que muestra que una variedad puede ser doblemente compleja y sin embargo $\mathfrak{X}^\pm(M)$ no ser integrables simultáneamente.

Ejemplo 40 Sea $(M^2, g, \mathcal{J})$ una variedad Kähler no llana (una superficie orientada) y sea TM su fibrado tangente. En lo que sigue de este ejemplo utilizaremos las notaciones y conceptos de levantamientos desarrollados en [12], [27]. Se define la métrica de Sasaki g^D inducida en TM como:

$$g^D = \begin{cases} g^D(X^H, Y^H) = g^D(X^V, Y^V) = g(X, Y)^V \\ g^D(X^H, Y^V) = g^D(X^V, Y^H) = 0 \end{cases}$$

que es definida positiva siempre y cuando g lo sea. Ahora definimos las estructuras casi–complejas inducidas por la estructura compleja de la variedad base

$$J : \begin{cases} J(X^V) = (\mathcal{J}X)^V \\ J(X^H) = (\mathcal{J}X)^H \end{cases} \qquad J' : \begin{cases} J'(X^V) = (\mathcal{J}X)^V \\ J'(X^H) = -(\mathcal{J}X)^H \end{cases}$$

Es sencillo probar que estas estructuras así definidas son compatibles con la métrica g^D. Además se sigue de la propia definición de J y J' que ambas estructuras conmutan por lo que (TM, g^D, J, J') es una variedad doblemente casi–hermítica. Veamos que, de hecho es una variedad doblemente compleja.

Lema 41 *[5] Si $(M^2, g, \mathcal{J})$ es una variedad Kähler, entonces (TM, g^D, J) es una variedad hermítica.*

Para probar la integrabilidad de la estructura casi–compleja opuesta necesitamos conocer la conexión de Riemann ∇^D de la métrica de Sasaki, que está determinada por las siguientes relaciones [12]:

$$\begin{aligned}
(\nabla^D_{X^H} Y^H)_{(p,u)} &= (\nabla_X Y)^H_{(p,u)} - \frac{1}{2}(R_p(X,Y)u)^V, \\
(\nabla^D_{X^H} Y^V)_{(p,u)} &= (\nabla_X Y)^V_{(p,u)} + \frac{1}{2}(R_p(u,Y)X)^H, \\
(\nabla^D_{X^V} Y^H)_{(p,u)} &= \frac{1}{2}(R_p(u,X)Y)^H, \\
(\nabla^D_{X^V} Y^V)_{(p,u)} &= 0
\end{aligned}$$

Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Así, para mostrar que (TM, g^D, J') es una variedad compleja bastaría con probar que $[J', J'] = 0$ en los siguientes casos.

$$\begin{aligned}
[J',J'](X^V,Y^V) &= [(\mathcal{J}X)^V,(\mathcal{J}Y)^V] - J'[(\mathcal{J}X)^V,Y^V] - J'[X^V,(\mathcal{J}Y)^V] - [X^V,Y^V] \\
&= \nabla^D_{(\mathcal{J}X)^V}(\mathcal{J}Y)^V - \nabla^D_{(\mathcal{J}Y)^V}(\mathcal{J}X)^V - J'\{\nabla^D_{(\mathcal{J}X)^V}Y^V - \nabla^D_{Y^V}(\mathcal{J}X)^V\} \\
&\quad - J'\{\nabla^D_{X^V}(\mathcal{J}Y)^V - \nabla^D_{(\mathcal{J}Y)^V}X^V\} - \nabla^D_{X^V}Y^V + \nabla^D_{Y^V}X^V = 0 \\
[J',J'](X^H,Y^H) &= [(\mathcal{J}X)^H,(\mathcal{J}Y)^H] + J'[(\mathcal{J}X)^H,Y^H] + J'[X^H,(\mathcal{J}Y)^H] - [X^H,Y^H] \\
&= \nabla^D_{(\mathcal{J}X)^H}(\mathcal{J}Y)^H - \nabla^D_{(\mathcal{J}Y)^H}(\mathcal{J}X)^H \\
&\quad + J'\{\nabla^D_{(\mathcal{J}X)^H}Y^H - \nabla^D_{Y^H}(\mathcal{J}X)^H\} \\
&\quad + J'\{\nabla^D_{X^H}(\mathcal{J}Y)^H - \nabla^D_{(\mathcal{J}Y)^H}X^H\} - \nabla^D_{X^H}Y^H + \nabla^D_{Y^H}X^H \\
&= (\nabla_{\mathcal{J}X}\mathcal{J}Y)^H_{(p,u)} - \frac{1}{2}(R_p(\mathcal{J}X,\mathcal{J}Y)u)^V - (\nabla_{\mathcal{J}Y}\mathcal{J}X)^H_{(p,u)} \\
&\quad + \frac{1}{2}(R_p(\mathcal{J}Y,\mathcal{J}X)u)^V + J'\{(\nabla_{\mathcal{J}X}Y)^H_{(p,u)} - \frac{1}{2}(R_p(\mathcal{J}X,Y)u)^V \\
&\quad - (\nabla_Y\mathcal{J}X)^H_{(p,u)} + \frac{1}{2}(R_p(Y,\mathcal{J}X)u)^V\} + J'\{(\nabla_X\mathcal{J}Y)^H_{(p,u)} \\
&\quad - \frac{1}{2}(R_p(X,\mathcal{J}Y)u)^V - (\nabla_{\mathcal{J}Y}X)^H_{(p,u)} + \frac{1}{2}(R_p(\mathcal{J}Y,X)u)^V\} \\
&\quad - (\nabla_X Y)^H_{(p,u)} + \frac{1}{2}(R_p(X,Y)u)^V + (\nabla_Y X)^H_{(p,u)} - \frac{1}{2}(R_p(Y,X)u)^V \\
&= ([\mathcal{J}X,\mathcal{J}Y] - \mathcal{J}[\mathcal{J}X,Y] - \mathcal{J}[X,\mathcal{J}Y] - [X,Y])^H = 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[J', J'](X^V, Y^H) &= -[(\mathcal{J}X)^V, (\mathcal{J}Y)^H] - J'[(\mathcal{J}X)^V, Y^H] \\
&\quad + J'[X^V, (\mathcal{J}Y)^H] - [X^V, Y^H] \\
&= -\nabla^D_{(\mathcal{J}X)^V}(\mathcal{J}Y)^H + \nabla^D_{(\mathcal{J}Y)^H}(\mathcal{J}X)^V \\
&\quad - J'\{\nabla^D_{(\mathcal{J}X)^V} Y^H - \nabla^D_{Y^H}(\mathcal{J}X)^V\} \\
&\quad + J'\{\nabla^D_{X^V}(\mathcal{J}Y)^H - \nabla^D_{(\mathcal{J}Y)^H} X^V\} - \nabla^D_{X^V} Y^H + \nabla^D_{Y^H} X^V \\
&= -\frac{1}{2}(R_p(u, \mathcal{J}X)\mathcal{J}Y)^H + (\nabla_{\mathcal{J}Y}\mathcal{J}X)^V_{(p,u)} + \frac{1}{2}(R_p(u, \mathcal{J}X)\mathcal{J}Y)^H \\
&\quad - J'\{\frac{1}{2}(R_p(u, \mathcal{J}X)Y)^H - (\nabla_Y \mathcal{J}X)^V_{(p,u)} - \frac{1}{2}(R_p(u, \mathcal{J}X)Y)^H\} \\
&\quad + J'\{\frac{1}{2}(R_p(u, X)\mathcal{J}Y)^H - (\nabla_{\mathcal{J}Y} X)^V_{(p,u)} - \frac{1}{2}(R_p(u, X)\mathcal{J}Y)^H\} \\
&\quad - \frac{1}{2}(R_p(u, X)Y)^H + (\nabla_Y X)^V_{(p,u)} + \frac{1}{2}(R_p(u, X)Y)^H \\
&= \{(\nabla_{\mathcal{J}Y}\mathcal{J})X - (\nabla_Y \mathcal{J})\mathcal{J}X\}^V_{(p,u)} = 0
\end{aligned}
$$

