Alberto Martín Méndez

ÁLGEBRAS DE LIE GRADUADAS Y ESTRUCTURAS DE SEGUNDO ORDEN ASOCIADAS

104

2004

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Universidade de Santiago de Compostela

Tesis Doctoral

Álgebras de Lie graduadas y estructuras de segundo orden asociadas

Memoria presentada por

Alberto Martín Méndez

Para optar al grado de Doctor en Matemáticas

Director:
Dr. Juan Francisco Torres Lopera

AGRADECIMIENTOS

1. Al Profesor J. F. Torres Lopera, de la U. S. C., que me propuso el tema y objetivos de esta tesis, por su trabajo de dirección y formación, por su colaboración continua en la tarea de llevarla a cabo durante el largo periodo de su desarrollo y por sus numerosas aportaciones a ella.

2. Al Profesor Y. Khakimdjanov, de la Universidad de Mulhouse, por su contribución en el capítulo cuarto y su ayuda en el estudio de las estructuras proyectivas sobre grupos de Lie filiformes.

3. Al Profesor J. A. Oubiña, de la U. S. C., por su asesoramiento en varias cuestiones técnicas, sus valiosas sugerencias, que han mejorado la redacción de esta memoria, y su apoyo.

4. Al Profesor M. de León, del C. S. I. C., por facilitarnos la comprensión de algunos de sus trabajos sobre G-estructuras de segundo orden y por su interés en el nuestro.

5. Al Profesor Ramón González, de la Universidad de Vigo, como investigador principal de los Proyectos de Investigación en los que he participado.

6. A todos los compañeros del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Vigo, y en especial a J. Durany, I. Bajo, E. Godoy e I. Area.

7. Al Departamento de Xeometría e Topoloxía de la U. S. C. en general, y a sus directores y secretarios en particular, por facilitarme los medios y el apoyo necesarios para desarrollar esta memoria, .

8. A los profesores M. Ladra, E. Macías, de la U. S. C., y Ana Vieites de la U. de Vigo, por su atención en momentos puntuales.

9. A la Universidad de Vigo, al Ministerio de Ciencia y Tecnología y a la Xunta de Galicia por su apoyo financiero a lo largo del período de realización de esta tesis a través de los proyectos UVIGO-1427, BFM2000-0513-C02/02, BFM2003-07353-C02/02, XUGA-32203A97 y PGIDT00PXI20706PR.

Índice general

INTRODUCCIÓN

Una **estructura de Cartan** de tipo $\mathbf{R}/\mathbf{S}$ sobre una variedad diferenciable M de igual dimensión que un espacio homogéneo *modelo* $\mathbf{R}/\mathbf{S}$ es un par (Q,ξ) formado por un $\mathbf{S}$-fibrado principal $\pi_Q\colon Q \to M$ y por una **conexión de Cartan** $\xi \in \bigwedge^1(Q,\mathfrak{R})$ de tipo $\mathbf{R}/\mathbf{S}$ sobre Q, siendo $\mathfrak{R}$ el álgebra de Lie del grupo de Lie $\mathbf{R}$. Recordemos que una conexión de Cartan ξ no es una conexión, sino una especie de generalización de la forma de Maurer-Cartan del grupo de Lie $\mathbf{R}$. Un ejemplo bien conocido es el de la estructura de Cartan afín que aparece sobre cualquier variedad M de dimensión n del modo siguiente: si $\mathcal{F}M$ denota el $GL(n,\mathbb{R})$-fibrado de las referencias lineales de M y $\theta \in \bigwedge^1(\mathcal{F}M,\mathbb{R}^n)$ es la forma canónica de $\mathcal{F}M$, basta tomar $Q = \mathcal{F}M$, fijar una conexión lineal $\chi \in \bigwedge(Q,\mathfrak{S})$ sobre M y entonces $\xi = \chi + \theta$ es una conexión de Cartan de tipo $\mathbf{R}/\mathbf{S}$, siendo $\mathbb{R}^n = \mathbf{R}/\mathbf{S}$ bajo la acción del grupo afín $\mathbf{R} = GA(n,\mathbb{R})$, $\mathbf{S} = GL(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{ga}(n,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{S} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

En esta memoria estudiaremos estructuras de Cartan de tipo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$, donde el espacio homogéneo modelo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ está asociado a un álgebra de Lie semisimple y graduada de primera especie

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

Probaremos que en todas ellas el fibrado Q es una $\mathbf{L}_0$- estructura semi-holonómica de orden dos, generalizando la teoría de estructuras de Cartan desarrollada por T. Ochiai [90], y unificándola completamente con la teoría de estructuras de Cartan desarrollada anteriormente por N. Tanaka [106], en la que el fibrado Q se construía de un modo puramente formal. Llamaremos **estructuras de Cartan semi-holonómicas** a dichas estructuras. Además hemos desarrollado una **teoría general de estructuras de Cartan de tipo graduado integrables y G-invariantes** sobre variedades homogeneas $M = G/H$ que incluye como caso particular la teoría de estructuras proyectivas integrables y G-invariantes debida Y. Agaoka [1]. Señalemos que la integrabilidad implica que el fibrado Q es entonces una $\mathbf{L}_0$-estructura holonómica de segundo orden y la estructura G-invariante sobre M induce

un homomorfismo
$$f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$$
entre el álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ del grupo de Lie G y el álgebra de Lie graduada $\mathfrak{L}$, que está sujeto a dos sencillas condiciones. Hemos denominado (GP)-homomorfismos a tales homomorfismos de álgebras de Lie y definido una relación de equivalencia entre ellos, que se corresponde con la equivalencia de conexiones lineales adaptadas y sin torsión sobre $M = G/H$. Hemos demostrado que una clase de equivalencia $[f]$ de tales (GP)-homomorfismos permite construir sobre $M = G/H$ una estructura de Cartan (Q, ω) de tipo graduado, integrable y G-invariante. Finalmente hemos construido ejemplos de este tipo de estructuras de Cartan G-invariantes.

A continuación describimos sumariamente estos hechos y los fundamentos en los que se basan, dando después un resumen de los resultados originales de la tesis y finalmente un resumen de los mismos capítulo a capítulo. Cada capítulo lleva una introducción que permite leerlo con cierta independencia del resto de la memoria. Las notaciones y conceptos elementales más corrientes están agrupadas en un apéndice inicial.

Sea $\mathfrak{L}$ un **álgebra de Lie semisimple graduada** de primera especie
$$\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 .$$
Es bien conocido, [90], [58], [34] cap. II, que la restricción a $\mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_1$ de la forma de Killing B de $\mathfrak{L}$ es no degenerada y establece por tanto una dualidad entre las subálgebras abelianas $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$. La subálgebra $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie reductiva cuyo centro está determinado por el **elemento característico** $\epsilon \in \mathfrak{L}$, el cual verifica que, para todo $x_j \in \mathfrak{g}_j$, es
$$[\epsilon, x_j] = j x_j ,$$
$(j = -1,\, 0,\, 1)$. Además $\mathfrak{g}_0 = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]$ y se verifica necesariamente la condición adicional (llamada *transitividad* en [90] y en [89]): si un $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ cumple $[x, z] = 0$ para todo $z \in \mathfrak{g}_1$ entonces $x = 0$. Tanaka [106] asoció a cada una de estas álgebras de Lie $\mathfrak{L}$ un espacio homogéneo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ *conexo* sobre el que actúa de modo *efectivo* un grupo de Lie $\mathbf{L}$ no necesariamente compacto ni conexo cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{L}$ y cuyo grupo de isotropía $\mathbf{L_0}$ tiene como álgebra de Lie
$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 .$$

Como en [90] y en [89], diremos que $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ es un *espacio homogéneo semisimple llano* asociado a $\mathfrak{L}$. Cada álgebra de Lie semisimple graduada

$\mathfrak{L}$ da lugar, a través de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$, a un tipo de estructura de Cartan (Q, ξ) que potencialmente puede existir sobre variedades reales M de clase $\mathcal{C}^\infty$ y dimensión $n = \dim(\mathfrak{g}_{-1}) = \dim \mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ y a la que llamaremos **estructura de Cartan asociada a $\mathfrak{L}$** (de tipo graduado). Como en la definición general dada arriba, este tipo de estructuras de Cartan consta de un $\mathbf{L_0}$-fibrado principal $\pi_Q : Q \to M$ y de una *conexión de Cartan* $\xi \in \bigwedge^1(Q, \mathfrak{L})$, que es de tipo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$. Por abuso de lenguaje, con frecuencia llamaremos $\mathbf{L_0}$-estructura a la estructura de Cartan (Q, ξ). Un hecho importante (que distingue esta situación de la estructura de Cartan afín citada arriba) es que además Q se proyecta sobre una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$, siendo $\mathbf{G}_0 \subset \mathbf{L_0}$ el grupo lineal de isotropía de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ y $\mathcal{F}M$ el fibrado de referencias lineales de M. El subfibrado de referencias lineales P es esencialmente una $\mathbf{G}_0$-estructura de tipo tensorial ([51], [106]) ya que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ del grupo $\mathbf{G}_0$ es isomorfa al álgebra de Lie del grupo $G_\Psi \subset GL(\mathfrak{g}_{-1})$ que deja invariante el *tensor de Tanaka* Ψ de $\mathfrak{L}$, el cual es el tensor de de tipo $(2, 2)$ dado por

$$\Psi(x, x', z, z') = B([[x, z], x'], z'),$$

para todo x, $x' \in \mathfrak{g}_{-1}$, z, $z' \in \mathfrak{g}_1$. Este tensor permite definir el concepto de conexiones lineales sobre M *equivalentes*. Es importante resaltar que podemos ver una $\mathbf{L_0}$-estructura bien sea como un par (Q, ξ) o bien sea como una clase de conexiones lineales equivalentes y adaptadas a la $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$. El objetivo general del presente trabajo es el estudio de esas estructuras de Cartan inducidas por tales álgebras de Lie $\mathfrak{L}$, así como el desarrollo tanto de nuevas propiedades como de nuevos ejemplos relacionados con esas estructuras. Tales estructuras incluyen las estructuras proyectivas y conformes (con signatura (p, q)), creadas por E. Cartan y H. Weyl, las estructuras casi grassmannianas, definidas por Th. Hangan [47], [48], [50], [51], [52] y Singer-Sternberg [101] (también llamadas a veces grassmannianas o producto-tensor o para-conformes), las bien conocidas estructuras casi complejas, las estructuras cuaterniónicas generalizadas (estudiadas por Salamon [96]) y las casi lagrangianas (estudiadas por Baston [10], aunque sobre variedades complejas). En los ejemplos citados, el espacio homogéneo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ es, respectivamente, el espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$, la variedad cociente $(S^p \times S^q)/\sim$, (donde $(x, y) \sim (-x, -y)$ y $p + q \geq 3$), la grassmanniana $\mathcal{G}_p(\mathbb{F}^n)$ de p-planos en el espacio vectorial $\mathbb{F}^n$ de dimensión $n = p + q$, (donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$ y p, $q > 1$), el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$, el espacio proyectivo cuaterniónico $\mathbb{H}P^n$ y la así llamada *grassmanniana de n-planos lagrangianos* en un espacio vectorial simpléctico de dimensión $2n$, [10], [35]. Observemos que, como sugieren estos ejemplos, un espacio homogéneo semisimple llano es también un espacio riemanniano simétrico de tipo compacto, bajo la acción del subgrupo compacto maximal de $\mathbf{L}$, como demostró Nagano

[88].

Las estructuras geométricas mencionadas y las variedades que las admiten fueron estudiadas de modo sistemático en primer lugar por N. Tanaka [106]. Después T. Ochiai (en su tesis [90], dirigida por Nagano) replanteó la teoría de Tanaka basándola en un hecho sorprendente: el grupo de Lie $\mathbf{L_0}$ es un subgrupo de Lie del grupo $G^2(n)$ de los jets (es decir, polinomios de Taylor) de orden dos de difeomorfismos que dejan fijo punto de $0 \in \mathbb{R}^n \equiv \mathfrak{g}_{-1}$. Para las variedades M de dimensión n que admiten una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$, ese hecho permitió a Ochiai construir el $\mathbf{L_0}$-fibrado Q como una G-estructura de segundo orden de tipo holonómico *bajo la hipótesis de que M admite conexiones lineales sin torsión y adaptadas a P.* El estudio análogo de las estructuras geométricas inducidas por un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ semisimple graduada *compleja* sobre una variedad *compleja* lo inició Ochiai [91] (adaptando los métodos de [90]) y ha sido retomado más recientemente por Baston, [10], usando espacios twistor en lugar de fibrados principales .

El origen histórico de las estructuras geométricas inducidas por un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ semisimple graduada es el siguiente:

Inicialmente las variedades dotadas de conexiones proyectivas y conformes fueron concebidas de forma puramente local por E. Cartan [17] [18]. Más tarde H. Weyl [117] introdujo la noción de conexiones equivalentes: equivalencia proyectiva de conexiones lineales y equivalencia conforme de conexiones metricas. Weyl mostró que en ambos casos cada clase de equivalencia comparte un importante tensor, el ahora llamado tensor de curvatura de Weyl. Cada una de estas clases da lugar a una *conexión (de Cartan) proyectiva o conforme.* Ehresman [22] no sólo dio la definición moderna de conexión en un fibrado principal, sino que además sintetizó las propiedades comunes a las conexiones proyectivas y conformes, creando con ello la noción abstracta de *conexión de Cartan.* Usando los conceptos globales de fibrado principal, de conexiones lineales equivalentes y de conexión de Cartan, N. Tanaka [104], [105] formalizó rigurosamente la teoría de los espacios dotados de conexiones proyectivas y conformes. Tanaka descubrió que en una variedad M de dimensión n dotada con una conexión proyectiva o conforme, la estructura geométrica viene dada a través de una conexión de Cartan sobre un fibrado principal que él construyó como una extensión del fibrado $\mathcal{F}M$ referencias lineales de M en el caso proyectivo y como una extensión del fibrado $Conf\,M$ de referencias lineales conformes de M en el caso de ser M una variedad de Riemann, en la que se consideran todos los cambios conformes de métrica Riemanniana. En ambos casos la estructura está inducida por un álgebra de Lie semisimple graduada $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. En el primer caso $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(1+n, \mathbb{R})$ era el álgebra de Lie del grupo proyectivo $PGL(1+n, \mathbb{R})$ (que actúa sobre el espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$). En el segundo caso $\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(n+2, \mathbb{R})$ era el álgebra de Lie del subgrupo $\mathbf{L}$ de $PGL(n+2, \mathbb{R})$ que deja invariante una hipercuádrica contenida en $\mathbb{R}P^{n+1}$ (que es difeomorfa a $\mathbb{R}P^n$ y que recibe el nombre de espacio de Möbius). Tanto el espacio proyectivo real como el espacio de Möbius son espacios homogéneos de tipo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ con $\mathbf{L}$ un grupo de Lie cuya álgebra de lie es $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, mientras que el grupo de isotropía $\mathbf{L_0}$ tiene por álgebra de Lie a $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, siendo $n = \dim(\mathfrak{g}_{-1})$.

Partiendo de la profunda similitud formal de ambas estructuras, el propio N. Tanaka [106] las unificó y generalizó así: A cada álgebra semisimple graduada de primera especie $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ le asoció un espacio homogéneo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ en el que el grupo de Lie $\mathbf{L}$ (cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$) actúa de modo efectivo sobre $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$, siendo $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ el álgebra de Lie de $\mathbf{L_0}$. La subálgebra $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{L}_0$ es el álgebra de Lie del grupo lineal de isotropía $\mathbf{G}_0$ de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$. Este grupo tiene la propiedad de que deja invariante un tensor Ψ de tipo (2,2) definido por

$$\Psi(x, y, \xi, \eta) = B([[x, \xi], y], \eta),$$

para todo $x, y \in \mathfrak{g}_{-1}$, ξ, $\eta \in \mathfrak{g}_1$ (como en [112], llamaremos tensor de Tanaka a Ψ). Sobre las variedades M de dimensión $n = \dim(\mathfrak{g}_{-1})$ que admiten una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ Tanaka construyó una geometría para cada álgebra semisimple graduada, incluyendo como casos particulares la geometría de los espacios dotados de conexión proyectiva y conforme. Para ello sintetizó las definiciones de Weyl de equivalencia proyectiva de conexiones lineales y de equivalencia conforme de conexiones métricas en la noción de conexiones lineales equivalentes adaptadas a la $\mathbf{G}_0$-estructura P dada sobre M. Para cada una de estas clases aparece un tensor W que generaliza las curvaturas proyectiva y conforme de Weyl. Cada clase de equivalencia tiene asociado un $\mathbf{L_0}$-fibrado principal $Q \to M$ donde Q es isomorfo a la extensión $P^{\mathbf{L_0}} \to M$ de P. Sobre este espacio Q existe una única conexión *normal* de Cartan, que en cierto sentido representa a cada una de las conexiones lineales adaptadas a P. Dado que una conexión de Cartan es en particular un paralelismo, el grupo de automorfismos de Q que deja invariante la conexión de Cartan es un grupo de Lie de transformaciones [67], que convierte la nueva geometría sobre M en una geometría dentro del programa de Erlangen propuesto por Felix Klein. Por otra parte la curvatura de dicha conexión de Cartan determina el tensor de curvatura de Weyl común a todas las conexiones lineales de la clase de equivalencia subyacente. Kobayashi y Nagano [68] y Ogiue [92] dieron, respectivamente, una visión alternativa y global de las teorías de espacios con conexión proyectiva o conforme creadas por Cartan [17], [18], [19]. Para ello se basaron por un lado en los trabajos de Tanaka [104], [105] y por otro en una nota de Kobayashi [66]. La principal diferencia radica respecto a Tanaka es que en [68] y en [92] el fibrado análogo a Q aparece de modo natural como una G-estructura holonómica de segundo orden sobre una variedad M de dimensión n. Para ello, ambos autores prueban que el grupo $\mathbf{L_0}$ es un subgrupo de Lie del grupo $G^2(n)$ formado por los polinomios de Taylor de orden dos de los difeomorfismos que llevan 0 en 0 definidos en un entorno de $0 \in \mathbb{R}^n$.

Aparte de las estructuras proyectivas y conformes, entre las G-estructuras asociadas a un álgebra de Lie graduada de primera especie, las que han sido objeto de más atención han sido las estructuras casi-grassmannianas o producto-tensor. Después de T. Hangan, T. Ishihara las estudió en [57] mostrando que pueden considerarse como G-estructuras de segundo orden holonómicas, asumiendo a veces la existencia de una conexion adaptada sin torsion, hipótesis que equivale a la integrabilidad de la estructura, para p, $q \geq 3$, como hemos dicho antes. También Szybiak [103] las estudió independientemente como estructuras de segundo orden. En ninguna de las cuatro referencias previamente citadas se relacionan dichas estructuras casi-grassmannianas a la teoría general de álgebras semisimples graduadas de Tanaka [106] y Ochiai [90]. Esto último aparece en [114], donde fueron caracterizadas como G-estructuras asociadas al álgebra semisimple graduada $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{F})$ para $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, véase también el capítulo II, escrito por Kaneyuki, en [34]. Estas estructuras han sido también estudiadas, bajo nombres diversos, en [9], [3], [4] y [6].

La generalización de los trabajos de Kobayashi-Nagano [68] y Ogiue [92], la llevó a cabo Ochiai en su tesis [90]. Para ello fusionó buena parte de la teoría general de Tanaka [106] con la idea, común a Kobayashi-Nagano [68] y Ogiue [92], de que el grupo $\mathbf{L_0}$ del fibrado Q que define la estructura es un subgrupo de Lie de $G^2(n)$. Sin embargo, el alcance de la teoría de Ochiai es, pese a sus afirmaciones [90], menor que el de la construcción de Tanaka, ya que, como hemos puntualizado antes, para llegar a construir el fibrado análogo de Q como un subfibrado del fibrado $\mathcal{F}^2M$ de las referencias holonómicas de segundo orden sobre M, es necesaria la hipótesis de que las conexiones equivalentes sobre la variedad M adaptadas a $P \subset \mathcal{F}M$ tengan su tensor de torsión igual a cero. Como señala Baston [10], esta exigencia limita el alcance de la teoría desarrollada por Ochiai en [90] y [91], pues la hipótesis de que existan conexiones sin torsión sobre M adaptadas a P es en varios casos equivalente a la integrabilidad de la estructura de segundo orden construida. Por ejemplo, Tanaka indica que las estructuras casi complejas están asociadas al álgebra real graduada que subyace en $\mathfrak{sl}(1+n, \mathbb{C})$ y, como es bien conocido, exigirle a una estructura casi compleja que posea una conexión adaptada sin torsión equivale a la nulidad de su tensor de Nijenhuis, es decir, esa hipótesis equivale a exigir que la estructura casi compleja sea integrable, es decir, compleja, [70], vol. II. La misma objeción aparece en el caso de las estructuras casi-grassmannianas o producto-tensor, para p, $q \geq 3$ véanse [52] y [86]. Sin embargo, siempre existen conexiones lineales adaptadas a una $\mathbf{G}_0$-estructura P sobre M, como demostró Tanaka [106].

Nuestro primer objetivo ha sido ampliar la teoría desarrollada por Ochiai [90] de $\mathbf{L_0}$-estructuras asociadas a un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ semisimple graduada de primera especie para las variedades diferenciables M dotadas de una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ *eliminando la hipótesis de torsión nula* en las conexiones equivalentes adaptadas a P que dan lugar a dichas estructuras, considerando ahora conexiones con torsión arbitraria. Esto nos ha conducido a una clase más amplia de estructuras de segundo orden sobre M; la presencia de torsión se traduce en que debemos abandonar el fibrado $\mathcal{F}^2(M)$ de las referencias holonómicas de segundo orden de M y reemplazarlo por un fibrado mayor: el de las referencias semi-holonómicas de segundo orden sobre M, con lo que obtenemos entonces una teoría plenamente equivalente a la de Tanaka, pero en la que los fibrados principales Q que sustentan esta geometría se realizan como $\mathbf{L_0}$-reducciones del fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias semi-holonómicas de segundo orden sobre M. Una de las principales dificultades resueltas ha consistido en probar que dos conexiones lineales adaptadas a una $\mathbf{G}_0$-estructura son equivalentes si y sólo si dan lugar a una misma $\mathbf{L_0}$-reducción $Q \subset \hat{\mathcal{F}}^2(M)$ del fibrado de referencias semi-holonómicas de orden dos sobre M. Para ello hemos usado un teorema de Libermann que caracteriza las conexiones lineales de M como citado antes. Como ejemplos notables, que existen sin ningún tipo de restricción sobre la variedad M, señalemos que toda conexión lineal sobre M da lugar a una estructura proyectiva semi-holonómica de segundo orden, estricta si la torsión es no nula y holonómica si la torsión es nula. Análogamente, sobre una variedad riemanniana (M, g), una conexión métrica con torsión da lugar a una estructura conforme semi-holonómica de segundo orden. Finalmente destacaremos que hemos probado que si dos conexiones lineales (no necesariamente adaptadas a P) sobre M son equivalentes entonces las derivadas covariantes del tensor de Tanaka Ψ coinciden, así como otras propiedades interesantes de dicho tensor.

Nuestro segundo objetivo ha sido establecer una teoría de $\mathbf{L_0}$-estructuras G-invariantes y llanas (es decir, integrables) sobre los espacios homogéneos

G/H de dimensión $n = \dim \mathbf{L}/\mathbf{L}_0 = \dim \mathfrak{g}_{-1}$ siendo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ un espacio homogéneo asociado a un álgebra graduada semisimple arbitraria $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, así como proporcionar algunos ejemplos de tales $\mathbf{L_0}$-estructuras G-invariantes y llanas, que pese a su relativa sencillez ponen de manifiesto el potencial de esta nueva teoría como tema de investigación. Para ello nos hemos basado en un artículo de Agaoka [1], que formuló de manera satisfactoria el concepto de estructura proyectiva invariante integrable sobre un espacio homogéneo G/H (que corresponde al álgebra graduada $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(1+n, \mathbb{R})$ asociada al espacio proyectivo real). Hemos generalizado esa teoría extendiéndola a todas las álgebras graduadas semisimples de primera especie $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. En ese proceso hemos introducido el concepto de (GP)-*homomorfismo* que generaliza y simplifica la definición de (P)-homomorfismo dada por Agaoka, extendiéndola al caso en que el homomorfismo toma valores en un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ semisimple graduada arbitraria. Un buen número de resultados de Agaoka se adaptan ipso-facto, mientras que otros como la proposición 4.3.3 y el teorema 4.4.1, han requerido una laboriosa tarea. Señalemos en particular que hemos establecido un criterio general de normalización de (GP)-homomorfismos que incluye el dado en [1] para el caso proyectivo. Dicho criterio usa la forma de Killing y el elemento característico del álgebra $\mathfrak{L}$. Cuando $\mathfrak{L}$ es simple, este criterio se reduce al cálculo de la traza de un determinado producto de matrices. Hemos usado la técnica de Agaoka para encontrar nuevos ejemplos de estructuras proyectivas sobre grupos de Lie. Usando la teoría general que hemos elaborado, también hemos encontrado ejemplos de estructuras homogéneas conformes integrables sobre algunos grupos de Lie. Finalmente, hemos probado, de dos formas diferentes, que el grupo lineal general $GL(n, \mathbb{R})$ posee una estructura producto tensor invariante llana; esto se ha hecho, por un lado, usando la teoría general de G-estructuras, y por otro, usando la teoría de estructuras invariantes llanas que hemos desarrollado, método este último que resulta mucho más breve.

Nuestro tercer objetivo ha venido motivado por la necesidad de trabajar con estructuras semi-holonómicas y ha consistido en la obtención de nuevos modelos de los fibrados de referencias no holonómicas y semi-holonómicas de segundo orden sobre una variedad M. Estos nuevos modelos han sido una herramienta de trabajo en esta memoria, pero creemos que hacen más sencillos el uso y la comprensión de la naturaleza de tales fibrados de referencias, que están lejos de ser conceptos de uso común. Las referencias semi-holonómicas y no holonómicas, fueron introducidas por Ehresmann [28], y posteriormente estudiadas por Libermann [75], [76], Ver Eecke [116], Yuen [121]. Recientemente, han recibido una considerable atención a raiz de los trabajos de M. de León, por ejemplo [74]. Destaquemos por ejemplo que las G-estructuras no holonómicas de segundo orden han sido aplicadas a la mecánica de medios continuos por M. Epstein y M. de Leon [32], [33], [72], [73], en su estudio de los medios de Cosserat generalizados y de los cristales líquidos generalizados. Por otra parte, como hemos dicho antes, las estructuras (holonómicas) de segundo orden asociadas a álgebras de Lie semisimples graduadas reales o complejas fueron estudiadas por T. Ochiai [90], [91], que usaba la biyección (descubierta por Kobayashi [66], [68], [67]) que existe entre las conexiones lineales *sin torsión* sobre una variedad M de dimensión n y las $GL(n,\mathbb{R})$-reducciones de su fibrado $\mathcal{F}^2(M)$ de referencias holonómicas de segundo orden. Anteriormente , Libermann [75] ya había probado que toda conexión lineal *arbitraria* sobre una variedad real se puede caracterizar como una $GL(n,\mathbb{R})$-reducción del fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias semi-holonómicas de segundo orden, extendiendo así dicho resultado de Kobayashi [67]. De acuerdo con Ehresmann [28] las referencias no holonómicas de segundo orden son 1-jets de secciones locales de M en $\mathcal{F}M$. Yuen [121] consideró las referencias no holonómicas y semi-holonómicas de segundo orden sobre una variedad real M como 1-jets de difeomorfismos de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), j_0^1 e)$ en $(\mathcal{F}M, z)$, donde $e\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ es la identidad. Estas diversas construcciones dan lugar a fibrados sobre M que son isomorfos. En de León y Ortacgil [74] las referencias semi-holonómicas sobre una variedad real M son descritas como elementos de $\mathcal{F}(\mathcal{F}M)$ definidos por *espacios horizontales*, y forman un fibrado $\hat{H}^2(M)$ sobre M que es isomorfo al fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias semi-holonómicas de segundo orden sobre M y que además es una subvariedad regular de $\mathcal{F}(\mathcal{F}M)$. Nosotros hemos extendido su idea a referencias no holonómicas de segundo orden en [81], donde las hemos caracterizado como elementos de $\mathcal{F}(\mathcal{F}M)$ definidos por *bases de espacios horizontales* para una variedad real M. En otras palabras, construimos una nueva subvariedad regular $\tilde{H}^2(M)$ de $\mathcal{F}(\mathcal{F}M)$ y probamos que es isomorfa al fibrado $\tilde{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias no holonómicas de segundo orden sobre M. Esto nos ha conducido, además, a identificar los fibrados de referencias semi-holonómicas y no holonómicas de segundo orden con subfibrados abiertos de los fibrados tangentes de Grassmann y Stiefel del fibrado de referencias $\mathcal{F}M$. Además, hemos demostrado que ambos fibrados también se pueden obtener extendiendo el grupo de estructura del fibrado de referencias de orden dos a sus correspondientes grupos de estructura. Hemos dado también una demostración extremadamente sencilla del citado teorema de Libermann.

A continuación resumimos los resultados más destacables capítulo a capítulo.

En el *primer capítulo*, usando n-bases horizontales y n-planos horizontales en $\mathcal{F}M$, obtenemos un nuevo modelo para las referencias no holonómicas y semi-holonómicas de segundo orden sobre M como subfibrados abiertos de lo que hemos llamado *fibrados tangentes de Stiefel y Grassmann* de $\mathcal{F}M$. El punto de partida de esta construcción se encuentra en una aproximación geométrica a las coordenadas en las variedades de Grassmann (consideradas como espacios homogéneos bajo la acción del grupo $GL(m,\mathbb{R})$), que es debida a Th. Hangan [49]. Daremos una detallada explicación de esta construcción de una manera ligeramente diferente. En primer lugar notamos que cada entorno coordenado del atlas de la variedad homogénea $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$ es de hecho el conjunto $S_U = S_U(\mathbb{R}^m)$ de aquellos q-planos que son suplementarios a un p-plano adecuado $U \subset \mathbb{R}^m$, con $p = m - q$. Más aun, la correspondiente aplicación de coordenadas asigna a cada $W \in S_U$ un elemento del subespacio vectorial $U\times \overset{q)}{\ldots} \times U \subset \mathbb{R}^m \times \overset{q)}{\ldots} \times \mathbb{R}^m$ (Proposiciones 1.1.1 y 1.1.2). Entonces nosotros asociamos al fibrado tangente $E = T(N)$ de una variedad diferenciable arbitraria N el *fibrado tangente de Stiefel* de N y el *fibrado tangente de Grassmann* de N. Para cada $0 < q < \dim N$ estos fibrados están definidos respectivamente por

$$\mathcal{S}t_q(E) = \bigcup_{x\in N} \mathcal{S}t_q(E_x)\ , \quad \mathcal{G}_q(E) = \bigcup_{x\in N} \mathcal{G}_q(E_x),$$

donde $E_x = T_xN$ es la fibra sobre $x \in N$. Dada una variedad diferenciable real M necesitaremos el caso particular $q = n = \dim(M)$, $N = \mathcal{F}M$ y por tanto $\dim N = n+n^2$. Sea $\mathcal{S}t_n\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}M}$ el conjunto de todas las n-bases de todos los n-subespacios tangentes horizontales en los puntos de $\mathcal{F}M$ y sea $\mathcal{G}_n\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}M}$ el conjunto de todos los n-planos tangentes horizontales en los puntos de $\mathcal{F}M$. Probamos (Teorema 1.2.1) que $\mathcal{S}t_n\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}M}$ y $\mathcal{G}_n\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}M}$ son subfibrados abiertos de $\mathcal{S}t_n(E)$ y $\mathcal{G}_n(E)$ respectivamente. El principal resultado de este capítulo se encuentra contenido en los teoremas 1.3.1 y 1.4.1, y dice que los fibrados $\mathcal{S}t_n\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}M} \to M$ y $\tilde{H}^2(M) \to M$ son isomorfos al fibrado $\tilde{\mathcal{F}}^2(M) \to M$ de referencias no holonómicas de segundo orden sobre M mientras que los fibrados $\hat{H}^2(M) \to M$ y $\mathcal{G}_n\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}M} \to M$ son isomorfos al fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2(M) \to M$ de referencias semi-holonómicas de segundo orden sobre M. Más aun, se prueba que los fibrados $\mathcal{S}t_n\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}M} \to \mathcal{G}_n\hat{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}M}$, $\tilde{H}^2(M) \to \hat{H}^2(M)$ y $\tilde{\mathcal{F}}^2(M) \to \hat{\mathcal{F}}^2(M)$ son $GL(n,\mathbb{R})$-fibrados principales isomorfos. Además, a partir de nuestra construcción podemos obtener una prueba inmediata del resultado de Libermann antes mencionado, ya que una conexión lineal es simplemente una distribución de n planos horizontales $GL(n,\mathbb{R})$-invariante (teorema 1.6.1). Finalmente, probamos que los fibrados $\tilde{\mathcal{F}}^2(M)$ y $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias no holonómicas y semi-holonómicas de segundo orden son isomorfos de modo natural a los fibrados $F^2(M)^{\tilde{G}^2(n)}$ y $F^2(M)^{\hat{G}^2(n)}$ obtenidos extendiendo el grupo $G^2(n)$ del fibrado $F^2(M)$ de todas las referencias holonómicas de segundo orden de M (proposición 1.8.1).

El *segundo capítulo* comienza con un resumen de las notaciones, definiciones y propiedades elementales imprescindibles para el resto de la memoria. En particular se resumen las propiedades de las álgebras de Lie semisimples graduadas y de los espacios homogéneos semisimples llanos asociados a ellas. Damos la definición de conexiones lineales equivalentes no necesariamente adaptadas a una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ sobre una variedad M y demostramos, en la proposición 2.5.1, una propiedad notable: si dos conexiones lineales no necesariamente adaptadas a P son equivalentes entonces la derivada covariante del tensor Ψ de Tanaka con respecto a ambas coincide. Esta propiedad se basa en la siguiente identidad que satisface el tensor Ψ:

$$\Psi^{ui}_{jk}\Psi^{hv}_{ua} + \Psi^{hu}_{jk}\Psi^{iv}_{ua} - \Psi^{hi}_{uk}\Psi^{uv}_{ja} - \Psi^{hi}_{ju}\Psi^{uv}_{ka} = 0.$$

También hemos demostrado que

$$\sum_i \Psi^{il}_{ij} = -\frac{1}{2}\delta^l_j.$$

En la sección 2.7 se describe el complejo de Spencer $(\mathcal{C}^{p,q}(\mathfrak{g}), \delta)$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Sean P una G-estructura sobre una variedad M y $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Probaremos que el tensor diferencia de dos G-conexiones sobre M se puede ver como un tensor de tipo $([\alpha_1], \mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}^{(1)})$, donde α_1 es la representación natural de G en $\mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{g}^{(1)}$ es la primera prolongación de $\mathfrak{g}$, y que es nulo si y sólo si ambas G-conexiones tienen la misma torsión (proposición 2.8.1). Sea $G = \mathbf{G}_0$ el grupo lineal de isotropía asociado a un álgebra de Lie graduada semisimple $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. La representación lineal de isotropía de $\mathbf{G}_0$ en $\mathfrak{g}_{-1}$ es fiel. Dada una $\mathbf{G}_0$-estructura sobre una variedad M, con $\dim(M) = \dim(\mathfrak{g}_{-1})$, el tensor diferencia de dos $\mathbf{G}_0$-conexiones sobre M es nulo si son equivalentes en el sentido de Weyl (corolario 2.8.1). En la sección 2.5 introducimos la colección de formas lineales sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ definidas por $\beta_t(-) = B(\epsilon, t(-))$, $t \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_0)$, donde B y ϵ son la forma de Killing y el elemento característico de $\mathfrak{L}$ respectivamente. Un modelo similar se usa en el capítulo cuarto para generalizar el concepto de (N)-homomorfismo de [1]. Este conjunto de formas lineales, junto con la aplicación lineal $\beta \colon \mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_0) \to (\mathfrak{g}_{-1})^*$ y el estudio de sus propiedades nos ha llevado a demostrar que, bajo hipótesis adecuadas, existe un subespacio suplementario $\mathbf{G}_0$-invariante de $\mathfrak{g}_0^{(1)}$ en $\mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_0)$ y una representación de $\mathbf{G}_0$ en este suplementario que es equivalente a $[\alpha_1]$ (teorema 2.7.1 y corolario 2.7.1). En las proposiciones 2.7.4 y 2.7.6 están recogidos dos ejemplos en los cuales nuestra construcción funciona. En primer lugar consideramos el álgebra de Lie graduada $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$, con p, $q > 2$. En este caso el grupo

$\mathbf{G}_0$ es isomorfo al grupo $GL(p,\mathbb{R}) \otimes GL(q,\mathbb{R})$ y la representación lineal de isotropía está dada por $(A \otimes S)(X) = SXA^{-1}$, $A \in GL(p,\mathbb{R})$, $S \in GL(q,\mathbb{R})$, $X \in \mathfrak{g}_{-1}$. Las $\mathbf{G}_0$-estructuras en este caso se llaman estructuras producto tensor o estructuras casi grassmannianas. Como hemos dicho antes, fueron estudiadas por primera vez por Hangan [47] y Singer y Sternberg [101]; En segundo lugar, para el álgebra $\mathfrak{L} = \mathfrak{o}(S) = \mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbf{R})$, con $p+q \geq 3$, el grupo $\mathbf{G}_0$ es isomorfo al grupo conforme $CO(p,q)$; las $\mathbf{G}_0$-estructuras asociadas reciben el nombre de estructuras conformes y han sido estudiadas en [5] para $pq = 0$.

En el *tercer capítulo* comenzamos estudiando las $\mathbf{L_0}$-estructuras de segundo orden asociadas a conexiones adaptadas a una $\mathbf{G}_0$-estructura P y los $\mathbf{L_0}$-fibrados asociados a P. El concepto de $\mathbf{L_0}$-fibrado asociado a una $\mathbf{G}_0$-estructura fue introducido por N. Tanaka [106]. De hecho, en [106] se define la noción de $\mathbf{L_0}$-fibrado asociado a una $\mathbf{G}_0$-estructura de una manera puramente abstracta (definición 3.1.1 en este trabajo) y se justifica su existencia poniendo como ejemplo de $\mathbf{L_0}$-fibrado asociado ([106], pag 119) a la extensión de P por el grupo $\mathbf{L_0}$. Sin embargo, en el teorema 3.2.1 probamos que dos $\mathbf{L_0}$-fibrados asociados a una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ sobre una variedad M son $\mathbf{L_0}$-fibrados isomorfos y, por lo dicho antes, todo $\mathbf{L_0}$-fibrado asociado a una $\mathbf{G}_0$-estructura es isomorfo a la extensión $P^{\mathbf{L_0}} = P \times_{\mathbf{G}_0} \mathbf{L_0}$. El teorema 3.1.2 muestra que dos $\mathbf{G}_0$-conexiones equivalentes inducen una misma $\mathbf{L_0}$-estructura semi-holonómica de segundo orden. En consecuencia, de la proposición 1.8.1 se concluye que un $\mathbf{L_0}$-fibrado asociado a P es un subfibrado del fibrado de referencias semi-holonómicas de segundo orden, es decir, esencialmente una $\mathbf{L_0}$-estructura semi-holonómica de segundo orden. A continuación estudiamos las conexiones de Cartan sobre un $\mathbf{L_0}$-fibrado asociado a P y demostramos, en la proposición 3.3.4, que una conexión de Cartan equivale a un par (B, J), donde B es la aplicación campo básico asociada a una conexión lineal sobre M adaptada a P y donde J es un campo de tensores de tipo (0,2) sobre M. Finalmente adaptamos los resultados de Tanaka sobre conexiones normales de Cartan a la teoría de las estructuras semi-holonómicas de segundo orden. Asimismo, se estudia el concepto de homomorfismo admisible y probamos (lema 3.3.5) que si ξ es una conexión de Cartan y ξ_0 es su $\mathfrak{g}_0$-componente, y si h es un homomorfismo admisible, entonces $h^*\xi_0$ es una conexión adaptada, generalizando un resultado de Agaoka [1] para estructuras proyectivas.

En el *capítulo cuatro* generalizamos la teoría de Agaoka acerca de las estructuras proyectivas invariantes llanas sobre un espacio homogéneo $M = G/H$ de dimensión $n = \dim(\mathfrak{g}_{-1})$, con H conexo y cerrado en G . Pongamos $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. En primer lugar, introducimos el concepto de (GP)-homomorfismo, $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, que incluye como caso particular la noción de (P)-homomorfismo dada en [1]. En la definición 4.3.1 se introduce en el conjunto de (GP)-homomorfismos una relación de equivalencia y la proposición 4.3.1 permite establecer una aplicación Φ entre el conjunto de $\mathbf{G}_0$-estructuras invariantes llanas y el conjunto de clases de (GP)-homomorfismos $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{L}$. El segundo paso importante es la prueba, complicada y con bastante aparato previo, del teorema 4.3.3, en el que se muestra que la aplicación Φ es biyectiva. La elección de un representante adecuado ((N)-homomorfismo) en cada clase de equivalencia de (GP)-homomorfismos se hace en el teorema 4.4.1, la proposición 4.4.1 y los corolarios 4.4.2 y 4.4.4. Cuando $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie graduada simple clásica, estos resultados nos permiten establecer una aplicación biyectiva entre el conjunto de L_0-estructuras invariantes llanas sobre el espacio homogéneo $M = G/H$ y el conjunto de (GP)-homomorfismos de álgebras de Lie $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{L}$ verificando la condición adicional

$$\mathrm{traza}(\epsilon f_0(X)) = 0$$

para cualquier $X \in \mathfrak{m}$, donde ϵ es el elemento característico de $\mathfrak{L}$.

El *capítulo quinto* es una continuación del capítulo anterior, y en él damos ejemplos nuevos de estructuras invariantes llanas, principalmente sobre grupos de Lie. Esto incluye nuevos ejemplos de estructuras proyectivas invariantes llanas sobre grupos de Lie de dimensiones bajas, ejemplos diferentes a los descritos en Agaoka. También hemos encontrado estructuras projectivas *no afines* invariantes llanas sobre dos familias infinitas de grupos de Lie filiformes. Encontramos un (GP)-homomorfismo que determina la bien conocida estructura conforme $SO(n+1,\mathbb{R})$-invariante llana de la esfera S^n para $n \geq 3$. También hemos encontrado ejemplos de grupos de Lie dotados de estructuras conformes invariantes llanas y determinado la bien conocida estructura conforme llana $SO(n+1)$-invariante de las esferas euclidianas $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ mediante un GP-homomorfismo. Finalmente, en la última sección se demuestra que el grupo de Lie $GL(n,\mathbb{R})$ posee una estructura invariante llana de tipo producto tensor, algo que hemos deducido facilmente dando el (GP)-homomorfismo adecuado, pero que también hemos obtenido usando la teoría general de G-estructuras, método que es más laborioso.

En esta memoria sólo trataremos con estructuras asociadas a álgebras de Lie reales (pero recordemos que en toda álgebra de Lie compleja $\mathfrak{G}$ de dimensión n subyace un álgebra de Lie real $\mathfrak{G}_{\mathbb{R}}$ real, de dimensión $2n$). Tampoco usaremos álgebras de Lie semisimple graduadas de segunda o superior especie $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-p} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_p$, por lo que la expresión *álgebra de Lie semisimple graduada* conlleva tácitamente, el añadido *de primera especie.*

NOTACIONES Y DEFINICIONES ELEMENTALES

Las expresiones **variedad** y **variedad diferenciable** significan variedad diferenciable real de clase al menos C^∞. Analogamente, una **aplicación diferenciable** entre variedades es al menos de clase C^∞. Asumimos que son conocidas las definiciones y propiedades básicas de la teoría de variedades diferenciables, así como las nociones elementales sobre álgebras de Lie, grupos de Lie y espacios homogéneos, tal como aparecen por ejemplo en los libros de Matsushima [84] y Helgason [54] (capítulos I y II). También suponemos conocidos los conceptos básicos de la teoría de fibrados y conexiones en fibrados, incluyendo fibrados principales, fibrados asociados y fibrados vectoriales tal como se exponen en el libro de Kobayashi y Nomizu [70] vol. I. (cap. I, II, III y IV) cuyas notaciones seguimos de cerca. Sean $\pi_P\colon P \to M$ un G-fibrado principal y $\pi_Q\colon Q \to M$ un H-fibrado principal; un **homomorfismo de fibrados principales compatible con un homomorfismo de grupos de Lie** $\phi\colon G \to H$ es una aplicación diferenciable $f\colon P \to Q$ verificando $\pi_Q \circ f = \pi_P$ y

$$f(ua) = f(u)\phi(a)$$

para todo $u \in P$ y todo $a \in G$. Para la teoría de G-estructuras remitimos a la monografía de Fujimoto [37] y a los libros de Kobayashi [67] cap. I y Sternberg [102] cap. VII. El fibrado de referencias lineales de una variedad M se denota $\mathcal{F}M$, el álgebra de Lie de los campos de vectores de M se denota $\mathfrak{X}(M)$ y el conjunto de r-formas diferenciables sobre M que toman valores en un espacio vectorial V se denotará como $\bigwedge^r(M, V)$. Si $\pi\colon P \to M$ es un G-fibrado principal, y $\mathfrak{G}$ el álgebra de Lie del grupo de Lie G, para cada $A \in \mathfrak{G}$ denotaremos por $A^* \in \mathfrak{X}(P)$ al **campo de vectores fundamental** asociado a A, es decir el campo de vectores sobre P cuyo grupo uniparamétrico de transformaciones es $(u,t) \in P \times \mathbb{R} \to u\exp(tA)$. Como es casi universal, llamaremos **conexión lineal** tanto a una 1-forma global de conexión

$$\chi \in \bigwedge^1 \big(\mathcal{F}M, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})\big)$$

como a la ley de derivación covariante ∇ de campos de vectores asociada a χ. Recordemos que el **tensor de curvatura** y el **tensor de torsión** de una conexión lineal ∇ están respectivamente definidos para todo X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\,,$$
$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]\,.$$

Las expresiones **conexión lineal adaptada** a una G-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ y G**-conexión lineal** en P significarán lo mismo.

Es habitual denotar un grupo de Lie en mayúsculas y con tipografía sencilla, por ejemplo G, H, K, L, ... También es corriente denotar el álgebra de Lie de un grupo de Lie mediante una letra alemana homóloga, o bien siempre en mayúsculas $\mathfrak{G}$,$\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}\ldots$,[119], o bien siempre en minúsculas $\mathfrak{g}$ $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}\ldots$, [54]. En esta memoria mezclaremos ambos tipos de letra para denotar las álgebras de Lie. Por ejemplo, toda álgebra de Lie graduada y semisimple será denotada siempre con una mayúscula como $\mathfrak{L}$, mientras que en su graduación $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ aparecen en minúscula las tres subálgebras $\mathfrak{g}_j$. Señalemos que Tanaka [106] usa álgebras semisimples graduada isomorfas para esta situación, y su notación es $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathfrak{m}^*$, con $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{-1}$ y $\tilde{\mathfrak{g}} \equiv \lambda(\mathfrak{g}_0) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$ (véase en el capítulo II la definición de λ). Nuestra notación es una ligera variante de la de Ochiai [90], que denota un álgebra de ese tipo así: $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. La ventaja de esta notación es que, respecto a los espacios homogéneos genéricos G/H, que se denotan en letra normal, se aprecia a simple vista el papel del *espacio homogéneo modelo* $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ obtenido al cocientar los grupos de Lie, denotados con letras negritas, $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L}_0$ que tienen como respectivas álgebras de Lie a $\mathfrak{L}$ y $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ respectivamente. También se denoterán en negritas los subgrupos de Lie conexos $\mathbf{G}_{-1}$ y $\mathbf{G}_1$ de $\mathbf{L}$, que corresponden respectivamente a las subálgebras $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$ de $\mathfrak{L}$, así como al **normalizador** $\mathbf{G}_0$ de $\mathfrak{g}_0$ en $\mathfrak{L}_0$, es decir al subgrupo

$$\mathbf{G}_0 = \{a \in \mathbf{L_0}\ ;\ \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0\}$$

de $\mathbf{L}_0$ cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}_0$. En [90] se ve que

$$\mathbf{G}_0 = \{a \in \mathbf{L_0}\ ;\ \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)\mathfrak{g}_{-1} \subset \mathfrak{g}_{-1}\}\,,$$

lo que permite identificar a $\mathbf{G}_0$ con el *grupo lineal de isotropía* del espacio homogéneo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$, por lo que nos referiremos siempre a $\mathbf{G}_0$ con ese nombre (a continuación se recordará lo que es ese grupo para un espacio homogéneo G/H cualquiera). Destaquemos que el grupo lineal de isotropía $\mathbf{G}_0$ de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ no es necesariamente conexo. Por esta razón, y para evitar malentendidos, en esta memoria, para un grupo de Lie H su componente conexa del elemento neutro e se denotarýa H_e, *nunca* como H_0, pese a que sea ésta última la notación más popular.

Enumeraremos ahora otras notaciones y expresiones que hemos usado, todas muy corrientes:

- La notación $f\colon (N,x) \to (N',x')$ significa que f es una aplicación diferenciable definida en un entorno de x en N en un entorno de x' en N' tal que $f(x) = x'$.

- Dados dos espacios vectoriales V y W de dimensiones finitas sobre un mismo cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$, el espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales $A\colon V \to W$ se denota habitualmente $\mathrm{Hom}(V,W)$ (y a veces $L(V,W)$). Si $v \in V$ escribiremos con frecuencia Av en vez de $A(v)$. Como es costumbre, identificaremos la aplicación lineal A con su matriz en alguna base, aunque no se mencione explicitamente ésta, y A también denota dicha matriz. De este modo, el vector v (o mejor dicho, el de sus componentes en esa base) debe escribirse como una columna, a la derecha de la matriz A que actúa sobre él. El espacio dual de V es $V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{F})$. Recordemos que hay una aplicación bilineal natural

  $$(v,\varphi) \in V \times V^* \to \langle v|\varphi\rangle = \varphi(v) \in \mathbb{F}\,.$$

  Dada una base $\mathcal{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$ de V, su base dual $\mathcal{B}^*$ es la única base $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ de V^* que verifica la identidad

  $$\langle v_j|\varphi_k\rangle = \delta_{jk}\,.$$

  donde $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$ y $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ son las conocidas *deltas de Kronecker.*

- Para una aplicación lineal $A\colon V \to W$ su aplicación dual o traspuesta es la aplicación lineal

  $$A^t\colon \varphi \in W^* \to A^t\varphi = \varphi \circ A \in V^*\,,$$

  la cual está caracterizada por la identidad

  $$\langle Av|\varphi\rangle = \langle v|A^t\varphi\rangle\,.$$

- La matriz de una aplicación lineal $A\colon V \to W$ en sendas bases $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y $\{w_1, \ldots, w_p\}$ de W es la matriz de p filas y n columnas $A = (A^j{}_k)$ dada, para $j = 1, \ldots, p$ y $k = 1, \ldots, n$ por
$$A(v_k) = A^j{}_k w_j \,.$$
Con frecuencia se pone el índice de fila j también abajo, en tal caso la matriz de A se escribe (A_{jk}). La matriz de la aplicación lineal dual $A^t\colon W^* \to V^*$ respecto a las respectivas bases duales es precisamente la matriz traspuesta, que se denotará como es habitual A^t, y que está dada por $A^t_{kj} = A_{jk}$.

- Usaremos frecuentemente el **convenio de sumación de índices repetidos arriba y abajo**. Por ejemplo,
$$a^u b_u = a^1 b_1 + \cdots + a^n b_n \,.$$

- La **aplicación identidad** de un conjunto X se denota id_X o sólo id.

- Si $f\colon X \to U$ y $g\colon Y \to V$ son aplicaciones, su **producto cartesiano** es la aplicación
$$f \times g\colon X \times Y \to U \times V$$
dada por $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$.

A continuación, a fin de fijar de forma inequívoca otras notaciones y definiciones que hemos empleado, y para facilitar la lectura de esta memoria, recordaremos algunos conceptos y propiedades elementales de la teoría de grupos de Lie y álgebras de Lie semisimples, usados directa o indirectamente. Pueden encontrarse en numerosos textos, en particular, en los que se reseñan. El orden en que se presentan los conceptos no corresponde necesariamente al de un desarrollo lógico.

0.1 Grupos de Lie y espacios homogéneos

Un **álgebra** $\mathfrak{A}$ sobre un cuerpo conmutativo $\mathbb{F}$ es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial dotado de una multiplicación $(x, y) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to xy \in \mathfrak{A}$ que es $\mathbb{F}$-bilineal. Un subespacio vectorial $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ es una **subálgebra** de $\mathfrak{A}$ si para todo b, $b' \in \mathfrak{B}$ se tiene $bb' \in \mathfrak{B}$. Decimos que $\mathfrak{B}$ es un **ideal** de $\mathfrak{A}$ si para todo $a \in \mathfrak{A}$ y todo $b \in \mathfrak{B}$ es $ab \in \mathfrak{B}$; en este caso, el espacio vectorial cociente $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ es también un álgebra con el producto $(x + \mathfrak{B})(y + \mathfrak{B}) = xy + \mathfrak{B}$. Decimos que

$\mathfrak{A}$ es un **álgebra asociativa** si su multiplicación tiene la propiedad asociativa. Cualquier espacio vectorial V puede considerarse un álgebra definiendo la multiplicación como la aplicación nula (es decir, $xy = 0$ siempre). Un **álgebra de Lie $\mathfrak{G}$** sobre $\mathbb{F}$ es un álgebra sobre ese cuerpo cuya multiplicación $(x, y) \times \mathfrak{A} \to [x, y]$ es antisimétrica y verifica la **identidad de Jacobi**. Lo primero significa que, para todo $x \in \mathfrak{G}$, tenemos $[x, x] = 0$. Lo segundo significa que, para todo x, y, $z \in \mathfrak{G}$, es $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$. Si $\mathfrak{H}$ es una subálgebra de $\mathfrak{G}$ entonces $\mathfrak{H}$ es también un álgebra de Lie. Si $\mathfrak{H}$ es un ideal de $\mathfrak{G}$ entonce $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ es un álgebra de Lie. Toda álgebra asociativa $\mathfrak{A}$ con multiplicación $(x, y) \to xy$ es también un álgebra de Lie con la multiplicación $[x, y] = xy - yx$. Los endomorfismos de un espacio vectorial V (es decir, las aplicaciones lineales $A \colon V \to V$) forman un álgebra asociativa con la composición $A \circ B$ de aplicaciones; por tanto dichos endomorfismos también forman un álgebra de Lie con el corchete de endomorfismos $[A, B] = A \circ B - B \circ A$, a la que denotaremos $\mathfrak{gl}(V)$ y llamaremos **álgebra lineal general** de V. Una **derivación** δ de un álgebra $\mathfrak{A}$ es una aplicación lineal $\delta \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ que, para todo x, $y \in \mathfrak{A}$, verifica la condición $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$. Las derivaciones de $\mathfrak{A}$ forman una subálgebra $\mathfrak{Der}(\mathfrak{A})$ del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$. Toda variedad diferenciable M tiene asociada un álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{Der}(\mathfrak{F}_M)$, formada por los campos de vectores diferenciables X de clase C^∞ sobre M, los cuales pueden identificarse con las derivaciones del álgebra asociativa y conmutativa $\mathfrak{F}_M$ de todas las funciones $f \colon M \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ [54]. Un **álgebra de Lie $\mathfrak{G}$** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ se llama real o compleja según sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales, o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos.

Sea $\mathfrak{G}$ una álgebra de Lie compleja de dimensión n. Su **álgebra de Lie real subyacente**, que denotaremos por $\mathfrak{G}_\mathbb{R}$, es el conjunto $\mathfrak{G}$ con la estructura de álgebra de Lie real que se obtiene de $\mathfrak{G}$ con la misma suma y multiplicación de vectores pero con la multiplicación de vectores por números complejos restringida a la multiplicación de vectores por números reales. Nótese que si $i = \sqrt{-1}$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{G}$ entonces $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$ es una $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{G}_\mathbb{R}$, por lo que $\dim_\mathbb{R} \mathfrak{G}_\mathbb{R} = 2n$. Además, el endomorfismo $J \colon x \in \mathfrak{G}_\mathbb{R} \to ix \in \mathfrak{G}_\mathbb{R}$ verifica las dos siguientes condiciones: (1) $J \circ J = -\mathrm{id}_{\mathfrak{G}_\mathbb{R}}$ (porque $i^2 = -1$); (2) para todo x, y es $[Jx, y] = J[x, y]$ (porque $[-, -]$ es $\mathbb{C}$-bilineal por hipótesis). Reciprocamente, para que un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ sea compleja (es decir, para que exista un álgebra de Lie compleja $\mathfrak{G}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}_\mathbb{R}$) es suficiente que exista una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $J \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ verificando las dos condiciones siguientes: (1) $J \circ J = -\mathrm{id}_\mathfrak{g}$; (2) para todo x, $y \in \mathfrak{g}$ se tiene $[Jx, y] = J[x, y]$.

Recordemos que un **grupo de Lie** G (o grupo de Lie real) es una variedad dotada con una estructura de grupo cuya multiplicación $(x, y) \in G \times G \to xy \in G$ es diferenciable. Necesariamente el atlas maximal que define la estructura diferenciable de un grupo de Lie contiene un atlas de clase analí tica real y tanto la multiplicación como la aplicación inversión $x \in G \to x^{-1} \in G$ resultan ser necesariamente de clase analítica real. Un campo de vectores X sobre G es **invariante por la izquierda** si para todo $a \in G$ la **traslación por la izquierda** asociada

$$l_a \colon x \in G \to ax \in G$$

deja invariante X, es decir, para todo a, $x \in G$ se verifica

$$l_{a*}(x)X_x = X_{ax}\,.$$

Los campos de vectores sobre G que son invariantes por la izquierda son necesariamente diferenciables (de hecho, también son de clase analítica real como secciones del fibrado tangente TG de G) y forman una subálgebra $\mathfrak{G}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{X}(G)$ de todos los campos de vectores diferenciables sobre G, subálgebra que recibe el nombre de **álgebra de Lie del grupo de Lie** G. La aplicación

$$\nu \colon X \in \mathfrak{G} \subset \mathfrak{X}(G) \to X_e \in T_eG\,,$$

es un isomorfismo entre el espacio vectorial subyacente en $\mathfrak{G}$ y el espacio tangente a G en el elemento neutro $e \in G$. La **forma de Maurer-Cartan** de G es la 1-forma diferencial $\xi \in \bigwedge(G, \mathfrak{G})$ que a cada vector tangente $v \in T_aG$ le asocia el único campo de vectores $X \in \mathfrak{G}$ que verifica $X_a = v$. Dicha forma satisface la **ecuación de Maurer-Cartan**

$$\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}[\xi, \xi] = 0\,,$$

donde d es la **derivada exterior de formas diferenciales**. Nótese que en cada punto $a \in G$ la aplicación lineal $\xi_a : T_aG \to \mathfrak{G}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y que para todo $X \in \mathfrak{G}$ es

$$\xi_a(X_a) = X\,.$$

Nótese que

$$\xi_e = \nu^{-1}\,.$$

Recordemos que un **grupo de Lie complejo** es un grupo de Lie G que admite una estructura de variedad compleja respecto a la cual la multiplicación $(x, y) \in G \times G \to xy \in G$ es holomorfa (y por tanto las traslaciones l_a son holomorfas). Se deduce entonces que la inversión $x \to x^{-1}$ es necesariamente holomorfa. Una condición necesaria y suficiente para que un grupo de Lie G sea grupo de Lie complejo es que su álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ sea compleja, es decir, que exista una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $J\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ verificando que $J \circ J = -\mathrm{id}_{\mathfrak{G}}$ y que para todo X, $Y \in \mathfrak{G}$ se tenga $[Jx, y] = J[x, y]$. Los elementos de $\mathfrak{G}$ (es decir los campos de vectores invariantes por la izquierda) son en tal caso necesariamente campos de vectores holomorfos sobre G y sus curvas integrales se extienden de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Sea V un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita $n = \dim_{\mathbb{F}} V$. Cada base que fijemos en V induce un isomorfismo entre el álgebra lineal general $\mathfrak{gl}(V)$ de V y el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ de todas las matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{F}$. El **grupo lineal general** de V es el grupo de Lie $GL(V) \subset \mathfrak{gl}(V)$ (real o complejo) formado por los endomorfismos A de V que son biyectivos. La restricción del anterior isomorfismo al grupo de Lie $GL(V)$ establece un isomorfismo de grupos de Lie entre $GL(V)$ y el grupo $GL(n, \mathbb{F})$ de las matrices cuadradas inversibles con coeficientes en $\mathbb{F}$. El álgebra de Lie de $GL(V)$ es canonicamente isomorfa a $\mathfrak{gl}(V)$.

Una **representación de un grupo de Lie** G en un espacio vectorial V real o complejo, de dimensión finita, es un homomorfismo de grupos de Lie $F\colon G \to GL(V)$. Su **representación dual** $F^\dagger\colon G \to GL(V^*)$ está caracterizada por cumplir la identidad

$$\langle F(x)(v) | F^\dagger(x)(\varphi)\rangle = \langle v|\varphi\rangle \,.$$

Por tanto, para todo $x \in G$, $v \in V$, $\varphi \in V^*$, es $F^\dagger(x)(\varphi) = \varphi \circ F(x^{-1})$, es decir para todo $x \in G$ es

$$F^\dagger(x) = F(x^{-1})^t \,.$$

Análogamente, una **representación de un álgebra de Lie** $\mathfrak{G}$ en un espacio vectorial V es un homomorfismo de álgebras de Lie $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{gl}(V)$. Su **representación dual** $f^\dagger\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{gl}(V^*)$ está caracterizada por cumplir la identidad

$$\langle f(x)(v)|\varphi\rangle + \langle v|f^\dagger(x)(\varphi)\rangle = 0 \,.$$

Por tanto para todo $x \in \mathfrak{G}$, $v \in V$, $\varphi \in V^*$ es $f^\dagger(x)(\varphi) = -\varphi \circ f(x)$, es decir, para todo $x \in \mathfrak{G}$ es

$$f^\dagger(x) = -f(x)^t \,.$$

Una representación ϱ de un grupo G (o de un álgebra de Lie $\mathfrak{G}$) en un espacio vectorial V es **irreducible** si V es el único subespacio vectorial $W \subset V$ no nulo que verifica $\varrho(x)W \subset W$, para todo $x \in G$ (respectivamente, para todo $x \in \mathfrak{G}$). Dos representaciones f, $\tilde{f}$ del grupo G (respectivamente, del álgebra de Lie $\mathfrak{G}$) en sendos espacios vectoriales V y $\tilde{V}$ se denominan **representaciones equivalentes** si existe un isomorfismo $A\colon V \to \tilde{V}$ tal que para todo $a \in G$ (respectivamente, $a \in \mathfrak{G}$) se verifica que $A \circ f(a) = \tilde{f}(a) \circ A$, en cuyo caso A recibe el nombre de **operador de entrelazamiento** de ambas representaciones.

Sea $\mathfrak{G}$ un álgebra de Lie (real o compleja) de dimensión finita. Por lo dicho antes,una aplicación lineal $A\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ es una derivación de $\mathfrak{G}$ si para todo x, $y \in \mathfrak{G}$ es $A[x,y] = [Ax,y] + [x,Ay]$. La aplicación lineal A es un **automorfismo** de $\mathfrak{G}$ si es biyectiva y $A[x,y] = [Ax,Ay]$. Para $x \in \mathfrak{G}$ la aplicación lineal $\mathrm{ad}(x)$ (o, más enfaticamente, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}(x)$) que está definida por

$$\mathrm{ad}(x) = [x,-]\colon y \in \mathfrak{G} \to [x,y] \in \mathfrak{G}\,,$$

es una derivación de $\mathfrak{G}$. La **representación adjunta del álgebra de Lie** $\mathfrak{G}$ es el homomorfismo de álgebras de Lie denotado por ad (o, más enfaticamente, por $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}$) que está definido por

$$\mathrm{ad}\colon x \in \mathfrak{G} \to \mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{G})\,.$$

Recordemos que un **homomorfismo de grupos de Lie** $f\colon G_1 \to G_2$ es un homomorfismo entre los grupos subyacentes que también es una aplicación diferenciable de variedades. En tal caso f determina un único homomorfismo f_* entre sus respectivas álgebras de Lie,

$$f_*\colon \mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2\,,$$

que puede identificarse con la diferencial $f_*(e)$ de f en e, mediante el isomorfismo natural $\nu\colon \mathfrak{G} \to T_eG$ mencionado antes. Cuando f es un isomorfismo de grupos de Lie f_* coincide con la restricción a $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{X}(G_1)$ de la diferencial que el difeomorfismo f induce entre las álgebras de Lie $\mathfrak{X}(G_1)$ y $\mathfrak{X}(G_2)$.

Si $F\colon G \to GL(V)$ es una representación de un grupo de Lie G en un espacio vectorial V de dimensión finita entonces su diferencial $F_*\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representacion de su álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ en V. Además, si F es irreducible entonces F_* es irreducible. El recíproco es cierto cuando G es conexo. Si $F^\dagger$ es la representación dual de G en V^* entonces su diferencial ${F^\dagger}_*$ coincide con la representación dual de F_*. En otras palabras

$${F^\dagger}_* = {F_*}^\dagger\,.$$

Los automorfismos de un álgebra de Lie real o compleja $\mathfrak{G}$ forman un subgrupo de Lie $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G}) \subset GL(\mathfrak{G})$ (respectivamente real o complejo). Su álgebra de Lie es la subálgebra $\mathfrak{Der}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{G})$ de las derivaciones de $\mathfrak{G}$. Sea $\mathcal{A}_a$ el automorfismo de G dado por la conjugación

$$\mathcal{A}_a \colon x \in G \to axa^{-1} \in G\,,$$

la **representación adjunta del grupo de Lie** G en $\mathfrak{G}$ es el homomorfismo de grupos de Lie denotado por Ad_G (o sencillamente Ad) definido por

$$\mathrm{Ad}_G \colon a \in G \to \mathrm{Ad}_G(a) = \mathcal{A}_{a*} \in GL(\mathfrak{G}),$$

es decir, $\mathrm{Ad}_G(a)$ es el automorfismo del álgebra $\mathfrak{G}(\equiv T_eG)$ obtenido al diferenciar el automorfismo $\mathcal{A}_a$ (en el elemento neutro $e \in G$). Se demuestra que la diferencial de la representación adjunta del grupo de Lie G es la representación adjunta del álgebra de Lie $\mathfrak{G}$, es decir

$$\mathrm{Ad}_{G*} = \mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}\,.$$

Obviamente, Ad_G y $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}$ son, respectivamente, representaciones de G y $\mathfrak{G}$ en el espacio vectorial $\mathfrak{G}$.

Sea G un grupo de Lie real o complejo y $\mathfrak{G}$ su álgebra de Lie. Recordemos que para cada $X \in \mathfrak{G} \subset \mathfrak{X}(G)$ su curva integral por el elemento neutro $e \in G$ es un homomorfismo de grupos de Lie

$$\exp_X \colon \mathbb{F} \to G$$

donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ si G es un grupo de Lie real y $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ si G es un grupo de Lie complejo. Estos homomorfismos determinan la **aplicación exponencial** de G,

$$\exp \colon X \in \mathfrak{G} \to \exp X = \exp_X(1) \in G\,.$$

Si $f \colon G_1 \to G_2$ es un homomorfismo de grupos de Lie entonces, para todo $X \in \mathfrak{G}_1$, es

$$f(\exp X) = \exp(f_* X)\,.$$

La aplicación exponencial de $GL(V)$ está dada por la exponenciación de matrices, es decir, para todo $X \in \mathfrak{gl}(V)$ es

$$\exp X = \mathrm{e}^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k\,.$$

Por tanto si $\mathfrak{G}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie G se tiene, para todo X, $Y \in \mathfrak{G}$, que

$$\mathrm{Ad}_G(\exp X) = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}X}\,.$$

Si $[X, Y] = 0$ entonces $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X + Y)$. En general, la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin permite expresar el lado de la izquierda como la exponencial de una serie, siempre que X, Y estén en un entorno de $0 \in \mathfrak{G}$ suficientemente pequeño. Recordemos que un álgebra de Lie real o compleja $\mathfrak{G}$ es **abeliana** o **conmutativa** si el corchete $[x, y]$ de dos elementos arbitrarios x, $y \in \mathfrak{G}$ es nulo. Un grupo de Lie G conexo es conmutativo si y sólo si su álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ es conmutativa. La estructura de los grupos conexos comutativos puede verse en [84]. Todo grupo de Lie complejo y compacto es necesariamente conmutativo.

Si $f : H \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie inyectivo, entonces su diferencial f_* es necesariamente inyectiva y f es necesariamente una inmersión inyectiva. En esta situación se dice que el par (H, f) es un **subgrupo de Lie** de G. En tal caso, si $\mathcal{T}$ es la topología de H, podemos dotar a $f(H)$ de la topología $\mathcal{T}_f = \{f(U)\,;\, U \in \mathcal{T}\}$ que convierte a $f(H)$ en un grupo de Lie (isomorfo a H mediante f) que es también un subgrupo de Lie de G mediante la inclusión $i\colon f(H) \to G$. Decimos que H es un **subgrupo de Lie regular** de G cuando la topología $\mathcal{T}_f$ coincide con la topología relativa $\mathcal{T}_{rel}$ de $f(H)$ en G. En ese caso f es un embebimiento (inmersión inyectiva y homeomorfismo) y $f(H)$ es necesariamente un subconjunto cerrado en G. Un importante teorema de E. Cartan establece el recíproco: si dotamos a un subgrupo H cerrado de un grupo de Lie G con la topología relativa entonces H se convierte de modo único en un subgrupo de Lie regular (respecto a la inclusión de H en G).

La exponencial de un subgrupo de Lie $H \subset G$ (no necesariamente cerrado) coincide con la restricción al álgebra de Lie $\mathfrak{H}$ de H de la exponencial de G. Se demuestra también que

$$\mathfrak{H} = \{X \in \mathfrak{G}\,;\ \exp_X(\mathbb{R}) \subset H\,\}\,.$$

Más aún, la aplicación exponencial de un grupo de Lie G permite establecer una biyección entre la familia de todas las subálgebras $\mathfrak{H}$ de su álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ y la familia de todos los subgrupos de Lie conexos H de G (no necesariamente cerrados en G). Los ideales $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ se corresponden con los subgrupos de Lie de G conexos que son subgrupos normales en G.

El llamado *tercer teorema de Lie* establece que hay una biyección entre la familia de todas álgebras de Lie reales (respectivamente, complejas) y la familia de todos los grupos de Lie conexos y simplemente conexos reales (respectivamente, complejos).

Sean G un grupo de Lie real o complejo, $\mathfrak{G}$ su álgebra de Lie, H un subgrupo cerrado de G con su estructura (única) de subgrupo de Lie regular (es decir, compatible con la topología relativa de H en G) y $\mathfrak{H}$ el álgebra de Lie de H. Recordemos que el conjunto de las clases laterales G/H, dotado de la topología cociente, tiene una estructura de variedad analítica real (compleja cuando G es un grupo de Lie complejo y $\mathfrak{H}$ es una $\mathbb{C}$-subálgebra de $\mathfrak{H}$). Dicha estructura se obtiene así: Fijemos un subespacio vectorial (real o complejo) $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{G}$ verificando que $\mathfrak{G} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}$. Sea $o \in G/H$ la clase lateral del elemento neutro $e \in G$, clase a la que daremos el nombre de **origen** de G/H. Recordemos que la aplicación

$$\mathrm{Exp}\colon X \in \mathfrak{M} \to (\exp X)H \in G/H$$

puede restringirse a un entorno abierto de $0 \in \mathfrak{M}$ suficientemente pequeño de modo que su imagen sea un entorno abierto de la clase trivial $o \in G/H$ y dicha restricción un difeomorfismo analítico entre ambos abiertos. Dado $a \in G$, la traslación por la izquierda

$$l_a\colon x \in G \to ax \in G$$

induce un homeomorfismo τ_a dado por

$$\tau_a\colon xH \in G/H \to \tau_a(xH) = axH \in G/H\,,$$

(al que también suele llamarse traslación por la izquierda inducida por a) y que compuesto con la citada restricción de Exp proporciona un sistema de coordenadas en un entorno abierto del punto a. El atlas resultante sobre G/H es de clase analítica y cada traslación τ_a se convierte en un difeomorfismo. La **proyección natural**

$$\pi\colon a \in G \to aH \in G/H$$

se convierte en una submersión analítica respecto a las estructuras diferenciables de G y G/H y determina una estructura de fibrado principal de clase analítica, con espacio total G, base G/H y grupo de estructura H. Si H es además un subgrupo normal de G entonces G/H es un grupo de Lie, $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ es su álgebra de Lie y π un homomorfismo de grupos de Lie. Volviendo al caso general, recordemos que la acción natural de G por la izquierda sobre la variedad cociente G/H, dada por

$$(a, bH) \in G \times (G/H) \to (ab)H \in G/H\,,$$

es transitiva y de clase analítica. El **grupo de isotropía** del origen $o \in G/H$ es H y por tanto G/H es un **espacio homogéneo** analítico bajo dicha acción de G. Entre el espacio vectorial cociente $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ y el espacio tangente $T_o(G/H)$ hay un isomorfismo natural

$$\nu\colon X + \mathfrak{H} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H} \to \pi_*(e)X_e \in T_o(G/H)\,.$$

Este isomorfismo es compatible con el isomorfismo natural ${\xi_e}^{-1}\colon X \in \mathfrak{G} \to X_e \in T_eG$ inducido por la forma de Maurer -Cartan ξ en el origen $e \in G$, de modo que, si denotamos también

$$\pi\colon X \in \mathfrak{G} \to X + \mathfrak{H} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}\,,$$

el siguiente diagrama resulta conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G} & \xrightarrow{{\xi_e}^{-1}} & T_e(G) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_*(e) \\ \mathfrak{G}/\mathfrak{H} & \xrightarrow{\nu} & T_o(G/H). \end{array}$$

Para todo $a \in H$ es $\tau_a(o) = o$. La **representación lineal de isotropía** de G/H es la representación

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}\colon H \to GL(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})\,.$$

del grupo de isotropía H en el espacio vectorial $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ dada para, todo $a \in H$, por

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}(a) = \nu^{-1} \circ \tau_{a*}(o) \circ \nu\,.$$

es decir, mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G}/\mathfrak{H} & \xrightarrow{\nu} & T_o(G/H) \\ \mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}(a) \downarrow & & \downarrow \tau_{a*}(e) \\ \mathfrak{G}/\mathfrak{H} & \xrightarrow{\nu} & T_o(G/H). \end{array}$$

Puede verse facilmente [84] que, para todo $a \in H$, es

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}(a) \circ \pi = \pi \circ \mathrm{Ad}_G(a)\,,$$

es decir, que para todo $a \in H$ y todo $X \in \mathfrak{G}$, se tiene

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}(a)(X + \mathfrak{H}) = (\mathrm{Ad}_G(a)X) + \mathfrak{H}\,.$$

La diferencial de $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}$, que denotaremos

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$$

es una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ que recibe el nombre de **representación lineal (infinitesimal) de isotropía** de G/H. Para todo $A \in \mathfrak{H}$ verifica

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}(A) \circ \pi = \pi \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}(A)\,,$$

es decir, para todo $A \in \mathfrak{H}$ y todo $X \in \mathfrak{G}$, se tiene

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}(A)(X + \mathfrak{H}) = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}}(A)X) + \mathfrak{H}\,.$$

La **sucesión central descendente** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es la cadena de ideales

$$\mathcal{C}^0\mathfrak{g} \supset \mathcal{C}^1\mathfrak{g} \supset \ldots \mathcal{C}^{n-1}\mathfrak{g} \ldots\,,$$

con $\mathcal{C}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ y $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^k\mathfrak{g}]$, para $1 \leq k \leq n-1$.

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice **nilpotente** si existe $k \geq 0$ tal que $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} = 0$. Decimos que un grupo de Lie G es nilpotente si su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente. Recordemos que un endomorfismo X de un espacio vectorial V es *nilpotente* si existe un entero $n \geq 1$ verificando que $X^n = 0$. El teorema de Engel expresa que si V es de dimensión finita toda subálgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ formada por endomorfismos nilpotentes es un álgebra de Lie nilpotente. Sin embargo, ningún elemento X no nulo del álgebra abeliana de las matrices diagonales $n \times n$ reales o complejas es un endomorfismo nilpotente.

0.2 Algebras de Lie semisimples

Definición 0.2.1 *Sea $\mathfrak{G}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ de los números reales o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ de los números complejos. La* **forma de Killing** *de $\mathfrak{G}$ es la aplicación bilineal simétrica a valores en $\mathbb{F}$ dada, para x, $y \in \mathfrak{G}$, por*

$$B_{\mathfrak{G}}(x, y) = \mathrm{traza}(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y))\,.$$

Cuando no haya motivo para la confusión, escribiremos B en lugar de $B_{\mathfrak{G}}$.

Recordemos que la forma de Killing $B_{\mathfrak{H}}$ de un ideal $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ verifica que para cualesquiera x, $y \in \mathfrak{H}$,

$$B_{\mathfrak{H}}(x, y) = B_{\mathfrak{G}}(x, y).$$

Lema 0.2.1 *Sea $\mathfrak{G}$ un álgebra de Lie real o compleja de dimensión finita.*

i) *Si D es una derivación de $\mathfrak{G}$, se verifica, para todos x, $y \in \mathfrak{G}$, que*

$$B_{\mathfrak{G}}(Dx, y) + B_{\mathfrak{G}}(x, Dy) = 0\,.$$

ii) *Si f es un automorfismo de $\mathfrak{G}$, se verifica, para todos x, $y \in \mathfrak{G}$, que*

$$B_{\mathfrak{G}}(fx, fy) = B_{\mathfrak{G}}(x, y)\,.$$

Sea $\mathfrak{G}$ un álgebra de Lie real o compleja de dimensión finita. Recordemos que $\mathfrak{G}$ se llama **simple** si no es abeliana y sus únicos ideales son $\mathfrak{G}$ y $\{0\}$. El álgebra $\mathfrak{G}$ es **semisimple** si todo ideal abeliano $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ es necesariamente nulo. En particular, toda álgebra de Lie simple es necesariamente semisimple.