Por tanto esta variedad es doblemente compleja pero no doblemente Kähler ya que

$$
\begin{aligned}
g^D(\nabla^D_{X^H}(J')Y^H, Z^V) &= -g^D(\nabla^D_{X^H}(\mathcal{J}Y)^H, Z^V) + g^D(\nabla^D_{X^H} Y^H, (\mathcal{J}Z)^V) \\
&= \frac{1}{2} g^D((R_p(X, \mathcal{J}Y)u)^V, Z^V) - \frac{1}{2} g^D((R_p(X, Y)u)^V, (\mathcal{J}Z)^V) \\
&= \frac{1}{2}\{R_p(X, \mathcal{J}Y, u, Z) - R_p(X, Y, u, \mathcal{J}Z)\}^V
\end{aligned}
$$

y este término no tiene que ser necesariamente cero. Además $[Q, Q] \neq 0$ siempre que M^2 no sea una variedad llana, ya que $\mathfrak{X}^{\pm}(TM)$ se corresponden con las distribuciones vertical y horizontal.

Variedades 4-dimensionales que no admiten estructuras complejas opuestas

Beauville [2] clasifica las superficies complejas que admiten una estructura compleja opuesta, en términos de los números de Chern de la variedad compleja M. En el siguiente teorema se establece un criterio para la no integrabilidad de la estructura compleja opuesta asociada a una métrica casi–hermítica, en términos de los números de Chern de la variedad. Notemos que en el caso particular de ser M una superficie compleja, se obtiene el resultado de Beauville.

Teorema 42 *Sea M una variedad compacta orientada 4–dimensional que admite un campo de 2–planos orientados, y por tanto, una estructura casi–compleja J y una estructura casi–compleja opuesta J'. Sean $c_1^2(M)$, $c_2(M)$ los números de Chern asociados a la estructura casi–compleja J. Se tiene:*

1. *Si la característica de Euler es no positiva y los números de Chern satisfacen:*

$$c_1^2(M) < 2c_2(M)$$

entonces la estructura casi–compleja opuesta J' no es integrable.

2. *Si la característica de Euler es positiva y los números de Chern satisfacen:*

$$c_1^2(M) < c_2(M)$$

entonces la estructura casi–compleja opuesta J' no es integrable.

Demostración.
Denotemos con $c_1^2(M)$, $c_2(M)$ y $c_1^2(-M)$, $c_2(-M)$ los números de Chern correspondientes a la estructura casi–compleja J y a la estructura casi–compleja J' respectivamente.

Para que una 4–variedad admita una estructura casi–compleja J ha de verificarse la condición de Wu [25]:

$$\tau(M) = \frac{1}{3}\left(c_1^2(M) - 2c_2(M)\right) \tag{3.11}$$

donde τ es el índice de Hirzebruch de M.

Análogamente, si M admite una estructura casi–compleja compatible con la orientación opuesta de la variedad, se ha de verificar la siguiente condición de Wu:

$$\tau(-M) = \frac{1}{3}\left(c_1^2(-M) - 2c_2(-M)\right) \tag{3.12}$$

siendo $\tau(-M)$ el índice de Hirzebruch de la variedad $-M$ (la variedad M con la orientación opuesta).

El número de Chern $c_2(M)$ coincide con la característica de Euler de M, y por tanto es un invariante topológico, así pues $c_2(M) = c_2(-M) = \chi(M)$. Sin embargo para el primer número de Chern opuesto, tenemos la relación:

$$c_1^2(-M) = -c_1^2(M) + 4c_2(M) \tag{3.13}$$

Para probar (1), si $c_1^2(M) < 2c_2(M)$, usando (3.13) obtenemos $c_1^2(-M) > 2c_2(-M)$. Miyaoka [20], prueba que una variedad 4–dimensional compacta conexa con característica de Euler no positiva cuyos números de Chern satisfagan $c_1^2(M) > 2c_2(M)$ no admite estructuras complejas. En consecuencia, se sigue la no existencia de estructuras complejas sobre M compatibles con la orientación opuesta.

Teniendo en cuenta la igualdad (3.13), si la característica de Euler es positiva y los números de Chern satisfacen $c_1^2(M) < c_2(M)$, se sigue que

$$c_1^2(-M) > 3c_2(-M) \tag{3.14}$$

y por tanto, de los resultados de Miyaoka se obtiene que, si la estructura casi–compleja opuesta es integrable, entonces la variedad compleja opuesta $(-M, J')$ ha de ser el plano proyectivo o una superficie de tipo general verificando

$$c_1^2(-M) \leq 3c_2(-M) \tag{3.15}$$

Ahora bien, Matsushita [17] prueba que el plano proyectivo no admite campos singulares de 2–planos orientados, y por tanto métricas semi–Riemannianas de signatura $(+,+,-,-)$. Por otro lado, la condición anterior nunca se satisface (sin más que considerar (3.14)), y por tanto, la estructura casi–compleja opuesta nunca será integrable. $\square$

Los siguientes ejemplos muestran variedades 4–dimensionales admitiendo estructuras casi–complejas y opuestas casi–complejas, las últimas nunca integrables en virtud del teorema anterior.

Ejemplo 43 4–variedades que admiten un campo de 2–planos orientados, y por tanto, una estructura casi–compleja y una casi–compleja opuesta, con la estructura casi–compleja opuesta nunca integrable.

(A) Consideremos la variedad $W_{m,n,k}$ obtenida como la suma conexa

$$W_{m,n,k} = m\mathbb{C}P^2 \sharp n\overline{\mathbb{C}P^2} \sharp k(\mathbb{C}P^1 \times R)$$

donde $\overline{\mathbb{C}P^2}$ es el espacio proyectivo usual con la orientación opuesta y R una curva de género 2.

Sus números de Chern satisfacen [18]:

$$\begin{aligned} c_1^2(-W_{m,n,k}) &= -m + 5n - 12k + 4 \\ c_2(W_{m,n,k}) &= m + n - 6k + 2 \\ c_1^2(W_{m,n,k}) &= 5m - n - 12k + 8 \end{aligned}$$

En [19] se prueba que $W_{m,n,k}$ admite un campo de 2–planos (y por tanto una estructura casi–compleja y otra casi–compleja opuesta) si y sólo si:

$$n \equiv m \mod 2 \qquad k \equiv m + 1 \mod 2$$

Teniendo en cuenta los anteriores resultados, la variedad $W_{m,m+2r,m+2s+1}$ no admite ninguna estructura compleja opuesta, siendo $1 \leq r \leq s$ $\square$

(B) Las *intersecciones completas* $M_d(\lambda)$ están definidas como las hipersuperficies cerradas formadas por raíces de polinomios homogéneos de grado d en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$. En el caso particular de ser $n = 3$, son superficies complejas, y sus números de Chern satisfacen [10]:

$$c_1^2(M_d(\lambda)) = (4-d)^2 d$$

$$c_2(M_d(\lambda)) = (6-4d+d^2)d$$

Si M es una superficie compleja, admitirá un campo de 2–planos orientados si y sólo si sus números de Chern satisfacen:

$$c_1^2(M_d(\lambda)) - 5c_2(M_d(\lambda)) \equiv 0 \bmod 12$$

Tal condición la satisface cualquier entero $d \equiv 0 \bmod 6$, y por tanto, tales variedades admitirán una estructura casi–compleja y una estructura casi–compleja opuesta nunca integrable, puesto que $c_2(M_d(\lambda)) > 0$ y $c_1^2(M_d(\lambda)) < c_2(M_d(\lambda))$ □

3.2.4. Variedades Kähler y opuesta almost–Kähler

Definición 14 Decimos que una variedad (M, g, J, J') es *Kähler y opuesta almost–Kähler* si y sólo si $\nabla J = 0$ y $d\omega' = 0$.