Teorema 0.2.1 *Sea $\mathfrak{G}$ un álgebra de Lie real o compleja.*

i) *(Criterio de E. Cartan) El álgebra $\mathfrak{G}$ es semisimple si y sólo si su forma de Killing $B_{\mathfrak{G}}$ es no degenerada.*

ii) *El álgebra $\mathfrak{G}$ es semisimple si y sólo si es suma directa de sus ideales simples.*

iii) *(H. Zassenhaus) Si $\mathfrak{G}$ es semisimple entonces toda derivación D de $\mathfrak{G}$ es interna, es decir, existe $x \in \mathfrak{G}$ tal que $D = \mathrm{ad}(x)$.*

Recordemos que el **centro** $\mathfrak{z}(\mathfrak{G})$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ real o compleja es el ideal

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) = \{X \in \mathfrak{G}\ ;\ [X, Y] = 0\ ,\ Y \in \mathfrak{G}\},$$

es decir, $\mathfrak{z}(\mathfrak{G})$ es el núcleo de la representación adjunta de $\mathfrak{G}$. Si $\mathfrak{G}$ es un álgebra de Lie semisimple, entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{G}) = 0$.

Recordemos que un álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ real o compleja se llama **reductiva** si es suma directa de su centro y de un ideal semisimple, que necesariamente coincide con $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, es decir,

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{z}(\mathfrak{G}) \oplus [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]\,.$$

Un álgebra de Lie $\mathfrak{K}$ real y reductiva se dice **compacta** si para todo $X \in [\mathfrak{K}, \mathfrak{K}]$, $X \neq 0$, es

$$B_{\mathfrak{K}}(X, X) < 0\,.$$

Es bien conocido [95] que una $\mathbb{R}$-álgebra de Lie $\mathfrak{K}$ es compacta si y sólo si es el álgebra de Lie de un grupo de Lie K compacto.

Definición 0.2.2 *Sea $\mathfrak{G}$ un álgebra de Lie real. La* **complexificación** $\mathfrak{G}^{\mathbb{C}}$ *es el álgebra de Lie compleja*

$$\mathfrak{G}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{G} \otimes \mathbb{C}\,.$$

Podemos establecer un isomorfismo canónico

$$\mathfrak{G}^{\mathbb{C}} \equiv \{X + iY \ ; \ X, Y \in \mathfrak{G}\}$$

entre la complexificación $\mathfrak{G}^{\mathbb{C}}$ y el álgebra de Lie compleja que resulta de dotar al espacio vectorial complejo $\{X + iY \ ; \ X, Y \in \mathfrak{G}\}$ con el producto corchete

$$[X + iY, X' + iY'] = ([X, X'] - [Y, Y']) + i([X, Y'] + [Y, X']).$$

Sea $\mathfrak{G}$ un álgebra de Lie real. Toda $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{G}$ es también una $\mathbb{C}$-base de su complexificada $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}^{\mathbb{C}}$. De ahí se deduce que al restringir a $\mathfrak{G}$ la forma de Killing $\tilde{B}$ de $\tilde{\mathfrak{G}}$ obtenemos la forma de Killing B de $\mathfrak{G}$. Combinando esto con el criterio de Cartan vemos que $\mathfrak{G}$ es semisimple si y sólo si su complexificada $\tilde{\mathfrak{G}}$ es semisimple. Sin embargo la complexificación de un álgebra real simple puede no ser simple. Este fenómeno es una de las claves para comprender las estructura de las álgebras simples reales y su relación con la estructura de las álgebras simples complejas.

A continuación vamos a formular los conceptos de **conjugación** y de **forma real** de un álgebra de Lie compleja y a recordar su relación mutua.

Definición 0.2.3 *Una* **conjugación** *σ de un álgebra de Lie compleja $\mathfrak{G}$ es un automorfismo $\sigma\colon \mathfrak{G}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{G}_{\mathbb{R}}$ del álgebra de Lie real $\mathfrak{G}_{\mathbb{R}}$ que es* **involutivo** *(es decir: $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{G}}$) y que además es* **semi-lineal** *respecto a la conjugación $z = x + iy \in \mathbb{C} \to \bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ (es decir, para todo $X \in \mathfrak{G}$ y todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene $\sigma(zX) = \bar{z}\sigma(X)$).*

Por ejemplo, en $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ una conjugación es $\sigma\colon (z_{uv}) \to (\bar{z}_{uv})$.

Definición 0.2.4 *Una* **forma real** *$\mathfrak{R}$ de un álgebra de Lie compleja $\mathfrak{G}$ es una subálgebra $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{G}_{\mathbb{R}}$ verificando que $\mathfrak{G} = \mathfrak{R} \otimes \mathbb{C}$, es decir, como $\mathbb{C}$-álgebras de Lie, $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{R}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{R} \oplus i\,\mathfrak{R}$ son iguales (y por tanto también son iguales las $\mathbb{R}$-álgebras de Lie $\mathfrak{G}_{\mathbb{R}}$ y $\mathfrak{R} \oplus i\,\mathfrak{R}$).*

Existen álgebras de Lie complejas que carecen de formas reales (véase por ejemplo [55]). El concepto de conjugación es equivalente al de **forma real**, como ponen de manifiesto las dos siguientes propiedades:

Lema 0.2.2 *Sean $\mathfrak{G}$ un álgebra de Lie compleja y $\mathfrak{G}_{\mathbb{R}}$ su álgebra de Lie real subyacente.*

- *Si* $\mathfrak{G}$ *posee una forma real* $\mathfrak{R}$ *entonces la aplicación*

$$\sigma\colon\ x+iy\in\mathfrak{G}=\mathfrak{R}\oplus i\mathfrak{R}\to x-iy\in\mathfrak{R}\oplus i\mathfrak{R}=\mathfrak{G}$$

es una conjugación de $\mathfrak{G}$ *y además* $\mathfrak{R}=\{X\in\mathfrak{G}\ ;\ \sigma(X)=X\,\}$.

- *Si* $\mathfrak{G}$ *posee una conjugación* $\sigma\colon\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}$ *entonces el conjunto*

$$\mathfrak{G}_\sigma=\{X\in\mathfrak{G}\ ;\ \sigma(X)=X\}$$

es una forma real de $\mathfrak{G}$.

H. Weyl demostró, como es bien sabido, [54], [55], que toda álgebra de Lie semisimple compleja $\mathfrak{G}$ posee una forma real compacta $\mathfrak{K}$, que es única, salvo automorfismos (y que necesariamente es semisimple). Por ejemplo, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ tiene como forma real compacta a la subálgebra de Lie real $\mathfrak{su}(n)\subset\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ de las matrices antihermitianas de traza cero. Además toda álgebra de Lie semisimple compleja $\mathfrak{G}$ posee al menos una forma real no compacta. Por ejemplo, una forma real no compacta de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ es el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$. Por tanto toda álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ compleja semisimple posee al menos dos conjugaciones no equivalentes en un sentido obvio, dado que determinan formas reales no isomorfas de $\mathfrak{G}$.

Las conjugaciones permiten reducir el estudio de las álgebras de Lie simples reales al de las álgebras de Lie simples complejas

Lema 0.2.3 *Si* $\mathfrak{G}$ *es un álgebra de Lie compleja simple entonces*

- $\mathfrak{G}_\mathbb{R}$ *es un álgebra real simple.*

- *Para toda conjugación* σ *de* $\mathfrak{G}$ *la forma real asociada*

$$\mathfrak{G}_\sigma=\{X\in\mathfrak{G}\ ;\ \sigma(X)=X\}$$

es una subálgebra simple de $\mathfrak{G}_\mathbb{R}$.

La importancia del siguiente enunciado es bien conocida; expresa que todas las álgebras de Lie reales simples se obtienen por el procedimiento anterior. La demostración puede verse por ejemplo en [53] o en [54].

Lema 0.2.4 *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie real simple. Entonces* $\mathfrak{g}$ *verifica una y sólo una de las siguientes condiciones:*

i) *Existen un álgebra simple compleja $\mathfrak{G}$ y una conjugación σ en $\mathfrak{G}$ tales que*
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{G}_\sigma = \{X \in \mathfrak{G} \; ; \; \sigma(X) = X\} \, .$$
La complexificación de $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}_\sigma$ es $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{G}$.

ii) *Existe un álgebra simple compleja $\mathfrak{G}$ tal que $\mathfrak{g}$ es el álgebra simple real $\mathfrak{G}_{\mathbb{R}}$ obtenida restringiendo el cuerpo de escalares de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$, es decir*
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{G}_{\mathbb{R}} \, .$$
La complexificación de $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}_{\mathbb{R}}$ es $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{G} \oplus \mathfrak{G}$.

En resumen, un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ es simple si y sólo si o bien $\mathfrak{g}$ es una forma real de un álgebra de Lie compleja simple $\mathfrak{G}$ o bien $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie real $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}_{\mathbb{R}}$ que subyace en un álgebra de Lie compleja simple $\mathfrak{G}$.

Recordemos que W. Killing demostró que toda álgebra de Lie compleja $\mathfrak{G}$ simple es isomorfa o bien a un álgebra de Lie perteneciente a una de las siguientes cuatro familias

1. $$A_n = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{C}) \, ; \; \text{traza}(X) = 0\} \quad , \quad n \geq 1$$

2. $$B_n = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n+1, \mathbb{C}) \, ; \; X + X^T = 0\} \quad , \quad n \geq 2$$

3. $$C_n = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})\{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \, ; \; JX + X^T J = 0\} \quad , \quad n \geq 3$$

4. $$D_n = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \, ; \; X + X^T = 0\} \quad , \quad n \geq 4$$

(en cuyo caso se dice que $\mathfrak{G}$ es un álgebra de Lie compleja simple **clásica**) o bien $\mathfrak{G}$ es una de las cinco álgebras de Lie complejas simples **excepcionales**
$$G_2 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8 \, ,$$
descubiertas por Killing, de dimensiones 14, 52, 78, 133, 248 respectivamente. La demostración puede verse por ejemplo en [53] o en [54]. El álgebra de Lie $A_n = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$ es el *álgebra especial lineal* compleja, el álgebra de Lie $C_n = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C})$ es el *álgebra simpléctica* compleja y las álgebras de Lie $B_n = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$ y $D_n = \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ son las *álgebras ortogonales*

complejas. En la definición del álgebra de Lie C_n, si denotamos por I_n la matriz identidad $n \times n$, la matriz J está dada por

$$J = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right] .$$

Como hemos dicho antes, si $\mathfrak{G}$ es un álgebra de Lie compleja simple entonces su álgebra de Lie real subyacente $\mathfrak{G}_{\mathbb{R}}$ es un álgebra de Lie real simple. Por tanto, la clasificación de las álgebras de Lie reales simples se reduce a la determinación de las formas reales no isomorfas de las álgebras de Lie complejas simples. Esta clasificación fue hecha por E. Cartan, cuya demostración ha sufrido desde entonces numerosas variantes y simplificaciones. La familia de álgebras de Lie reales $\mathfrak{g}$ simples clásicas está formada por las álgebras reales subyacentes en las álgebras simples complejas de las cuatro familias infinitas anteriores y por sus respectivas formas reales no isomorfas. La familia de álgebras de Lie reales $\mathfrak{g}$ simples excepcionales está formada por las álgebras reales subyacentes a las cinco álgebras complejas simples excepcionales y por sus respectivas formas reales no isomorfas. Remitimos a los textos de Hausner-Schwartz [53], Goto-Grosshans [42] y Knapp [65]. Señalemos que la biyección que a cada álgebra de Lie compleja simple le asigna su forma real compacta induce una clasificación de las álgebras de Lie simples compactas. Esto proporciona también sendas clasificaciones para los grupos de Lie simplemente conexos simples complejos y para los grupos de Lie simplemente conexos simples compactos. El propio E. Cartan creó posteriormente la teoría de los espacios riemannianos simétricos, (que forman una familia de espacios homogéneos G/H riemannianos) y constató el hecho sorprendente de que clasificar los espacios simétricos simplemente conexos con representación lineal de isotropía irreducible es esencialmente lo mismo que clasificar las álgebras de Lie reales simples. Remitimos a los textos de Helgason [54] y Wolf [119].

Capítulo 1

Fibrados de referencias de segundo orden

Recordemos que el fibrado de referencias lineales de una variedad diferenciable M es un $GL(n, \mathbb{R})$-fibrado principal cuyo espacio total $\mathcal{F}M$ está formado por todos los isomorfismos lineales $z \colon \mathbb{R}^n \to T_xM$ con x recorriendo todos los puntos de M. La proyección de este fibrado

$$\pi_0^1 \colon z \in \mathcal{F}M \to x \in M \,,$$

asigna a cada referencia lineal z sobre M el único punto $x \in M$ tal que $T_xM = z(\mathbb{R}^n)$. El grupo $GL(n, \mathbb{R})$ actúa por la derecha sobre $\mathcal{F}M$ mediante la composición de aplicaciones

$$(z, a) \in \mathcal{F}M \times GL(n, \mathbb{R}) \to z \circ a \in \mathcal{F}M \,.$$

Es habitual pensar las referencias lineales como las bases de los espacios tangentes de M.

Los jets permiten introducir nuevos fibrados sobre una variedad M que generalizan el fibrado de referencias lineales de M. Repasemos brevemente lo que son. Sean M y N variedades; consideremos los pares de la forma $(U(x), f)$ donde $U(x)$ es un entorno abierto de $x \in M$ y $f \colon U(x) \to N$ es una aplicación diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty$. En el conjunto de tales pares, dado $r \in \mathbb{N}$, la siguiente relación es de equivalencia:

$$(U_1(x), f_1) \sim (U_2(x), f_2)$$

si y sólo $f_1(x) = f_2(x)$ y para alguna carta (W_M, ϕ_M) de x en M y para alguna carta (W_N, ϕ_N) de $y = f_1(x) = f_2(x)$ en N se verifica que las r

primeras diferenciales en $\phi_M(x)$ de $\phi_N \circ f_1 \circ \phi_M^{-1}$ y $\phi_N \circ f_2 \circ \phi_M^{-1}$ coinciden. La clase de equivalencia de un par $(U(x), f)$ se llamará un r**-jet** (o también un jet de orden r) de aplicaciones $\mathcal{C}^\infty$ de M en N en el punto $x \in M$ y se denotará por $j^r_{x,f(x)}f$, o simplemente, $j^r_x f$. Si $V(y)$ es un abierto de N que contiene a $f\big(U(x)\big)$, con $y = f(x)$, y $g\colon V(y) \subset N \to P$ define un par $(V(y), g)$ análogo, siendo P otra variedad, entonces el producto de jets está definido como

$$(j^r_y g)(j^r_x f) = j^r_x(g \circ f)\,,$$

que expresa el polinomio de Taylor de orden r de la composición $g \circ f$ como la composición de los polinomios de Taylor de orden r de g y f en los puntos y, x respectivamente, es decir se trata de la regla de la cadena para los polinomios de Taylor de orden r de ambas aplicaciones, leidas en coordenadas.

Si $\dim M = n$, una **referencia holonómica** de orden r en el punto $x \in M$ (o, por abuso de lenguaje, una referencia de orden r) es esencialmente el polinomio de Taylor de grado r de un difeomorfismo f definido en un entorno abierto de $0 \in \mathbb{R}^n$ y a valores en un abierto de la variedad M, con $f(0) = x$, es decir, la referencia holonómica de orden r definida por el difeomorfismo f es simplemente el jet $j^r_0 f$. El conjunto de todas las referencias holonómicas de orden r sobre M forma el espacio total $\mathcal{F}^r M$ de un fibrado principal sobre M, cuya proyección se denota $\pi^r_0\colon \mathcal{F}^r M \to M$ y está dada por

$$\pi^r_0(j^r_0 f) = f(0)\,.$$

El grupo que actúa por la derecha sobre este fibrado es el grupo $G^r(n)$ de las referencias holonómicas de orden r de $\mathbb{R}^n$ que dejan fijo 0. Si $r = 1$, $G^1(n)$ es isomorfo de modo natural a $GL(n, \mathbb{R})$ y el fibrado $\mathcal{F}^1 M$ que se obtiene es isomorfo al fibrado de referencias lineales $\mathcal{F}M$ de M.

En el estudio de varias estructuras geométricas sobre una variedad M, sus fibrados de referencias de segundo orden juegan un papel importante. Sin embargo las referencias holonómicas no bastan para describir algunas estructuras y propiedades geométricas, como se pondrá en evidencia. Las referencias holonómicas de segundo orden pueden ser generalizadas de la siguiente manera: el fibrado $\mathcal{F}\mathbb{R}^n$ de las referencias lineales de $\mathbb{R}^n$ tiene un elemento distinguido, que llamaremos e_0 (el fibrado de referencias lineales de la variedad $\mathbb{R}^n$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n \oplus GL(n, \mathbb{R})$ y tal elemento distinguido en $\mathcal{F}\mathbb{R}^n$ es en esencia la base canónica $\{E_1, ..., E_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, o, en el lenguaje de jets, el 1-jet de la aplicación identidad de $\mathbb{R}^n$); si $\Phi\colon (\mathcal{F}\mathbb{R}^n, e_0) \to (\mathcal{F}M, \Phi(e_0))$ es un isomorfismo de fibrados principales, diremos que el jet $j^1_{e_0,\Phi(e_0)}\Phi$ de orden 1 de Φ en e_0 es una **referencia no holonómica de segundo orden** sobre el punto $\pi^1_0(\Phi(e_0)) \in M$. Puesto que un homomorfismo de fibrados lleva fibras en fibras, el isomorfismo de fibrados Φ determina, además, una aplicación ϕ de $\mathbb{R}^n$ en M. Si $\Phi(e_0)$, que es una referencia lineal en M, coincide con el 1-jet $j_0^1\phi$ de ϕ en el origen $0 \in \mathbb{R}^n$, diremos que la referencia no holonómica definida por el jet de orden 1 de Φ es una **referencia semi-holonómica**. El conjunto de referencias no holonómicas de segundo orden sobre todos los puntos de M es (el espacio total de) un fibrado sobre M, que denotaremos por $\tilde{\mathcal{F}}^2M$ mientras que su proyección en M se escribirá como

$$\tilde{\pi}_0^2 \colon \tilde{\mathcal{F}}^2M \to M\,,$$

El conjunto de todas las referencias semi-holonómicas de segundo orden sobre todos los puntos de M es también (el espacio total de) un fibrado sobre M que se denota

$$\hat{\pi}_0^2 \colon \hat{\mathcal{F}}^2M \to M.$$

Si en la definición de referencia semi-holonómica de segundo orden, se añade la exigencia de que el 1-jet $j^1_{e_0,\Phi(e_0)}\Phi$ coincida con el 1-jet de la **primera prolongación** de la aplicación ϕ, que es el isomorfismo de fibrados definido por

$$\phi^{(1)} \colon j_x^1 f \in \mathcal{F}\mathbb{R}^n \to j_x^1(\phi \circ f) \in \mathcal{F}M,$$

obtenemos una clase de referencias semi-holonómicas que forman el espacio total de un subfibrado de $\hat{\mathcal{F}}^2M$ isomorfo al fibrado $\mathcal{F}^2M$ de referencias (holonómicas) de orden dos sobre M, razón por la que se denota también $\mathcal{F}^2M$ a ese subfibrado de $\hat{\mathcal{F}}^2M$. Tenemos entonces que

$$\mathcal{F}^2M \subset \hat{\mathcal{F}}^2M \subset \tilde{\mathcal{F}}^2M.$$

Si en los dos párrafos anteriores sustituimos r por 2, M por $\mathbb{R}^n$ y x y $\pi_0^1(\Phi(e_0))$ por el origen $0 \in \mathbb{R}^n$, obtenemos, usando las mismas construcciones, los grupos de estructura de estos tres fibrados, que se denotan por $G^2(n)$, $\hat{G}^2(n)$ y $\tilde{G}^2(n)$ y verifican que

$$G^2(n) \subset \hat{G}^2(n) \subset \tilde{G}^2(n).$$

Tanto las operaciones como la acción por la derecha de cada uno de estos grupos sobre los respectivos fibrados están dadas por la composición de jets (el jet de una aplicación operado con el jet de otra aplicación es el jet de la composición).

Existen muchos modelos para describir las referencias holonómicas, semi-holonómicas y no holonómicas de segundo orden, todos ellos, como el descrito arriba, a través de fibrados de jets. En este capítulo se describen las referencias semi-holonómicas y no holonómicas de segundo orden de nuevas maneras diferentes. La primera consiste en ver tales referencias como cierto tipo de referencias lineales del fibrado de referencias lineales de M, obteniendo así dos subfibrados de $\mathcal{F}(\mathcal{F}M)$ isomorfos a $\hat{\mathcal{F}}^2M$ y a $\tilde{\mathcal{F}}^2M$. La segunda aporta un modelo puramente geométrico: una referencia semi-holonómica de orden dos en un punto $x \in M$ es un subespacio horizontal en un punto de la fibra sobre x, mientras que una referencia no holonómica de orden dos en $x \in M$ es una base de una subespacio horizontal en un punto de la fibra sobre x. El conjunto de todos los subespacios n dimensionales tangentes a $\mathcal{F}M$ es un fibrado $\mathcal{G}_n\big(T(\mathcal{F}M)\big)$ sobre M llamado fibrado tangente de Grassmann de n-planos tangentes. El conjunto de todas las bases de todos los subespacios n-dimensionales tangentes a $\mathcal{F}M$ es un fibrado $\mathcal{S}t_n\big(T(\mathcal{F}M)\big)$ sobre M llamado fibrado tangente de Stiefel de n-referencias (o n-bases) tangentes a $\mathcal{F}M$. Podemos identificar los fibrados de referencias de orden dos $\hat{\mathcal{F}}^2M$ (no holónomas) y $\tilde{\mathcal{F}}^2M$ (semi-holónomas) con sendos subfibrados

$$\mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} \subset \mathcal{G}_n\big(T(\mathcal{F}M)\big)$$

de n-planos horizontales y

$$\mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} \subset \mathcal{S}t_n\big(T(\mathcal{F}M)\big)$$

de n-referencias horizontales.

Además, usando estos nuevos modelos se pone, de manifiesto de modo natural el hecho de que $\tilde{\mathcal{F}}^2M$ es un fibrado sobre $\hat{\mathcal{F}}^2M$ con grupo de estructura $GL(n,\mathbb{R})$, hecho que, hasta donde nosotros conocemos, no está explícitamente recogido en la literatura. Asimismo, usamos esta construcción para probar, de una manera muy breve, un resultado clásico de la teoría de conexiones, debido a P. Libermann. Finalmente, se da un tercer modelo para los fibrados $\hat{\mathcal{F}}^2M$ y $\tilde{\mathcal{F}}^2M$, obteniéndolos como extensión del fibrado $\mathcal{F}^2M$ mediante una técnica que consiste en "alargar" el grupo de estructura. El fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2M$, tanto entendido como fibrado de referencias semi-holonómicas de segundo orden como entendido como extensión del fibrado $\mathcal{F}M$ será utilizado en el capítulo tercero para generalizar la teoría de Ochiai de estructuras de Cartan de tipo graduado y unificarla con la desarrollada por Tanaka acerca de estructuras geométricas de orden dos.

Los resultados de este capítulo están publicados en [81].

1.1 Fibrados tangentes de Stiefel y Grassmann sobre una variedad

Vamos a comenzar revisando lo que son las variedades de Grassmann y Stiefel. Mas aun, expresaremos el atlas usual de la variedad de Grassmann $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$ de una manera geométrica, tal y como estableció Hangan [49] (véase también [118]). Nosotros necesitaremos esta descripción en nuestro tratamiento de los fibrados de referencias no holonómicas y semi-holonómicas de segundo orden sobre una variedad diferenciable real.

Sean p, $q \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q \leq m$, $p + q = m$. La variedad de Stiefel $\mathcal{S}t_q(\mathbb{R}^m)$ de las q-referencias (o q-bases) de $\mathbb{R}^m$, i.e., elementos de $\mathbb{R}^m \times \overset{q)}{\cdots} \times \mathbb{R}^m$ linealmente independientes (o, de manera equivalente, aplicaciones lineales inyectivas de $\mathbb{R}^q$ en $\mathbb{R}^m$) es un abierto en $\mathbb{R}^m \times \overset{q)}{\cdots} \times \mathbb{R}^m$. Para cada base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \{e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$, una q-base de $\mathbb{R}^m$, $\{w_{p+1}, ..., w_m\}$, puede ser expresada de la forma $w_j = n_j^i e_i$, $j = p + 1, ..., m$, de tal modo que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$ define una carta global en $\mathcal{S}t_q(\mathbb{R}^m)$ asignando a cada q-referencia $\mathcal{B}_W = \{w_{p+1}, ..., w_m\}$ generando el q-plano $W = \langle \mathcal{B}_W \rangle$, la matriz $m \times q$ $N_{\mathcal{B}_W} = (n_j^i)$ de rango q. Recordemos que dos q-referencias se consideran equivalentes si generan el mismo subespacio vectorial q-dimensional (q-plano para abreviar). El espacio cociente $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$ es la variedad de Grassmann y, por tanto, es el conjunto de todos los q-planos de $\mathbb{R}^m$ con la topología cociente. Es una variedad diferenciable pq-dimensional. Las coordenadas sobre $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$ están dadas clásicamente como sigue: Denotemos por σ una sucesión creciente de $q = m - p$ enteros entre 1 y m, $1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < ... < \sigma_q \leq m$. Asociado a σ podemos definir el subconjunto $A_{(\sigma, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})}$ of $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$ formado por todos los q-planos $W = \langle \mathcal{B}_W \rangle$ tales que las filas $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_q$ de la matriz $N_{\mathcal{B}_W}$ son linealmente independientes. Este subconjunto $A_{(\sigma, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})}$ es un abierto en la topología cociente de $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$. Además, si

$$W = \langle \mathcal{B}_W \rangle = \langle \{w_{p+1}, ..., w_m\} \rangle \in A_{(\sigma, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})}\,,$$

entonces la matriz

$$N^\sigma_{\mathcal{B}_W} = (n_j^{\sigma_i}) \in \mathcal{M}_{q \times q}(\mathbb{R})$$

formada con las filas σ_1, $\sigma_2, ...,$ σ_q de $N_{\mathcal{B}_W}$ es no singular. La matriz producto

$$N_{\mathcal{B}_W} (N^\sigma_{\mathcal{B}_W})^{-1}$$

es una matriz $m \times q$ cuya fila σ_i coincide con la i-ésima fila de la matriz identidad $I \in \mathcal{M}_{q \times q}(\mathbb{R})$, para todo $i = 1, ..., q$. Las p filas restantes forman, por definición, la matriz real $p \times q$ X de coordenadas del q-plano W, que será denotada por

$$X = \Phi_{(\sigma, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})}(W)\,,$$

porque dichas coordenadas dependen tanto de la sucesión σ como de la base elegida en $\mathbb{R}^m$; X no depende de la base $\mathcal{B}_W$ elegida en W. Es bien conocido que, si Σ denota el conjunto de todas las sucesiones crecientes $1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < ... < \sigma_q \leq m$ de q números naturales entre 1 y m, entonces la familia $\cup_{\sigma,\mathcal{B}}\{(A_{(\sigma,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})},\Phi_{(\sigma,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})})\}$ es un atlas de la variedad de Grassmann $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$, donde $\sigma\in\Sigma$ y $\mathcal{B}$ recorre todas las bases de $\mathbb{R}^m$. Notemos que éste es precisamente el atlas que $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$ tiene como espacio homogéneo bajo la acción por la izquierda natural de $GL(m,\mathbb{R})$. La aplicación de cambio de coordenadas general está dada, para matrices convenientes A, B, C, D, como sigue

$$X\to(AX+B)(CX+D)^{-1}.$$

(Véase [49] para los detalles). La proyección natural

$$\pi\colon\mathcal{S}t_q(\mathbb{R}^m)\to\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$$

que envía cada q-base $\mathcal{B}_W$ al q-plano W que genera (i.e., que envía cada aplicación lineal inyectiva $f:\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^m$ a su imagen $W=f(\mathbb{R}^q)$) define una estructura de $GL(q,\mathbb{R})$-fibrado principal. Esta acción de $GL(q,\mathbb{R})$ sobre $\mathcal{S}t_q(\mathbb{R}^m)$ se expresa a través del producto usual de matrices:

$$(\mathcal{B}_W,\,g)=(\begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix},\,g)\in\pi^{-1}(\mathcal{S}_U)\times GL(q,\mathbb{R})\to\mathcal{B}g=\begin{pmatrix}\beta g\\ \alpha g\end{pmatrix},$$

donde hemos identificado la q-base $\mathcal{B}_W$ con la matriz $m\times q$ $N_{\mathcal{B}_W}$ de coordenadas de sus vectores en una base fijada dada de $\mathbb{R}^m$, donde β denota sus primeras p filas y α las últimas q filas. Si consideramos los elementos de $\mathcal{S}t_q(\mathbb{R}^m)$ como aplicaciones lineales inyectivas de $\mathbb{R}^q$ a $\mathbb{R}^m$, entonces la acción de $GL(q,\mathbb{R})$ sobre $\mathcal{S}t_q(\mathbb{R}^m)$ es simplemente la composición de aplicaciones.

A continuación detallaremos la construcción equivalente de Hangan del atlas de $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$ [49] desde un punto de vista ligeramente diferente. Sea U un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$ de dimensión $p=m-q$ y sea $\mathcal{B}=\{e_1,...,e_p,e_{p+1},...,e_m\}$ una base de $\mathbb{R}^m$ *adaptada* a U, es decir, verificando que $U=\langle\{e_1,...,e_p\}\rangle$. Denotemos por $S_U=S_U(\mathbb{R}^m)$ el conjunto de todos los q-planos de $\mathbb{R}^m$ que son suplementarios de U:

$$S_U=\{W\in\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m);\;U\oplus W=\mathbb{R}^m\}.$$

Es fácil ver que

$$\pi^{-1}(S_U)=\{\mathcal{B}_W;\;W\in\mathcal{S}_U\}$$

es abierto en $\mathcal{S}t_q(\mathbb{R}^m)$ y por tanto S_U es un abierto en $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$.

Lema 1.1.1 *Para todo $W\in S_U$, se tiene que*

i) dado $v\in\langle\{e_{p+1},...,e_m\}\rangle$, existe un único $u\in U$ tal que $v+u\in W$.

ii) existen únicos $u_{p+1},...,u_m\in U$ tales que $\{e_{p+1}+u_{p+1},...,e_m+u_m\}$ es una base de W (equivalentemente, existe una única base $\{w_{p+1},...,w_m\}$ de W tal que para todo $i=p+1,...,m$ es $w_i=e_i+u_i$ con $u_i\in U$).

Demostración:

i) Como $v \in \mathbb{R}^m = U \oplus W$, existen únicos $\tilde{u} \in U$, $w \in W$, tales que $v = \tilde{u}+w$. Así, $u = -\tilde{u} \in U$ es tal que $v+u = w \in W$. Si además $u' \in U$ fuese tal que $v + u' = w' \in W$, se tendría que $v = u + w = -u' + w'$, de donde $u = u'$ (y $w = w'$).

ii) Por i), existen únicos $u_{p+1}, ..., u_m \in U$ tales que $e_{p+1}+u_{p+1}, ..., e_m+u_m \in W$. Como $\dim(W) = m - p$, basta ver que $\{e_{p+1} + u_{p+1}, ..., e_m + u_m\}$ es libre. Y en efecto, si $\alpha_{p+1}, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ son tales que

$$\alpha_{p+1}(e_{p+1} + u_{p+1}) + \ldots + \alpha_m(e_m + u_m) = 0,$$

entonces

$$\alpha_{p+1}e_{p+1} + \ldots + \alpha_m e_m + \alpha_{p+1}u_{p+1} + \ldots + \alpha_m u_m = 0,$$

de donde $\alpha_{p+1}e_{p+1} + \ldots + \alpha_m e_m = 0$ y $\alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_m = 0$.

□

Proposición 1.1.1 *El abierto S_U de la variedad de Grassmann $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$ es homeomorfo al subespacio vectorial pq-dimensional $U\times \overset{q)}{\ldots} \times U$ de $\mathbb{R}^m \times \overset{q)}{\ldots} \times \mathbb{R}^m$.*

Demostración:

Definimos $\Psi\colon U\times \overset{q)}{\ldots} \times U \longrightarrow S_U$ por

$$f(u_{p+1}, ..., u_m) = \langle\{e_{p+1} + u_{p+1}, ..., e_m + u_m\}\rangle.$$

Del lema anterior se sigue que $f\Psi$ es sobreyectiva. Por otra parte, si $u_{p+1}, ..., u_m, \tilde{u}_{p+1}, ..., \tilde{u}_m \in U$ satisfacen

$$\langle\{e_{p+1} + u_{p+1}, ..., e_m + u_m\}\rangle = \langle\{e_{p+1} + \tilde{u}_{p+1}, ..., e_m + \tilde{u}_m\}\rangle\,,$$

entonces, para todo $i \in \{p + 1, ..., m\}$,

$$e_i + u_i = \alpha_{p+1}(e_{p+1} + \tilde{u}_{p+1}) + \ldots + \alpha_m(e_m + \tilde{u}_m),$$

Usando que $\mathbb{R}^m = U \oplus \langle\{e_{p+1}, ..., e_m\}\rangle$ obtenemos

$$e_i = \alpha_{p+1}e_{p+1} + \ldots + \alpha_m e_m, \quad u_i = \alpha_{p+1}\tilde{u}_{p+1} + \ldots + \alpha_m\tilde{u}_m.$$

Como $e_{p+1}, ..., e_m$ son linealmente independientes, debemos tener $\alpha_i = 1$ y $\alpha_j = 0$ si $j \neq i$; por tanto,

$$u_i = \tilde{u}_i.$$

Así la aplicación Ψ es también inyectiva. Es inmediato que tanto Ψ como Ψ^{-1} son continuas. □

Definición 1.1.1 *Sea $W \in S_U$, $W = \Psi(u_{p+1}, ..., u_m)$. Si $u_j = m^i_j e_i$, $j = p+1, ..., m$ llamaremos* **(matriz de) coordenadas** *de W a la matriz*

$$M_W = (m^i_j) \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}).$$

La definición anterior depende de la base elegida en $\mathbb{R}^m$ adaptada al subespacio U.

Proposición 1.1.2 *Sea U un subespacio vectorial p-dimensional de $\mathbb{R}^m$ y sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^m$ adaptada a U. La aplicación $\Phi_{(U,\mathcal{B})} \colon S_U \to \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$ definida por*

$$\Phi_{(U,\mathcal{B})}(W) = M_W$$

es una carta $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$. Todas estas cartas forman un atlas de $\mathcal{G}_q(\mathbb{R}^m)$.

Demostración:

Si $\sigma \in \Sigma$ es la permutación definida por $\sigma_i = p+i$, $i = 1, ..., m-p$, entonces, del lema 1.1.1, ii), se deduce que $\mathcal{S}_U = A_{(\sigma,\mathcal{B})}$ y $\Phi_{(U,\mathcal{B})}(W) = \Phi_{(\sigma,\mathcal{B})}(W)$, para $W \in S_U$. Además, si $\sigma \in \Sigma$ y $\{\tau_1, ..., \tau_p\} = \{1, ..., m\} - \{\sigma_1, ..., \sigma_{m-p}\}$, $\tau_1 < ... < \tau_p$, entonces, fijando la base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \{e_{\tau_1}, ..., e_{\tau_p}, e_{\sigma_1}, ..., e_{\sigma_{m-p}}\}$ de $\mathbb{R}^m$ y considerando $V = \langle\{e_{\tau_1}, ..., e_{\tau_p}\}\rangle$ se tiene que $\mathcal{S}_V = A_{(\sigma,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})}$ y $\Phi_{(V,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})} = \Phi_{(\sigma,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m})}$. □

De ahora en adelante, fijaremos un subespacio vectorial p-dimensional U de $\mathbb{R}^m$ y una base de $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_m\}$, adaptada a U.

Si $\{w_{p+1}, ..., w_m\}$ es una base de $W = \Psi(u_{p+1}, ..., u_m) \in S_U$, con

$$w_j = \sum_{i=1}^{p} \beta^i_j e_i + \sum_{i=p+1}^{m} \alpha^i_j e_i, \quad j = p+1, ..., m,$$

consideraremos las matrices $\alpha = (\alpha^i_j) \in \mathcal{M}_{q\times q}(\mathbb{R})$, $\beta = (\beta^i_j) \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$. Entonces se verifica que

Lema 1.1.2 *La matriz M_W de coordenadas del q-plano W es*

$$M_W = \beta\alpha^{-1}.$$

Demostración:

Consideremos la nueva base de $\mathbb{R}^m$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^m} = \{e_1, ..., e_p, w_{p+1}, ..., w_m\}.$$

La matriz de cambio de la base $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^m}$ a la base $\mathcal{B}$ es

$$Q = \begin{pmatrix} I & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R}),$$

y por tanto, la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^m}$ es

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} I & -\beta\alpha^{-1} \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R}).$$

Pongamos

$$e_j = \sum_{i=1}^{p} \epsilon_j^i e_i + \sum_{i=p+1}^{m} \gamma_j^i w_i, \quad j = p+1, ..., m.$$

Puesto que para $j \in \{p+1, ..., m\}$ es $e_j - \sum_{i=1}^{p} \epsilon_j^i e_i \in W$, con $-\sum_{i=1}^{p} \epsilon_j^i e_i \in U$, se tiene que $u_j = -\sum_{i=1}^{p} \epsilon_j^i e_i$, o, equivalentemente,

$$M_W = -\epsilon = -(\epsilon_j^i) \in \mathcal{M}_{p\times(m-p)}(\mathbb{R}).$$

Por otra parte, como e_j, $j = p+1, ..., m$, es el j-ésimo vector de la base $\mathcal{B}$, entonces el vector $(\epsilon_j^1, ..., \epsilon_j^p, \gamma_j^{p+1}, ..., \gamma_j^m)^t$ de coordenadas de e_j en $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^m}$ es la j-ésima columna de Q^{-1}, es decir, $(\epsilon_j^1, ..., \epsilon_j^p)^t$ es la j-ésima columna de $-\beta\alpha^{-1}$. □

Con las mismas notaciones que arriba, tenemos que los escalares β_j^i y α_j^i son únicos y la matriz $\alpha = (\alpha_j^i)$ es no singular.

Recíprocamente, si $\beta = (\beta_j^i) \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$ y $\alpha = (\alpha_j^i) \in \mathcal{M}_{q\times q}(\mathbb{R})$ es no singular, entonces, definiendo w_j, $j = p+1, ..., m$, como arriba, $\{w_{p+1}, ..., w_m\}$ es una base de un elemento de S_U.

Observación 1.1.1 Se sigue de la demostración anterior que existe una correspondencia biyectiva entre $\pi^{-1}(S_U)$ y el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{R}); \quad \alpha \in GL(q, \mathbb{R}) \right\}.$$

Sean M una variedad diferenciable de dimensión m y $\pi_E \colon E \to M$ un fibrado vectorial de fibra $F = \mathbb{R}^m$. Dado $0 < k < m$ definimos

$$\mathcal{S}t_k(E) = \bigcup_{x\in M} \mathcal{S}t_k((\pi_E)^{-1}(x))\,,$$

$$\mathcal{G}_k(E) = \bigcup_{x\in M} \mathcal{G}_k((\pi_E)^{-1}(x))\,.$$

Toda trivialización $\tau \colon (\pi_E)^{-1}(\mathrm{A}) \to \mathrm{A} \times F$ de E induce una trivialización natural sobre $\mathcal{G}_k(E)$: si

$$\mathcal{G}_k(E_{/\mathrm{A}}) = \bigcup_{x\in \mathrm{A}} \mathcal{G}_k((\pi_E)^{-1}(x))$$

y si $W_x = \langle\{w_1, ..., w_k\}\rangle \in \mathcal{G}_k((\pi_E)^{-1}(x))$, entonces, la aplicación

$$\mathcal{G}_k(\tau)\colon \mathcal{G}_k(E_{/\mathrm{A}}) \to \mathrm{A} \times \mathcal{G}_k(F)$$

definida por

$$\mathcal{G}_k(\tau)(W_x) = (x, \langle\{\mathrm{pr}_2 \circ \tau(w_1), ..., \mathrm{pr}_2 \circ \tau(w_k)\}\rangle)\,,$$

(donde $\mathrm{pr}_2\colon \mathrm{A} \times F \to F$ es la proyección) es una trivialización de $\mathcal{G}_k(E)$. De modo similar, si

$$\mathcal{S}t_k(E_{/\mathrm{A}}) = \bigcup_{x\in\mathrm{A}} \mathcal{S}t_k((\pi_E)^{-1}(x))$$

entonces τ induce en $\mathcal{S}t_k(E)$ la trivialización

$$\mathcal{S}t_k(\tau)\colon \mathcal{S}t_k(E_{/\mathrm{A}}) \to \mathrm{A} \times \mathcal{S}t_k(F)$$

dada, para $\mathcal{B}_{W_x} = \{w_1, ..., w_k\} \in \mathcal{S}t_k(E_{/\mathrm{A}})$, por

$$\mathcal{S}t_k(\tau)(\mathcal{B}_{W_x}) = (x, \{\mathrm{pr}_2 \circ \tau(w_1), ..., \mathrm{pr}_2 \circ \tau(w_k)\})\,.$$

Las proyecciones de $\mathcal{G}_k(E)$ y $\mathcal{S}t_k(E)$ están dadas respectivamente por

$$\pi(W_x) = x, \quad W_x \in \mathcal{G}_k((\pi_E)^{-1}(x)),$$

$$\pi(\mathcal{B}_{W_x}) = x, \quad \mathcal{B}_{W_x} \in \mathcal{S}t_k((\pi_E)^{-1}(x)).$$

La acción de $GL(k,\mathbb{R})$ sobre $\mathcal{S}t_k(E)$ es como sigue: si $u\colon \mathbb{R}^k \to E_x \equiv \mathbb{R}^m$ es una k-referencia y $a \in GL(k,\mathbb{R})$, entonces, $ua = u \circ a$. Esta acción es libre y la proyección natural $\pi\colon \mathcal{S}t_k(E) \to \mathcal{G}_k(E)$ define una estructura de $GL(k,\mathbb{R})$-fibrado principal.

Definición 1.1.2 *Si $E = TM$, diremos que $\mathcal{S}t_k(TM)$ y $\mathcal{G}_k(TM)$ son, respectivamente, los* **fibrados tangentes de Stiefel y Grassmann** *de k-referencias y k-planos sobre M.*

Como el grupo $GL(m,\mathbb{R})$ actúa por la derecha sobre $\mathcal{F}M$ y por la izquierda tanto sobre $\mathcal{S}t_k(\mathbb{R}^m)$ como sobre $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^m)$, podemos considerar los fibrados asociados de fibra $\mathcal{S}t_k(\mathbb{R}^m)$ y $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^m)$ definidos por estas acciones, $(\mathcal{F}M \times \mathcal{S}t_k(\mathbb{R}^m))/GL(m,\mathbb{R})$ y $(\mathcal{F}M \times \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^m))/GL(m,\mathbb{R})$, los cuales son isomorfos a $\mathcal{S}t_k(TM)$ y $\mathcal{G}_k(TM)$.

Señalemos que $\mathcal{G}_k(TM)$ se denota por $\mathcal{G}_k(M)$ en [101].

1.2 Subespacios horizontales y bases de subespacios horizontales

Como señalamos antes, cada carta en M también induce una trivialización local de ambos fibrados que se corresponden mejor con lo que sigue. Vamos a introducir dos subvariedades abiertas distinguidas de $\mathcal{S}t_n(T\mathcal{F}M)$ y $\mathcal{G}_n(T\mathcal{F}M)$ que resultarán ser más adelante isomorfas a los fibrados de referencias no holonómicas y semi-holonómicas de segundo orden de M.

De ahora en adelante, denotaremos por $\pi_0^1\colon \mathcal{F}M \to M$ al fibrado de referencias lineales de una variedad diferenciable n-dimensional M. Sea $z \in \mathcal{F}M$. Consideremos el espacio vectorial $T_z(\mathcal{F}M)$ (de dimensión $m = n^2 + n$) y fijemos en $T_z(\mathcal{F}M)$ la base

$$\mathcal{B}_{T_z(\mathcal{F}M)} = \{\frac{\partial}{\partial x_j^i}(z)\ ;\ \ i, j = 1, ..., n\} \cup \{\frac{\partial}{\partial x^k}(z)\ ;\ \ k = 1, ..., n\},$$

donde (x^i, x_j^i) son las coordenadas inducidas en $(\pi_0^1)^{-1}(\mathrm{U})$ por una carta (U, x^i) de M tal que $\pi_0^1(z) \in \mathrm{U}$, es decir,

$$\pi_0^1(z) \equiv (x^i),$$
$$z(E_j) = x_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\pi_0^1(z)),$$

siendo $\{E_1, ..., E_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Consideremos también

$$\mathcal{S}t_n(T\mathcal{F}M) = \bigcup_{z \in \mathcal{F}M} \mathcal{S}t_n(T_z(\mathcal{F}M)),$$
$$\mathcal{G}_n(T\mathcal{F}M) = \bigcup_{z \in \mathcal{F}M} \mathcal{G}_n(T_z(\mathcal{F}M)),$$

donde $\mathcal{S}t_n(T_z(\mathcal{F}M))$ y $\mathcal{G}_n(T_z(\mathcal{F}M))$ denotan, respectivamente, la variedad de Stiefel de n-referencias de $T_z(\mathcal{F}M)$ y la variedad de Grassmann de n-planos de $T_z(\mathcal{F}M)$.

La proyección natural

$$\pi_{\mathcal{S}}\colon \mathcal{S}t_n(T\mathcal{F}M) \to \mathcal{G}_n(T\mathcal{F}M)$$

que lleva $\mathcal{B}_W$ en $W = \langle \mathcal{B}_W \rangle$ define una estructura de $GL(n, \mathbb{R})$-fibrado principal. Sea

$$U = \mathcal{V}_z = \langle \{\frac{\partial}{\partial x_j^i}(z)\ ;\ \ i,\ j = 1, ..., n\} \rangle$$

el subespacio vertical en z. Recordemos que un subespacio vectorial $H_z \subset T_z(\mathcal{F}M)$ se llama horizontal si $H_z \oplus \mathcal{V}_z = T_z(\mathcal{F}M)$. Así, $\dim(U) = p = n^2$ y $m - p = n$, siendo $S_U = S_{\mathcal{V}_z}$ el conjunto de subespacios horizontales en z y $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(S_U) = \pi_{\mathcal{S}}^{-1}(S_{\mathcal{V}_z})$ el conjunto de todas las bases de todos los subespacios horizontales en $z \in \mathcal{F}M$. Definimos

$$\mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} = \bigcup_{z\in\mathcal{F}M} \pi_{\mathcal{S}}^{-1}(S_{\mathcal{V}_z})\,,$$

$$\mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} = \bigcup_{z\in\mathcal{F}M} S_{\mathcal{V}_z}\,.$$

Sea $\mathcal{B}_{H_z} = \{h_1, ..., h_n\}$ una base de un subespacio horizontal H_z, con

$$h_j = \alpha_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}(z) + \beta_j^{kl}\frac{\partial}{\partial x_l^k}(z), \quad j = 1, ..., n.$$

Identificando $\mathcal{B}_{H_z}$ con $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ (siendo $\alpha = (\alpha_j^i) \in GL(n,\mathbb{R})$, $\beta = (\beta_j^{kl}) \in \mathcal{M}_{n^2\times n}(\mathbb{R})$), para $C \in GL(n,\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{B}_{H_z}C$ es la n-referencia en $T_z(\mathcal{F}M)$ dada a través del producto usual de matrices

$$\mathcal{B}_{H_z}C \equiv \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \beta C \\ \alpha C \end{pmatrix},$$

la cual da lugar a una acción libre y transitiva de $GL(n,\mathbb{R})$ por la derecha sobre $\mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$.

Teorema 1.2.1 *$\mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ y $\mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ son subfibrados abiertos de $\mathcal{S}t_n(T\mathcal{F}M)$ y $\mathcal{G}_n(T\mathcal{F}M)$ respectivamente. Además, la proyección natural*

$$\pi_{\tilde{\mathcal{H}}} \colon \mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} \to \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$$

definida por

$$\pi_{\tilde{\mathcal{H}}} = (\pi_{\mathcal{S}})_{|\mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}}$$

es un $GL(\mathbb{R}^n)$-fibrado principal.

Demostración:

En primer lugar, notemos que si $\tau \colon (\pi_{T\mathcal{F}M})^{-1}(\mathrm{A}) \to (\pi_0^1)^{-1}(\mathrm{A}) \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ es una trivialización de $T\mathcal{F}M$, las aplicaciones

$$\mathcal{G}_n(\tau) \colon \mathcal{G}_n(T\mathcal{F}M_{/\mathrm{A}}) \to (\pi_0^1)^{-1}(\mathrm{A}) \times \mathcal{G}_n(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})),$$

$$\mathcal{S}t_n(\tau) \colon \mathcal{S}t_n(T\mathcal{F}M_{/\mathrm{A}}) \to (\pi_0^1)^{-1}(\mathrm{A}) \times \mathcal{S}t_n(\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$$

son difeomorfismos. Más aun, si ahora ponemos $U = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, entonces

$$\mathcal{G}_n(\tau)(\mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}) = (\pi_0^1)^{-1}(\mathrm{A}) \times S_U,$$

$$\mathcal{S}t_n(\tau)(\mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}) = (\pi_0^1)^{-1}(\mathrm{A}) \times \pi^{-1}(S_U).$$

Así, la primera afirmación se sigue de las proposiciones 1.1.1 y 1.1.2. La segunda afirmación es debida al hecho de que $\pi_{\mathcal{S}} \colon \mathcal{S}t_n(T\mathcal{F}M) \to \mathcal{G}_n(T\mathcal{F}M)$ es un $GL(n, \mathbb{R})$-fibrado principal y

$$(\pi_{\mathcal{S}})^{-1}(\mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}) = \mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}.$$

$\square$

Observación 1.2.1 Si $H_z = \langle\{h_1, ..., h_n\}\rangle \in \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$,

$$h_j = \beta_j^{kl}\frac{\partial}{\partial x_l^k}(z) + \alpha_j^i\frac{\partial}{\partial x^i}(z), \quad j = 1, ..., n,$$

entonces

$$\tilde{\mathcal{B}}_{T_z(\mathcal{F}M)} = \{\frac{\partial}{\partial x_j^i}(z)\ ; \ \ i, j = 1, ..., n\} \cup \{h_1, ..., h_n\}$$

es una base de $T_z(\mathcal{F}M)$. Si $\beta = (\beta_j^{kl}) \in \mathcal{M}_{n^2\times n}(\mathbb{R})$ y $\alpha = (\alpha_j^i) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces, del lema 1.1.2 se deduce que es

$$M_{H_z} = \beta\alpha^{-1} \in \mathcal{M}_{n^2\times n}(\mathbb{R}).$$

1.3 Referencias definidas por subespacios horizontales y por bases de subespacios horizontales

En esta sección describiremos el fibrado $\pi_{\tilde{\mathcal{H}}} \colon \mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} \to \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ en términos de referencias de $\mathcal{F}M$.

Sea $H_z \subset T_z(\mathcal{F}M)$ un subespacio horizontal en z y sea $\mathcal{B}_{H_z} = \{h_1, ..., h_n\}$ una base arbitraria de H_z. Asociada a $\mathcal{B}_{H_z}$ definimos una referencia

$$\tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z}) \colon \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to T_z(\mathcal{F}M)$$

de $\mathcal{F}M$ en el punto z como

$$\tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z})(E_j, Y) = h_j + Y_z^*,$$

donde Y^* es el campo de vectores fundamental correspondiente a $Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Pongamos, como antes, en coordenadas en $\mathcal{F}M$ inducidas por coordenadas locales en M, $z = (x^i, x^i_j)$.

Sea $\{E^i_j\}$ la base usual de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Si

$$\tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z})(E_j) = \alpha^i_j \frac{\partial}{\partial x^i}(z) + \beta^{kl}_j \frac{\partial}{\partial x^k_l}(z),$$

$$\tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z})(E^i_j) = \gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}(z) + \epsilon^{kl}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k_l}(z),$$

como $\tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z})(E^i_j) = (E^i_j)^*_z$ es vertical, se sigue que $\gamma^k_{ij} = 0$. Más aun, en general, si ponemos $Y = (Y^i_j) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, es

$$Y^*_z = (Y^s_l x^k_s) \frac{\partial}{\partial x^k_l}(z),$$

de modo que los valores para las coordenadas ϵ^{kl}_{ij} son

$$\epsilon^{kl}_{ij} = (E^i_j)^s_l x^k_s = \delta^j_l x^k_i.$$

Sea $\tilde{H}^2(M) \subset \mathcal{F}(\mathcal{F}M)$ el conjunto de todas las referencias sobre $\mathcal{F}M$ definidas por bases de subespacios horizontales en la manera descrita anteriormente, es decir,

$$\tilde{H}^2(M) = \{\tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z}) \ ; \ \mathcal{B}_{H_z} \in \mathcal{S}t_n \mathcal{H}_{\mathcal{F}M}\}.$$

En coordenadas locales, un elemento $(x^i, x^i_j, \alpha^i_j, \beta^{kl}_j, \gamma^k_{ij}, \epsilon^{kl}_{ij}) \in \mathcal{F}(\mathcal{F}M)$ pertenece a $\tilde{H}^2(M)$ si y sólo si $(x^i, x^i_j, \alpha^i_j, \beta^{kl}_j, \gamma^k_{ij}, \epsilon^{kl}_{ij}) = (x^i, x^i_j, \alpha^i_j, \beta^{kl}_j, 0, x^k_i \delta^j_l)$. Esto muestra que $\tilde{H}^2(M)$ es una subvariedad regular de $\mathcal{F}(\mathcal{F}M)$. En particular, existe un sistema de coordenadas locales en $\tilde{H}^2(M)$ de la forma $(x^i, x^i_j, \alpha^i_j, \beta^{kl}_j)$.

Sea $\theta \in \bigwedge\big(\mathcal{F}M, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})\big)$ la **forma canónica** de $\mathcal{F}M$. Recordemos que para todo $z \in \mathcal{F}M$ y todo $v \in T_z(\mathcal{F}M)$ es

$$\theta_z(v) = z^{-1}\big(\pi_*(z)v\big).$$

Si $H_z \subset T_z(\mathcal{F}M)$ es un subespacio horizontal, la aplicación restricción $\theta_{/H_z} \colon H_z \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo y $\hat{\mathcal{B}}_{H_z} = \{\theta^{-1}_{/H_z}(e_1), ..., \theta^{-1}_{/H_z}(e_n)\}$ es una base de H_z. Tal y como está hecho en [74] y en [37], asociada a H_z definimos la referencia $\hat{u}(H_z)$ sobre $\mathcal{F}M$ dada por

$$\hat{u}(H_z) = \tilde{u}(\hat{\mathcal{B}}_{H_z}),$$

esto es,

$$\hat{u}(H_z)\colon (\xi, Y) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to h + Y_z^* \in T_z(\mathcal{F}M),$$

siendo $h \in H_z$ tal que $\theta(h) = \xi$. Sea $\hat{H}^2(M) \subset \mathcal{F}(\mathcal{F}M)$ el conjunto definido por

$$\hat{H}^2(M) = \{\hat{u}(H_z);\ H_z \in \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}\},$$

que es una subvariedad regular de $\mathcal{F}(\mathcal{F}M)$ ($\hat{H}^2(M)$ se denota $H^2(M)$ en [74]). De hecho, en coordenadas locales, un elemento $(x^i, x^i_j, \alpha^i_j, \beta^{kl}_j, \gamma^k_{ij}, \epsilon^{kl}_{ij})$ de $\mathcal{F}(\mathcal{F}M)$ pertenece a $\hat{H}^2(M)$ si y sólo si

$$(x^i, x^i_j, \alpha^i_j, \beta^{kl}_j, \gamma^k_{ij}, \epsilon^{kl}_{ij}) = (x^i, x^i_j, x^i_j, \beta^{kl}_j, 0, x^k_i\delta^j_l),$$

de tal manera que, en $\hat{H}^2(M)$, tenemos un sistema de coordenadas locales de la forma $(x^i, x^i_j, \beta^{kl}_j)$. Nótese también que un elemento $(x^i, x^i_j, \alpha^i_j, \beta^{kl}_j) \in \tilde{H}^2(M)$ pertenece a $\hat{H}^2(M)$ si y sólo si $\alpha^i_j = x^i_j$. Esto es debido al hecho de que

$$\theta^{-1}_{/H_z}(e_j) = x^i_j \frac{\partial}{\partial x^i}(z) + \beta^{kl}_j \frac{\partial}{\partial x^k_l}(z), \quad j = 1, ..., n.$$

Sea $\pi_{\tilde{H}}\colon \tilde{H}^2(M) \to \hat{H}^2(M)$ la aplicación dada por $\pi_{\tilde{H}}(\tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z})) = \hat{u}(H_z)$, es decir, la que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}t_n\tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}M} & \xrightarrow{\tilde{u}} & \tilde{H}^2(M) \\ \pi_{\tilde{\mathcal{H}}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\tilde{H}} \\ \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} & \xrightarrow{\hat{u}} & \hat{H}^2(M) \end{array}$$

Si $\tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z}) \in \tilde{H}^2(M)$ y

$$\tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z})(e_j) = \alpha^i_j \frac{\partial}{\partial x^i}(z) + \beta^{kl}_j \frac{\partial}{\partial x^k_l}(z),$$

entonces, para $C = (c^i_j) \in GL(n,\mathbb{R})$, definimos $\tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z})C$ por

$$(\tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z})C)(e_j, Y) = \tilde{h}_j + Y_z^*, \quad j = 1, ..., n,$$

donde

$$\tilde{h}_j = (\alpha^i_r c^r_j)\frac{\partial}{\partial x^i}(z) + (\beta^{kl}_s c^s_j)\frac{\partial}{\partial x^k_l}(z).$$

Teorema 1.3.1 *$\pi_{\tilde{\mathcal{H}}}\colon \mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} \to \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ y $\pi_{\tilde{H}}\colon \tilde{H}^2(M) \to \hat{H}^2(M)$ son $GL(n,\mathbb{R})$-fibrados principales isomorfos. De hecho,*

$$(\tilde{u}, \hat{u}, id)\colon (\mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}, \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}, GL(n,\mathbb{R})) \to (\tilde{H}^2(M), \hat{H}^2(M), GL(n,\mathbb{R}))$$

es un isomorfismo de fibrados principales.

Demostración:

De la definición tenemos $\tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z}C) = \tilde{u}(\mathcal{B}_{H_z})C$. Además, tanto $\tilde{u}$ como $\hat{u}$ son difeomorfismos, porque en coordenadas locales inducidas por cartas de M, $\tilde{u}$ es la identidad, mientras que $\hat{u}$ está dada por

$$\hat{u}(x_i, X, M_{H_z}) = (x_i, X, (M_{H_z})X),$$

donde $X = (x^i_j) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es no singular. □

1.4 Referencias semi-holonómicas y no holonómicas

En esta sección describimos las variedades $\tilde{\mathcal{F}}^2M$ y $\hat{\mathcal{F}}^2M$ de referencias no holonómicas y semi-holonómicas de segundo orden sobre M y demostramos que los $GL(n,\mathbb{R})$-fibrados principales

$$\mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} \to \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}^2M \to \hat{\mathcal{F}}^2M$$

son isomorfos.

Si N y N' son variedades diferenciables y $x \in N$, $x' \in N'$, la notación $f\colon (N,x) \to (N',x')$ significa que f es una aplicación diferenciable definida en un entorno de x en N en un entorno de x' en N' tal que $f(x) = x'$.

Definición 1.4.1 *Diremos que $j^1_0\varphi$ es una* **referencia no holonómica** *de segundo orden en el punto $\pi^1_0(z) \in M$ si $j^1_0\varphi$ es el 1-jet de una aplicación diferenciable*

$$\varphi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathcal{F}M, z)$$

tal que $\pi^1_0 \circ \varphi$ es un difeomorfismo definido en un entorno de $0 \in \mathbb{R}^n$. Si, además, $\varphi(0) = z = j^1_0(\pi^1_0 \circ \varphi)$ entonces diremos que $j^1_0\varphi$ es una **referencia semi-holonómica** *de segundo orden en el punto $\pi^1_0(z)$.*

El conjunto $\tilde{\mathcal{F}}^2M$ de todas las referencias no holonómicas de segundo orden sobre M es el espacio total de un fibrado principal sobre M, con proyección $\tilde{\pi}^2_0\colon j^1_{0,z}\varphi \in \tilde{\mathcal{F}}^2(M) \to x = \pi^1_0(z) \in M$ y grupo de estructura

$$\tilde{G}^2(n) = GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) \times L_2(n),$$

donde $L_2(n)$ denota el *grupo aditivo de aplicaciones bilineales* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, y donde el producto está dado por

$$(a, b, f)(\bar{a}, \bar{b}, \bar{f}) = (a \circ \bar{a}, b \circ \bar{b}, a \circ \bar{f} + f \circ (\bar{a} \times \bar{b})).$$

Sea $\varphi\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathcal{F}M, z)$ una aplicación diferenciable tal que $\pi_0^1 \circ \varphi$ es un difeomorfismo en un entorno de 0. Si denotamos en coordenadas locales (inducidas por una carta de M)

$$\varphi(r^a) \equiv (\varphi^i(r^a), \varphi^i_j(r^a)),$$

donde $(r^1, ..., r^n)$ es el sistema de coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^n$, entonces, las coordenadas de $j^1_0\varphi$ están dadas por

$$(\varphi^i(0), \varphi^i_j(0), \frac{\partial \varphi^i}{\partial r^j}(0), \frac{\partial \varphi^k_l}{\partial r^j}(0)),$$

así que en $\tilde{\mathcal{F}}^2(M)$ tenemos un sistema de coordenadas locales de la forma $(x^i, x^i_j, y^i_j, x^{kl}_j)$. Además, es bien conocido que

$$\varphi_*(0)(\frac{\partial}{\partial r^j}(0)) = \frac{\partial \varphi^i}{\partial r^j}(0)\frac{\partial}{\partial x^i}(z) + \frac{\partial \varphi^k_l}{\partial r^j}(0)\frac{\partial}{\partial x^k_l}(z) =$$

$$= y^i_j \frac{\partial}{\partial x^i}(z) + x^{kl}_j \frac{\partial}{\partial x^k_l}(z),$$

y del hecho de que $\pi^1_0 \circ \varphi$ sea un difeomorfismo deducimos que (y^i_j) es no singular.

Para $j^1_0\varphi \in \tilde{\mathcal{F}}^2(M)$, con $\varphi(0) = z \in \mathcal{F}M$, la condición de que $\pi^1_0 \circ \varphi$ sea un difeomorfismo nos permite afirmar que los vectores $\varphi_*(0)(\frac{\partial}{\partial r^j})$, j=1,...,n, no pertenecen a $\mathcal{V}_z$ y son linealmente independientes. En consecuencia, asociado a $j^1_0\varphi$ podemos definir un elemento $\tilde{\nu}(j^1_0\varphi)$ de $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(\mathcal{S}_{\mathcal{V}_z})$ como

$$\tilde{\nu}(j^1_0\varphi) = \{\varphi_*(0)(\frac{\partial}{\partial r^j}(0)); \;\; j = 1, ..., n\}.$$

De esta manera, obtenemos un isomorfismo de fibrados

$$\tilde{\nu}\colon \tilde{\mathcal{F}}^2 M \to \mathcal{S}t_n \mathcal{H}_{\mathcal{F}M}.$$

Consideremos $j^1_0\varphi \in \hat{\mathcal{F}}^2(M)$. La condición $\varphi(0) = z = j^1_0(\pi^1_0 \circ \varphi)$ está caracterizada en coordenadas locales por la igualdad $y^i_j = x^i_j$, de tal manera que en $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ existe un sistema de coordenadas locales de la forma (x^i, x^i_j, x^{kl}_j). Por tanto, $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ es una subvariedad regular de $\tilde{\mathcal{F}}^2(M)$. La restricción $\hat{\pi}^2_0$ de $\tilde{\pi}^2_0$ es el fibrado principal $\hat{\pi}^2_0\colon \hat{\mathcal{F}}^2(M) \to M$ de todas las referencias semi-holonómicas de segundo orden sobre M. Su grupo de estructura es

$$\hat{G}^2(n) = GL(n, \mathbb{R}) \times L_2(n).$$

El grupo $\hat{G}^2(n)$ es un subgrupo de Lie cerrado de $\tilde{G}^2(n)$, y su operación producto está dada por

$$(a, f)(\bar{a}, \bar{f}) = (a \circ \bar{a}, a \circ \bar{f} + f \circ (\bar{a} \times \bar{a})).$$

No es difícil ver que el álgebra de Lie de $\hat{G}^2(n)$ es

$$\hat{\mathfrak{g}}^2(n) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \times L_2(n)$$

con el producto corchete dado por

$$[(X, 0), (Y, 0)] = ([X, Y], 0)\,,$$
$$[(0, \alpha), (0, \beta)] = (0, 0)\,,$$
$$[(X, 0), (0, \beta)] = (0, X \circ \beta - \beta \circ (X \times \mathrm{id}) - \beta(\mathrm{id} \times X))\,.$$

Siguiendo una idea de [74], definimos la aplicación

$$\hat{\nu} \colon \hat{\mathcal{F}}^2(M) \to \mathcal{G}_n \mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$$

que asigna a cada referencia semi-holonómica $j^1_0\varphi$ el subespacio horizontal en $\varphi(0)$ definido por

$$\hat{\nu}(j^1_0\varphi) = \langle \{\varphi_*(0)(\frac{\partial}{\partial r^j}(0)); \;\; j = 1, ..., n\} \rangle.$$

Sea $\pi_{\tilde{\mathcal{F}}} \colon \tilde{\mathcal{F}}^2(M) \to \hat{\mathcal{F}}^2(M)$ la aplicación que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{F}}^2(M) & \stackrel{\tilde{\nu}}{\longrightarrow} & \mathcal{S}_n \tilde{\mathcal{H}}_{\mathcal{F}M} \\ \pi_{\tilde{\mathcal{F}}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\tilde{\mathcal{H}}} \\ \hat{\mathcal{F}}^2(M) & \stackrel{\hat{\nu}}{\longrightarrow} & \mathcal{G}_n \mathcal{H}_{\mathcal{F}M} \end{array}$$

es decir, $\pi_{\tilde{\mathcal{F}}} = \hat{\nu}^{-1} \circ \pi_{\tilde{\mathcal{H}}} \circ \tilde{\nu}$ ($\hat{\nu}$ es una aplicación biyectiva [74]). Si $C \in GL(n, \mathbb{R})$ y $j^1_0\varphi \in \tilde{\mathcal{F}}^2(M)$, definimos

$$(j^1_0\varphi)C = j^1_0(\varphi \circ C).$$

Nótese que si $C = (c^i_j)$ es la matriz de C en la base canónica, entonces

$$(\varphi \circ C)_*(0)(\frac{\partial}{\partial r^j}(0)) = (\frac{\partial \varphi^i}{\partial r^s}(0)c^s_j)\frac{\partial}{\partial x^i}(z) + (\frac{\partial \varphi^k_l}{\partial r^s}(0)c^s_j)\frac{\partial}{\partial x^k_l}(z),$$

de modo que $\tilde{\nu}((j^1_0\varphi)C) = (\tilde{\nu} j^1_0\varphi)C$.

Si consideramos las coordenadas locales inducidas por cada carta de M en $\tilde{\mathcal{F}}^2(M)$, $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$, $\mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ y $\mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ entonces tenemos que, localmente, la aplicación $\tilde{\nu}$ es la identidad, mientras que $\hat{\nu}$ está dada por

$$\hat{\nu}(x_i, X, x_j^{ik}) = (x_i, X, (x_j^{ik})X^{-1}),$$

donde $X = (x_j^i) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es no singular (véase la observación 1.2.1). Así, tanto $\tilde{\nu}$ como $\hat{\nu}$ son difeomorfismos. Por tanto, de esta discusión se sigue:

Teorema 1.4.1 *Las proyecciones $\pi_{\tilde{\mathcal{F}}}\colon \tilde{\mathcal{F}}^2(M) \to \hat{\mathcal{F}}^2(M)$ y $\pi_{\tilde{\mathcal{H}}}\colon \mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} \to \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ determinan $GL(n,\mathbb{R})$-fibrados principales isomorfos, siendo*

$$(\tilde{\nu}, \hat{\nu}, id)\colon (\tilde{\mathcal{F}}^2(M), \hat{\mathcal{F}}^2(M), GL(n,\mathbb{R})) \to (\mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}, \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}, GL(n,\mathbb{R}))$$

un isomorfismo de fibrados principales.

1.5 Isomorfismo entre $\mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ y $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ como fibrados sobre $\mathcal{F}M$

Consideremos la proyección $\pi_{\hat{\mathcal{H}}}\colon \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} \to \mathcal{F}M$ que asigna el punto z a cada subespacio horizontal en z. Si identificamos $L_2(n)$ con el grupo aditivo $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$, a través de $f(e_i, e_j) = f(e_j)(e_i) = f_{ij}^k e_k$, entonces una acción de $L_2(n)$ sobre $\mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ se define como sigue: dados $H_z \in \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ y $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$, entonces, $(H_z)f = H_z'$ es el subespacio horizontal en z generado por los vectores $\theta_{/H_z}^{-1}(e_j) + f(e_j)_z^*$, $j = 1, ..., n$.

Observación 1.5.1 La acción anterior es claramente libre. Además, la transitividad de esta acción aparece en el estudio de los tensores de estructura de G-estructuras, llevado a cabo por ejemplo en [37], pag 41; allí la aplicación lineal $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ tal que $(H_z)f = H_z'$ es denotada por $\mathrm{S}_{H,H'}$. Por tanto, con esta acción, $\pi_{\hat{\mathcal{H}}}\colon \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} \to \mathcal{F}M$ es un fibrado principal.

En [74] se demuestra que la proyección $\pi_{\hat{H}}\colon \hat{u}(H_z) \in \hat{H}^2(M) \to z \in \mathcal{F}M$ es también un $L_2(n)$-fibrado principal, siendo $L_2(n)$ el grupo aditivo de aplicaciones bilineales de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. La acción de $L_2(n)$ sobre las fibras de $\pi_{\hat{H}}$ está dada por $\hat{u}(H_z)f = \hat{u}(H_z')$, y se sigue que los dos fibrados anteriores son isomorfos.

Por otra parte, $L^2(n)$ actúa también sobre $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$. Si $j_0^1\varphi \equiv (x^i, x_j^i, x_j^{kl}) \in \hat{\mathcal{F}}^2(M)$ y $f \in L_2(n)$, entonces $(j_0^1\varphi)f \equiv (x^i, x_j^i, x_j^{kl} + x_h^k f_{jl}^h)$, siendo, como antes, $f(e_i, e_j) = f_{ij}^k e_k$. De esta manera, la proyección $\pi_{\hat{\mathcal{F}}}\colon \hat{\mathcal{F}}^2(M) \to \mathcal{F}M$ que asigna a cada referencia semi-holonómica en $\pi_0^1(z)$ el punto z es un fibrado principal con grupo $B^2(n)$, que es, además, isomorfo a $\pi_{\hat{H}}\colon \hat{H}^2(M) \to \mathcal{F}M$ a través del difeomorfismo $\hat{u} \circ \hat{\nu}\colon \hat{\mathcal{F}}^2(M) \to \hat{H}^2(M)$.

Nótese que en coordenadas locales inducidas por cartas de M, la aplicación $\hat{u} \circ \hat{\nu}$ es la identidad ($\hat{u} \circ \hat{\nu} = u$ en [74]). Por tanto:

Teorema 1.5.1 *La aplicación $\hat{u}\colon \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M} \to \hat{H}^2(M)$ proporciona un isomorfismo de $L_2(n)$-fibrados principales sobre $\mathcal{F}M$. Por tanto, los fibrados $(\mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}, \mathcal{F}M, L_2(n))$ y $(\hat{\mathcal{F}}^2M, \mathcal{F}M, L_2(n))$ son también isomorfos.*

Finalmente, tenemos:

Proposición 1.5.1 *$\mathcal{S}t_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ y $\mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ son isomorfos a los fibrados $\tilde{\mathcal{F}}^2(M)$ y $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias no holonómicas y semi-holonómicas de segundo orden sobre M.*

Demostración:

Se sigue del hecho de que, si $\pi_P\colon P \to M$ es un G-fibrado principal y $F\colon Q \to P$ es un difeomorfismo, entonces, la aplicación $\pi_Q\colon Q \to M$ definida por $\pi_Q = \pi_P \circ F$ es un G-fibrado principal isomorfo a $\pi_P\colon P \to M$ con la acción $Q \times G \to Q$ dada por $qg = F^{-1}(F(q)g)$. La afirmación se sigue entonces de los teoremas 1.4.1 y 1.5.1. □

SECCION-7

1.6 Las conexiones lineales sobre una variedad M como reducciones del fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias semi-holonómicas de segundo orden sobre M

Usaremos el isomorfismo que hemos dado entre el fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias semi-holonómicas de segundo orden sobre M y el fibrado $\mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ de los n-planos horizontales tangentes a $\mathcal{F}M$ para dar una prueba muy corta del resultado siguiente de P. Libermann [75]:

Teorema 1.6.1 *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de conexiones lineales de una variedad M de clase $\mathcal{C}^\infty$ y el conjunto de $GL(n,\mathbb{R})$-reducciones de su fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias semi-holonómicas de segundo orden.*

Demostración:

Una conexión lineal sobre M es una distribución $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{F}M$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ tal que para todo $z \in \mathcal{F}M$, $\mathcal{D}_z$ es un n-plano horizontal y $\mathcal{D}$ es invariante bajo la acción del grupo $GL(n, \mathbb{R})$.

Por tanto, $Q = \{\mathcal{D}_z \ ; \ z \in \mathcal{F}M\}$ es un subconjunto del fibrado $\mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}$ de todos los n-planos horizontales sobre $\mathcal{F}M$ (el cual es isomorfo al $\hat{G}^2(n)$-fibrado de referencias semi-holonómicas de segundo orden $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$, según el teorema 1.4.1). Veamos que Q es una $GL(n, \mathbb{R})$-reducción. En primer lugar, es claro que Q es invariante bajo la acción del subgrupo cerrado $GL(n, \mathbb{R}) \subset \hat{G}^2(n)$. Puesto que $\mathcal{D}$ es $\mathcal{C}^\infty$, para cada $z \in \mathcal{F}M$ existe un entorno abierto A de z y n campos de vectores horizontales linealmente independientes X_1,...,X_n de clase $\mathcal{C}^\infty$ tales que $\mathcal{D}_z = \langle X_1(z), ..., X_n(z)\rangle$. Por tanto

$$\sigma \colon A \to \mathcal{G}_n\mathcal{H}_{\mathcal{F}M}, \quad \sigma(a) = \mathcal{D}_a,$$

es una sección $\mathcal{C}^\infty$ que toma valores en Q. Así, ([70], cap. II, lema 1, pag. 84), se sigue que Q es una $GL(n, \mathbb{R})$-reducción. El recíproco es obvio. $\square$

1.7 Otros modelos isomorfos para los fibrados de referencias de segundo orden

Además de la definición de referencias no holonómicas y semi-holonómicas dadas en la sección 1.4 (definición 1.4.1), en [32] y [74] se trabaja también con otras dos definiciones diferentes que son equivalentes en el sentido de que los fibrados resultantes son isomorfos. En [32], las referencias de segundo orden se consideran como 1-jets de isomorfismos locales $\Phi \colon \mathcal{F}\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}M$, mientras que en [74] se muestran como 1-jets de aplicaciones diferenciables $\varphi \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathcal{F}M$ verificando que $\pi_0^1 \circ \varphi$ es un difeomorfismo local. En esta sección nos vamos a limitar simplemente a explicar como se hace el paso de una a otra. En la sección siguiente, explicamos con más detalle la caracterización dada en [32]. Sea $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}M$ una aplicación diferenciable verificando que $\pi_0^1 \circ \varphi$ sea un difeomorfismo local. Si $u \in \mathcal{F}\mathbb{R}^n$ es una referencia lineal en $x \in \mathbb{R}^n$, $u \colon \mathbb{R}^n \to T_x\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$, ponemos $\Phi(u) = \varphi(x)A$, donde $u \equiv A \in GL(n, \mathbb{R})$. Para esta última identificación, notemos que si fijamos la base canónica $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^n$, entonces, la aplicación $v = x^j e_j \in \mathbb{R}^n \to F(v) = (x^j) \in \mathbb{R}^n$ define una carta global en $\mathbb{R}^n$. Considerando el paralelismo en x dado por

$$\mathrm{p}_x \colon \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x) \to \alpha^j e_j,$$

tenemos que, en la base $\{e_i\}$, la aplicación $\mathrm{p}_x \circ u$ es una matriz $A = \mathrm{p}_x \circ u \in GL(n, \mathbb{R})$. Hemos definido así una aplicación diferenciable

$$\Phi \colon \mathcal{F}\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}M \,.$$

Se tiene entonces que $\Phi(uB) = \Phi(u)B$, $B \in GL(n, \mathbb{R})$. En efecto, considerando $B \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y la composición $\mathrm{p}_x \circ u \circ B$, tenemos que

$$\Phi(\bar{u}) = \varphi(\pi_{\mathbb{R}^n}(\bar{u}))(\mathrm{p}_x \circ u \circ B) = \varphi(x)AB = \Phi(u)B,$$

donde $\bar{u} = \mathrm{p}_x \circ u$ y $\pi_{\mathbb{R}^n} \colon \mathcal{F}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la proyección. De esta manera, Φ es, localmente, un isomorfismo de fibrados.