3.2.5. Variedades almost–Kähler y opuesta compleja

Definición 15 Dada una variedad (M, g, J, J'), decimos que es *almost Kähler y opuesta compleja* si y sólo si $d\omega = 0$ y $[J', J'] = 0$.

3.2.6. Variedades Kähler y opuesta compleja

Definición 16 Una variedad (M, g, J, J') tal que $\nabla J = 0$ y $[J', J'] = 0$ decimos que es *Kähler y opuesta compleja.*

Capítulo 4

Variedades 4–dimensionales doblemente casi–hermíticas

En este capítulo pondremos de manifiesto las relaciones obtenidas como aplicación de las fórmulas de Bochner descritas anteriormente al estudio de las variedades doblemente casi–hermíticas en dimensión cuatro. Tales resultados nos permitirán establecer condiciones en la curvatura que garanticen que la estructura local de la variedad es un producto y esta se comporta como una variedad doblemente Kähler.

4.1. Introducción

En esta primera parte del capítulo trataremos algunos resultados sobre variedades 4–dimensionales doblemente casi–hermíticas que no hacen uso de la compacidad de la variedad.

4.1.1. Armonicidad de las formas de Kähler

Sea (M^4, g, J, J') una variedad 4–dimensional doblemente casi–hermítica. Como ya hemos visto en el capítulo anterior dedicado a estructuras doblemente casi–hermíticas, podemos elegir una base ortonormal $B = \{e_1, Je_1, e_2, Je_2\}$ de $\mathfrak{X}(M)$ donde $\{e_1, Je_1\}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{X}^+(M)$ y $= \{e_2, Je_2\}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{X}^-(M)$. De esta forma la estructura casi–compleja opuesta J' verifica

$$J'(e_1) = Je_1 \qquad\qquad J'(e_2) = -Je_2$$

lo que muestra que los planos generados por $\{e_1, Je_1\}$ y por $\{e_2, Je_2\}$ son J'–invariantes.

Fijamos ahora como orientación la determinada por la estructura casi–compleja J y vamos a calcular el *operador estrella de Hodge* sobre las 2–formas de Kähler ω y ω'.

Teniendo en cuenta que (M^4, g) es una variedad 4–dimensional, fijamos una base ortonormal positivamente orientada $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Si denotamos por $\bigwedge^2 = \bigwedge^2(M)$ al espacio de 2–formas sobre la variedad M, el operador *estrella de Hodge* $* : \bigwedge^2 \longrightarrow \bigwedge^2$ está determinado por

$$
\begin{array}{lcl}
*(e^1 \wedge e^2) = e^3 \wedge e^4 & , & *(e^1 \wedge e^3) = e^4 \wedge e^2, \\
*(e^1 \wedge e^4) = e^2 \wedge e^3 & , & *(e^2 \wedge e^3) = e^1 \wedge e^4, \\
*(e^2 \wedge e^4) = e^3 \wedge e^1 & , & *(e^3 \wedge e^4) = e^1 \wedge e^2.
\end{array}
\tag{4.1}
$$

donde $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ es la base de 1–formas dual de B.

Respecto al producto interior de 2–formas definido en el capítulo 1

$$\langle\langle X \wedge Y, Z \wedge V \rangle\rangle := g(X,Z)g(Y,V) - g(Y,Z)g(X,V)$$

se tiene que

$$\langle\langle *(e^i \wedge e^j), e^k \wedge e^l \rangle\rangle = \langle\langle e^i \wedge e^j, *(e^k \wedge e^l) \rangle\rangle,$$

lo que prueba que el operador estrella de Hodge $*$ es auto–adjunto. Además, dado que $*^2 = Id$, sus autovalores son 1 y -1 y podemos descomponer $\bigwedge^2$ como $\bigwedge^2 = \bigwedge^2_+ \oplus \bigwedge^2_-$, donde

$$\textstyle\bigwedge^2_+ = \{V \in \bigwedge^2 \,/\, *V = V\} \qquad \bigwedge^2_- = \{V \in \bigwedge^2 \,/\, *V = -V\}.$$

Señalemos que los dos subgrupos $\bigwedge^2_\pm$ tienen igual dimensión $\dim \bigwedge^2_+ = \dim \bigwedge^2_- = 3$.

Así pues, para calcular el *operador estrella de Hodge* sobre las 2–formas de Kähler ω y ω' asociadas a las estructuras (g, J) y (g, J') repectivamente, lo primero que haremos será expresarlas en una base adaptada $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2\} \equiv \{e_1, J'e_1, e_2, -J'e_2\}$.
Entonces

$$\omega = e^1 \wedge Je^1 + e^2 \wedge Je^2$$

$$\omega' = e^1 \wedge Je^1 - e^2 \wedge Je^2$$

Ahora bien, si observamos en (4.1) cómo actúa el operador *estrella de Hodge* sobre las 2–formas es inmediato que

$$*\omega = \omega \qquad \text{y} \qquad *\,\omega' = -\omega'$$

Observación 44 Teniendo en cuenta la expresión del laplaciano $\Delta = d\delta + \delta d$, si ω es cerrada, entonces $\Delta\omega = d\delta\omega = d(\pm * d*)\omega = 0$, lo que prueba que las 2–formas de Kähler ω y ω' son armónicas si y sólo si son cerradas.

4.2. Variedades doblemente almost–Kähler

Teorema 45 *Sea* (M^4, g, J, J') *una variedad doblemente almost–Kähler tal que la curvatura seccional* $K \geq 0$*, entonces* (M^4, g, J, J') *es una variedad doblemente Kähler.*

Demostración.
Por ser (M^4, g, J) una variedad doblemente almost–Kähler, tanto ω como ω' son 2–formas cerradas. Como ω es cerrada, entonces $\Delta\omega = 0$ como probaba la Observación 44. Así, aplicando la primera fórmula de Weitzenbock (2.1) tenemos

$$0 = \Delta\omega = -\nabla^2\omega + \widetilde{R}\omega \Rightarrow \nabla^2\omega = \widetilde{R}\omega \tag{4.2}$$

Además $|\omega|^2 = \langle\omega, \omega\rangle$ es constante y, por tanto, $\Delta|\omega|^2 = 0$.
Aplicando la segunda fórmula de Weitzenbock (2.2) obtenemos

$$0 = -\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = 2\|\nabla\omega\|^2 + \langle\nabla^2\omega, \omega\rangle$$

Así pues

$$\|\nabla\omega\|^2 = -\frac{1}{2}\langle\nabla^2\omega, \omega\rangle = -\frac{1}{2}\langle\widetilde{R}\omega, \omega\rangle$$

ya que, por (4.2), $\nabla^2\omega = \widetilde{R}\omega$.
Como consecuencia de que $\langle\widetilde{R}\omega, \omega\rangle = 4tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}})$ [7], en el caso de que (M^4, g, J) sea una variedad almost–Kähler, tenemos

$$\|\nabla\omega\|^2 = -2tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}})$$

Como estábamos suponiendo que tanto ω como ω' eran 2–formas cerradas tenemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla\omega\|^2 &= -2tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}}) \\ \|\nabla\omega'\|^2 &= -2tr(R_{|_{\mathcal{U'}_2^\perp}}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por tanto, a partir de aquí calcularemos $tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}})$ y $tr(R_{|_{\mathcal{U'}_2^\perp}})$