Recíprocamente, si $\Phi \colon \mathcal{F}\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}M$ es localmente un isomorfismo de fibrados y $\Sigma \colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}\mathbb{R}^n$ es una sección global, podemos definir $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}M$ como $\varphi = \Phi \circ \Sigma$; en este caso resulta que $\pi_0^1 \circ \varphi = \pi \circ \Phi \circ \Sigma$ es un difeomorfismo local (en el origen).

Supongamos ahora que $f \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (M, x)$ es un difeomorfismo de un entorno de 0 en $\mathbb{R}^n$ en un entorno de $f(0) = x$ de M. Sea $\sigma \colon U_x \to \mathcal{F}M$ una sección local definida en un entorno (suficientemente pequeño) de x; entonces, $\varphi = \sigma \circ f \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathcal{F}M$ es una aplicación diferenciable verificando que $\pi_0^1 \circ \varphi$ es un difeomorfismo local.

Recíprocamente, si $\varphi \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathcal{F}M$ es una aplicación diferenciable tal que $\pi_0^1 \circ \varphi$ es un difeomorfismo local, podemos construir una sección local $\sigma \colon U_x \to \mathcal{F}M$ (definida en un entorno adecuado U_x de $x = \pi_0^1(\varphi(0)) \in M$) del siguiente modo: dado $y \in U_x$, existe un único $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi_0^1(\varphi(\xi)) = y$; ponemos entonces $\sigma(y) = \varphi(\xi)$. De este modo, $f = \pi \circ \varphi \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (M, x)$ es un difeomorfismo local verificando que $\varphi = \sigma \circ f$.

1.8 Los fibrados de referencias no holonómicas y semi-holonómicas de segundo orden como extensiones del fibrado de referencias holonómicas de segundo orden

A lo largo de esta sección, denotaremos por $e_1 = j^1_{0,0}(\mathrm{id})_{\mathbb{R}^n}$ el 1-jet de la aplicación identidad de $\mathbb{R}^n$. Los grupos $\tilde{G}^2(n)$ y $\hat{G}^2(n)$ descritos en la sección 1.4 se pueden ver de manera equivalente como sigue [32]: $\tilde{G}^2(n)$ es el grupo de 1-jets de la forma $j^1_{e_0, \tilde{\Psi}(e_0)} \tilde{\Psi}$ donde $\tilde{\Psi} \colon \mathcal{F}\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}\mathbb{R}^n$ es un isomorfismo de fibrados principales induciendo la identidad en $GL(n, \mathbb{R})$ y tal que $\Psi(0) = 0$ ($\Psi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denota la aplicación inducida por $\tilde{\Psi}$ entre las bases), mientras que $\hat{G}^2(n) = \{j^1_{e_0,\tilde{\Psi}(e_0)}\tilde{\Psi} \in \tilde{G}^2(n) \ ; \ \tilde{\Psi}(e_0) = j^1_{0,\Psi(0)}\Psi\}$. Por otra parte, sea $\tilde{\Psi}\colon \mathcal{F}\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}M$ un isomorfismo de fibrados y sea $\Psi\colon \mathbb{R}^n \to M$ la aplicación inducida por $\tilde{\Psi}$ entre las bases. El 1-jet $j^1_{e_0,\tilde{\Psi}(e_0)}\tilde{\Psi}$ puede ser identificado con la aplicación tangente

$$\tilde{\Psi}_*(e_0) \equiv T\tilde{\Psi}(e_0)\colon T_{e_0}(\mathcal{F}\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^{n+n^2} \to T_{\tilde{\Psi}(e_0)}(\mathcal{F}M).$$

Es bien conocido que una tal referencia lineal de $\mathcal{F}M$ es una referencia no holonómica de segundo orden en el punto $\Psi(0)$. Si $\tilde{\Psi}(e_0) = j^1_{0,\Psi(0)}\Psi$, la referencia es una referencia semi-holonómica. Los fibrados de referencias no holonómicas y semi-holonómicas resultantes se denotarán por $\tilde{F}^2(M)$ y $\hat{F}^2(M)$. Por supuesto, $\tilde{F}^2(M)$ y $\hat{F}^2(M)$ son isomorfos a $\tilde{\mathcal{F}}^2(M)$ y $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ respectivamente. Si $\Psi\colon M \to N$ es un difeomorfismo, denotaremos por $F^{(1)}\Psi\colon j^1_0 f \in \mathcal{F}M \to j^1_0(f\circ\Psi) \in \mathcal{F}(N)$ la aplicación prolongación entre los fibrados de referencias. Si $j^1_{e_0,\tilde{\Psi}(e_0)}\tilde{\Psi}$ es una referencia semi-holonómica de segundo orden y $\tilde{\Psi} = F^{(1)}\Psi$, diremos que la referencia es una referencia holonómica de segundo orden, o simplemente una referencia de segundo orden sobre M. El fibrado $\pi^2_0\colon F^2(M) \to M$ de referencias de segundo orden sobre M es un $G^2(n)$-fibrado principal, donde $G^2(n) \subset \hat{G}^2(n)$ es el subgrupo de Lie cerrado de $\hat{G}^2(n)$ dado por

$$G^2(n) = GL(n,\mathbb{R}) \times S_2(n)\,,$$

siendo $S_2(n)$ el espacio vectorial de todas las aplicaciones bilineales simétricas de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Es bien conocido que este grupo es isomorfo al grupo de Lie

$$G^2(n) = \{j^1_{e_0,\tilde{\Psi}(e_0)}\tilde{\Psi} \in \hat{G}^2(n) \ ; \ \tilde{\Psi} = F\Psi\}.$$

Con este punto de vista, tanto la operación producto en $\tilde{G}^2(n)$, $\hat{G}^2(n)$ y $G^2(n)$ como las acciones de estos grupos sobre $\tilde{F}^2(M)$, $\hat{F}^2(M)$ y $F^2(M)$ están dadas por la composición de jets. En coordenadas locales, un elemento $(x^i, x^i_j, y^i_j, x^{kl}_j)$ de $\tilde{F}^2(M)$ pertenece a $F^2(M)$ si y sólo si $y^i_j = x^i_j$ y $x^{kl}_j = x^{kj}_l$.

Consideremos ahora la variedad $F^2(M) \times \tilde{G}^2(n)$. Dados dos elementos $p = j^1_{e_0,\tilde{\Psi}(e_0)}\tilde{\Psi} \in F^2(M)$ y $k = j^1_{e_0,\tilde{\Phi}(e_0)}\tilde{\Phi} \in \tilde{G}^2(n)$, denotaremos por $pk = j^1_{e_0,\tilde{\Psi}(\tilde{\Phi}(e_0))}(\tilde{\Psi}\circ\tilde{\Phi})$ a la restricción de la acción de $\tilde{G}^2(n)$ sobre $\tilde{F}^2(M)$.

Definición 1.8.1 *Sea $\pi\colon P \to M$ un fibrado principal de grupo G y supongamos que G es un subgrupo de Lie de otro grupo de Lie K. Sea $P^K = P \times_G K = P \times K/\sim$ el espacio cociente obtenido de $P \times K$ a través de la* *relación de equivalencia*

$$(p,k) \sim (p',k') \text{ si y solamente si existe } a \in G \text{ tal que } p' = pa,\ k' = a^{-1}k\,.$$

El fibrado asociado $\pi^K \colon P^K \to M$ *es un* K*-fibrado principal conocido como* **extensión** *de* P *por el grupo* K*.*

Destaquemos que toda trivialización de P

$$\tau \colon p \in \pi^{-1}U \to (x,g) \in U \times G$$

induce una trivialización τ^K de P^K,

$$\tau^K \colon [(p,k)] \in \pi^{K^{-1}}U \to (x,gk) \in U \times K\,,$$

donde $[(p,k)]$ denota la clase de equivalencia de (p,k).

En particular, si $P = F^2(M)$, $G = G^2(n)$ y $K = \tilde{G}^2(n)$ (o $K = \hat{G}^2(n)$), para cada $(p,k) \in F^2(M) \times \tilde{G}^2(n)$, denotaremos por $[(p,k)]$ la clase de equivalencia de (p,k) en $F^2(M)^{\tilde{G}^2(n)}$ y por $\mathrm{pr} \colon F^2(M) \times \tilde{G}^2(n) \to F^2(M)^{\tilde{G}^2(n)}$ la proyección.

Teorema 1.8.1 *a) La aplicación*

$$\vartheta \colon [(p,k)] \in F^2(M)^{\tilde{G}^2(n)} \to pk \in \tilde{F}^2(M)$$

es un isomorfismo de $\tilde{G}^2(n)$*-fibrados principales.*

b) La aplicación

$$\vartheta \colon [(p,k)] \in F^2(M)^{\hat{G}^2(n)} \to pk \in \hat{F}^2(M)$$

es un isomorfismo de $\hat{G}^2(n)$*-fibrados principales.*

Demostración:

En primer lugar, ϑ está bien definida, pues, si (p,k), $(p',k') \in F^2(M) \times \tilde{G}^2(n)$ y $a \in G^2(n)$ verifican $p' = pa$ y $k' = a^{-1}k$, entonces $p'k' = paa^{-1}k = pk$. Tomemos (p,k), $(p',k') \in F^2(M) \times \tilde{G}^2(n)$ tales que $pk = p'k'$. Para probar que ϑ es inyectiva, debemos encontrar $a \in G^2(n)$ tal que $p' = pa$ y $k' = a^{-1}k$. Pero, como $pk = p'k'$ se verifica si y sólo si $pk(k')^{-1} = p'$, es suficiente probar que $a = k(k')^{-1} \in G^2(n)$. Más aun, basta probar que si p, $p' \in F^2(M)$ y $h \in \tilde{G}^2(n)$ verifican $p' = ph$, entonces $h \in G^2(n)$, o, lo que es lo mismo, que p y p' se encuentran en la misma fibra de $F^2(M) \to M$. Pero, puesto que p y p' están en la misma fibra de $\tilde{F}^2(M) \to M$, esto se sigue del hecho de que la acción de $\tilde{G}^2(n)$ sobre $\tilde{F}^2(M)$ es libre. Ahora, para $p = j^1_{e_0,\tilde{\Psi}(e_0)}\tilde{\Psi} \in F^2(M)$, sea $F^{(1)}\Psi\colon \mathcal{F}\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}M$ la aplicación prolongación de la aplicación inducida $\Psi\colon \mathbb{R}^n \to M$. Como $F^{(1)}\Psi$ también induce Ψ, entonces $q = j^1_{e_0,F^{(1)}\Psi(e_0)}F^{(1)}\Psi \in F^2(M)$ y p se encuentran en la misma fibra de $\tilde{F}^2(M) \to M$. Por tanto, existe $k \in \tilde{G}^2(n)$ tal que $p = qk$ y $\vartheta([(q,k)]) = p$. Así, ϑ es sobreyectiva. Por otra parte, es inmediato que $\vartheta([(p,kk')]) = \vartheta([(p,k)])k'$ para $p \in F^2(M)$ y k, $k' \in \tilde{G}^2(n)$. Además, si $\mathrm{i}\colon F^2(M) \times \tilde{G}^2(n) \to \tilde{F}^2(M) \times \tilde{G}^2(n)$ denota la inclusión y $R\colon \tilde{F}^2(M)\times\tilde{G}^2(n) \to \tilde{F}^2(M)$ denota la acción, se sigue que ϑ es diferenciable, ya que $\vartheta \circ \mathrm{pr} = R \circ \mathrm{i}$ y pr es una submersión. Finalmente, probemos que, en coordenadas locales, ϑ es la identidad. Consideremos $(p,k) \in F^2(M)\times\tilde{G}^2(n)$. Si, en coordenadas locales tenemos $p = (x^i, x^i_j, x^i_j, x^{kl}_j)$ con $x^{kl}_j = x^{lk}_j$ y $k = (a^i_j, b^i_j, c^{kl}_j)$, entonces, a través de la trivialización inducida por una carta de M in $F^2(M)^{\tilde{G}^2(n)}$, $[(p,k)]$ se lee como $(x^i, (x^i_j, x^i_j, x^{kl}_j)(a^i_j, b^i_j, c^{kl}_j))$, donde el producto en la segunda componente es el producto de $\tilde{G}^2(n)$. Además, si $p = j^1_{e_0,\tilde{\Psi}(e_0)}\tilde{\Psi} \in F^2(M)$ y $k = j^1_{e_0,\tilde{\Phi}(e_0)}\tilde{\Phi} \in \tilde{G}^2(n)$, entonces, las coordenadas locales de $pk = j^1_{e_0,\tilde{\Psi}(\tilde{\Phi}(e_0))}(\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi})$ son las mismas que antes, puesto que $\tilde{\pi}^2_0(pk) = \tilde{\pi}^2_0(p) = \Psi(0)$ y el producto de $\tilde{G}^2(n)$ está dado por la composición de jets. Así, en coordenadas locales inducidas, ϑ es la identidad y, en consecuencia, ϑ es un isomorfismo. Esto prueba el apartado a), mientras que la demostración de b) es completamente análoga. □

Capítulo 2

Álgebras de Lie semisimples graduadas y conexiones equivalentes

En este capítulo arrancaremos revisando los conceptos de álgebra de Lie semisimple graduada $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, (véanse [69], [58], [90], [106] y el capítulo II en [34], escrito por Kaneyuki) y de espacio homogéneo semisimple llano $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ asociado a $\mathfrak{L}$, cuando $\mathfrak{L}$ es real (véanse [106], [90], [88], [89] y el mencionado capítulo II de [34]). Es bien conocido que, tanto si $\mathfrak{L}$ es real como si es compleja, la restricción

$$B_| \colon \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_1 \to \mathbb{F}$$

de la forma de Killing $B = B_{\mathfrak{L}}$ de $\mathfrak{L}$ es una aplicación bilineal no degenerada, la cual establece por tanto una dualidad entre las subálgebras abelianas $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$, siendo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Esto quiere decir que hay un isomorfismo natural entre el espacio vectorial $\mathfrak{g}_1$ y el espacio vectorial $\mathfrak{g}^*_{-1} = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathbb{F})$ dual de $\mathfrak{g}_{-1}$, que viene dado por

$$z \in \mathfrak{g}_1 \to \varphi_z = B_|(- \, , \, z) \in \mathfrak{g}^*_{-1} \, .$$

La subálgebra $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{L}$ es un álgebra de Lie reductiva cuyo centro está determinado por un elemento $\epsilon \in \mathfrak{g}_0$ que recibe el nombre de *elemento característico de* $\mathfrak{L}$, el cual verifica que, para todo $x_j \in \mathfrak{g}_j$, es

$$[\epsilon, x_j] = j x_j \, ,$$

(j=-1, 0, 1). Además

$$\mathfrak{g}_0 = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]$$

y se verifica la siguiente condición adicional (llamada *transitividad* en [90]): si $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ y para todo $\xi \in \mathfrak{g}_1$ es $[x, \xi] = 0$, entonces $x = 0$. Se exige que el grupo de Lie $\mathbf{L}$ actúe de modo efectivo sobre el espacio homogéneo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$, que debe ser conexo aunque $\mathbf{L}$ no lo sea necesariamente. El álgebra de Lie de $\mathbf{L}$ es $\mathfrak{L}$ y el álgebra de Lie del grupo de isotropía $\mathbf{L}_0$ es la subálgebra $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. Sea $o \in \mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ el *origen* de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ (es decir, $o = \mathbf{L}_0 \in \mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ es la clase lateral del elemento neutro $e \in \mathbf{L}$). Si para todo $a \in \mathbf{L}$ denotamos

$$\tau_a \colon x\mathbf{L}_0 \in \mathbf{L}/\mathbf{L_0} \to axL_0 \in \mathbf{L}/\mathbf{L_0}$$

recordemos entonces que la representación lineal de isotropía de $\mathbf{L}_0$ en el espacio vectorial $T_o(\mathbf{L}/\mathbf{L}_0) \equiv \mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$ está dada por

$$a \in \mathbf{L}_0 \to \tau_{a*}(o) \in GL(\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0)$$

y es canonicamente equivalente a la representación

$$l : \mathbf{L}_0 \to GL(\mathfrak{g}_{-1})$$

de $\mathbf{L}_0$ en $\mathfrak{g}_{-1}$ dada, para todo $a \in \mathbf{L}_0$ y todo $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ por

$$l(a)X = Ad_{\mathbf{L}}(a)X \mod \mathfrak{L}_0\,,$$

a la que llamaremos en lo sucesivo *representación lineal de isotropía* de $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$, siendo $\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}$ la representación adjunta del grupo $\mathbf{L}$ en $\mathfrak{L}$.

Si $n = \dim \mathfrak{g}_{-1} \equiv \mathbb{F}^n$ entonces el *grupo lineal de isotropía* de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ es, por lo anterior, el subgrupo de Lie

$$l(\mathbf{L}_0) \subset GL(\mathfrak{g}_{-1}) \equiv GL(n, \mathbb{F})\,.$$

Por otra parte, el subgrupo cerrado $\mathbf{G}_0 \subset \mathbf{L}_0$ dado por

$$\mathbf{G}_0 = \{a \in \mathbf{L}_0\ ;\ \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0\}\,,$$

tiene como álgebra de Lie a $\mathfrak{g}_0$. Además, puede demostrarse [90] que

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_0 &= \{a \in \mathbf{L}_0\ ;\ \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)\mathfrak{g}_{-1} \subset \mathfrak{g}_{-1}\}\\ &= \{a \in \mathbf{L}_0\ ;\ \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_1\}\,,\end{aligned}$$

Podemos identificar el grupo lineal de isotropía de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ con el subgrupo cerrado $\mathbf{G}_0$. En efecto, si $\mathbf{G}_{-1}$ y $\mathbf{G}_1$ son los subgrupos de Lie conexos y abelianos de $\mathbf{L}$ cuyas álgebras de Lie son, respectivamente, $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$, se verifica entonces (ver [90]) que sus respectivas exponenciales son difeomorfismos, que

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{G}_0\mathbf{G}_1$$

(producto semidirecto) y que

$$\mathbf{G}_1 = \ker l\,,$$

de donde se sigue que

$$l(\mathbf{G}_0) = l(\mathbf{L}_0)\,,$$

por lo que la restricción

$$l_{|\mathbf{G}_0}\colon \mathbf{G}_0 \to l(\mathbf{L}_0)$$

es inyectiva. La representación inducida

$$\lambda : a \in \mathbf{G}_0 \to \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)_{|\mathfrak{g}_{-1}} \in GL(\mathfrak{g}_{-1})\,,$$

es fiel y canonicamente equivalente a $l_{|\mathbf{G}_0}$, lo cual permite identificar a $\mathbf{G}_0$ con el grupo lineal de isotropía de $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$, es decir

$$\mathbf{G}_0 \equiv l(\mathbf{G}_0) = \lambda(\mathbf{G}_0) \subset GL(\mathfrak{g}_{-1})\,.$$

El grupo $\mathbf{G}_0$ tiene una propiedad importante: a través de la representacion lineal de isotropía λ deja invariante el tensor de Tanaka Ψ de tipo (2,2)

$$\Psi\colon \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathbb{R}$$

dado por

$$\Psi(x,\, x',\, z,\, z') = B([[x,\, z],\, x'],\, z')\,,$$

donde $x,\, x' \in \mathfrak{g}_1$, $z,\, z' \in \mathfrak{g}_1$. Más aun, Hangan demostró en [51] que el subgrupo G_Ψ de $GL(\mathfrak{g}_{-1})$ que deja invariante Ψ no solamente verifica

$$\lambda(\mathbf{G}_0) \subset G_\Psi$$

sino que sus respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}_\Psi$ y $\lambda(\mathfrak{g}_0)$ son iguales. Por tanto las respectivas componentes conexas del elemento neutro $e = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_{-1}}$ común de G_Ψ y $\lambda(\mathbf{G}_0)$ coinciden, es decir

$$\big(\lambda(\mathbf{G}_0)\big)_e = \big(G_\Psi\big)_e$$

En consecuencia, si sobre una variedad diferenciable M de dimensión $n = \dim\, \mathfrak{g}_{-1}$ existe una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ ésta es esencialmente una G-estructura de tipo tensorial determinada por el campo de tensores $(2,2)$ asociado a Ψ, campo que también denotaremos Ψ. Se sigue por tanto de la teoría general de G-estructuras que una conexión lineal ∇ sobre M es adaptada a una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ si y sólo si

$$\nabla\Psi = 0$$

(véase [37]). H. Weyl [117] introdujo la noción de conexiones equivalentes: equivalencia proyectiva de conexiones lineales y equivalencia conforme de conexiones metricas. Tanaka sintetizó ambas definiciones en la noción de conexiones lineales equivalentes adaptadas a la $\mathbf{G}_0$-estructura P dada sobre M.

Hemos considerado sobre una variedad M dotada de una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ el concepto de *conexiones lineales equivalentes* para dos conexiones lineales ∇ y $\tilde{\nabla}$ sobre M incluso cuando ambas son no necesariamente adaptadas a P.

Sobre una variedad diferenciable M de dimensión $n = \dim(\mathfrak{g}_{-1})$ decimos que dos conexiones lineales ∇ y $\tilde{\nabla}$ sobre M (no necesariamente adaptadas a P) son **conexiones lineales equivalentes** si su tensor diferencia se puede expresar contrayendo el tensor de Tanaka con una 1-forma. Hemos demostrado la siguiente destacable propiedad: si ∇ y $\tilde{\nabla}$ son equivalentes, entonces

$$\tilde{\nabla}\Psi = \nabla\Psi,$$

que es consecuencia a su vez de la notable identidad

$$\Psi^{ui}_{jk}\Psi^{hv}_{ua} + \Psi^{hu}_{jk}\Psi^{iv}_{ua} - \Psi^{hi}_{uk}\Psi^{uv}_{ja} - \Psi^{hi}_{ju}\Psi^{uv}_{ka} = 0.$$

La propiedad es obvia si ambas conexiones son adaptadas.

El concepto de equivalencia de conexiones lineales es de importancia fundamental en esta memoria pues la equivalencia de conexiones lineales adaptadas (con torsión arbitraria) nos permitirá, en el tercer capítulo, construir $\mathbf{L}_0$-estructuras semi-holonómicas de segundo orden sobre M, dotadas de una *conexión de Cartan*, mientras que en el cuarto capítulo con la equivalencia de conexiones adaptadas y torsión nula caracterizaremos algebraicamente la existencia de $\mathbf{L}_0$-estructuras holonómicas de segundo orden G-invariantes e integrables sobre una espacio homogéneo $M = G/H$.

Por otra parte hemos demostrado que el tensor Ψ tiene la propiedad de que dadas dos bases $\{x_i\ ;\ i = 1, ..., n\}$ y $\{z_i\ ;\ i = 1, ..., n\}$ de $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$ duales con respecto a la forma de Killing B de $\mathfrak{L}$, entonces

$$\sum_i \Psi^{il}_{ij} = -\frac{1}{2}\delta^l_j,$$

donde Ψ^{kl}_{ij} está dado por $\Psi^{kl}_{ij} = B([[x_i, z_k], x_j], z_l)$.

En las tres últimas secciones hemos estudiado el tensor diferencia de dos conexiones adaptadas a una G-estructura arbitraria $P \subset \mathcal{F}M$ en el caso general, es decir, con G un subgrupo de Lie cerrado de $GL(n, \mathbb{R})$, siendo

$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ el álgebra de Lie de G. Si denotamos por $(\mathcal{C}^{p,q}(\mathfrak{g}), \delta)$ el complejo de Spencer del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, probaremos que el tensor diferencia de dos G-conexiones sobre M se puede ver como un tensor de tipo $([\alpha_1], \mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}^{(1)})$, donde α_1 es la representación natural de G en $\mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{g}^{(1)}$ es la primera prolongación de $\mathfrak{g}$. Dicho tensor diferencia es nulo si y sólo si ambas conexiones tienen la misma torsión. Hemos particularizado dicho estudio al caso especial en que $G = \mathbf{G}_0$ es el grupo lineal de isotropía de un espacio homogéneo semisimple llano $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ asociado a un álgebra semisimple graduada $\mathfrak{L}$. Sean B la forma de Killing de $\mathfrak{L}$. Con la notación anterior hemos verificado que $\mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_0) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)$, resultando además que la primera prolongación de la subálgebra $\mathfrak{g}_0$ (que está definida por $\mathfrak{g}_0^{(1)} = \{t \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0) \ ; \ [t(x), x'] = [t(x'), x] \ , \ x, x' \in \mathfrak{g}_{-1}\}$), es un subespacio vectorial de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)$. Si ϵ es el elemento característico de $\mathfrak{L}$, para cada $t \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)$ consideraremos la forma lineal β_t sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ dada por

$$\beta_t(x) = B(\epsilon, t(x)),$$

así como la aplicación lineal $\beta\colon t \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0) \to \beta_t \in (\mathfrak{g}_{-1})^*$ y obtendremos que cuando $\mathfrak{L}$ es simple, se verifica que $\mathrm{Ker}(\beta_{|\mathfrak{g}_0^{(1)}}) = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)}$. Es más, si $\beta_{|\mathfrak{g}_0^{(1)}}$ es un isomorfismo, entonces el núcleo de β es un suplementario $\mathbf{G}_0$-invariante de $\mathfrak{g}_0^{(1)}$ en $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)$. Así, la representación α_1 definida en $\mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_0)$ deja $\mathrm{Ker}(\beta)$ invariante y, en consecuencia, da lugar a una representación $[\alpha_1]$ en el espacio cociente $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)/\mathfrak{g}_0^{(1)}$. Si $\beta_{|\mathfrak{g}_0^{(1)}}$ es un isomorfismo, la representación ρ_1 de $\mathbf{G}_0$ en $\mathrm{Ker}(\beta)$ dada por

$$\rho_1(g)(t)(x) = \mathrm{Ad}(g)(t(\mathrm{Ad}(g^{-1})x)),$$

$g \in \mathbf{G}_0$, $t \in \mathrm{Ker}(\beta)$, $x \in \mathfrak{g}_{-1}$, es equivalente a $[\alpha_1]$. Obtenemos ejemplos en los que la construcción anterior es aplicable: cuando $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$, p, $q > 2$, o cuando $\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R})$, $p + q \geq 3$.

Finalmente señalemos que en [58] puede encontrarse una clasificación de álgebras de Lie simples graduadas de segunda especie, clásicas y excepcionales, $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Una teoría completa de estructuras de segundo orden para álgebras graduadas de tipo $\mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ no ha sido formulada. Pero las estructuras de contacto han sido estudiadas desde este punto de vista por Burdet y Perrin [16].

2.1 Álgebras de Lie semisimples graduadas

Las siguientes definiciones y resultados, bien conocidos, pueden verse, por ejemplo, en [69] o en [90] o en [58]. También aparecen en buena parte en [106], si bien con expresiones y notaciones de aspecto diferente.

Definición 2.1.1 *Sea $\mathfrak{L}$ un álgebra de Lie (real o compleja) de dimensión finita. Diremos que $\mathfrak{L}$ es un* **álgebra de Lie graduada** *si $\mathfrak{L}$ es suma directa de subespacios vectoriales $\mathfrak{g}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, con $\mathfrak{g}_{-1} \neq 0$, verificandose además que para cualesquiera j, $k \in \mathbb{Z}$ es*

$$[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q} .$$

Diremos que los subespacios $\mathfrak{g}_p$ constituyen la graduación de

$$\mathfrak{L} = \bigoplus_k \mathfrak{g}_k .$$

Observación 2.1.1 En esta memoria trataremos con álgebras de Lie graduadas semisimples de primera especie, es decir, de la forma

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 ,$$

a las que llamaremos abreviadamente álgebras de Lie graduadas semisimples. Estas álgebras verifican necesariamente la siguiente condición, llamada *transitividad* en [90]: si $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ y $[x, \mathfrak{g}_1] = 0$ entonces $x = 0$. Además, nos ceñiremos exclusivamente a las álgebras de Lie graduadas semisimples reales. Pero nótese que toda álgebra de Lie graduada semisimple compleja $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ de dimension n sobre $\mathbb{C}$ es también un álgebra de Lie graduada semisimple real de dimensión $2n$ con la misma graduación. A partir de ahora la subálgebra $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{L}$ se denotará por $\mathfrak{L}_0$, es decir

$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 .$$

Proposición 2.1.1 *Para toda álgebra de Lie semisimple graduada real o compleja $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ se verifica que*

i) *Los subespacios vectoriales $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$ son subálgebras abelianas de $\mathfrak{L}$.*

ii) *El subespacio vectorial $\mathfrak{g}_0$ es una subálgebra del álgebra de Lie $\mathfrak{L}$.*

iii) *Para $k = -1$, 0, 1 y para todo $y \in \mathfrak{g}_0$ se tiene*

$$\mathrm{ad}(y)\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_k$$

El apartado iii) de la proposición anterior nos permite afirmar que existen sendas representaciones

$$\lambda\colon y \in \mathfrak{g}_0 \to [y, -] \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})\,,$$

$$\lambda'\colon y \in \mathfrak{g}_0 \to [y, -] \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$$

de $\mathfrak{g}_0$ en $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$. Puesto que el álgebra $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es transitiva, se sigue que ambas representaciones son inyectivas. La primera de ellas, λ, se llamará *representación lineal de isotropía.* La siguiente propiedad es bien conocida

Lema 2.1.1 *Se verifica que:*

i) *En $\mathfrak{L}$ los subespacios vectoriales $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_0$ son ortogonales respecto a la forma de Killing B de $\mathfrak{L}$, es decir, $B(x, y) = 0$ para $x \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$, $y \in \mathfrak{g}_0$, y por tanto $B_{|\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_1}$ y $B_{|\mathfrak{g}_0}$ son no degeneradas.*

ii) *$B(x, x') = 0$ y $B(z, z') = 0$ para x, $x' \in \mathfrak{g}_{-1}$ y z, $z' \in \mathfrak{g}_1$.*

iii) *$\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$ son espacios vectoriales duales con respecto a B, es decir, la aplicación*

$$z \in \mathfrak{g}_1 \to \varphi_z \in \mathfrak{g}^*_{-1}$$

dada por $\varphi_z(x) = B(x, z)$ establece un isomorfismo entre $\mathfrak{g}_1$ y el espacio vectorial $\mathfrak{g}^*_{-1}$ dual de $\mathfrak{g}_{-1}$.

iv) *Las representaciones*

$$\lambda\colon y \in \mathfrak{g}_0 \to \lambda(y) = [y, -] \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1}),$$

$$\lambda'\colon y \in \mathfrak{g}_0 \to \lambda'(y) = [y, -] \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1),$$

son contragradientes respecto a la forma de Killing B, es decir, para todo $x \in \mathfrak{g}_{-1}$, $y \in \mathfrak{g}_0$, $z \in \mathfrak{g}_1$ se verifica

$$B(\lambda(y)x, z) + B(x, \lambda'(y)z) = 0\,.$$

iv) *La representación λ' es equivalente a la representación dual de $\mathfrak{g}_0$ en $\mathfrak{g}^*_{-1}$.*

Lema 2.1.2 *Si $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es un álgebra semisimple graduada se tiene que*

$$[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_0$$

y que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie reductiva.

El siguiente resultado se debe a Tanaka [106]

Lema 2.1.3 *Un álgebra de Lie real o compleja $\mathfrak{L}$ graduada de primera especie es simple si y sólo si su representación lineal de isotropía $\lambda\colon \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$ es irreducible.*

La existencia y unicidad del elemento ϵ de la definición siguiente puede verse por ejemplo en [58], [69], [90] o [106].

Definición 2.1.2 *Se llama* **elemento característico** *de $\mathfrak{L}$ al único elemento $\epsilon \in \mathfrak{g}_0$ que verifica que*

$$[\epsilon, x_j] = jx_j$$

para todo $x_j \in \mathfrak{g}_j$, $j = -1, 0, 1$.

Si $\mathfrak{L}$ es simple, Kobayashi y Nagano [69] determinaron la estructura del centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ del álgebra reductiva $\mathfrak{g}_0$:

Lema 2.1.4 *Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ un álgebra de Lie simple graduada real.*

i) *Si $\mathfrak{L}$ es la forma real de un álgebra simple compleja $\tilde{\mathfrak{L}}$ (es decir, la complexificación $\tilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{L}$ es simple) entonces el centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ es unidimensional y está generado por el elemento característico ϵ de $\mathfrak{L}$, es decir*
$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) =< \{\epsilon\} > .$$

ii) *Si $\mathfrak{L}$ es el álgebra de Lie real $\tilde{\mathfrak{L}}_{\mathbb{R}}$ que subyace en un álgebra de Lie compleja simple $\tilde{\mathfrak{L}}$ entonces el centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ es bidimensional y tiene como base $\{\epsilon,\, i\epsilon\}$.*

Con lo anterior obtenemos la siguiente caracterización del ideal $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$, que será usada más adelante.

Lema 2.1.5 *Un elemento $y \in \mathfrak{g}_0$ verifica $y \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ si y sólo si es cero la traza del endomorfismo $\lambda(y)\colon x \in \mathfrak{g}_{-1} \to \lambda(x) = [y, x] \in \mathfrak{g}_{-1}$.*

Demostración:

Sea $y \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ y pongamos $y = \sum_j [y_j, y'_j]$, con y_j, $y'_j \in \mathfrak{g}_0$. Entonces

$$\lambda(y) = \sum_j [\lambda(y_j), \lambda(y'_j)].$$

Luego

$$\mathrm{traza}(\lambda(y)) = \sum_j \mathrm{traza}([\lambda(y_j), \lambda(y_j')]) = 0,$$

ya que traza$([A, B]) =$ traza$(AB) -$ traza$(BA) = 0$.

Recíprocamente, sea $y \in \mathfrak{g}_0$ verificando que la traza de $\lambda(y)$ es cero. Llamemos $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ y $\mathfrak{m} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$. Así $y = y_\mathfrak{z} + y_\mathfrak{m}$, con $y_\mathfrak{z} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ e $y_\mathfrak{m} \in \mathfrak{m} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$. Luego $\lambda(y) = \lambda(y_\mathfrak{z}) + \lambda(y_\mathfrak{m})$. En consecuencia, por el mismo argumento de antes se llega a

$$\mathrm{traza}(\lambda(y)) = \mathrm{traza}(\lambda(y_\mathfrak{z})) + \mathrm{traza}(\lambda(y_\mathfrak{m})) = \mathrm{traza}(\lambda(y_\mathfrak{z})).$$

Sabemos también que $y_\mathfrak{z}$ es de la forma $t\epsilon$ si $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)) = 1$ o de la forma $u\epsilon + iv\epsilon$ si $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)) = 2$, con t, u, v reales. En el segundo caso

$$\mathrm{traza}(\lambda(y_\mathfrak{z})) = u\,\mathrm{traza}(\lambda(\epsilon)) + iv\,\mathrm{traza}(\lambda(\epsilon)).$$

Ahora bien, como $[\epsilon, x] = -x$ para todo $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ resulta que $\lambda(\epsilon)(x) = -x$, de donde $\lambda(\epsilon) = -\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_{-1}}$ y, si $\dim(\mathfrak{g}_{-1}) = n$, resulta traza$(\lambda(\epsilon)) = -n$. De este modo, si $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)) = 1$, entonces

$$\mathrm{traza}(\lambda(y_\mathfrak{z}) = -nt\,.$$

Si $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)) = 2$, entonces

$$\mathrm{traza}(\lambda(y_\mathfrak{z}) = -n(u + iv)\,.$$

Por hipótesis, traza$(\lambda(y)) = 0$. Luego, en el primer caso es $t = 0$ y en el segundo es $u + iv = 0$. En ambos casos queda $y = y_\mathfrak{m} \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$.

□

2.2 Ejemplos de álgebras de Lie simples graduadas clásicas

A continuación daremos una lista (no exhaustiva) de álgebras de Lie reales simples graduadas clásicas de primera especie, con sus correspondientes graduaciones y el correspondiente elemento característico de cada una de ellas. La clasificación completa de tales algebras se debe a Kobayashi-Nagano [69], véase también el capítulo II (escrito por Kaneyuki) en [34], donde además aparecen clasificadas las de segunda especie.

a) Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$.

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{F}) = \{M \in \mathfrak{gl}(p+q, \mathbb{F}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\},$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \in \mathfrak{g};\ A \in \mathfrak{gl}(p, \mathbb{F}), B \in \mathfrak{gl}(q, \mathbb{F}), \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & Z \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{g};\ Z \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F}) \right\},$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline X & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{g};\ X \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{F}) \right\},$$

$$\epsilon = \left(\begin{array}{c|c} aI & 0 \\ \hline 0 & bI \end{array} \right),$$

con $a = -q/(p+q)$ y $b = p/(p+q)$.

Cuando $pq > 1$, el álgebra $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{F})$ tiene asociadas las estructuras casi grassmannianas o producto tensor. Estas estructuras fueron estudiadas por primera vez por Hangan [50], [47], [47] y Singer-Sternberg [101]. Cuando p o q valen 1, se obtienen, para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, las estructuras proyectivas reales [68], [106], para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ las estructuras casi complejas [106] y para $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ las estructuras cuaterniónicas generalizadas [96].

b)

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(n, n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) \mid M^t I_{n,n} + I_{n,n} M = 0\},$$

siendo

$$I_{n,n} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & -I_n \end{array} \right),$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_2 & A_1 \end{array} \right) \in \mathfrak{g};\ A_1, A_2 \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), A_1 = -A_1^t,\ A_2 = A_2^t \right\},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} Z & -Z \\ \hline Z & -Z \end{array} \right) \in \mathfrak{g};\ Z \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), Z = -Z^t \right\},$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} X & X \\ \hline -X & -X \end{array} \right) \in \mathfrak{g};\ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), X = -X^t \right\},$$

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline I & 0 \end{array} \right).$$

c)

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{gl}(p+q+2, \mathbb{R}) \mid M^t I_{p+1,q+1} + I_{p+1,q+1} M = 0\},$$

siendo

$$I_{p+1,q+1} = \left(\begin{array}{c|c} I_{p+1} & 0 \\ \hline 0 & -I_{q+1} \end{array}\right),$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & a & 0 \\ \hline 0 & A_1 & 0 & A_2 \\ \hline a & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_2^t & 0 & A_3 \end{array}\right) \in \mathfrak{g};\ \begin{array}{cc} A_1 \in \mathfrak{gl}(p, \mathbb{R}), & A_1 = -A_1^t \\ A_2 \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}), & a \in \mathbb{R} \\ A_3 \in \mathfrak{gl}(q, \mathbb{R}), & A_3 = -A_3^t \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & Z_1^t & 0 & Z_2^t \\ \hline -Z_1 & 0 & Z_1 & 0 \\ \hline 0 & Z_1^t & 0 & Z_2^t \\ \hline Z_2 & 0 & -Z_2 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g};\ Z_1 \in \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{R})\ ,\ Z_2 \in \mathcal{M}_{q\times 1}(\mathbb{R}) \right\},$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & -X_1^t & 0 & X_2^t \\ \hline X_1 & 0 & X_1 & 0 \\ \hline 0 & X_1^t & 0 & -X_2^t \\ \hline X_2 & 0 & X_2 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g};\ X_1 \in \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{R})\ ,\ X_2 \in \mathcal{M}_{q\times 1}(\mathbb{R}) \right\},$$

$$\epsilon = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Esta álgebra $\mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R})$ tiene asociada la geometría conforme de signatura (p, q) y admite un modelo isomorfo, debido a Nishikawa y Takeuchi [89], que describimos a continuación.

Para $p+q \geq 3$, $p+q = n$, sean $S_0 = \left(\begin{array}{c|c} I_p & \\ \hline & -I_q \end{array}\right)$ y $S = \left(\begin{array}{c|c|c} & & -1 \\ \hline & S_0 & \\ \hline -1 & & \end{array}\right)$.

El álgebra de Lie

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{o}(S) = \{M \in \mathfrak{gl}(p+q+2, \mathbb{R})\ ;\ M^t S + SM = 0\}$$

admite la graduación $\mathfrak{L} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1$ dada por

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline \begin{array}{c} x' \\ x'' \end{array} & & \\ \hline & (x')^t \quad -(x'')^t & \end{array} \right) \in \mathfrak{L} \; ; \; x' \in \mathbb{R}^p \; , \; x'' \in \mathbb{R}^q \right\},$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{0} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha & & \\ \hline & B & \\ \hline & & -\alpha \end{array} \right) \in \mathfrak{L} \; ; \; \alpha \in \mathbb{R} \; , \; B \in \mathfrak{o}(p,q) \right\},$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & \xi' \quad \xi'' & \\ \hline & & \begin{array}{c} (\xi')^t \\ -(\xi'')^t \end{array} \\ \hline & & \end{array} \right) \in \mathfrak{L} \; ; \; (\xi')^t \in \mathbb{R}^p \; , \; (\xi'')^t \in \mathbb{R}^q \right\},$$

donde

$$\mathfrak{o}(p,q) = \{X \in \mathfrak{gl}(p+q,\mathbb{R}) \; ; \; X^t S_0 + S_0 X = 0\}$$

(véase [89]). El anterior álgebra de Lie semisimple graduada $\mathfrak{o}(S)$ es isomorfa al álgebra de Lie graduada $\mathfrak{so}(p+1,q+1,\mathbb{R})$. En efecto, $B \in \mathfrak{o}(p,q)$ si y sólo si es de la forma

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline -A_2^t & A_3 \end{array} \right) ,$$

con $A_1 \in \mathfrak{so}(p,\mathbb{R})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, $A_3 \in \mathfrak{so}(q,\mathbb{R})$. Sea

$$\Phi \colon \mathfrak{o}(p,q) \longrightarrow \mathfrak{so}(p+1,q+1,\mathbb{R})$$

el isomorfismo lineal, dado por

$$\Phi \colon x = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline \begin{array}{c} x' \\ x'' \end{array} & & \\ \hline & (x')^t \quad -(x'')^t & \end{array} \right) \to \Phi(x) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & -x'^t & 0 & x''^t \\ \hline x' & 0 & x' & 0 \\ \hline 0 & x'^t & 0 & -x''^t \\ \hline x'' & 0 & x'' & 0 \end{array} \right),$$

$$\Phi \colon y = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha & & \\ \hline & B & \\ \hline & & -\alpha \end{array} \right) \to \Phi(y) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \hline 0 & A_1 & 0 & A_2 \\ \hline \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_2^t & 0 & A_3 \end{array} \right),$$

$$\Phi\colon z = \left(\begin{array}{c|cc|c} & \xi' & \xi'' & \\ \hline & & & (\xi')^t \\ & & & -(\xi'')^t \\ \hline & & & \end{array}\right) \to \Phi(z) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \xi' & 0 & \xi'' \\ \hline -\xi'^t & 0 & \xi'^t & 0 \\ \hline 0 & \xi' & 0 & \xi'' \\ \hline \xi''^t & 0 & -\xi''^t & 0 \end{array}\right).$$

Entonces, un isomorfismo F de álgebras de Lie graduadas entre $\mathfrak{o}(p,q)$ y $\mathfrak{so}(p+1,q+1,\mathbb{R})$ está dado por

$$F(x+y+z) = \Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi(y) + \Phi(z)$$

para $x \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}$, $y \in \tilde{\mathfrak{g}}_0$, $z \in \tilde{\mathfrak{g}}_1$.

d)

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R}) \mid M^t J + JM = 0\},$$

siendo

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right),$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & -A^t \end{array}\right) \in \mathfrak{g};\ A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \right\},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & Z \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g};\ Z \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})\ Z = Z^t \right\},$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline X & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g};\ X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})\ X = X^t \right\},$$

$$\epsilon = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -I \end{array}\right).$$

Este álgebra $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ tiene asociadas las estructuras casi-lagrangianas. El álgebra compleja análoga $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ y su geometría han sido estudiadas por Baston en [10].

La clasificación completa de álgebras de Lie reales (así como complejas) simples graduadas puede verse en [69] o en [90] o en el capítulo 2 de [34]. En particular, $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(1+n,\mathbb{H})$ (con la graduación análoga a la proyectiva real) da lugar a las estructuras cuaterniónicas generalizadas estudiadas por Salamon [96].

2.3 Espacios homogéneos semisimples llanos

Definición 2.3.1 *Diremos que un espacio homogéneo* $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$ *conexo es* semisimple llano *cuando el grupo de Lie* $\mathbf{L}$ *actúa transitiva y efectivamente sobre él por la izquierda, el álgebra de Lie* $\mathfrak{L}$ *de* $\mathbf{L}$ *es semisimple y graduada*

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

y el subgrupo $\mathbf{L}_0$ *tiene como álgebra de Lie a*

$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \, .$$

Nótese que el grupo de Lie $\mathbf{L}$ no es necesariamente conexo ni compacto. Sin embargo $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$ sí es necesariamente ambas cosas ya que Nagano [88] demostró que tales espacios son necesariamente espacios riemannianos simétricos de tipo compacto, bajo la acción del subgrupo compacto maximal K de $\mathbf{L}$.

Recordemos que si G es un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$, se definen el normalizador $\mathrm{N}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ y el normalizador $\mathrm{N}(\mathfrak{h}, G)$ de $\mathfrak{h}$ en G como la subálgebra de $\mathfrak{g}$ y el subgrupo de G dados, respectivamente, por

$$\mathrm{N}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \; ; \; \mathrm{ad}(X)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\},$$
$$\mathrm{N}(\mathfrak{h}, G) = \{a \in G \; ; \; \mathrm{Ad}(a)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\}.$$

Sean $\mathbf{G}_1$ y $\mathbf{G}_{-1}$ los subgrupos de Lie conexos de $\mathbf{L}$ cuyas álgebras de Lie son, respectivamente, $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_{-1}$ y sea $\mathbf{G}_0$ el subgrupo cerrado de $\mathbf{L}_0$ definido por

$$\mathbf{G}_0 = \mathrm{N}(\mathfrak{g}_0, \mathbf{L}) \cap \mathbf{L}_0 = \{a \in \mathbf{L}_0 ; \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0\},$$

cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}_0$. Diremos que $\mathbf{G}_0$ es el *grupo lineal de isotropía* de $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$. Además, se verifica (ver [90]) que $\mathbf{G}_0 = \mathrm{N}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathbf{L}) \cap \mathbf{L}_0$, es decir, que

$$\mathbf{G}_0 = \{a \in \mathbf{L}_0 ; \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)\mathfrak{g}_{-1} \subset \mathfrak{g}_{-1}\}.$$

Análogamente, $\mathbf{G}_0 = \mathrm{N}(\mathfrak{g}_1, \mathbf{L}) \cap \mathbf{L}_0$.

La representación lineal de isotropía de $\mathbf{L}_0$

$$l \colon a \in \mathbf{L}_0 \to l(a) \in GL(\mathfrak{g}_{-1})$$

está dada por

$$l(a)X = \mathrm{Ad}_L(a)X \mod(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1),$$

y su núcleo es $\mathbf{G}_1$, que es por ello un subgrupo normal de $\mathbf{L}_0$. Luego, l restringida a $\mathbf{G}_0$ es fiel, razón por la que podemos identificar $\mathbf{G}_0$ con un subgrupo de Lie de $GL(\mathfrak{g}_{-1})$.

Los siguientes resultados, que exponemos abreviadamente, pueden verse en [90].

Las aplicaciones exponenciales $\exp\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathbf{G}_{-1}$ y $\exp\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathbf{G}_1$ son biyectivas. Asimismo, $\mathbf{G}_0 \cap \mathbf{G}_1 = \{e\}$, siendo e el elemento neutro de $\mathbf{L}$. Todo elemento $a \in \mathbf{L}_0$ se puede expresar de modo único como $a = g \exp(z)$, con $g \in \mathbf{G}_0$ y $z \in \mathfrak{g}_1$; luego el grupo de Lie cociente $\mathbf{L}_0/\mathbf{G}_1$ es isomorfo a $\mathbf{G}_0$. La representación

$$\lambda\colon a \in \mathbf{G}_0 \to \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)_{|\mathfrak{g}_{-1}} \in GL(\mathfrak{g}_{-1})$$

es equivalente a la restricción $l_{|\mathbf{G}_0}$ de la representación lineal de isotropía y es inyectiva, lo que permite considerar a $\mathbf{G}_0$ como un subgrupo de Lie de $GL(\mathfrak{g}_{-1})$. Su diferencial, que también denotaremos por λ está dada por

$$\lambda\colon Y \in \mathfrak{g}_0 \to \mathrm{ad}(Y)_{|\mathfrak{g}_{-1}} = [Y, -] \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$$

(véase la sección 2.1), lo que permite identificar a $\mathfrak{g}_0$ con una subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$. El homomorfismo de álgebras de Lie $l\colon \mathfrak{L}_0 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$ inducido por l se seguirá denotando por la misma letra l. Denotaremos la inclusión de $\mathbf{G}_0$ en $\mathbf{L}_0$ por

$$i_0\colon \mathbf{G}_0 \to \mathbf{L}_0 \,.$$

Obviamente, i_0 induce el homomorfismo inclusión de $\mathfrak{g}_0$ en $\mathfrak{L}_0$. Nótese también [89] que

$$\mathbf{G}_0 = \{a \in \mathbf{L}_0 \; ; \; \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)\epsilon = \epsilon\} \,,$$

siendo ϵ el elemento característico de $\mathfrak{L}$ dado en la definición 2.1.2.

El grupo $\lambda(\mathbf{G}_0) \subset GL(\mathfrak{g}_{-1})$ actúa de forma natural sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ por la izquierda, y, por dualidad, sobre $\mathfrak{g}_1$ por la derecha. Definimos un homomorfismo

$$\varpi\colon \mathbf{L}_0 \to \mathbf{G}_0$$

mediante

$$\varpi\,(g \exp z) = g,$$

para $g \in \mathbf{G}_0$ y $z \in \mathfrak{g}_1$. Se verifica que

$$\lambda \circ \varpi = l \,,$$

pues para $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ y $z \in \mathfrak{g}_1$, es

$$\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(\exp z)x \; = x + [z, x] + \frac{1}{2}[z, [z, x]]$$

$$= x \quad \mathrm{mod}(\mathfrak{L}_0)\,.$$

En [106] se construye, de un modo abstracto, un espacio homogéneo semisimple llano para cada álgebra semisimple. Algunos ejemplos de espacios homogéneos semisimples llanos son los siguientes:

a) Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$. Cuando $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{F})$ el grupo de Lie $\mathbf{L}$ es el grupo proyectivo lineal general

$$PGL(p+q, \mathbb{F}) = GL(p+q, \mathbb{F})/\mathrm{centro}$$

y el grupo $\mathbf{L}_0$ es el subgrupo de isotropía de un p-plano,

$$\mathbf{L}_0 = \left\{ [a] \in \mathbf{L} \; ; \; a = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\},$$

mientras que

$$\mathbf{G}_0 = \left\{ [a] \in \mathbf{L}_0 \; ; \; a = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \right\}.$$

El grupo $\mathbf{G}_0$ es isomorfo a $GL(p, \mathbb{F}) \otimes GL(q, \mathbb{F})$ y actúa a través de la representación lineal de isotropía que está dada por $(P \otimes Q)(X) = QXP^{-1}$, $P \in GL(p, \mathbb{R})$, $Q \in GL(q, \mathbb{R})$, $X \in \mathfrak{g}_{-1} \equiv \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{F})$. El espacio homogéneo $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$ es la grassmanniana $\mathcal{G}_p(\mathbb{F}^n)$ de p-planos de $\mathbb{F}^n$.

Para $p > 1$, $q > 1$, las estructuras geométricas asociadas son las conocidas como estructuras casi-grassmannianas o producto tensor, estudiadas por primera vez por Hangan [48], [50] y Singer-Sternberg [101] (y también llamadas a veces estructuras grassmannianas). Para $p = 1$ o $q = 1$, $pq \geq 2$, se obtienen, para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, las estructuras proyectivas reales [68], [106], para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ las estructuras casi complejas [106] y para $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ las estructuras cuaterniónicas generalizadas, estudiadas por Salamon [96], quien muestra que este tipo de estructuras engloba casi todas las G-estructuras de tipo cuaterniónico habitualmente tratadas en la literatura.

b) El álgebra simple graduada $\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R})$ da lugar a las estructuras conformes. Para $p+q \geq 3$, $p+q = n$, sean

$$S_0 = \left(\begin{array}{c|c} I_p & \\ \hline & -I_q \end{array} \right),$$

$$S = \left(\begin{array}{c|c|c} & & -1 \\ \hline & S_0 & \\ \hline -1 & & \end{array}\right).$$

El álgebra de Lie

$$\mathfrak{o}(S) = \{M \in \mathfrak{gl}(p+q+2,\mathbb{R})\ ;\ M^tS + SM = 0\}$$

es isomorfa a $\mathfrak{so}(p+1,q+1,\mathbb{R})$, como se vio en la sección anterior, y es el álgebra del grupo de Lie

$$\mathbf{L} = O(S)/\{\pm I_{n+2}\} = \{a \in GL(\mathbb{R}^{n+2})\ ;\ a^tSa = S\}/\{\pm I_{n+2}\},$$

mientras que

$$\mathbf{L}_0 = \left\{ [a] \in \mathbf{L}\ ;\ a = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

La relación de equivalencia en el producto de dos esferas euclídeas definida por $(x,y) \sim (x',y')$ si y sólo si $x' = -x$, $y' = -y$, produce la variedad cociente

$$E_{p,q} = (S^p \times S^q)/\sim$$

que es difeomorfa a $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ y es un espacio homogéneo semisimple llano asociado a $\mathfrak{o}(S)$. Si

$$O(p,q) = \{x \in GL(\mathbb{R})\ ;\ x^tS_0x = S_0\},$$
$$CO(p,q) = \{x \in GL(\mathbb{R}^n)\ ;\ xtS_0x = aS_0 \ \text{ para }\ a > 0\},$$

el grupo lineal de isotropía del origen en $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ es

$$\mathbf{G}_0 = \{\left(\begin{array}{c|c|c} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & 0 \\ \hline 0 & 0 & a^{-1} \end{array}\right)\ ;\ a \in \mathbb{R} - \{0\}\ ,\ b \in O(p,q)\},$$

que es isomorfo a $CO(p,q)$.

d) Cuando $\mathfrak{L} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$, el espacio homogéneo $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$ es la *grassmanniana de n-planos lagrangianos* asociada a una forma simpléctica en $\mathbb{R}^{2n}$. El caso análogo complejo ha sido estudiado por Baston [10].

Otros ejemplos pueden verse en [89].

2.4 El tensor de Tanaka

Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ un álgebra de Lie semisimple graduada $\mathfrak{L}$. Identificamos $\mathfrak{g}_1$ con $(\mathfrak{g}_{-1})^*$ mediante

$$z \in \mathfrak{g}_1 \to B_{\mathfrak{L}}(-, z) \in (\mathfrak{g}_{-1})^*,$$

y definimos la aplicación bilineal $\Psi \colon \mathfrak{g}_{-1} \times (\mathfrak{g}_{-1})^* \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$ por

$$\Psi(x, z) = \lambda([x, z]) = [[x, z], -].$$

A la aplicación Ψ le podemos asociar un tensor de tipo (2,2), que seguiremos denotando por Ψ definido como sigue:

Definición 2.4.1 *El tensor $\Psi \colon \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\Psi(x, x', z, z') = B_{\mathfrak{L}}([[x, z], x'], z')$$

se llamará **tensor de Tanaka**.

Sea $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$ un espacio homogéneo semisimple llano asociado al álgebra de Lie semisimple graduada $\mathfrak{L}$ y sea $\mathbf{G}_0$ el grupo lineal de isotropía de $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$.

Si P es una $\mathbf{G}_0$-estructura sobre M, un campo de tensores de tipo (2,2) en P es una aplicación $f \colon P \to \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1$ verificando que $f(ua) = f(u)a$ para $u \in P$ y $a \in \mathbf{G}_0$. Es fácil ver que $\mathbf{G}_0$ está contenido en el grupo G_Ψ que deja invariante Ψ; un campo de tensores de tipo (2,2) asociado a Ψ está definido por

$$f_\Psi : u \in P \to f_\Psi(u) = \Psi$$

(véase [37]).

Notemos ahora que la graduación natural $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}} = (\mathfrak{g}_{-1} \oplus i\mathfrak{g}_{-1}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0) \oplus (\mathfrak{g}_1 \oplus i\mathfrak{g}_1)$ dota a $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ de una estructura de álgebra de Lie semisimple graduada compleja. Se tiene [59]

Lema 2.4.1 *El elemento caracterísco de $\mathfrak{L}$ y $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ es el mismo.*

La siguiente propiedad expresa que si Ψ_{ij}^{kl} son las coordenadas del tensor de Tanaka respecto de bases de $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$ duales con respecto a $B_{\mathfrak{L}}$, entonces la contracción $\sum_i \Psi_{ij}^{il}$ es un múltiplo de $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_{-1}}$.

Teorema 2.4.1 *Si* $\{x_i\ ;\ i=1,...,n\}$ *y* $\{z_i\ ;\ i=1,...,n\}$ *son bases de* $\mathfrak{g}_{-1}$ *y* $\mathfrak{g}_1$*, respectivamente, duales con respecto a la forma de Killing* B *de* $\mathfrak{L}$*, y si* Ψ_{ij}^{kl} *está dado por* $\Psi_{ij}^{kl} = B([[x_i, z_k], x_j], z_l)$*, entonces*

$$\sum_i \Psi_{ij}^{il} = -\frac{1}{2}\delta_j^l.$$

Demostración:

Supongamos en primer lugar que $\mathfrak{L}$ es un álgebra compleja. El tensor Ψ de Tanaka en el caso complejo se define del mismo modo que en el caso real.

Veamos entonces que el resultado no depende de las bases, duales con respecto a B, elegidas en $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$.

Sean $\{\tilde{x}_a\}$ y $\{\tilde{z}_b\}$ otras dos bases de $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$ respectivamente, duales con respecto a B; por tanto, $B(\tilde{x}_a, \tilde{z}_b) = \delta_b^a$. Pongamos

$$[[\tilde{x}_a, \tilde{z}_b], \tilde{x}_c] = \sum_d \Psi_{ac}^{bd} \tilde{x}_d,$$

y pongamos también

$$\tilde{x}_a = \sum_j \alpha_a^j x_j \quad , \quad \tilde{z}_b = \sum_i \beta_b^i z_i.$$

Entonces

$$\delta_b^a = B(\tilde{x}_a, \tilde{z}_b) = \sum_{i,j} \alpha_a^j \beta_b^i B(x_j, z_i) = \sum_{i,j} \alpha_a^j \beta_b^i \delta_i^j = \sum_i \alpha_a^i \beta_b^i.$$

Consideremos las matrices $A = (\alpha_a^j)$ y $B = (\beta_b^i)$. La condición anterior expresa que $AB^t = I$; por tanto, A y B^t son inversas, y también se verifica que $B^t A = I$; esto es

$$\sum_b \beta_b^i \alpha_b^j = \delta_i^j.$$

Por otra parte, poniendo

$$\Psi_{jl}^{ik} = \Psi(x_j, z_i, x_l, z_k), \qquad \Psi_{ac}^{bd} = \Psi(\tilde{x}_a, \tilde{z}_b, \tilde{x}_c, \tilde{z}_d),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi_{ac}^{bd} &= \Psi(\sum_j \alpha_a^j x_j, \sum_i \beta_b^i z_i, \sum_l \alpha_c^l x_l, \sum_k \beta_d^k z_k) \\ &= \sum_{i,j,k,l} \alpha_a^j \beta_b^i \alpha_c^l \beta_d^k \Psi_{jl}^{ik}.\end{aligned}$$

En consecuencia, utilizando lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_b \Psi_{bc}^{bd} &= \sum_b \sum_{i,j,k,l} \alpha_b^j \beta_b^i \alpha_c^l \beta_d^k \Psi_{jl}^{ik} \\ &= \sum_{i,j,k,l} \sum_b \alpha_b^j \beta_b^i \alpha_c^l \beta_d^k \Psi_{jl}^{ik} \\ &= \sum_{i,j,k,l} \delta_i^j \alpha_c^l \beta_d^k \Psi_{jl}^{ik} \\ &= \sum_{j,k,l} \alpha_c^l \beta_d^k \Psi_{jl}^{jk} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k,l} \alpha_c^l \beta_d^k \delta_l^k = -\frac{1}{2} \sum_k \alpha_c^k \beta_d^k = n\delta_d^c,\end{aligned}$$

y el resultado de que $\sum_i \Psi_{ij}^{il}$ sea múltiplo de $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_{-1}}$ no depende de las bases (duales con respecto a B) que se hayan elegido en $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$.

Siguiendo con la suposición de que $\mathfrak{L}$ es un álgebra compleja, según [90], pag. 170-171, se verifica que

$$\sum_{i=1}^{n} [x_i, z_i] = \frac{1}{2}\epsilon\,.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\sum_i \Psi_{ij}^{il} &= \sum_i B([[X_i, Z_i], X_j], Z_l) \\ &= B([\sum_i [X_i, Z_i], X_j], Z_l) \\ &= B([\frac{1}{2}\epsilon, X_j], Z_l) \\ &= -\frac{1}{2} B(X_j, Z_l) \\ &= -\frac{1}{2}\delta_j^l,\end{aligned}$$

y el resultado, en el caso complejo, es cierto. Finalmente, para $\mathfrak{L}$ real, el resultado se sigue del lema anterior, del hecho de que el resultado sea cierto para $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ y del hecho de que si $\{x_i\}$ y $\{z_j\}$ son bases de $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$ duales con respecto a B, ambas siguen siendo bases de ${\mathfrak{g}_{-1}}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus i\mathfrak{g}_{-1}$ y de

${\mathfrak{g}_1}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1 \oplus i\mathfrak{g}_1$ y también son duales con respecto a la forma de Killing $B_{\mathfrak{L}^{\mathbb{C}}}$ de $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$. $\square$

El tensor de Tanaka de $\mathfrak{L}$ (definición 2.4.1) se puede equivalentemente pensar como la aplicación

$$\Psi\colon (x, z, x') \in \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_{-1} \to \Psi(x, z)x' = [[x, z], x'] \in \mathfrak{g}_{-1}.$$

Bajo esta identificación, vamos a describir el tensor Ψ para algunas de las álgebras de Lie graduadas de la sección 2.3.

a) Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{R})$.

Si $x = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A & 0 \end{array}\right)$, $x' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A' & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_{-1}$, $z = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_1$, el tensor Ψ de Tanaka está dado para el álgebra $\mathfrak{L}$ por

$$\Psi(x, y)x' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline ABA' + A'BA & 0 \end{array}\right),$$

o bien, identificando x con $A \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{R})$, z con $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, x' con $A' \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{R})$, etc., obtenemos

$$\Psi(A, B)A' = ABA' + A'BA,$$

donde $ABA' + A'BA$ se puede considerar como un elemento de $\mathfrak{g}_{-1}$.

Es obvio que los mismos cálculos son válidos cambiando el cuerpo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$.

b) Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(n, n, \mathbb{R})$.

Si ponemos $x = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline -A & -A \end{array}\right)$, $x' = \left(\begin{array}{c|c} A' & A' \\ \hline -A' & -A' \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_{-1}$, y $z = \left(\begin{array}{c|c} B & -B \\ \hline B & -B \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_1$, el tensor Ψ de Tanaka resulta ser

$$\Psi(x, y)x' = 4\left(\begin{array}{c|c} ABA' + A'BA & ABA' + A'BA \\ \hline -(ABA' + A'BA) & -(ABA' + A'BA) \end{array}\right).$$

c) Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(p + 1, q + 1, \mathbb{R})$. Si

$$x = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & -A_1^t & 0 & A_2^t \\ \hline A_1 & 0 & A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_1^t & 0 & -A_2^t \\ \hline A_2 & 0 & A_2 & 0 \end{array}\right), \quad x' = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & -A_1'^t & 0 & A_2'^t \\ \hline A_1' & 0 & A_1' & 0 \\ \hline 0 & A_1'^t & 0 & -A_2'^t \\ \hline A_2' & 0 & A_2' & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_{-1},$$

$$z = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & B_1^t & 0 & B_2^t \\ \hline -B_1 & 0 & B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_1^t & 0 & B_2^t \\ \hline B_2 & 0 & -B_2 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_1,$$

entonces el tensor Ψ está dado por

$$\Psi(x,y)x' = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & -X_1^t & 0 & X_2^t \\ \hline X_1 & 0 & X_1 & 0 \\ \hline 0 & X_1^t & 0 & -X_2^t \\ \hline X_2 & 0 & X_2 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_{-1},$$

donde

$$X_1 = 2(A_1B_1^tA_1' + B_1A_1^tA_1' + A_1B_2^tA_2' + B_1A_2^tA_2' + A_1'A_1^tB_1 + A_1'A_2^tB_2),$$

$$X_2 = 2(A_2B_1^tA_1' + B_2A_1^tA_1' + A_2B_2^tA_2' + B_2A_2^tA_2' + A_2'A_1^tB_1 + A_2'A_2^tB_2).$$

d) Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$.

Si $x = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A & 0 \end{array}\right)$, $x' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A' & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_{-1}$, $z = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_1$, el tensor Ψ está dado por

$$\Psi(x,y)x' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline ABA' + A'BA & 0 \end{array}\right).$$

2.5 Conexiones lineales equivalentes

Definición 2.5.1 *Sea $f\colon G \to GL(n,\mathbb{R})$ un subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{G}$ el álgebra de Lie de G, $f_*\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ la representación inyectiva de su álgebra de Lie inducida por f y $P \subset \mathcal{F}M$ una $f(G)-$estructura (es decir la restricción de π_0^1 a P determina un f(G)-subfibrado de $\mathcal{F}M$). La* **forma canónica** *de P es la 1-forma $\theta \in \bigwedge^1(P,\mathbb{R}^n))$ que para todo $z \in P$ y todo $v \in T_zP$ verifica*

$$\theta_z(v) = z^{-1}\big(\pi_P*(z)v\big)\,.$$

Si por un momento denotamos por θ_P a la forma canónica de P y por θ a la forma canónica de $\mathcal{F}M$ (que corresponde al caso en que f es la identidad de $GL(n,\mathbb{R})$) entonces es inmediato que

$$\theta_P = i_P^*\theta\,,$$

siendo i_P la inclusión de P en $\mathcal{F}M$. A través de f, podemos también considerar a P como un G-fibrado principal. Se tiene entonces que la forma canónica θ de P es la única 1-forma en $\bigwedge^1(P,\mathbb{R}^n)$ que se anula sobre los vectores tangentes a las fibras de P y verifica que para todo $a \in G$ es

$$R_a^*\theta = f(a^{-1})\theta\,.$$

Sean $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ un álgebra de Lie semisimple graduada y B su forma de Killing. Identifiquemos $\mathbb{R}^n$ con $\mathfrak{g}_{-1}$ y $(\mathbb{R}^n)^*$ con $\mathfrak{g}_1$.

Si $\mathbf{G}_0$ denota, como antes, el grupo lineal de isotropía asociado a un espacio homogéneo semisimple llano, la siguiente definición incluye la equivalencia de conexiones conforme y proyectiva de Weyl. Está sacada de [106] y [90], pero la vamos a extender a conexiones no necesariamente adaptadas a la $\mathbf{G}_0$-estructura

Definición 2.5.2 *Sea $\mathcal{F}M$ el fibrado de referencias de una variedad M dotada de una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$. Dos formas de conexión $\tilde{\omega}, \omega \in \bigwedge^1(\mathcal{F}M, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ (no necesariamente adaptadas a P)son equivalentes si y sólo si existe un campo de tensores de tipo $(0,1)$*

$$F\colon \mathcal{F}M \to \mathbb{R}^{n*} \equiv \mathfrak{g}_1$$

tal que, para todo $A \in \mathfrak{X}(\mathcal{F}M)$ y para todo $u \in P$ se verifica

$$\tilde{\omega}(A)_u - \omega(A)_u = [\theta_u(A), F(u)],$$

donde θ es la forma canónica de P.

Sea $\Psi \in \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathfrak{g}_{-1} \otimes \mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1$ el tensor de Tanaka (definido en la sección 2.4) y sean $\tilde{\nabla}$ y ∇ las derivadas covariantes con respecto a $\tilde{\omega}$ y ω respectivamente. Sea $\Delta = \tilde{\nabla} - \nabla$ el tensor diferencia, que es un tensor de tipo (1,2). Si, en coordenadas, escribimos $\Delta = \Delta^i_{jk}$ y $\Psi = \Psi^{ih}_{jk}$, es fácil ver [112], que

Lema 2.5.1 *Las conexiones lineales $\tilde{\omega}$ y ω son equivalentes si y sólo si*

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \Psi(X,\varphi)Y$$

siendo φ la 1-forma diferencial que determina $F\colon \mathcal{F}M \to \mathfrak{g}_1$. Es decir, el tensor diferencia Δ de dos conexiones equivalentes se expresa así como una contracción del tensor de Tanaka:

$$\Delta^i_{jk} = \Psi^{ih}_{jk}\varphi_h\,.$$

En lo que sigue, denotaremos con letras vocales a los elementos de $\mathfrak{g}_{-1}$ y con consonantes a los elementos de $\mathfrak{g}_1$. De la identidad de Jacobi se siguen inmediatamente las identidades

$$
\begin{aligned}
[[a,b],e] &= [[e,b],a],\\
[[b,a],c] &= [[c,a],b],\\
[[b,a],e] &= [[b,e],a],\\
[[a,b],c] &= [[a,c],b],\\
[e,[a,b]] &= [a,[e,b]],\\
[c,[b,a]] &= [b,[c,a]],\\
[e,[b,a]] &= [a,[b,e]],\\
[c,[a,b]] &= [b,[a,c]],
\end{aligned}
$$

que usaremos reiteradamente.

Lema 2.5.2 *Se verifica que*

$$
\begin{aligned}
&B([[[[a,b],e],c],i],d) + B([[[[a,c],e],b],i],d)\\
&-B([[[[a,d],i],c],e],b) - B([[[[e,d],i],c],a],b) = 0,
\end{aligned}
$$

para cualesquiera $a,\ e,\ i \in \mathfrak{g}_{-1},\ b,\ c,\ d \in \mathfrak{g}_1$.

Demostración:

Recordemos que, en general, la forma de Killing B verifica que

$$B([X,Y],Z) + B(Y,[X,Z]) = 0 \quad X,Y,Z \in \mathfrak{L}.$$

Usando lo anterior tenemos que

$$B([[[[a,b],e],c],i],d) = B([[i,c],[[a,b],e]],d) = -B([[a,b],e],[[i,c],d])$$

y, análogamente

$$
\begin{aligned}
B([[[[a,c],e],b],i],d) &= -B([[a,c],e],[[i,b],d]),\\
B([[[[a,d],i],c],e],b) &= -B([[a,d],i],[[e,c],b]),\\
B([[[[e,d],i],c],a],b) &= -B([[e,d],i],[[a,c],b]).
\end{aligned}
$$

En consecuencia se sigue que

$$\begin{aligned} B([[[[a,b],e],c],i],d) &+ B([[[[a,c],e],b],i],d) \\ -B([[[[a,d],i],c],e],b) &- B([[[[e,d],i],c],a],b) \\ = -B([[a,b],e],[[i,c],d]) &- B([[a,c],e],[[i,b],d]) \\ +B([[a,d],i],[[e,c],b]) &+ B([[e,d],i],[[a,c],b]) \\ = -B([[a,b],e],[[i,d],c]) &- B([[a,c],e],[[i,d],b]) \\ +B([[i,d],a],[[e,c],b]) &+ B([[i,d],e],[[a,c],b]) \\ = B([[a,b],e],[c,[i,d]]) &+ B([[a,c],e],[b,[i,d]]) \\ -B([[e,c],b],[a,[i,d]]) &- B([[a,c],b],[e,[i,d]]) \\ = -B([c,[[a,b],e]],[i,d]) &- B([b,[[a,c],e]],[i,d]) \\ +B([a,[[e,c],b]],[i,d]) &+ B([e,[[a,c],b]],[i,d]) \end{aligned}$$

$$= B(-[c,[[a,b],e]] - [b,[[a,c],e]] + [a,[[e,c],b]] + [e,[[a,c],b]],[i,d]).$$

Ahora bien, de la identidad de Jacobi resulta

$$-[c,[[a,b],e]] - [b,[[a,c],e]] + [a,[[e,c],b]] + [e,[[a,c],b]]$$

$$= -[c,[[e,b],a]] - [b,[[a,c],e]] + [a,[[e,b],c]] + [e,[[a,c],b]]$$

$$= -[c,[[e,b],a]] - [b,[[a,c],e]] - [[e,b],[c,a]]$$

$$-[c,[a,[e,b]]] - [[a,c],[b,e]] - [b,[e,[a,c]]]$$

$$= -[c,[[e,b],a]] - [b,[[a,c],e]] - [[e,b],[c,a]]$$

$$+[c,[[e,b],a]] - [[a,c],[b,e]] + [b,[[a,c],e]]$$

$$= -[[e,b],[c,a]] - [[a,c],[b,e]] = 0.$$

de donde se concluye el resultado. $\square$

Proposición 2.5.1 *Sean* $\{x_i\,;\ i = 1,\ldots,n\}$ *base de* $\mathfrak{g}_{-1}$ *y* $\{z_j\,;\ j = 1,\ldots,n\}$ *base de* $\mathfrak{g}_1$ *duales con respecto a la forma de Killing* $B = B_{\mathfrak{L}}$ *del álgebra graduada semisimple* $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$*, es decir* $B(x_i, z_j) = \delta^i_j$*. Las componentes del tensor de Tanaka* Ψ *respecto a ambas bases verifican la identidad*

$$\Psi^{ui}_{jk}\Psi^{hv}_{ua} + \Psi^{hu}_{jk}\Psi^{iv}_{ua} - \Psi^{hi}_{uk}\Psi^{uv}_{ja} - \Psi^{hi}_{ju}\Psi^{uv}_{ka} = 0.$$

Demostración:

Se tiene que

$$
\begin{aligned}
B([[[[x_j, z_i], x_k], z_h], x_a], z_v) &= B([[\Psi^{iu}_{jk} x_u, z_h], x_a], z_v) \\
= \Psi^{iu}_{jk} B([[x_u, z_h], x_a], z_v) &= \Psi^{iu}_{jk} B(\Psi^{hw}_{ua} x_w, z_v) \\
= \Psi^{iu}_{jk} \Psi^{hw}_{ua} B(x_w, z_v) &= \Psi^{iu}_{jk} \Psi^{hw}_{ua} \delta^v_w = \Psi^{iu}_{jk} \Psi^{hv}_{ua}.
\end{aligned}
$$

Utilizando esta última fórmula y las simetrías de Ψ

$$\Psi^{iu}_{jk} \Psi^{hv}_{ua} = B([[[[x_j, z_i], x_k], z_h], x_a], z_v),$$

$$\Psi^{hu}_{jk} \Psi^{iv}_{ua} = B([[[[x_j, z_h], x_k], z_i], x_a], z_v),$$

$$\Psi^{hi}_{uk} \Psi^{uv}_{ja} = \Psi^{uv}_{ja} \Psi^{hi}_{uk} = \Psi^{vu}_{ja} \Psi^{hi}_{uk}$$

$$= B([[[[x_j, z_v], x_a], z_h], x_k], z_i),$$

$$\Psi^{hi}_{ju} \Psi^{uv}_{ka} = \Psi^{uv}_{ka} \Psi^{hi}_{ju} = \Psi^{vu}_{ka} \Psi^{hi}_{uj}$$

$$= B([[[[x_k, z_v], x_a], z_h], x_j], z_i),$$

y el resultado buscado se sigue del lema anterior.

□

Teorema 2.5.1 *Sean M una variedad dotada de una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$, $\tilde{\omega}$ y ω las 1-formas de conexión sobre $\mathcal{F}M$ de dos conexiones lineales sobre M equivalentes (no necesariamente adaptadas a P) y $\tilde{\nabla}$, ∇ las respectivas leyes de derivación covariante asociadas. Entonces las derivadas covariantes respecto a ambas del tensor de Tanaka coinciden, es decir,*

$$\tilde{\nabla}\Psi = \nabla\Psi.$$

Demostración:

Para una referencia móvil $\{X_1, \ldots, X_n\}$ adaptada a la $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ (es decir para una sección local de P definida un abierto de M) es conocido que, si $\nabla_{X_j} X_i = \gamma^h_{ij} X_h$ y $\tilde{\nabla}_{X_j} X_i = \tilde{\gamma}^h_{ij} X_h$ entonces

$$\Psi^{hi}_{jk,\,a} = (\nabla_{X_a}\Psi)^{hi}_{jk} = X_a(\Psi^{hi}_{jk})$$

$$+\gamma^h_{ua}\Psi^{ui}_{jk} + \gamma^i_{ua}\Psi^{hu}_{jk} - \gamma^u_{ja}\Psi^{hi}_{uk} - \gamma^u_{ka}\Psi^{hi}_{ju}.$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{X_a}\Psi \,-\, \nabla_{X_A}\Psi)^{hi}_{jk} &= (\tilde{\gamma}^h_{ua} - \gamma^h_{ua})\Psi^{ui}_{jk} + (\tilde{\gamma}^i_{ua} - \gamma^i_{ua})\Psi^{hu}_{jk} \\
&-(\tilde{\gamma}^u_{ja} - \gamma^u_{ja})\Psi^{hi}_{uk} - (\tilde{\gamma}^u_{ka} - \gamma^u_{ka})\Psi^{hi}_{ju}.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, como $\tilde{\omega}$ y ω son equivalentes, entonces se verifica que

$$\tilde{\gamma}^i_{jk} - \gamma^i_{jk} = \Psi^{iv}_{jk}\zeta_v\,,$$

de tal modo que

$$(\tilde{\nabla}_{X_a}\Psi - \nabla_{X_a}\Psi)^{hi}_{jk} = \{\Psi^{ui}_{jk}\Psi^{hv}_{ua} + \Psi^{hu}_{jk}\Psi^{iv}_{ua} - \Psi^{hi}_{uk}\Psi^{uv}_{ja} - \Psi^{hi}_{ju}\Psi^{uv}_{ka}\}\zeta_v,$$

que es nulo, pues por la proposición previa

$$\Psi^{ui}_{jk}\Psi^{hv}_{ua} + \Psi^{hu}_{jk}\Psi^{iv}_{ua} - \Psi^{hi}_{uk}\Psi^{uv}_{ja} - \Psi^{hi}_{ju}\Psi^{uv}_{ka} = 0.$$

$\square$

Sean $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$ un espacio homogéneo semisimple llano asociado al álgebra de Lie semisimple graduada $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, $\mathbf{G}_0$ su grupo lineal de isotropía y $G_\Psi \subset GL(\mathbb{R}^n)$ el subgrupo cerrado que deja invariante Ψ. Hangan [52] demostró:

Teorema 2.5.2 *El grupo $\mathbf{G}_0$ está contenido en G_Ψ y las álgebras de Lie de ambos grupos coinciden, es decir, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_\Psi$.*

Sea M una variedad de dimensión $n = \dim(\mathfrak{g}_{-1})$. Sea $\pi_P \colon P \to M$, con $P \subset \mathcal{F}M$ una $\mathbf{G}_0$-estructura sobre M. El teorema anterior expresa que P es esencialmente una G-estructura de tipo tensorial (véase la definición de este concepto en [37]). En consecuencia,

Corolario 2.5.1 *Una conexión lineal sobre M es adaptada a la $\mathbf{G}_0$-estructura P si y sólo si su ley de derivación covariante asociada ∇ verifica*

$$\nabla\Psi = 0.$$

Para conexiones adaptadas (es decir, que toman valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ de $\mathbf{G}_0$) la definición de conexiones equivalentes se expresa por tanto del modo siguiente:

Definición 2.5.3 *Si χ y χ' son conexiones lineales adaptadas sobre P, se dice que son* **conexiones equivalentes** *si existe un tensor de tipo (0,1) $F \colon P \to \mathfrak{g}_1$ (es decir, $F(za) = F(z)a$, $z \in P$, $a \in \mathbf{G}_0$) verificando*

$$\chi'(V)_u - \chi(V)_u = [\theta_u(V), F(u)] \in \mathfrak{g}_0, \quad V \in T_u(\mathcal{F}M),$$

donde θ es la forma canónica de P.

Sea ahora $X_p \in T_p(M)$ y sea $u \in (\pi_P)^{-1}(p)$. La 1-forma diferencial φ_F asociada a F está dada por

$$\varphi_F(X_p) = F(u)(u^{-1}(X_p)),$$

donde $u\colon \mathfrak{g}_{-1} \to T_p(M)$ es una referencia de M (perteneciente a P) y $F(u) \in \mathfrak{g}_1 \cong (\mathfrak{g}_{-1})^*$.

La clase de equivalencia de una conexión adaptada χ se denotará por $[\chi]$. Cada par $(\mathcal{F}M, [\chi])$ se dirá una clase de conexiones adaptadas equivalentes en la $\mathbf{G}_0$-estructura P sobre M.

Definición 2.5.4 *Si M' es otra variedad diferenciable n-dimensional con fibrado de referencias $\mathcal{F}(M')$ y forma canónica θ', y si $(\mathcal{F}(M'), [\chi'])$ es una clase de conexiones adaptadas equivalentes en una $\mathbf{G}_0$-estructura P' sobre M', un isomorfismo de fibrados $\Phi\colon \mathcal{F}M \to \mathcal{F}(M')$ se dice un* **$\mathbf{G}_0$-isomorfismo** *de $(\mathcal{F}M, [\chi])$ en $(\mathcal{F}(M'), [\chi'])$ si se verifica que $\Phi^*\theta' = \theta$ (lo que equivale a que $\Phi(P) = P'$) y $[\Phi^*\chi'] = [\chi]$, donde $\Phi^*\chi'$ es la 1-forma de conexión (adaptada) sobre $\mathcal{F}M$ inducida por Φ.*

Sea P una $\mathbf{G}_0$-estructura sobre M. Introducimos una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones campo básico en P (es decir, en el conjunto de aplicaciones lineales $B\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{X}(P)$ tales que $\theta(B(\xi)) = \xi$ y $R_{a*}B(\xi) = B(a^{-1}\xi)$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}_{-1}$ y $a \in \mathbf{G}_0$) como sigue:

Definición 2.5.5 *Dadas dos aplicaciones campo básico B_1 y B_2 en P, diremos que B_1 y B_2 son equivalentes ($B_1 \sim B_2$) si y sólo si existe una 1-forma $F\colon P \to \mathfrak{g}_1$ sobre M tal que*

$$B_2(\xi)_x = B_1(\xi)_x + [F_x, \xi]^*_x, \quad x \in P\ ,\ \xi \in \mathfrak{g}_{-1}.$$

Esto define una relación de equivalencia entre tales aplicaciones B.

Proposición 2.5.2 [106] *Las conexiones lineales ω_1 y ω_2 asociadas a dos aplicaciones campo básico B_1 y B_2 son equivalentes si y sólo si $B_1 \sim B_2$.*

La 1-forma F está determinada de modo único por B_1 y B_2; dadas una aplicación campo básico B_1 en P y una 1-forma F sobre M, la aplicación lineal B_2 de $\mathfrak{g}_{-1}$ en $\mathfrak{X}(P)$ definida por

$$B_2(\xi)_x = B_1(\xi)_x + [F_x, \xi]^*_x$$

es una aplicación campo básico en P [106]. Más aun, como para cualesquiera $x, x' \in \mathfrak{g}_{-1}$ y $z \in \mathfrak{g}_1$ es $[[z,x],x'] = [[z,x'],x]$, se sigue que si $B_1 \sim B_2$, entonces los campos de tensores de torsión de las dos conexiones coinciden.

Si B es una aplicación campo básico en P, se puede encontrar, para cada $x \in P$ y ξ, $\xi' \in \mathfrak{g}_{-1}$, un único par $(T_x(\xi,\xi'), R_x(\xi,\xi'))$ de elementos de $\mathfrak{g}_{-1}$ y de $\mathfrak{g}_0$ tales que

$$[B(\xi), B(\xi')]_x = B(T_x(\xi,\xi'))_x + R_x(\xi,\xi')^*_x.$$

Los elementos $T_x(\xi,\xi')$ y $R_x(\xi,\xi')$ son bilineales y antisimétricos con respecto a las dos variables ξ y ξ'. Las aplicaciones $T\colon x \in P \to T_x \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_{-1})$ y $R\colon x \in P \to R_x \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_0)$ son campos de tensores de tipo $(1,2)$ y de tipo $(1,3)$ respectivamente, es decir

$$T_{xa}(\xi,\xi') = a^{-1}T_x(a\xi, a\xi'),$$
$$R_{xa}(\xi,\xi') = a^{-1}R_x(a\xi, a\xi'),$$

para $a \in \mathfrak{g}_0$, y son los habituales campos de tensores de torsión y de curvatura de la conexión ω asociada a B.

2.6 El complejo de Spencer

Sean G un subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(V,V)$, donde $V = \mathbb{R}^n$.

Definición 2.6.1 *Las* **prolongaciones** $\mathfrak{g}^{(k)}$ *de* $\mathfrak{g}$ *se definen por*

$$\mathfrak{g}^{(-1)} = \mathbb{R}, \ \ \mathfrak{g}^{(0)} = V,$$

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \{t \in \mathrm{Hom}(V,\mathfrak{g})\ ;\ t(v)(w) = t(w)(v), \ \ u,v \in V\},$$
$$\mathfrak{g}^{(k)} = (\mathfrak{g}^{(k-1)})^{(1)}, \ \ k \geq 2.$$

Recordemos que $\Lambda^k(V^*)$ denota el conjunto de aplicaciones k-multilineales $f\colon V\times \overset{k)}{\cdots} \times V \to \mathbb{R}$ que son antisimétricas, mientras que el conjunto análogo de aplicaciones k-multilineales simétricas se denota por $S^k(V^*)$.

Definición 2.6.2 *Si consideramos* $\mathfrak{g}^{(k-1)}$ *como un subespacio de* $V \otimes S^k(V^*)$, *el* **complejo de Spencer** *de* $\mathfrak{g}$, $(\mathcal{C}^{p,q}(\mathfrak{g}),\delta)$, *está dado por*

$$\mathcal{C}^{p,q}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(p-1)} \otimes \bigwedge^q (V^*) \ \ , \ \ \delta = \delta^{p,q}\colon \mathcal{C}^{p,q}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{C}^{p-1,q+1}(\mathfrak{g}),$$

$$\delta(\xi)(v_1,...,v_{q+1};\, w_1,...,w_{p-1}) = \sum_{a=1}^{q+1}(-1)^a \xi(v_1,...,\hat{v}_a,...,v_{q+1};\, v_a, w_1,...,w_{p-1}),$$

para $\xi \in \mathcal{C}^{p,q}(\mathfrak{g}) \subset V \otimes S^p(V^*) \otimes \bigwedge^q(V^*)$, $v_1,...,v_{q+1}, w_1,...,w_{p-1} \in V = \mathbb{R}^n$.

En la definición anterior, el símbolo ^ denota omisión.

Puesto que $\delta \circ \delta = 0$, podemos obtener los llamados grupos de cohomología de Spencer definidos por

$$H^{p,q}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}(\delta^{p,q})/\mathrm{Im}(\delta^{p+1,q-1}).$$

El grupo G tiene una representación α_q en cada $\mathcal{C}^{p,q}(\mathfrak{g})$ definida, para $a \in G$ y $\xi \in \mathcal{C}^{p,q}(\mathfrak{g})$, como

$$\alpha_q(a)(\xi)(v_1, ..., v_q; w_1, ..., w_p) = a(\xi(a^{-1}v_1, ..., a^{-1}v_q; a^{-1}w_1, ..., a^{-1}w_p)).$$

Estas representaciones satisfacen $\alpha_{q+1}(a) \circ \delta = \delta \circ \alpha_q(a)$, $\alpha_q(a)(\mathrm{Im}(\delta)) \subset \mathrm{Im}(\delta)$ y $\alpha_q(a)(\mathrm{Ker}(\delta)) \subset \mathrm{Ker}(\delta)$ (véase [37]). Por tanto, inducen representaciones $\bar{\alpha_q}$ de G en $H^{p,q}(\mathfrak{g})$. Es bien conocido que el tensor de estructura de Bernard [12] de una G-estructura P sobre una variedad n-dimensional M es un tensor de tipo $(\bar{\alpha_2}, H^{0,2}(\mathfrak{g}))$. Este tensor se puede expresar vía el tensor de torsión de una G-conexión y se anula si y sólo si existe una G-conexión sobre M con torsión cero. Por otra parte, $H^{1,1}(\mathfrak{g})$ es nulo y por ello $\bar{\alpha_1}$ es trivial. Sin embargo, mostraremos más adelante que esta laguna se puede evitar, porque la representación α_1 induce otra representación $[\alpha_1]\colon G \to GL(\mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}^{(1)})$ dada por $[\alpha_1](g)([t]) = [\alpha_1(g)(t)]$, donde $[t]$ denota la clase de equivalencia de $t \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g})$ en $\mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}^{(1)}$. Notemos además que, de la definición de $\mathcal{C}^{p,q}(\mathfrak{g})$ se tiene, en particular, que $\mathcal{C}^{2,0}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(1)}$ y $\mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g})$. Asimismo, dado $t \in \mathfrak{g}^{(1)}$ es $\delta(t) = -t$, con lo cual, la representación $[\alpha_1]$ es una representación de G en el espacio cociente

$$\frac{\mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g})}{\delta\mathcal{C}^{2,0}(\mathfrak{g})} = \frac{\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g})}{\delta(\mathfrak{g}^{(1)})} = \frac{\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g})}{\mathfrak{g}^{(1)}}.$$

2.7 Una representación equivalente a $[\alpha_1]$

En lo que sigue, $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$ denotará un espacio homogéneo semisimple llano asociado al álgebra de Lie semisimple graduada $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, y mantendremos las notaciones de las secciones anteriores. Nuestra intención es la construcción de un subespacio suplementario $\mathbf{G}_0$-invariante de $\mathfrak{g}_0^{(1)}$ en $\mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_0)$, así como una representación en tal suplementario que sea equivalente a la representación $[\alpha_1]$ introducida en las dos secciones anteriores. Sea ϵ el elemento característico de $\mathfrak{L}$, dado en la definición 2.1.2, y denotemos por B a la forma de Killing de $\mathfrak{L}$. Recordemos que la representación lineal de isotropía $Y \in \mathfrak{g}_0 \longrightarrow [Y, -] = (\mathrm{ad}\ Y)_{|\mathfrak{g}_1} \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$ permite identificar a $\mathfrak{g}_0$ con una subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$.

Sea $t \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_0) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)$; para $x \in \mathfrak{g}_{-1}$, denotaremos

$$\beta_t(x) = B(\epsilon, t(x)) \in \mathbb{R},$$

obteniendo así una forma lineal β_t sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ asociada a t

$$\beta_t \colon x \in \mathfrak{g}_{-1} \longrightarrow \beta_t(x) = B(\epsilon, t(x)) \in \mathbb{R},$$

que obviamente es lineal porque t es lineal y B es bilineal. Definimos la aplicación lineal

$$\beta \colon t \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0) \to \beta_t \in (\mathfrak{g}_{-1})^*.$$

Cuando no exista confusión, a la restricción $\beta_{|\mathfrak{g}_0^{(1)}}$ de la aplicación β a $\mathfrak{g}_0^{(1)}$ la denotaremos por β.

Consideremos el subespacio de $\mathfrak{g}_0$ definido por

$$\mathfrak{a} = \{y \in \mathfrak{g}_0 \ ; \ B_{\mathfrak{L}}(\epsilon, y) = 0\} \subset \mathfrak{g}_0.$$

Lema 2.7.1 *El subespacio $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}_0$ que está estrictamente contenido en $\mathfrak{g}_0$ y que contiene al ideal semisimple $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ de $\mathfrak{g}_0$.*

Demostración:

Puesto que el conjunto $\{[y, y'] \ ; \ y, y' \in \mathfrak{g}_0\}$ genera $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ y B es bilineal, bastará trabajar con elementos de la forma $[y, y']$, $y \in \mathfrak{a}$, $y' \in \mathfrak{g}_0$. Sean, pues, $y \in \mathfrak{a}$, $y' \in \mathfrak{g}_0$. Entonces,

$$B(\epsilon, [y, y']) = B([\epsilon, y], y') = B(0, y') = 0,$$

y por tanto, $[y, y'] \in \mathfrak{a}$, lo cual prueba que $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}_0$. Además, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{a}$ porque dado $y = [y', y''] \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], y', y'' \in \mathfrak{g}_0$, entonces,

$$B(\epsilon, [y', y'']) = B([\epsilon, y'], y'') = B(0, y'') = 0.$$

Así, $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}_0$ que contiene al ideal $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ de $\mathfrak{g}_0$. Además, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}_0$ porque $\epsilon \in \mathfrak{g}_0$ y

$$B(\epsilon, \epsilon) = 2\dim(\mathfrak{g}_{-1}) \neq 0.$$

Luego $\epsilon \notin \mathfrak{a}$. □

Notemos que cuando $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ es un ideal maximal en $\mathfrak{g}_0$, se tiene que

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0].$$

Notemos también que las primeras prolongaciones de $\mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{a}$ están dadas por

$$\mathfrak{g}_0^{(1)} = \{t \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0) \ ; \ [t(x), x'] = [t(x'), x], \ x, x' \in \mathfrak{g}_{-1}\},$$
$$\mathfrak{a}^{(1)} = \{t \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{a}) \ ; \ [t(x), x'] = [t(x'), x], \ x, x' \in \mathfrak{g}_{-1}\}.$$

Lema 2.7.2 *Bajo la identificación* $\beta_{|\mathfrak{g}_0^{(1)}} \equiv \beta$ *se verifica que* $\ker(\beta) = \mathfrak{a}^{(1)} \supset [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)}$*; en particular,* β *es inyectiva si y sólo si* $\mathfrak{a}^{(1)} = 0$*.*

Demostración:
Es claro que $\mathfrak{a}^{(1)} \subset \mathfrak{g}_0^{(1)}$. Sea $t \in \mathfrak{a}^{(1)}$. Entonces, para todo $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ es $t(x) \in \mathfrak{a}$, es decir,

$$B(\epsilon, t(x)) = 0, \quad x \in \mathfrak{g}_{-1},$$

y $\beta_t(x) = 0$ para $x \in \mathfrak{g}_{-1}$. Por tanto, $t \in \ker(\beta)$.

Recíprocamente, sea $t \colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_0$, $t \in \ker(\beta)$. Eso significa que

$$[t(x), x'] = [t(x'), x], \ \ x, x' \in \mathfrak{g}_{-1},$$

$$B(\epsilon, t(x)) = 0, \ \ x \in \mathfrak{g}_{-1}.$$

La segunda de las condiciones implica que $t(x) \in \mathfrak{a}$ para todo $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ y por ello, podemos pensar t como una aplicación $t \colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{a}$ tal que $[t(x), x'] = [t(x'), x]$ para cualesquiera $x, x' \in \mathfrak{g}_{-1}$. □

Se puede probar (véase [69]) que para cualquier álgebra de Lie real simple graduada clásica $\mathfrak{L}$ (con coeficientes en $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$) se verifica que el centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ de $\mathfrak{g}_0$ tiene dimensión uno o dimensión dos. En concreto, si $\mathfrak{L}$ es $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$, $\mathfrak{so}(n, n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(n, n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{su}^*(2p+2q, \mathbb{H})$, $\mathfrak{so}^*(4n) = \mathfrak{so}(n, n, \mathbb{H})$ o $\mathfrak{sp}(n, n, \mathbb{H})$, es

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \langle \{\epsilon\} \rangle \, ,$$

mientras que si $\mathfrak{L}$ es $\mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(p+q+2, \mathbb{C})$ o $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, es

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \langle \{\epsilon, i\epsilon\} \rangle \, .$$

En virtud de la clasificación de las álgebras de Lie simples graduadas [69] se tiene que para cualquier álgebra de Lie real simple graduada clásica es

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0],$$

$$\ker(\beta) = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)}.$$

Del lema 2.7.2 se sigue que si $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ es maximal en $\mathfrak{g}_0$, entonces $\ker(\beta) = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)}$ y β será inyectiva si y sólo si $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)} = 0$. Los dos resultados muestran que:

Lema 2.7.3 *Si* $\mathfrak{L}$ *es un álgebra de Lie real simple graduada (clásica o no), entonces* $\ker(\beta) = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)}$*.*

En particular, para todas las álgebras de la sección 2.2 se verifica que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ es maximal en $\mathfrak{g}_0$, y por tanto, para esas álgebras se tiene que $\ker(\beta) = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)}$.

Sea $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$ un álgebra de Lie de endomorfismos de un espacio vectorial V de dimensión finita. Sean $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{k}$ subálgebras de Lie de $\mathfrak{g}$ tales que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$. Dado $t \in \mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g})$, pongamos $t(u) = t_{\mathfrak{h}}(u) + t_{\mathfrak{k}}(u)$, con $t_{\mathfrak{h}}(u) \in \mathfrak{h}$ y $t_{\mathfrak{k}}(u) \in \mathfrak{k}$, $u \in V$. Entonces

$$\mathfrak{h}^{(1)} = \{t \in \mathfrak{g}^{(1)} \ ; \ t_{\mathfrak{h}} = 0\}.$$

En particular,

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)} = \{t \in \mathfrak{g}_0 \ ; \ t_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)} = 0\},$$
$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)^{(1)} = \{t \in \mathfrak{g}_0 \ ; \ t_{[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]} = 0\}.$$

Proposición 2.7.1 *Si* $\dim(\mathfrak{g}_1) \geq 2$, *es* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)^{(1)} = 0$.

Demostración:

Supongamos ahora que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) = \langle\{\epsilon\}\rangle$ y sea $t \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)^{(1)}$. Dados $x, x' \in \mathfrak{g}_{-1}$, como $t(x) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) = \langle\{\epsilon\}\rangle$, existe un número real ν tal que

$$[t(x), x'] = [\nu\epsilon, x'] = \nu[\epsilon, x'] = \nu x'$$

y, análogamente, existe ν' tal que

$$[t(x'), x] = \nu' x$$

de tal modo que si $\dim(\mathfrak{g}_{-1}) \geq 2$, tomando x y x' linealmente independientes, la condición $[t(x), x'] = [t(x'), x]$ obliga a que $\nu = 0$ y $t = 0$. Así, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)^{(1)} = 0$. De modo similar, si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) = \langle\{\epsilon, i\epsilon\}\rangle$ se obtiene el mismo resultado.

□

Notemos, además, que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)}$ puede no ser nulo, por ejemplo, si $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(1 + n - 1, \mathbb{R})$, o bien, si $\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(n, n; \mathbb{R})$, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(n, n; \mathbb{R})$. Entonces,

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_2 & A_1 \end{array} \right) ; \ A_1 = -A_1^t, \ A_2 = A_2^t \right\},$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} Y & Y \\ \hline -Y & -Y \end{array} \right) ; \ Y = -Y^t \right\}.$$

Así se tiene que $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Luego,

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$$

y $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)} \neq 0$ (puesto que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, al poseer elementos de rango 1, es de tipo infinito [37]). En este caso, la aplicación β no es inyectiva. De hecho, es conocido [37] que

$$\mathfrak{g}_0^{(1)} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})^{(1)} \equiv \mathbb{R}^n \otimes S^2((\mathbb{R}^n)^*),$$

donde $S^2((\mathbb{R}^n)^*)$ denota el espacio de aplicaciones bilineales simétricas de grado 2 sobre $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})^{(1)} = \{t \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ ; \ t(u, v) = t(v, u), \ u, v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Además se tiene que

$$\dim(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})^{(1)}) = n \dim(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})) - 1/2\, n^2(n-1) = n^3 - 1/2\, n^2(n-1),$$

mientras que $\dim(\mathfrak{g}_1)^* = \dim \mathfrak{g}_1 = \frac{n(n-1)}{2}$. Y puesto que para todo $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, es

$$\frac{n^3 - 1}{2\, n^2(n-1)} > \frac{n(n-1)}{2},$$

no puede haber ninguna aplicación lineal inyectiva de $\mathfrak{g}_0^1$ en $(\mathfrak{g}_{-1})^*$.

Nuestro propósito es la construcción, cuando sea posible, de un subespacio suplementario $\mathbf{G}_0$-invariante de $\mathfrak{g}_0^{(1)}$ en $\mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_0)$ así como la de una representación en tal suplementario equivalente a $[\alpha_1]$. Con este objetivo enunciamos la siguiente propiedad de álgebra lineal:

Lema 2.7.4 *Sean U, V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de dimensión finita tales que U es un subespacio de V y* $\dim(U)=\dim(W)$. *Sea $\beta \colon V \to W$ lineal y sea $\alpha = \beta_{|U} \colon U \to W$. Entonces, son equivalentes:*

a) *α es isomorfismo,*

b) *para todo $v \in V$ denotemos por $[v]$ a la clase de v en V/U; entonces existe un único $v_0 \in [v]$ tal que $\beta(v_0) = 0$,*

c) *$U \oplus \ker(\beta) = V$,*

d) *$U \cap \ker(\beta) = \{0\}$.*

Además, si se verifica alguna de estas cuatro condiciones equivalentes, la aplicación $\Phi \colon V/U \to \ker(\beta)$ dada por $\Phi([v]) = v_0$ (donde v_0 es el dado en la condición b)*) es un isomorfismo.*

Demostración:

Puesto que dim(U)=dim(W), bastará ver que α es inyectiva, es decir, que $\ker(\alpha) = \{0\}$. Supongamos que $u \in U$ es tal que $\alpha(u) = 0$. Entonces,

$$\beta(u) = 0 = \beta(0).$$

Como $u \in U$, resulta que 0 y u están en la misma clase en V/U. Por hipótesis, debe ser $u = 0$ y $\ker(\alpha) = \{0\}$. Esto demuestra que b) implica a).

Para probar que a) implica b), sea $v \in V$. Puesto que $\beta(v) \in W$ y α es un isomorfismo, tenemos que $\beta(v) \in \operatorname{Im}(\alpha)$ y que existe un único $u \in U$ tal que $\alpha(u) = \beta(v)$. El vector $v_0 = v - u$ es tal que $v_0 \in [v]$ y

$$\beta(v_0) = \beta(v - u) = \beta(v) - \beta(u) = \beta(v) - \alpha(u) = 0.$$

Además, el vector v_0 es único pues si $v_0' \in [v]$ fuese otro vector verificando que $\beta(v_0') = 0$, existiría $u \in U$ tal que $v_0 - v_0' = u$ y

$$0 = \beta(v_0) = \beta(v_0' + u) = \beta(v_0') + \beta(u) = \beta(u) = \alpha(u).$$

Como α es inyectiva, debe ser $u = 0$ y $v_0 = v_0'$.

Veamos ahora que a) implica c).

En primer lugar se tiene que

$$\dim(U) + \dim(\ker(\beta)) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U) = \dim(V).$$

Además, si $u \in U \cap \ker(\beta)$, es $0 = \beta(u) = \alpha(u)$, y como α es isomorfismo, debe ser $u = 0$. En consecuencia, $U \cap \ker(\beta) = \{0\}$.

Por otra parte, es obvio que c) implica d).

Demostremos que d) implica a).

Puesto que dim(U)=dim(W), bastará ver que α es inyectiva. En efecto, si $\alpha(u) = 0$ para $u \in U$, se tiene que $\beta(u) = 0$. Luego, $u \in U \cap \ker(\beta) = \{0\}$ y $u = 0$.

Finalmente, probemos que Φ es isomorfismo:

Φ está bien definida: Es inmediato a partir de la condición b).

Φ es lineal: Sean v, $v' \in V$ y μ, $\mu' \in \mathbb{F}$. Pongamos $\Phi([v]) = v_0$ y $\Phi([v']) = v_0'$. Entonces

$$\mu\, \Phi([v]) + \mu'\, \Phi([v']) = \mu v_0 + \mu' v_0'.$$

Por otra parte, como $v_0 \in [v]$ y $v_0' \in [v']$, se tiene que $\mu v_0 + \mu' v_0' \in [\mu v + \mu' v']$. Además,

$$\beta(\mu v_0 + \mu' v_0') = \mu\, \beta(v_0) + \mu'\, \beta(v_0') = 0,$$

de donde se deduce que

$$\Phi(\mu\ [v] + \mu'\ [v']) = \Phi([\mu\ v + \mu'\ v']) = \mu v_0 + \mu' v_0'$$

y Φ es lineal

Φ es inyectiva: Si $v \in V$ es tal que $\Phi([v]) = 0$, entonces, $v_0 = 0$; como $v_0 \in [v]$, se tiene que $[v] = [v_0] = [0]$, es decir, $\ker(\Phi) = \{[0]\}$.

Φ es isomorfismo: Bastará ver que $\dim(V/U)$ =$\dim(\ker(\beta))$. Y en efecto, como α es isomorfismo, entonces β es sobreyectiva y por tanto,

$$\dim(\ker(\beta)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(\beta)) = \dim(V) - \dim(W) =$$

$$= \dim(V) - \dim(U) = \dim(V/U).$$

□

Teorema 2.7.1 1) *La representación* α_1 *deja* $\mathrm{Ker}(\beta)$ *invariante.*

2) *Si* $\beta_{|\mathfrak{g}_0^{(1)}} \colon \mathfrak{g}_0^{(1)} \to (\mathfrak{g}_{-1})^*$ *es un isomorfismo lineal, entonces* $\mathrm{Ker}(\beta) \oplus \mathfrak{g}_0^{(1)} = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)$ *y la representación* $\rho_1 \colon \mathbf{G}_0 \to GL(\mathrm{Ker}(\beta))$ *dada, para* $g \in \mathbf{G}_0$, $t \in \mathrm{Ker}(\beta)$, $x \in \mathfrak{g}_{-1}$, *por*

$$\rho_1(g)(t)(x) = \mathrm{Ad}(g)(t(\mathrm{Ad}(g^{-1})x))$$

es equivalente a $[\alpha_1]$.

Demostración:

1) Si $t \in \mathrm{Ker}(\beta)$ y $x \in \mathfrak{g}_{-1}$, entonces

$$B(\epsilon, (\alpha_1(g)t)x) = B(\epsilon, \mathrm{Ad}(g)t(\mathrm{Ad}(g^{-1}x) = B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\epsilon, t(\mathrm{Ad}(g^{-1})x),$$

y, puesto que $\mathrm{Ad}(g)\epsilon = \epsilon$ para todo $g \in \mathbf{G}_0$ (véase sección 2.3), se sigue que

$$B(\epsilon, (\alpha_1(g)t)x) = B(\epsilon, t(\mathrm{Ad}(g^{-1})x)) = 0.$$

Así, $\beta_{\alpha_1(g)t}(x) = 0$ para $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ y $\alpha_1(g)t \in \mathrm{Ker}(\beta)$.

2) La primera afirmación se sigue del lema anterior. La existencia de un isomorfismo $f \colon \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)/\mathfrak{g}_0^{(1)} \to \mathrm{Ker}(\beta)$ tal que para todo $g \in \mathbf{G}_0$, $f \circ [\alpha_1(g)] = \rho_1(g) \circ f$, es consecuencia directa de 1). □

Corolario 2.7.1 *Supongamos que* $\beta_{|\mathfrak{g}_0^{(1)}}$ *es un isomorfismo. Sea*

$$\delta\colon \mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_0) \to \mathcal{C}^{0,2}(\mathfrak{g}_0)$$

el operador coborde del complejo de Spencer del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$. *Entonces* $\delta_{|\ker(\beta)}$ *es inyectiva, y por tanto, un isomorfismo sobre* $\mathrm{Im}(\delta)$.

Demostración:

Es debido a que $\ker(\delta) = \mathfrak{g}_0^{(1)}$ y a que, como $\beta_{|\mathfrak{g}_0^{(1)}}$ es un isomorfismo, entonces, $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0^{(1)} \oplus \ker(\beta)$. □

Definición 2.7.1 *Sea* $\mathfrak{L}$ *un álgebra de Lie real. Una* **descomposición de Cartan** *de* $\mathfrak{L}$ *es un par* $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ *formado por una subálgebra* $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{L}$ *y un subespacio vectorial* $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{L}$ *verificando que*

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

y tal que existe una forma real compacta $\mathfrak{R}$ *de la complexificación* $\mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ *cuya conjugación* σ *satisface*

$$\sigma(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}\,, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}\,, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{L} \cap i\mathfrak{R}\,.$$

El siguiente resultado puede verse en [69].

Proposición 2.7.2 *Sea* $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ *un álgebra de Lie real simple graduada. Existe una descomposición de Cartan* $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ *de* $\mathfrak{L}$ *verificando que su elemento característico* ϵ *pertenece a* $\mathfrak{p}$ *y que*

$$\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{p}), \qquad \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1 = ((\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1) \cap \mathfrak{k}) \oplus ((\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1) \cap \mathfrak{p}).$$

De lo anterior obtenemos la siguiente propiedad de la aplicación β, estudiada en esta sección.

Proposición 2.7.3 *Sea* $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ *un álgebra de Lie real semisimple graduada. Si* $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{k}$ *entonces*

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)} \subset \mathfrak{k}^{(1)} = 0$$

y β *es inyectiva.*

Demostración:

Si σ es el automorfismo involutivo de $\mathfrak{L}$ definido por

$$\sigma(x) = x \text{ para } x \in \mathfrak{k},$$

$$\sigma(y) = -y \text{ para } y \in \mathfrak{p},$$

se tiene que la forma bilineal B' sobre $\mathfrak{L}$ definida por

$$B'(x, y) = -B(x, \sigma(y)), \quad x, y \in \mathfrak{g},$$

es simétrica y definida positiva, verificándose también que si $z \in \mathfrak{k}$, entonces $\mathrm{ad}(z)$ es antisimétrica con respecto a B' [69]; en particular,

$$B'([z, x], x') = -B'(x, [z, x'])$$

cualesquiera que sean x,$x' \in \mathfrak{g}_{-1}$. □

A continuación vamos a probar que se puede aplicar el teorema 2.7.1 a las álgebras simples graduadas $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{R})$, con p, $q > 2$, y $\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R})$ con $p+q \geq 3$. La primera familia de álgebras tiene asociada las estructuras producto tensor, [52], [101] (también llamadas estructuras casi grassmannianas, [3], [52]). La segunda familia de álgebras tiene asociada las estructuras conformes de signatura (p, q).

Consideremos, en primer lugar, el álgebra de Lie

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{gl}(p + q, \mathbb{R}) \ ; \ \mathrm{traza}(M) = 0\}$$

con la graduación usual dada en la sección 2.2. Notemos, ante todo, que la correspondiente subálgebra $\mathfrak{g}_0$ es isomorfa al álgebra $\mathfrak{g}_{p,q}$ formada por los endomorfismos del espacio vectorial $\mathbb{R}^q \otimes (\mathbb{R}^p)^*$ que son de la forma $C \otimes 1_p + 1_q \otimes \Theta$, es decir

$$v \otimes \eta \mapsto C(v) \otimes \eta + v \otimes \Theta(\eta),$$

donde C es un endomorfismo de $\mathbb{R}^q$ y Θ un endomorfismo de $(\mathbb{R}^p)^*$. Un espacio homogéneo semisimple llano asociado al álgebra $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(p + q, \mathbb{R})$ es la grassmanniana de p-planos $\mathcal{G}_p(\mathbb{R}^{p+q})$ bajo la acción del grupo proyectivo $\mathbf{L} = PGL(p + q, \mathbb{R})$. Ya hemos señalado que el grupo $\mathbf{G}_0$ es isomorfo al grupo $GL(p, \mathbb{R}) \otimes GL(q, \mathbb{R})$ y que la representación lineal de isotropía está dada por $(A \otimes S)(X) = SXA^{-1}$, $A \in GL(p, \mathbb{R})$, $S \in GL(q, \mathbb{R})$, $x \in \mathfrak{g}_{-1}$. Las $\mathbf{G}_0$-estructuras son llamadas estructuras producto tensor o estructuras casi grassmannianas. Hasta donde sabemos, este tipo de estructuras fueron estudiadas por primera vez por Hangan [47] y Singer y Sternberg [101]. Han sido vueltas a tratar en [9] en el caso complejo, bajo el nombre de estructuras paraconformes.

En lo que sigue, los índices griegos varían entre 1 y p y los índices latinos entre $p+1$ y $p+q$.

Proposición 2.7.4 *Si p, $q > 2$, entonces $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)} = 0$ y la aplicación $\beta_{|\mathfrak{g}_0^{(1)}}$ es un isomorfismo.*

Demostración:

Sea ahora $t \in \mathfrak{g}_0^{(1)}$. Para $x \in \mathfrak{g}_{-1}$, consideraremos $t(x)$ como endomorfismo de $\mathfrak{g}_{-1}$. Utilizando la base usual de $\mathfrak{g}_{-1}$ pongamos

$$t(E_{\gamma k})(E_{\beta j}) = \sum_{\alpha i} t^{i\alpha}_{j\beta\, k\gamma} E_{\alpha i}.$$

Para $p = 1$, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ es isomorfo a $\mathfrak{sl}(q-1, \mathbb{R})$, y por tanto, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)} \neq 0$ (véanse [37] o [101]). Para $p > 2$ y $q > 2$, Hangan [52] prueba que $t \in \mathfrak{g}_0^{(1)}$ si y sólo si los coeficientes $t^{i\alpha}_{j\beta\, k\gamma}$ son de la forma

$$t^{i\alpha}_{j\beta\, k\gamma} = \delta^i_j \delta^\alpha_\gamma u_{k\beta} + \delta^i_k \delta^\alpha_\beta u_{j\gamma},$$

donde $u_{k\beta}$, $\beta = 1, ..., p$, $k = p+1, ..., p+q$, son las coordenadas de un covector del espacio $\mathfrak{g}_1$ en la base dual de la base usual de $\mathfrak{g}_{-1}$. Supongamos ahora que $t \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)}$. Como se ha visto en el lema 2.1.5, en este caso el endomorfismo $t(E_{\gamma k})$ debe tener traza cero. Esto significa que

$$\sum_{i,\alpha} t^{i\alpha}_{i\alpha\, k\gamma} = q\delta^\alpha_\gamma u_{k\alpha} + p\delta^i_k u_{i\gamma} = q\ u_{k\gamma} + p\ u_{k\gamma}$$

$$= (p+q) u_{k\gamma} = 0,$$

de donde se concluye que $u_{k\gamma} = 0$ y $t = 0$.

Finalmente, es conocido [52] que $\dim(\mathfrak{g}_0^{(1)}) = \dim((\mathfrak{g}_{-1})^*)$. Por tanto, para $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$, p, $q > 2$, la aplicación $\beta_{|\mathfrak{g}_0^{(1)}}$ es un isomorfismo.

$\square$

Por tanto el teorema 2.7.1 puede aplicarse a $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(p+q, \mathbb{R})$.

Ahora vamos a probar que la construcción dada en el teorema 2.7.1 es válida para el álgebra $\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R})$ con $p+q \geq 3$ que induce las estructuras conformes con signatura (p, q) ya que $\mathbf{G}_0$ es isomorfo al grupo conforme $CO(p, q)$. Para ello utilizaremos el modelo de álgebra graduada

$\mathfrak{L} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1$ debido a [89] visto en la sección 2.2. Identificando $\tilde{\mathfrak{g}}_{-1}$ con $\mathbb{R}^{p+q}$, consideraremos la forma bilineal con signatura (p, q)

$$\langle , \rangle \colon (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} \times \mathbb{R}^{p+q} \to \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i,$$

donde $x = (x_1, x_2, ..., x_{p+q})^t$, $y = (y_1, y_2, ..., y_{p+q})^t$.

Lema 2.7.5 *Sea $\Phi \colon \mathbb{R}^{p+q} \times \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica no degenerada. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^{p+q})^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{R})$. Entonces existe un único $v \in \mathbb{R}^{p+q}$ tal que*

$$\varphi(v') = \Phi(v, v') \quad \text{para todo } v' \in \mathbb{R}^{p+q}.$$

Lema 2.7.6 *Sea $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ un álgebra de Lie de endomorfismos del espacio vectorial real V de dimensión finita. Sea $H \colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica no degenerada y sea $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$. Supongamos que*

$$H(A(Z), Z') = -H(Z, A(Z'))$$

cualesquiera que sean Z,$Z' \in V$ y $A \in \mathfrak{h}$. Entonces, $\mathfrak{h}^{(1)} = 0$.

En particular, si $V = \mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$, y si $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ es maximal en $\mathfrak{g}_0$, se tendrá que β es inyectiva.

Demostración:

Sean Z,Z',$Z'' \in V$. Entonces, para $t \in \mathfrak{h}^{(1)}$ es

$$\begin{aligned} H(t(Z)(Z'), Z'') &= H(t(Z')(Z), Z'') \\ = -H(Z, t(Z')(Z'')) &= -H(Z, t(Z'')(Z')) \\ = H(t(Z'')(Z), Z') &= H(t(Z)(Z''), Z') \\ = -H(Z'', t(Z)(Z')) &= -H(t(Z)(Z'), Z''), \end{aligned}$$

donde, además de la hipótesis, se ha utilizado la simetría de H. Consecuentemente, $H(t(Z)(Z'), Z'') = 0$ y como Z'' es arbitrario y H no degenerada, tenemos que $t(Z)(Z') = 0$ para cualesquiera Z, $Z' \in V$. Por tanto, $t(Z) = 0$ para todo $Z \in V$ y $t = 0$. $\square$

Análogamente,

Lema 2.7.7 *Sea $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ un álgebra de Lie de endomorfismos del $\mathbb{R}$-espacio vectorial V. Sea $H \colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal antisimétrica no degenerada y sea $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$. Supongamos que*

$$H(A(Z), Z') = H(Z, A(Z'))$$

cualesquiera que sean Z,$Z' \in V$ y $A \in \mathfrak{h}$. Entonces, $\mathfrak{h}^{(1)} = 0$.

En particular, si $V = \mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$, y si $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ es maximal en $\mathfrak{g}_0$, β es inyectiva.

Demostración:

Basta seguir los mismos pasos que en la demostración del lema anterior y tener en cuenta que ahora

$$\begin{array}{rcl} H(t(Z)(Z'), Z'') & = & H(t(Z')(Z), Z'') \\ = H(Z, t(Z')(Z'')) & = & H(Z, t(Z'')(Z')) \\ = H(t(Z'')(Z), Z') & = & H(t(Z)(Z''), Z') \\ = H(Z'', t(Z)(Z')) & = & -H(t(Z)(Z'), Z''). \end{array}$$

$\square$

Sea $\varphi \in (\tilde{\mathfrak{g}}_{-1})^*$. Del lema 2.7.5 se sigue que existe un único

$$x = \left(\begin{array}{c|cc|c} & & & \\ \hline x' & & & \\ x'' & & & \\ \hline & (x')^t & -(x'')^t & \end{array}\right) \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}$$

verificando que para todo $y \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}$

$$\varphi(y) = \langle x | y \rangle \,,$$

donde, si

$$y = \left(\begin{array}{c|cc|c} & & & \\ \hline y' & & & \\ y'' & & & \\ \hline & (y')^t & -(y'')^t & \end{array}\right) ,$$

entonces

$$\langle x | y \rangle = (x')^t y' - (x'')^t y''.$$

Definimos ahora una aplicación $\mu \colon \varphi \in (\tilde{\mathfrak{g}}_{-1})^* \to \mu(\varphi) \in \tilde{\mathfrak{g}}_0^{(1)}$ como sigue: para $y \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}$, $\mu(\varphi)(y)$ es el elemento de $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ dado por

$$\mu(\varphi)(y) = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha & & \\ \hline & B & \\ \hline & & -\alpha \end{array}\right) ,$$

con

$$\alpha = \langle x|y\rangle \, ,$$

$$B = \left(\begin{array}{c|c} -x'(y')^t + y'(x')^t & -x'(y'')^t + y'(x'')^t \\ \hline -y''(x')^t + x''(y')^t & x''(y'')^t + y''(x'')^t \end{array} \right) .$$

Se verifica:

Proposición 2.7.5 *La aplicación μ está bien definida (i.e., $\mu(\varphi) \in \tilde{\mathfrak{g}}_0^{(1)}$ para $\varphi \in (\tilde{\mathfrak{g}}_{-1})^*$) y se verifica que $\beta_{|\tilde{\mathfrak{g}}_0^{(1)}} \circ \mu$ es una biyección.*

Demostración:

Es claro que $B \in \mathfrak{o}(p,q)$ pues tanto $-x'(y')^t+y'(x')^t$ como $x''(y'')^t+y''(x'')^t$ son antisimétricas y $(-x'(y'')^t + y'(x'')^t)^t = -y''(x')^t + x''(y')^t$.

Debemos comprobar también que $\mu(\varphi) \in \tilde{\mathfrak{g}}_0^{(1)}$, es decir, que

$$[\mu(\varphi)(y), z] = [\mu(\varphi)(z), y] \quad \text{para todo } y, z \in \tilde{\mathfrak{g}}_1.$$

Para ello, pongamos

$$z = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline \begin{matrix} z' \\ z'' \end{matrix} & & \\ \hline & (z')^t \quad -(z'')^t & \end{array} \right) .$$

Ahora bien, en general

$$[\mu(\varphi)(y), z] = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \tilde{x}'^t & 0 & \tilde{x}''^t \\ \hline -\tilde{x}' & 0 & \tilde{x}' & 0 \\ \hline 0 & \tilde{x}'^t & 0 & \tilde{x}''^t \\ \hline \tilde{x}'' & 0 & -\tilde{x}'' & 0 \end{array} \right),$$

siendo

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= az' + A_1 z' - A_2 z'', \\ \tilde{x}'' &= ax'' - A_2^t z' + A_3 x'', \end{aligned}$$

y donde $a = x'^t y' - x''^t y''$, $A_1 = -x'y'^t + y'x'^t$, $A_3 = x''y''^t - y''x''^t$ y $A_2 = -x'y''^t + y'x''^t$.

Para que $\mu(\varphi) \in \tilde{\mathfrak{g}}_0^{(1)}$ debe ser entonces

$$x'^t y' z' - x''^t y'' z' - x' y'^t z' + y' x'^t z'$$

$$+ x' y''^t z'' - y' x''^t z''$$

$$= x'^t z' y' - x''^t z'' y' - x' z'^t y' + z' x'^t y'$$

$$+ x' z''^t y'' - z' x''^t y'',$$

y, también, como $A_2^t = -y'' x'^t + x'' y'^t$,

$$x'^t y' z'' - x''^t y'' z'' + y'' x'^t z' - x'' y'^t z'$$

$$+ x'' y''^t z'' - y'' x''^t z''$$

$$= x'^t z' y'' - x''^t z'' y'' + z'' x'^t y' - x'' z'^t y'$$

$$+ x'' z''^t y'' - z'' x''^t y''.$$

Puesto que ambas igualdades son ciertas, es $\mu(\varphi) \in \tilde{\mathfrak{g}}_0^{(1)}$. Consideremos ahora la composición

$$\varphi \in (\tilde{\mathfrak{g}}_{-1})^* \xrightarrow{\mu} \mu(\varphi) \in \tilde{\mathfrak{g}}_0^{(1)} \xrightarrow{\beta} \beta_{\mu(\varphi)} \in (\tilde{\mathfrak{g}}_{-1})^*.$$

La forma lineal $\beta_{\mu(\varphi)}$ está dada por

$$\alpha_{\mu(\varphi)}(y) = B(\epsilon, \mu(\varphi)(y)).$$

Además, $\epsilon = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & 0 & \\ \hline & & -1 \end{array}\right)$, y de la definición de $\mu(\varphi)(y)$ resulta que para todo $y \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}$,

$$B(\epsilon, \mu(\varphi)(y)) = k \text{ traza}(\epsilon\ (\mu(\varphi)(y)))$$

$$= 2k(x'^t y' - x''^t y'') = 2k\ \langle x|y\rangle = 2k\ \varphi(y),$$

de donde se deduce que

$$\beta \circ (\frac{1}{2k}\mu) = (\mathrm{id})_{\tilde{\mathfrak{g}}^*_{-1}}.$$

Así, β es sobreyectiva.

Por otra parte, un cálculo sencillo muestra que

$$[\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_0] = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \hline & B & \\ \hline & & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{L};\ B \in \mathfrak{o}(p,q) \right\}.$$

Sea entonces $a \in [\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_0]$, $a = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \hline & B & \\ \hline & & 0 \end{array}\right)$, con $B = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline -A_2^t & A_3 \end{array}\right)$, y sean x, $y \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}$. Denotaremos a x y a y como en la discusión anterior. Poniendo

$$[a, x] = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline \hat{x}' & & \\ \hat{x}'' & & \\ \hline & (\hat{x}')^t \quad -(\hat{x}'')^t & \end{array}\right),$$

$$[a, y] = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline \hat{y}' & & \\ \hat{y}'' & & \\ \hline & (\hat{y}')^t \quad -(\hat{y}'')^t & \end{array}\right),$$

resultan

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= A_1 x' - A_2 x'', \\ \hat{x}'' &= -A_2^t x' + A_3 x'', \\ \hat{y}' &= A_1 y' - A_2 y'', \\ \hat{y}'' &= -A_2^t y' + A_3 y''. \end{aligned}$$

Entonces

$$\langle [a, x] | y \rangle = \hat{x}'^t y' - \hat{x}''^t y'' = x'^t A_1^t y' - x''^t A_2^t y' + x'^t A_2 y'' - x''^t A_3^t y'',$$

$$\langle x | [a, y] \rangle = x'^t \hat{y}' - x''^t \hat{y}'' = x'^t A_1 y' - x'^t A_2 y'' + x''^t A_2^t y' - x''^t A_3 y'',$$

y de aquí se deduce que

$$\langle [a, x] | y \rangle = -\langle x | [a, y] \rangle$$

pues $A_1^t = -A_1$ y $A_3^t = -A_3$.

En definitiva, del lema 2.7.6 se sigue que $[\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_0]^{(1)} = 0$, y como $[\tilde{\mathfrak{g}}_0, \tilde{\mathfrak{g}}_0]$ es maximal en $\tilde{\mathfrak{g}}_0$, la aplicación β es inyectiva.

$\square$

A lo largo de la demostración de la proposición anterior, también se ha probado

Proposición 2.7.6 *Para el álgebra graduada* $\mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R})$ *se tiene que* $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]^{(1)} = 0$ *y* $\beta_{|\mathfrak{g}_0^{(1)}}$ *es un isomorfismo.*

2.8 Tensor diferencia de dos conexiones adaptadas

Dadas dos conexiones lineales sobre una variedad M es bien conocido que su tensor diferencia define un campo de tensores de tipo $(1,2)$ sobre M (llamado tensor de deformación por Norden; véase [3], pag 137). Este tensor es simétrico si y sólo si ambas conexiones tienen la misma torsión.

Sea $P = P(M,G)$ una G-estructura sobre una variedad M con $\dim(M) = n$ y sean ω_1, $\omega_2 \in \Lambda^1(P,\mathfrak{g})$ 1-formas sobre P asociadas a dos G-conexiones sobre M. Sean B_1, B_2 aplicaciones campo básico asociadas a ω_1 and ω_2, respectivamente, es decir, B_1, $B_2\colon v \in \mathbb{R}^n \to B_i(v) \in \mathfrak{X}(P)$ están dadas por $\pi_*(u)B_i(v)_u = u(v)$, $u \in P$, $i = 1,2$. Entonces $t_\Delta\colon P \to \mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g})$,

$$t_\Delta(u)(v) = (\omega_1)_u(B_2(v)_u - B_1(v)_u)\,, \qquad u \in P\,, \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

es el *tensor diferencia* de las dos formas de conexión.

Puesto que $\mathfrak{g}^{(1)}$ es G-invariante bajo la representación α_1, podemos definir $[t_\Delta](u) = [t_\Delta(u)]$, y obtenemos:

Proposición 2.8.1 *t_Δ y $[t_\Delta]$ son, respectivamente, tensores de tipo $(\alpha_1, \mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}))$ y $([\alpha_1], \mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g})/\mathfrak{g}^{(1)})$, es decir*

$$t_\Delta(ug) = \alpha_1(g^{-1})t_\Delta(u)$$

$$[t_\Delta](ug) = [\alpha_1](g^{-1})[t_\Delta](u)\ ,\ g \in G\ ,\ u \in P\,.$$

Más aun, ω_1 y ω_2 son G-conexiones con la misma torsión si y sólo si $[t_\Delta] = 0$.

Demostración:

La primera afirmación es obvia y la segunda se sigue del hecho de que $t_\Delta(u)$ es simétrico (es decir, $t_\Delta(u)(v)(v') = t_\Delta(u)(v')(v)$) si y sólo si $t_\Delta(u)$ pertenece a $\mathfrak{g}^{(1)}$. □

Corolario 2.8.1 *Si ω_1, ω_2, son $\mathbf{G}_0$-formas de conexión equivalentes y t_Δ es su tensor diferencia, entonces, el $([\alpha_1], \mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_0)/\mathfrak{g}_0^{(1)})$-tensor inducido $[t_\Delta]$ es nulo.*

Demostración:

Para X, $X' \in \mathfrak{g}_{-1}$ y $Z \in \mathfrak{g}_1$, se sigue de la identidad de Jacobi que

$$[[X,Z],X'] = [[X',Z],X].$$

Así, para $u \in P$ y X, $X' \in \mathfrak{g}_{-1}$, tenemos

$$\begin{aligned} t_\Delta(u)(X)(X') &= \lambda[X, F(u)](X') = [[X, F(u)], X'] \\ &= [[X', F(u)], X] = t_\Delta(u)(X')(X). \end{aligned}$$

Por tanto, $[t_\Delta(u)] = 0$. □

Ya hemos mencionado antes que el tensor de estructura de Bernard de una $\mathbf{G}_0$-estructura es un tensor de tipo $([\alpha_2], H^{0,2}(\mathfrak{g}))$. A la vista de las propiedades anteriores, el tensor $[t_\Delta]$ inducido por el tensor diferencia de dos conexiones lineales, toma valores, no en un grupo de cohomología de Spencer, sino en el grupo cociente $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0)/\mathfrak{g}_0^{(1)}$, y juega, a un nivel diferente del complejo de Spencer, un papel geométrico en cierto modo análogo al tensor de estructura de Bernard (véase [80]).

Capítulo 3

Estructuras de Cartan semi-holonómicas

Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ un álgebra de Lie real semisimple graduada. Recordemos que asociados a $\mathfrak{L}$ existen espacios homogéneos $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ compactos y conexos sobre los que actúa de modo transitivo y efectivo un grupo de Lie $\mathbf{L}$ cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{L}$, mientras que el álgebra de Lie del grupo de isotropía $\mathbf{L}_0$ es la subálgebra

$$\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1.$$

En ese caso se dice que la variedad $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$ es un *espacio homogéneo semi-simple llano* [89], [90]. Nótese que $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$ es isomorfo como espacio vectorial a $\mathfrak{g}_{-1}$. El subgrupo cerrado $\mathbf{G}_0 \subset \mathbf{L}_0$ dado por

$$\mathbf{G}_0 = \{a \in \mathbf{L}_0 \; ; \; \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0\},$$

tiene álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ y para todo $a \in \mathbf{G}_0$ y $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, se verifica que $Ad_{\mathbf{L}}(a)X \in \mathfrak{g}_{-1}$; la representación inducida

$$\lambda \colon a \in \mathbf{G}_0 \to Ad_{\mathbf{L}}(a)_{|\mathfrak{g}_{-1}} \in GL(\mathfrak{g}_{-1})$$

es fiel y permite identificar a $\mathbf{G}_0$ con el grupo lineal de isotropía de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$, ya que λ es equivalente a la restricción a $\mathbf{G}_0$ de la representación

$$l \colon \mathbf{L}_0 \to GL(\mathfrak{g}_{-1})\,,$$

la cual está dada para $a \in \mathbf{L}_0$ y $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ por

$$l(a)X = Ad_{\mathbf{L}}(a)X \mod \mathfrak{L}_0.$$

La representación l es equivalente a la representación lineal de isotropía de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$, razón por la que llamaremos también a l de ese modo.

La aplicación $\mathrm{Exp}\colon X \in \mathfrak{g}_{-1} \to (\exp X)\mathbf{L}_0 \in \mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ determina un difeomorfismo de un entorno abierto de 0 en $\mathfrak{g}_{-1}$ en un entorno abierto del origen $o \in \mathbf{L}_0 \in \mathbf{L}/\mathbf{L}_0$. El resultado más importante de T. Ochiai en [90] permite realizar el grupo de Lie $\mathbf{L}_0$ como un subgrupo de Lie del grupo $G^2(n)$ de los jets ($\equiv$ polinomios de Taylor) de orden dos de gérmenes de difeomorfismos que dejan fijo el origen $0 \in \mathbb{R}^n$; esto lo consigue probando que si τ_a es el difeomorfismo

$$\tau_a\colon x\mathbf{L}_0 \in \mathbf{L}/\mathbf{L}_0 \to ax\mathbf{L}_0 \in \mathbf{L}/\mathbf{L}_0$$

entonces la aplicación

$$\mathrm{j}\colon a \in \mathbf{L}_0 \to \mathrm{j}(a) = j_0^2(\mathrm{Exp}^{-1} \circ \tau_a \circ \mathrm{Exp}) \in G^2(n)$$

es un homomorfismo inyectivo de grupos de Lie. La expresión **$\mathbf{L}_0$-estructura** sobre una variedad M será la abreviación de la expresión $\mathrm{j}(\mathbf{L}_0)$-*estructura* (semi-holonómica u holonómica según sea el caso) de segundo orden sobre M dotada de una conexión de Cartan, construida a partir de una clase de conexiones lineales equivalentes adaptadas a la proyección $P = \pi_1^2(Q) \subset \mathcal{F}M$, es decir, será sinónimo de estructura de Cartan de tipo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$. La restricción a $\mathbf{G}_0$ del homomorfismo j toma valores en el grupo lineal general $GL(\mathfrak{g}_{-1}) \equiv G^1(n)$ y coincide con la restricción $\lambda = l_{|\mathbf{G}_0} = \mathrm{j}_{|\mathbf{G}_0}$. De ahí que se llame grupo lineal de isotropía a $\mathbf{G}_0$, independientemente de como lo realicemos.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión $n = \dim \mathfrak{g}_{-1}$. Si G es un subgrupo de Lie de $G^2(n) \subset \hat{G}^2(n)$, una G-estructura holonómica de segundo orden en M es una H-reducción $Q \subset \mathcal{F}^2M$ del $G^2(n)$-fibrado de referencias holonómicas de segundo orden sobre M. De modo análogo una G-estructura semi-holonómica de segundo orden en M es una H-reducción $Q \subset \hat{\mathcal{F}}^2M$ del $\hat{G}^2(n)$-fibrado de referencias semj-holonómicas de segundo orden sobre M.

Tanaka [106] demostró que cada álgebra de Lie semisimple graduada $\mathfrak{L}$ da lugar a una estructura de Cartan de tipo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$, que potencialmente puede existir sobre variedades reales M de clase $\mathcal{C}^\infty$ y dimensión $n = \dim(\mathfrak{g}_{-1}) = \dim \mathbf{L}/\mathbf{L}_0$. Dicha estructura geométrica (a la que por brevedad llamaremos a veces una $\mathbf{L}_0$-estructura) consta de un $\mathbf{L}_0$-fibrado principal $\pi_Q\colon Q \to M$ y de una *conexión de Cartan* $\xi \in \bigwedge^1(Q, \mathfrak{L})$ de tipo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ definida sobre el espacio total Q. Además Q se proyecta sobre una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$, siendo $\mathbf{G}_0 \subset \mathbf{L}_0$ el grupo lineal de isotropía de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ y $\mathcal{F}M$ el fibrado de referencias lineales de M. Tanaka probó también que toda $\mathbf{G}_0$-estructura

$P \subset \mathcal{F}M$ admite conexiones lineales adaptadas (que tienen torsión no necesariamente nula) e introdujo el concepto general de conexiones equivalentes, mostrando que cada $\mathbf{L}_0$-estructura) (Q, ξ) es esencialmente la misma cosa que una clase $[\chi]$ de conexiones lineales equivalentes adaptadas a la $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$. Tanaka [106] no especificó ningún procedimiento para construir el fibrado Q, aunque afirma que existe aludiendo al proceso de extender el grupo de estructura en P. Independientemente, Kobayashi y Nagano [68] hicieron una construcción semejante para las estructuras proyectivas pero en la que el fibrado Q es una $\mathbf{L}_0$-estructura holonómica de segundo orden, es decir $Q \subset \mathcal{F}^2M$ es una $\mathbf{L}_0$-reducción del fibrado $\mathcal{F}^2M$ de referencias holonómicas de segundo orden sobre M. Para ello hay que partir inexcusablemente de una clase de conexiones lineales sin torsión sobre M. Además Kobayashi y Nagano construyeron la conexión normal de Cartan a partir de la *forma canónica* $\theta^{(2)}$ de $\mathcal{F}^2M$, (Kobayashi [66] construyó la forma canónica $\theta^{(n)}$ de cada fibrado $\mathcal{F}^nM$ de referencias holonómicas de orden n y Yuen [121] generalizó esta construcción para los fibrados $\hat{\mathcal{F}}^n(M)$ de referencias semi-holonómicas de orden n). Ogiue [92] hizo una construcción análoga a la de [68] para las estructuras conformes de signatura $(p, 0)$. Como ya hemos dicho en la introducción general de esta memoria, Ochiai [90], [91] generalizó el método de Kobayashi-Nagano y Ogiue a todas las estructuras de Cartan asociadas a un álgebra de Lie semisimple graduada $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, restringiéndose siempre a variedades M dotadas de una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ *que admiten* $\mathbf{G}_0$*-conexiones lineales sin torsión*, hipótesis que, como bien señala Baston [10], en varios casos equivale a la suposición de que P es una $\mathbf{G}_0$-estructura integrable.

En este capítulo probaremos que cada clase $[\chi]$ de conexiones lineales adaptadas a una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ (con torsión arbitraria) determina una única $\mathbf{L}_0$-estructura semi-holonómica de segundo orden $Q \subset \hat{\mathcal{F}}^2M$ de tal manera que la proyección $\hat{l} = (\hat{\pi}^2_1)_{|Q} \colon Q \to P$ convierte a $(Q, \hat{l})$ en un $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado, que dotado de una conexión de Cartan construida a partir de $[\chi]$ constituye lo que hemos denominado una **estructura de Cartan semi-holonómica**. Esto generaliza la teoría de Ochiai, en la que el fibrado Q es siempre una $\mathbf{L}_0$-estructura holonómica, debido a que se restringe siempre a conexiones adaptadas a P sin torsión, y de este modo obtenemos una teoría de estructuras de Cartan plenamente equivalente a la desarrollada por Tanaka en [106], pues en este capítulo vamos a demostrar que dos $\mathbf{L}_0$-fibrados asociados a una $\mathbf{G}_0$-estructura P sobre M son $\mathbf{L}_0$-fibrados isomorfos. En particular, todos ellos son isomorfos a la extensión $(P \times_{\mathbf{G}_0} \mathbf{L}_0, \hat{l})$ con $\hat{l}([(u, a)]) = u$.

Dado un $\mathbf{L}_0$-fibrado $(Q, \hat{l})$ asociado a una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$, demostramos que una conexión de Cartan está determinada por un par (B, J) formado por la aplicación campo básico B de una conexión lineal adaptada a P y un campo de tensores J de tipo $(0,2)$ sobre M. Probamos también que si ξ_0 es la $\mathfrak{g}_0$-componente de una conexión de Cartan $\xi \in \bigwedge^1(Q,\mathfrak{L})$ y $h\colon P \to Q$ es un homomorfismo admisible entonces $h^*\xi_0$ es una conexión lineal adaptada a P.

Los principales resultados de este capítulo se recogen en [82].

3.1 $\mathbf{L}_0$-estructuras semi-holonómicas de segundo orden asociadas a una clase de conexiones lineales adaptadas equivalentes

Sea G/H un espacio homogéneo y $\mathfrak{m}$ un subespacio vectorial del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo G verificando que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$, siendo $\mathfrak{h}$ el álgebra de Lie del subgrupo cerrado $H \subset G$. Recordemos que la aplicación

$$\mathrm{Exp}\colon X \in \mathfrak{m} \to (\exp X)H \in G/H$$

determina un difeomorfismo entre un entorno abierto de $0 \in \mathfrak{m}$ y un entorno abierto de la clase trivial $o \in G/H$. Sea $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ un espacio homogéneo semisimple llano asociado al álgebra graduada semisimple $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, con $\dim(\mathfrak{g}_{-1}) = n$. Sea $G^2(n) = GL(n,\mathbb{R}) \times S_2(n)$ el grupo de Lie de los polinomios de Taylor ($\equiv$ jets) en el punto 0 de los difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ que llevan 0 en 0. Para cada $a \in \mathbf{L}$ denotemos por τ_a la aplicación

$$\tau_a\colon b\mathbf{L}_0 \in \mathbf{L}/\mathbf{L}_0 \to ab\mathbf{L}_0 \in \mathbf{L}/\mathbf{L}_0\,.$$

Ochiai [90] demostró la siguiente propiedad absolutamente fundamental, que relaciona las álgebras de Lie graduadas semisimples de primera especie con los fibrados de jets de segundo orden:

Teorema 3.1.1 *La aplicación*

$$\mathrm{j}\colon a \in \mathbf{L}_0 \to j_0^2(\mathrm{Exp}^{-1} \circ \tau_a \circ \mathrm{Exp}) \in G^2(n)$$

es un homomorfirmo de grupos de Lie inyectivo.

El resultado anterior permite considerar a $\mathbf{L}_0$ como un subgrupo de Lie del grupo $G^2(n)$. La expresión empleada en [90] para describir j es *embedding*, usada allí en el sentido débil de aplicación inyectiva de rango máximo (y homomorfismo de grupos) de $\mathbf{L}_0$ en $G^2(n)$. Su demostración consiste en probar meramente que j es inyectiva. Obviamente j es un homomorfismo continuo, luego analítico. Además, un homomorfismo inyectivo de grupos de Lie es necesariamente de rango máximo. La siguiente proposición, que completa lo anterior, puede verse en [113]:

Proposición 3.1.1 *El homomorfirmo de grupos de Lie* $\mathrm{j}\colon \mathbf{L}_0 \to G^2(n)$ *verifica además*

a) Si $z \in \mathfrak{g}_1$ *entonces* $\mathrm{j}(\exp(z)) = (\mathrm{id}, [[z,-],-]) \in G^2(n)$.

b) El grupo de Lie $\mathrm{j}(G_1)$ *es un subgrupo cerrado de* $G^2(n)$.

c) El grupo de Lie $\mathrm{j}(\mathbf{L}_0)$ *es un subgrupo de Lie cerrado de* $G^2(n)$.

El tercer apartado se enuncia y prueba en [113] cuando $\mathbf{L}_0$ tiene un número finito de componentes conexas. Sin embargo, una pequeña modificación en la demostración dada allí permite eliminar dicha hipótesis. Por lo tanto podemos (y debemos) considerar siempre a $\mathbf{L}_0$ como un subgrupo de Lie cerrado tanto de $G^2(n)$ como del grupo de estructura $\hat{G}^2(n) \supset G^2(n)$ de los fibrados de referencias semi-holonómicas de aquellas variedades M cuya dimensión es $n = \dim \mathfrak{g}_{-1}$ (en el capítulo primero de esta memoria se describen $\hat{G}^2(n)$ y $G^2(n)$). Nótese que las propiedades de que G_1 sea un subgrupo normal de $\mathbf{L}_0$ y de que $\mathbf{L}_0/\mathbf{G}_0$ sea un espacio topológico contráctil subsisten para sus imágenes por j [90].

Recordemos [70] que el grupo de estructura G de un fibrado principal $P \to M$ es reducible a un subgrupo cerrado H si y sólo si el fibrado asociado E de fibra tipo G/H admite una sección diferenciable global $\sigma\colon M \to E$. Para fibrados de clase C^∞ una condición suficiente es que la variedad G/H sea contráctil. De la contractibilidad de $\mathbf{L}_0/\mathbf{G}_0$ se sigue el siguiente resultado [106], [90] :

Proposición 3.1.2 *Si* $\pi_Q\colon Q \to M$ *es un* $\mathbf{L}_0$*-fibrado principal, entonces* Q *admite una* $\mathbf{G}_0$*-reducción.*

En particular, tanto si $Q \subset \mathcal{F}^2(M)$ es una $\mathrm{j}(\mathbf{L}_0)$-estructura holonómica de segundo orden, como si $Q \subset \hat{\mathcal{F}}^2(M)$ es una $\mathrm{j}(\mathbf{L}_0)$-estructura semi-holonómica de segundo orden, se tiene que Q admite alguna $\mathrm{j}(\mathbf{G}_0)$-reducción. En lo sucesivo, para abreviar usaremos las expresiones $\mathbf{L}_0$-estructura holonómica o semi-holonómica de segundo orden, que obviamente deben ser entendidas como una $\mathrm{j}(\mathbf{L}_0)$-reducción del fibrado $\mathcal{F}^2(M)$ o del fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ respectivamente. Recordemos que la representación $\lambda\colon \mathbf{G}_0 \to GL(\mathfrak{g}_{-1})$ es inyectiva y que por tanto

$$\mathbf{G}_0 \equiv \lambda(\mathbf{G}_0) = \mathrm{j}(\mathbf{G}_0) = l(\mathbf{G}_0)\,.$$

Si $P \subset \mathcal{F}M$ es una $\lambda(\mathbf{G}_0)$-estructura sobre M diremos para abreviar que P es una $\mathbf{G}_0$-estructura.

Definición 3.1.1 [106] *Sean* $\pi_P \colon P \to M$ *una* $\mathbf{G}_0$*-estructura,* $\theta \in \bigwedge(P, \mathfrak{g}_{-1})$ *su forma canónica y* $\pi_Q \colon Q \to M$ *un* $\mathbf{L}_0$*-fibrado principal sobre* M*. Si existe un homomorfismo de fibrados* $\hat{l} \colon Q \to P$ *compatible con el homomorfismo* $l \colon \mathbf{L}_0 \to \lambda(\mathbf{G}_0)$ *(es decir,* $\hat{l}$ *verifica* $\pi_Q = \pi_P \circ \hat{l}$ *y para todo* $z \in Q$ *y todo* $a \in \mathbf{L}_0$ *es* $\hat{l}(za) = \hat{l}(z)l(a)$*) diremos entonces que el par* $(Q, \hat{l})$ *es un* L_0-**fibrado asociado** *a la* $\mathbf{G}_0$*-estructura* $P \subset \mathcal{F}M$ *y llamaremos a*

$$\hat{\theta} = \hat{l}^* \theta$$

la **forma canónica de** Q.

Definición 3.1.2 *Sean* P *una* $\mathbf{G}_0$*-estructura sobre* M*,* $(Q, \hat{l})$ *un* $\mathbf{L}_0$*-fibrado asociado a* P *y* $h \colon P \to Q$ *un homomorfismo de fibrados compatible con el homomorfismo inclusión* $i_0 \colon \mathbf{G}_0 \to \mathbf{L}_0$ *(es decir,* $h(ua) = h(u)i_0(a)$*,* $u \in P$*,* $a \in \mathbf{G}_0$*). Si* h *satisface* $\hat{l} \circ h = \mathrm{id}$*, diremos que* h *es un* **homomorfismo admisible** *o una* sección homomórfica *o una* sección global invariante.

En [106] se demuestra la existencia de homomorfismos admisibles:

Definición 3.1.3 *Sea* r *un número entero,* $r \geq 1$*. Si* G *es un subgrupo de Lie de* $G^r(n)$*, una* G-estructura holonómica de orden r *sobre una variedad* M *es una* G*-reducción* $Q \subset \mathcal{F}^r(M)$ *del* $G^r(n)$*-fibrado principal* $\mathcal{F}^r(M)$ *de las referencias holonómicas de orden* r *de* M*. Decimos que* Q *es una* G*-estructura* **integrable** *si existe un atlas sobre* M *tal que la trivialización de* $\mathcal{F}^r(M)$ *asociada a toda carta del atlas induce en* Q *una trivialización local.*

De modo análogo, si G *es un subgrupo de Lie de* $\hat{G}^2(n)$*, una* G-**estructura semi-holonómica de segundo orden** *sobre* M *es una* G*-reducción* $Q \subset \hat{\mathcal{F}}^2(M)$ *del* $\hat{G}^2(n)$*-fibrado principal* $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ *de las referencias semi-holonómicas de segundo orden de* M*. Decimos que* Q *es una* G*-estructura* **integrable** *si existe un atlas sobre* M *tal que la trivialización de* $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ *inducida por cada carta del atlas induce en* Q *una trivialización local.*

Las G-estructuras no holonómicas de orden dos sobre una variedad M se definen de modo anólogo. Tales estructuras han sido aplicadas recientemente por Epstein y de León al estudio de medios de Cosserat generalizados y cristales líquidos generalizados [32], [33]. En esta memoria no tendremos ocasión de tratarlas.

El siguiente resultado es bien conocido.

Lema 3.1.1 *Si G es un grupo de Lie, H un subgrupo cerrado de G y $P \to M$ un G-fibrado principal, el espacio cociente P/H se identifica con el fibrado asociado $P \times_G (G/H)$ de fibra tipo G/H mediante la aplicación*

$$uH \to [(u, \bar{e})],$$

donde $e \in G$ es el elemento neutro de G y donde para $a \in G$ denotamos $\bar{a} = aH \in G/H$, siendo $[(u, \bar{a})] \in P \times_G (G/H)$ la clase de equivalencia de $(u, \bar{a}) \in P \times (G/H)$.

Sea $\hat{E} = \hat{\mathcal{F}}^2(M) \times_{\hat{G}^2(n)} (\hat{G}^2(n)/G^1(n))$ el fibrado asociado a $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de fibra tipo $\hat{G}^2(n)/G^1(n)$. Denotaremos por $\pi_{\hat{E}} \colon \hat{E} \to M$ a la proyección natural. Cada clase $(A, \alpha)G^1(n) \in \hat{G}^2(n)/G^1(n)$ puede identificarse con la parte bilineal de un representante canónico que está dado del modo siguiente:

$$(A, \alpha)(A^{-1}, 0) = (I, \alpha \circ (A^{-1} \times A^{-1})) \equiv \alpha \circ (A^{-1} \times A^{-1})\,,$$

que identificaremos con la aplicación bilineal

$$\alpha \circ (A^{-1} \times A^{-1})\,.$$

De este modo, la acción de $\hat{G}^2(n)$ sobre $\hat{G}^2(n)/G^1(n)$ se lee como

$$\begin{aligned}
(A, \alpha)\overline{(B, \beta)} &= \overline{(A, \alpha)(B, \beta)} = \overline{(A \circ B,\, A \circ \beta + \alpha \circ (B \times B))} \\
&= \overline{(I, A \circ \beta \circ ((B^{-1} \circ A^{-1}) \times (B^{-1} \circ A^{-1})) + \alpha \circ (A^{-1} \times A^{-1}))} \\
&\equiv \big(I,\, A \circ \beta \circ ((B^{-1} \circ A^{-1}) \times (B^{-1} \circ A^{-1})) + \alpha \circ (A^{-1} \times A^{-1})\big) \\
&\equiv A \circ \beta \circ ((B^{-1} \circ A^{-1}) \times (B^{-1} \circ A^{-1})) + \alpha \circ (A^{-1} \times A^{-1}).
\end{aligned}$$

Sea (U, ϕ) una carta de M. A continuación vamos a ver cómo la carta (U, ϕ) induce trivializaciones en estos fibrados. Definimos

$$\rho^1_\phi \colon (\pi^1_0)^{-1}(U) \to G^1(n)$$

mediante

$$\rho^1_\phi(j^1_0 f) = D(\phi \circ f)(0)\,.$$

Definimos

$$\rho^2_\phi \colon (\pi^2_0)^{-1}(U) \to G^2(n)$$

mediante

$$\rho^2_\phi(j^2_0 f) = (D(\phi \circ f)(0), D^2(\phi \circ f)(0))\,.$$

La carta (U,ϕ) induce sendas trivializaciones en $\mathcal{F}M$ y $\mathcal{F}^2(M)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{T}^1_\phi\colon j^1_0 f \in (\pi^1_0)^{-1}(U) \to \mathcal{T}^1_\phi(j^1_0 f) = (f(0), \rho^1_\phi(j^1_0 f)) \in U \times G^1(n).$$

$$\mathcal{T}^2_\phi\colon j^2_0 f \in (\pi^2_0)^{-1}(U) \to \mathcal{T}^2_\phi(j^2_0 f) = (f(0), \rho^2_\phi(j^2_0 f)) \in U \times G^2(n).$$

Ahora bien, teniendo en cuenta el isomorfismo de $\hat{G}^2(n)$-fibrados principales

$$\hat{\mathcal{F}}^2(M) \equiv \mathcal{F}^2(M)^{\hat{G}^2(n)}$$

dado en el teorema 1.8.1, esta trivialización induce a su vez otra trivialización $\hat{\mathcal{T}}^2_\phi$ en $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$. Si $\mathcal{T}^2_\phi(p) = (\pi^2_0(p), (A,\alpha))$ y $(B,\beta) \in \hat{G}^2(n)$, entonces

$$\hat{\mathcal{T}}^2_\phi\colon [(p,(B,\beta))] \to (\pi^2_0(p), (A,\alpha)(B,\beta)) \in U \times \hat{G}^2(n),$$

y, finalmente, esta última trivialización induce de modo natural una trivialización $\mathcal{T}^{\hat{E}}_\phi$ en el fibrado asociado $\hat{E}$ dada del siguiente modo: si $\mathcal{T}^2_\phi(p) = (\pi^2_0(p), (A,\alpha))$, entonces

$$\mathcal{T}^{\hat{E}}_\phi\colon [(p, \overline{(A,\alpha)})] \in \pi^{-1}_{\hat{E}}(U) \to (\pi^2_0(p), \overline{(A,\alpha)(B,\beta)}) \in U \times \frac{\hat{G}^2(n)}{G^1(n)}\,.$$

Si tenemos presente que $G^1(n) = GL(n,\mathbb{R})$ y que una sección global definida por una $G^1(n)$-reducción del fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias semi-holonómicas de segundo orden es esencialmente una conexión lineal, entonces, combinando lo anterior obtenemos

Proposición 3.1.3 *Sean $\hat{E} = \hat{\mathcal{F}}^2(M) \times_{\hat{G}^2(n)} (\hat{G}^2(n)/G^1(n))$ el fibrado asociado a $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de fibra tipo $\hat{G}^2(n)/G^1(n)$ y $\Gamma\colon M \to \hat{E}$ la sección global definida por una $G^1(n)$-reducción dada del $\hat{G}^2(n)$-fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$. Dada una carta (U,ϕ) en M pongamos, para todo $x \in U$,*

$$\Gamma(x) = [(j^2_0 f, \overline{(B,\beta)})]$$

con $\hat{\mathcal{T}}^2_\phi(j^2_0 f) = (x,(A,\alpha))$ y $(B,\beta) \in \hat{G}^2(n)$. Entonces, respecto a la trivialización $\mathcal{T}^{\hat{E}}_\phi$, la sección Γ se lee en U como

$$\mathcal{T}^{\hat{E}}_\phi \Gamma(x) = (x, \gamma(x)),$$

donde

$$\gamma(x) = \alpha \circ (A^{-1} \times A^{-1}) + A \circ \beta \circ (B^{-1} \circ A^{-1} \times B^{-1} \circ A^{-1})$$

es el representante canónico de la clase $\overline{(A,\alpha)(B,\beta)} \in \hat{G}^2(n)/G^1(n)$.