Consideramos J y J' como estructuras con coeficientes complejos y denominamos por $\bigwedge^{1,0} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \text{ t.q. } JX = iX\}$. Es conocido que este espacio tiene dimensión dos y se tiene que $A = \{\frac{e_1 - iJe_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2 - iJe_2}{\sqrt{2}}\}$ es una base de $\bigwedge^{1,0}$, ya que son ortogonales y unitarios.
De esta forma, una base de $\bigwedge^{2,0}$ será

$$A' = \{\frac{e_1 - iJe_1}{\sqrt{2}} \wedge \frac{e_2 - iJe_2}{\sqrt{2}}\} = \{\frac{e_1 \wedge e_2 - Je_1 \wedge Je_2}{\sqrt{2}} - i\left(\frac{e_1 \wedge Je_2 + Je_1 \wedge e_2}{\sqrt{2}}\right)\}$$

Entonces tenemos la siguiente base para $[[\bigwedge^{2,0} \oplus \bigwedge^{0,2}]]$, donde recordemos que $[[\quad]]$ denotaba la parte real

$$A'' = \{\frac{e_1 \wedge e_2 - Je_1 \wedge Je_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_1 \wedge Je_2 + Je_1 \wedge e_2}{\sqrt{2}}\}$$

Llamaremos

$$\alpha_1 = \frac{e_1 \wedge e_2 - Je_1 \wedge Je_2}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_2 = \frac{e_1 \wedge Je_2 + Je_1 \wedge e_2}{\sqrt{2}}$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{U}_2^\perp = [[\bigwedge^{2,0} \oplus \bigwedge^{0,2}]]$ estamos en condiciones de calcular el término $tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}}) = R(\alpha_1)\alpha_1 + R(\alpha_2)\alpha_2$, donde

- $$\begin{aligned} R(\alpha_1)\alpha_1 &= -\frac{1}{2}[R(e_1, e_2, e_1, e_2) - R(e_1, e_2, Je_1, Je_2) - R(Je_1, Je_2, e_1, e_2) \\ &\quad + R(Je_1, Je_2, Je_1, Je_2)] \\ &= -\frac{1}{2}[-K(e_1, e_2) - K(Je_1, Je_2) - 2R(e_1, e_2, Je_1, Je_2)] \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} R(\alpha_2)\alpha_2 &= -\frac{1}{2}[R(e_1, Je_2, e_1, Je_2) + R(e_1, Je_2, Je_1, e_2) + R(Je_1, e_2, e_1, Je_2) \\ &\quad + R(Je_1, e_2, Je_1, e_2)] \\ &= -\frac{1}{2}[-K(e_1, Je_2) - K(Je_1, e_2) + 2R(e_1, Je_2, Je_1, e_2)] \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}}) = \; & -\frac{1}{2}[-K(e_1, e_2) - K(e_1, Je_2) - K(Je_1, e_2) - K(Je_1, Je_2) \\ & +2R(e_1, Je_2, Je_1, e_2) - 2R(e_1, e_2, Je_1, Je_2)] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ahora procediendo de la misma forma con la estructura J', consideramos el espacio $\bigwedge'^{1,0} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \text{ t.q. } J'X = iX\}$ y

$$B = \{\frac{e_1 - iJ'e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2 - iJ'e_2}{\sqrt{2}}\} = \{\frac{e_1 - iJe_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2 + iJe_2}{\sqrt{2}}\}$$

es una base de $\bigwedge'^{1,0}$. Entonces, una base de $\bigwedge'^{2,0}$ es

$$B' = \{\frac{e_1 - iJe_1}{\sqrt{2}} \wedge \frac{e_2 + iJe_2}{\sqrt{2}}\} = \{\frac{e_1 \wedge e_2 + Je_1 \wedge Je_2}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{e_1 \wedge Je_2 - Je_1 \wedge e_2}{\sqrt{2}}\right)\}$$

y, por tanto, la base de $[[\bigwedge'^{2,0} \oplus \bigwedge'^{0,2}]]$ es

$$B'' = \{\frac{e_1 \wedge e_2 + Je_1 \wedge Je_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_1 \wedge Je_2 - Je_1 \wedge e_2}{\sqrt{2}}\}$$

Llamamos

$$\beta_1 = \frac{e_1 \wedge e_2 + Je_1 \wedge Je_2}{\sqrt{2}}$$

$$\beta_2 = \frac{e_1 \wedge Je_2 - Je_1 \wedge e_2}{\sqrt{2}}$$

Como $\mathcal{U}'^{\perp}_2 = [[\bigwedge'^{2,0} \oplus \bigwedge'^{0,2}]]$, también estamos en condiciones de calcular el término $tr(R_{|_{\mathcal{U}'^{\perp}_2}}) = R(\beta_1)\beta_1 + R(\beta_2)\beta_2$.

- $$\begin{aligned} R(\beta_1)\beta_1 &= -\frac{1}{2}[R(e_1, e_2, e_1, e_2) + R(e_1, e_2, Je_1, Je_2) + R(Je_1, Je_2, e_1, e_2) \\ &\quad + R(Je_1, Je_2, Je_1, Je_2)] \\ &= -\frac{1}{2}[-K(e_1, e_2) - K(Je_1, Je_2) + 2R(e_1, e_2, Je_1, Je_2)] \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} R(\beta_2)\beta_2 &= -\frac{1}{2}[R(e_1, Je_2, e_1, Je_2) - R(e_1, Je_2, Je_1, e_2) - R(Je_1, e_2, e_1, Je_2)+ \\ &\quad + R(Je_1, e_2, Je_1, e_2)] \\ &= -\frac{1}{2}[-K(e_1, Je_2) - K(Je_1, e_2) - 2R(e_1, Je_2, Je_1, e_2)] \end{aligned}$$

Y así tenemos

$$\begin{aligned} tr(R_{|_{\mathcal{U}'^{\perp}_2}}) = \; & -\frac{1}{2}[-K(e_1, e_2) - K(e_1, Je_2) - K(Je_1, e_2) - K(Je_1, Je_2)- \\ & -2R(e_1, Je_2, Je_1, e_2) + 2R(e_1, e_2, Je_1, Je_2)] \end{aligned} \tag{4.5}$$

Por tanto, sumando las dos ecuaciones en (4.3), y utilizando (4.4) y (4.5) obtenemos

$$\|\nabla\omega\|^2 + \|\nabla\omega'\|^2 = -2[K(e_1, e_2) + K(e_1, Je_2) + K(Je_1, e_2) + K(Je_1, Je_2)] \tag{4.6}$$

Por tanto, si la curvatura seccional $K \geq 0$, como $\|\nabla\omega\|^2$ y $\|\nabla\omega'\|^2$ son no negativos, entonces ambos tienen que anularse. Entonces (M^4, g, J) es una variedad doblemente Kähler. $\square$

Ejemplo 46 Por lo visto en (3.2) sabemos que el producto corchete de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ cuyo grupo de Lie G sea doblemente almost–Kähler está caracterizado por

- $[X, Y] = aX + bY$
- $[X, Z] = eX + fY + gZ + hT$
- $[X, T] = iX + jY + kZ - gT$
- $[Y, Z] = mX - eY + nZ + oT$
- $[Y, T] = qX - iY + pZ - nT$
- $[Z, T] = cZ + dT$

Si ahora anulamos todos los coeficientes excepto $b = e = d = 1$ y $g = -1$, tenemos el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \{X, Y, Z, T\}$ definida por los corchetes:

- $[X, Y] = Y$
- $[X, Z] = X - Z$
- $[X, T] = T$
- $[Y, Z] = -Y$
- $[Y, T] = 0$
- $[Z, T] = T$

En primer lugar, es fácil probar que este conjunto así definido es efectivamente un álgebra de Lie, i.e. que este producto corchete verifica las ecuaciones de Jacobi. Por tanto, podemos concluir que el conjunto $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y que su grupo de Lie asociado G es una variedad doblemente almost–Kähler.
Sin embargo esta variedad no es doblemente Kähler, de hecho no es Kähler con ninguna de las dos estructuras ya que

- $$\begin{aligned}[J, J](X, Z) &= [JX, JZ] - J[JX, Z] - J[X, JZ] - [X, Z] \\ &= [Y, T] - J[Y, Z] - J[X, T] - (X - Z) = JY - JT - X + Z \\ &= -X + Z - X + Z = 2(Z - X) \neq 0\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}[J', J'](X, Z) &= [J'X, J'Z] - J'[J'X, Z] - J'[X, J'Z] - [X, Z] \\ &= -[Y, T] - J'[Y, Z] + J'[X, T] - (X - Z) = J'Y + J'T - X + Z \\ &= -X + Z - X + Z = 2(Z - X) \neq 0\end{aligned}$$

lo que muestra que J y J' no son estructuras complejas.