Recordemos que $GL(n,\mathbb{R}) = G^1(n)$. Por el teorema de Libermann, demostrado en el capítulo primero, las $G^1(n)$-reducciones de $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ están en biyección con el conjunto de conexiones lineales de M. Asimismo, por un teorema general sobre reducciones de grupo en los fibrados principales, (ver por ejemplo [70] vol. I, cap I) existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de $G^1(n)$-reducciones del $\hat{G}^2(n)$-fibrado principal $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ y el conjunto de secciones globales del fibrado asociado $\pi_{\hat{E}} \colon \hat{E} \to M$. Es inmediato deducir que para una G-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ las G-reducciones de $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ que se proyectan sobre P están en biyección con las conexiones lineales de M adaptadas a P. Notemos que en la proposición anterior $\gamma(x)$ es una aplicación bilineal no necesariamente simétrica, es decir $\gamma(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Si denotamos por $\{E_1, ..., E_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y definimos para cada $x \in U$, $\Gamma^i_{jk}(x) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$\Gamma^i_{jk}(x)(E_i) = -\gamma(x)(E_j, E_k),$$

entonces, las funciones $x \in\to \Gamma^i_{jk}(x) \in \mathbb{R}$ son los símbolos de Christoffel (en la carta (U, ϕ) de M) de la $\mathbf{G}_0$-conexión lineal ω asociada a Γ.

Definimos ahora una aplicación $\eta \colon \hat{\mathcal{F}}^2(M) \to \hat{E}$ por

$$\eta \colon z \in \hat{\mathcal{F}}^2(M) \to \eta(z) = [(z, \overline{(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}, 0)})] \,.$$

Entonces el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (\hat{\pi}^2_0)^{-1}(U) & \xrightarrow{\hat{\mathcal{T}}^2_\phi} & U \times \hat{G}^2(n) \\ \eta \downarrow & & \downarrow \mathrm{id}_U \times \mathrm{can} \\ (\pi_{\hat{E}})^{-1}(U) & \xrightarrow{\mathcal{T}^{\hat{E}}_\phi} & U \times (\hat{G}^2(n)/G^1(n)) \end{array}$$

donde "can" denota la proyección canónica. Por la teoría general de fibrados, la $G^1(n)$-reducción $\mathcal{F}_\Gamma$ de $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ asociada a la sección Γ está dada por

$$\mathcal{F}_\Gamma = \{p \in \hat{\mathcal{F}}^2(M) \; ; \quad \eta(p) = \Gamma(\hat{\pi}^2_0(p))\} \,.$$

Proposición 3.1.4 *La restricción de la proyección natural $\hat{\pi}^2_1 \colon \hat{\mathcal{F}}^2(M) \to \mathcal{F}M$ del fibrado de jets semi-holonómicos de segundo orden a la $GL(n,\mathbb{R})$-reducción $\mathcal{F}_\Gamma \subset \hat{\mathcal{F}}^2(M)$ es un isomorfismo de $GL(n,\mathbb{R})$-fibrados.*

Demostración:
Se justifica analogamente a como se hace para una conexión sin torsión en [112] cap. 1. □

Ahora vamos a a construir una sección homomórfica $s_\Gamma\colon \mathcal{F}M \to \hat{\mathcal{F}}^2(M)$ que caracterice a la sección Γ. Sea

$$F_Q\colon \mathcal{F}M \to \mathcal{F}_\Gamma$$

el isomorfismo inverso de $(\hat{\pi}^2_1)_{|Q}$. En la trivialización inducida por una carta (U,ϕ) de M, la aplicación F_Q se expresa como la siguiente composición:

$$j^1_0 f \in (\pi^1_0)^{-1}(U) \xrightarrow{\mathcal{T}^1_\phi} (x,A) \xrightarrow{\Gamma\times\mathrm{id}} (\Gamma(x),A) \xrightarrow{\mathcal{T}^{\hat{E}}_\phi\times\mathrm{id}}$$

$$\longrightarrow (x,\gamma(x),A) \longrightarrow (x,A,\gamma(x)\circ(A\times A)) \xrightarrow{(\hat{\mathcal{T}}^2_\phi)^{-1}} F(j^1_0 f) \in (\hat{\pi}^2_0)^{-1}(U) \cap \mathcal{F}_\Gamma$$

donde $\mathcal{T}^1_\phi$ es la trivialización asociada de modo natural a (U,ϕ) en el fibrado de referencias. Sea

$$s_\Gamma = \mathrm{i}_Q \circ F_Q\colon \mathcal{F}M \to \hat{\mathcal{F}}^2(M)\,,$$

con $\mathrm{i}_Q\colon \mathcal{F}_\Gamma \to \hat{\mathcal{F}}^2(M)$ la inclusión. Se tiene que s_Γ es un homomorfismo inyectivo de fibrados compatible con la inyección canónica

$$j^1_0 g = A \in G^1(n) \to (A,0) \in \hat{G}^2(n)\,.$$

Llamaremos a $s_\Gamma\colon \mathcal{F}M \to \hat{\mathcal{F}}^2(M)$ la *sección homomórfica asociada* a Γ. Sea $j^1_0 f \in (\pi^1_0)^{-1}(U)$. Poniendo

$$\mathcal{T}^1_\phi(j^1_0 f) = (x,A)\,,$$

$$\mathcal{T}^{\hat{E}}_\phi \Gamma(x) = (x,\gamma(x))\,,$$

entonces

$$(\mathcal{T}^{\hat{E}}_\phi \times \mathrm{id})(\Gamma(x),A) = (x,\gamma(x),A)$$

y se verifica que

$$(\hat{\mathcal{T}}^2_\phi)^{-1}(F_Q(j^1_0 f)) = (x,A,\gamma(x)\circ(A\times A)).$$

Ahora bien, como $F_Q(j^1_0 f) \in \mathcal{F}_\Gamma$, se tiene que

$$\Gamma(x) = \eta(F_Q(j^1_0 f))\,,$$

y si ponemos $F_Q(j^1_0 f) = p$, entonces

$$\eta(p) = [(p, \overline{j^1_0 \mathrm{id}})] = \Gamma(x)\,.$$

De este modo, si $\hat{\mathcal{T}}^2_\phi(p) = (x, D, \delta)$, entonces, respecto a la trivialización $\mathcal{T}^{\hat{E}}_\phi$, $\Gamma(x)$ se lee como

$$\mathcal{T}^{\hat{E}}_\phi(\Gamma(x)) = (x, \epsilon(x)) ,$$

con $\epsilon(x) = \delta \circ (D^{-1} \times D^{-1})$ (representante canónico de $(D, \delta)(I, 0)$). Luego,

$$\gamma(x) = \delta \circ (D^{-1} \times D^{-1}) .$$

Así, como D debe ser igual a A, ocurre que

$$\gamma(x) \circ (A \times A) = \delta \circ (A^{-1} \times A^{-1}) \circ (A \times A) = \delta .$$

En resumen, para $F_Q(j^1_0 f) = p$ y $\hat{\mathcal{T}}^2_\phi(p) = (x, D, \delta)$ hemos demostrado

Proposición 3.1.5 *Si en las las trivializaciones usadas es* $\Gamma(x) \equiv (x, \gamma(x))$ *y* $j^1_0 f \equiv (x, A)$, *entonces*

$$s_\Gamma(j^1_0 f) \equiv (x, A, \gamma \circ (A \times A)) ,$$

con $\delta = \gamma \circ (A \times A)$. *Además, el representante canónico de* $(A, \delta)G^1(n)$ *en* $\hat{G}^2(n)/G^1(n)$ *es* $\gamma(x)$.

Sea $\mathrm{j} \colon \mathbf{L}_0 \to G^2(n)$ el homomorfismo inyectivo de grupos de Lie definido al principio de esta sección. La restricción a $\mathbf{G}_0$ de j es un homomorfismo $\mathrm{j}_{|\mathbf{G}_0} \colon \mathbf{G}_0 \to GL(\mathfrak{g}_{-1}) \equiv G^1(n) = GL(n, \mathbb{R})$ que coincide con la restricción a $\mathbf{G}_0$ de la representación lineal de isotropía de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ dada, para todo $a \in \mathbf{L}_0$ y $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, por

$$l(a)X = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)X \quad \mod(\mathfrak{L}_0) .$$

Por la proposición 3.1.1, $\mathrm{j}(\mathbf{G}_0) = l(\mathbf{G}_0)$ es cerrado en $GL(\mathfrak{g}_{-1}) = G^1(n)$. Sea $\mathrm{j}_P \colon P \to \mathcal{F}M$ un homomorfismo inyectivo de fibrados compatible con $l_{|\mathbf{G}_0} = \mathrm{j}_{|\mathbf{G}_0} \colon \mathbf{G}_0 \to GL(\mathfrak{g}_{-1})$, es decir, verificando que, para todo $u \in P$ y $g \in \mathbf{G}_0$, $\mathrm{j}_P(ug) = \mathrm{j}_P(u)\mathrm{j}(g)$. Podemos entonces considerar a P (o a $\mathrm{j}(P)$) como una $\mathbf{G}_0$-estructura sobre M (es decir una $\lambda(\mathbf{G}_0)$-reducción de $\mathcal{F}M$).

Sea $Q = P^{\mathbf{L}_0} = P \times_{\mathbf{G}_0} \mathbf{L}_0$ el fibrado asociado a P de fibra tipo $\mathbf{L}_0$, que es un $\mathbf{L}_0$-fibrado principal mediante la acción por la derecha $[(u, a)]b = [(u, ab)]$ para $u \in P$, a, $b \in \mathbf{L}_0$. Si e denota el elemento neutro de $\mathbf{L}_0$, existe una sección canónica

$$u \in P \to [(u, e)] \in Q .$$

Nótese que Q es isomorfo al subfibrado $P^{\mathrm{j}(\mathbf{L}_0)}$ del fibrado $\tilde{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias semi-holonómicas de orden dos de M.

Las siguientes afirmaciones se demuestran fácilmente.

Proposición 3.1.6 *Sea* $l\colon \mathbf{L}_0 \to \mathbf{G}_0 \subset GL(\mathfrak{g}_{-1})$ *la representación lineal de isotropía de* $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$*, cuyo núcleo es* G_1*. Entonces la proyección,*

$$\tilde{l}\colon [(u,a)] \in Q \to ul(a) \in P$$

determina un G_1*-fibrado principal de espacio total* Q *y base* P*.*

Proposición 3.1.7 *A cada* $\mathbf{G}_0$*-conexión lineal* Γ *en* P *se le asocia un homomorfismo inyectivo de fibrados principales*

$$\gamma\colon [(u,a)] \in Q \to (s_\Gamma \circ \mathrm{j})(u)\mathrm{j}(a) \in \tilde{\mathcal{F}}^2(M),$$

y por tanto, Γ *determina una* $\mathbf{L}_0$*-estructura semi-holonómica* $\gamma(Q)$ *de segundo orden.*

Recordemos que las expresiones *conexión lineal sobre* M *adaptada a una* G*-estructura* $P \subset \mathcal{F}M$ y G*-conexión lineal* en P significan lo mismo.

Definición 3.1.4 *Dos* $\mathbf{G}_0$*-conexiones lineales en* P *se dicen* $\mathbf{L}_0$**-equivalentes** *cuando las* $\mathbf{L}_0$*-estructuras semi-holonómicas de segundo orden que inducen son iguales.*

Sean Γ y $\tilde{\Gamma}$ dos $\mathbf{G}_0$-conexiones lineales en P y s_Γ, $s_{\tilde{\Gamma}}\colon \mathcal{F}M \to \hat{\mathcal{F}}^2(M)$ sus respectivas secciones homomórficas asociadas. Llamemos ω y $\tilde{\omega}$ tanto a sus formas de conexión como a sus restricciones al $\mathbf{G}_0$-fibrado P. La siguiente afirmación está en [106] (y en [90] para conexiones sin torsión).

Proposición 3.1.8 *Las* $\mathbf{G}_0$*-conexiones* Γ *y* $\tilde{\Gamma}$ *son* $\mathbf{L}_0$*-equivalentes si y sólo si existe alguna función* $\zeta\colon P \to \mathfrak{g}_1$ *tal que*

$$(s_{\tilde{\Gamma}} \circ \mathrm{j})(u) = (s_\Gamma \circ \mathrm{j})(u)\mathrm{j}(\exp(\zeta_u))$$

para todo $u \in P$*.*

Lo anterior puede expresarse también así, [112]:

Proposición 3.1.9 *Sea* $\zeta\colon \mathcal{F}M \to \mathfrak{g}_1$ *una función verificando que*

$$\tilde{\omega}(X_u) - \omega(X_u) = [\theta(X_u), \zeta_u]$$

para $X_u \in T_u(\mathcal{F}M)$ *y siendo* θ *la forma canónica de* $\mathcal{F}M$*. Los símbolos de Christofell* Γ^i_{jk} *y* $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ *de* Γ *y* $\tilde{\Gamma}$ *verifican que*

$$(\tilde{\Gamma}^i_{jk}(x) - \Gamma^i_{jk}(x))(E_i) = -[[\zeta_{\sigma(x)}, E_j], E_k]$$

para $x \in U$*, donde* $\sigma\colon U \to (\pi^1_0)^{-1}(U)$ *es la sección local asociada a la trivialización* $\mathcal{T}^1_\phi$*, definida por* $\sigma(x) = (\mathcal{T}^1_\phi)^{-1}(x,e)$*.*

La siguiente propiedad generaliza para $\mathbf{G}_0$-conexiones arbitrarias un resultado de Ochiai [90]. La existencia de torsión nos conduce al fibrado de referencias semi-holonómicas de segundo orden

Teorema 3.1.2 *Si Γ y $\tilde{\Gamma}$ son $\mathbf{G}_0$-conexiones lineales equivalentes entonces Γ y $\tilde{\Gamma}$ son también $\mathbf{L}_0$-equivalentes, es decir, inducen la misma $\mathbf{L}_0$-estructura semi-holonómica de segundo orden.*

Demostración:
Supongamos que Γ y $\tilde{\Gamma}$ son equivalentes y sea $\zeta \colon \mathcal{F}M \to \mathfrak{g}_1$ la función que verifica que, para todo $X_u \in T_u(\mathcal{F}M)$ es

$$\tilde{\omega}(X_u) - \omega(X_u) = [\theta(X_u), \zeta_u] \,.$$

Sea (U, ϕ) una carta de M. Pongamos, para $x \in U$,

$$\mathcal{T}_\phi^{\hat{E}}\Gamma(x) = (x, \gamma(x)) \,,$$

$$\mathcal{T}_\phi^{\hat{E}}\tilde{\Gamma}(x) = (x, \tilde{\gamma}(x)) \,.$$

Los respectivos símbolos de Christofell Γ^i_{jk} y $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ de Γ y $\tilde{\Gamma}$ están dados por

$$\Gamma^i_{jk}(x)(E_i) = -\gamma(x)(E_j, E_k),$$
$$\tilde{\Gamma}^i_{jk}(x)(E_i) = -\tilde{\gamma}(x)(E_j, E_k) \,.$$

Por la proposición anterior se sigue que

$$-\tilde{\gamma}(x)(E_j, E_k) + \gamma(x)(E_j, E_k) = [[-\zeta_{\sigma(x)}, E_j], E_k].$$

Ahora bien, ya dijimos en la primera sección que para todo $Z \in \mathfrak{g}_1$ es

$$\mathrm{j}(\exp(Z)) = (\mathrm{id}, [[Z, -], -]) \,.$$

Si ponemos $\mathrm{j}(\exp(\zeta_{\sigma(x)})) = (I, \delta(x))$, lo anterior significa que

$$\gamma + \delta = \tilde{\gamma},$$

o bien,

$$(I, \gamma)(I, \delta) = (I, \tilde{\gamma}),$$

con $(I, \delta) \in \mathrm{j}(G_1)$. Sea ahora $j^1_0 f = (x, A) \in P$. Entonces

$$s_\Gamma(j^1_0 f) = (x, A, \gamma(A \times A)), \quad s_{\tilde{\Gamma}}(j^1_0 f) = (x, A, \tilde{\gamma} \circ (A \times A)) \,.$$

Ahora bien, podemos poner

$$s_\Gamma(j_0^1 f) = (x, A, \gamma \circ (A \times A)) = (x, I, \gamma)(A, 0),$$
$$s_{\tilde\Gamma}(j_0^1 f) = (x, A, \tilde\gamma \circ (A \times A)) = (x, I, \tilde\gamma)(A, 0),$$

y como $\tilde\gamma = \gamma + \delta$ se sigue que

$$s_{\tilde\Gamma}(j_0^1 f) = (x, I, \gamma + \delta)(A, 0) = (x, I, \gamma)(I, \delta)(A, 0)$$
$$= (x, I, \gamma)(A, 0)(A^{-1}, 0)(I, \delta)(A, 0) = s_\Gamma(j_0^1 f)(I, A^{-1} \circ \delta \circ (A \times A)),$$

porque

$$(A^{-1}, 0)(I, \delta) = (A^{-1}, 0 + A^{-1} \circ \delta),$$
$$(A^{-1}, 0)(I, \delta)(A, 0) = (A^{-1}A, A^{-1} \circ \delta \circ (A \times A)) = (I, A^{-1} \circ \delta \circ (A \times A)).$$

Como $(A, 0) \in \mathrm{j}(\mathbf{L}_0)$ (porque $j_0^1 f \in P$). Además G_1 es normal en $\mathbf{L}_0$, luego

$$(A^{-1}, 0)(I, \delta)(A, 0) \in \mathrm{j}(G_1)$$

y el resultado se sigue de la proposición 3.1.8 y de que $\exp\colon \mathfrak{g}_1 \to G_1$ es biyectiva. $\square$

3.2 Unicidad de los L_0-fibrados asociados

En [106], pag. 119, se menciona que para cualquier $\mathbf{G}_0$-estructura P sobre M existe al menos un $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado a P. Esencialmente, aunque allí no se dice explícitamente, tal $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado es la extensión $P^{\mathbf{L}_0}$ de P por el grupo $\mathbf{L}_0$ (véase definición 1.8.1). A continuación vamos a probar que, dada una $\mathbf{G}_0$-estructura, tal $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado es único, salvo isomorfismos.

Sean P una $\mathbf{G}_0$-estructura sobre M y $(Q, \hat l)$ un $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado a P en el sentido de la definición 3.1.1. Si denotamos por $\pi_P\colon P \to M$ y $\pi_Q\colon Q \to M$ a las respectivas proyecciones, como $\hat l$ es un homomorfismo de fibrados se tiene que $\pi_P \circ \hat l = \pi_Q$. Sea $u \in P$. Sean z_1, $z_2 \in \hat l^{-1}(u)$. Como $\pi_P \circ \hat l = \pi_Q$, entonces $\pi_Q(z_1) = \pi_Q(z_2)$. Luego, existe un único $a \in L_0$ tal que $z_1 = z_2 a$. Ahora bien,

$$u = \hat l(z_1) = \hat l(z_2 a) = \hat l(z_2) l(a) = u l(a),$$

con lo que a pertenece al núcleo de $\hat l$, que es G_1. Esencialmente, esto justifica que $\hat l\colon Q \to P$ es un G_1-fibrado. Además, G_1 es difeomorfo a través de su exponencial al espacio vectorial $\mathfrak{g}_1$. Luego existe un homomorfismo admisible $h\colon P \to Q$, es decir una sección global compatible con el homomorfismo inclusión $i_0\colon \mathbf{G}_0 \to L_0$. Por tanto, del teorema 5.7, pag 58, de [70] se sigue que dicho G_1-fibrado es trivial.

Teorema 3.2.1 *Sea P una $\lambda(\mathbf{G}_0)$-estructura sobre M. Dos $\mathbf{L}_0$-fibrados $(Q_1, \hat{l}_1)$ y $(Q_2, \hat{l}_2)$ cualesquiera asociados a la $\lambda(\mathbf{G}_0)$-estructura P son necesariamente isomorfos.*

Demostración:

Supongamos que $(Q_1, \hat{l}_1)$ y $(Q_2, \hat{l}_2)$ son dos $\mathbf{L}_0$-fibrados asociados a P. Sean $h_1 \colon P \to Q_1$ y $h_2 \colon P \to Q_2$ homomorfismos admisibles. Entonces, un punto $z_1 \in Q_1$ es de la forma $h_1(\hat{l}_1(z_1))a_1$ con $a_1 \in G_1$ y un punto $z_2 \in Q_2$ es de la forma $h_2(\hat{l}_2(z_2))a_2$ con $a_2 \in G_1$. Definimos

$$\Phi \colon z_1 \in Q_1 \to \Phi(z_1) = h_2(\hat{l}_1(z_1))a_1 \in Q_2 \,,$$

$$\Psi \colon z_2 \in Q_2 \to \Psi(z_2) = h_1(\hat{l}_2(z_2))a_2 \in Q_1 \,.$$

Puesto que a_1 y a_2 dependen diferenciablemente de z_1 y z_2, se sigue que Φ y Ψ son diferenciables. Además,

$$\hat{l}_2(\Phi(z_1)) = \hat{l}_2\{h_2(\hat{l}_1(z_1))a_1\} = \hat{l}_1(z_1) \,,$$

con lo cual $\Phi(z_1)$ se escribe de la forma

$$\Phi(z_1) = h_2(\hat{l}_1(z_1))a_1 = h_2(\hat{l}_2(\Psi(z_1))a_1 \,.$$

En consecuencia Φ y Ψ son inversas ya que

$$\Psi \circ \Phi(z_1) = h_1(\hat{l}_2(\Psi(z_1)))a_1 = h_1(\hat{l}_1(z_1))a_1 = z_1 \,.$$

Más aún, si $b_1 \in G_1$, entonces

$$\Phi(z_1 b_1) = \Phi(h_1(\hat{l}_1(z_1))a_1 b_1) = h_2(\hat{l}_1(z_1))a_1 b_1 = \Phi(z_1)b_1$$

y si $a \in \lambda(\mathbf{G}_0)$, se tiene que

$$\Phi(z_1 a) = \Phi(h_1(\hat{l}_1(z_1))a_1 a) \,.$$

Puesto que G_1 es normal en $\mathbf{L}_0$ resulta que $a^{-1}a_1 a = \tilde{a_1} \in G_1$, con lo cual, si $\tilde{a_1} \in G_1$ es $a_1 a = a\tilde{a_1}$. De aquí se sigue que

$$\Phi(z_1 a) = \Phi(h_1(\hat{l}_1(z_1))a\tilde{a_1}) = \Phi(h_1(\hat{l}(z_1)a)\tilde{a_1}) \,,$$

porque h_1 es un homomorfismo admisible o sección global invariante. Además, como $a \in \lambda(\mathbf{G}_0)$ es $l(a) = a$, luego

$$\begin{aligned}
\Phi(z_1a) &= \Phi(h_1(\hat{l}_1(z_1)l(a))\tilde{a}_1) \\
= \Phi(h_1(\hat{l}_1(z_1a))\tilde{a}_1) &= h_2(\hat{l}_1(z_1a))\tilde{a}_1 \\
= h_2(\hat{l}_1(z_1)a)\tilde{a}_1 &= h_2(\hat{l}_1(z_1))a\tilde{a}_1 \\
= h_2(\hat{l}_1(z_1))a_1a &= \Phi(z_1)a
\end{aligned}$$

De este modo, Φ es un homomorfismo y, por lo visto anteriormente, un isomorfismo de $\mathbf{L}_0$-fibrados.

□

3.3 Estructuras de Cartan semi-holonómicas

La siguiente definición se debe a Ch. Ehresmann [22] y unifica y generaliza los conceptos de *espacio con conexión proyectiva* y *espacio con conexión conforme* estudiados por E. Cartan, [18], [19], [17].

Definición 3.3.1 *Sean* $\mathbf{R}$ *un grupo de Lie con álgebra de Lie* $\mathfrak{R}$*,* $\mathbf{S}$ *un subgrupo de Lie cerrado de* $\mathbf{R}$ *con álgebra de Lie* $\mathfrak{S}$ *y* Q *un* $\mathbf{S}$*-fibrado principal sobre una variedad* M *de dimensión* $n = \dim(\mathbf{R}/\mathbf{S})$*. Una* **conexión de Cartan** *de tipo* $\mathbf{R}/\mathbf{S}$ *es una* 1*-forma diferencial* ξ *sobre* Q *con valores en* $\mathfrak{R}$ *(es decir,* $\xi \in \bigwedge(Q, \mathfrak{R})$*), que verifica:*

1. $R_a^*\xi = \mathrm{Ad}_{\mathbf{R}}(a^{-1})\xi$ *para cada* $a \in \mathbf{S}$*.*
2. $\xi(A^*) = A$ *para cada campo fundamental* A^* *inducido por un* $A \in \mathfrak{S}$*.*
3. $\xi(v) \neq 0$ *para cada vector no nulo* $v \in TQ$*.*

Una **estructura de Cartan** *de tipo* $\mathbf{R}/\mathbf{S}$ *sobre una variedad diferenciable* M *es el par* (Q, ω) *formado por un* $\mathbf{S}$*-fibrado principal* $\pi_Q \colon Q \to M$ *y por una conexión de Cartan* $\omega \in \bigwedge(Q, \mathfrak{R})$ *de tipo* $\mathbf{R}/\mathbf{S}$ *sobre* Q*.*

De este modo hablaremos de estructuras (de Cartan) proyectivas, conformes, casi grassmannianas, casi lagrangianas, etc. cuando el espacio homogéneo modelo $\mathbf{R}/\mathbf{S}$ sea el que hace aparecer ese tipo de estructura.

Observación 3.3.1 El apartado 3 de la definición anterior equivale a que $\xi_u \colon T_uQ \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo para todo $u \in Q$. Por tanto, para cualquier $X \in \mathfrak{g}$, podemos definir un campo de vectores $\check{\xi}(X)$ sobre Q por la condición

$$\xi(\check{\xi}(X)) = X\,.$$

Nótese, también, que una conexión de Cartan ξ establece que la variedad Q es *paralelizable*, en el sentido de la teoría de variedades; en otras palabras, ξ proporciona una base de campos de vectores continuos tangentes a Q.

Definición 3.3.2 *i) La 2-forma Ξ $\mathfrak{g}$-valuada sobre Q dada por*

$$\Xi = \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}[\xi, \xi]$$

se llama **forma de curvatura** *de ξ y la presente ecuación que define Ξ recibe el nombre de* **ecuación de estructura**.

ii) Si la forma de curvatura Ξ de una conexión de Cartan ξ es idénticamente nula sobre Q, diremos que ξ es una **conexión de Cartan llana**.

Ejemplos:

(1) Un ejemplo trivial de estructura de Cartan lo proporciona la forma de Maurer-Cartan $\xi \in \bigwedge^1(G, \mathfrak{G})$ de un grupo de Lie G. Tomamos $M = G$, $Q = G$, $\mathbf{R} = \mathbf{G}$ y el subgrupo trivial $\mathbf{S} = \{\mathbf{e}\} \subset \mathbf{G}$. Por tanto $\mathfrak{S} = \{0\}$ y $\mathfrak{R} = \mathfrak{G}$ y las dos primeras condiciones de conexión de Cartan son triviales para ξ, mientras la tercera expresa que, para todo $a \in G$, ξ_a es un isomorfismo entre el espacio tangente T_aG y el álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ de G. La curvatura de esta conexión de Cartan es nula, como se deduce de la ecuación de Maurer-Cartan $\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}[\xi, \xi] = 0$.

(2) Otro ejemplo bien conocido de estructura de Cartan es el de la **estructura afín asociada a una conexión lineal** sobre cualquier variedad M de dimensión n, que consiste en lo siguiente: si $\mathcal{F}M$ denota el $GL(n, \mathbb{R})$-fibrado de las referencias lineales de M y $\theta \in \bigwedge^1(\mathcal{F}M, \mathbb{R}^n)$ es la forma canónica de $\mathcal{F}M$, basta tomar $Q = \mathcal{F}M$, fijar una conexión lineal $\omega \in \bigwedge^1(Q, \mathfrak{S})$ sobre M y entonces $\xi = \omega + \theta$ es una conexión de Cartan de tipo $\mathbf{R}/\mathbf{S}$, siendo $\mathfrak{S} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ el álgebra de Lie del grupo de Lie $\mathbf{S} = GL(n, \mathbb{R})$ y $\mathbf{R} = GA(n, \mathbb{R})$ el grupo afín, con $\mathbb{R}^n = \mathbf{R}/\mathbf{S}$. Esta es la estructura de Cartan afín de M. La curvatura $\Xi \in \bigwedge^2(Q, \mathfrak{ga}(n, \mathbb{R}))$ de esta conexión de Cartan es la suma de la forma de curvatura $\Omega \in \bigwedge^2(\mathcal{F}M, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))$ de ω y de la forma de torsión $\Theta \in \bigwedge^2(\mathcal{F}M, \mathbb{R}^n)$ de ω.

Comparando la definición general anterior con el primer ejemplo anterior, podemos observar que una conexión de Cartan ω de tipo $\mathbf{R}/\mathbf{S}$ no es una conexión, sino una especie de generalización de la forma de Maurer-Cartan del grupo de Lie $\mathbf{R}$. Una situación que generaliza la del segundo ejemplo es precisamente la que aparece al considerar conexiones de Cartan asociadas a un álgebra semisimple graduada $\mathfrak{L}$, que desarrollaremos a continuación y en los capítulos sucesivos.

Para todo $a \in \mathbf{L}_0$ y $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, denotaremos por $D(a,X)$ la $\mathfrak{L}_0$-componente de $\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)X$ en la descomposición $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{L}_0$. Tenemos entonces que

$$\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)X = l(a)X + D(a,X),$$

donde l es el homomorfismo de $\mathbf{L}_0$ en $GL(\mathfrak{g}_{-1})$ descrito en la sección 2.3, dado por

$$l(a)X = \mathrm{Ad}_L(a)X \mod(\mathfrak{L}_0).$$

Sea $\pi_P \colon P \to M$ un $\mathbf{G}_0$-fibrado principal ($\lambda(\mathbf{G}_0)$-fibrado principal). Sea $(Q,\hat{l})$ un $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado a P.

Proposición 3.3.1 [106] *Una* **conexión de Cartan** *de tipo* $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ *está caracterizada por una aplicación lineal* $C \colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{X}(Q)$ *verificando:*

1) *Para cualesquiera* $y \in Q$, $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, *se tiene que*

$$\theta_{\hat{l}(y)}(\hat{l}_* C(X)_y) = X,$$

siendo θ *la forma canónica de la* $\mathbf{G}_0$*-estructura* P. *Equivalentemente,*

$$\tilde{\theta}(C(X)) = X$$

para todo $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, *siendo* $\tilde{\theta} = \hat{l}^*\theta$ *la forma canónica de* Q.

2) *Para todo* $a \in \mathbf{L}_0$ *y* $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, *se tiene que*

$$R_{a*}C(X)_y = C(\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(g^{-1}))_{ya} + \{-[Z, \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(g^{-1})X] + \frac{1}{2}[Z,[Z,\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(g^{-1})X]]\}^*,$$

con $a = g\ \exp(Z) \in \mathbf{L}_0$, $g \in \mathbf{G}_0$, $Z \in \mathfrak{g}_1$, $y \in Q$, $X \in \mathfrak{g}_{-1}$. *Equivalentemente,*

$$R_{a*}C(X) = C(l(a^{-1})X) + D(a^{-1},X)^*.$$

Observación 3.3.2 La demostración de la proposición anterior se basa en que todo vector tangente v a Q, $v \in T_zQ$ se escribe de forma única como

$$v = C(X)_z + A_z^* \qquad X \in \mathfrak{g}_{-1}\ , \quad A \in \mathfrak{L}_0.$$

Es inmediato que la aplicación lineal

$$X + A \in \mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{L}_0 \to C(X)_z + A_z^* \in T_zQ, \quad z \in Q,$$

es un isomorfismo entre $\mathfrak{L}$ y $T_z(Q)$ cuyo inverso ξ_z define una conexión de Cartan ξ de tipo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ en Q. De aquí se deduce que $C(X)_z = \xi_z^{-1}(X)$, $z \in Q$, $X \in \mathfrak{g}_{-1}$.

En lo que sigue, fijemos un homomorfismo admisible $h\colon P \to Q$ y una conexión de Cartan C según la versión dada en la proposición 3.3.1.

Proposición 3.3.2 *Dados una conexión de Cartan ξ de tipo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ sobre un L_0-fibrado asociado $(Q, \hat{l})$ (expresada por una aplicación lineal $C\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{X}(Q)$) y un homomorfismo admisible $h\colon P \to Q$, existe un único par (B, J) formado por la aplicación campo básico*

$$B\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{X}(P)$$

asociada a una conexión lineal adaptada $\omega \in \bigwedge^1(P, \lambda(\mathfrak{g}_0))$ sobre M y por un campo de tensores

$$J\colon u \in P \to J_u = J(u) \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1)$$

de tipo $(0,2)$ sobre M tal que

$$h_*(u)B(X)_u = C(X)_{h(u)} + (J_u(X))^*_{h(u)},$$

para todo $u \in P$ y $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, y siendo $z = h(u)$.

Demostración:
En primer lugar, notemos que si X es un vector tangente a Q en $z \in Q$, entonces, $\hat{l}_*X = 0$ si y sólo si X es de la forma A_z^* para un único $A \in \mathfrak{g}_1$ (en otras palabras, en el G_1-fibrado $\hat{l}\colon Q \to P$, es $\hat{l}_*X = 0$ si y sólo si X es vertical).

Unicidad: Del enunciado se sigue que

$$\hat{l}_*h_*B(X)_u = \hat{l}_*C(X)_z + \hat{l}_*J_u(X)_z^* = \hat{l}_*C(X)_z,$$

y como $\hat{l} \circ h = \mathrm{id_P}$ resulta que

$$B(X)_u = \hat{l}_* C(X)_{h(u)},$$

con lo cual, B, y por tanto J, están unívocamente determinados por C.

Existencia: Definamos en primer lugar una aplicación lineal $B\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{X}(P)$ mediante

$$B(X)_u = \hat{l}_* C(X)_z \quad u \in P\ ,\ X \in \mathfrak{g}_{-1}\ ,\ z = h(u).$$

Puesto que $\tilde{\theta}(C(X)) = X$, tenemos que

$$\theta(B(X)_X) = \theta \hat{l}_*(C(X)_z) = X,$$

con lo que B satisface la primera condición pedida. Por la condición 2) de la definición de C obtenemos que para $a \in \mathbf{G}_0$ es

$$\begin{aligned} R_{a*}B(X)_u = R_{a*} \circ \hat{l}_*(C(X)_z) &= \hat{l}_* \circ R_{a*}(C(X)_z) \\ &= \hat{l}_* C(l(a)^{-1}X) + \hat{l}_* D(a^{-1}, X)^* \end{aligned}$$

En efecto, observemos que $\hat{l} \circ R_a = R_a \circ \hat{l}$. Además, como para $a \in L_0$ es $\mathrm{Ad}_L(a)X = l(a)X \bmod(\mathfrak{L}_0)$, $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, resulta que si $a \in \lambda(\mathbf{G}_0)$, entonces, $\mathrm{Ad}_L(a)X$ también está en $\mathfrak{g}_{-1}$, y de ahí que $l(a^{-1})X = \mathrm{Ad}_L(a^{-1})X \equiv a^{-1}X$. Por otra parte, $D(a^{-1}, X)$ es la $\mathfrak{L}_0$-componente de $\mathrm{Ad}_L a^{-1}X$, y al estar a^{-1} en $\lambda(\mathbf{G}_0)$, dicha componente es cero pues $\mathrm{Ad}_L a^{-1}X \in \mathfrak{g}_{-1}$. Luego

$$R_{a*}B(X)_u = \hat{l}_* C(a^{-1}X)_{za} = B(a^{-1}X)_{ua}.$$

Por tanto, B satisface la segunda condición exigida.

A continuación, tenemos que

$$\hat{l}_*(h_*B(X)_u - C(X)_z) = \hat{l}_* \circ h_*(B(X)_u) - \hat{l}_* C(X)_z = B(X)_u - B(X)_u = 0,$$

y como $\hat{l}_* X = 0$ si y sólo X es de la forma A^*_z para un único $A \in \mathfrak{g}_1$, tenemos que $h_*B(X)_u - C(X)_z$ es de la forma $J_u(X)^*_z$ para un único $J_u(X) \in \mathfrak{g}_1$. Es claro que $J_u(X)$ es lineal con respecto a la variable X. Debemos probar que la aplicación

$$J\colon u \in P \to J_u \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1)$$

es un campo de tensores de tipo (0,2). Sea $a \in \mathbf{G}_0$. Teniendo en cuenta que $R_a \circ h = h \circ R_a$ se tiene que

$$R_{a*} \circ h_* B(X)_u = h_* R_{a*} B(X)_u = h_* B(l(a^{-1})X)_{ua}$$

$$= C(l(a^{-1})X)_{za} + J_{ua}(l(a^{-1})X)^*_{za},$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} R_{a*} \circ h_* B(X)_u &= R_{a*} C(X)_z + R_{a*} J_u(X)^*_z \\ &= C(l(a^{-1})X)_{za} + (\mathrm{Ad}(a^{-1}) J_u(X))^*_{za}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $a \in \lambda(\mathbf{G}_0)$ y la proposición 5.1, pag 51, de [70]. De todo lo anterior se sigue que

$$J_{ua}(l(a^{-1})X)^*_{za} = (\mathrm{Ad}(a^{-1}) J_u(X))^*_{za},$$

y por lo tanto

$$J_{ua}(l(a^{-1})X) = \mathrm{Ad}(a^{-1}) J_u(X) = a^t J_u(X),$$

lo que prueba que J es un campo de tensores de tipo (0,2) sobre M. □

La aplicación B y el campo de tensores J se dirán inducidos a partir de C por h.

Sea z un punto de Q y pongamos $u = \hat{l}(z)$. Como z y $h(u)$ están en la misma fibra de Q, existe un único $a \in \mathbf{L}_0$ tal que $z = h(u)a$. Ahora bien, como $u = \hat{l}(z) = \hat{l}(h(u)a) = \hat{l}(h(u))l(a) = ul(a)$, se sigue que $l(a) = e$. Además, puesto que la aplicación

$$l \colon a \in \mathbf{L}_0 \to l(a) \in GL(\mathfrak{g}_{-1}),$$

dada por $l(a)X = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)X, \ \mathrm{mod}(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)$, es una representación lineal de $\mathbf{L}_0$ en $\mathfrak{g}_{-1}$ cuyo núcleo es G_1, entonces el elemento a es de la forma $\exp(A)$ para un único $A \in \mathfrak{g}_1$.

Proposición 3.3.3 *Con las notaciones anteriores tenemos que*

$$C(X)_z = R_{a*} \circ h_* B(X)_u - (J_u(X) + D(a^{-1}, X))^*_z,$$

para todo $z \in Q$ y $X \in \mathfrak{g}_{-1}$.

Demostración:

Notemos antes que nada que $D(a^{-1}, X) = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})X - l(a^{-1})X$. Tenemos que $u = \hat{l}(z)$. Pongamos $y = h(u)$ y así, $z = ya$ (donde a es de la forma $\exp(A)$ para un único $A \in \mathfrak{g}_1$). Por la proposición anterior (donde ahora y juega el papel de z), resulta que

$$h_* B(X)_u = C(X)_y + J_u(X)^*_y,$$

de donde

$$\begin{aligned} R_{a*} \circ h_* B(X)_u &= R_{a*} C(X)_y + R_{a*} J_u(X)^*_y \\ &= C(l(a^{-1})X)_{ya} + D(a^{-1}, X)^*_{ya} + R_{a*} J_u(X)^*_y, \end{aligned}$$

y como $l(a^{-1}) = e$ porque $l(a) = e$, resulta que

$$R_{a*} \circ h_* B(X)_u = C(X)_z + D(a^{-1}, X)^*_z + (\mathrm{Ad}(a^{-1}) J_u(X))^*_z.$$

Ahora bien, como $a = \exp(A)$, tenemos que $a^{-1} = \exp(-A)$ y

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(a^{-1})(J_u(X)) &= \mathrm{Ad}(\exp(-A)) J_u(X) \\ = J_u(X) + [-A, J_u(X)] &+ \frac{1}{2}[-A, [-A, J_u(X)]] + ... = J_u(X). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$R_{a*} \circ h_* B(X)_u = C(X)_z + [D(a^{-1}, X) + J_u(X)]^*_z,$$

que es lo que se quería probar. □

Los dos resultados anteriores están demostrados en [106] (proposiciones 7.3 y 7.4). Sin embargo, el siguiente resultado, que construye una conexión de Cartan a partir de una aplicación campo básico B y un campo de tensores de tipo (0,2) y que, en cierto modo, constituye un recíproco de las proposiciones 3.3.2 y 3.3.3, no se encuentra allí enunciado explícitamente.

Proposición 3.3.4 *Sean $(Q, \hat{l})$ un $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado a la $\mathbf{G}_0$-estructura P, $h\colon P \to Q$ un homomorfismo admisible, $B\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{X}(P)$ una aplicación lineal verificando que*

$\theta(B(X)) = X$ *para todo* $X \in \mathfrak{g}_{-1}$,

$R_{a*} B(X) = B(a^{-1} X)$ *para todo* $a \in \lambda(\mathbf{G}_0)$, $X \in \mathfrak{g}_{-1}$,

y $J\colon u \in P \to J_u \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1)$ un campo de tensores arbitrario de tipo (0,2) en M. Entonces, la aplicación $C\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{X}(Q)$ dada por

$C(X)_z = h_* B(X)_u + J_u(X)^*_u$ *si* $h(u) = z$,

$C(X)_z = R_{a*} \circ h_* B(X)_u - (J_u(X) + D(a^{-1}, X))^*_z$ *si* $z = h(u)a$ *con* $a = \exp(A)$ *para* $A \in \mathfrak{g}_1$,

es una conexión de Cartan.

Demostración:

Supongamos en primer lugar que $z = h(u)$, $u \in P$. Entonces, para $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, es

$$\hat{l}_* C(X)_z = \hat{l}_* \circ h_* B(X)_u + \hat{l}_* J_u(X)^*_z,$$

y como $\hat{l} \circ h = \mathrm{id}$ se tiene que

$$\hat{l}_* C(X)_z = B(X)_u + \hat{l}_* J_u(X)^*_z = B(X)_u,$$

ya que $\hat{l}_* J_u(X)^*_z = 0$ porque $J_u(X) \in \mathfrak{g}_1$. Luego, $\theta_u(\hat{l}_* C(X)_y) = \theta_u B(X)_u = X$.

Nótese que, además, hemos visto que para cada $u \in P$ es $\hat{l}_* C(X)_{h(u)} = B(X)_u$.

Sea ahora $a \in \mathbf{G}_0$. Entonces, $l(a^{-1})X = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})X \in \mathfrak{g}_{-1}$ y por ello resulta

$$D(a^{-1}, X)^* = 0.$$

Teniendo esto en cuenta se sigue que

$$\begin{gathered} R_{a*} C(X)_z = R_{a*} h_* B(X)_u - R_{a*}(J_u(X))^*_z \\ = h_* R_{a*} B(X)_u - R_{a*}(J_u(X))^*_z = h_* B(l(a^{-1})X)_{ua} - (\mathrm{Ad}_L a^{-1} J_u(X))^*_{za}, \end{gathered}$$

mientras que

$$\begin{array}{rcl} C(l(a^{-1})X)_{za} & = & C(\mathrm{Ad}L(a^{-1})X)_{za} \\ = h_* B(\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})X)_{ua} & - & J_{ua}(\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})X)^*_{za} \\ = h_* B(\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})X)_{ua} & - & (\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1}) J_u X)^*_{za}, \end{array}$$

con lo cual,

$$R_{a*} C(X)_z = C(l(a^{-1})X)_{za} = C(l(a^{-1})X)_{za} + D(a^{-1}, X)^*_{za}.$$

Supongamos ahora que $a \in G_1$ y pongamos $a = \exp(A)$ (necesariamente para un único $A \in \mathfrak{g}_1$). Notemos que

$$\begin{gathered} \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})X = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(\exp(-A))X \\ = X + [-A, X] + \frac{1}{2}[-A, [-A, X]], \end{gathered}$$

y como $l(a^{-1})X$ es la $\mathfrak{g}_{-1}$-componente de $\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})X$, entonces $l(a^{-1})X = X$.

Tenemos entonces que

$$
\begin{aligned}
R_{a*}C(X)_z &= R_{a*}h_*B(X)_u - R_{a*}J_u(X)^*_z \\
&= R_{a*}h_*B(X)_u - (\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})J_u(X))^*_{za} \\
&= R_{a*}h_*B(X)_u - (J_u(X))^*_{za},
\end{aligned}
$$

pues $a = \exp(A)$ con $A \in \mathfrak{g}_{-1}$ y por tanto

$$\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})J_u(X) = J_u(X)\,.$$

Por otro lado tenemos que

$$
\begin{aligned}
C(l(a^{-1})X)_{za} &= R_{a*}h_*B(l(a^{-1})X) - (J_u(l(a^{-1})X) + D(a^{-1}, l(a^{-1})X))^*_{za} \\
&= R_{a*}h_*B(X)_u - (J_u(X) + D(a^{-1}, X))^*_{za} \\
&= R_{a*}h_*B(X)_u - (J_u(X))^*_{za} - (D(a^{-1}, X))^*_{za}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, $C(l(a^{-1})X)_{za} + (D(a^{-1}, X))^*_{za} = R_{a*}C(X)_z$. Esto prueba que $R_{a*}C(X) = C(l(a^{-1})X) + D(a^{-1}, X)^*$ para todo $a \in \mathbf{L}_0$ y $X \in \mathfrak{g}_{-1}$.

Finalmente, sea $z = h(u)a$ con $a = \exp(A)$, $A \in \mathfrak{g}_1$. Entonces

$$\hat{l}_*(C(X)_z) = \hat{l}_*R_{a*}h_*B(X)_u - \hat{l}_*(J_u(X) + D(a^{-1}, X))^*_z.$$

Ahora bien, $\hat{l}\circ R_a \circ h = \hat{l}(h(u)a) = \hat{l}(z) = u$, de tal modo que $\hat{l}\circ R_a\circ h = \mathrm{id}$. Así,

$$\hat{l}_*(C(X)_z) = B(X)_u - \hat{l}_*(J_u(X) + D(a^{-1}, X))^*_z.$$

Pero, por otra parte, $J_u(X) + D(a^{-1}, X) \in \mathfrak{L}_0$, con lo cual, $\hat{l}_*(J_u(X) + D(a^{-1}, X))^*_z$ es vertical en el fibrado $P(\lambda(\mathbf{G}_0), M)$. En definitiva, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}(C(X)_z) &= \hat{l}^*\theta(C(X)_z) = \theta\hat{l}_*(C(X)_z) \\
&= \theta(B(X)_u - \hat{l}_*(J_u(X) + D(a^{-1}, X))^*_z) \\
&= \theta(B(X)_u) - \theta(\hat{l}_*(J_u(X) + D(a^{-1}, X))^*_z) \\
&= X + 0 = X.
\end{aligned}
$$

Esto prueba que para $y \in Q$, $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, es

$$\theta_{\hat{l}(y)}(\hat{l}_*C(X)_y) = X.$$

□

Sean $\pi_Q\colon Q \to M$, $\pi_{Q'}\colon Q' \to M'$ dos $\mathbf{L}_0$-fibrados sobre dos variedades n-dimensionales M y M'. Sean ξ y ξ' dos conexiones de Cartan en Q y Q' respectivamente. Se dice que un isomorfismo de fibrados $\Phi\colon Q \to Q'$ *conserva la conexión de Cartan* si $\Phi^*\xi' = \xi$.

Si $\xi \in \bigwedge^1(q, \mathfrak{L})$ es una conexión de Cartan de tipo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ y Ξ es su curvatura, denotaremos por ξ_p y Ξ_p la $\mathfrak{g}_p$-componente de ξ y Ξ respectivamente, y por A_p la $\mathfrak{g}_p$-componente de $A \in \mathfrak{L}$.

Sean $\pi_P\colon P \to M$ un $\mathbf{G}_0$-fibrado principal y $(Q, \hat{l})$ un $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado a P. Sea ξ una conexión de Cartan en Q.

Observación 3.3.3 La variedad $P \subset \mathcal{F}M$ se puede pensar como la variedad cociente $P = Q/G_1$, de tal modo que P es un fibrado principal sobre M con grupo de estructura $\mathbf{L}_0/G_1 \equiv \mathbf{G}_0$. Con esta interpretación, la acción de $\mathbf{G}_0$ sobre P está dada por $([u],[a]) \in Q/G_1 \times (\mathbf{L}_0/G_1) \to [ua] \in Q/G_1$, donde los corchetes denotan las clases de equivalencia.

Si π_Q y π_P denotan las respectivas proyecciones de Q y P sobre M, la aplicación $\hat{l}\colon Q \to P$ es un G_1-fibrado principal y verifica que $\pi_Q = \pi_P \circ \hat{l}$.

Lema 3.3.1 *Para $a(\exp(z)) \in \mathbf{L}_0$, $a \in \mathbf{G}_0$ y $z \in \mathfrak{g}_1$, tenemos que*

a) $(R_{a\,\exp(z)})^*\xi_{-1} = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\xi_{-1}$,

b) $(R_{a\,\exp(z)})^*\xi_0 = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\xi_0 - [z, \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\xi_{-1}]$,

c) $(R_{a\,\exp(z)})^*\xi_1 = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\xi_1 - [z, \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\xi_0] + \frac{1}{2}[z,[z, \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\xi_{-1}]]$.

En particular, para $a \in \mathbf{G}_0$, $(R_a)^*\xi_i = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\xi_i$, $i = -1, 0, 1$.

Demostración:

Se tiene que

$$\begin{aligned}(R_{a\,\exp(z)})^*(\xi_{-1} \oplus \xi_0 \oplus \xi_1) &= \mathrm{Ad}(\exp(-z)a^{-1})(\xi_{-1} \oplus \xi_0 \oplus \xi_1)\\ &= \mathrm{Ad}(\exp(-z))\mathrm{Ad}(a^{-1})(\xi_{-1} \oplus \xi_0 \oplus \xi_1)\\ &= \exp\ \mathrm{ad}(-z)(\mathrm{Ad}(a^{-1})\xi_{-1} + \mathrm{Ad}(a^{-1})\xi_0 + \mathrm{Ad}(a^{-1})\xi_1)\\ &= \mathrm{Ad}(a^{-1})\xi_{-1} + \mathrm{Ad}(a^{-1})\xi_0 - [z, \mathrm{Ad}(a^{-1})\xi_{-1}]\\ &\quad + \mathrm{Ad}(a^{-1})\xi_1 - [z, \mathrm{Ad}(a^{-1})\xi_0] + \frac{1}{2}[z,[z, \mathrm{Ad}(a^{-1})\xi_{-1}]],\end{aligned}$$

porque en general, para $z \in \mathfrak{g}_1$ es

$$\exp\ \mathrm{ad}(z)(X) = X + [z, X] + \frac{1}{2}[z,[z,X]].$$

□

Lema 3.3.2 *Sea ξ una conexión de Cartan en Q. Entonces existe una única 1-forma $\mathfrak{g}_{-1}$-valuada θ sobre P verificando las siguientes condiciones:*

i) $(R_a)^*\theta = l(a_{-1})\theta, \quad a \in \mathbf{G}_0$.

ii) Sea $\tilde{X}$ un vector tangente a P. Entonces, $\theta(\tilde{X}) = 0$ si y sólo si $\tilde{X}$ es un vector vertical.

iii) $\hat{l}^*\theta = \xi_{-1}$, *donde* $\hat{l}\colon Q \to P$.

Demostración:
Definimos

$$\theta_{\hat{l}(u)}(\hat{l}_*(V_u)) = (\xi_{-1})_u(V_u), \quad u \in Q, \;\; V_u \in T_u(Q).$$

Veamos que θ está bien definida.

Supongamos que $u, u' \in Q$ son tales que $\hat{l}(u) = \hat{l}(u')$. Sean $V_u \in T_u(Q)$ y $W_{u'} \in T_{u'}(Q)$ tales que $\hat{l}_*(V_u) = \hat{l}_*(W_{u'})$. Existe $a \in G_1$ tal que $u' = ua$ y $W_{u'} = (R_a)_*(V_u)$. Por tanto

$$\theta_{\hat{l}(u')}(\hat{l}_*(W_{u'})) = (\xi_{-1})_{u'}(R_a)_*(V_u) = (\xi_{u'}(R_a)_*(V_u))_{-1}$$

$$= ((R_a)^*\xi_u(V_u))_{-1} = (\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\xi_u(V_u))_{-1}.$$

Ahora bien, poniendo $a = \exp(z)$, con $z \in \mathfrak{g}_1$, resulta

$$((R_a)^*\xi_u(V_u))_{-1} = (\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\xi_u(V_u))_{-1}$$

$$= (\mathrm{Ad}(\exp(-z))\xi_u(V_u))_{-1} = (\exp(\mathrm{ad}(-z))(\xi_u(V_u)))_{-1}$$

$$= (\xi_{-1})_u(V_u) + (\xi_0)_u(V_u) + (\xi_1)_u(V_u) + [-z, (\xi_{-1})_u(V_u)]$$
$$+[-z, (\xi_0)_u(V_u)] + \frac{1}{2}[-z, [-z, (\xi_{-1})_u(V_u)]] = (\xi_{-1})_u(V_u),$$

ya que el único sumando en $\mathfrak{g}_{-1}$ es $(\xi_{-1})_u(V_u)$. Esto prueba que θ está correctamente definida y demuestra además el apartado iii).

Probaremos a continuación los puntos i) y ii).

Sea $a \in \mathbf{G}_0$. Como $\hat{l} \circ R_a = R_a \circ \hat{l}$, se tiene que

$$\hat{l}^*(R_a)^*\theta = (R_a)^*\hat{l}^*\theta = (R_a)^*\xi_{-1} = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\xi_{-1}$$

por el lema 3.3.1. Así,

$$\hat{l}^*(R_a)^*\theta = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\hat{l}^*\theta.$$

Si $\tilde{X}$ es un vector tangente a P existe X tangente a Q tal que $\hat{l}_*(X) = \tilde{X}$; luego

$$\begin{aligned} ((R_a)^*\theta)(\hat{l}_*X) &= ((R_a)^*\hat{l}^*\theta)(X) \\ = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\hat{l}^*\theta(X) &= \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})\theta\hat{l}_*(X), \end{aligned}$$

de donde

$$(R_a)^*\theta = \mathrm{Ad}(a^{-1})\theta.$$

Ahora bien, para todo $a \in \mathbf{G}_0$ y todo $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ se verifica que

$$\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})(X) = l(a^{-1})X,$$

con lo que $(R_a)^*\theta = l(a^{-1})\theta$.

Para probar ii), sean $\tilde{X}$ un vector tangente vertical en P y X un vector tangente a Q tales que $\hat{l}_*(X) = \tilde{X}$. Además, X es también vertical porque $(\pi_Q)_*(X) = (\pi_P)_*(\hat{l}_*(X)) = (\pi_P)_*(\tilde{X}) = 0$. Podemos por tanto suponer $X = A^*$, con $A \in \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. Como ξ es una conexión de Cartan, $\xi(A^*) = A$. Por tanto,

$$\theta(\hat{l}_*(X)) = \hat{l}^*\theta(X) = \xi_{-1}(X) = \xi_{-1}(A^*) = 0,$$

porque $A \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

Recíprocamente, si $\theta(\tilde{X}) = \theta(\hat{l}_*(X)) = \xi_{-1}(X) = (\xi(X))_{-1} = 0$, se sigue que $(\pi_Q)_*(X) = 0$, y en consecuencia, $(\pi_P)_*(\tilde{X}) = (\pi_P)_*(\hat{l}_*(X)) = 0$, con lo que $\tilde{X}$ es vertical en P. □

Nótese que la 1-forma θ del enunciado anterior no es necesariamente la forma canónica de P.

En el desarrollo anterior se ha demostrado además el siguiente resultado:

Observación 3.3.4 Para $a \in G_1$, $a = \exp(z)$ con $z \in \mathfrak{g}_1$, es

$$\begin{aligned} ((R_a)^*\xi)_{-1} &= \xi_{-1}, \\ ((R_a)^*\xi)_0 &= \xi_0 - [z, \xi_{-1}], \\ ((R_a)^*\xi)_1 &= \xi_1 - [z, \xi_0] + \frac{1}{2}[z, [z, \xi_{-1}]]. \end{aligned}$$

Observación 3.3.5 Nótese que los apartados i) y ii) del lema 3.3.2 nos indican que, cuando $\mathbf{G}_0 = GL(n, \mathbb{R})$ y P es el fibrado de referencias de M, entonces θ es la forma canónica.

Supongamos ahora que $\Xi_{-1} = 0$ y sea $h\colon P \to Q$ un homomorfismo admisible (definición 3.1.2). Notemos que, como $\hat{l}^*\theta = \xi_{-1}$ y $\hat{l} \circ h = (\mathrm{id})_{\mathbf{G}_0}$, entonces $\theta = h^*\hat{l}^*\theta = h^*\xi_{-1}$.

Lema 3.3.3 *La* 1*-forma* $\mathfrak{g}_0$*-valuada* $h^*\xi_0$ *es una* $\mathbf{G}_0$*-conexión.*

Demostración:
Sea $a \in \mathbf{G}_0$. Como h es un homomorfismo de fibrados correspondiente a la inclusión $i_0\colon \mathbf{G}_0 \to \mathbf{L}_0$, h conmuta con R_a; por tanto, del lema 3.3.1 se sigue que

$$(R_a)^*h^*\xi_0 = h^*(R_a)^*\xi_0 = h^*\mathrm{Ad}(a^{-1})\xi_0 = \mathrm{Ad}(a^{-1})h^*\xi_0.$$

Por otra parte, dado $A \in \mathfrak{g}_0$, para demostrar que $(h^*\xi_0)(A^*) = A$ bastará ver que $h_*A^* = (i_{0*}A)^*$, pues así resultaría que

$$(h^*\xi_0)A^* = \xi_0(h_*A^*) = \xi_0(i_{0*}A)^* = \xi_0 A^* = A,$$

ya que $\xi(A^*) = A \in \mathfrak{g}_0$.

Se trata entonces de demostrar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(P) & \xrightarrow{h_*} & \mathfrak{X}(Q) \\ *\uparrow & & \uparrow * \\ \mathfrak{g}_0 & \xrightarrow{i_{0*}} & \mathfrak{L}_0 \end{array}$$

es conmutativo. Para ello, sean $z \in Q$ y $L_z\colon a \in \mathbf{G}_0 \to za \in Q$. Del hecho de que h sea un homomorfismo de fibrados correspondiente a la inclusión i_0 se sigue que, para todo $u \in P$, es

$$(h \circ L_u)(a) = L_{h(u)} i_0(a)\,.$$

Además, $(A^*)_u = (L_u)_*(e)(A)$. Luego,

$$\begin{aligned} (h_*A^*)_{h(u)} &= (h_*(L_u)_*(e)(A))_{h(u)} = ((h \circ L_u)_*(e)(A))_{h(u)} \\ &= ((L_{h(u)} \circ i_0)_*(e)(A))_{h(u)} = ((L_{h(u)})_* i_{0*}(e)(A))_{h(u)} \\ &= ((L_{h(u)})_*(e)(i_{0*}(A)))_{h(u)} = (i_{0*}A)^*_{h(u)}, \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. □

Nótese además que la conmutatividad del diagrama anterior es válida para cualquier homomorfismo de fibrados correspondiente a un homomorfismo entre los grupos de estructura.

La ecuación de estructura $\Xi = \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}[\xi, \xi]$ se descompone en tres ecuaciones [90]:

$$\begin{aligned}
\Xi_{-1} &= \mathrm{d}\xi_{-1} + [\xi_0, \xi_{-1}], \\
\Xi_0 &= \mathrm{d}\xi_0 + \frac{1}{2}[\xi_0, \xi_0] + [\xi_{-1}, \xi_1], \\
\Xi_1 &= \mathrm{d}\xi_1 + [\xi_0, \xi_1].
\end{aligned}$$

Por tanto, haciendo el pull-back por h de Ξ_{-1} y teniendo en cuenta que $\Xi_{-1} = 0$, se verifica que

$$0 = h^*\Xi_{-1} = \mathrm{d}\theta + [h^*\xi_0, \theta],$$

debido a que $h^*\xi_{-1} = \theta$ y a que si $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$, entonces

$$\begin{gathered}
h^*[\xi_0, \xi_{-1}](X, Y) = [\xi_0, \xi_{-1}](h_*X, h_*Y) \\
= [\xi_0 h_*X, \xi_{-1} h_*Y] - [\xi_0 h_*Y, \xi_{-1} h_*X] \\
= [h^*\xi_0 X, h^*\xi_{-1} Y] - [h^*\xi_0 Y, h^*\xi_{-1} X] = [h^*\xi_0, h^*\xi_{-1}](X, Y).
\end{gathered}$$

Se sigue, por tanto, del hecho de que $\mathrm{d}\theta + [h^*\xi_0, \theta] = 0$, que $h^*\xi_0$ es una conexión libre de torsión.

La clase de equivalencia de $h^*\xi_0$ define por tanto una $\mathbf{G}_0$-estructura sobre M, que es independiente de la elección de h. En efecto, si $h' \colon P \to Q$ es otra sección homomórfica, es decir, otra aplicación entre fibrados correspondiente a la inclusión i_0 y tal que $\hat{l} \circ h' = (\mathrm{id})_P$, entonces, veremos que existe una única función $\mathfrak{g}_1$-valuada F sobre P verificando que

$$F(za) = F(z)a, \quad z \in P,\ a \in \mathbf{G}_0,$$

y

$$h'(z) = h(z)\exp(F(z)), \ \ z \in P.$$

En efecto, como $h(z)$ y $h'(z)$ están en la misma fibra en el G_1-fibrado $\hat{l} \colon Q \to P$, existe un único $F_z \in \mathfrak{g}_1$ tal que $h'(z) = h(z)\exp(F_z)$. Definimos $F \colon z \in P \to F(z) = F_z \in \mathfrak{g}_1$. Identificando $i_0(a)$ con a para $a \in \mathbf{G}_0$ se tiene que

$$\begin{gathered}
h(za)a^{-1}(\exp(F_z))a = h(z)aa^{-1}\exp(F_z)a \\
= h(z)\exp(F_X)a = h'(z)a = h'(za),
\end{gathered}$$

de donde se sigue que

$$\exp(F_{za}) = a^{-1}\exp(F_z)a.$$

Ahora bien, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \stackrel{\mathcal{A}_{a^{-1}}}{\longrightarrow} & G_1 \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ \mathfrak{g}_1 & \stackrel{\mathrm{Ad}(a^{-1})}{\longrightarrow} & \mathfrak{g}_1 \end{array}$$

donde $\alpha_{a^{-1}}(b) = a^{-1}ba$, nos dice que

$$\exp(F_{za}) = a^{-1}\exp(F_z)a = \exp(\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})F_z),$$

para todo $z \in P$ y $a \in \mathbf{G}_0$. Ahora, como $a \in \mathbf{G}_0$ y $F_z \in \mathfrak{g}_1$ se sigue que

$$\mathrm{ad}(a^{-1})F_z = F_z a\,.$$

Además $\exp\colon \mathfrak{g}_1 \to G_1$ es biyectiva; luego

$$F_{za} = F_z a,$$

como se quería demostrar. El hecho de que $h'^*\xi_0$ y $h^*\xi_0$ sean equivalentes y por tanto, que la $\mathbf{G}_0$-estructura inducida sobre M sea independiente de la elección de h, se sigue ahora del siguiente resultado:

Lema 3.3.4 *Sean h, $h'\colon P \to Q$ relacionadas por la igualdad*

$$h'(z) = h(z)\exp(F(z)),$$

con $z \in P$ y F una función $\mathfrak{g}_1$-valuada sobre P. Entonces, sobre P se verifica la ecuación $h'^*\xi_0 - h^*\xi_0 = [\theta, F]$, es decir,

$$h'^*\xi_0(V)_u - h^*\xi_0(V)_u = [\theta_u(V), F(u)]\ ,\ V \in T_u(P).$$

Demostración:

Sean B, $B'\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{X}(P)$ las aplicaciones campo básico inducidas a partir de la conexión de Cartan ξ por h y h' respectivamente, según la proposición 3.3.2. Entonces ([106], pag. 126)

$$B'(X)_u = B(X)_u + [F(u), X]^*_u,\ \ u \in P,\ X \in \mathfrak{g}_1$$

Ahora, para cada campo vertical A^* con $A \in \mathfrak{g}_0$ se tiene que

$$h'^*\xi_0(A^*_u) - h^*\xi_0(A^*_u) = A - A = 0 = [\theta_u(A^*_u), F(u)],$$

porque $\theta_u(A^*_u) = 0$. Puesto que el subespacio generado por los campos básicos $\{B(X)_u\ ;\ X \in \mathbb{R}^n \equiv \mathfrak{g}_{-1}\}$ es horizontal en $T_u(P)$, bastará probar que

$$h'^*\xi_0(B(X)_u) - h^*\xi_0(B(X)_u) = [\theta_u(B(X))_u, F(u)],$$

y, en efecto,

$$h'^*\xi_0\big(B(X)_u\big) - h^*\xi_0\big(B(X)_u\big) = h'^*\xi_0\big(B'(X)_u - [F(u),X]^*_u\big) - h^*\xi_0(B(X)_u)$$

$$= -h'^*\xi_0\big([F(u),X]^*_u\big) = -[F(u),X] = [\theta_u(B(X))_u, F(u)]$$

y así la clase de $h^*(\xi_0)$ es independiente de la elección de h. □

Diremos que la estructura definida por la clase de equivalencia de $h^*(\xi_0)$, que es independiente de la elección de h, está inducida por (Q,ξ).

Recíprocamente, toda $\mathbf{G}_0$-estructura sobre M está inducida por una única conexión de Cartan verificando ciertas condiciones de curvatura, tal y como veremos en la sección siguiente.

3.4 Conexiones normales de Cartan

El contenido de esta sección se debe, en su mayor parte, a N. Tanaka [106], aunque Ochiai [90] (con las limitaciones que hemos comentado en la introducción) lo adaptó al contexto de las estructuras holonómicas de segundo orden y caracterizó la nulidad de los grupos de cohomología de Spencer $H^{2,1}(\mathfrak{L})$ y $H^{1,1}(\mathfrak{L})$ para un álgebra simple graduada $\mathfrak{L}$. Al final de la sección damos una realización semi-holonómica de los teoremas fundamentales de Tanaka sobre conexiones normales de Cartan.

Para un álgebra de Lie graduada $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ podemos definir un complejo de cocadenas $(C^{p,q}(\mathfrak{L}), \partial)$ que difiere del complejo de Spencer $(\mathcal{C}^{p,q}(\mathfrak{g}_0), \delta)$ del álgebra lineal $\mathfrak{g}_0 \equiv \lambda(\mathfrak{g}_0) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$, cuya definión hemos dado en la sección 2.6. Este nuevo complejo está relacionado con él, aunque no haremos uso de dicha relación. Llamaremos

$$C^{p,q}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{g}_{p-1} \otimes \bigwedge^q (\mathfrak{g}^*_{-1}).$$

El operador coborde $\partial = \partial_{p,q} \colon C^{p,q}(\mathfrak{L}) \to C^{p-1,q+1}(\mathfrak{L})$ lleva un elemento $c \in C^{p,q}(\mathfrak{L})$, pensado como aplicación multilineal antisimétrica

$$c \colon \mathfrak{g}_{-1} \times \overset{q)}{\cdots} \times \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{p-1},$$

en la aplicación $q+1$-lineal antisimétrica a valores en $\mathfrak{g}_p$ dada por

$$(\partial c)(x_1,\ldots,x_{q+1})\sum_{i=1}^{q+1}(-1)^{i+1}[x_i, c(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{q+1})],$$

para cualesquiera $x_1,\ldots,x_{q+1}\in\mathfrak{g}_{-1}$. Nótese que

$$\mathfrak{g}_{p-1}\subset\mathfrak{g}_0^{(p-1)}.$$

Se verifica fácilmente que

$$\partial\circ\partial=0,$$

y por tanto, tenemos unos grupos de cohomología

$$H^{p,q}(\mathfrak{L})=\mathrm{Ker}(\partial_{p,q})/\mathrm{Im}(\partial_{p+1,q-1}).$$

A estos grupos de cohomología $H^{p,q}(\mathfrak{L})$ Ochiai los llama impropiamente grupos de cohomología de Spencer, pero aquí no les daremos nombre especial ya que sólo necesitaremos las dos siguientes propiedades, debidas a Ochiai [90], pag. 177 y 183, la segunda de las cuales deberá tenerse presente al hablar de estructuras de Cartan invariantes llanas en los dos próximos capítulos:

Teorema 3.4.1 *Sea $\mathfrak{L}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$ un álgebra de Lie simple graduada.*

i) Se tiene que

$$H^{2,1}(\mathfrak{L})=0$$

excepto para $\mathfrak{L}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ y $\mathfrak{L}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, en ambos casos con la graduación proyectiva.

ii) Se tiene que

$$H^{1,1}(\mathfrak{L})=0$$

excepto para $\mathfrak{L}=\mathfrak{sl}(1+n,\mathbb{F})$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si $H^{1,1}(\mathfrak{L})=0$ y $P\subset\mathcal{F}M$ es una $\mathbf{G}_0$-estructura que admite conexiones lineales adaptadas sin torsión, entonces todas ellas son equivalentes.

Dado un campo de tensores T de tipo $(1,2)$ sobre una variedad M dotada de una $\mathbf{G}_0$-estructura $P\subset\mathcal{F}M$, recordemos que T está determinado por una función (que también denotaremos por T) dada por

$$T\colon P\to \mathrm{L}_2(\mathfrak{g}_{-1}\times\mathfrak{g}_{-1};\mathfrak{g}_{-1})$$

de tipo $(1,2)$. Podemos definir un nuevo campo de tensores

$$T^*\colon P\to\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1};\mathfrak{g}_0)$$

de tipo $(0,1)$ sobre M por

$$T^*(u)(X) = \sum_i [T(u)(X, e_i), f^i],$$

para $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, $u \in P$, donde $\{e_i\}$ es una base de $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\{f^i\}$ es la base dual de $\mathfrak{g}_1$ respecto a la forma de Killing $B_{\mathfrak{L}}$.

La *curvatura de Ricci* (o *campo de tensores de Ricci*) de una conexión lineal $\omega \in \bigwedge^1(P, \lambda\mathfrak{g}_0)$ (es decir, adaptada a P) y cuya la aplicación campo básico denotamos $B\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{X}(P)$, es, por definición, el campo de tensores sobre M de tipo $(0,2)$

$$R^*\colon P \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_1) \equiv \mathrm{L}_2(\mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_{-1}, \mathbb{R})$$

que se obtiene a partir del tensor de curvatura R como

$$R^*(u)(X) = \sum_i [R(u)(X, e_i), f^i]\,.$$

Teorema 3.4.2 [106] *Sea M una variedad dotada de una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$. Existe un único campo de tensores T_P de tipo $(1,2)$ sobre M verificando las condiciones*

i) $T_P{}^* = 0$,

ii) existe al menos una conexión lineal sobre M adaptada a la $\mathbf{G}_0$-estructura P cuyo tensor de torsión es T_P.

El campo de tensores T del teorema anterior se llama *campo de tensores de torsión* de la $\mathbf{G}_0$-estructura P. Recordemos que en las hipótesis anteriores, si dos conexiones lineales sobre M son equivalentes, su tensor de torsión es el mismo. De ahí que se llame *tensor de torsión* T de una clase $[\omega]$ de conexiones lineales sobre M adaptadas a P y mutuamente equivalentes a (el campo de tensores de) la torsión T de cualquiera de las conexiones de la clase. La siguiente definición de *clase admisible* de conexiones lineales adaptadas equivalentes (que pueden tener torsión) se debe a Tanaka [106] y no debe ser confundida con el concepto de conexión de Cartan *admisible* asociada a una clase de conexiones lineales adaptadas *sin torsión*, que aparece en Ochiai [90].

Definición 3.4.1 *Diremos que una clase $[\omega]$ de conexiones lineales sobre M adaptadas a P y mutuamente equivalentes es una* **clase admisible** *si su torsión T verifica $T^* = 0$, o equivalentemente, si T coincide con el campo de tensores de torsión de P.*

Para cada $z \in Q$ y X, $X' \in \mathfrak{g}_{-1}$, podemos encontrar un único par de elementos

$$S(z)(X,\, X') \in \mathfrak{g}_{-1}\,,$$
$$K(z)(X,\, X') \in \mathfrak{L}_0$$

tales que

$$[C(X), C(X')]_z = C(S_z(X, X'))_z + K_z(X, X')^*_z,$$

o, equivalentemente, $[X^*, (X')^*]_z = (S_z(X, X') + K_z(X, X'))^*_z$. Los elementos $S_z(X, X')$ y $K_z(X, X')$ son bilineales y antisimétricos con respecto a las variables X y X'. En cada $z \in Q$ definimos una aplicación lineal $S^*_z\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_0$ por

$$S^*_z(X) = \sum_i [S_z(X, e_i), f^i],$$

para $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, y donde, como antes, $\{e_i\}$ es una base de $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\{f^i\}$ la base dual en $\mathfrak{g}_1$. Además, denotemos por $W_z(X, X')$ la $\mathfrak{g}_0$-componente de $K_z(X, X')$ en la descomposición $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ y definamos, en cada $z \in Q$, una aplicación lineal $W^*_z\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_1$ por

$$W^*_z(X) = \sum_i [W_z(X, e_i), f^i],$$

para $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ y $\{e_i\}$, $\{f^i\}$ como arriba. Es claro que S^*_z y W^*_z están bien definidas.

Proposición 3.4.1 [106] *Consideremos el fibrado $\hat{l}\colon Q \to P$ asociado a P. Sea C una conexión de Cartan en Q. La familia $\mathcal{N}(C)$ de aplicaciones campo básico en P inducida por C (es decir, la única aplicación campo básico B inducida por C y todas las aplicaciones campo básico equivalentes a ella) forma una clase de aplicaciones campo básico equivalentes en P. La clase $\mathcal{N}(C)$ es admisible si y sólo si $S^* = 0$.*

Sean P_1, P_2 dos $\mathbf{G}_0$-estructuras sobre dos variedades M_1, M_2, y sean $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ clases de campos básicos equivalentes en P_1, P_2, respectivamente. Un isomorfismo $\varphi\colon P_1 \to P_2$ se dice *un isomorfismo de* $(P_1, \mathcal{N}_1)$ *en* $(P_2, \mathcal{N}_2)$ si $\varphi\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$. Un difeomorfismo f de M_1 en M_2 se dice un *isomorfismo de* $(M_1, \mathcal{N}_1)$ *en* $(M_2, \mathcal{N}_2)$ si existe un (único) isomorfismo φ de $(P_1, \mathcal{N}_1)$ en $(P_2, \mathcal{N}_2)$ que cubre f.

Definamos ahora un endomorfismo Q_L de $\mathcal{L}(\mathfrak{g}_{-1}; \mathfrak{g}_1)$ por

$$Q_L(J)(X) = \sum_i [[J(e_i,\, X],\, f^i]\,,$$

para todo $J \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_{-1};\mathfrak{g}_1)$ y $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, siendo de nuevo $\{e_i\}$ una base de $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\{f^i\}$ la base dual en $\mathfrak{g}_1$.

Lema 3.4.1 *Para todo $J \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_{-1};\mathfrak{g}_1)$ y $a \in \mathbf{G}_0$ es $Q_L(J) = (Q_L(J))^a$, donde, en general, $J^a \equiv a^{-1}J$.*

Más aun, definimos un endomorfismo Φ_L de $\mathcal{L}(\mathfrak{g}_{-1};\mathfrak{g}_1)$ como

$$\Phi_L(J) = \frac{1}{2}J - Q_L(J), \quad J \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_{-1};\mathfrak{g}_1).$$

Proposición 3.4.2 [106] *El endomorfismo Φ_L es un automorfismo si y sólo si $H^{2,1}(\mathfrak{L}) = 0$.*

Por lo dicho antes, si $\mathfrak{L}$ es simple y $\dim(M) > 2$ se verifica que Φ_L es un automorfismo. De ahora en adelante supondremos que el endomorfismo Φ_L es un automorfismo.

Teorema 3.4.3 [106] *Sea $\mathcal{N}$ una clase admisible de aplicaciones campo básico equivalentes en P y sea $(Q,\hat{l})$ el $\mathbf{L}_0$-fibrado sobre M asociado a la $\mathbf{G}_0$-estructura P. Existe una conexión de Cartan C en $(Q,\hat{l})$ verificando las condiciones*

$$\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}, \quad S^* = 0, \quad W^* = 0.$$

Demostración:

Fijemos una aplicación campo básico B en $\mathcal{N}$ y un homomorfismo admisible $h\colon P \to Q$. Como estamos suponiendo que Φ_L es un automorfismo, podemos encontrar, en cada $u \in P$, una única aplicación lineal $J_u\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_1$ tal que

$$R^*_u = \Phi_L(J_u),$$

donde R^* es el tensor de Ricci de B. Del lema anterior se sigue que la aplicación $J\colon u \in P \to J_u \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}_{-1};\mathfrak{g}_1)$ es un campo de tensores de tipo (0,2) sobre M. Estos B, h y J así obtenidos determinan, según la proposición 3.3.4, una conexión de Cartan, que expresamos de la forma $C\colon \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{X}(P)$ en $(Q,\hat{l})$. Es claro que B y J coinciden con la aplicación campo básico y el campo de tensores inducidos a partir de C por h, y por ello $\mathcal{N}(C) = \mathcal{N}$. Como $\mathcal{N}$ es admisible, se sigue ([106] prop. 7.5) que $S^* = 0$. Finalmente, sea $\tilde{W}^*$ el campo de tensores, único, inducido por W^* sobre P dado por

$$W^* = \tilde{W}^* \circ \hat{l}\,.$$

Entonces, con las notaciones anteriores ([106] prop 7.5),

$$\tilde{W}^*(X) = R^*(X) - \frac{1}{2}J(X) + \sum_i [[J(e_i),\, X],\, f^i].$$

De ahí, y del hecho de que $R^*(X) = \Phi_L(J_X)$ resulta que

$$\begin{aligned}\tilde{W}^*(X) &= \frac{1}{2}J(X) - Q_L(J)(X) - \frac{1}{2}J(X)^* \sum_i [[J(e_i), X], f^i] \\ &= -Q_L(J)(X) + Q_L(J)(X) = 0.\end{aligned}$$

Así, $\tilde{W}^*(X) = 0$ y $W^* = 0$. □

Definición 3.4.2 *La conexión de Cartan C del teorema anterior se dice una* **conexión de Cartan normal**.

Sean, de nuevo, $\{e_i\}$ una base de $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\{f^i\}$ una base de $\mathfrak{g}_1$ duales con respecto a la forma de Killing B de $\mathfrak{L}$. Para cualquier $X \in \mathfrak{L}$, consideramos el campo de vectores $\check{\xi}(X)$ sobre Q dado en la observación 3.3.1.

Definición 3.4.3 *La 1-forma $\mathfrak{L}_0$-valuada Ξ^* sobre Q definida por*

$$\Xi^*_u(X) = \sum_i [f^i, \Xi(\check{\xi}(e_i), X)], \quad u \in Q,\ X \in T_u(Q),$$

se denomina ***-curvatura** *de la conexión de Cartan (Q, ξ).*

Aquí, $\check{\xi}(e_i)$ se evalúa en el punto u y $\Xi(\check{\xi}(e_i), X)$ toma valores en $\mathfrak{L}$.
La definición de Ξ^* es independiente de la elección de la base $\{e_i\}$.
En [106], las componentes de la *-curvatura en $\mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{g}_1$ se denotan, respectivamente, por S^* y W^*. Por tanto

Proposición 3.4.3 *Una conexión de Cartan (Q, ξ) sobre M es normal si $\Xi^* = 0$.*

Puesto que si $\Xi = 0$ entonces $\Xi^* = 0$, es claro que toda conexión de Cartan llana es normal. Si (Q, ξ) es normal, se tiene, en particular, que la $\mathfrak{g}_0$-componente Ξ^*_0 de Ξ^* es cero y por ello, $\Xi_{-1} = 0$, pues, en general, $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, $[\mathfrak{g}_1, X] = 0$ implica que $X = 0$.
Los dos resultados siguientes pueden verse en [106].

Teorema 3.4.4 *Se verifica que:*

i) Sea (Q, ξ) una conexión de Cartan normal en un $\mathbf{L}_0$-fibrado Q sobre M. Entonces (Q, ξ) induce una $\mathbf{G}_0$-estructura sobre M. Recíprocamente, si $(P, [\chi])$ es una $\mathbf{G}_0$-estructura sobre M, existe una conexión de Cartan normal que induce la estructura $(P, [\chi])$.

ii) Sean (Q, ξ) y (Q', ξ') conexiones de Cartan normales sobre dos variedades M y M' respectivamente, y sean $(P, [\chi])$ y $(P', [\chi'])$ las respectivas $\mathbf{G}_0$-estructuras inducidas. Entonces, todo isomorfismo $\phi\colon (Q, \xi) \to (Q', \xi')$ induce un isomorfismo de fibrados $\tilde{\phi}\colon (P, [\chi]) \to (P', [\chi'])$ tal que $\tilde{\phi} \circ \hat{l} = \hat{l}' \circ \phi$, donde $\hat{l}\colon Q \to P$ y $\hat{l}'\colon Q' \to P'$ son las proyecciones. Recíprocamente, para todo isomorfismo $\tilde{\phi}\colon (P, [\chi]) \to (P', [\chi'])$ existe un único isomorfismo $\phi\colon (Q, \xi) \to (Q^{\xi}, \omega')$ tal que $\tilde{\phi} \circ \hat{l} = \hat{l}' \circ \phi$.

iii) Una conexión de Cartan normal (Q, ξ) es llana si y sólo si la $\mathbf{G}_0$-estructura inducida sobre M es llana.

Proposición 3.4.4 *Sean P un $\mathbf{G}_0$-fibrado y Q un $\mathbf{L}_0$-fibrado principal sobre M. Sea $h\colon P \to Q$ una homomorfismo de fibrados correspondiente a la inclusión $i_0\colon \mathbf{G}_0 \to \mathbf{L}_0$. Entonces, para cada $\mathbf{G}_0$-conexión χ (para cada conexión adaptada) de torsión nula sobre P, existe una única conexión de Cartan normal (Q, ξ) verificando que $h^*\xi_0 = \chi$ y $h^*\xi_{-1} = \theta$, donde θ es la 1-forma $\mathfrak{g}_{-1}$-valuada sobre P dada por el lema 3.3.2.*

La definición de $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado dada por Tanaka, así como el teorema 3.4.4, están realizados en un marco puramente abstracto. Sin embargo, lo visto en las secciones anteriores, y, más concretamente, el teorema 3.2.1 y el teorema 1.8.1, nos permiten integrar ambos en el marco de las referencias semi-holonómicas de segundo orden. Así, se tiene:

Teorema 3.4.5 *Todo $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado sobre M es isomorfo a un subfibrado Q del fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias semi-holonómicas de segundo orden de M. Cuando el campo de tensores T del teorema 3.4.2 verifica $T^* = 0$ se puede construir sobre Q una conexión normal de Cartan ξ que induce sobre la $\mathbf{G}_0$-estructura $P = \pi_1^2(Q)$ sobre M una clase de conexiones adaptadas equivalentes. Recíprocamente, toda $\mathbf{G}_0$-estructura $(P, [\chi])$ sobre M está inducida por una conexión de Cartan normal en un subfibrado Q del fibrado de referencias semi-holonómicas de segundo orden M del modo anterior.*

Como hemos visto, un $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado es isomorfo a un subfibrado Q del fibrado $\hat{\mathcal{F}}^2(M)$ de referencias semi-holonómicas de segundo orden. En particular, si la torsión de la conexión es nula, un tal $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado es isomorfo a un subfibrado Q del fibrado de referencias holonómicas de segundo orden. En esas condiciones, Ochiai [90], usando la forma canónica sobre $\mathcal{F}^2(M)$ probó lo siguiente:

Corolario 3.4.1 *Sea $\mathcal{F}^2(M)$ el fibrado de referencias holonómicas de orden dos sobre una variedad M dotada de una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ y $[\chi]$ una clase de conexiones adaptadas equivalentes sobre M. Se puede construir un $\mathbf{L}_0$-subfibrado $\tilde{Q}$ de $\mathcal{F}^2(M)$ sobre P y una única conexión de Cartan normal sobre $\tilde{Q}$ que induce $[\chi]$.*

Ejemplos:

(1) Sobre una variedad M arbitraria siempre existen estructuras de Cartan estrictamente semi-holonómicas de tipo proyectivo. Basta tener presente que en este caso $P = \mathcal{F}M$ y la clase de equivalencia $[\chi]$ de cualquier conexión lineal $\chi \in \bigwedge\big(\mathcal{F}M, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})\big)$ con torsión no nula da lugar a una estructura de Cartan proyectiva semi-holonómica, es decir, asociada a $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(1+n, \mathbb{R})$. Cuando elegimos una conexión lineal sin torsión obtenemos una estructura de Cartan proyectiva holonómica.

(2) Como es bien sabido, la existencia de una métrica semi-riemanniana de tipo (p, q), con $p+q = n$, sobre una variedad M de dimensión n, depende de la topología de M excepto cuando alguno de los enteros p o q es nulo. Cuando M es una variedad dotada de una métrica semi-riemanniana, cada conexión métrica con torsión sobre M determina una estructura de Cartan semiholonómica conforme, es decir, asociada al álgebra de Lie graduada $\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(p+1, q+1, \mathbb{R})$. En particular, cuando consideramos la estructura de Cartan conforme asociada a una conexión métrica con torsión sobre una variedad riemanniana, dicha estructura es semi-holonómica.

Capítulo 4

Estructuras de Cartan invariantes llanas sobre un espacio homogéneo

Sean $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ un álgebra de Lie real semisimple graduada, $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ un espacio homogéneo semisimple llano asociado a $\mathfrak{L}$ y $\mathbf{G}_0$ el grupo lineal de isotropía de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$. Dada una variedad M de dimensión $n = \dim(\mathfrak{g}_{-1})$ sobre la que actúa un grupo de Lie G parece natural tratar de determinar las estructuras geométricas G-invariantes asociadas a $\mathfrak{L}$ que puedan existir sobre M y caracterizarlas cuando existan. En particular podemos plantear ese problema cuando la acción de G es transitiva, es decir:

Dados un grupo de Lie G y un subgrupo cerrado y conexo $H \subset G$ verificando que el espacio homogéneo $M = G/H$ tiene dimensión $n = \dim \mathbf{L}/\mathbf{L}_0 = \dim(\mathfrak{g}_{-1})$, ¿cuándo podemos asegurar que existe sobre M una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ que sea invariante bajo la acción natural que el grupo G ejerce por la izquierda sobre P ?

Observemos que con ese planteamiento es imposible detectar las estructuras proyectivas invariantes que hipotéticamente puedan existir sobre G/H cuando $\mathbf{L} = PGL(1+n, \mathbb{R})$ y $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0 = \mathbb{R}P^n$, pues en ese caso $\mathbf{G}_0 \equiv GL(n, \mathbb{R})$ y por tanto $P = \mathcal{F}M$, que es trivialmente invariante por la acción natural de G. Así que es necesario reformular el problema para evitar esa importante omisión. Como hemos señalado antes, Tanaka [104] estudió las estructuras projectivas sobre una variedad diferenciable arbitraria M asociadas a una clase de conexiones lineales sobre M proyectivamente equivalentes, construyendo dichas estructuras como el par formado por una conexión de Cartan *normal* definida sobre un $\mathbf{L}_0$-fibrado (Q, l) *asociado* al fibrado de referencias

$\mathcal{F}M$ (=P en este caso) de la variedad M dada (véase 3.1.2). Inicialmente [104] consideró conexiones lineales sin torsión, aunque luego eliminó esta restricción en su teoría general [106]. Tanto en el caso proyectivo como para un espacio homogéneo semisimple llano $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ arbitrario, Tanaka justifica la existencia del fibrado Q aludiendo al proceso de extender el grupo de estructura en P. Posteriormente Kobayashi y Nagano [68] hicieron una construcción semejante de las estructuras proyectivas pero en la que el fibrado Q es una $\mathbf{L}_0$-estructura holonómica de segundo orden, es decir $Q \subset \mathcal{F}^2M$ es una $\mathrm{j}(\mathbf{L}_0)$-reducción del fibrado $\mathcal{F}^2M$ de referencias holonómicas de segundo orden sobre M, siendo aquí $\mathbf{L}_0$ el grupo de isotropía de un punto de $\mathbb{R}P^n$ bajo la acción del grupo proyectivo y $\mathrm{j}\colon \mathbf{L}_0 \to G^2(n)$ el homomorfismo inyectivo dado en general en el capítulo anterior. Para ello hay que partir inexcusablemente de una clase de conexiones lineales sin torsión sobre M. Además Kobayashi y Nagano construyeron la conexión normal de Cartan a partir de la *forma canónica* $\theta^{(2)}$ de $\mathcal{F}^2M$, (Kobayashi [66] construyó la forma canónica $\theta^{(n)}$ de cada fibrado $\mathcal{F}^nM$ de referencias holonómicas de orden n y Yuen [121] generalizó esta construcción para los fibrados $\hat{\mathcal{F}}^n(M)$ de referencias semi-holonómicas de orden n). Ogiue [92] hizo una construcción análoga para las estructuras conformes de signatura $(p, 0)$. Ya hemos dicho en la introducción general de esta memoria que Ochiai [90], [91], generalizó el método de Kobayashi-Nagano y Ogiue a todas las estructuras geométricas ligadas a un álgebra de Lie semisimple graduada, restringiéndose siempre a variedades M dotadas de una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}^2M$ que admiten $\mathbf{G}_0$-conexiones lineales sin torsión, hipótesis que en varios casos equivale a la suposición de que P es integrable. Teniendo presentes los resultados que hemos obtenido en el capítulo anterior sobre estructuras semi-holonómicas de segundo orden (y que generalizan los de Ochiai), una reformulación completa y suficientemente general del problema sería :

Dados un grupo de Lie G y un subgrupo cerrado y conexo $H \subset G$ verificando que el espacio homogéneo $M = G/H$ tiene dimensión $n = \dim(\mathfrak{g}_{-1})$ ¿cuándo podemos asegurar que existe sobre M una $\mathbf{L}_0$-estructura semi-holonómica de segundo orden $Q \subset \mathcal{F}^2M$ que sea invariante bajo la acción natural del grupo G? y también ¿cómo podemos caracterizar algebraicamente tales estructuras de modo que podamos saber si existen o no?

Observemos que con la sola excepción del caso proyectivo, la $\mathbf{L}_0$-estructura semi-holonómica de segundo orden $Q \subset \mathcal{F}^2M$ se proyecta sobre una $\mathbf{G}_0$-estructura P estrictamente contenida en el fibrado de referencias lineales $\mathcal{F}M$ de M.

El objetivo de este capítulo es plantear y resolver un problema más restringido, que se mantiene dentro de los límites de la teoría formulada por Ochiai en [90]:

Dados un grupo de Lie G y un subgrupo cerrado y conexo $H \subset G$ verificando que el espacio homogéneo $M = G/H$ tiene dimensión $n = \dim(\mathfrak{g}_{-1})$ ¿cuándo podemos asegurar que existe sobre M una $\mathbf{L}_0$-estructura holonómica de segundo orden $Q \subset \mathcal{F}^2 M$ que sea llana (es decir, integrable) e invariante bajo la acción natural del grupo G? y también, ¿cómo podemos caracterizar algebraicamente tales estructuras invariantes llanas de modo que podamos saber si existen o no?

En este capítulo estudiaremos y caracterizaremos las estructuras invariantes llanas Q asociadas a un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ semisimple y graduada arbitraria sobre un espacio homogéneo G/H, generalizando un método que fue desarrollado por Y. Agaoka [1] para las estructuras proyectivas (es decir, para el álgebra de Lie simple y graduada $\mathfrak{sl}(1+n,\mathbb{R})$). Agaoka utilizó los resultados y las notaciones del artículo [104] de N. Tanaka sobre estructuras proyectivas, pero sin recurrir ni al trabajo de Kobayashi y Nagano [68], que cita, ni al de Ochiai [90], que no cita. Pese a citar el trabajo general de Tanaka [106] sobre estructuras asociadas a un álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ semisimple y graduada cualquiera, Agaoka no aborda la posibilidad de extender sus métodos para el caso proyectivo al caso de estructuras invariantes llanas asociadas a una tal álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ arbitraria. Nosotros desarrollaremos en este capítulo el estudio de tales estructuras generalizadas con el lenguage de las estructuras holonómicas de segundo orden, ya que esto tiene ciertas ventajas conceptuales y técnicas. Pero podemos ver cada estructura llana de ese tipo bien como una clase $[\chi]$ de conexiones lineales adaptadas equivalentes y sin torsión sobre una $\mathbf{G}_0$-estructura G-invariante $P \subset \mathcal{F}M$, o bien como el par (Q,ξ) formado por una $\mathbf{L}_0$-estructura holonómica de segundo orden $Q \subset \mathcal{F}^2 M$ y una conexión normal de Cartan $\xi \in \bigwedge(Q,\mathfrak{L})$ asociada a dicha clase $[\chi]$. Como es bien sabido [90], la integrabilidad de Q está caracterizada por la nulidad de la curvatura Ξ de ξ, es decir, por la condición

$$\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}[\xi,\xi] = 0\,.$$

Nótese que la integrabilidad de Q implica que su proyección $P = \pi_1^2(Q) \subset \mathcal{F}M$ es también una $\mathbf{G}_0$-estructura integrable. Recordemos que si G es un subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$, una condición necesaria para la existencia de una G-estructura integrable $P \subset \mathcal{F}M$ sobre una variedad M de dimensión n es que M admita una conexión lineal sin torsión y adaptada a P, es decir, una conexión sin torsión cuya 1-forma global de conexión χ restringida a P toma valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G (véanse [37] o [102]). Asimismo, es bien conocido [90] que un automorfismo de $\mathcal{F}^2M$ deja invariante Q si y sólo si deja invariante la conexión normal de Cartan. En consecuencia, el hecho de que G deje invariante Q equivale a que para todo $a \in G$ los automorfismos de Q inducidos por las traslaciones,

$$\tau_a \colon xH \in G/H \to (ax)H\,,$$

conserven la conexión de Cartan.

Como acabamos de decir, hemos generalizado la teoría de Y. Agaoka de estructuras proyectivas invariantes llanas sobre un espacio homogéneo $M = G/H$ (que corresponden al álgebra semisimple graduada $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$) al caso de $\mathbf{L}_0$-estructuras invariantes llanas sobre un espacio homogéneo G/H, que corresponden a un álgebra semisimple graduada $\mathfrak{L}$ *arbitraria*, realizando dichas estructuras como $\mathbf{L}_0$-estructuras holonómicas de segundo orden $Q \subset \mathcal{F}^2M$. En particular hemos probado que si $\mathfrak{G}$ es el álgebra de Lie de G entonces cada $\mathbf{G}_0$-estructura invariante llana sobre $M = G/H$ determina un homomorfismo de álgebras de Lie

$$f \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

sujeto a dos condiciones, concepto que hemos denominado (GP)-*homomorfismo*, y que incluye como caso particular al de los (P)-homomorfismos de Agaoka. Cuando H es el subgrupo trivial de G esas dos condiciones se reducen esencialmente a la única exigencia de que la componente de f en $\mathfrak{g}_{-1}$ sea sobreyectiva. Una relación de equivalencia en el conjunto de tales homomorfismos permite establecer una biyección entre el conjunto de $\mathbf{L}_0$-estructuras llanas G-invariantes sobre $M = G/H$ y el conjunto de clases de equivalencia de tales homomorfismos. Algunos resultados de Agaoka se adaptan facilmente, mientras que otros han requerido una laboriosa tarea, compartida con el director de esta tesis. Asimismo debemos a Yu. Khakimdjanov la demostración del teorema 4.4.1. Señalemos en particular que se ha extendido al caso general el criterio de normalización de (P)-homomorfismos dado en [1] para el caso proyectivo, usando la forma de Killing y el elemento característico del álgebra $\mathfrak{L}$. Es más, cuando $\mathfrak{L}$ es simple un resultado de Dynkin [20] permite reducir este criterio al cálculo de la traza de un determinado producto de matrices.

En el capítulo siguiente, daremos varios ejemplos que ilustran la aplicación de la teoría que hemos desarrollado.

Los resultados de este capítulo están contenidos en [83].

4.1 $\mathbf{L}_0$-estructuras invariantes llanas sobre espacios homogéneos

Sean G un grupo de Lie, H un subgrupo cerrado de G, $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{H}$ sus respectivas álgebras de Lie y $M = G/H$ el espacio homogéneo cociente, bajo la acción natural de G por la izquierda. Como es bien sabido, la proyección natural

$$\pi \colon x \in G \to xH \in G/H$$

determina una estructura de fibrado principal, con espacio total G, base G/H y grupo de estructura H, que actúa sobre G por la derecha de modo natural: $(x, a) \in G \times H \to xa \in G$. Denotaremos por $o \in G/H$ a la clase lateral del elemento neutro $e \in G$, clase que llamaremos *origen* de M. Dado $a \in G$, la translación por la izquierda

$$l_a \colon x \in G \to ax \in G$$

induce un difeomorfismo $\tau_a \colon G/H \to G/H$ definido por

$$\tau_a \colon xH \in M \to \tau_a(xH) = (ax)H.$$

El grupo G actúa transitivamente por la izquierda sobre $M = G/H$ mediante la acción natural

$$(a, xH) \to \tau_a(xH) = l_a(x)H = (ax)H.$$

Recordemos que para una aplicación diferenciable $\phi \colon M \to N$ de variedades de dimensiones m y n respectivamente, su **prolongación r-ésima** $\phi^{(r)}$ es la apliacción diferenciable dada por

$$\phi^{(r)} \colon j_0^r f \in \mathcal{F}^r M \to j_0^r(\phi \circ f) \in \mathcal{F}^r N\,,$$

siendo $\mathcal{F}^r M$ y $\mathcal{F}^r N$ los respectivos fibrados de referencias holonómicas de orden r de M y N. Si ϕ es un difeomorfismo, entonces $m = n$ y $\phi^{(r)}$ es un isomorfismo de $G^r(n)$-fibrados principales (véase la definición de $G^r(n)$ en el capítulo 1).

Definición 4.1.1 *Sean $M = G/H$ un espacio homogéneo de dimensión n, $Q \subset \mathcal{F}^r M$ una K-estructura holonómica de orden r, con K un subgrupo de Lie del grupo $G^r(n)$. Diremos que Q es* G**-invariante** *si para todo $a \in G$ la prolongación r-ésima ${\tau_a}^{(r)}$ del difeomorfismo τ_a verifica*

$${\tau_a}^{(r)}(Q) \subset Q\,.$$

Nótese que decir de $Q \subset \mathcal{F}^r M$ que es *holonómica de orden* r es redundante, pese a lo cual usaremos esa expresión.

Teorema 4.1.1 *Sea K un subgrupo de Lie de $G^r(n)$ y $Q \subset \mathcal{F}^r M$ una K-estructura holonómica de orden r G-invariante sobre el espacio homogéneo $M = G/H$ de dimensión n. Cada r-referencia $\hat{o} \in Q$ en el origen $o \in G/H$ determina un homomorfismo entre los fibrados principales $\pi \colon G \to G/H$ y $\pi_Q \colon Q \to G/H$,*

$$j^r_G \colon a \in G \to j^r_G(a) = {\tau_a}^{(r)}(\hat{o}) \in Q,$$

que es compatible con el homomorfismo de grupos de Lie

$$\rho_r \colon H \to K$$

dado por la condición de que para todo $a \in H$ es

$$\hat{o}\rho_r(a) = j^r_G(a)\,.$$

Además j^r_G es compatible con la acción de G sobre Q, es decir, para todo a, $b \in G$ es

$${\tau_a}^{(r)} j^r_G(b) = j^r_G(ab)\,.$$

Si cambiamos $\hat{o} \in Q$ por otra referencia $o' \in Q$ el nuevo homomorfismo entre H y K es conjugado de ρ_r.

Demostración:

Para todo $a \in H$ es $\tau_a(o) = o$. Por tanto, si $\hat{o} \in {\pi_Q}^{-1}\{o\}$ se tendrá también

$${\tau_a}^{(r)}(\hat{o}) \in {\pi_Q}^{-1}\{o\}\,.$$

Luego existe $k \in K$ verificando

$$\hat{o}k = \tau^{(r)}_a(o)\,.$$

Llamando

$$\rho_r(a) = k\,,$$

se tiene

$$\hat{o}\rho^r(a) = j^r_G(a)\,.$$

Veamos que ρ_r es homomorfismo de grupos: Si a, $b \in H$, entonces

$$\begin{gathered}\hat{o}\rho_r(ab) = j^r_G(ab) = \tau^{(r)}_{ab}(\hat{o}) \\ = (\tau_a \circ \tau_b)^{(r)}(\hat{o}) = \tau^{(r)}_a(j^r_G(b)) = {\tau_a}^{(r)}(\hat{o})\rho_r(b))\end{gathered}$$

$$= \tau_a{}^{(r)}(\hat{o})\rho_r(b) = \hat{o}\rho_r(a)\rho_r(b).$$

Como la acción de K es libre,

$$\rho_r(a)\rho_r(b) = \rho_r(ab).$$

El hecho de que j_G^r sea obviamente diferenciable implica que ρ_r también es diferenciable, ya que basta expresar dichas aplicaciones a través de una trivialización del fibrado Q.

□

Dado un homomorfismo de fibrados principales $f\colon P \to Q$ compatible con un homomorfismo de grupos de Lie $\phi\colon G \to H$ y fijado un elemento $p_0 \in P$ y su imagen $q_0 = f(p_0)$, podemos considerar a f como una especie de extensión de ϕ, ya que, para todo $a \in G$ es $f(p_0 a) = q_0\phi(a)$.

Sea $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ un espacio homogéneo semisimple llano asociado a un álgebra semisimple graduada $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. Supongamos ahora que el espacio homogéneo $M = G/H$ tiene dimensión $n = \dim \mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ y admite una $\mathbf{L}_0$-estructura G-invariante llana (Q,ω) con $Q \subset \mathcal{F}^2(M)$ y ω una conexión de Cartan G-invariante sobre Q obtenida a partir de una clase $[\chi]$ de conexiones lineales sin torsión sobre M adaptadas a $P = \pi_1^2(Q) \subset \mathcal{F}M$. Particularizaremos a continuación la construcción anterior a los fibrados $Q \subset \mathcal{F}^2(M)$ y $P = \pi_1^2(Q) \subset \mathcal{F}M$. Observemos que la proyección natural $\hat{l} = \pi^2_{1|Q}\colon Q \to P$ es un homomorfismo de fibrados principales compatible con la representacion lineal de isotropía $l\colon \mathbf{L}_0 \to \lambda(\mathbf{G}_0)$ de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$. En el lenguaje que hemos utilizado en el capítulo anterior, el par $(Q,\hat{l})$ es un $\mathbf{L}_0$-fibrado asociado (véase la definición 3.1.1). Nótese que las conexiones $\chi \in [\chi]$ no son necesariamente G-invariantes.

Fijemos una referencia lineal $\tilde{o} \in P$ en el *origen* $o \in G/H$, es decir un isomorfismo

$$\tilde{o}\colon \mathfrak{g}_{-1} \equiv \mathbb{R}^n \to T_o(G/H) \equiv \mathfrak{G}/\mathfrak{H}\,.$$

Por el teorema anterior, existe un homomorfismo de fibrados, $\tilde{j}$ definido por

$$\tilde{j} = j^1{}_G\colon a \in G \to \tilde{j}(a) = \tau_a^{(1)}(\tilde{o}) \in P\,,$$

compatible con el homomorfismo de grupos de Lie

$$\rho_1\colon H \to \lambda(\mathbf{G}_0) \subset GL(\mathfrak{g}_{-1})\,.$$

En estas condiciones se tiene

Lema 4.1.1 *La representacion ρ_1 de H en $\mathfrak{g}_{-1}$ es equivalente a la representación lineal de isotropía de G/H.*

Demostración:

Recordemos que la representación lineal de isotropía $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}$ de G/H está dada por

$$\mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}(a) = \nu^{-1} \circ \tau_{a*}(o) \circ \nu \in GL(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}) \,,$$

siendo

$$\nu \colon X + \mathfrak{H} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H} \to \pi_*(e)X_e \in T_o(G/H) \,.$$

Por la definición de ρ_1, para todo $a \in H$, es

$$\tilde{o}\rho_1(a) = \tilde{j}(a) = {\tau_a}^{(1)}(\tilde{o}) \,,$$

es decir

$$\rho_1(a) = \tilde{o}^{-1} \circ \tau_{a*}(o) \circ \tilde{o} \,,$$

y entonces la afirmación se sigue de que

$$\nu^{-1} \circ \tilde{o} \circ \rho_1(a) \circ \tilde{o}^{-1} \circ \nu = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}(a) \,.$$

$\square$

Por tanto, podemos considerar a a $\rho_1 \colon H \to GL(\mathfrak{g}_{-1})$ como la representación lineal de isotropía de $M = G/H$ y a la aplicación $\tilde{j} \colon G \to P$ como un homomorfismo de fibrados principales compatible con ella, ya que

$$\tilde{j}(ab) = \tilde{j}(a)\rho_1(b) \,.$$

Sea $h \colon P \to Q$ un homomorfismo admisible es decir un homomorfismo de fibrados que es una sección global compatible con la inclusión $i_0 \colon \mathbf{G}_0 \to \mathbf{L}_0$ (o, equivalentemente, h es compatible con la inclusión $A \in \lambda(\mathbf{G}_0) \subset GL(\mathfrak{g}_{-1}) \to (A, 0) \in \mathrm{j}(\mathbf{L}_0) \subset G^2(n)$). Fijemos ahora

$$o' = h(\tilde{o}) \in Q \,.$$

Asociado a o' obtenemos, como caso particular del teorema anterior, un homomorfismo de fibrados principales,

$$j = j^2_G \colon G \to Q,$$

que está dado, para todo $a \in G$, por

$$j(a) = \tau_a^{(2)}(o') \,.$$

Nótese que

$$\tilde{j}(e) = \tilde{o}\,; \quad j(e) = o'\,.$$

Como en el teorema anterior, también obtenemos un homomorfismo de grupos de Lie

$$\rho_2 \colon H \to \mathbf{L}_0$$

que está definido, para todo $a \in H$, mediante

$$o'\rho_2(a) = j(a)\,.$$

La aplicación $j = j^2_G \colon G \to Q$ es una aplicación de fibrados compatible con ρ_2, es decir, para todo $a \in G$, $b \in H$, se tiene

$$j(ab) = j(a)\rho_2(b)\,.$$

Por lo anterior el grupo G actúa por la izquierda sobre $\mathcal{F}^2(M)$ y $\mathcal{F}M$, mediante las acciones

$$\tau^{(2)}_a(j^2_0(f)) = j^2_0(\tau_a \circ f)\,,$$
$$\tau^{(1)}_a(j^1_0(f)) = j^1_0(\tau_a \circ f).$$

y en consecuencia, G actúa también por la izquierda tanto sobre la $\mathbf{L}_0$-estructura G-invariante $Q \subset \mathcal{F}^2(M)$ como sobre su proyección la $\mathbf{G}_0$-estructura G-invariante $P \subset \mathcal{F}M$, mediante las respectivas restricciones de esas acciones.

Observación 4.1.1 Como casos particulares del teorema anterior, los homomorfismos de fibrados $j = j^2_G \colon G \to Q$ y $\tilde{j} = j^1_G \colon G \to P$ son compatibles con las respectivas acciones de G, es decir, para todo a, $b \in G$, es

$$\tau^{(2)}_a(j(b)) = j(ab),$$

$$\tau^{(1)}_a(\tilde{j}(b)) = \tilde{j}(ab)\,.$$

Lema 4.1.2 *Los homomorfismos de fibrados principales* $\tilde{j} \colon G \to P$*,* $j \colon G \to Q$ *y* $\hat{l} \colon Q \to P$ *verifican que*

$$\hat{l} \circ j = \tilde{j}\,.$$

mientras que los homomorfismos de grupos de Lie ρ_1*,* ρ_2 *y la representación lineal de isotropía* $l \colon \mathbf{L}_0 \to GL(\mathfrak{g}_{-1})$ *de* $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$ *verifican*

$$l \circ \rho_2 = \rho_1\,.$$

Demostración:

Sea $a \in G$. Entonces

$$(\hat{l} \circ j)(a) = \hat{l}(\tau_a^{(2)}(o')) = (\hat{l} \circ \tau_a^{(2)})(o') = \tau_a^{(1)}(\hat{l}(o')) = \tau_a^{(1)}(\tilde{o}),$$

donde $\hat{l}(o') = \tilde{o}$ porque $h(\tilde{o}) = o'$ y $\hat{l} \circ h = \mathrm{id}$. Aquí, por la definición ya dada de $\tau_a^{(1)}$, se tiene que $\tau_a^{(1)}(\tilde{o})$ se identifica con $(\tau_a)_*(\tilde{o})$ y por tanto

$$(\tilde{j}(a)) = \tau_a^{(1)}(\tilde{o}) = (\tau_a)_*(\tilde{o}) = j(a).$$

Además, j es un homomorfismo de fibrados principales compatible con ρ_2, $\tilde{j}$ es un homomorfismo de fibrados principales compatible con ρ_1 y $\hat{l}$ es un homomorfismo de fibrados principales compatible con l, luego $l \circ \rho_2 = \rho_1$.
□

Vamos a dar ahora una descripción explícita del homomorfismo ρ_2, que usaremos más adelante.

Sean $[\chi]$ una clase de conexiones lineales sobre $M = G/H$ equivalentes y adaptadas a una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ y ω la conexión normal de Cartan que determina dicha clase sobre el $\mathbf{L}_0$-fibrado principal $Q \subset \mathcal{F}^2M$ que corresponde a todas y cada una de esas conexiones lineales (Q se construye por el procedimiento señalado en el capítulo anterior). Como hemos dicho allí, la $\mathbf{L}_0$-estructura (Q, ω) y el par $(P, [\chi])$ se determinan mutuamente. Por hipótesis la $\mathbf{L}_0$-estructura Q es G-invariante, es decir, para cualquier $a \in G$, $\tau_a \colon M \to M$ deja invariante la $\mathbf{L}_0$-estructura (Q, ω), por tanto $\tau_a^{(1)}$ deja invariante P y transforma cada conexión χ en una conexión equivalente. En consecuencia, para todo $a \in G$, existe una función $F_a \colon G \to \mathfrak{g}_1 \equiv \mathfrak{g}_{-1}^*$ que es $\mathbf{G}_0$-invariante (o sea, para todo $u \in P$ y todo $g \in \mathbf{G}_0 \equiv \lambda(\mathbf{G}_0)$ es $F_a(ug) = F_a(u)g$) verificando la igualdad

$$\tau_a^{(1)^*}\chi - \chi = [\theta, F_a]\,,$$

que expresa que las conexiones lineales $\tau_a^{(1)^*}\chi$ y χ son equivalentes. El siguiente enunciado y su demostración están en [1] para el caso de una estructura proyectiva, pero podemos extenderlos facilmente al caso general

Lema 4.1.3 *Dados a, $b \in G$, se tiene que*

$$F_{ab} = F_b + F_a \circ \tau_b^{(1)}\,.$$

Demostración:

Puesto que para todo $a \in G$ es $\tau_a^{(1)*}\chi - \chi = [\theta, F_a]$, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\tau_{ab}^{(1)^*}\chi - \chi &= (\tau_a^{(1)}\tau_b^{(1)})^*\chi - \chi \\
= \tau_b^{(1)*}(\tau_a^{(1)*}\chi) - \chi &= \tau_b^{(1)*}(\chi + [\theta, F_a]) - \chi \\
= \tau_b^{(1)*}\chi + \tau_b^{(1)*}[\theta, F_a] - \chi &= [\theta, F_b] + \tau_b^{(1)*}[\theta, F_a]
\end{aligned}
$$

Ahora bien, si denotamos $\tau_b^{(1)*}F_a = F_a \circ \tau_b^{(1)}$ entonces

$$\tau_b^{(1)*}([\theta, F_a]) = [\tau_b^{(1)*}\theta, \tau_b^{(1)*}F_a]\,,$$

ya que para todo $V \in T_u(\mathcal{F}M)$ se tiene que

$$[\theta, F_a](V) = [\theta_u(V), F_a(u)] \in \mathfrak{g}_0$$

y en consecuencia,

$$\tau_b^{(1)*}[\theta, F_a](V_u) = [\theta, F_a]({\tau_b^{(1)}}_*(V_u)) = [\theta({\tau_b^{(1)}}_*(V_u)), F_a(\tau_b^{(1)}(u))]\,,$$

mientras que por otro lado,

$$[\tau_b^{(1)*}\theta, \tau_b^{(1)*}F_a](V_u) = [\theta({\tau_b^{(1)}}_*V_u), F_a \circ \tau_b^{(1)}(u)]\,.$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
[\theta, F_{ab}] = \tau_{ab}^{(1)*}\chi - \chi &= [\theta, F_b] + [\tau_b^{(1)*}\theta, \tau_b^{(1)*}F_a] \\
= [\theta, F_b] + [\theta, \tau_b^{(1)*}F_a] &= [\theta, F_b + \tau_b^{(1)*}F_a]
\end{aligned}
$$

Por tanto, $0 = [\theta, F_{ab} - (F_b + \tau_b^{(1)*}F_a)]$, lo cual implica que

$$F_{ab} - (F_b + \tau_b^{(1)*}F_a) = 0,$$

ya que si $z \in \mathfrak{g}_1$ es tal que $[\mathfrak{g}_{-1}, z] = 0$, entonces $z = 0$. □

Lema 4.1.4 *Para $a \in H$ se verifica que*

$$\rho_2(a) = (i_0 \circ \rho_1)(a) \circ \exp\{-F_a(\tilde{o})\},$$

Demostración:
Observemos que $(i_0 \circ \rho_1)(a) \in \mathbf{L}_0$ y que $\exp\{-F_a(\tilde{o})\} \in G_1$, pues $F_a(\tilde{o}) \in \mathfrak{g}_1$. La aplicación $\tau_a^{(2)} \colon Q \to Q$ verifica la relación $h \circ \tau_a^{(1)} = \tau_a^{(2)} \circ h_a$, donde $h_a \colon P \to Q$ es una aplicación entre fibrados definida por

$$h_a(z) = h(z)\ \exp(F_a(z)),$$

Por tanto, para $a \in H$, resulta que

$$o'(i_0 \circ \rho_1)(a) = h(\tilde{o})\ i_0(\rho_1(a)) = h(\tilde{o}\rho_1(a)),$$

por ser h un homomorfismo de fibrados correspondiente a i_0. Ahora bien, por el lema 4.1.2, se tiene que para $a \in H$ es

$$\tilde{j}(a) = \hat{l}(j(a)) = \hat{l}(o'\rho_2(a)),$$

y como $\hat{l}\colon Q \to \mathcal{F}M$ es un homomorfismo de fibrados correspondiente a la representación $l\colon \mathbf{L}_0 \to GL(\mathfrak{g}_{-1})$ y $l \circ \rho_2 = \rho_1$, entonces

$$\tilde{j}(a) = \hat{l}(o'\rho_2(a)) = \hat{l}(o')\ l(\rho_2(a)) = \tilde{o}\rho_1(a),$$

de modo que $\tilde{o}\rho_1(a) = \tilde{j}(a) = (\tau_a)_*(\tilde{o}) \equiv \tau_a^{(1)}(\tilde{o})$. Así,

$$\begin{array}{rcl} o'(i_0 \circ \rho_1)(a) & = & h(\tilde{o}\rho_1(a)) \\ = (h \circ \tau_a^{(1)})(\tilde{o}) & = & (\tau_a^{(2)} \circ h_a)(\tilde{o}) \\ = \tau_a^{(2)}(h_a(\tilde{o})) & = & \tau_a^{(2)}(h(\tilde{o})\ \exp(F_a(\tilde{o}))) \\ = \tau_a^{(2)}(o'\ \exp(F_a(\tilde{o}))) & = & \tau_a^{(2)}(o')\exp(F_a(\tilde{o})), \end{array}$$

porque $\tau_a^{(2)}$ es un isomorfismo de fibrados. En consecuencia,

$$\begin{array}{rcl} o'(i_0 \circ \rho_1)(a) & = & \tau_a^{(2)}(o')\exp(F_a(\tilde{o})) \\ = j(a)\exp(F_a(\tilde{o})) & = & o'\rho_2(a)\exp(F_a(\tilde{o})), \end{array}$$

de donde $o'(i_0 \circ \rho_1)(a)\exp\{-F_a(\tilde{o})\} = o'\rho_2(a)$, y por la unicidad de la definición de ρ_2 se sigue que

$$\rho_2(a) = (i_0 \circ \rho_1)(a)\exp\{-F_a(\tilde{o})\}.$$

□

Corolario 4.1.1 *Si χ es una conexión invariante, es decir, si $(\tau_a^{(1)})^*\chi = \chi$ para todo $a \in G$, entonces, $\rho_2 = i_0 \circ \rho_1$ y $h\colon P \to Q$ es compatible con la acción por la izquierda de G. En particular, se tiene*

$$j = h \circ \tilde{j}\colon G \to Q\,.$$

Demostración:

Como $(\tau_a^{(1)})^*\chi - \chi = 0$ para todo $a \in G$, se tiene que $F_a = 0$ y por ello, $\exp\{F_a(\tilde{o})\} = \mathrm{id}$ para todo $a \in G$. Entonces, del lema anterior se deduce que $\rho_2 = i_0 \circ \rho_1$. Además, j, h y $\tilde{j}$ son homomorfismos de fibrados correspondientes a ρ_2, i_0 y ρ_1 respectivamente, con lo cual, debe ser $j = h \circ \tilde{j}$.

El hecho de que $h\colon P \to Q$ sea compatible con la acción por la izquierda de G quiere decir que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\tau_a^{(2)}} & Q \\ h\uparrow & & \uparrow h \\ P & \xrightarrow{\tau_a^{(1)}} & P \end{array}$$

es conmutativo, lo cual es obvio por el lema anterior y porque en este caso es $F_a = 0$ para todo $a \in G$. □

4.2 (GP)-homomorfismo asociado a una estructura de Cartan invariante llana

El objetivo de esta sección es obtener una condición necesaria para que un espacio homogéneo $M = G/H$ con H conexo y de dimensión $n = \dim \mathbf{L}/\mathbf{L_0}$ admita una $\mathbf{L_0}$-estructura G-invariante llana (Q, ω), con $Q \subset \mathcal{F}^2(M)$ y ω una conexión de Cartan G-invariante sobre Q, siendo $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$ un espacio homogéneo semisimple llano asociado a un álgebra de Lie semisimple graduada $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. La condición necesaria buscada es que la conexión de Cartan ω determina un homomorfismo de álgebras de Lie

$$f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$$

entre las álgebras de Lie de los grupos de Lie G y $\mathbf{L}$, cuyas propiedades refinaremos posteriormente, sintetizandolas en el concepto de (GP)-*homomorfismo*. Este nuevo concepto nos conducirá entonces a una caracterización de tales $\mathbf{L_0}$-estructuras G-invariantes llanas sobre el espacio homogéneo $M = G/H$.

Primero vamos a construir una aplicación lineal de $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{L}$ que dependerá de la clase $[\chi]$. Por la proposición 3.4.4, para cada homomorfismo admisible $h\colon P \to Q$ existe una única conexión de Cartan normal ω sobre Q tal que $h^*\omega_0 = \chi$ y $h^*\omega_{-1} = \theta$. Por el apartado ii) del teorema 3.4.4, al ser G-invariante la $\mathbf{L}_0$-estructura (Q, ω), resulta que, para todo $a \in G$, es $\tau_a^{(2)}Q \subset Q$

y además $\tau_a^{(2)*}\omega = \omega$. Por tanto $\tau_a^{(1)}(P) \subset P$ y además cada $\tau_a^{(1)}$ es un $\mathbf{G}_0$-isomorfismo de fibrados principales que transforma la conexión lineal sin torsión χ adaptada a P en una conexión $\tau_a^{1*}\chi$ equivalente a χ. La proyección $\hat{l}\colon Q \to P$ verifica

$$\hat{l} \circ \tau_a^{(2)} = \tau_a^{(1)} \circ \hat{l}\,.$$

Consideremos ahora la 1-forma $\mathfrak{L}$-valuada $j^*\omega$ sobre G. Como la aplicación j es compatible con la acción por la izquierda de G, es decir, como el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\tau_a^{(2)}} & Q \\ j\uparrow & & \uparrow j \\ G & \xrightarrow{l_a} & G \end{array}$$

entonces,

$$j^*\omega = \omega \circ j_*\colon \mathfrak{X}(G) \to \mathfrak{X}(Q) \to \mathfrak{L}$$

es una forma $\mathfrak{L}$-valuada invariante por la izquierda sobre G y define una aplicación lineal

$$j^*\omega\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}\,,$$

donde $\mathfrak{G}$ es el álgebra de Lie de G. En efecto,

$$\begin{aligned} l_a^* j^*\omega(X) &= (j \circ l_a)^*\omega(X) = (\tau_a^{(2)} \circ j)^*\omega(X) \\ &= j^*\tau_a^{(2)*}\omega(X) = j^*\omega(X) \end{aligned}$$

porque j es compatible con la acción $\tau_a^{(2)}\colon G \times Q \to Q$.

Nótese además que la aplicación lineal $j^*\omega\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ depende de la elección de χ, porque la conexión de Cartan ω depende de χ, según la proposición 3.4.4.

Lema 4.2.1 *Sean $f\colon V \to W$ y $g\colon W \to Z$ aplicaciones lineales entre espacios vectoriales tales que $g \circ f$ sea sobreyectiva. Entonces, un subespacio vectorial $f(U)$ de W contiene a un subespacio T tal que $T \oplus \ker(g) = W$ si y sólo si $g(f(U)) = Z$.*

Demostración:

Sea $H \subset f(U)$ un subespacio tal que $H \oplus \ker(g) = W$. Sean $z \in Z$ y $v \in V$ verificando que $g(f(v)) = z$. Entonces, si $f(v) = f(u) + w$ con $f(u) \in H$ y $w \in \ker(g)$, resulta que $z = g(f(v)) = g(f(u))$. Recíprocamente, si suponemos que $g(f(U)) = Z$, basta probar que $W = f(U) + \ker(g)$. Y en efecto, si $w \in W$ y $f(u) \in W$ son tales que $g(w) = g(f(u))$, se tiene que $w - f(u) \in \ker(g)$. $\square$

El siguiente resultado generaliza el dado por Agaoka [1] para estructuras proyectivas.

Teorema 4.2.1 *La $\mathbf{L}_0$-estructura Q definida por $[\chi]$ es llana si y sólo si $j^*\omega$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demostración:
Si $[\chi]$ es llana, según el teorema 3.4.4, iii), la correspondiente conexión de Cartan normal ω es llana, es decir,

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0.$$

Haciendo la imagen recíproca por j se tiene, sobre G, que

$$0 = j^*\Omega = j^*(\mathrm{d}\omega) + \frac{1}{2}j^*[\omega, \omega] = \mathrm{d}(j^*\omega) + \frac{1}{2}[j^*\omega, j^*\omega].$$

Sean X, $Y \in \mathfrak{G} \equiv T_e(G)$ campos de vectores invariantes por la izquierda sobre G. Entonces, como $j^*\omega$ es invariante por la izquierda, resulta que $j^*\omega(X)$ y $j^*\omega(Y)$ son constantes, y en consecuencia, $Xj^*\omega(Y) = Yj^*\omega(X) = 0$. Se deduce entonces que

$$\mathrm{d}(j^*\omega)(X, Y) = Xj^*\omega(Y) - Yj^*\omega(X) - j^*\omega[X, Y] = -j^*\omega[X, Y].$$

Así, de la ecuación anterior se obtiene

$$-j^*\omega[X, Y] + \frac{1}{2}[j^*\omega, j^*\omega](X, Y) = 0,$$

lo que significa que $j^*\omega$ es un homomorfismo de álgebras de Lie pues

$$[j^*\omega, j^*\omega](X, Y) = [j^*\omega(X), j^*\omega(Y)] - [j^*\omega(Y), j^*\omega(X)] = 2[j^*\omega(X), j^*\omega(Y)].$$

Recíprocamente, si $j^*\omega$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, se tiene, dando la vuelta al razonamiento, que $j^*(\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) = 0$ sobre G. Ahora bien, para cualquier $a \in G$, tal y como veremos más adelante, se verifica que $j_*(T_aG)$ contiene un complementario del subespacio vertical de $T_{j(a)}(Q)$. Por tanto, la igualdad

$$\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

se verifica sobre Q. En efecto, el subespacio vertical de $T_{j(a)}(Q)$ está generado por los campos fundamentales, y si A^*, B^*, son campos fundamentales, se sigue que

$$(\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega])(A^*,B^*) = \mathrm{d}\omega(A^*,B^*) + \frac{1}{2}[\omega,\omega](A^*,B^*)$$
$$= A^*\omega(B^*) - B^*\omega(A^*) - \omega([A^*,B^*]) + \frac{1}{2}([\omega(A^*),\omega(B^*)] - [\omega(B^*),\omega(A^*)])$$
$$= -\omega([A,B]^*) + \frac{1}{2}([A,B] - [B,A]) = -[A,B] + [A,B] = 0$$

donde, en general, $\omega(A^*) = A$, y donde $A^*\omega(B^*) = A^*B = 0$, siendo aquí B la función constante igual a B.

Así, la igualdad $\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] = 0$ se verifica sobre los campos verticales y sobre un complementario del subespacio vertical de $T_{j(a)}(Q)$, y por tanto $\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] = 0$ es válido sobre Q, es decir, la correspondiente conexión de Cartan normal es llana.

Veamos que $j_*(T_aG)$ contiene un complementario del subespacio vertical de $T_{j(a)}(Q)$. Si $\pi\colon G \to M$ es la proyección, se tiene que $\pi_Q \circ j = \pi$. Por tanto, $\pi_{Q*} \circ j_* = \pi_*$. Además, el subespacio vertical de $T_{j(a)}(Q)$ es $\ker(\pi_*(j(a)))$ y como $\pi_{Q*}(j_*(T_aG)) = \pi_*(T_aG) = T_{\pi(a)}(G/H)$ basta aplicar el lema 4.2.1.

$\square$

Definición 4.2.1 *Sean $M = G/H$ un espacio homogéneo de dimensión n, $\pi\colon G \to G/H$ su proyección natural y $\tilde{o}\colon \mathfrak{g}_{-1} \equiv \mathbb{R}^n \to T_o(M)$ un isomorfismo. Llamaremos* **forma canónica infinitesimal** *en la referencia $\tilde{o}$ a la aplicación lineal $c\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{g}_{-1} \equiv \mathbb{R}^n$ definida, para todo $X \in \mathfrak{G}$, por*

$$c(X) = \tilde{o}^{-1}(\pi_*(e)X_e)\,.$$

En esencia, c no es más que la proyección $\pi\colon X \in \mathfrak{G} \to X + \mathfrak{H} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, pues se expresa como la composición

$$c = \tilde{o}^{-1} \circ \nu \circ \pi$$

siendo ν el isomorfismo

$$\nu\colon X + \mathfrak{H} \in \mathfrak{G}/\mathfrak{H} \to \pi_*(e)X_e \in T_o(G/H)\,.$$

La siguiente propiedad justifica la nomenclatura dada a c:

Proposición 4.2.1 *Sean $M = G/H$ un espacio homogéneo de dimensión $n = \dim \mathbf{L}/\mathbf{L}_0$, $P \subset \mathcal{F}M$ una $\mathbf{G}_0$-estructura G-invariante sobre M y $\theta \in \bigwedge(P,\mathbb{R}^n)$ la forma canónica de P. Fijemos en el origen $o \in M = G/H$ una referencia lineal $\tilde{o}\colon \mathfrak{g}_{-1} \equiv \mathbb{R}^n \to T_o(M)$ que pertenezca a P. Sea $\tilde{j}\colon a \in G \to {\tau_a}^1(\tilde{o}) \in P$ el homomorfismo de fibrados principales dado en la sección anterior. Para todo $X \in \mathfrak{G}$ es*

$$c(X) = (\tilde{j}^*\theta)_e(X_e)\,.$$

Demostración:
El elemento neutro de $e \in G$ verifica que $\tilde{o} = \tilde{j}(e)$, luego

$$\begin{aligned}\theta_{\tilde{o}}(\tilde{j}_*(e)X_e) &= \tilde{o}^{-1}\big(\pi_{P*}(e) \circ \tilde{j}_*X)\big) \\ &= \tilde{o}^{-1}(\pi_*(e)X_e) = c(X)\,.\end{aligned}$$

□

Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ un álgebra de Lie semisimple graduada. Denotemos por $\mathrm{p}_r \colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{g}_r$ la r-ésima proyección, $r = -1,\, 0,\, 1$. Denotaremos también por $\rho_1 \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{gl}(T_o(G/H))$ a la diferencial ρ_{1*} de la representación $\rho_1 \colon H \to GL(T_o(G/H))$, dada en la sección anterior, equivalente a la representación lineal de isotropía.

Definición 4.2.2 *Diremos que un homomorfismo de álgebras de Lie $f \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ es un (GP)*-**homomorfismo** *si existe en el origen $o \in M = G/H$ una referencia lineal $\tilde{o} \colon \mathfrak{g}_{-1} \equiv \mathbb{R}^n \to T_o(M)$, que llamaremos la* condición inicial *de f, para el cual las $\mathfrak{g}_r$-componentes $f_r = \mathrm{p}_r \circ f$ de f verifican*

1.- f_{-1} coincide con la forma canónica infinitesimal c del fibrado $\pi \colon G \to G/H$ en $\tilde{o}$, es decir si $c = \tilde{o}^{-1} \circ \nu \circ \pi$, se tiene

$$f_{-1} = c\,.$$

En otras palabras, para todo $X \in \mathfrak{G}$ es $\tilde{o}(f_{-1}X) = \pi_*(e)X_e$, lo que expresa que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{G}/\mathfrak{H} \\ f_{-1}\downarrow & & \downarrow \nu \\ \mathfrak{g}_{-1} & \xrightarrow{\tilde{o}^{-1}} & T_o(G/H) \end{array}$$

es conmutativo.

2.- El isomorfismo $\tilde{o}^{-1} \circ \nu$ es un operador de entrelazamiento entre la representación lineal infinitesimal de isotropía $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}$ de G/H y la restricción de $\lambda \circ f_0$ a $\mathfrak{H}$. En otras palabras, para todo $A \in \mathfrak{H}$ el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g}_{-1} & \xrightarrow{\tilde{o}} & T_o(M) & \xleftarrow{\nu} & \mathfrak{G}/\mathfrak{H} \\ (\lambda \circ f_0)(A)\downarrow & & \rho_1(A)\downarrow & & \downarrow \mathrm{ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}(A) \\ \mathfrak{g}_{-1} & \xrightarrow{\tilde{o}} & T_o(M) & \xleftarrow{\nu} & \mathfrak{G}/\mathfrak{H} \end{array}$$

es conmutativo.

Observación 4.2.1 La definición anterior extiende el concepto de (P)-homomorfismo, dado por Agaoka [1] para el caso en que el espacio homogéneo modelo es el espacio proyectivo real, es decir para $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0 = \mathbb{R}P^n$. El nombre de (P)-homomorfismo alude claramente a que tales homomorfismos determinan estructuras proyectivas invariantes llanas. De las tres condiciones en la definición de (P)-homomorfismo dada por Agaoka en [1], una es redundante. Las dos restantes se han generalizado, permitiendo que tales homomorfismos de álgebras de Lie tomen valores en un álgebra semisimple graduada arbitraria. Hemos decidido llamar (GP)-homomorfismos a tales objetos dado que están inspirados en la definición de (P)-homomorfismo de Agaoka.

Observemos asimismo que al haber fijado la referencia $\tilde{o} \in P$ en $o \in M$, para $Y \in \mathfrak{H}$, $\rho_1(Y)$ se expresa de forma matricial fijando la base canónica de $\mathfrak{g}_{-1} \equiv \mathbb{R}^n$ y su imagen por el isomorfismo lineal $\tilde{o}\colon \mathfrak{g}_{-1} \equiv \mathbb{R}^n \to T_o(M) \equiv \mathbb{R}^n$.

De la definición 4.2.2 se deriva también lo siguiente:

Proposición 4.2.2 Sea $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ un (GP)-homomorfismo. Entonces, para $X \in \mathfrak{G}$ se tiene que $f_{-1}(X) = c(X) = \tilde{o}^{-1}(\pi_*(X))$, donde $\tilde{o}\colon \mathfrak{g}_{-1} \to T_o(M)$ es un isomorfismo lineal. Luego, $f_{-1}(X) = 0$ si y sólo si $\pi_*(X) = 0$. Es decir, $f(X) \in \mathfrak{L}_0$ si y sólo si $X \in \ker(\pi_*) = \mathfrak{H}$.

Ejemplos:

i) Sean $G = GL(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ su álgebra de Lie y H el subgrupo trivial de G. Sean $\mathfrak{L}$ el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n+n, \mathbb{R})$ y $\mathcal{G}_n(\mathbb{R}^{n+n})$ el espacio homogéneo semisimple llano asociado a $\mathfrak{L}$. Un (GP)-homomorfismo

$$f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(n+n, \mathbb{R}) = \frac{\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})}{\{tI_{2n}\ ;\ t \in \mathbb{R}\}}$$

viene dado por

$$f(X) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix} + \{tI_{2n}\ ;\ t \in \mathbb{R}\}.$$

ii) Sean $M = S^n = SO(n+1)/SO(n)$ y $\mathfrak{L} = \mathfrak{so}(n+2, \mathbb{R})$, $n > 2$, con la graduación dada en el capítulo segundo, para $p = n$ y $q = 0$. La aplicación $f\colon \mathfrak{so}(n+1, \mathbb{R}) \to \mathfrak{L} = \mathfrak{so}(n+2, \mathbb{R})$ dada, para $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathfrak{so}(n; \mathbb{R})$, por

$$f\left(\begin{array}{c|c} 0 & -x^t \\ \hline x & y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -\frac{1}{2}x^t & 0 \\ \hline x & y & -\frac{1}{2}x \\ \hline 0 & x^t & 0 \end{array}\right)$$

es un (GP)-homomorfismo para el espacio homogéneo $S^n = SO(n+1)/SO(n)$. Nótese que el espacio homogéneo semisimple llano asociado a $\mathfrak{L}$ en este caso es $(S^n/\{\pm 1\}) = \mathbb{R}P^n$.

Los cálculos detallados aparecen en [83].

Sean $M = G/H$ un espacio homogéneo dotado de una $\mathbf{G}_0$-estructura $P \subset \mathcal{F}M$ y $\chi \in \bigwedge(P, \lambda(\mathfrak{g}_0))$ una conexión sin torsión adaptada a P tal que la $\mathbf{L}_0$-estructura $(Q, \omega) \equiv (P, [\chi])$ definida por la clase $[\chi]$ de todas las conexiones lineales equivalentes a χ sea G-invariante y llana. Sean $j\colon G \to Q$ y $\tilde{j}\colon G \to P$ los homomorfismos de fibrados principales compatibles, respectivamente, con los homomorfismos de grupos de Lie $\rho_2\colon H \to \mathbf{L}_0 \equiv \mathrm{j}(\mathbf{L}_0) \subset G^2(n)$ y $\rho_1\colon H \to \mathbf{G}_0 \equiv \lambda(\mathbf{G}_0) \subset GL(n, \mathbb{R})$, dados como en la sección 1, donde

$$\mathrm{j}\colon \mathbf{L}_0 \to G^2(n)$$

es el homomorfismo inyectivo de grupos de Lie dado en el capítulo tercero. Denotemos también por $\rho_2\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ y $\rho_1\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{g}_0$ a las respectivas diferenciales de los anteriores homomorfismos. En estas condiciones se tiene el siguiente resultado, que generaliza la proposición 2.9 de [1]:

Teorema 4.2.2 *El homomorfismo de álgebras de Lie*

$$f = j^*\omega\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

inducido por la conexión de Cartan ω verifica

1. *La restricción $f_{|\mathfrak{H}}$ toma valores en $\mathfrak{L}_0$ y el homomorfismo inducido $f_{|\mathfrak{H}}\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{L}_0$ coincide con ρ_2. Estrictamente hablando es*

$$\mathrm{j}_* \circ f_{|\mathfrak{H}} = \rho_2\,.$$

2. *f es un (GP)-homomorfismo.*

Demostración:

Identificamos $\mathfrak{G}$ con el espacio tangente $T_e(G)$.

Para $Y \in \mathfrak{H} \subset T_eG$ se tiene, por definición de ρ_2, que

$$j(\exp(tY)) = o'\rho_2(\exp(tY)) = o'\exp(t\rho_2(Y)),$$

siendo $\rho_2\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{L}_0$ el homomorfismo de álgebras de Lie inducido por $\rho_2\colon H \to \mathbf{L}_0$. Derivando la ecuación anterior en $t = 0$ se obtiene

$$j_*(Y) = \rho_2(Y)^*_{o'}.$$

En efecto, la ecuación $j(\exp(tY)) = o' \exp(t\rho_2(Y))$ se puede leer como

$$(j \circ \exp_Y)(t) = R_{\exp(t\rho_2(Y))}(o'),$$

donde $R_a \colon x \in Q \to xa \in Q$, $a \in \mathbf{L}$. Ahora bien, $t \to \exp_Y(t)$ es el único subgrupo uniparamétrico cuyo vector tangente en el cero es $Y(e) \equiv Y$. Por tanto, $j_*(Y)$ es el vector tangente en $t = 0$ a la curva imagen $t \to j(\exp_Y(t))$, o sea,

$$\frac{\mathrm{d}(j \circ \exp_Y)}{\mathrm{d}t}(0) = j_*(Y).$$

Por otro lado, la definición de campo fundamental (véase [70]) nos dice que dada una aplicación $\varphi \colon P \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ entonces para todo $u \in P$

$$A^*(u)\varphi = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(R_{\exp(tA)}(u)) - \varphi(u)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(R_{\exp(tA)}(u))_{/t=0}$$

con lo que en nuestro caso,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R_{\exp(t\rho_2(Y))}(o')_{/t=0} = (\rho_2(Y))^*_{o'}.$$

Se concluye entonces que

$$f(Y) = j^*\omega(Y) = \omega\ j_*(Y) = \omega(\rho_2(Y)^*_{o\prime}) = \rho_2(Y),$$

por la definición de conexión de Cartan (definición 3.3.1, apartado 2). Esto prueba 1.

Probemos ahora 2. Para $X \in \mathfrak{G}$, tenemos que $f_{-1}(X) = (j^*\omega)_{-1}(X) = j^*\omega_{-1}(X)$, porque $j^*\omega_{-1}(X) = \omega_{-1} j_*(X) = (\omega(j_*(X)))_{-1} = (j^*\omega)_{-1}(X)$. Como $\hat{l}^*\theta = \omega_{-1}$, se sigue, según el lema 4.1.2, que

$$f_{-1}(X) = (j^*\hat{l}^*\theta)(X) = \tilde{j}^*\theta(X).$$

Así, identificando $\mathfrak{L}$ con $T_e(\mathbf{L})$, podemos escribir

$$f_{-1}(X) = \tilde{j}^*\theta(X) \equiv (\tilde{j}^*\theta)_e(X_e) = \theta_{\tilde{o}}\tilde{j}_*(X_e) \equiv \theta_{\tilde{o}}\tilde{j}_*(X),$$

puesto que $\tilde{j}(e) = (\tau_e)_*(\tilde{o}) = (\mathrm{id})_*(\tilde{o}) = \tilde{o}$. De este modo, por la definición de θ,

$$f_{-1}(X) = \theta_{\tilde{o}}\tilde{j}_*(X) = \tilde{o}^{-1}(\pi_{P*}\tilde{j}_*(X)).$$

Y como por definición de $\tilde{j}$ es $\pi_P \circ \tilde{j} = \pi$ (siendo $\pi_P \colon P \to M$ la proyección), se sigue que

$$f_{-1}(X) = \tilde{o}^{-1}(\pi_*(X)) = c(X),$$

de donde $j^*\omega$ verifica el punto 1 de la definición 4.2.2.

Por otra parte, para demostrar que f satisface el segundo apartado de la definición 4.2.2, observemos que las diferenciales de las aplicaciones $\rho_2 \colon \mathfrak{H} \to \mathrm{j}(\mathbf{L}_0)$, $\rho_1 \colon \mathfrak{H} \to \lambda(\mathbf{g}_0)$ y $l \colon \mathrm{j}(\mathbf{L}_0) \to \lambda(\mathbf{G}_0)$, que verifican $l \circ \rho_2 = \rho_1$, son aplicaciones $\rho_2 \colon \mathfrak{H} \to \mathrm{j}_*(\mathfrak{L}_0)$, $\rho_1 \colon \mathfrak{H} \to \lambda(\mathfrak{g}_0)$ y $l_* \colon \mathrm{j}_*(\mathfrak{L}_0) \to \lambda(\mathfrak{g}_0)$ tales que $l_* \circ \rho_2 = \rho_1$. Aquí, $\mathrm{j}_*(\mathfrak{L}_0)$ se considera como subálgebra del álgebra de Lie $\mathfrak{g}^2(n) \subset \hat{\mathfrak{g}}^2(n)$ del grupo $G^2(n) \subset \hat{G}^2(n)$, cuyo corchete está descrito en la sección 5 del capítulo primero.

En concreto,

$$\mathrm{j}_*(\mathfrak{L}_0) = \lambda(\mathfrak{G}_0) \oplus \{[[Z, -], -] \; ; \; Z \in \mathfrak{g}_1\}.$$

La restricción de la proyección π_1^2 hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}_0 & \xrightarrow{\mathrm{j}} & \mathrm{j}(\mathbf{L}_0) \\ l \downarrow & & \downarrow \pi_1^2 \\ \mathbf{G}_0 & \xrightarrow{\lambda} & \lambda(\mathbf{G}_0) \end{array}$$

Teniendo esto en cuenta, y que en el apartado 1 hemos visto que para todo $A \in \mathfrak{H}$ se verifica que $\mathrm{j}_* \circ f_{|\mathfrak{H}}(A) = \rho_2(A)$, resulta que

$$\begin{aligned} \rho_1(A) &= l_* \circ \rho_2(A) = (l_* \circ \mathrm{j}_* \circ f_{|\mathfrak{h}})(A) \\ &= (\lambda \circ \pi_1^2 \circ f_{|\mathfrak{H}})(A) = (\lambda \circ f_{0|\mathfrak{H}})(A), \end{aligned}$$

lo que termina la demostración.

□

Lema 4.2.2 *Para $a \in H$ y $X \in \mathfrak{G}$,*

$$((\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(\rho_2(a)) \circ f)(X) = f \circ \mathrm{Ad}_G(a)(X),$$

es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{L} \\ \mathrm{Ad}(a) \downarrow & & \downarrow \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(\rho_2(a)) \\ \mathfrak{G} & \xrightarrow{f} & \mathfrak{L} \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración:

Si $\mathcal{A}_x\colon x' \to xx'x^{-1}$ denota la conjugación por x, se tiene, puesto que $f_{/\mathfrak{H}} = (\rho_2)_*(e)$, que

$$\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(\rho_2(z)) \circ f_{/\mathfrak{H}} = (\mathcal{A}_{\rho_2(z)})_*(e) \circ (\rho_2)_*(e) = (\mathcal{A}_{\rho_2(z)} \circ \rho_2)_*(e).$$

Pero $(\mathcal{A}_{\rho_2(z)} \circ \rho_2)(z') = \rho_2(z)\rho_2(z')\rho_2(z)^{-1} = \rho_2(zz'z^{-1}) = (\rho_2 \circ \mathcal{A}_z)(z')$, y así, $\mathrm{Ad}(\rho_2(z)) \circ f_{/\mathfrak{H}} = (\rho_2 \circ \mathcal{A}_z)_*(e) = (\rho_2)_*(e)\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(z) = (f \circ \mathrm{Ad}(z))_{/\mathfrak{H}}$. □

Lema 4.2.3 *Sea χ una 1-forma de conexión sobre P tal que la $\mathbf{L}_0$-estructura definida por $[\chi]$ sea invariante y llana y sea f el (GP)-homomorfismo correspondiente a χ. Entonces*

$$f_0(X) = \chi(\tilde{j}_*X), \quad X \in \mathfrak{G} \equiv T_e(G).$$

Demostración:

Sea ω la conexión de Cartan normal asociada a χ, que es llana por serlo χ (teorema 3.4.4, iii)). Puesto que $\hat{l}\colon Q \to P$ es un homomorfismo de fibrados correspondiente a $l\colon \mathbf{L}_0 \to GL(\mathfrak{g}_{-1})$, y como el núcleo de l es G_1, se sigue que para $A \in T_{o'}(Q)$, $\hat{l}_*(A) = 0$ si y sólo si $A = Y^*$, con $Y \in \mathfrak{g}_1$.

Por tanto, como $\chi = h^*\omega_0$, se deduce que $\hat{l}^*\chi = \hat{l}^*h^*\omega_0 = \omega_0(h_*\hat{l}_*) = \omega_0$ en $T_{o'}(A)$. Haciendo la imagen recíproca de esta ecuación por j tenemos

$$j^*\omega_0 = j^*\hat{l}^*\chi = (\hat{l} \circ j)^*\chi = \tilde{j}^*\chi \ \text{ en } \ e \in G,$$

o, lo que es lo mismo,

$$f_0(X) = (j^*\omega)_0(X) = j^*\omega_0(X) = (\tilde{j}^*\chi)(X) = \chi(\tilde{j}_*X),$$

para cualquier $X \in \mathfrak{G} = T_e(G)$.

□

4.3 Estructura de Cartan invariante llana asociada a una clase de (GP)-homomorfismos equivalentes

Sea χ' una 1-forma de conexión sobre P. Siguiendo el mismo proceso anterior podemos construir a partir de χ' otro homomorfismo de álgebras de Lie que satisfaga la condición (GP). Estudiaremos la diferencia entre ambos homomorfismos. La siguiente definición está motivada por la definición de conexiones equivalentes dada en el capítulo 2.

Definición 4.3.1 *Sean f, $f'\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ dos (GP)-homomorfismos. Diremos que f y f' son (GP)***-homomorfismos equivalentes** *(y escribiremos $f \sim f'$), si existe $\xi \in \mathfrak{g}_1$ tal que*

$$f'_0 - f_0 = [\xi, f_{-1}],$$

donde f_i y f'_i denotan la $\mathfrak{g}_i$-componente de f y f' respectivamente, y donde, para $X \in \mathfrak{G}$, $[\xi, f_{-1}](X) = [\xi, f_{-1}(X)] \in \mathfrak{g}_0$.

Claramente, $\sim$ es una relación de equivalencia, ya que $f_{-1} = f'_{-1} = c$, siendo $c\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{g}_{-1}$ la forma canónica infinitesimal de G/H.

De nuevo, para el caso proyectivo, la siguiente proposición se encuentra en [1].

Proposición 4.3.1 *Sean χ y χ' dos 1-formas de conexión equivalentes sobre P tales que la $\mathbf{L}_0$-estructura definida por $[\chi] = [\chi']$ sea invariante y llana. Sean f y f' los (GP)-homomorfismos asociados a χ y χ' respectivamente. Entonces, f es equivalente a f'.*

Demostración:

Sean ω y ω' las correspondientes conexiones de Cartan de χ y χ' respectivamente. Entonces, puesto que la $\mathbf{G}_0$-estructura $[\chi] = [\chi']$ definida por χ es llana, se sigue que ω y ω' son llanas. Sea $Z \in T_{o'}(Q)$. Entonces

$$(\hat{l}^* h^* \omega)(Z) = \omega(h_* \hat{l}_*(Z)) = \omega(Z + Y^*) = \omega(Z) + Y,$$

para algún $Y \in \mathfrak{g}_1$; bastará ver para ello que $h_* \hat{l}_*(Z) - Z = Y^*$ para un cierto $Y \in \mathfrak{g}_1$. Pues bien, se tiene, aplicando $\hat{l}_*$ y teniendo en cuenta que $\hat{l}_* \circ h_* = \mathrm{id}$, que

$$\hat{l}_* \circ h_* \circ \hat{l}_*(Z) - \hat{l}_*(Z) = \hat{l}_*(Z) - \hat{l}_*(Z) = 0,$$

con lo cual, $h_* \hat{l}_*(Z) - Z \in \ker(\hat{l}_*)$.

El núcleo de la representación lineal de isotrpía $l\colon \mathbf{L}_0 \to GL(\mathfrak{g}_{-1})$ es G_1 y el álgebra de Lie de G_1 es $\mathfrak{g}_1$. Luego el núcleo de su diferencial $l\colon \mathfrak{L}_0 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$ es $\mathfrak{g}_1$. Además, del lema 4.2.3 se sigue que $f_0(X) = \chi(\tilde{j}_* X)$ y que $f'_0(X) = \chi'(\tilde{j}_* X)$ para cualquier $X \in \mathfrak{G} = T_e(G)$.

Como χ y χ' son equivalentes, existe una función $F\colon P \to \mathfrak{g}_1$ verificando que

$$F(za) = F(z)a \quad z \in P\,,\ a \in \mathbf{G}_0,$$

$$\chi' - \chi = [\theta, F].$$

En consecuencia, para $X \in \mathfrak{G} = T_e(G)$,

$$f_0'(X) - f_0(X) = (\chi' - \chi)(\tilde{j}_* X) = [\theta(\tilde{j}_* X), F(\tilde{o})],$$

pues si $X \in T_e(G)$, entonces $\tilde{j}_* X \in T_{\tilde{o}}(A)$. Como se vio a lo largo de la demostración de la proposición 4.2.2, $\theta_{\tilde{o}}(\tilde{j}_* X) = \tilde{o}^{-1}(\pi_{P*}\tilde{j}_* X) = \tilde{o}^{-1}(\pi_* X) = c(X)$. Así,

$$f_0'(X) - f_0(X) = [c(X), F(\tilde{o})], \quad X \in \mathfrak{g}.$$

y basta fijar $\xi = -F(\tilde{o}) \in \mathfrak{g}_1$. $\square$

Debido a esta proposición obtenemos una aplicación Φ entre el conjunto de $\mathbf{L}_0$-estructuras llanas G-invariantes sobre $M = G/H$ y el conjunto de clases de equivalencia de (GP)-homomorfismos. Nuestro objetivo es demostrar que Φ es una aplicación biyectiva. Empezamos viendo que Φ es inyectiva:

Proposición 4.3.2 *Sea Φ la aplicación que hace corresponder a cada $\mathbf{L}_0$-estructura G-invariante y llana (Q, ω) sobre $M = G/H$ la clase de equivalencia del (GP)-homomorfismo $f = j^*\omega \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ dado en el teorema 4.2.2. Entonces Φ es inyectiva.*

Demostración:
Sean χ y χ' 1-formas de conexión sobre P tales que $[\chi]$ y $[\chi']$ sean $\mathbf{L}_0$-estructuras llanas invariantes. Sean f y f' los (GP)-homomorfismos correspondientes a χ y χ' respectivamente. Supongamos que f es equivalente a f', es decir, que existe $\xi \in \mathfrak{g}_1$ tal que $f_0' - f_0 = [\xi, f_{-1}]$. Debemos probar que χ' es equivalente a χ.

Como $[\chi]$ y $[\chi']$ son invariantes, existen funciones $\mathfrak{g}_1$-valuadas F_a y F_a', dependiendo de $a \in G$, verificando que

$$F_a(zb) = F_a(z)b,$$
$$F_a'(zb) = F_a'(z)b,$$

para todo $z \in P$ y $b \in \mathbf{G}_0$, y tales que para $a \in G$,

$$\begin{aligned} (\tau_a^{(1)})^*\chi - \chi &= [\theta, F_a], \\ (\tau_a^{(1)})^*\chi' - \chi' &= [\theta, F_a'], \end{aligned}$$

puesto que $\tau_a \colon M \to M$ es una $\mathbf{G}_0$-transformación para cualquier $a \in G$. Además, por el lema 4.1.3, es

$$F_{ab} = F_b + \tau_b^{(1)*} F_a,$$

$$F'_{ab} = F'_b + \tau_b^{(1)*} F'_a,$$

para a, $b \in G$. Necesitamos la siguiente propiedad:

Lema 4.3.1 *Para todo $a \in H$ se verifica que $\xi \rho_1(a) = \xi + F_a(\tilde{o}) - F'_a(\tilde{o})$.*

Demostración:

Por el lema 4.2.3 tenemos que

$$f_0(X) = \chi(\tilde{j}_* X), \quad f'_0 = \chi'(\tilde{j}_* X),$$

para $X \in \mathfrak{G} = T_e(G)$. Por tanto, tenemos que, en $e \in G$,

$$\begin{aligned} \chi(\tilde{j}_* X) - \chi'(\tilde{j}_* X) &= f_0(X) - f'_0(X) = [f_{-1}(X), \xi] \\ = [c(X), \xi] &= [\tilde{o}^{-1}(\pi_* X), \xi] = [\theta_{\tilde{o}}(\tilde{j}_* X), \xi], \end{aligned}$$

en virtud de lo visto en las demostraciones de la proposición 4.3.1, del teorema 4.2.2 y de la proposición 4.2.1 y del hecho de que f sea equivalente a f'. En consecuencia, en $\tilde{o} \in P$ es

$$\chi - \chi' = [\theta, \xi].$$

En efecto, es suficiente que $\chi - \chi'$ y $[\theta, \xi]$ coincidan sobre $\tilde{j}_*(T_e(G))$, porque $\tilde{j}_*(T_e(G))$ contiene un complementario del subespacio vertical de $T_{\tilde{o}}(A)$ (pues $\tilde{j} = \hat{l} \circ j$ y $j^*(T_e L)$ contiene un complementario del subespacio vertical de $T_{j(e)}(Q)$) y porque sobre vectores verticales ambos miembros de la igualdad se anulan: si $A \in \mathfrak{g}_0$, se tiene que $\chi_{\tilde{o}}(A^*_{\tilde{o}}) = A = \chi'_{\tilde{o}}(A^*_{\tilde{o}})$; además, $\theta_{\tilde{o}}(A^*_{\tilde{o}}) = 0$.