Veamos que, como predice el teorema anterior $K < 0$, o al menos $K(X, Z) + K(X, T) + K(Y, Z) + K(Y, T) < 0$.
El siguiente paso será calcular la conexión de Levi–Civita para los elementos de la base. Esta está determinada por los términos no nulos

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\nabla_X X = -Z & \nabla_Z Z = -X \\
\nabla_X Z = X & \nabla_T X = -T \\
\nabla_Y X = -Y & \nabla_T Z = -T \\
\nabla_Y Y = X + Z & \nabla_T T = X + Z \\
\nabla_Y Z = -Y &
\end{array}
\right. \tag{4.7}
$$

Una vez hemos calculado la conexión de Levi–Civita para los elementos de la base, podemos calcular el signo de $K(X,Z) + K(X,T) + K(Y,Z) + K(Y,T)$.

$$
\begin{aligned}
\bullet K(X,Z) &= R(X,Z,Z,X) = g(\nabla_X \nabla_Z Z - \nabla_Z \nabla_X Z - \nabla_{[X,Z]} Z, X) \\
&= g(\nabla_X(-X) - \nabla_Z X - \nabla_X Z + \nabla_Z Z, X) = g(Z - Z - X - X, X) = -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet K(X,T) &= R(X,T,T,X) = g(\nabla_X \nabla_T T - \nabla_T \nabla_X T - \nabla_{[X,T]} T, X) \\
&= g(\nabla_X X + \nabla_X Z - X - Z, X) = g(-Z + X - X - Z, X) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet K(Y,Z) &= R(Y,Z,Z,Y) = g(\nabla_Y \nabla_Z Z - \nabla_Z \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,Z]} Z, Y) \\
&= g(-\nabla_Y X + \nabla_Z Y + \nabla_Y Z, Y) = g(Y - Y, Y) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bullet K(Y,T) &= R(Y,T,T,Y) = g(\nabla_Y \nabla_T T - \nabla_T \nabla_Y T - \nabla_{[Y,T]} T, Y) \\
&= g(\nabla_Y X + \nabla_Y Z, Y) = g(-Y - Y, Y) = -2
\end{aligned}
$$

Por tanto, tal y como nos afirmaba el teorema,

$$K(X,Z) + K(X,T) + K(Y,Z) + K(Y,T) = -4 < 0$$

4.3. Variedades Kähler y opuestas almost–Kähler

Sea (M^{2n}, g, J) una variedad casi–compleja $2n$–dimensional. Sean X,Y dos vectores unitarios del espacio tangente $T_x M$. Entonces la *curvatura biseccional* del plano generado por $\{X,Y\}$ es

$$B^J(X,Y) = R(X, JX, JY, Y)$$

Si ahora aplicamos la *primera identidad de Bianchi* tenemos

$$B^J(X,Y) = -R(JY, X, JX, Y) - R(JX, JY, X, Y)$$

y si la variedad M es Kähler, B^J es la suma de dos curvaturas seccionales

$$B^J(X,Y) = R(JY, X, X, JY) + R(X, Y, Y, X) = K(X, JY) + K(X, Y)$$

Sea ahora (M^4, g, J, J') una variedad doblemente casi–hermítica. Por lo que hemos visto al comienzo del capítulo anterior cuando definimos las variedades doblemente casi–hermíticas, en dimensión 4 podemos encontrar una base $\{e_1, Je_1, e_2, Je_2\}$ tal que $J = J'$ en el plano generado por $\{e_1, Je_1\}$ y $J = -J'$ en el plano generado por $\{e_2, Je_2\}$. Así pues encontramos la siguiente relación entre $B^J(e_1, e_2)$ y $B^{J'}(e_1, e_2)$.

$$\begin{aligned} B^J(e_1, e_2) &= R(e_1, Je_1, Je_2, e_2) \\ &= -R(e_1, Je_1, (-Je_2), e_2) = -R(e_1, J'e_1, J'e_2, e_2) \\ &= -B^{J'}(e_1, e_2) \end{aligned}$$

Observación 47 Notar que, debido a que la métrica g es la misma para ambas estructuras casi–hermíticas (g, J) y (g, J'), lo serán su curvatura seccional, su tensor de Ricci y su curvatura escalar. Sin embargo, el tensor de *Ricci**, la curvatura escalar s^* y la curvatura biseccional B^J dependen de la estructura casi–compleja considerada sobre la variedad.

Por tanto, B^J y $B^{J'}$ son esencialmente distintas y sólo tenemos la relación antes citada en ciertos planos muy específicos de la variedad M.

Teorema 48 *Sea (M^4, g, J, J') una variedad Kähler y opuesta almost–Kähler tal que $B^J \geq 0$, entonces (M^4, g, J, J') es una variedad doblemente Kähler.*

Demostración.
Puesto que (M^4, g, J, J') una variedad Kähler y opuesta almost–Kähler (4.3) resulta

$$\begin{aligned} \|\nabla\omega\|^2 &= -tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}}) = 0 \\ \|\nabla\omega'\|^2 &= -2tr(R_{|_{\mathcal{U}'^\perp_2}}) \end{aligned}$$

Por tanto, sumando ambas ecuaciones tenemos

$$\|\nabla\omega'\|^2 = -2\left(tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}}) + tr(R_{|_{\mathcal{U}'^\perp_2}})\right)$$

Con los resultados (4.4) y (4.5)

$$tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}}) + tr(R_{|_{\mathcal{U}'^\perp_2}}) = K(e_1, e_2) + K(e_1, Je_2) + K(Je_1, e_2) + K(Je_1, Je_2)$$

Sin embargo, en este caso, por ser la variedad Kähler, tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} K(e_1, e_2) &= K(Je_1, Je_2) \\ K(e_1, Je_2) &= K(Je_1, e_2) \end{aligned}$$

entonces

$$tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}}) + tr(R_{|_{\mathcal{U}'^\perp_2}}) = 2\left(K(e_1, e_2) + K(Je_1, e_2)\right)$$

Pero, en una variedad Kähler $K(e_1, e_2) + K(Je_1, e_2) = B^J(e_1, e_2)$. Así pues

$$tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}}) + tr(R_{|_{\mathcal{U}'^\perp_2}}) = 2B^J(e_1, e_2)$$

Teniendo en cuenta estos resultados, obtenemos la ecuación

$$\|\nabla\omega'\|^2 = -4B^J(e_1, e_2) \tag{4.8}$$

Como la curvatura biseccional asociada a la estructura (g, J) B^J es no negativa, entonces $B^J(e_1, e_2) \geq 0$ y por tanto $\|\nabla\omega'\|^2 \leq 0$

Entonces $\|\nabla\omega'\|^2 = 0$ y la variedad (M^4, g, J) es una variedad doblemente Kähler. □

Ejemplo 49 Al igual que en el caso en que la variedad es doblemente almost–Kähler, vamos a tomar como variedad G donde G es un grupo de Lie 4–dimensional y denotamos por $\mathfrak{g} = \{X, Y, Z, T\}$ su álgebra de Lie definida por los corchetes:

- $[X, Y] = 0$
- $[X, Z] = 0$
- $[X, T] = X$
- $[Y, Z] = -2X$
- $[Y, T] = -Y$
- $[Z, T] = 2Z$

Se puede probar, del mismo modo que en el anterior ejemplo, que este conjunto provisto de este producto corchete es un álgebra de Lie i.e. que verifica la *ecuación de Jacobi*. Puesto que este corchete verifica las ecuaciones dadas en (3.2) con todos los coeficientes cero salvo $i = 1$, $m = -2$ y $c = 2$, podemos asegurar que la variedad G es doblemente almost–Kähler. También se puede ver que la variedad es Kähler ya que se cumple que $[J, J] = 0$ pero sin embargo no es opuesta Kähler ya que

$$\begin{aligned}
[J', J'](X, Z) &= [J'X, J'Z] - J'[J'X, Z] - J'[X, J'Z] - [X, Z] \\
&= -[Y, T] - J'[Y, Z] + J'[X, T] - [X, Z] \\
&= Y + 2J'X + J'X = 4Y \neq 0
\end{aligned}$$

Así pues, el grupo de Lie que tiene como álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una variedad Kähler y opuesta almost–Kähler pero no doblemente Kähler.