Luego, como $(\tau_a^{(1)})^* \chi - (\tau_a^{(1)})^* \chi' = [\theta, F_a] - [\theta, F'_a] + \chi - \chi'$, resulta que en $\tilde{o} \in P$ es

$$(\tau_a^{(1)})^* \chi - (\tau_a^{(1)})^* \chi' = [\theta, \xi + F_a(\tilde{o}) - F'_a(\tilde{o})].$$

Ahora, para $X \in T_{\tilde{o}}(A)$ y $a \in H$ se verifica que

$$\mathrm{Ad}(\rho_1(a^{-1}))\chi((R_{\rho_1(a)^{-1}})_*(\tau_a^{(1)})_* X) = R^*_{\rho_1(a^{-1})^{-1}} \chi((R_{\rho_1(a^{-1})})_*(\tau_a^{(1)})_* X),$$

porque χ es una 1-forma de conexión y verifica que $R_b^* \chi = \mathrm{Ad}_{GL(\mathfrak{g}_{-1})}(b^{-1})\chi$, para todo $b \in GL(\mathfrak{g}_{-1})$. En consecuencia, si $a \in H$,

$$\mathrm{Ad}(\rho_1(a^{-1}))\chi((R_{\rho_1(a)^{-1}})_*(\tau_a^{(1)})_*X) = \chi((R_{\rho_1(a)})_*(R_{\rho_1(a^{-1})})_*(\tau_a^{(1)})_*X)$$

$$= \chi(R_{e*}(\tau_a^{(1)})_*X) = \chi((\tau_a^{(1)})_*X) = (\tau_a^{(1)})^*\chi(X).$$

Se sigue, por consiguiente, que

$$(\tau_a^{(1)})^*\chi(X) - (\tau_a^{(1)})^*\chi'(X) = \mathrm{Ad}(\rho_1(a)^{-1})(\chi - \chi')((R_{\rho_1(a)^{-1}})_*(\tau_a^{(1)})_*X)$$

$$= \mathrm{Ad}(\rho_1(a)^{-1})[\theta((R_{\rho_1(a)^{-1}})_*(\tau_a^{(1)})_*X), \xi] = \mathrm{Ad}(\rho_1(a)^{-1})[\rho_1(a)\theta(X), \xi],$$

por el punto i) del lema 3.3.2, con lo cual

$$\theta((R_{\rho_1(a)^{-1}})_*(\tau_a^{(1)})_*X) = \rho_1(a)\theta((\tau_a^{(1)})_*X)$$

y $\theta((\tau_a^{(1)})_*X) = (\tau_a^{(1)})^*\theta(X) = \theta(X)$ por ser τ_a una $\mathbf{G}_0$-transformación y ser, por tanto, $\tau_a^{(1)}$ un $\mathbf{G}_0$-isomorfismo para todo $a \in G$.

De esta manera, para $a \in H$,

$$(\tau_a^{(1)})^*\chi(X) - (\tau_a^{(1)})^*\chi'(X) = \mathrm{Ad}(\rho_1(a)^{-1})[\rho_1(a)\theta(X), \xi] = [\theta(X), \xi\rho_1(a)]$$

pues, en general, $\mathrm{Ad}(g^{-1})z = zg$ y $\mathrm{Ad}(g^{-1})x = g^{-1}x$ para $x \in \mathfrak{g}_{-1}$, $z \in \mathfrak{g}_1$ y $g \in GL(\mathfrak{g}_{-1})$. Se sigue entonces que

$$[\theta, \xi\rho_1(a)] = [\theta, \xi + F_a(\tilde{o}) - F'_a(\tilde{o})]$$

en $\tilde{o} \in P$, y puesto que $\theta\colon T_{\tilde{o}}P \to \mathfrak{g}_{-1}$ es sobreyectiva, el resultado se sigue de la transitividad de $\mathfrak{L}$. $\square$

Continuando con la demostración de que Φ es inyectiva, vamos a construir ahora una función $F\colon P \to \mathfrak{g}_1$ como sigue: cualquier punto $z \in P$ se expresa de la forma

$$z = a\tilde{o}g$$

donde $a \in G$ y $g \in \mathbf{G}_0$, y donde $a\tilde{o} = \tau_a^{(1)}(\tilde{o})$ denota la acción de G por la izquierda sobre P. Así, $a\tilde{o}$ "mueve" la referencia $\tilde{o}$ en el origen de M a una referencia en $\tau_a(o) = aH$, y $(a\tilde{o})g$ traslada dicha referencia en $\tau_a(o)$ a todas las referencias que se encuentran en la misma fibra.

Definimos entonces

$$F(z) = \xi g + F_a(\tilde{o})g - F'_a(\tilde{o})g,$$

que en efecto pertenece a $\mathfrak{g}_1$ porque para cualquier $\xi \in \mathfrak{g}_1$ y $g \in GL(\mathfrak{g}_{-1})$ (en particular $g \in \mathbf{G}_0$) es $\xi g \in \mathfrak{g}_1$.

Es claro que F verifica que $F(zb) = F(z)b$ para $z \in P$ y $b \in \mathbf{G}_0$. Además, F está bien definida. En efecto, para ello bastará probar que si $a\tilde{o}g = \tilde{o}$, con $a \in G$ y $g \in \mathbf{G}_0$, entonces,

$$F(\tilde{o}) = \xi + F_e(\tilde{o}) - F'_e(\tilde{o}) = (\xi + F_a(\tilde{o}) - F'_a(\tilde{o}))g.$$

Ahora bien, puesto que $a\tilde{o}g = \tilde{o}$ y dado que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tau_a^{(1)}} & P \\ \pi_P \downarrow & & \downarrow \pi_P \\ G/H & \xrightarrow{\tau_a} & G/H \end{array}$$

es conmutativo, se deduce que

$$\begin{aligned} o \equiv H = \pi_P(\tilde{o}) = \pi_P(a\tilde{o}g) = \pi_P\tau_a^{(1)}(\tilde{o}g) = (\tau_a \circ \pi_P)(\tilde{o}g) \\ = \tau_a\pi_P(\tilde{o}g) = \tau_a(\pi_P(\tilde{o})) = aH, \end{aligned}$$

de donde, necesariamente, debe ser $a \in H$. Por otra parte, debe ser $a\tilde{o} = \tau_a^{(1)}(\tilde{o})$ y si consideramos $\tilde{o}$ como un isomorfismo $\tilde{o}\colon T_o(M) \equiv \mathbb{R}^n \to T_o(M)$ entonces la acción anterior está determinada por

$$\tau_a^{(1)}(\tilde{o}) = (\tau_a)_*(o) \circ \tilde{o} = \rho_1(a) \circ \tilde{o} \equiv \tilde{o}\rho_1(a),$$

ya que la acción por la derecha de $GL(\mathfrak{g}_{-1})$ sobre P está definida por

$$(p, a) \in P \times GL(\mathfrak{g}_{-1}) \to a \circ p \in P.$$

Es decir, $a\tilde{o}g = \tilde{o}$ implica que $a\tilde{o} = \tilde{o}g^{-1}$, y, por lo que hemos visto, debe ser $g = \rho_1(a^{-1})$ y $a \in H$.

En consecuencia, por el lema anterior, y ya que $a \in H$, es

$$\begin{aligned} F(a\tilde{o}g) = \xi g + F_a(\tilde{o})g - F'_a(\tilde{o})g &= (\xi + F_a(\tilde{o}) - F'_a(\tilde{o}))g = \xi\rho_1(a)g \\ = \xi\rho_1(a)\rho_1(a^{-1}) = \xi = \xi\rho_1(e) &= \xi e + F_e(\tilde{o}) - F'_e(\tilde{o}) = F(\tilde{o}). \end{aligned}$$

Finalmente, la igualdad $\chi - \chi' = [\theta, F]$ se verifica sobre P, con lo cual, resulta que χ y χ' son equivalentes y Φ es inyectiva.

□

Sea $M = G/H$ un espacio homogéneo en las condiciones anteriores. Para demostrar que Φ es sobreyectiva, dado un (GP)-homomorfismo $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ con condición inicial $\tilde{o}$, debemos construir una $\mathbf{G}_0$-estructura G-invariante

$P \subset \mathcal{F}M$ y una conexión χ libre de torsión sobre P de modo que $(P, [\chi])$ sea una $\mathbf{L}_0$-estructura llana e invariante cuyo correspondiente (GP)-homomorfismo sea f. Además, debemos construir un homomorfismo de fibrados principales sobre M, $\tilde{j}\colon G \to P$, tal que $\tilde{j}(e) = \tilde{o}$ y que sea compatible con un homomorfismo de grupos de Lie $\rho_1\colon H \to l(\mathbf{G}_0)$, cuya diferencial coincida con f_0. Más aun, dado que $(P, [\chi])$ determina una estructura de Cartan (Q, ω) que se proyecta sobre P y que f debe coincidir con $j^*\omega$, debemos construir una $\mathrm{j}(\mathbf{L}_0)$-estructura holonómica de segundo orden G-invariante $Q \subset \mathcal{F}^2M$ y un homomorfismo de fibrados principales $j\colon G \to Q$ compatible con un homomorfismo de grupos de Lie $\rho_2\colon H \to \mathbf{L}_0 \equiv \mathrm{j}(\mathbf{L}_0)$ cuya diferencial restringida a $\mathfrak{H}$ coincida con la restricción $f_{|\mathfrak{H}}$, todo ello sujeto a las condiciones de compatibilidad naturales expuestas en la primera sección. Para tal fin necesitaremos los resultados que siguen.

Lema 4.3.2 *Sea $\delta\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ una derivación. Para todo X, $Y \in \mathfrak{G}$ se tiene*

$$[\delta^n Y, X] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \delta^{n-j}[Y, \delta^j X]\,.$$

Demostración:

Por comodidad, utilizaremos la notación

$$XY = [X, Y].$$

Desarrollando el miembro de la derecha en la expresión del enunciado se obtiene que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \delta^{n-j}(Y\delta^j X)$$

$$= \sum_{a+b=n} \binom{a}{b} (\delta^a Y)(\delta^b X) + (-1)^1 \binom{n}{1} \sum_{c+d=n-1} \binom{c}{d} (\delta^c Y)(\delta^{d+1} X)$$

$$+(-1)^2 \binom{n}{2} \sum_{e+f=n-2} \binom{e}{f} (\delta^e Y)(\delta f + 2X)$$

$$+\ldots + (-1)^p \binom{n}{p} \sum_{i+j=n-p} \binom{i}{j} (\delta^i Y)(\delta^{j+p} X)$$

$$+\ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \sum_{u+v=1} \binom{u}{v} (\delta^u Y)(\delta^{v+n-1} X) + (-1)^n \binom{n}{n} Y(\delta^n X)$$

$$= (\delta^n Y)X + \binom{n}{1}(\delta^{n-1}Y)\delta X + \binom{n}{2}(\delta^{n-2}Y)(\delta^2 X)$$

$$+ ... + \binom{n}{n-1}(\delta Y)(\delta^{n-1}X) + Y\delta^n X$$

$$-\binom{n}{1}\{(\delta^{n-1}Y)\delta X + \binom{n-1}{1}(\delta^{n-2}Y)(\delta^2 X)$$

$$+\binom{n-1}{2}(\delta^{n-3}Y)(\delta^3 X) + ... + \binom{n-1}{n-1}Y(\delta^n X)\}$$

$$+(-1)^2\binom{n}{2}\{(\delta^{n-2}Y)(\delta^2 X) + \binom{n-2}{1}(\delta^{n-3}Y)(\delta^3 X)$$

$$+ ... + \binom{n-2}{n-2}Y(\delta^{n-1}X)\} + ... + (-1)^p\binom{n}{p}\{(\delta^{n-p}Y)(\delta^p X)$$

$$+\binom{n-p}{1}(\delta^{n-p-1}Y)(\delta^{p+1}X) + ... + \binom{n-p}{n-p}Y(\delta^n X)\}$$

$$+ ... + (-1)^n\binom{n}{n-1}\{(\delta Y)(\delta^{n-1}X) + Y(\delta^n X)\} + (-1)^n\binom{n}{n}Y(\delta^n X)$$

$$= (\delta^n Y)X + (\binom{n}{1} - \binom{n}{1})(\delta^{n-1}Y)\delta X$$

$$+(\binom{n}{2} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{1} + \binom{n}{2})(\delta^{n-2}Y)(\delta^2 X)$$

$$+ ... + \{\binom{n}{p} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{p-2}$$

$$-\binom{n}{3}\binom{n-3}{p-3} + ... + (-1)^p\binom{n}{p}\}(\delta^{n-p}Y)(\delta^p X)$$

$$+ ... + \{1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + ... + (-1)^n\}Y(\delta^n X).$$

Así, bastará probar que

$$\binom{n}{p} - \binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{p-2} - \binom{n}{3}\binom{n-3}{p-3} + ... + (-1)^p\binom{n}{p} = 0,$$

para todo $p = 1, 2, ..., n$, lo que se sigue del hecho bien conocido de que si $n \in \mathbb{N}$, entonces, para todo $p = 1, 2, ..., n$ y para todo $k = 0, 1, ..., p$ se tiene que

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}.$$

□

Lema 4.3.3 *Denotemos por* $\mathrm{p}_r\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{g}_r$ *la* r*-ésima proyección para* $r = -1$, 0, 1. *Sean* $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, Y, $Y' \in \mathfrak{g}_0$ *y* $Z \in \mathfrak{g}_1$. *Se verifica entonces que*

i) $\mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(Y+Z)^n Y') = \mathrm{ad}(Y)^n Y'$,

ii) $\mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(Y+Z)^n X)$ *está dado por*

$$\mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(Y+Z)^n X) = \mathrm{ad}(Y)^{n-1}\mathrm{ad}(Z)X + \mathrm{ad}(Y)^{n-2}\mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(Y)X$$
$$+ ... + \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(Y)^{n-2}X + \mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(Y)^{n-1}X.$$

Demostración:

Teniendo en cuenta que $\mathrm{ad}(Z)Y' \in \mathfrak{g}_1$ y $\mathrm{ad}(Z)^2Y' = 0$, resulta que, al aplicar

$$\mathrm{ad}(Y+Z)^n = \mathrm{ad}(Y)^n + \mathrm{ad}(Y)^{n-1}\mathrm{ad}(Z) + \mathrm{ad}(Y)^{n-2}\mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(Y)$$
$$+ ... + \mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(Y)^{n-1} + ... + \mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(Z)^{n-1} + ... + \mathrm{ad}(Z)^{n-1}\mathrm{ad}(Y) + \mathrm{ad}(Z)^n$$

a Y' se obtiene

$$\mathrm{ad}(Y+Z)^n(Y')$$
$$= \mathrm{ad}(Y)^n(Y') + \mathrm{ad}(Y)^{n-1}\mathrm{ad}(Z)(Y') + ... + \mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(Y)^{n-1}(Y') + 0,$$

de donde se sigue i) pues

$$\mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(Y)^{n-1}\mathrm{ad}(Z)\mathfrak{g}_0) = ... = \mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(Y)^{n-1}\mathfrak{g}_0) = 0.$$

La demostración de ii) la haremos por inducción en n. El resultado es obvio para $n = 1$. Supongamos cierto el resultado para $1 \leq n \leq k$. Pongamos $X' = [Y, X] \in \mathfrak{g}_{-1}$, $Y' = [Z, X] \in \mathfrak{g}_0$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(Y+Z)^{k+1}X &= \mathrm{ad}(Y+Z)^k\mathrm{ad}(Y+Z)X \\ = \mathrm{ad}(Y+Z)^k\{[Y,X]+[Z,X]\} &= \mathrm{ad}(Y+Z)^kX' + \mathrm{ad}(Y+Z)^kY'. \end{aligned}$$

Del apartado i) se sigue que $\mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(Y+Z)^kY') = \mathrm{ad}(Y)^k\mathrm{ad}(Z)X$ mientras que, por hipótesis de inducción,

$$\mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(Y+Z)^k X') = \mathrm{ad}(Y)^{k-1}\mathrm{ad}(Z)X' + ... + \mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(Y)^{k-1}X'$$

$$= \mathrm{ad}(Y)^{k-1}\mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(Y)X + ... + \mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(Y)^{k-1}\mathrm{ad}(Y)X,$$

y sumando se sigue el resultado. □

A continuación se construye una aplicación

$$\xi\colon a \in H \to \xi(a) \in \mathfrak{g}_1 \equiv {\mathfrak{g}_{-1}}^*,$$

que se utilizará para expresar la aplicación ρ_2 en el teorema 4.3.1. Esta aplicación generaliza la dada por Agaoka para el álgebra $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(1+n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R}^n)^*$. Agaoka [1] da el enunciado, y unas breves indicaciones como demostración. En particular, afirma que para todo $Y \in \mathfrak{H}$ es

$$\xi(\exp Y) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\mathrm{ad}(-f_0(Y))^k f_1(Y).$$

La demostración detallada para $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ arbitraria es laboriosa y se debe a J. F. Torres. Se utilizará el isomorfismo

$$Z \in \mathfrak{g}_1 \to \phi_Z = B_{\mathfrak{L}}(-, Z) \in \mathfrak{g}_{-1}^*,$$

que hace equivalentes a las representaciones de $\mathbf{G}_0$ en $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_{-1}^*$ dadas, para todo $a \in \mathbf{G}_0$, $Z \in \mathfrak{g}_1$ y $X \in \mathfrak{g}_{-1}$ por

$$\lambda'(a)(Z) = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a^{-1})(Z),$$

$$\lambda^\dagger(a)(\psi) = \psi \circ \lambda(a),$$

siendo $\lambda\colon \mathbf{G}_0 \to GL(\mathfrak{g}_{-1})$ la representación lineal de isotropía de $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$, que, recordemos, está dada por

$$\lambda(a)(X) = \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(a)(X).$$

También consideraremos $\rho_1\colon H \to \lambda(\mathbf{G}_0)$ como si tomara valores en $\mathbf{G}_0$ cuando sea oportuno.

Proposición 4.3.3 *Sea $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ un (GP)-homomorfismo. Entonces, existe una única aplicación $\xi\colon H \to \mathfrak{g}_1 \equiv \mathfrak{g}_{-1}^*$ verificando que* *i) Para todo* a, $b \in H$ *es*

$$\xi(ab) = \xi(b) + \xi(a)\rho_1(b),$$

pensando los elementos de $\mathfrak{g}_1$ *como elementos de* $\mathfrak{g}_{-1}^*$, *o equivalentemente,*

$$\xi(ab) = \xi(b) + \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(b^{-1})\xi(a),$$

si no hacemos tal identificación.

ii) Para todo $a \in H$ *es*

$$\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(\rho_1(a)^{-1}) \circ f_0 \circ \mathrm{Ad}_G(a) - f_0 = [f_{-1}, \xi(a)].$$

Demostración:

En primer lugar, notemos que la composición $\mathrm{Ad}(\rho_1(a)^{-1}) \circ f_0 \circ \mathrm{Ad}(a)$ es efectivamente una aplicación de $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{g}_0$ porque $\mathrm{Ad}(a)\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$, $f_0\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{g}_0$ y $\mathrm{Ad}(\rho_1(a)^{-1})$ es un endomorfismo de $\mathfrak{g}_0$ porque hemos probado en la sección anterior que

$$\rho_1(H) \subset l(\mathbf{G}_0)\,.$$

Notemos también que para cualquier $X \in \mathfrak{G}$, se verifica que $[f_{-1}, \xi(a)](X) = [f_{-1}(X), \xi(a)] \in \mathfrak{g}_0$. La unicidad de $\xi(a)$ se sigue de la transitividad de $\mathfrak{L}$ y de que $f_{-1} = c$ es sobreyectiva. Recordemos que $\mathrm{p}_r\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{g}_r$ denota la r-ésima proyección, $r = -1$, 0, 1.

Puesto que H es conexo, para todo elemento $a \in H$ existen $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{H}$ tales que

$$a = \exp(Y_1)\ldots\exp(Y_k)\,.$$

Supongamos primero que

$$a = \exp(Y)$$

con $Y \in \mathfrak{H}$ y definamos

$$\xi(a) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\mathrm{ad}(-f_0(Y))^k f_1(Y),$$

Denotando

$$\frac{I - e^A}{A} = -I - \frac{A}{2!} - \frac{A^2}{3!} - \ldots$$

podemos expresar $\xi(a)$ como

$$\xi(a) = \frac{I - e^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))}}{\mathrm{ad}(-f_0(Y))} f_1(Y)$$

Nótese que $e^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))} = \mathrm{Ad}(\exp(-f_0(Y)))$.

Si probamos que $\xi(a)$ satisface la igualdad pedida, entonces, automáticamente $\xi(a)$ estará bien definida sobre $\exp(\mathfrak{H}) \subset H$, por la unicidad de $\xi(a)$.

Si $\xi(a)$ y $\xi(b)$ (a, $b \in H$) verifican dicha ecuación, definimos

$$\xi(ab) = \xi(b) + \xi(a)\rho_1(b),$$

pensando los elementos de $\mathfrak{g}_1$ como elementos de $\mathfrak{g}_{-1}^*$, o equivalentemente,

$$\xi(ab) = \xi(b) + \mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(b^{-1})\xi(a),$$

si no hacemos tal identificación. Por ser H conexo obtendríamos una aplicación $\xi\colon H \to \mathfrak{g}_1$ correctamente definida. Sea $Z = f_0(\mathrm{Ad}_G(\exp(Y))X)$, X, $Y \in \mathfrak{H}$. De la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{H} & \xrightarrow{f_0=\rho_1} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1}) \\ \exp\downarrow & & \downarrow\exp \\ H & \xrightarrow{\rho_1} & GL(\mathfrak{g}_{-1}) \end{array}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_{\mathbf{G}_0}(\exp(\rho_1(Y)))Z &= \{\exp(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(\rho_1(-Y))\}Z \\ = (\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(\rho_1(-Y))})Z &= \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(\rho_1(-Y))} f_0(\mathrm{Ad}_L(\exp(Y))X) \\ = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(\rho_1(-Y))}\rho_1(\mathrm{Ad}_H(\exp(Y))X) &= \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(\rho_1(-Y))}\rho_1(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(Y)}X) \end{aligned}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(\rho_1(-Y))}\rho_1(X + [Y,X] + \frac{1}{2}[Y,[Y,X]] + ...)$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(\rho_1(-Y))}(\rho_1(X) + [\rho_1(Y),\rho_1(X)] + \frac{1}{2}[\rho_1(Y),[\rho_1(Y),\rho_1(X)]] + ...)$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(\rho_1(-Y))}\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(\rho_1(Y))}\rho_1(X) = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(\rho_1(-Y))+\mathrm{ad}(\rho_1(Y))}\rho_1(X) = \rho_1(X) = f_0(X),$$

donde se ha usado el punto 2 de la definición 4.2.2 y el hecho de que $\mathrm{ad}(\rho_1(-Y))$ y $\mathrm{ad}(\rho_1(Y))$ conmutan. Luego,

$$\mathrm{Ad}(\rho_1(\exp(-Y))^{-1}) \circ f_0 \circ \mathrm{Ad}(\exp(Y)) = f_0$$

y la igualdad $\mathrm{Ad}(\rho_1(a)^{-1}) \circ f_0 \circ \mathrm{Ad}(a) - f_0 = [f_{-1}, \xi(a)]$ es cierta, para $a = \exp(Y) \in H$, en $\mathfrak{H}$, pues $f_{-1} = 0$ en $\mathfrak{H}$.

Denotemos

$$f^a = \mathrm{Ad}(\rho_1(a)^{-1}) \circ f \circ \mathrm{Ad}(a) \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}.$$

Se trata de ver que $\mathrm{p}_0 f^a - \mathrm{p}_0 f = [f_{-1}, \xi(a)]$.

Sea entonces $X \in \mathfrak{L}$. Se tiene que, como $a = \exp(Y)$,

$$\begin{aligned} f^a(X) &= \mathrm{Ad}(\rho_1(\exp(-Y))^{-1}) \circ f \circ \mathrm{Ad}(\exp(Y))X \\ &= \mathrm{Ad}(\rho_1(\exp(-Y))^{-1}) \circ f \circ (\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(Y)}X). \end{aligned}$$

Como f es un homomorfismo

$$f^a(X) = \mathrm{Ad}(\rho_1(\exp(-Y))^{-1}) \circ \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(fY)}(fX).$$

Por otra parte, p_k conmuta con $\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}}(x)$ para cualquier $x \in \mathbf{G}_0$. Luego,

$$\begin{gathered} \mathrm{p}_0(f^a(X)) = \mathrm{p}_0\{\mathrm{Ad}(\rho_1(\exp(-Y)))(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(fY)}fX)\} \\ = \mathrm{p}_0\{\mathrm{Ad}(\exp(\rho_1(-Y)))(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(fY)}fX)\} = \mathrm{p}_0\{\mathrm{Ad}(\exp(f_0(-Y)))(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(fY)}fX)\} \\ = \mathrm{Ad}(\exp(f_0(-Y))) \circ \mathrm{p}_0(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(fY)}fX) = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))}\mathrm{p}_0(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathrm{ad}(fY))^n fX), \end{gathered}$$

donde se ha usado que $\exp(\rho_1(-Y)) = \exp(f_0(-Y)) \in \mathbf{G}_0$, pues $\rho_1(-Y) = f_0(-Y) \in \mathfrak{g}_0$, y que ρ_1 es un homomorfismo de álgebras .

Escribiendo $fX = f_{-1}X + f_0X + f_1X$, se tiene, para todo $Y \in \mathfrak{H}$, que $fY = f_0Y + f_1Y$ porque $f_{-1}Y = 0$. Teniendo presente que

$$\mathrm{p}_0(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(fY)}fX) = \mathrm{p}_0(fX) + \mathrm{p}_0([fY, fX]) + \frac{1}{2}\mathrm{p}_0([fY,[fY,fX]]) + ...$$

resulta que

$$\mathrm{p}_0[fX, fY] = \mathrm{p}_0[f_0Y + f_1Y, f_{-1}X + f_0X + f_1X] = [f_oY, f_0X] - [f_{-1}X, f_1Y].$$

Por otra parte,

$$\begin{gathered} \mathrm{p}_0[fY,[fY,fX]] = \mathrm{p}_0[f_0Y + f_1Y, [f_0Y + f_1Y, f_{-1}X + f_0X + f_1X]]) \\ = [f_0Y,[f_0Y,f_0X]] + [f_0Y,[f_1Y,f_{-1}X]] + [f_1Y,[f_0Y,f_{-1}X]], \end{gathered}$$

y, en general, se sigue que

$$\mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(fY)^n fX) = \mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(f_0Y + f_1Y)^n(f_{-1}X + f_0X + f_1X))$$

$$= \mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(f_0Y + f_1Y)^n f_{-1}X) + \mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(f_0Y + f_1Y)^n f_0X)$$
$$+\mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(f_0Y + f_1Y)^n f_1X)$$

$$= \mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(f_0Y + f_1Y)^n f_{-1}X) + \mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(f_0Y + f_1Y)^n f_0X)$$

$$= \mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(f_0Y + f_1Y)^n f_{-1}X) + \mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(f_0Y)^n f_0X).$$

En efecto, basta tener en cuenta que $\mathrm{p}_0(\mathrm{ad}(f_0Y + f_1Y)^n f_1X) = 0$ y el lema 4.3.3, apartado i).

Volvamos al resultado principal. Tenemos que

$$\mathrm{p}_0(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(fY)} fX) = \mathrm{p}_0(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}(fY))^n fX)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{p}_0[(\mathrm{ad}(f_0Y + f_1Y)^n)(f_{-1}X + f_0X + f_1X)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{p}_0[(\mathrm{ad}(f_0Y + f_1Y)^n f_{-1}X) + (\mathrm{ad}(f_0Y)^n f_0X)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-1}\mathrm{ad}(f_1Y) f_{-1}X + \mathrm{ad}(f_0Y)^{n-2}\mathrm{ad}(f_1Y)\mathrm{ad}(f_0Y) f_{-1}X$$

$$+ ... + \mathrm{ad}(f_1Y)\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-1} f_{-1}X + \mathrm{ad}(f_oY)^n f_0X].$$

Calculamos entonces

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))}\mathrm{p}_0(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}(fY))^n fX)$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-1}\mathrm{ad}(f_1Y) f_{-1}X$$
$$\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-2}\mathrm{ad}(f_1Y)\mathrm{ad}(f_0Y) f_{-1}X$$
$$+ ... + \mathrm{ad}(f_1Y)\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-1} f_{-1}X + \mathrm{ad}(f_oY)^n f_0X]),$$

donde se conviene en que $\mathrm{ad}(f_0Y)^{-p} = 0$ para $p \geq 1$.

Ahora bien, de la conmutatividad de $\mathrm{ad}(-f_0Y)$ y $\mathrm{ad}(f_0Y)$ se sigue que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}(f_0Y))^n f_0X)$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))}\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(f_0(Y))} f_0X = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))+\mathrm{ad}(f_0Y)} f_0X = f_0X,$$

y tenemos por tanto que probar que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-1}\mathrm{ad}(f_1Y)f_{-1}X$$
$$+ ... + \mathrm{ad}(f_1Y)\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-1}f_{-1}X))$$
$$= [\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\mathrm{ad}(f_0Y)^k f_1Y, f_{-1}X].$$

Obsérvese que para $n = 1$ el sumando

$$\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-1}\mathrm{ad}(f_1Y)f_{-1}X + \mathrm{ad}(f_0Y)^{n-2}\mathrm{ad}(f_1Y)\mathrm{ad}(f_0Y)f_{-1}X$$
$$+ ... + \mathrm{ad}(f_1Y)\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-1}f_{-1}X$$

debe leerse como $\mathrm{ad}(f_1X)f_{-1}Y = [f_1Y, f_{-1}X]$, con lo cual, se debe probar que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))}[f_1Y, f_{-1}X]$$
$$+\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))}(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-1}\mathrm{ad}(f_1Y)f_{-1}X$$
$$+\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-2}\mathrm{ad}(f_1Y)\mathrm{ad}(f_0Y)f_{-1}X$$
$$+ ... + \mathrm{ad}(f_1Y)\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-1}f_{-1}X)$$

$$= [f_1Y, f_{-1}X] + [\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\mathrm{ad}(-f_0Y)^k f_1Y, f_{-1}X].$$

Más aún, puesto que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))}[f_1Y, f_{-1}X] = [f_1Y, f_{-1}X] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathrm{ad}(-f_0Y)^n[f_1Y, f_{-1}X]$$

$$= [f_1Y, f_{-1}X] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathrm{ad}(f_0Y)^n [f_1Y, f_{-1}X],$$

reducimos la expresión a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathrm{ad}(f_0Y)^n [f_1Y, f_{-1}X]$$

$$+\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-f_0(Y))} (\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{ad}(f_0Y)^{n-1} \mathrm{ad}(f_1Y) f_{-1}X$$

$$+... + \mathrm{ad}(f_1Y) \mathrm{ad}(f_0Y)^{n-1} f_{-1}X)$$

$$= [\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \mathrm{ad}(-f_0Y)^k f_1Y, f_{-1}X],$$

o bien, finalmente, a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathrm{ad}(f_0Y)^n [f_1Y, f_{-1}X]$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{(q+1)!} \mathrm{ad}(f_0Y)^p (\mathrm{ad}(f_0Y)^q \mathrm{ad}(f_1Y) f_{-1}X$$

$$+... + \mathrm{ad}(f_1Y) \mathrm{ad}(f_0Y)^q f_{-1}X)$$

$$= [\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \mathrm{ad}(-f_0Y)^k f_1Y, f_{-1}X].$$

Efectuaremos la demostración por inducción en el número de productos corchete que aparezcan en cada sumando, lo que podríamos llamar "grado" de cada sumando. Para ello, y por comodidad, denotaremos $f_0Y = Y_0$, $f_1Y = Y_1$ y $f_{-1}X = X_{-1}$. Supongamos entonces que en el primer miembro de la igualdad anterior hacemos $n = 1$ y $p + q = 1$. Entonces, se tiene

$$-\mathrm{ad}(Y_0)[Y_1, X_{-1}] + \frac{1}{2!}(\mathrm{ad}(Y_0)\mathrm{ad}(Y_1)X_{-1}) + \frac{1}{2!}(\mathrm{ad}(Y_1)\mathrm{ad}(Y_0)X_{-1})$$

$$= -[Y_0, [Y_1, X_{-1}]] + \frac{1}{2}[Y_0, [Y_1, X_{-1}]] + \frac{1}{2}[Y_1, [Y_0, X_{-1}]]$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}[Y_0,[Y_1,X_{-1}]] &+& \frac{1}{2}[Y_1,[Y_0,X_{-1}]]\\
&= \frac{1}{2}\{-[Y_0,[Y_1,X_{-1}]] &-& [Y_1,[X_{-1},Y_0]]\\
&= \frac{1}{2}[X_{-1},[Y_0,Y_1]] &=& -\frac{1}{2}[[Y_0,Y_1],X_{-1}],
\end{aligned}
$$

y como

$$[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\mathrm{ad}(-f_0Y)^k f_1Y, f_{-1}X\ ] = [\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\mathrm{ad}(f_0Y)^k f_1Y, f_{-1}X\ ],$$

resulta que para $n=1$ y $p+q=1$ nos ha quedado el sumando correspondiente a $k=1$ en el segundo miembro.

Supongamos ahora $n=2$ y $p+q=2$. En el primer miembro de la igualdad tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2!}\mathrm{ad}(Y_0)^2[Y_1,X_{-1}] &+& \frac{1}{3!}\{\mathrm{ad}(Y_0)^2\mathrm{ad}(Y_1)X_{-1}\\
&+\mathrm{ad}(Y_0)\mathrm{ad}(Y_1)\mathrm{ad}(Y_0)X_{-1} &+& \mathrm{ad}(Y_1)\mathrm{ad}(Y_0)^2X_{-1}\}\\
&+(-1)\frac{1}{2!}\mathrm{ad}(Y_0)[\mathrm{ad}(Y_0)\mathrm{ad}(Y_1)X_{-1} &+& \mathrm{ad}(Y_1)\mathrm{ad}(Y_0)X_{-1}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mathrm{ad}(Y_0)^2[Y_1,X_{-1}] &+& \frac{1}{6}\mathrm{ad}(Y_0)^2\mathrm{ad}(Y_1)X_{-1}\\
&+\frac{1}{6}\mathrm{ad}(Y_0)\mathrm{ad}(Y_1)\mathrm{ad}(Y_0)X_{-1} &+& \frac{1}{6}\mathrm{ad}(Y_1)\mathrm{ad}(Y_0)^2X_{-1}\\
&-\frac{1}{2}\mathrm{ad}(Y_0)^2\mathrm{ad}(Y_1)X_{-1} &-& \frac{1}{2}\mathrm{ad}(Y_0)\mathrm{ad}(Y_1)\mathrm{ad}(Y_0)X_{-1}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{6}\mathrm{ad}(Y_0)^2\mathrm{ad}(Y_1)X_{-1} - \frac{1}{3}\mathrm{ad}(Y_0)\mathrm{ad}(Y_1)\mathrm{ad}(Y_0)X_{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{ad}(Y_1)\mathrm{ad}(Y_0)^2X_{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}[Y_0,[Y_0,[Y_1,X_{-1}]]] - \frac{1}{3}[Y_0,[Y_1[Y_0,X_{-1}]]]\\
&\quad + \frac{1}{6}[Y_1,[Y_0[Y_0,X_{-1}]]].
\end{aligned}
$$

Ahora bien, usando la identidad de Jacobi, se tiene que

$$
\begin{aligned}
[Y_0,[Y_0,[Y_1,X_{-1}]]] &= -[Y_0,[Y_1,[X_{-1},Y_0]]] - [Y_0,[X_{-1},[Y_0,Y_1]]]\\
= [Y_0,[Y_1[Y_0,X_{-1}]]] &- [[Y_0,Y_1],[X_{-1},Y_0]] - [X_{-1},[Y_0,[Y_0,Y_1]]].
\end{aligned}
$$

Por otro lado, de nuevo por la identidad de Jacobi,

$$[Y_1,[Y_0,[Y_0,X_{-1}]]] = -[Y_0,[[Y_0,X_{-1}],Y_1]] - [[Y_0,X_{-1}],[Y_1,Y_0]]$$

de donde resulta que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\mathrm{ad}(Y_0)^2\mathrm{ad}(Y_1)X_{-1} &+& \quad \frac{1}{6}\mathrm{ad}(Y_1)\mathrm{ad}(Y_0)^2X_{-1}\\
=&\frac{1}{6}[Y_0,[Y_1[Y_0,X_{-1}]]] &-& \quad \frac{1}{6}[[Y_0,Y_1],[X_{-1},Y_0]]\\
-&\frac{1}{6}[X_{-1},[Y_0,[Y_0,Y_1]]] &-& \quad \frac{1}{6}[Y_0,[[Y_0,X_{-1}],Y_1]]\\
&& -\frac{1}{6}&[[Y_0,X_{-1}],[Y_1,Y_0]].
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}[Y_0,[Y_1[Y_0,X_{-1}]]] &-& \quad \frac{1}{6}[X_{-1},[Y_0,[Y_0,Y_1]]]\\
-&\frac{1}{6}[Y_0,[[Y_0,X_{-1}],Y_1]] &-& \quad \frac{1}{3}[Y_0,[Y_1[Y_0,X_{-1}]]]\\
=&\frac{-1}{6}[X_{-1},[Y_0,[Y_0,Y_1]]] &=& \quad \frac{1}{6}[[Y_0,[Y_0,Y_1]],X_{-1}].
\end{aligned}$$

De este modo, para $n=2$ y $p+q=2$, el cálculo efectuado nos da el valor del segundo miembro de la igualdad para $k=2$, es decir,

$$\frac{1}{3}[[Y_0,[Y_0,Y_1]],X_{-1}] = [\frac{(-1)^2}{3!}\mathrm{ad}(f_0Y)^2f_1Y, f_{-1}X].$$

Veamos entonces el caso general. Para abreviar, denotaremos, a partir de ahora y hasta el final de la demostración,

$$AB = [A,B].$$

Para un número natural n cualquiera y $p+q=n$ el sumando que se obtiene es

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^n}{n!}Y_0^n(Y_1X_{-1})\\
+&\frac{(-1)^0}{0!}\frac{1}{(n+1)!}Y_0^0\{Y_0^n(y_1X_{-1}) + Y_0^{n-1}(Y_1(Y_0X_{-1}))
\end{aligned}$$

$$+ ... + Y_0(Y_1(Y_0^{n-1}X_{-1})) + Y_1(Y_0^n X_{-1}\}$$

$$+\frac{(-1)}{1!}\frac{1}{n!}Y_0\{Y_0^{n-1}(Y_1X_{-1}) + Y_0^{n-2}(Y_1(Y_0X_{-1}))$$

$$+ ... + Y_1(Y_0^{n-1}X_{-1})\}$$

$$+ ... + \frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{(q+1)!}Y_0^p\{Y_0^q(Y_1X_{-1}) + Y_0^{q-1}(Y_1(Y_0X_{-1}))$$

$$+ ... + Y_0(Y_1(Y_0^{q-1}X_{-1})) + Y_1(Y_0^q X_{-1})\})$$

$$+ ... + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{(1+1)!}Y_0^{n-1}\{Y_0(Y_1X_{-1}) + Y_1(Y_0X_{-1})\}$$

$$= c_nY_0^n(Y_1X_{-1}) + c_{n-1}Y_0^{n-1}(Y_1(Y_0X_{-1})) + ... + c_{n-j}Y_0^{n-j}(Y_1(Y_0^jX_{-1}))$$

$$+ ... + c_1Y_0(Y_1(Y_0^{n-1}X_{-1})) + c_0Y_1(Y_0^nX_{-1}).$$

Nuestro objetivo ahora es el cálculo de los coeficientes c_j, $j = 0, 1, 2, ..., n$. Se tiene:

Lema 4.3.4 *Con las notaciones anteriores*

$$c_{n-j} = \frac{(-1)^{n+j}}{(n+1)!}\binom{n}{j}, \quad j = 0, 1, 2, ..., n.$$

Demostración:

Calculemos el coeficiente c_n. Se tiene que

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{(-1)}{n!} + \frac{(-1)^2}{2!(n-1)!}$$

$$+ ... + \frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{(q+1)!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{2!}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{(n+1-p)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\{(-1)^n(n+1) + \sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^p(n+1)!}{p!(n+1-p)!}\}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\{(-1)^n(n+1) + \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n+1}{p}(-1)^p\}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\{\binom{n+1}{n}(-1)^n + \sum_{p=0}^{n-1}\binom{n+1}{p}(-1)^p\}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\{\sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p}(-1)^p\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\{\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}(-1)^p - \binom{n+1}{n+1}(-1^{n+1})\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\{0 - \binom{n+1}{n+1}(-1)^{n+1}\} = \frac{1}{(n+1)!}(-1)^{n+2} = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}.$$

Análogamente, el coeficiente c_{n-1} de $Y_0^{n-1}(Y_1(Y_0X_{-1}))$ es

$$c_{n-1} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{(-1)}{n!} + \frac{(-1)^2}{2!(n-1)!} + ... + \frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{(q+1)!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{2!}$$

$$= c_n - \frac{(-1)^n}{n!} = c_n + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}((-1)^n + (-1)^{n+1}(n+1)) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(-1+n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}n.$$

Del mismo modo,

$$c_{n-2} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{(-1)}{n!} + \frac{(-1)^2}{2!(n-1)!} + ... + \frac{(-1)^p}{p!}\frac{1}{(q+1)!} + ... + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\frac{1}{3!}$$

$$\begin{aligned}
= c_{n-1} - \frac{(-1)^{n-1}}{2!(n-1)!} &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}n - \frac{(-1)^{n-1}}{2!(n-1)!} \\
= \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(-n + \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}) &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n - \binom{n+1}{n-1}) \\
= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n - \binom{n+1}{2}) &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n - \frac{(n+1)n}{2}) \\
= \frac{(-1)^{n+1}n}{(n+1)!2}(1-n) &= \frac{(-1)^n n(n-1)}{(n+1)!2} = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\binom{n}{2}.
\end{aligned}$$

Supongamos, por inducción, que

$$c_{n-j} = \frac{(-1)^{n+j}}{(n+1)!}\binom{n}{j},$$

para $j = 0, 1, 2, ..., p$, siendo $p < n$. Entonces, para $j = p + 1$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
c_{n-j} &= c_{n-p-1} \\
= c_{n-p} - \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)!(p+1)!} &= \frac{(-1)^{n+p}}{(n+1)!}\binom{n}{p} - \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)!(p+1)!} \\
= \frac{(-1)^{n+p}}{(n+1)!}\binom{n}{p} - \frac{(-1)^{n-p}}{(n+1)!}\frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!} &= \frac{(-1)^{n+p}}{(n+1)!}(\binom{n}{p} - \binom{n+1}{n-p}) \\
= \frac{(-1)^{n+p}}{(n+1)!}(\binom{n}{p} - \binom{n+1}{p+1}) &= \frac{(-1)^{n+p+1}}{(n+1)!}(\binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p})
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{(-1)^{n+p+1}}{(n+1)!}\binom{n}{p+1}.
$$

Así, para $p = 0, 1, 2, ..., n$, el coeficiente c_{n-p} de $Y_0^{n-p}(Y_1(Y_0^p X_{-1}))$ en $\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}(Y_0)} f_0(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(Y)} X)$ es

$$
c_{n-p} = \frac{(-1)^{n+p}}{(n+1)!}\binom{n}{p}.
$$

Esto concluye la demostración del lema 4.3.4. $\square$

La prueba de que $\mathrm{Ad}(\rho_1(a)^{-1}) \circ f_0 \circ \mathrm{Ad}(a) - f_0 = [f_{-1}, \xi(a)]$ es ahora consecuencia del lema 4.3.2.

Veamos finalmente que $\xi(ab) = \xi(b) + \xi(a)\rho_1(b)$, con a, $b \in H$, verifica

$$
\mathrm{Ad}(\rho_1(ab)^{-1}) \circ f_0 \circ \mathrm{Ad}(ab) - f_0 = [f_{-1}, \xi(ab)].
$$

Desarrollando esta expresión se obtiene

$$
\mathrm{Ad}(\rho_1(ab)^{-1}) \circ f_0 \circ \mathrm{Ad}(ab) = \mathrm{Ad}(\rho_1(b)^{-1}\rho_1(a)^{-1}) \circ f_0 \circ \mathrm{Ad}(ab)
$$

$$
= \mathrm{Ad}(\rho_1(b))^{-1}\mathrm{Ad}(\rho_1(a))^{-1} \circ f_0 \circ \mathrm{Ad}(a)\mathrm{Ad}(b) = [f_{-1}, \xi(ab)] + f_0
$$

$$
= [f_{-1}, \xi(b) + \xi(a)\rho_1(b)] + f_0 = [f_{-1}, \xi(b)] + [f_{-1}, \xi(a)\rho_1(b)] + f_0,
$$

de donde

$$
\mathrm{Ad}(\rho_1(ab)^{-1}) \circ f_0 \circ \mathrm{Ad}(ab) = \mathrm{Ad}(\rho_1(b))^{-1} \circ ([f_{-1}, \xi(a)] + f_0) \circ \mathrm{Ad}(b)
$$

$$
= \mathrm{Ad}(\rho_1(b))^{-1} \circ ([f_{-1}, \xi(a)]) \circ \mathrm{Ad}(b) + \mathrm{Ad}(\rho_1(b))^{-1} \circ f_0 \circ \mathrm{Ad}(b)
$$

$$
= \mathrm{Ad}(\rho_1(b))^{-1} \circ ([f_{-1}, \xi(a)]) \circ \mathrm{Ad}(b) + [f_{-1}, \xi(b)] + f_0.
$$

Por tanto, bastará ver que

$$\mathrm{Ad}(\rho_1(b))^{-1} \circ ([f_{-1}, \xi(a)]) \circ \mathrm{Ad}(b) = [f_{-1}, \xi(a)\rho_1(b)].$$

Ahora bien, como $\mathrm{Ad}(\rho_1(b))^{-1}\xi(a) = \xi(a)\rho_1(b)$, dado $X \in \mathfrak{G}$ se tiene que

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(\rho_1(b))^{-1} \circ ([f_{-1}, \xi(a)]) \circ \mathrm{Ad}(b)(X) \\ &= \mathrm{Ad}(\rho_1(b))^{-1} \circ [f_{-1}(\mathrm{Ad}(b))(X), \xi(a)] \\ &= [\mathrm{Ad}(\rho_1(b))^{-1} \circ f_{-1} \circ \mathrm{Ad}(b)(X), \mathrm{Ad}(\rho_1(b))^{-1}\xi(a)], \end{aligned}$$

y sólo nos queda justificar que

$$\mathrm{Ad}(\rho_1(b))^{-1} \circ f_{-1} \circ \mathrm{Ad}(b) = f_{-1},$$

lo que se sigue de que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{G} & \xrightarrow{f_{-1}} & \mathfrak{g}_{-1} \\ \mathrm{Ad}(b) \downarrow & & \downarrow \mathrm{Ad}(\rho_1(b)) \\ \mathfrak{G} & \xrightarrow{f_{-1}} & \mathfrak{g}_{-1} \end{array}$$

es conmutativo.

Esto concluye la demostración de la proposición 4.3.3.

□

Usaremos dos veces el siguiente resultado, para construir los fibrados G-invariantes $P \subset \mathcal{F}M$ y $Q \subset \mathcal{F}^2M$ asociados a un (GP)-homomorfismo.

Proposición 4.3.4 *Sea M una variedad arbitraria. Sean $\pi_1 \colon \mathcal{P}_1 \to M$ un fibrado principal con grupo de estructura H_1 y $\pi_2 \colon \mathcal{P}_2 \to M$ un fibrado principal con grupo de estructura H_2. Sea $F \colon \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ un homomorfismo de fibrados principales compatible con un homomorfismo $\phi \colon H_1 \to H_2$ de grupos de Lie cuya imagen $\phi(H_1)$ está contenida en un subgrupo de Lie regular $K \subset H_2$. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{P} = \{F(u)k \; ; \; u \in \mathcal{P}_1 \; , \; k \in K\}$$

es una K-reducción de $\mathcal{P}_2$, cuya proyección $\pi_{\mathcal{P}}$ es la restricción $\pi_{2|\mathcal{P}}$, y F induce un homomorfismo de fibrados principales $\hat{F} \colon \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}$, compatible con ϕ, dado por

$$\hat{F}(u) = F(u).$$

Si además G es un grupo de Lie que actúa por la izquierda sobre M, $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ de modo compatible con las proyecciones π_1, π_2 y con F, entonces G actúa por la izquierda sobre $\mathcal{P}$ de modo compatible con la proyección $\pi_{\mathcal{P}}$ y con $\hat{F}$.

Demostración:

Para probar que $\pi_{\mathcal{P}}\colon \mathcal{P} \to M$ es un K-fibrado principal con la topología relativa de $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_2$ podemos recurrir al hecho de que $\mathcal{P}$ es isomorfo de modo natural a la ϕ-extensión (véase [43], vol. II, cap. V, pag 201)

$$\mathcal{P}_\phi = \mathcal{P}_1 \times_{H_1} K,$$

que, como la notación sugiere, es el fibrado asociado a $\mathcal{P}_1$ de fibra K, sobre el cual actúa H_1 por la izquierda a través del homomorfismo ϕ del modo siguiente:

$$(a, k) \in H_1 \times K \to \phi(a)k \in K.$$

El isomorfismo natural entre $\mathcal{P}_\phi$ y $\mathcal{P}$ está dado por

$$[(u, k)] \to F(u)k.$$

Alternativamente podemos probar que $\mathcal{P}$ es el espacio total de un K-fibrado principal comprobando que la restricción $T_{\mathcal{P}}$ de cualquier trivialización T_2 de $\mathcal{P}_2$ a todo abierto de trivialidad U de M que sea de trivialidad también para $\mathcal{P}_1$ es un homeomorfismo

$$T = T_{\mathcal{P}}\colon \pi_{\mathcal{P}}^{-1}(U) = \mathcal{P} \cap \pi_2^{-1}(U) \to U \times K,$$

y viendo que en la intersección $U \cap U'$ de dos de estos abiertos la composición $T' \circ T^{-1}$ es un difeomorfismo. Aplicamos entonces la proposición X, pag. 39, de [43], vol. I, y obtenemos que $\mathcal{P}$ es una variedad diferenciable y el espacio total de un K-fibrado principal con las trivializaciones dadas.

Finalmente, si suponemos además que tanto la variedad M como los fibrados principales $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son G-invariantes respecto a tres acciones por la izquierda del grupo de Lie G compatibles entre sí, entonces es inmediato que la restricción a $G \times \mathcal{P}$ de la acción $G \times \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ de G sobre $\mathcal{P}_2$ toma valores en $\mathcal{P}$ y define una acción por la izquierda de G sobre $\mathcal{P}$ que deja $\mathcal{P}$ invariante.

□

Lema 4.3.5 *Sea $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ un (GP)-homomorfismo de condición inicial $\tilde{o}\colon \mathbb{R}^n \equiv \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{G}/\mathfrak{H} \equiv T_o(G/H)$. Existe un homomorfismo del H-fibrado $G \to M = G/H$ en el fibrado $\mathcal{F}M \to M$ de referencias de M,*

$$\tilde{j}\colon G \to \mathcal{F}M,$$

compatible con el homomorfismo $\rho_1 = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}$, y verificando que

$$\tilde{j}(e) = \tilde{o},$$

siendo $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}\colon H \to GL(\mathfrak{G}/\mathfrak{H})$ *la representación lineal de isotropía de* G/H.

Demostración:

Basta definir para todo $a \in G$

$$\tilde{j}(a) = \tau_a^{(1)}(\tilde{o}) = \tau_{a*}(o) \circ \tilde{o}.$$

□

Lema 4.3.6 *En las condiciones anteriores, el conjunto* $P \subset \mathcal{F}M$ *dado por*

$$P = \{\tilde{j}(x)\lambda(a)\ ;\ x \in G,\ a \in \mathbf{G}_0\}$$

es el espacio total de una $\mathbf{G}_0$*-estructura sobre* M, *siendo la proyección*

$$\pi_P\colon P \to M$$

la restricción de la proyección natural $\pi_0^1\colon \mathcal{F}M \to M$.

Demostración:

Es un caso particular de la proposición 4.3.4.

□

La siguiente propiedad generaliza el lema 2.16 de [1].

Teorema 4.3.1 *Dado un* (GP)*-homomorfismo* $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ *existe un único homomorfismo de grupos de Lie* $\rho_2\colon H \to \mathbf{L}_0$ *tal que* $l \circ \rho_2 = \rho_1$ *y tal que la diferencial de* ρ_2 *coincide con la restricción de* f *a* $\mathfrak{H}$.

Demostración:

La unicidad es evidente porque H es conexo. Probaremos la existencia. Para $a \in \mathfrak{H}$ denotaremos por $\xi(a)$ al elemento de $\mathfrak{g}_1$ dado en la proposición 4.3.3. Usando ξ definimos $\rho_2\colon H \to \mathbf{L}_0$ por

$$\rho_2(a) = (i_0 \circ \rho_1)(a) \exp\{-\xi(a)\}),\quad a \in H,$$

donde $\exp\{-\xi(a)\} \in G_1 \subset \mathbf{L}_0$ y $i_0(\rho_1(a)) \in \mathbf{L}_0$. Así,

$$\begin{aligned} l \circ \rho_2(a) &= l((i_0 \circ \rho_1)(a) \exp\{-\xi(a)\}) \\ &= (l \circ i_0 \circ \rho_1(a))(l(\exp\{-\xi(a)\})) = \rho_1(a) \end{aligned}$$

pues $l \circ i_0 = \mathrm{id}$ y $\exp\{-\xi(a)\} \in G_1 = \ker(l)$.

Veamos que ρ_2 es un homomorfismo de grupos. En general, la igualdad $\xi(ab) = \xi(b) + \xi(a)\rho_1(a)$ se puede interpretar como

$$\xi(ab) = \xi(b) + \mathrm{Ad}_{\mathbf{G}_0}(\rho_1(b))^{-1}(\xi(a)),$$

porque $\rho_1(b)^{-1} \in GL(\mathfrak{g}_{-1})$ y $\xi(a) \in \mathfrak{g}_1$. Se tiene así que, como la aplicación $i_0 \colon \mathbf{G}_0 \to \mathbf{L}_0$ es la inclusión,

$$\begin{aligned} \rho_2(ab) &= (i_0 \circ \rho_1)(ab)\exp(-\xi(ab)) \\ &= (i_0 \circ \rho_1)(a)(i_0 \circ \rho_1)(b)\exp(-\xi(b) - \xi(a)\rho_1(b)) \end{aligned}$$

Ahora bien, $\mathfrak{g}_1$ es abeliana y en general $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B)$ si y sólo si $[A, B] = 0$. Luego

$$\begin{aligned} \rho_2(ab) &= (i_0 \circ \rho_1)(a)(i_0 \circ \rho_1)(b)\exp(-\xi(b))\exp(-\xi(a)\rho_1(b)) \\ &= (i_0 \circ \rho_1)(a)(i_0 \circ \rho_1)(b)\exp(-\xi(a)\rho_1(b))\exp(-\xi(b)) \\ &= (i_0 \circ \rho_1)(a)(i_0 \circ \rho_1)(b)\exp(-\mathrm{Ad}(\rho_1(b)^{-1})\xi(a))\exp(-\xi(b)). \end{aligned}$$

Si denotamos por $\mathcal{A}_x \colon y \in \mathbf{L}_0 \to \mathcal{A}_x(y) = xyx^{-1} \in \mathbf{L}_0$ el automorfismo de conjugación por $x \in \mathbf{L}_0$, de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}_0 & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}_0}(x)} & \mathfrak{L}_0 \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ \mathbf{L}_0 & \xrightarrow{\mathcal{A}_x} & \mathbf{L}_0 \end{array}$$

se sigue que $x\exp(Y)x^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_{\mathbf{L}_0}(x)Y)$. Por tanto

$$\begin{aligned} \rho_2(ab) &= (i_0 \circ \rho_1)(a)(i_0 \circ \rho_1)(b)\exp(-\mathrm{Ad}(\rho_1(b)^{-1})(\xi(a))\exp(-\xi(b)) \\ &= (i_0 \circ \rho_1)(a)(i_0 \circ \rho_1)(b)\rho_1(b^{-1})\exp(-\xi(a))\rho_1(b)\exp(-\xi(b)) \\ & (i_0 \circ \rho_1)(a)\exp(-\xi(a))(i_0 \circ \rho_1)(b)\exp(-\xi(b)) = \rho_2(a)\rho_2(b), \end{aligned}$$

es decir, ρ_2 es homomorfismo de grupos.

Sea ahora $Y \in \mathfrak{H}$ arbitrario. Como

$$(\exp_Y)_*(0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{/0} = Y_e,$$

se sigue que

$$(\rho_2)_*(Y_e) = (\rho_2 \circ \exp_Y)_*(0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{/0}.$$

Ahora bien, si μ denota el producto en $\mathbf{L}_0$, $\Delta\colon t \in \mathbb{R} \to \Delta(t) = (t,t)$ la aplicación diagonal, y φ, $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbf{L}_0$ son tales que

$$\varphi(t) = (i_0 \circ \rho_1 \circ \exp_Y)(t) \ , \ \psi(t) = (\exp \circ (-\xi) \circ \exp_Y)(t),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}(\rho_2 \circ \exp_Y)(t) &= (i_0 \circ \rho_1 \circ \exp_Y)(t) \exp\{-\xi(\exp_Y t)\} \\ &= \varphi(t)\psi(t) = (\mu \circ (\varphi \times \psi) \circ \Delta)(t).\end{aligned}$$

Puesto que $\varphi(0) = e = \psi(0)$, tenemos, usando la regla de la cadena, que

$$(\rho_2)_*(Y) = (\mu \circ (\varphi \times \psi) \circ \Delta)(0) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{/0} = \mu_*(e,e)(\varphi'(0), \psi'(0)) = \varphi'(0) + \psi'(0).$$

Por otra parte

$$\varphi'(0) = i_{0*}(e)(\rho_1)_*(e)Y_e \equiv i_0(\rho_1(Y)) = \rho_1(Y) = f_0(Y),$$

mientras que

$$\psi'(0) = (\exp \circ (-\xi))_*(e)Y_e$$

$$= \exp_*(0) \circ (-\xi)_*(e)Y_e = (-\xi)(e)Y_e = (-\xi \circ \exp_Y)_*(0),$$

donde se ha usado que $\exp_*(0)$ es la identidad. Pero

$$\begin{aligned}(-\xi) \circ (\exp_Y)(t) = (-\xi)(\exp(tY)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \mathrm{ad}(-f_0(tY))^k f_1(tY) \\ = f_1(tY) + \frac{1}{2!}[-f_0(tY), f_1(tY)] + \ldots &= tf_1(Y) + \frac{1}{2!}[-tf_0(Y), tf_1(Y)] + \ldots\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\psi'(0) = (-\xi \circ \exp_Y)'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{(-\xi)(\exp(tY)) - \xi \exp(e))}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{tf_1(Y) + \frac{1}{2!}[-tf_0(Y), tf_1(Y)] + \ldots}{t} = f_1(Y).\end{aligned}$$

Resumiendo,

$$(\rho_2)_*(Y) = \varphi'(0) + \psi'(0) = f_0(Y) + f_1(Y) = f(Y),$$

ya que $f_{-1}(Y) = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{H}$. Hemos probado así que la diferencial de ρ_2 es la restricción de f a $\mathfrak{H}$.

□

El siguiente resultado aparece para el caso particular de estructuras proyectivas en [1], Lema 2.17. Su demostración se adapta sin dificultad

Teorema 4.3.2 *Sea $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ un (GP)-homomorfismo de condición inicial $\tilde{o}$. Fijado $o' \in \mathcal{F}^2M$ tal que $\pi_1^2(o\prime) = \tilde{o}$, existe un homomorfismo del H-fibrado $G \to M = G/H$ en el fibrado $\mathcal{F}^2M \to M$ de referencias holonómicas de segundo orden de M,*

$$j\colon G \to \mathcal{F}^2M,$$

compatible con el homomorfismo ρ_2 construido en el teorema precedente, y que verifica que $\hat{l} \circ j = \tilde{j}$ y $j(e) = o'$.

Demostración:

Sean $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ un recubrimiento abierto localmente finito de M y $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ fijemos una sección $\sigma_\alpha\colon U_\alpha \to G$ verificando que $\sigma_\alpha(o) = e$ si $o \in U_\alpha$. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que el fibrado $\pi\colon G \to M$ es trivial sobre U_α, definimos una aplicación $j_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathcal{F}^2M$ por

$$j_\alpha(\sigma_\alpha(x)a) = (h \circ \tilde{j} \circ \sigma_\alpha(x))\rho_2(a), \quad x \in U_\alpha, \;\; a \in H,$$

donde $(h\circ\tilde{j}\circ\sigma_\alpha(x))\rho_2(a)$ denota la acción por la derecha de $\rho_2(a) \in \mathbf{L}_0$ sobre $\mathcal{F}^2M$. Por su propia definición, j_α es una aplicación de fibrados correspondiente a ρ_2. Además,

$$\begin{aligned} \hat{l} \circ j_\alpha(\sigma_\alpha(x)a) &= \hat{l}((h \circ \tilde{j} \circ \sigma_\alpha(x))\rho_2(a)) \\ = (\hat{l} \circ h \circ \tilde{j} \circ \sigma_\alpha(x))(\hat{l} \circ \rho_2(a)) &= \tilde{j} \circ \sigma_\alpha(x)\rho_1(a) = \tilde{j}(\sigma_\alpha(x)a), \end{aligned}$$

porque $\pi_1^2\colon \mathcal{F}^2M \to \mathcal{F}M$ y $\tilde{j}\colon G \to P$ son correspondientes a l y $\rho_1\colon H \to \mathbf{G}_0$ respectivamente, y porque $\hat{l} \circ h = \mathrm{id}$. Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned} j_\alpha(e) = j_\alpha(\sigma_\alpha(o)) &= j_\alpha(\sigma_\alpha(o)e) \\ = (h \circ \tilde{j} \circ \sigma_\alpha(o))\rho_2(e) &= (h \circ \tilde{j}(e))\rho_2(e) \\ h(\tilde{o})\rho_2(e) &= o'\rho_2(e) = o'. \end{aligned}$$

Así, j_α satisface, localmente, las condiciones del enunciado.

Supongamos ahora que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y sea $\tau_{\alpha\beta}\colon \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \mathfrak{g}_1$ la única aplicación verificando $j_\alpha(z) = j_\beta(z)\exp(\tau_{\alpha\beta}(z))$ para $z \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Definimos $j\colon G \to \mathcal{F}^2M$ por

$$j(z) = j_\alpha(z)\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))\tau_\alpha\ (z)) \quad z \in \pi^{-1}(U_\alpha).$$

Notemos ahora que si $z \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $a \in H$ se tiene que

$$j_\alpha(za) = j_\beta(za)\exp(\tau_{\alpha\beta}(za)) = j_\beta(z)\rho_2(a)\exp(\tau_{\alpha\beta}(za)),$$

mientras que por otro lado

$$j_\alpha(za) = j_\alpha(z)\rho_2(a) = j_\beta \exp(\tau_{\alpha\beta}(z))\rho_2(a),$$

con lo cual $\exp(\tau_{\alpha\beta}(za)) = \rho_2(a)^{-1}\exp(\tau_{\alpha\beta}(z))\rho_2(a)$, es decir,

$$\exp(\tau_{\alpha\beta}(za) = \exp(\mathrm{Ad}(\rho_2(a)^{-1})\tau_{\alpha\beta}(z)).$$

Veamos que j está bien definida sobre G. Sea $z \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$; entonces

$$\begin{aligned}
j(z) &= j_\beta(z)\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))\tau_{\beta\alpha}(z)) \\
&= j_\alpha(z)\exp(\tau_{\beta\alpha}(z))\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))\tau_{\beta\gamma}(z)) \\
&= j_\alpha(z)\exp(\tau_{\beta\alpha}(z) + (-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))\tau_{\beta\gamma}(z))) \\
&= j_\alpha(z)\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))(-\tau_{\beta\alpha}(z) + \tau_{\beta\gamma}(z))) \\
&= j_\alpha(z)\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))(\tau_{\alpha\beta}(z) + \tau_{\beta\gamma}(z))) \\
&= j_\alpha(z)\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))\tau_{\alpha\gamma}(z)),
\end{aligned}$$

pues $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$. Por otra parte, para $z \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ y $a \in H$ se tiene que

$$\begin{aligned}
j(za) &= j_\alpha(za)\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(za))\tau_{\alpha\gamma}(za)) \\
&= j_\alpha(za)\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))\tau_{\alpha\gamma}(za))
\end{aligned}$$

$$= j_\alpha(z)\rho_2(a)\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))\mathrm{Ad}(\rho_2(a)^{-1})\tau_{\alpha\gamma}(z))$$

$$= j_\alpha(z)\rho_2(a)\exp(\mathrm{Ad}(\rho_2(a)^{-1})(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))\tau_{\alpha\gamma}(z)))$$

$$= j_\alpha(z)\rho_2(a)\rho_2(a)^{-1}\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))\tau_{\alpha\gamma}(z))\rho_2(a)$$

$$= j_\alpha(z)\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))\tau_{\alpha\gamma}(z))\rho_2(a) = j(z)\rho_2(a).$$

Además, si $z \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ resulta que

$$\hat{l} \circ j(z) = \hat{l}(j_\alpha(z)\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))\tau_{\alpha\gamma}(z)))$$

$$= \hat{l} \circ j_\alpha(z)\hat{l}(\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(z))\tau_{\alpha\gamma}(z))) = \hat{l} \circ j_\alpha(z) = \tilde{j}(z).$$

Finalmente, es trivial que $j(e) = o'$ pues si $e \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ entonces $o' = j_\alpha(e) = j_\beta(e)\exp(\tau_{\alpha\beta}(e)) = o'\exp(\tau_{\alpha\beta}(e))$, de tal modo que

$$\exp(-\sum_\gamma f_\gamma(\pi(e))\tau_{\alpha\gamma}(e)) = e.$$

□

Para construir la $\mathrm{j}(\mathbf{L}_0)$-estructura $Q \subset \mathcal{F}^2M$ procederemos igual que hemos hecho para la $\mathbf{G}_0$-estructura P.

Lema 4.3.7 *El conjunto $Q = \{j(x)\mathrm{j}(a)\ ;\ x \in G\ ,\ a \in \mathbf{L}_0\} \subset \mathcal{F}^2M$ es una $\mathrm{j}(\mathbf{L}_0)$-estructura holonómica de segundo orden G-invariante sobre $M = G/H$.*

Demostración:
Es un caso particular de la proposición 4.3.4.

□

El siguiente teorema generaliza el teorema 2.12 de [1].

Teorema 4.3.3 *La aplicación Φ que existe entre el conjunto de $\mathbf{L}_0$-estructuras invariantes llanas sobre $M = G/H$ y el conjunto de clases de equivalencia de (GP)-homomorfismos es una aplicación biyectiva.*

Demostración:

Ya hemos visto, en el lema 4.3.2, que Φ es inyectiva. Para probar que Φ es sobreyectiva, dada una clase $[f]$ de (GP)-homomorfismos, construiremos, en primer lugar, una conexión de Cartan llana ω tal que $j^*\omega = f$. Para cualquier $a \in G$, un vector tangente en $j(a)$ a Q se puede expresar de la forma $j_*X + A^*$, donde $X \in \mathfrak{G} \equiv T_a(G)$ y $A \in \mathfrak{L}_0$, pues, por el mismo argumento que el usado en la prueba del lema 4.2.1, $j_*(T_a(G))$ contiene un complementario del subespacio vertical de $T_{j(a)}(Q)$. Definimos

$$\omega_{j(a)}(j_*X + A^*) = f(X) + A \in \mathfrak{L},$$

y extendemos esta definición a cualquier punto de Q mediante

$$\omega_{j(a)g} = \mathrm{Ad}(g^{-1})R^*_{g^{-1}}\omega_{j(a)g},$$

para $a \in G$ y $g \in \mathbf{L}_0$. Así, ω está bien definida sobre Q, pues si $j_*X + A^* = j_*Y + B^*$ para X, $Y \in \mathfrak{G}$, A, $B \in \mathfrak{L}_0$, es decir, si $j_*(X - Y) = (B - A)^*$, se tiene que $f(X) + A = f(Y) + B$. Para ello será suficiente demostrar que si $j_*(X) = A^*$, entonces, $f(X) = A$. Y en efecto, se tiene que $\pi_*(X) = \pi_{Q*}(j_*X) = \pi_{Q*}(A^*) = 0$ y $f_{-1}(X) = c(X) = \tilde{o}^{-1}(\pi_*(X)) = 0$. Por consiguiente, $f(X) \in \mathfrak{L}_0$ y, por tanto, $X \in \mathfrak{H}$. Siguiendo los pasos dados en la prueba de la proposición 4.2.2, se concluye que $j_*(X) = (\rho_2(X))^*$ y, por el teorema 4.3.1, $f(X) = A$.

Como j es una aplicación correspondiente a ρ_2, para $z \in G$, $a \in H$ y $X \in \mathfrak{G} = T_{za}(G)$ y $A \in \mathfrak{L}_0$, es

$$\omega_{j(za)}(j_*(X) + A^*) = \omega_{j(z)\rho_2(a)}(j_*X + A^*).$$

Si desarrollamos esta igualdad, obtenemos que

$$\begin{gathered}
\omega_{j(za)}(j_*(za)X_{za} + A^*_{j(za)}) \\
= \mathrm{Ad}_L(\rho_2(a)^{-1}) \circ (R^*_{\rho_2(a)^{-1}}\omega)_{j(z)\rho_2(a)^{-1}}(j_*(za)X_{za} + A^*_{j(za)}) \\
= \mathrm{Ad}_L(\rho_2(a)^{-1})\{\omega_{j(z)}((R_{\rho_2(a)^{-1}})_*(j(z)\rho_2(a))(j_*(za)X_{za} + A^*_{j(za)}))\} \\
= \mathrm{Ad}_L(\rho_2(a)^{-1})\{\omega_{j(z)}\{(R_{\rho_2(a)^{-1}} \circ j)_*(za)X_{za} + (\mathrm{Ad}(\rho_2(a)A)^*_{j(z)}\}\} \\
= \mathrm{Ad}_L(\rho_2(a)^{-1})\{\omega_{j(z)}((j \circ R_{a^{-1}})_*(za)X_{za} + (\mathrm{Ad}\rho_2(a)A)^*_{j(z)})\} \\
= \mathrm{Ad}_L(\rho_2(a)^{-1})\{\omega_{j(z)}(j_*(z)(R_{a^{-1}})_*(za)X_{za} + (\mathrm{Ad}\rho_2(a)A)^*_{j(z)})\} \\
= \mathrm{Ad}_L(\rho_2(a)^{-1})\{\omega_{j(z)}(j_*(z)(\mathrm{Ad}(a)X)_a + (\mathrm{Ad}\rho_2(a)A)^*_{j(z)})\}
\end{gathered}$$

$$= \mathrm{Ad}_L(\rho_2(a)^{-1})\{f(\mathrm{Ad}(a)X) + \mathrm{Ad}\rho_2(a)A\} = \mathrm{Ad}_L(\rho_2(a)^{-1}) \circ f(\mathrm{Ad}(a)X) + A,$$

y la fórmula $\omega_{j(za)}(j_*(za)X_{za} + A^*_{j(za)}) = f(X) + A$ se sigue del lema 4.2.2.

A continuación se demuestra que ω satisface las condiciones de conexión de Cartan llana.

Si $A \in \mathfrak{L}_0$, ya es $\omega_{j(a)}(A^*) = A$. En el punto $j(a)g$, $a \in G$, $g \in \mathbf{L}_0$, resulta que

$$\begin{aligned} \omega_{j(a)g}(A^*) &= \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_{j(a)}(R_{g^{-1}})_*(A^*) \\ = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_{j(a)}(\mathrm{Ad}(g)(A))^* &= \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \mathrm{Ad}(g)(A) = A, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $\omega(A^*) = A$ para $A \in \mathfrak{L}_0$.

Por otra parte, sea $j_*X + A^*$ un vector tangente en $j(a)$, $X \in T_a(G)$, $A \in \mathfrak{L}_0$. Si $f(X) + A = 0$, entonces, $f(X) \in \mathfrak{L}_0$, y del mismo modo que antes tenemos que $X \in \mathfrak{H}$ y $j_*(X) = (\rho_2(X))^*$. Así,

$$0 = j_*(X) - (\rho_2(X))^* = j_*(X) - (f(X))^* = j_*(X) - (-A)^* = j_*(X) + A^*.$$

Además, si X es un vector tangente a Q en $j(a)g$, se tiene que $\omega_{j(a)g}(X) = 0$; por tanto

$$R^*_{g^{-1}}\omega_{j(a)}(X) = \omega_{j(a)}((R_{g^{-1}})_*(X)) = 0,$$

de donde $(R_{g^{-1}})_*(X) = 0$ y $X = 0$.

Finalmente se tiene que $\omega_{j(a)g} = \mathrm{Ad}(g^{-1})R^*_{g^{-1}}$; luego

$$\mathrm{Ad}(g)\omega_{j(a)g} = R^*_{g^{-1}}\omega_{j(a)g},$$

es decir, $R^*_g\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \omega$, lo cual concluye la prueba de que ω es una conexión de Cartan.

Probaremos a continuación que $h^*\omega_{-1} = \theta$ y que $h^*\omega_0$ es una conexión libre de torsión sobre P. Para ver que $h^*\omega_{-1} = \theta$, bastará comprobar que $\hat{l}^*\theta = \omega_{-1}$, pues en ese caso es $h^*\omega_{-1} = h^*\hat{l}^*\theta = (\hat{l} \circ h)^*\theta = \theta$. Para $j_*(X) + A^* \in T_{j(e)}(Q)$, $X \in \mathfrak{G} \equiv T_e(G)$, $A \in \mathfrak{L}_0$, se tiene que $\omega_{-1}(j_*(X) + A^*) = (f(X) + A)_{-1} = f_{-1}(X)$, y así,

$$\omega_{-1}(j_*(X) + A^*) = f_{-1}(X) = c(X),$$

mientras que, como $\hat{l}_*(A^*)$ es vertical,

$$\begin{aligned} \hat{l}^*\theta(j_*X + A^*) &= \theta(\hat{l} \circ j)_*(X) + \theta\hat{l}_*(A^*) \\ = \theta(\tilde{j}_*X) = \tilde{o}^{-1}(\pi_{P*}\tilde{j}_*X) &= \tilde{o}^{-1}(\pi_*X) = c(X). \end{aligned}$$

Extendemos la prueba a cualquier punto de $j(G)$. Si $X_a \in T_a(G)$, se obtienen

$$\omega_{-1}(j_*(X_a)) = f_{-1}((l_{a^{-1}})_* X_a) = c((l_{a^{-1}})_* X_a),$$

$$\begin{aligned} \hat{l}^*\theta(j_*(X_a)) &= \theta(\hat{l}\circ j)_*(X_a) = \theta(\tilde{j}_*(X_a)) \\ &= (\tilde{j}(a))^{-1}(\pi_{P*}\tilde{j}_*(X_a)) = (\tilde{j}(a))^{-1}(\pi_*(X_a)) \\ &= ((\tau_a)_*(\tilde{o}))^{-1}\pi_*(X_a) = ((\tau_a)_*\circ\tilde{o})^{-1}(\pi_*(X_a)) = \tilde{o}^{-1}(\tau_{a^{-1}})_*(\pi_*(X_a)) \\ &= \tilde{o}^{-1}(\tau_{a^{-1}}\circ\pi)_*(X_a) = \tilde{o}^{-1}(\pi\circ l_{a^{-1}})_*(X_a) = c((l_{a^{-1}})_* X_a), \end{aligned}$$

y así se tiene también que $\omega_{-1}(j_*X) = \hat{l}^*\theta(j_*X)$ y $\hat{l}^*\theta = \omega_{-1}$ en los puntos de la forma $j(a)$, $a \in G$.

Por otra parte, el hecho de que $h^*\omega_0$ sea una conexión libre de torsión sobre P es general para cualquier conexión de Cartan llana ω, tal y como se vio en la sección 3.3. Probaremos que la $\mathbf{G}_0$-estructura definida por $h^*\omega_0 = \chi$ es invariante.

Para cada $a \in G$, definimos una aplicación $\tau_a^{(2)}\colon Q \to Q$ por $\tau_a^{(2)}(j(z)g) = j(az)g$, $z \in G$, $g \in \mathbf{L}_0$.

La aplicación $\tau_a^{(2)}$ está bien definida y es inyectiva porque, si a, z, $z' \in G$ y $g \in \mathbf{L}_0$ entonces

$$j(z)g = j(z') \text{ si y solamente si } j(az)g = j(az'), \quad a \in G.$$

En efecto, supongamos que y, $y' \in G$ son tales que $j(y)g = j(y')$. Entonces, $\hat{l}(j(y)g) = \hat{l}(j(y')$, y por tanto, $\hat{l}(j(y))l(y) = \hat{l}(j(y'))$. Puesto que $\hat{l}\circ j = \tilde{j}$, es $\tilde{j}(y)l(g) = \tilde{j}(y')$ y el resultado se sigue de la observación 4.1.1 y del hecho de que $\tau_a^{(1)}$ esté bien definida y sea inyectiva.

Además, dado $j(z)g \in Q$, existe $j(a^{-1}z)g \in Q$ tal que $\tau_a^{(2)}(j(a^{-1}z)g) = j(aa^{-1}z)g = j(z)g$, de modo que $\tau_a^{(2)}$ es sobreyectiva, y puesto que $\tau_a^{(2)}$ es trivialmente diferenciable, tenemos que $\tau_a^{(2)}$ es un isomorfismo de fibrados correspondiente, además, a $\mathrm{id}_{\mathbf{L}_0}$ ya que $\tau_a^{(2)}(j(z)gg') = j(az)gg' = \tau'_a(j(z)g)g'$. Así, $\{\tau_a^{(2)},\ a \in G\}$ define una acción por la izquierda de G sobre Q (es inmediato que $\tau_a^{(2)}\circ\tau_b^{(2)} = \tau_{ab}^{(2)}$, a, $b \in G$) y j es compatible con dicha acción, es decir, $\tau_a^{(2)}(j(z)) = j(az)$, a, $z \in G$. Por otra parte, se verifica que $\hat{l}\circ\tau_a^{(2)} = \tau_a^{(1)}\circ\hat{l}\colon Q \to P$, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\tau_a^{(2)}} & Q \\ \hat{l}\downarrow & & \downarrow\hat{l} \\ P & \xrightarrow{\tau_a^{(1)}} & P \end{array}$$

es conmutativo, ya que dado $j(z)g \in Q$,

$$\begin{aligned}\hat{l} \circ \tau_a^{(2)}(j(z)g) &= \hat{l}(j(az)g)\hat{l}(j(az))\hat{l}(g) = \tilde{j}(az)\hat{l}(g),\\ \tau_a^{(1)} \circ \hat{l}(j(z)g) &= \tau_a^{(1)}(\hat{l}(j(z))\hat{l}(g)) = \tau_a^{(1)}(\tilde{j}(z)\hat{l}(g))\\ &= \tau_a^{(1)}(\tilde{j}(z))\hat{l}(g) = \tilde{j}(az)\hat{l}(g),\end{aligned}$$

pues $\tilde{j}$ es compatible con $\tau_a^{(1)}$ y $\hat{l}$ y $\tau_a^{(1)}$ son homomorfismos de fibrados correspondientes a l y a $\mathrm{id}_{\mathbf{G}_0}$ respectivamente.