Entonces, el teorema nos afirma que esta variedad tiene $B^J(X, Z) < 0$.

Para verificarlo, calculamos la conexión de Levi–Civita sobre los elementos de la base utilizando la *fórmula de Koszul* de modo análogo a lo hecho en el ejemplo de la sección anterior y obtenemos que está caracterizada por los términos no nulos

$$\left\{\begin{array}{ll}
\nabla_X X = -T & \nabla_Z X = -Y \\
\nabla_X Y = Z & \nabla_Z Y = X \\
\nabla_X T = X & \nabla_Z Z = -2T \\
\nabla_Y Y = T & \nabla_Z T = 2Z \\
\nabla_Y T = -Y &
\end{array}\right. \tag{4.9}$$

Si ahora calculamos $B^J(X,Z)$ tenemos que

$$\begin{aligned} B^J(X,Z) &= R(X,JX,JZ,Z) = g(\nabla_X\nabla_{JX}JZ - \nabla_{JX}\nabla_X JZ - \nabla_{[X,JX]}JZ, Z) \\ &= g(\nabla_X\nabla_Y T - \nabla_Y\nabla_X T - \nabla_{[X,Y]}T, Z) = g(-\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\ &= g(-Z - Z, Z) = -2 < 0 \end{aligned}$$

que es exactamente lo que queríamos demostrar para verificar el teorema.

4.4. Variedades doblemente complejas

A partir de este momento todas las variedades a las que haremos referencia serán compactas y así podremos aplicar la fórmula de Bochner (2.9) para U_n–estructuras vista en el segundo capítulo. Sea (M^4, g, J, J') una variedad 4–dimensional compacta doblemente casi–hermítica. Por (2.9)

$$2E_1 - E_2 + (n-1)E_4 = \frac{1}{2}\int_M (s - s^*)$$

donde $E_j = \int_M |(\nabla\omega)_j|^2$. Teniendo en cuenta que nuestro estudio se centra en variedades 4–dimensionales (i.e. $n = 2$) y en ese caso $E_1 = E_3 = 0$, la fórmula de Bochner resulta

$$E_4 - E_2 = \frac{1}{2}\int_M (s - s^*)$$

Pero se puede ver en [7] que $s - s^* = \langle \widetilde{R}\omega, \omega\rangle = 4tr(R_{|_{\mathcal{U}_n^\perp}})$, entonces la fórmula de Bochner será

$$E_4 - E_2 = 2\int_M tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}}) \tag{4.10}$$

Como estamos trabajando con variedades doblemente casi–hermíticas, podemos aplicar la fórmula de Bochner para U_2–estructuras para la estructura J y para la estructura J' y tenemos

$$\begin{aligned} E_4 - E_2 &= 2\textstyle\int_M tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}}) \\ E'_4 - E'_2 &= 2\textstyle\int_M tr(R_{|_{\mathcal{U'}_2^\perp}}) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Teorema 50 *Sea (M^4, g, J, J') una variedad 4–dimensional compacta doblemente compleja tal que la curvatura seccional $K \leq 0$, entonces (M^4, g, J, J') es una variedad doblemente Kähler.*

Demostración.
Por ser M una variedad compacta doblemente compleja sabemos que $E_2 = E'_2 = 0$, entonces las fórmulas (4.11) quedarán

$$E_4 = 2\int_M tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}})$$
$$E'_4 = 2\int_M tr(R_{|_{\mathcal{U}'^\perp_2}})$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$E_4 + E'_4 = 2\int_M (tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}}) + tr(R_{|_{\mathcal{U}'^\perp_2}}))$$

Teniendo en cuenta (4.4) y (4.5) tenemos

$$E_4 + E'_4 = 2\int_M (K(e_1, e_2) + K(e_1, Je_2) + K(Je_1, e_2) + K(Je_1, Je_2))$$

Si ahora la curvatura seccional $K \leq 0$, entonces $E_4 = E'_4 = 0$ y por tanto la variedad M es doblemente Kähler. □

En los ejemplos siguientes pondremos de manifiesto la necesidad de las condiciones impuestas en el Teorema 50, tanto en lo referente al signo de la curvatura como en lo tocante a la compacidad de la variedad.

Ejemplo 51 Tomaremos como ejemplo la *variedad de Kodaira–Thurston.*

La variedad de Kodaira –Thurston es el grupo de Lie G que tiene como álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \{X, Y, Z, T\}$ verificando $[X, Y] = Z$ y el resto de los corchetes se anulan. Se puede probar que, efectivamente, estos corchetes verifican la ecuación de Jacobi. Por tanto $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie. Además es conocido que esta variedad es compacta doblemente compleja pero no doblemente Kähler. Entonces, para verificar el teorema, debería ser $K > 0$.
Para calcular el signo de la curvatura seccional vamos a calcular la conexión de Levi–Civita sobre los elementos de la base usando la *fórmula de Koszul*, obteniéndose que está determinada por los siguientes términos no nulos

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\, Z \qquad \nabla_Y Z = \frac{1}{2}\, X \qquad \nabla_Z X = -\frac{1}{2}\, Y \tag{4.12}$$

Una vez tenemos calculada la conexión de Levi–Civita sobre los elementos de la base, podemos calcular el signo de $K(X, Z) + K(X, T) + K(Y, Z) + K(Y, T)$

- $K(X, Z) = R(X, Z, Z, X) = \frac{1}{2}\, g(\nabla_Z Y, X) = \frac{1}{4}\, g(X, X) = \frac{1}{4}$
- $K(X, T) = R(X, T, T, X) = 0$

- $K(Y,Z) = R(Y,Z,Z,Y) = -\frac{1}{2}\, g(\nabla_Z X, Y) = \frac{1}{4}\, g(Y,Y) = \frac{1}{4}$

- $K(Y,T) = R(Y,T,T,Y) = 0$

Entonces $K(X,Z) + K(X,T) + K(Y,Z) + K(Y,T) = \frac{1}{2} > 0$, que era exactamente lo que nos afirmaba el teorema.

Ahora vamos a ver si la condición de compacidad impuesta en el teorema es realmente necesaria. Para ello estudiaremos el siguiente ejemplo de una variedad no compacta.

Ejemplo 52 Sea M el producto warped de $\mathbb{R}^2$ por si mismo $\mathbb{R}^2 \times_f \mathbb{R}^2$, donde

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

En esta variedad tenemos las coordenadas (x_1, x_2, y_1, y_2) junto con la métrica

$$g_{(x_1,x_2,y_1,y_2)} = dx_1^2 + dx_2^2 + f^2(x_1,x_2)(dy_1^2 + dy_2^2)$$

Definimos las estructuras

$$J\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad J\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y_2}$$

$$J'\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \qquad J'\frac{\partial}{\partial y_1} = -\frac{\partial}{\partial y_2}$$

Se puede comprobar facilmente que J y J' definen dos estructuras complejas en $\mathbb{R}^2 \times_f \mathbb{R}^2$. Para adecuar la notación a la empleada en los ejemplos anteriores vamos a usar el siguiente convenio.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = X \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = Y \qquad \frac{\partial}{\partial y_1} = Z \qquad \frac{\partial}{\partial y_2} = T$$

Entonces la variedad $\mathbb{R}^2 \times_f \mathbb{R}^2$ es una variedad doblemente compleja no compacta que se sabe que no es doblemente Kähler dado que no es localmente isométrica a un producto. Vamos a calcular el signo de $K(X,Z) + K(X,T) + K(Y,Z) + K(Y,T)$ y veremos que, al igual que nos afirma el teorema, es negativo. Aplicando los resultados sobre el tensor curvatura en un producto warped que aparecen en [21] tenemos

- $K(X,Z) = R(X,Z,Z,X) = -g(\frac{1}{f}\nabla_X(grad\, f), X)$

- $K(X,T) = R(X,T,T,X) = -g(\frac{1}{f}\nabla_X(grad\, f), X)$

- $K(Y,Z) = R(Y,Z,Z,Y) = -g(\frac{1}{f}\nabla_Y(grad\, f), Y)$

- $K(Y,T) = R(Y,T,T,Y) = -g(\frac{1}{f}\nabla_Y(grad\, f), Y)$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\bullet K(X,T) = K(X,Z) \quad &= -\frac{1}{f}\, g\,(\nabla_X(\frac{\partial f}{\partial x_1}X + \frac{\partial f}{\partial x_2}Y), X) = \\
&= -\frac{1}{f}\, g\,(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}X + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}Y, X) = -\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \\
\bullet K(Y,T) = K(Y,Z) \quad &= -\frac{1}{f}\, g\,(\nabla_Y(\frac{\partial f}{\partial x_1}X + \frac{\partial f}{\partial x_2}Y), Y) = \\
&= -\frac{1}{f}\, g\,(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}X + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}Y, Y) = -\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}
\end{aligned}$$

Entonces

$$K(X,Z) + K(X,T) + K(Y,Z) + K(Y,T) = -\frac{2}{f}\,(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2})$$

Tomando el caso particular en que

$$f = x_1^2 + 1$$

nos queda

$$K(X,Z) + K(X,T) + K(Y,Z) + K(Y,T) = -\frac{4}{x_1^2+1} < 0$$

4.5. Variedades almost–Kähler y opuestas complejas

Teorema 53 *Sea (M^4, g, J, J') una variedad compacta almost–Kähler y opuesta compleja tal que $B^J \leq 0$, entonces la variedad (M^4, g, J, J') es doblemente Kähler.*

Demostración.
Por ser M una variedad compacta almost–Kähler tenemos que $E_4 = 0$ y por ser opuesta compleja $E_2' = 0$. Así pues, las fórmulas (4.11) nos quedan

$$-E_2 = 2\int_M tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}})$$

$$E_4' = 2\int_M tr(R_{|_{\mathcal{U}'^\perp_2}})$$

Si ahora restamos ambas ecuaciones obtenemos

$$E_2 + E_4' = 2\int_M [tr(R_{|_{\mathcal{U}'^\perp_2}}) - tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}})]$$

Teniendo en cuenta las expresiones dadas en (4.4) y (4.5) para $tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}})$ y $tr(R_{|_{\mathcal{U'}_2^\perp}})$ respectivamente obtenemos

$$\begin{aligned} E_2 + E_4' &= 2\int_M [2R(e_1, Je_2, Je_1, e_2) - 2R(e_1, e_2, Je_1, Je_2)] \\ &= -4\int_M R(e_1, Je_1, e_2, Je_2) = 4\int_M B^J(e_1, e_2) \end{aligned}$$

Entonces, de esta ecuación podemos deducir trivialmente que si $B^J \leq 0$ la variedad M será doblemente Kähler. □

Ejemplo 54 Al igual que en los casos anteriores, vamos a tomar como variedad G donde G es un grupo de Lie 4–dimensional y $\mathfrak{g} = \{X, Y, Z, T\}$ su álgebra de Lie definida por los corchetes:

- $[X, Y] = 2X$
- $[X, Z] = 2T$
- $[X, T] = 0$
- $[Y, Z] = Z$
- $[Y, T] = -T$
- $[Z, T] = 0$

Tras unos sencillos cálculos se comprueba fácilmente que se verifica la ecuación de Jacobi para este producto corchete, por tanto, este conjunto forma un álgebra de Lie. Una vez tenemos probado que $\mathfrak{g}$ así definida es un álgebra de Lie vamos a analizar la variedad G que define para saber sobre que tipo de variedad estamos trabajando. Puesto que estos corchetes verifican las ecuaciones dadas en (3.2) con todos los coeficientes cero salvo $n = 1$ y $a = h = 2$, podemos asegurar que la variedad G es doblemente almost–Kähler.
Además, se puede probar que también es opuesta Kähler, ya que $[J', J'] = 0$. Por tanto nuestra variedad G es almost–Kähler y opuesta Kähler, y en particular es almost–Kähler y opuesta compleja. Además la variedad G no es doblemente Kähler ya que

$$\begin{aligned} [J, J](X, Z) &= [JX, JZ] - J[JX, Z] - J[X, JZ] - [X, Z] \\ &= [Y, T] - J[Y, Z] - J[X, T] - [X, Z] = -T - T - 2T = -4T \neq 0 \end{aligned}$$

Entonces, el teorema nos afirma que esta variedad tiene curvatura biseccional asociada a la estructura (g, J) $B^J(X, Z) > 0$. Por las relaciones existentes entre las curvaturas biseccionales asociadas a J y J', esto es equivalente a que $B^{J'}(X, Z) < 0$. Además, como la estructura J' es Kähler, $B^{J'}(X, Z) = K(X, T) + K(X, Z)$. Por tanto debemos probar que

$$B^{J'}(X, Z) = K(X, T) + K(X, Z) < 0$$

Para hallar el signo de esta suma de curvaturas seccionales es preciso conocer primero la conexión de Levi–Civita de la variedad que viene dada por los siguientes términos no nulos.

$$(4.13)\qquad \begin{cases} \nabla_X X = -2Y & \nabla_Z Z = Y \\ \nabla_X Y = 2X & \nabla_T Y = T \\ \nabla_X T = -Z & \nabla_T Z = X \\ \nabla_Z X = -T & \nabla_T T = -Y \\ \nabla_Z Y = -Z & \end{cases}$$

De esta forma tenemos

$$\begin{aligned} \textbf{a)}\ K(X,T) &= R(X,T,T,X) = g(\nabla_X \nabla_T T - \nabla_T \nabla_X T - \nabla_{[X,T]} T, X) \\ &= g(-\nabla_X Y + \nabla_T Z, X) = g(-2X + X, X) = -1 \\ \textbf{b)}\ K(X,Z) &= R(X,Z,Z,X) = g(\nabla_X \nabla_Z Z - \nabla_Z \nabla_X Z - \nabla_{[X,Z]} Z, X) \\ &= g(\nabla_X Y - \nabla_Z T - 2\nabla_T Z, X) = g(2X - X - 2X, X) = -1 \end{aligned}$$

Por tanto, tal y como nos afirmaba el teorema

$$B^{J'}(X,Z) = K(X,T) + K(X,Z) = -2 < 0$$

4.6. Variedades Kähler y opuestas complejas

Teorema 55 *Sea (M^4, g, J, J') una variedad compacta Kähler y opuesta compleja tal que $B^J \leq 0$, entonces la variedad (M^4, g, J, J') es doblemente Kähler.*

Demostración.
En este caso, como M es una variedad compacta Kähler sabemos que $E_2 = 0 = E_4$ y por ser opuesta compleja $E_2' = 0$. Entonces, las fórmulas (4.11) serán

$$0 = 2\int_M tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}})$$
$$E_4' = 2\int_M tr(R_{|_{\mathcal{U}'^\perp_2}})$$

Al igual que en el caso anterior restamos ambas ecuaciones y resulta

$$E_4' = 2\int_M [tr(R_{|_{\mathcal{U}'^\perp_2}}) - tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}})]$$

Teniendo en cuenta las expresiones dadas en (4.4) y (4.5) para $tr(R_{|_{\mathcal{U}_2^\perp}})$ y $tr(R_{|_{\mathcal{U}'^\perp_2}})$ respectivamente obtenemos

$$\begin{aligned} E_4' &= 2\int_M [2R(e_1, Je_2, Je_1, e_2) - 2R(e_1, e_2, Je_1, Je_2)] \\ &= -4\int_M R(e_1, Je_1, e_2, Je_2) = 4\int_M B^J(e_1, e_2) \end{aligned}$$

Al igual que antes, es evidente que si $B^J \leq 0$, entonces la variedad (M^4, g, J) es doblemente Kähler. □

En el ejemplo que veremos a continuación, el teorema nos permitirá determinar la no compacidad de un grupo de Lie G dado por un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, al ser dicha variedad Kähler y opuesta compleja, verificar la condición impuesta sobre la curvatura biseccional y, sin embargo, no ser doblemente Kähler.

Ejemplo 56 Veamos que el grupo de Lie G cuya álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ definida por los corchetes

- $[X, Y] = 2Y$
- $[Y, Z] = 0$
- $[X, Z] = Z$
- $[Y, T] = 0$
- $[X, T] = T$
- $[Z, T] = 2Y$

es una variedad Kähler y opuesta compleja. Tras unos cálculos sencillos se puede observar que este conjunto así definido es efectivamente un álgebra de Lie, i.e. que este producto corchete verifica las ecuaciones de Jacobi. Tampoco es complicado probar que $[J', J'] = 0$ y con ello garantizamos que el grupo de Lie G que tiene como álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una variedad opuesta compleja.

El siguiente paso será probar que es Kähler pero no opuesta Kähler. Para ello lo primero que hacemos es calcular su conexión de Levi–Civita utilizando la fórmula de Koszul y obtenemos que está determinada por los siguientes términos no nulos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla_Y X = -2Y & \nabla_Z Z = X \\ \nabla_Y Y = 2X & \nabla_Z T = Y \\ \nabla_Y Z = -T & \nabla_T X = -T \\ \nabla_Y T = Z & \nabla_T T = X \\ \nabla_Z X = -Z & \end{array} \right. \tag{4.14}$$

Una vez que hemos calculado la conexión de Levi–Civita, veremos que la variedad G es Kähler pero no opuesta Kähler. Para probar que la variedad es Kähler bastaría con verificar que $\nabla J = 0$ mediante un cálculo directo sobre los elementos de la base considerada. Sin embargo esta variedad no es opuesta Kähler ya que

$$\begin{aligned} (\nabla_Z J')X &= \nabla_Z(J'X) - J'(\nabla_Z X) \\ &= \nabla_Z Y + J'Z \\ &= -T - T = -2T \neq 0 \end{aligned}$$

Por tanto esta variedad es Kähler y opuesta compleja pero no doblemente Kähler. Bajo estas hipótesis nuestro resultado nos afirma que ha de ser $B^J(X,Z) > 0$ ya que en caso contrario implicaría que G sería una variedad doblemente Kähler. Sin embargo vemos que la curvatura biseccional $B^J(X,Z) < 0$ ya que

$$\begin{aligned} B^J(X,Z) &= R(X,JX,JZ,Z) \\ &= R(X,Y,T,Z) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y T - \nabla_Y \nabla_X T - \nabla_{[X,Y]} T, Z) = -2g(\nabla_Y T, Z) = -2 \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] V. Apostolov, T. Draghici, The curvature and the integrability of almost-Kahler manifolds: a survey, to appear in *Symplectic and Contact Topology: Interactions and Perspectives*, (eds. Y.Eliashberg, B. Khesin, F. Lalonde), Fields Institute Communications Series,AMS, 2003

[2] A. Beauville; Surfaces complexes et orientation, *Asterisque* **126** (1985), 41–43

[3] A. Bonome, R. Castro, E. García Río, L. M. Hervella, Y. Matsushita; *Almost complex manifolds with holomorphic distributions*, Rend. Mat. Appl. Serie VII **14** (1994), 567–589

[4] A. Bonome, R. Castro, E. García Río, L. M. Hervella, Y. Matsushita; *The Kähler-Einstein metrics on a K3-surface cannot be almost Kähler with respect to an opposite almost complex structure*, Kodai Math. J. **18** (1995), 506–514

[5] A. Bonome, L. M. Hervella, I. Rozas; On the classes of almost Hermitian structures on the tangent bundle of an almost contact metric manifold, *Acta Math. Hung.* **56** (1990), 29–37.

[6] W. M. Boothby; *An introduction to differencible manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1986

[7] G. Bor, L. Hernández Lamoneda; Bochner formulae for orthogonal G-structures on compact manifolds, *Differential Geom. Appl.* **15** (2001), 265–286

[8] M. Falcitelli, A. Farinola, S. Salamon; Almost–Hermitian geometry, *Differential Geom. Appl.* **4** (1994), 259–282

[9] E. García Río; *Variedades casi–hermíticas indefinidas*, Publ. del Depto. Geom. y Top., **80**, Universidad de Santiago de Compostela, 1992.

[10] A. Gray; *Tubes*, Addison–Wesley, Redwood City, 1990

[11] A. Gray, L. M. Hervella; The sixteen classes of almost-hermitian manifolds and their linear invariants, *Ann. Mat. Pura Appl.* **123** (1980), 35–58

[12] S. Gudmundsson, E. Kappos; On the geometry of tangent bundles, *Expo. Math.* **20** (2002) no. 1, 1–41

[13] L. Hernández Lamoneda, Curvature vs. almost Hermitian structures, *Geom. Dedicata* **79** (2000), 205–218.

[14] D. Husemoller; *Fibre bundles.* Third edition, Graduate Texts in Mathematics, **20**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[15] S. Kobayashi, K. Nomizu; *Foundations of Differencial Geometry, Vol. 1*, Interscience, 1963

[16] J. M. Lee; *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, **218**, NY: Springer, New York

[17] Y. Matsushita; Some Remarks on Fields of 2–planes on Compact Smooth 4–manifolds in Recent Development in Differencial Geometry, *Adv. Stud. Pure Math.* **22**, 153–167, Kinokuniya, Tokio, 1992.

[18] Y. Matsushita; Fields of oriented 2–planes and two kinds of almost complex structures on compact 4–dimensional manifolds, *Math. Z.* **207** (1991),281–291

[19] Y. Matsushita; Fields of 2–planes on simply–connected 4–manifolds, *Math. Ann.* **280** (1988), 687–689

[20] Y. Miyaoka; On the Chern numbers of Surfaces of General Type, *Inv. Math.* **42** (1977), 225–237

[21] B. O'Neill; *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*, Pure and applied Mathematics, Academic Press, New York, 1983.

[22] S. Salamon; *Riemannian geometry and holonomy groups*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **201**, Longman Scientific & Technical, Harlow, New York, 1989.

[23] S. Salamon; Hermitian geometry. *Invariations to geometry and topology*, Oxford Grad. Texts Math. , **7**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002, 233–291

[24] F. Tricerri, L. Vanhecke, Curvature tensors on almost Hermitian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981), 365–398.

[25] W. T. Wu; Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques, *Actual. Sci. Industr.* **1183** (1952)

[26] H. Wu; *The Bochner Technique in Differential Geometry*, Math. Rep. **3**, Harwood Academic, London, 1988, pages 289-538.

[27] K. Yano, M. Kon; *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, **3**, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1984.