Además, $\tau_a^{(2)}$ conserva ω, es decir, $(\tau_a^{(2)})^*\omega = \omega$. En efecto, si $X \in \mathfrak{G} \equiv T_z(G)$ y $A \in \mathfrak{L}_0$, se tiene que $\omega(j_*X + A^*) = f(X) + A$ y

$$(\tau_a^{(2)})^*\omega(j_*X + A^*) = \omega((\tau_a^{(2)})_*(j_*X)) + \omega((\tau_a^{(2)})_*A^*),$$

donde

$$(\tau_a^{(2)})_*(j_*X) = (\tau_a^{(2)} \circ j)_*(X) = (j \circ \tau_a)_*(X) = j_*((\tau_a)_*(X)),$$

pues el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\tau_a^{(2)}} & Q \\ j \uparrow & & \uparrow j \\ G & \xrightarrow{l_a} & G \end{array}$$

es conmutativo. Así, $\omega((\tau_a^{(2)})_*(j_*X)) = \omega(j_*((l_a)_*(X))) = f(X)$ pues X es invariante por la izquierda. Además,

$$(\tau_a^{(2)})_*(A^*_{j(z)}) = A^*_{\tau_a^{(2)}(j(z))} = A^*_{j(az)},$$

lo cual es cierto pues $\tau_a^{(2)}(j(z)g) = \tau_a^{(2)}(j(z))g$ y basta seguir la demostración de que $h^*\omega_0$ es una 1-forma de conexión sobre P dada en el lema 3.3.3. En cualquier otro punto $j(z)g$, $g \in \mathbf{L}_0$, es

$$\begin{aligned}(\tau_a^{(2)})^*\omega_{j(az)g} &= \omega_{j(az)g}(\tau_a^{(2)})_* = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ R^*_{g^{-1}}\omega_{j(za)}(\tau_a^{(2)})_*\\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ R^*_{g^{-1}}(\tau_a^{(2)})^*\omega_{j(za)} = \omega_{j(za)g}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\tau_a^{(2)} \colon (Q,\omega) \to (Q,\omega)$ es un automorfismo de (Q,ω), que conserva la conexión de Cartan, y, por el teorema 3.4.4, $\tau_a^{(1)} \colon (P,[\chi]) \to (P,[\chi])$ es un $\mathbf{G}_0$-isomorfismo para todo $a \in G$, siendo $\chi = h^*\omega_0$. Así, $[\chi]$ es una $\mathbf{G}_0$-estructura llana e invariante y el (GP)-homomorfismo correspondiente a χ es $j^*\omega = f$ ya que si $X \in \mathfrak{G} \equiv T_e(G)$, entonces, $j^*\omega(X) = \omega_{j(e)}(j_*X) = f(X)$.

Concluimos de esta manera que Φ es biyectiva.

□

4.4 Normalización de (GP)-homomorfismos

En [1], Agaoka introduce una especie de *normalización* en su concepto de (P)-homomorfismo que, con las notaciones que vamos a usar aquí, consiste en lo siguiente: En [1] un (P)-homomorfismo $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$ es un (N)-homomorfismo si y sólo si el coeficiente $(1,1)$ de la matrix $f_0(X)$ se anula para todo $X \in \mathfrak{m}$, siendo $\mathfrak{m}$ un suplementario de $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{G}$. Hemos comprobado que la condición de que eso equivale a que

$$B_{\mathfrak{L}}(\epsilon, f_0(X)) = 0\,,$$

siendo ϵ el elemento característico del álgebra de Lie semisimple graduada $\mathfrak{L}$. Esto nos permitirá la normalización de nuestro concepto más general de (GP)-homomorfismo, que será introducido en la definición 4.4.1.

Denotemos de nuevo por $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^n$ y sea $\epsilon \in \mathfrak{g}_0$ el elemento característico de $\mathfrak{L}$, dado en la definición 2.1.2. Sea $\mathfrak{m}$ un suplementario de $\mathfrak{H}$ en $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{H}$. Una vez fijada la referencia lineal $\tilde{o}$ en el origen de $M = G/H$ y teniendo en cuenta que c es sobreyectiva y que $c_{/\mathfrak{H}} = 0$, existe una base $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ de $\mathfrak{m}$ tal que $c(X_k) = e_k$, $k = 1, 2, ..., n$. Para cualquier (GP)-homomorfismo f tendremos entonces que $f_{-1}(X_k) = c(X_k) = e_k$, $k = 1, 2, ..., n$.

El siguiente resultado es crucial en lo que sigue. Debemos su demostración a Y. Khakimdjanov.

Teorema 4.4.1 *Sean f, $f'\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ dos homomorfismos de álgebras de Lie, siendo $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ un álgebra de Lie semisimple graduada. Si $f_{-1} = f'_{-1}$ y $f_0 = f'_0$, y si f_{-1} es sobreyectiva, entonces, $f = f'$.*

Demostración:
Sean X, $Y \in \mathfrak{G}$. Desarrollando por un lado

$$[f(X), f(Y)] = f[X, Y] = (f_{-1} + f_0 + f_1)[X, Y]$$

y por otro

$$[f(X), f(Y)] = [(f_{-1} + f_0 + f_1)(X), (f_{-1} + f_0 + f_1)(Y)]$$

e igualando las componentes en $\mathfrak{g}_0$ se tiene que

$$f_0[X, Y] = [f_{-1}(X), f_1(Y)] + [f_0(X), f_0(Y)] + [f_1(X), f_{-1}(Y)]\,,$$

o bien

$$[f_{-1}(X), f_1(Y)] - [f_{-1}(Y), f_1(X)] = f_0[X, Y] - [f_0(X), f_0(Y)].$$

Análogamente,

$$[f'_{-1}(X), f'_1(Y)] - [f'_{-1}(Y), f'_1(X)] = f'_0[X, Y] - [f'_0(X), f'_0(Y)],$$

y como por hipótesis es $f_0 = f'_0$ y $f_{-1} = f'_{-1}$, deducimos

$$[f_{-1}(X), f_1(Y)] - [f_{-1}(Y), f_1(X)] = [f_{-1}(X), f'_1(Y)] - [f_{-1}(Y), f'_1(X)]\,,$$

es decir,

$$[f_{-1}(X), (f_1 - f'_f)(Y)] = [f_{-1}(Y), (f_1 - f'_1)(X)]\,.$$

Pongamos ahora

$$A = [f_{-1}(X + Y), (f_1 - f'_1)(X + Y)],$$

$$B = [f_{-1}(X - Y), (f_1 - f'_1)(X - Y)].$$

Desarrollando resulta

$$\begin{aligned} A = [f_{-1}(X), (f_1 - f'_1)(X)] &\;+\; [f_{-1}(Y), (f_1 - f'_1)(Y)] \\ +[f_{-1}(X), (f_1 - f'_1)(Y)] &\;+\; [f_{-1}(Y), (f_1 - f'_1)(X)]\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = [f_{-1}(X), (f_1 - f'_1)(X)] &\;+\; [f_{-1}(Y), (f_1 - f'_1)(Y)] \\ -[f_{-1}(X), (f_1 - f'_1)(Y)] &\;-\; [f_{-1}(Y), (f_1 - f'_1)(X)]\,, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} A - B &= 2[f_{-1}(X), (f_1 - f'_1)(Y)] + 2[f_{-1}(Y), (f_1 - f'_1)(X)] \\ &= 4[f_{-1}(X), (f_1 - f'_1)(Y)]\,. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$[f_{-1}(X), (f_1 - f'_1)(Y)] = \frac{1}{4}(A - B)$$

$$= \frac{1}{4}\{[f_{-1}(X + Y), (f_1 - f'_1)(X + Y)] - [f_{-1}(X - Y), (f_1 - f'_1)(X - Y)]\}.$$

Por otra parte, puesto que f_{-1} es sobreyectiva y $\mathfrak{L}$ es transitiva, para ver que $f_1 = f'_1$ bastará ver que, para todo X, $Y \in \mathfrak{G}$, es

$$[f_{-1}(X), (f_1 - f'_1)(Y)] = 0\,.$$

Ahora bien, por la igualdad anterior será suficiente demostrar que para todo $X \in \mathfrak{G}$ es

$$[f_{-1}(X), (f_1 - f_1')(X)] = 0\,.$$

Pues bien, si tomamos $Y = -X \in \mathfrak{G}$ en la igualdad

$$[f_{-1}(X), (f_1 - f_1')(Y)] = [f_{-1}(Y), (f_1 - f_1')(X)]\,,$$

resulta que

$$[f_{-1}(X), (f_1 - f_1')(-X)] = [f_{-1}(-X), (f_1 - f_1')(X)],$$

y como

$$\begin{array}{rcl} [f_{-1}(X), (f_1 - f_1')(-X)] & = & -[(f_1 - f_1')(-X), f_{-1}(X)] \\ = [(f_1 - f_1')(X), f_{-1}(X)] & = & [f_{-1}(X), (f_1 - f_1')(X)] \end{array}$$

se obtiene que, para todo $X \in \mathfrak{G}$, es

$$[f_{-1}(X), (f_1 - f_1')(X)] = 0\,,$$

como queríamos probar.

$\square$

Corolario 4.4.1 *Sean f y f' dos (GP)-homomorfismos. Si $f_0 = f_0'$, entonces $f = f'$.*

Demostración:
Por la definición de (GP)-homomorfismo,

$$f_{-1} = f'_{-1} = c\,,$$

que es sobreyectiva, y por hipótesis $f_0 = f_0'$. Luego, por el teorema anterior, $f = f'$,

$\square$

El siguiente resultado permite parametrizar con los elementos de $\mathfrak{g}_1$ los (GP)-homomorfismos equivalentes a uno dado.

Teorema 4.4.2 *Dado un (GP)-homomorfismo $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, existe una correspondencia biyectiva entre $\mathfrak{g}_1$ y el conjunto de (GP)-homomorfismos que son equivalentes a f.*

Demostración:

Dado $\xi \in \mathfrak{g}_1$, le vamos a hacer correspoder otro (GP)-homomorfismo $f' \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ equivalente a f. Por la definición de (GP)-homomorfismo, debe ser

$$f'_{-1} = c\,.$$

Definimos

$$f'_0 = f_0 + [\xi, f_{-1}] \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{g}_0\,.$$

Si existe un (GP)-homomorfismo cuyas componentes en $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_0$ son las anteriores f_{-1} y f'_0, entonces su unicidad es obvia a partir del corolario 4.4.1. Para probar la existencia, consideremos la aplicación lineal $f'_1 \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{g}_1$ definida, para todo $X \in \mathfrak{G}$, por

$$f'_1(X) = f_1(X) + [\xi, f_0(X)] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}(X)]], \quad X \in \mathfrak{G}\,.$$

Definimos, con los anteriores f'_j,

$$f' = f'_{-1} + f'_0 + f'_1\,.$$

Primero debemos probar que f' es un homomorfismo de álgebras de Lie. Sean, pues, X, $Y \in \mathfrak{G}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} & f'[X,Y] \\ = f_{-1}[X,Y] + f_0[X,Y] \quad &+ \quad [\xi, f_{-1}[X,Y]] + f_1[X,Y] \\ +[\xi, f_0[X,Y]] \quad &+ \quad \frac{1}{2}[\xi,[\xi, f_{-1}[X,Y]]], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [f'(X), f'(Y)] \\ &= [f_{-1}(X) + f_0(X) + [\xi, f_{-1}(X)] + f_1(X) + [\xi, f_0(X)] + \frac{1}{2}[\xi,[\xi, f_{-1}(X)]], \\ &\quad , f_{-1}(Y) + f_0(Y) + [\xi, f_{-1}(Y)] + f_1(Y) + [\xi, f_0(Y)] + \frac{1}{2}[\xi,[\xi, f_{-1}(Y)]]] \\ &= [f_{-1}(X) + f_0(X) + f_1(X), f_{-1}(Y) + f_0(Y) + f_1(Y)] + [[\xi, f_{-1}(X)] \\ &\quad +[\xi, f_0(X)] + \frac{1}{2}[\xi,[\xi, f_{-1}(X)]], [\xi, f_{-1}(Y)] + [\xi, f_0(Y)] + \frac{1}{2}[\xi,[\xi, f_{-1}(Y)]]] \\ &\quad +[f_{-1}(X) + f_0(X) + f_1(X), [\xi, f_{-1}(Y)] + [\xi, f_0(Y)] + \frac{1}{2}[\xi,[\xi, f_{-1}(Y)]]] \end{aligned}$$

$$+[\xi, f_{-1}(X)] + [\xi, f_0(X)] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}(X)]]], f_{-1}(Y) + f_0(Y) + f_1(Y)].$$

Teniendo en cuenta que f es un homomorfismo de álgebras de Lie,

$$(f_{-1} + f_0 + f_1)[X, Y] = [(f_{-1} + f_0 + f_1)(X), (f_{-1} + f_0 + f_1)(Y)],$$

y en consecuencia se debe probar que

$$[\xi, f_{-1}[X, Y]] + [\xi, f_0[X, Y]] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}[X, Y]]] = [[\xi, f_{-1}(X)]$$

$$+[\xi, f_0(X)] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}(X)]], [\xi, f_{-1}(Y)] + [\xi, f_0(Y)] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}(Y)]]]$$

$$+[f_{-1}(X) + f_0(X) + f_1(X), [\xi, f_{-1}(Y)] + [\xi, f_0(Y)] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}(Y)]]]$$

$$+[\xi, f_{-1}(X)] + [\xi, f_0(X)] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}(X)]]], f_{-1}(Y) + f_0(Y) + f_1(Y)].$$

Vamos a separar la igualdad anterior en tres igualdades, correspondientes a las componentes en $\mathfrak{g}_{-1}$, $\mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{g}_1$. Algunos sumandos obtenidos al desarrollar la expresión son nulos debido a que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, i, $j = -1, 0, 1$. El primer miembro de la igualdad no tiene componente en $\mathfrak{g}_{-1}$, luego debemos verificar las tres igualdades siguientes:

i) $0 = [f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]] + [[\xi, f_{-1}(X)], f_{-1}(Y)]$.

ii) $[\xi, f_{-1}[X, Y]] = [[\xi, f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]] + [f_{-1}(X), [\xi, f_0(Y)]$
$+\frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}(Y)]]] + [f_0(X), [\xi, f_{-1}(Y)]] + [[\xi, f_{-1}(X)], f_0(Y)]$
$+[[\xi, f_0(X)] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}(X)]], f_{-1}(Y)]$.

iii) $[\xi, f_0[X, Y]] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}[X, Y]]] = [[\xi, f_{-1}(X)], [\xi, f_0(Y)]$
$+\frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}(Y)]]] + [[\xi, f_0(X)] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}(X)]], [\xi, f_{-1}(Y)]]$
$+[f_0(X), [\xi, f_0(Y)] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}(Y)]]] + [f_1(X), [\xi, f_{-1}(Y)]]$
$[[\xi, f_{-1}(X)], f_1(Y)] + [[\xi, f_0(X)] + \frac{1}{2}[\xi, [\xi, f_{-1}(X)]], f_0(Y)]$.

Se tiene, en cada caso, lo siguiente:

i) Por la identidad de Jacobi, es

$$0 = [f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]]$$
$$+[\xi, [f_{-1}(Y), f_{-1}(X)]] + [f_{-1}(Y), [f_{-1}(X), \xi]],$$

donde $[f_{-1}(Y), f_{-1}(X)] = 0$ y donde

$$[f_{-1}(Y), [f_{-1}(X), \xi]] = [[\xi, f_{-1}(X)], f_{-1}(Y)],$$

lo cual prueba i).

ii) De la identidad

$$(f_{-1} + f_0 + f_1)[X, Y] = [(f_{-1} + f_0 + f_1)(X), (f_{-1} + f_0 + f_1)(Y)]$$

se deduce que

$$f_{-1}[X, Y] = [f_{-1}(X), f_0(Y)] + [f_0(X), f_{-1}(Y)].$$

En consecuencia, se tiene que probar que

$$\begin{aligned} [\xi, [f_{-1}(X), f_0(Y)]] \quad &+ \quad [\xi, [f_0(X), f_{-1}(Y)]] \\ = [[\xi, f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]] \quad &+ \quad [f_{-1}(X), [\xi, f_0(Y)]] \\ +\frac{1}{2}[f_{-1}(X), [\xi, [\xi, f_{-1}(Y)]]] \quad &+ \quad [f_0(X), [\xi, f_{-1}(Y)]] \\ +[[\xi, f_{-1}(X)], f_0(Y)] \quad &+ \quad [[\xi, f_0(X)], f_{-1}(Y)] \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}[[\xi, [\xi, f_{-1}(X)]], f_{-1}(Y)].$$

Usando la identidad de Jacobi resulta que

$$\begin{aligned} &[\xi, [f_{-1}(X), f_0(Y)]] \\ = -&[f_{-1}(X), [f_0(Y), \xi]] \quad - \quad [f_0(Y), [\xi, f_{-1}(X)]] \\ = &[f_{-1}(X), [\xi, f_0(Y)]] \quad + \quad [[\xi, f_{-1}(X)], f_0(Y)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[\xi, [f_0(X), f_{-1}(Y)]] \\ = -&[f_0(X), [f_{-1}(Y), \xi]] \quad - \quad [f_{-1}(Y), [\xi, f_0(X)]] \\ = &[f_0(X), [\xi, f_{-1}(Y)]] \quad + \quad [[\xi, f_0(X)], f_{-1}(Y)], \end{aligned}$$

y tras simplificar, lo que hay que probar es

$$\begin{aligned}
[[\xi, f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]] &+ \frac{1}{2}[f_{-1}(X), [\xi, [\xi, f_{-1}(Y)]]] \\
+\frac{1}{2}[[\xi, [\xi, f_{-1}(X)]], f_{-1}(Y)] &= 0.
\end{aligned}$$

Usando de nuevo la identidad de Jacobi tenemos que

$$\begin{aligned}
&[[\xi, f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]] \\
&= -[\xi, [f_{-1}(Y), [\xi, f_{-1}(X)]]] \quad - \quad [f_{-1}(Y), [[\xi, f_{-1}(X)], \xi]],
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
&[[\xi, f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]] \\
&= -[[f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]], \xi] \quad - \quad [[[\xi, f_{-1}(Y)], \xi], f_{-1}(X)],
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
&[[\xi, f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]] \\
&= \frac{-1}{2}([\xi, [f_{-1}(Y), [\xi, f_{-1}(X)]]] \quad + \quad [f_{-1}(Y), [[\xi, f_{-1}(X)], \xi]] \\
&\qquad +[[f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]], \xi] \quad + \quad [[[\xi, f_{-1}(Y)], \xi], f_{-1}(X)]).
\end{aligned}$$

Por comparación, bastará ver que

$$[\xi, [f_{-1}(Y), [\xi, f_{-1}(X)]]] = -[[f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]], \xi],$$

o bien, que

$$[\xi, [f_{-1}(Y), [\xi, f_{-1}(X)]]] = [\xi, [f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]]],$$

lo cual es cierto, por la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned}
[f_{-1}(Y), [\xi, f_{-1}(X)]] &= -[\xi[f_{-1}(X), f_{-1}(Y)]] \\
-[f_{-1}(X), [f_{-1}(Y), \xi]] &= [f_{-1}(X), [\xi, f_{-1}(Y)]].
\end{aligned}$$

Esto prueba ii).

iii) Teniendo de nuevo en cuenta que

$$f_{-1}[X,Y]=[f_{-1}(X),f_0(Y)]+[f_0(X),f_{-1}(Y)],$$

y que, por el mismo argumento,

$$f_0[X,Y]=[f_{-1}(X),f_1(Y)]+[f_0(X),f_0(Y)]+[f_1(X),f_{-1}(Y)],$$

debemos probar que

$$[\xi,[f_{-1}(X),f_1(Y)]]+[\xi,[f_0(X),f_0(Y)]]+[\xi,[f_1(X),f_{-1}(Y)]]$$

$$\begin{aligned}
+\frac{1}{2}[\xi,[\xi,[f_{-1}(X),f_0(Y)]]] &+ \frac{1}{2}[\xi,[\xi,[f_0(X),f_{-1}(Y)]]]\\
=[[\xi,f_{-1}(X)],[\xi,f_0(Y)]] &+ \frac{1}{2}[[\xi,f_{-1}(X)],[\xi,[\xi,f_{-1}(Y)]]]\\
+[[\xi,f_0(X)],[\xi,f_{-1}(Y)]] &+ \frac{1}{2}[[\xi,[\xi,f_{-1}(X)]],[\xi,f_{-1}(Y)]]\\
+[f_0(X),[\xi,f_0(Y)]] &+ \frac{1}{2}[f_0(X),[\xi,[\xi,f_{-1}(Y)]]]\\
+[f_1(X),[\xi,f_{-1}(Y)]] &+ [[\xi,f_{-1}(X)],f_1(Y)]\\
+[[\xi,f_0(X)],f_0(Y)] &+ \frac{1}{2}[[\xi,[\xi,f_{-1}(X)]],f_0(Y)].
\end{aligned}$$

Usando la identidad de Jacobi y el hecho de que para todo $Z\in\mathfrak{G}$ es $[\xi,f_1(Z)]=0$, se sigue que

$$[\xi,[f_{-1}(X),f_1(Y)]]=[[\xi,f_{-1}(X)],f_1(Y)],$$

$$[\xi,[f_0(X),f_0(Y)]]=[f_0(X),[\xi,f_0(Y)]]+[[\xi,f_0(X)],f_0(Y)],$$

$$[\xi,[f_1(X),f_{-1}(Y)]]=[f_1(X),[\xi,f_{-1}(Y)]].$$

Probaremos a continuación que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[\xi,[\xi,[f_{-1}(X),f_0(Y)]]]\\
&=[[\xi,f_{-1}(X)],[\xi,f_0(Y)]] + \frac{1}{2}[[\xi,[\xi,f_{-1}(X)]],f_0(Y)].
\end{aligned}$$

Para ello, notemos que, por la identidad de Jacobi, es

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\xi,[\xi,[f_{-1}(X),f_0(Y)]]]\\ =&\frac{1}{2}\{\ [\xi,[f_{-1}(X),[\xi,f_0(Y)]]] \quad + \quad [\xi,[[\xi,f_{-1}(X)],f_0(Y)]]\ \},\end{aligned}$$

y que $[[[\xi,f_0(Y)],\xi],f_{-1}(X)]=0$ implica

$$[[\xi,f_{-1}(X)],[\xi,f_0(Y)]]=[\xi,[f_{-1}(X),[\xi,f_0(Y)]]].$$

Sustituyendo y operando se obtiene que lo que debemos probar es la igualdad

$$\begin{aligned}&[\xi,[[\xi,f_{-1}(X)],f_0(Y)]]\\ =&[\xi,[f_{-1}(X),[\xi,f_0(Y)]]] \quad + \quad [[\xi,[\xi,f_{-1}(X)]],f_0(Y)],\end{aligned}$$

la cual es cierta porque

$$\begin{aligned}&[\xi,[[\xi,f_{-1}(X)],f_0(Y)]]\\ &-[[\xi,f_{-1}(X)],[f_0(Y),\xi]] \quad - \quad [f_0(Y),[\xi,[\xi,f_{-1}(X)]]]\\ =&[\xi,[f_{-1}(X),[\xi,f_0(Y)]]] \quad + \quad [[\xi,[\xi,f_{-1}(X)]],f_0(Y)].\end{aligned}$$

Por otra parte, la demostración de que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\xi,[\xi,[f_0(X),f_{-1}(Y)]]]\\ =&[[\xi,f_0(X)],[\xi,f_{-1}(Y)]] \quad + \quad \frac{1}{2}[f_0(X),[\xi,[\xi,f_{-1}(Y)]]]\end{aligned}$$

es completamente análoga. Finalmente, el punto iii) se sigue de que, de nuevo por la identidad de Jacobi (véanse las igualdades escritas en la sección 2.5), es

$$[[\xi,f_{-1}(X)],[\xi,[\xi,f_{-1}(Y)]]]=[[\xi,f_{-1}(Y)],[\xi,[\xi,f_{-1}(X)]]].$$

Además, de la propia definición de f' se sigue que f' es un homomorfismo que verifica la condición (GP) y que es equivalente a f. Finalmente, la inyectividad de la aplicación $\xi \to f'$ se sigue de la definición de f'_0 y de la transitividad de $\mathfrak{L}$, mientras que el carácter sobreyectivo se debe a la propia definición de (GP)-homomorfismos equivalentes y al corolario 4.4.1. Esto termina la demostración. $\square$

Teorema 4.4.3 *Sea $f = f_{-1} + f_0 + f_1 \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ un (GP)-homomorfismo. Entonces, existe un homomorfismo de álgebras de Lie $f' \colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ equivalente a f y tal que $\epsilon \notin \mathrm{Im}(f')$.*

Demostración:

La idea consiste en encontrar una forma lineal $\varphi \colon \mathfrak{L} \to \mathbb{R}$ no nula sobre el elemento característico ϵ y un elemento $\xi \in \mathfrak{g}_1$ verificando que para todo $X \in \mathfrak{G}$ sea

$$\varphi(f_0(X)) = -\varphi([\xi, f_{-1}(X)]).$$

Sea $\varphi \colon x \in \mathfrak{L} \to \varphi(x) = B_{\mathfrak{L}}(\epsilon, x)$. Puesto que para $x \in \mathfrak{L}$ se verifica que $\mathrm{ad}(\epsilon)\mathrm{ad}(\epsilon)(x) = x$ si $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ o $x \in \mathfrak{g}_1$ y $\mathrm{ad}(\epsilon)\mathrm{ad}(\epsilon)(x) = 0$ si $x \in \mathfrak{g}_0$, entonces $\varphi(\epsilon) = B_{\mathfrak{L}}(\epsilon, \epsilon) = 2\dim(\mathfrak{g}_{-1}) \neq 0$. Por otra parte, puesto que $B_{\mathfrak{L}}(x, [y, z]) = B_{\mathfrak{L}}([x, y], z)$ se tiene, para $\xi \in \mathfrak{g}_1$, que

$$\begin{aligned} \varphi([\xi, f_{-1}(X)]) &= B_{\mathfrak{L}}(\epsilon, [\xi, f_{-1}(X)]) \\ = B_{\mathfrak{L}}([\epsilon, \xi], f_{-1}(X)) &= B_{\mathfrak{L}}(\xi, f_{-1}(X)), \end{aligned}$$

con lo cual, debemos encontrar $\xi \in \mathfrak{g}_1$ tal que

$$B_{\mathfrak{L}}(\epsilon, f_0(X)) = -B_{\mathfrak{L}}(\xi, f_{-1}(X)),$$

para todo $X \in \mathfrak{G}$. Sean $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ y $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ bases de $\mathfrak{g}_{-1}$ y $\mathfrak{g}_1$ respectivamente duales con respecto a $B_{\mathfrak{L}}$. Entonces, como $f_{-1|\mathfrak{m}} \colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{g}_{-1}$ es un isomorfismo lineal, existe una base $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ de $\mathfrak{m}$ verificando que $f_{-1}(X_i) = u_i$ para $i = 1, 2, ..., n$. Pongamos $\xi = \sum_i \alpha_i w_i \in \mathfrak{g}_1$. Tomando

$$\alpha_i = -B_{\mathfrak{L}}(\epsilon, f_0(X_i)), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} -B_{\mathfrak{L}}(\xi, f_{-1}(X_i)) &= -B_{\mathfrak{L}}(\sum_j \alpha_j w_j, f_{-1}(X_i)) \\ = -B_{\mathfrak{L}}(\sum_j \alpha_j w_j, u_i) &= -\alpha_i = B_{\mathfrak{L}}(\epsilon, f_0(X_i)), \end{aligned}$$

de tal modo que para este elemento $\xi \in \mathfrak{g}_1$ es $B_{\mathfrak{L}}(\epsilon, f_0(X)) = -B_{\mathfrak{L}}(\xi, f_{-1}(X))$ para todo $X \in \mathfrak{G}$, lo cual prueba el resultado. $\square$

Definición 4.4.1 *Un (GP)-homomorfismo f satisface la condición (N) (o es un (N)*-**homomorfismo**) *si para todo $X \in \mathfrak{m}$ es*

$$B_{\mathfrak{L}}(\epsilon, f_0(X)) = 0\,.$$

De las demostraciones de los dos teoremas anteriores se concluye además que

Proposición 4.4.1 *Sea f un (GP)-homomorfismo. Entonces existe un único (N)-homomorfismo f' que es equivalente a f.*

Combinando esta proposición con el teorema 4.3.3, resulta:

Corolario 4.4.2 *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de $\mathbf{G}_0$-estructuras llanas invariantes sobre $M = G/H$ y el conjunto de (N)-homomorfismos $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$.*

La siguiente propiedad de la forma de Killing es bien conocida y su demostración, que es elemental, puede verse por ejemplo en [53].

Teorema 4.4.4 *Sean $\mathfrak{G}$ un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$ y $\mathfrak{H}$ una subálgebra simple de $\mathfrak{G}$. Entonces, existe $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que para todo X, $Y \in \mathfrak{H}$ se verifica*

$$B_{\mathfrak{H}}(X,Y) = \alpha B_{\mathfrak{G}}(X,Y),$$

siendo $B_{\mathfrak{G}}$ y $B_{\mathfrak{H}}$ las formas de Killing de $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{H}$ respectivamente.

Corolario 4.4.3 *Sea $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ un álgebra de Lie simple sobre $\mathbb{C}$. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ verificando que para todo X, $Y \in \mathfrak{H}$ es*

$$B_{\mathfrak{H}}(X,Y) = \alpha \ \mathrm{traza}(XY)\,.$$

Demostración:

Necesariamente $\mathfrak{H}$ es una subálgebra simple de $\mathfrak{G} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Del resultado anterior se sigue que, para todo X, $Y \in \mathfrak{H}$,

$$B_{\mathfrak{H}}(X,Y) = \alpha\ B_{\mathfrak{G}}(X,Y) = 2n\alpha \ \mathrm{traza}(XY)\,.$$

$\square$

El resultado análogo para álgebras reales se debe a Dynkin

Teorema 4.4.5 *Sea* $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ *un álgebra de Lie simple real. Existe* $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ *tal que para cualesquiera* X, $Y \in \mathfrak{H}$ *se verifica*

$$B_{\mathfrak{H}}(X, Y) = \alpha \,\mathrm{traza}(XY).$$

De la definición 4.4.1 y del resultado anterior tenemos que

Corolario 4.4.4 *Si el álgebra* $\mathfrak{L}$ *es simple graduada, entonces un* (GP)*-homomorfismo* $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ *satisface la condición* (N) *si y sólo si* $\mathrm{traza}(\epsilon\, f_0(X)) = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{m}$.

Capítulo 5

Ejemplos de estructuras de Cartan invariantes llanas

Este capítulo es una prolongación del anterior. En él daremos varias familias de ejemplos de estructuras de Cartan invariantes llanas sobre espacios homogéneos $M = G/H$ determinando la estructura con un (GP)-homomorfismo de álgebras de Lie. Tales espacios homogéneos serán grupos de Lie (es decir, $H = \{e\}$ y $M = G$) a excepción del ejemplo 5 de la sección 2 que determina mediante un GP-homomorfismo la estructura conforme llana $SO(n+1,\mathbb{R})$-invariante de la esfera euclidiana $S^n = SO(n+1,\mathbb{R})/SO(n,\mathbb{R})$, para $n \geq 3$. Destaquemos también que la aplicación identidad $\mathrm{id}\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ es un (GP)-homomorfismo, que da lugar a la $\mathbf{L_0}$-estructura canónica en $\mathbf{L}/\mathbf{L_0}$, que es $\mathbf{L_0}$-invariante y llana. Esto proporciona una familia trivial de ejemplos, que es bien conocida [90]. Podemos sumarizar así la lista de ejemplos nuevos:

1. Hemos usado la técnica de Agaoka para encontrar nuevos ejemplos de estructuras proyectivas en grupos de Lie de dimensiones 3 y 4 y en dos familias infinitas de grupos de Lie filiformes.

2. Hemos encontrado ejemplos de estructuras homogéneas conformes integrables en algunos grupos de Lie de dimensión baja. En particular, obtenemos que sobre la esfera S^3 y sobre el grupo de Lie $\mathbb{H} - \{0\}$ de los cuaternios no nulos existe una estructura conforme llana invariante bajo la acción del grupo.

3. También hemos probado que la estructura conforme invariante llana de las esferas euclidianas $S^n = SO(n+1,\mathbb{R})/SO(n,\mathbb{R})$, $n > 2$, puede

obtenerse mediante un (GP)-homomorfismo.

4. Hemos demostrado que la estructura producto tensor integrable del grupo lineal general $GL(n,\mathbb{R})$ (que da su fibrado tangente $T(GL(n,\mathbb{R}))$ como el producto tensor de un fibrado vectorial de fibra tipo $\mathbb{R}^n$ por un fibrado vectorial de fibra tipo $\mathbb{R}^{n*}$) es de hecho una estructura $GL(n,\mathbb{R})$-invariante llana, asociada al álgebra semisimple graduada $\mathfrak{sl}(n+n,\mathbb{R})$. Esto se ha hecho de dos formas independientes: primero mostrando que existe un (GP)-homomorfismo adecuado (procedimiento inmediato) y, alternativamente, mediante la teoría general de G-estructuras (procedimiento laborioso).

Recordemos finalmente que sobre una variedad puede suceder que existan una o más de una estructuras proyectivas invariantes llanas no isomorfas, pero que si $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es un álgebra de Lie simple entonces a lo sumo existe una estructura de Cartan de tipo $\mathbf{L}/\mathbf{L}_0$ no proyectiva, y ello por causa del teorema de Ochiai sobre la nulidad del grupo de cohomología $H^{1,1}(\mathfrak{L})$, enunciado en la última sección del capítulo tercero.

5.1 Ejemplos de estructuras proyectivas invariantes llanas

5.1.1 Ejemplos de estructuras proyectivas invariantes llanas en grupos de Lie de dimensión baja

Denotemos ahora por $\{e_0, e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideremos el álgebra $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$ con la graduación (descrita en la sección 2.2, apartado a), para $p=1$, $q=n$) $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ dada por

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline x & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{L};\ x \in \mathbb{R}^n \right\},$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} -\text{traza}(A) & 0 \\ \hline 0 & A \end{array} \right) \in \mathfrak{L};\ A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbf{R}) \right\},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & z \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathfrak{L};\ z \in \mathbb{R}^{n*} \right\}.$$

Sea $\mathfrak{G}$ un álgebra de Lie n-dimensional, con una base fijada $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ tal que $c(X_k) = e_k$, $k = 1, 2..., n$. Puesto que el elemento característico de $\mathfrak{L}$ está dado por

$$\epsilon = \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & bI \end{array} \right) \in \mathfrak{g}_0 \ , \ a = \frac{-n}{n+1} \ , \ b = \frac{1}{n+1}$$

(véase [69]) se sigue, utilizando el corolario 4.4.4, que un (GP)-homomorfismo $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ es un (N)-homomorfismo si y sólo si el coeficiente $(1,1)$ de $f_0(X)$ es cero para todo $X \in \mathfrak{G}$.

El siguiente resultado caracteriza los (N)-homomorfismos sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(1+n,\mathbb{R})$. La implicación no trivial puede verse en Agaoka [1].

Proposición 5.1.1 *Un homomorfismo $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ de álgebras de Lie es un (N)-homomorfismo si y sólo si existen un homomorfismo de álgebras de Lie $g\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ y un vector $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que la matriz*

$$P = (v|g(X_1)v|g(X_2)v|\dots|g(X_n)v) \in \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{R})$$

es inversible y $f(X) = P^{-1}g(X)P$ para todo $X \in \mathfrak{G}$.

Demostración:

Sea $g\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ un homomorfismo cualquiera de álgebras de Lie. Consideremos un vector $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ de tal manera que la matriz

$$P = (v|g(X_1)v|g(X_2)v|\dots|g(X_n)v) \in \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{R})$$

sea inversible. Si definimos $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ por $f(X) = P^{-1}g(X)P$, $X \in \mathfrak{G}$, entonces, f es un (N)-homomorfismo. Obviamente, f está bien definido, pues traza$(f(X))$ = traza$(g(X)) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{G}$, y es homomorfismo de álgebras de Lie; además, para $i = 1,2,...,n$, se tiene que la primera columna de la matrix $f(X_i) \in \mathfrak{L}$ es

$$f(X_i)e_0 = P^{-1}g(X_i)Pe_0 = P^{-1}g(X_i)v = e_i,$$

con lo cual, $\{f_{-1}(X_1), f_{-1}(X_2), ..., f_{-1}(X_n)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n \equiv \mathfrak{g}_{-1}$ y el coeficiente $(1,1)$ de la matriz $f(X)$ es cero para todo $X \in \mathfrak{G}$.

Recíprocamente, sea $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ un (N)-homomorfismo y consideremos el vector $v = e_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, $P = (v|f(X_1)v|f(X_2)v|\dots|f(X_n)v) = I$ y f se puede escribir de la forma $f(X) = P^{-1}f(X)P$, para $X \in \mathfrak{G}$. $\square$

En la proposición anterior podemos, además, imponer que el homomorfismo g sea inyectivo. En efecto, si no lo fuese, se tendría que la dimensión del subespacio $\langle\{g(X_1), g(X_2), ..., g(X_n)\}\rangle$ sería menor que n, con lo cual, existiría $i \in \{1,2,...,n\}$ tal que $g(X_i)$ sería combinación lineal de $\{g(X_1),...,g(X_{i-1}),$ $g(X_{i+1}),...,g(X_n)\}$, es decir, existiría $i \in \{1,2,...,n\}$ tal que $g(X_i)v$ dependería linealmente de los vectores $g(X_1)v,...,g(X_{i-1})v,$

$g(X_{i+1})v,...,g(X_n)v$. De este modo, P no sería inversible. En resumen, si $\mathfrak{G}$ no se puede encajar como subálgebra en $\mathfrak{L}$, entonces no existe ningún (N)-homomorfismo entre $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{L}$, y por consiguiente, no existe ninguna estructura proyectiva invariante llana sobre M.

En lo que sigue, denotaremos por $\{E_{ij}\ ;\ i,j = 1,2,...,n\}$ la base usual de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Sea ahora $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(1+3,\mathbb{R})$. En este caso $\dim(\mathfrak{g}_{-1}) = 3$, lo que conduce a estudiar ejemplos de estructuras proyectivas invariantes llanas sobre grupos de Lie de dimensión tres. Recordemos que las álgebras de Lie de dimensión 3 se hallan clasificadas en ocho familias. Nosotros seguiremos aquí las notaciones de [21] (véase también P. Bernat, M. Vergne [13], cap. VI, o [38]).

Ejemplo 1:

Sea $\mathfrak{G} = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$, con los corchetes idénticamente nulos, el álgebra abeliana 3-dimensional. Puesto que $[E_{21}, E_{31}] = [E_{21}, E_{41}] = [E_{31}, E_{41}] = 0$, la aplicación lineal $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ definida por $f(e_1) = E_{21}$, $f(e_2) = E_{31}$, $f(e_3) = E_{41}$ proporciona directamente un (N)-homomorfismo de $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{L}$. Obviamente, este ejemplo se generaliza para el álgebra abeliana n-dimensional.

Otra estructura proyectiva invariante llana, proporcionada por un (N)-homomorfismo diferente del anterior, se obtiene, usando la proposición 5.1.1, como sigue: sean $H_i = E_{ii} - E_{44}$, $i = 1,2,3$. Definamos $g\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ por $g(e_1) = H_1$, $g(e_2) = H_2$, $g(e_3) = H_3$ y pongamos $v = (a,b,c,d)^t$. La matriz P en este caso resulta

$$P = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 & c \\ d & -d & -d & -d \end{pmatrix},$$

que es inversible si y sólo si a, b, c y d son todos no nulos. El (N)-homomorfismo correspondiente a g y a v, que no depende de los valores no nulos de los parámetros que define v, está dado por

$$f(e_1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(e_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(e_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notemos que, efectivamente, f es un homomorfismo de álgebras de Lie, es decir, $[f(e_i), f(e_j)] = 0$ para i, $j = 1, 2, 3$, porque

$$f(e_i)f(e_j) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2:
Sea $\mathfrak{G} = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$, el álgebra de Lie con el producto corchete dado por $[e_1, e_2] = e_1$ y $[e_1, e_3] = 0 = [e_2, e_3]$. Consideremos el homomorfismo de álgebras de Lie $g\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ dado por $g(e_1) = E_{43}$, $g(e_2) = H_1$, $g(e_3) = E_{23}$. Para $v = (a, b, c, d)^t$ la matriz P descrita en la proposición 5.1.1 es

$$P = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & c & -d & 0 \end{pmatrix},$$

que es inversible si y sólo si a y c son distintos de cero. La proposición 5.1.1 proporciona en este caso una familia de (N)-homomorfismos, parametrizada por los números reales, cada uno de los cuales está dado por

$$f(e_1) = E_{21},$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{2d}{c} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(e_3) = E_{41},$$

para ciertos valores de $c \neq 0$ y d.

Ejemplo 3:
Sea $\mathfrak{G} = \mathfrak{o}(3) = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$, con el producto corchete dado por $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$ y $[e_3, e_1] = e_2$, el álgebra ortogonal. En este caso, es conocido [1] que sobre $SO(3)$ existe una única estructura proyectiva invariante llana y el correspondiente (N)-homomorfismo $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ está dado por

$$f(e_1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(e_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(e_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4:

Sea $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_7^1 = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$, el álgebra de Lie definida por $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = e_1$ y $[e_2, e_3] = e_2$. El homomorfismo $g\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ dado por $g(e_1) = E_{12}$, $g(e_2) = E_{32}$, $g(e_3) = H_2$ y la proposición 5.1.1 proporcionan, para un vector $v = (a, b, c, d)^t \in \mathbb{R}^4$ con b y d no nulos el (N)-homomorfismo $f\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$ definido por

$$f(e_1) = E_{21} + E_{24},$$

$$f(e_2) = E_{31} + E_{34},$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a}{b} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-c}{b} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La misma familia de (N)-homomorfismos se obtiene si se considera el homomorfismo $g\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$, $g(e_1) = E_{21}$, $g(e_2) = E_{31}$, $g(e_3) = H_1$. Sin embargo, el homomorfismo $g\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$, $g(e_1) = E_{13}$, $g(e_2) = E_{42}$, $g(e_3) = H_3$ da (para b y c no nulos) una nueva familia de (N)-homomorfismos definida por

$$f(e_1) = E_{21} + E_{24},$$

$$f(e_2) = E_{31},$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{2d}{b} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5:

Sea $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_7^2 = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$ el álgebra de Lie definida por $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = e_1$ y $[e_2, e_3] = 2e_2$. Si $g(e_1) = E_{12}$, $g(e_2) = E_{42}$, $g(e_3) = H_2$, y si $v = (a, b, c, d)^t$ con b y c no nulos, obtenemos la familia de (N)-homomorfismos dada por

$$f(e_1) = E_{21} + E_{24},$$

$$f(e_2) = E_{31} + E_{34},$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{2d}{b} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 6:

Sea $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_7^{-1} = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$ el álgebra de Lie definida por $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = e_1$ y $[e_2, e_3] = -e_2$. Entonces el homomorfismo dado por $g(e_1) = E_{32}$, $g(e_2) = E_{14}$, $g(e_3) = H_2$ y el vector $v = (a, b, c, d)^t$ con b y d no nulos proporcionan la familia de (N)-homomorfismos

$$f(e_1) = E_{21} + E_{24},$$

$$f(e_2) = E_{31} - E_{34},$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-c}{b} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a}{d} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 7:

Sea $\mathfrak{G} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$, donde el producto corchete está dado por $[e_1, e_2] = 2e_2$, $[e_1, e_3] = -2e_3$ y $[e_2, e_3] = e_1$. Los tres (N)-homomorfismos f_1, f_2, f_3, correspondientes a las tres estructuras proyectivas llanas invariantes por la izquierda sobre $SL(2, \mathbb{R})$ (véase [1]) están dados por

$$f_1(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$f_1(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1(e_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_2(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$f_2(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_2(e_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_3(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f_3(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_3(e_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.1.2 Estructuras proyectivas invariantes llanas no afines sobre grupos filiformes

Sea M una variedad diferenciable n-dimensional. La **estructura afín** sobre M asociada a una conexión lineal ∇ consiste simplemente en el par (M, ∇). En tal caso, una **transformación afín** f de (M, ∇) es un difeomorfismo $f : M \to M$ que conserva ∇, es decir, para todo X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene

$$f_*(\nabla_X Y) = \nabla_{f_* X} f_* Y \,.$$

Sea M una variedad diferenciable n-dimensional y ∇ una conexión lineal sobre M. Si $\omega \in \bigwedge^1 \big(\mathcal{F}M, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})\big)$ es la forma global de conexión asociada a ∇ y $\theta \in \bigwedge^1(\mathcal{F}M, \mathbb{R}^n)$ es la forma canónica del fibrado de referencias lineales $\mathcal{F}M$ entonces

$$\xi = \omega + \theta \in \bigwedge\nolimits^1\big(\mathcal{F}M, \mathfrak{ga}(n, \mathbb{R})\big)$$

es una conexión de Cartan de tipo $\mathbf{R}/\mathbf{S}$ con $\mathbf{R} = GA(n, \mathbb{R})$ el grupo afín, $\mathbf{S} = GL(n, \mathbb{R})$, y $\mathbb{R}^n = \mathbf{R}/\mathbf{S}$ el espacio afín n-dimensional. Si identificamos $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^n$ podemos entonces identificar $\mathfrak{ga}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \times \mathfrak{ga}(n, \mathbb{R})$ (producto semidirecto) con

$$\mathfrak{ga}(n, \mathbb{R}) \equiv \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline b & A \end{array} \right] \in \mathfrak{gl}(1+n, \mathbb{R})\,;\ A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

La forma de *curvatura de Cartan* de ξ es

$$\Xi = \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}[\xi, \xi] \in \bigwedge\nolimits^2\big(\mathcal{F}M, \mathfrak{ga}(n, \mathbb{R})\big),$$

y tiene como componente $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$-valuada a la curvatura $\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ de la conexión lineal ω, mientras que su componente $\mathbb{R}^n$-valuada es la 2-forma de torsión Θ de ω, dada por $\Theta = \mathrm{d}\theta + \omega \wedge \theta$. Así,

$$\Xi = \Omega + \Theta.$$

Un difeomorfismo $f : M \to M$ es una transformación afín de (M, ∇) si y sólo si la primera prolongación de f, dada por

$$f^{(1)} \colon u \in \mathcal{F}M \to f_*\big(\pi_0^1(u)\big) \circ u \in \mathcal{F}M\,,$$

verifica

$$f^{(1)*}\xi = \xi\,.$$

Se dice que la estructura afín (M, ∇) es *llana* si la estructura de Cartan afín $(\mathcal{F}M, \xi)$ es llana, es decir, con curvatura de Cartan

$$\Xi = 0\,.$$

Es bien conocido [67] que una estructura afín sobre M es llana si y sólo si es una estructura afín *integrable*, lo que significa que M posee un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ verificando que en cada intersección no vacía $U_i \cap U_j$ de M la transformación $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es una transformación afín entre abiertos de $\mathbb{R}^n$, es decir, para $x \in \varphi_j(U_i \cap U_j)$, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x)$ es de la forma $Ax + b$ con $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Siguiendo la costumbre, en lo sucesivo llamaremos meramente **estructura afín** a una estructura afín *integrable*. Si M admite una estructura afín integrable, diremos abreviadamente que M es una *variedad afín*. Por lo dicho antes, M es afín si y sólo si existe una conexión lineal ∇ sobre M cuyas campos de tensores curvatura y torsión son nulos, es decir, para todo X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0\,,$$

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0\,.$$

Sea $M = G$ un grupo de Lie. Si G admite una conexión ∇ verificando que para todo $a \in G$ las traslaciones por la izquierda $l_a \colon b \in G \to ab \in G$ son transformaciones afines de (G, ∇), diremos que la estructura afín (G, ∇) es invariante por la izquierda.

Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie G, toda conexión lineal G-invariante ∇ da lugar a un producto definido, para todo x, $y \in \mathfrak{g}$, por la aplicación $\mathbb{R}$-bilineal

$$(x,y) \to xy = \nabla_x y$$

(véase [54]). La curvatura de la conexión G-invariante ∇ es nula, si y sólo si dicha aplicación bilineal verifica, para todo x, y, $z \in \mathfrak{g}$, que

$$(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz)\,,$$

mientras que la torsión de la conexión G-invariante ∇ es nula si y sólo si el corchete en $\mathfrak{g}$ se expresa mediante dicha aplicación bilineal, de modo que para todo x, $y \in \mathfrak{g}$ se tiene

$$[x,y] = xy - yx\,.$$

Definición 5.1.1 [61]. *Un* **álgebra simétrica por la izquierda** *(o* álgebra de Koszul-Vinberg*) es un espacio vectorial real* $\mathfrak{g}$ *dotado de un producto* $\mathbb{R}$-*bilineal* $(x,y) \to L_x y = xy$ *que verifica la condición*

$$(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz)\,,$$

para todo x, y, $z \in \mathfrak{g}$. *Diremos también que un tal producto es un* **producto simétrico por la izquierda** *en* $\mathfrak{g}$.

Es fácil ver que en el **álgebra simétrica por la izquierda** $\mathfrak{g}$ el producto corchete definido por

$$[x, y] = xy - yx$$

induce una estructura de álgebra de Lie en $\mathfrak{g}$.

La siguiente definición de álgebra de Lie afín, o estructura afín sobre un álgebra de Lie, es bien conocida (véase por ejemplo [61]):

Definición 5.1.2 *Un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *se dice* **afín** *si admite un producto* $\mathbb{R}$*-bilineal simétrico por la izquierda compatible con su estructura de álgebra de Lie, es decir, verificando*

i) $(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz)$,

ii) $[x, y] = xy - yx$.

Un tal producto se dirá una estructura afín sobre $\mathfrak{g}$.

Todo grupo de Lie G cuya álgebra de Lie es afín posee una estructura afín integrable invariante por la izquierda (véase por ejemplo [85]). El recíproco también es cierto, como se ha señalado antes.

Notemos que no toda álgebra de Lie es afín. Por ejemplo, es bien conocido que un álgebra de Lie semisimple no admite estructuras afines [61].

En el lenguaje matricial, una estructura afín en $\mathfrak{g}$ equivale a la existencia de una representación de la forma

$$x \in \mathfrak{g} \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline x & L_x \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$$

donde

$$x \to L_x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

es también una representación de $\mathfrak{g}$, es decir, L_x es un endomorfismo de $\mathfrak{g}$.

Definición 5.1.3 *Una estructura afín en el álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *de un grupo de Lie* G *se dice* **completa** *si la correspondiente conexión invariante por la izquierda sobre* G *es geodésicamente completa, es decir, el dominio de definición de toda geodésica de la conexión* ∇ *puede extenderse a* $\mathbb{R}$.

Recordemos que la **sucesión central descendente** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es la cadena de ideales

$$\mathcal{C}^0\mathfrak{g} \supset \mathcal{C}^1\mathfrak{g} \supset \dots \mathcal{C}^{n-1}\mathfrak{g} \dots ,$$

con $\mathcal{C}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ y $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^k\mathfrak{g}]$, para $1 \leq k \leq n-1$, y que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice **nilpotente** si existe $k \geq 0$ tal que $\mathcal{C}^k\mathfrak{g} = 0$. Decimos que un grupo de Lie G es nilpotente si su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

Definición 5.1.4 *Un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *de dimensión* $n \geq 3$ *se dice* **filiforme** *si* $\dim(\mathcal{C}^k\mathfrak{g}) = n - k - 1$ *para* $1 \leq k \leq n - 1$. *Diremos que un grupo de Lie* G *es filiforme si su álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es filiforme.*

Es evidente que toda álgebra de Lie filiforme es necesariamente nilpotente. Luego todo grupo de Lie filiforme es nilpotente.

Definición 5.1.5 *Un álgebra de Lie nilpotente* $\mathfrak{g}$ *se dice característicamente nilpotente si toda derivación de* $\mathfrak{g}$ *es un endomorfismo nilpotente.*

A continuación describimos brevemente algunas estructuras afines en ciertos tipos de álgebras de Lie.

1) Si $\mathfrak{g}$ admite una derivación inversible δ, entonces $\mathfrak{g}$ admite una estructura afín, pues el producto dado para todo x, $y \in \mathfrak{g}$, por

$$xy = \delta^{-1}([x, \delta(y)])$$

verifica i) y ii) [61].

2) Supongamos que $\dim(\mathfrak{g}) = 2m$. Una 2-forma bilineal antisimétrica σ en $\mathfrak{g}$ se dice *simpléctica* si $d\sigma = 0$ y $\bigwedge^m \sigma \neq 0$. En ese caso, el par $(\mathfrak{g}, \sigma)$ se dice un *álgebra de Lie simpléctica*. Si $(\mathfrak{g}, \sigma)$ es simpléctica, entonces $\mathfrak{g}$ es afín, pues, para todo x, y, $z \in \mathfrak{g}$, basta definir en $\mathfrak{g}$ el producto xy mediante

$$\sigma(xy, z) = -\sigma(y, [x, z])\,,$$

que verifica i) y ii). En [41] puede encontrarse la clasificación de álgebras de Lie filiformes simplécticas de dimensión menor o igual que 10. En [45] aparece la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes simplécticas de dimensión menor o igual que 6.

3) Finalmente señalemos que en [64] se da una lista de todas las estructuras afines completas en álgebras nilpotentes de dimensión 4.

A continuación vamos a construir ejemplos no afines de estructuras proyectivas sobre grupos de Lie filiformes. Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Recordemos que en [1] se proporciona el siguiente método para la construcción de (N)-homomorfismos, que ya hemos descrito en la proposición 5.1.1: fijada una base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de $\mathfrak{g}$ y dados un homomorfismo de álgebras de Lie

$$g \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$$

y un vector $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que la matriz

$$P = (v|g(x_1)v|g(x_2)v|\ldots|g(x_n)v) \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$$

sea inversible, entonces $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{L}$ definido por $f(x) = P^{-1}g(x)P$, $x \in \mathfrak{g}$, es un (N)-homomorfismo.

Sea ahora $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie afín con una estructura afín

$$L_x\colon y \in \mathfrak{g} \to L_x y = xy \in \mathfrak{g}.$$

Si la representación

$$f\colon x \in \mathfrak{g} \to \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline x & L_x \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{R})$$

toma valores en $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$ (lo que ocurre frecuentemente; por ejemplo, si la estructura afín es completa, la matriz L_x es triangular con ceros en la diagonal principal para todo $x \in \mathfrak{g}$), entonces, puesto que el coeficiente (1,1) de $f(x)$ es cero, resulta que f es un (N)-homomorfismo y la estructura afín da lugar también a una estructura proyectiva invariante llana en el sentido de [1], y del capítulo anterior.

Anteriormente hemos descrito algunas vías para obtener estructuras afines, que también resultan ser estructuras proyectivas, en álgebras nilpotentes. Nuestro objetivo en encontrar ejemplos, en ese tipo de álgebras, de estructuras proyectivas que no sean estructuras afines.

Para tal fin, el proceso que seguiremos es el siguiente:

1. Partimos del producto L_x, $x \in \mathfrak{g}$, (que, en principio, toma valores en $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, aunque usualmente la diagonal principal de la matriz L_x es nula) y que describiremos en función de una base $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ de $\mathfrak{g}$.

2. Buscamos una forma lineal no nula $H\colon \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ sobre $\mathfrak{g}$ que sea un homomorfismo de álgebras de Lie, considerando en $\mathbb{R}$ la estructura natural de álgebra de Lie abeliana. De hecho, si $\mathfrak{g}$ es afín, entonces $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ (véase [61]); por tanto, siempre existen formas lineales de este tipo sobre $\mathfrak{g}$.

3. Consideramos la representación

$$h\colon x \in \mathfrak{g} \to \left(\begin{array}{c|c} H(x) & 0 \\ \hline 0 & L_x \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{R}).$$

Puesto que H es no nula, esta representación, en general, no toma valores en $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$.

4. Considerando el álgebra $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$ como el cociente

$$\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R}) = \frac{\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{R})}{\{\alpha I;\ \alpha \in \mathbb{R}\}}$$

y denotando por $p\colon \mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{R}) \to \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$ a la aplicación de paso al cociente, computamos la composición $g = p \circ h$, que es un homomorfismo de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{R})$.

5. Usando el homomorfismo g del paso anterior y un vector $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ adecuado, la técnica descrita en la sección anterior puede proporcionar un (N)-homomorfismo, es decir, una estructura proyectiva invariante llana diferente de la estructura afín de partida.

Ejemplo 1: Sea $n \geq 3$. Consideremos el álgebra de Lie filiforme n dimensional $\mathfrak{g} = \langle\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}\rangle$ con el producto corchete dado por $[e_0, e_i] = -e_{i+1}$, para $i = 1, \ldots, n-2$, siendo cero el resto de productos corchete, salvo los que derivan de la anticonmutatividad. Esta álgebra es isomorfa a la más simple de las álgebras filiformes, la llamada L_n en [62] y μ_0 en [40]. Para cada $x = a_0e_0 + a_1e_1 + \cdots + a_{n-1}e_{n-1} \in \mathfrak{g}$, consideremos el homomorfismo de álgebras de Lie $L_x\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ dado, en la base $\{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ por la matriz

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -a_2 & a_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_3 & 0 & a_0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ (-1)^{n-1}a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & a_0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$$

La matriz L_x es la matriz traspuesta de la matriz del producto simétrico por la izquierda descrito en [85], pag. 10, como contraejemplo para justificar la no veracidad de la conjetura de Auslander en álgebras filiformes de dimensión par. Para esta álgebra filiforme, la forma lineal $H(x) = a_0 + a_1$ es no nula y es un homomorfismo de álgebras de Lie. Si $h\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$ es la representación descrita arriba en el punto 3, un cálculo directo muestra que el homomorfismo $g = p \circ h\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ está dado por

$$g(x) = \begin{pmatrix} \frac{n(a_0+a_1)}{n+1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_0+a_1}{n+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & -\frac{a_0+a_1}{n+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_0 & -\frac{a_0+a_1}{n+1} & & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & (-1)^{n-2}a_{n-2} & 0 & 0 & & -\frac{a_0+a_1}{n+1} & 0 \\ 0 & (-1)n-1a_{n-1} & 0 & 0 & & a_0 & -\frac{a_0+a_1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Tomando ahora el vector $v = (1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^{n+1}$ se obtiene que la matriz P descrita en la proposición 5.1.1 está dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{n+1} & \frac{n}{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\frac{1}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{n}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{n}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & \frac{n}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & 0 & 0 & & (-1)^n \end{pmatrix}$$

que es inversible, pues su determinante es igual a ± 1. Así hemos obtenido en $\mathfrak{g}$ una estructura proyectiva invariante llana y que está explícitamente dada por

$$f(e_0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{(n+1)^2} & \frac{n}{(n+1)^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \frac{n-1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{n+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{n+1} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \frac{-1}{n+1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{-1}{n+1} & & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} & 0 & 0 & 0 & & -1 & \frac{-1}{n+1} \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{(n+1)^2} & \frac{n}{(n+1)^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n}{n+1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{-1}{n+1} & \frac{-2}{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{n+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \frac{-1}{n+1} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & (-1)^{n-1} & (-1)^{n-1} & 0 & 0 & & \frac{-1}{n+1} \end{pmatrix}$$

mientras que si $f(e_k) = (a_{ij})$ para $k = 2, \dots, n-1$, entonces $a_{k+2,1} = 1$, $a_{k+2,2} = a_{k+2,3} = \frac{-1}{n+1}$ y $a_{ij} = 0$ en otro caso. Notemos que, puesto que la componente en $\mathfrak{g}_1$ de $f(e_0)$ y de $f(e_1)$ es no nula, la estructura anterior no es afín. Notemos también que la estructura proyectiva obtenida depende de las elecciones de la forma lineal H y del vector v; cambiando H y/o v es posible obtener nuevas estructuras proyectivas invariantes llanas no afines sobre $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 2: Sea $n \geq 5$. Consideremos el álgebra de Lie n-dimensional $\mathfrak{g} = \langle \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\} \rangle$ con el producto corchete dado por $[e_0, e_i] = e_{i+1}$,

$i = 1, \ldots, n-1$, $[e_1, e_j] = e_{j+2}$, $j = 2, \ldots, n-2$, y siendo nulos el resto de productos corchete no derivados de la anticonmutatividad, que es un álgebra de Lie filiforme isomorfa al álgebra denotada por R_n en [61] ($\mathfrak{g}$ se denota por $\mu_0 + \Psi_{1,4}$ en [40]). El producto dado para cada $x \in \mathfrak{g}$ por la matriz

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -a_2 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_3 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -a_4 & 0 & a_1 & a_0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ (-1)^{n-1}a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & a_1 & a_0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$$

es un producto simétrico por la izquierda en $\mathfrak{g}$ (y da lugar, por tanto, a una estructura afín en $\mathfrak{g}$). Tal y como ocurre en el ejemplo anterior, la forma lineal $H\colon x \in \mathfrak{g} \to H(x) = a_0 + a_1 \in \mathbb{R}$ es un homomorfismo no nulo de álgebras de Lie; si $g\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ denota el homomorfismo descrito en el punto 4 del método expuesto al principio de esta sección, para cada $x \in \mathfrak{g}$ la diagonal principal de la matriz $g(x)$ coincide con la diagonal principal de la matriz $g(x)$ del ejemplo anterior. Este homomorfismo g y de nuevo el vector $v = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ proporcionan, según la descripción dada en la proposición 5.1.1, una matriz $P \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$ inversible que da lugar al (N)-homomorfismo $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ definido por

$$f(e_0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{(n+1)^2} & \frac{n}{(n+1)^2} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \frac{n-1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{n+1} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{n+1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & \frac{-1}{n+1} & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & (-1)^{n-1} & 0 & 0 & & -1 & \frac{-1}{n+1} \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{(n+1)^2} & \frac{n}{(n+1)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n+1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{-1}{n+1} & \frac{-2}{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{n+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{-1}{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{-1}{n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{n+1} & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & \frac{-1}{n+1} \end{pmatrix}$$

mientras que, como antes, si $f(e_k) = (a_{ij})$ para $k = 2, \dots, n-1$, entonces $a_{k+2,1} = 1$, $a_{k+2,2} = a_{k+2,3} = \frac{-1}{n+1}$ y $a_{ij} = 0$ en otro caso. De nuevo, la componente en $\mathfrak{g}_1$ de f es no nula y por tanto la estructura proyectiva invariante llana definida por f no es afín.

El método descrito aquí puede resultar válido en cualquier álgebra afín $\mathfrak{g}$. Para ello, es necesario encontrar en $\mathfrak{g}$ una representación L_x, $x \in \mathfrak{g}$, definida de tal manera que la matriz P obtenida a partir de ella sea inversible para ciertos vectores v; esto no es, en general, sencillo. Por ejemplo, si $\mathfrak{g} = \langle \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \rangle$ es el álgebra de Lie dada por $[e_0, e_1] = e_2$ y $[e_i, e_j] = 0$, $i < j$, en otro caso ($\mathfrak{g}$ se denota por H en [64]), a ninguno de los productos descritos en [64] para $\mathfrak{g}$ se le puede aplicar satisfactoriamente este método.

5.2 Estructuras conformes invariantes llanas

Sea $S = \left(\begin{array}{c|c|c} & & -1 \\ \hline & I & \\ \hline -1 & & \end{array}\right) \in GL(n+2, \mathbb{R})$. El álgebra de Lie $\mathfrak{L} = \mathfrak{o}(S) = \{M \in \mathfrak{gl}(n+2, \mathbf{R}) \; ; \; M^t S + SM = 0\}$ (obtenida como caso particular del modelo descrito en la sección 2.6 para $p = n$ y $q = 0$) admite la graduación $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ dada por

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline v & & \\ \hline & v^t & \end{array}\right) \in \mathfrak{L} \; ; \; v \in \mathbb{R}^n \right\},$$

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha & & \\ \hline & B & \\ \hline & & -\alpha \end{array}\right) \in \mathfrak{L} \; ; \; \alpha \in \mathbb{R} \, , \; B \in \mathfrak{o}(n) \right\},$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} & \xi & \\ \hline & & -\xi^t \\ \hline & & \end{array} \right) \in \mathfrak{L} \; ; \; \xi^t \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Puesto que el elemento característico de este álgebra es

$$\epsilon = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & 0 & \\ \hline & & -1 \end{array} \right)$$

(véase [69]) resulta, aplicando el corolario 4.4.4, que la condición para que un homomorfismo f de un álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{L}$ sea un (N)-homomorfismo es de nuevo que el coeficiente (1,1) de $f_0(X)$ sea cero para todo $X \in \mathfrak{G}$.

Supongamos que $n = 3$.

Ejemplo 1:

Sea $\mathfrak{G} = (\mathbb{R}^3, \times)$ con el producto corchete dado por el producto vectorial usual: si $v = (x, y, z)^t$ y $w = (x', y', z')$ entonces $[v, w] = v \times w = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')^t$. Esta álgebra es isomorfa al álgebra

$$\mathfrak{o}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \; ; \; X^t + X = 0\}$$

de todas las matrices antisimétricas de orden tres a través del isomorfismo

$$(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \to \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}(3).$$

Un (N)-homomorfismo f de $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{L}$ está dado por

$$f(1,0,0)^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(0,1,0)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{8} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(0,0,1)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 5.2.1 *El homomorfismo f es el único (N)-homomorfismo entre $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{L}$. En particular, sobre la variedad $M = S^3$ existe una única estructura conformemente llana invariante.*

Demostración:

Sea g un (N)-homomorfismo de $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{L}$. Dados v, $w \in \mathbb{R}^3$, podemos poner

$$g(v) = \left(\begin{array}{c|c|c} & \xi(v) & \\ \hline v & \varphi(v) & (\xi(v))^t \\ \hline & v^t & \end{array}\right), \quad g(w) = \left(\begin{array}{c|c|c} & \xi(w) & \\ \hline w & \varphi(w) & (\xi(w))^t \\ \hline & w^t & \end{array}\right),$$

donde ξ y φ son funciones lineales de las coordenadas de v y w. Teniendo en cuenta que debe ser $[g(v), g(w)] = g(v \times w)$ y que g es un (N)-homomorfismo, la condición de que el coeficiente (1,1) de $g(v \times w)$ debe ser nulo se traduce en que $\xi(v)w = \xi(w)v$. Poniendo $v = (x, y, z)^t$, $w = (x', y', z')^t$ y poniendo

$$\xi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c, a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c, a_{31}a + a_{32}b + a_{33}c),$$

se tiene que $\xi(v)w = \xi(w)v$ deriva en la simetría de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Por otra parte, si

$$\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}a + b_{12}b + b_{13}c & b_{21}a + b_{22}b + b_{23}c \\ -b_{11}a - b_{12}b - b_{13}c & 0 & b_{31}a + b_{32}b + b_{33}c \\ -b_{21}a - b_{22}b - b_{23}c & -b_{31}a - b_{32}b - b_{33}c & 0 \end{pmatrix},$$

la condición $\varphi(v)w - \varphi(w)v = v \times w$, que resulta también de $[g(v), g(w)] = g(v \times w)$, da las ecuaciones

$$\begin{gathered}(b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z)y' + (b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z)z' \\ -(b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z')y - (b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z')z = yz' - zy',\end{gathered}$$

$$-(b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z)x' + (b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z)z'$$
$$+(b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z')x - (b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z')z = zx' - xz',$$

$$-(b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z)x' - (b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z)y'$$
$$+(b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z')x + (b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z')y = xy' - yx',$$

de donde se obtienen $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{23} = b_{32} = b_{33} = 0$, $b_{22} = \frac{1}{2}$ y $b_{13} = b_{31} = \frac{-1}{2}$. Así, $[\varphi(v), \varphi(w)] = \frac{1}{2}\varphi(v \times w)$ y de la condición $[g(v), g(w)] = g(v \times w)$ resulta también

$$v\xi(w) - w\xi(v) + (w\xi(v))^t - (v\xi(w))^t = \frac{1}{2}\varphi(v \times w).$$

Desarrollando, obtenemos las ecuaciones

$$(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')x - (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)x'$$
$$+(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)y' - (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')y = \frac{1}{4}(yx' - xy'),$$

$$(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')x - (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)x'$$
$$+(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)z' - (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')z = \frac{1}{4}(zx' - xz'),$$

$$(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')y - (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)y'$$
$$+(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)z' - (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')z = \frac{1}{4}(zy' - yz'),$$

obteniendo así $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{-1}{8}$ y el resto de coeficientes a_{ij} iguales a cero. Notemos, además, que, con los datos obtenidos se verifica que la matriz A es simétrica y se verifica también la ecuación

$$\xi(v)\varphi(w) - \xi(w)\varphi(v) = \xi(v \times w),$$

última de las condiciones derivadas de $[g(v), g(w)] = g(v \times w)$. En definitiva, $g = f$. $\square$

Ejemplo 2:

Sea $\mathfrak{G} = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$, con el producto corchete dado por $[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0$ y $[e_2, e_3] = e_1$, el álgebra de Heisenberg. Supongamos que g es un (N)-homomorfismo de $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{L}$. Dados v, $w \in \mathbb{R}^3$, pongamos, como en la demostración anterior

$$g(v) = \left(\begin{array}{c|c|c} & \xi(v) & \\ \hline v & \varphi(v) & (\xi(v))^t \\ \hline & v^t & \end{array}\right), \quad g(w) = \left(\begin{array}{c|c|c} & \xi(w) & \\ \hline w & \varphi(w) & (\xi(w))^t \\ \hline & w^t & \end{array}\right).$$

Si, en coordenadas en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ ponemos $v = (x, y, z)^t$ y $w = (x', y', z')^t$, entonces $[v, w] = (yz' - zy', 0, 0)^t$. Para

$$\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{11}a + b_{12}b + b_{13}c & b_{21}a + b_{22}b + b_{23}c \\ -b_{11}a - b_{12}b - b_{13}c & 0 & b_{31}a + b_{32}b + b_{33}c \\ -b_{21}a - b_{22}b - b_{23}c & -b_{31}a - b_{32}b - b_{33}c & 0 \end{pmatrix}$$

la igualdad $\varphi(v)w - \varphi(w)v = [v, w]$, que también se debe verificar ahora, da las ecuaciones

$$\begin{gathered} (b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z)y' + (b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z)z' \\ -(b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z')y - (b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z')z = yz' - zy', \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -(b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z)x' + (b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z)z' \\ +(b_{11}x' + b_{12}y' + b_{13}z')x - (b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z')z = 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} -(b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z)x' - (b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z)y' \\ +(b_{21}x' + b_{22}y' + b_{23}z')x + (b_{31}x' + b_{32}y' + b_{33}z')y = 0, \end{gathered}$$

de donde $b_{11} = b_{21} = b_{12} = b_{32} = b_{23} = b_{33} = 0$, $b_{22} = b_{31} = \frac{1}{2}$ y $b_{13} = \frac{-1}{2}$. Poniendo

$$\xi((a, b, c)^t) = (a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c, a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c, a_{31}a + a_{32}b + a_{33}c),$$

la condición

$$v\xi(w) - w\xi(v) + (w\xi(v))^t - (v\xi(w))^t + \varphi(v)\varphi(w) - \varphi(w)\varphi(v) = \varphi([v, w]),$$

que se obtiene de $[g(v), g(w)] = g([v, w])$, se traduce en

$$\begin{gathered} (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')x - (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)x' \\ +(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)y' - (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')y + \frac{1}{4}(xy' - yx') = 0, \end{gathered}$$

$$(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')x - (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)x'$$
$$+(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)z' - (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')z + \frac{1}{4}(xz' - zx'),$$

$$(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')y - (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)y'$$
$$+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)z' - (a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z')z + \frac{1}{4}(zy' - yz') = \frac{1}{2}(yz' - zy'),$$

lo que lleva a $a_{11} = \frac{-5}{4}$, $a_{22} = a_{33} = \frac{3}{4}$, siendo nulos el resto de los coeficientes. Sin embargo, con los valores que resultan para $\xi(v)$ y $\xi(w)$ se tiene que

$$\xi(v)\varphi(w) - \xi(w)\varphi(v) = (\frac{3}{8}(yz' - zy'), \frac{1}{2}(xz' - zx'), \frac{1}{2}(yx' - xy')),$$

que no coincide con $\xi([v, w]) = (\frac{-5}{8}(yz' - zy'), 0, 0)$. Esto supone que no existe ningún (N)-homomorfismo de $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{L}$.

Ejemplo 3:

Consideremos la familia de álgebras de Lie $\mathfrak{G} = \mathfrak{g}_7^k = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$, $k \neq 0$, donde el producto corchete se define por $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = e_1$ y $[e_2, e_3] = ke_2$. Dos álgebras $\mathfrak{g}_7^k$ y $\mathfrak{g}_7^{k'}$ de esta familia infinita son isomorfas si y sólo si $kk' = 1$, con lo cual esta familia está paramétrizada con $k \in [-1, 0) \cup (0, 1]$. Los grupos

$$G_7^k = \{\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & x \\ 0 & e^{-kt} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x, y, t \in \mathbb{R}\}$$

tienen como álgebra de Lie a $\mathfrak{g}_7^k$.

Proposición 5.2.2 *Sobre G_7^k existe una estructura invariante conformemente llana si y sólo si $k = 1$. Además, esta estrucutura invariante es única.*

Demostración:

Supongamos que $g\colon \mathfrak{g}_7^k \to \mathfrak{L}$ es un (N)-homomorfismo. Poniendo, en coordenadas en $\{e_1, e_2, e_3\}$, $v = (x, y, z)^t$, $w = (x', y', z')^t$, tenemos ahora que $[v, w] = (xz' - zx', k(yz' - zy'), 0)^t$. Utilizaremos las mismas notaciones que en la prueba de la proposición 5.2.1. La condición $\xi(v)w = \xi(w)v$ deriva, como entonces, en la simetría de la matriz (a_{ij}). La condición $\varphi(v)w - \varphi(w)v = [v, w]$ proporciona ahora las ecuaciones

$$\begin{gathered}(b_{11}x+b_{12}y+b_{13}z)y'+(b_{21}x+b_{22}y+b_{23}z)z'\\ -(b_{11}x'+b_{12}y'+b_{13}z')y-(b_{21}x'+b_{22}y'+b_{23}z')z=xz'-zx',\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-(b_{11}x+b_{12}y+b_{13}z)x'+(b_{31}x+b_{32}y+b_{33}z)z'\\ +(b_{11}x'+b_{12}y'+b_{13}z')x-(b_{31}x'+b_{32}y'+b_{33}z')z=k(yz'-zy'),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-(b_{21}x+b_{22}y+b_{23}z)x'-(b_{31}x+b_{32}y+b_{33}z)y'\\ +(b_{21}x'+b_{22}y'+b_{23}z')x+(b_{31}x'+b_{32}y'+b_{33}z')y=0,\end{gathered}$$

que dan como solución $b_{21}=1$, $b_{32}=k$ y 0 para los restantes coeficientes. De este modo se obtiene

$$\varphi(v)=\left(\begin{array}{ccc}0&0&x\\0&0&ky\\-x&-ky&0\end{array}\right).$$

Por otra parte, de $[g(v),g(w)]=g([v,w])$ se obtiene también que

$$v\xi(w)-w\xi(v)+(w\xi(v))^t-(v\xi(w))^t+\varphi(v)\varphi(w)-\varphi(w)\varphi(v)=\varphi([v,w]),$$

lo cual proporciona las ecuaciones

$$\begin{gathered}(a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z')x-(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)x'\\ +(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)y'-(a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z')y=k(xy'-yx'),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z')x-(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)x'\\ +(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)z'-(a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13}z')z=(xz'-zx'),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z')y-(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)y'\\ +(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)z'-(a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z')z=k(yz'-zy'),\end{gathered}$$

resultando $a_{11}=a_{33}=\frac{1}{2}$, $a_{22}=\frac{2k-1}{2}$ y nulos los restantes coeficientes. De este modo, la ecuación $\xi(v)\varphi(w)-\xi(w)\varphi(v)=\xi([v,w])$ queda

$$(\frac{xz'-zx'}{2},k\frac{yz'-zy'}{2},0)=(\frac{xz'-zx'}{2},k(2k-1)\frac{yz'-zy'}{2},0),$$

de donde $k(2k-1)=k$, es decir, $k=0$, solución que carece de sentido, o $k=1$. $\square$

El único (N)-homomorfismo de $\mathfrak{g}_7^1$ en $\mathfrak{L}$ está explícitamente dado por

$$f(e_1)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(e_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(e_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Supongamos ahora que $n=4$.

Ejemplo 4:

Consideremos el grupo de Lie real $\mathbb{H}-\{0\}$ con el producto usual de los cuaternios. El álgebra de Lie de este grupo es $\mathfrak{G}=\mathfrak{so}(3)\oplus\mathbb{R}$. Si $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ denota la base standard de $\mathfrak{G}$ y, en coordenadas en dicha base, ponemos

$$v=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4\equiv(x_1,x_2,x_3,x_4),$$

$$w=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3+y_4e_4\equiv(y_1,y_2,y_3,y_4),$$

entonces $[v,w]=(x_2y_3-x_3y_2,x_3y_1-x_1y_3,x_1y_2-x_2y_1)$. Sea f un (N)-homomorfismo de $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{L}$. Utilizando las mismas notaciones que en la demostración de la proposición 5.2.1 y poniendo

$$\xi((a_1,a_2,a_3,a_4)^t)=(\sum_{i=1}^4 a_{1i}a_i,\sum_{i=1}^4 a_{2i}a_i,\sum_{i=1}^4 a_{3i}a_i,\sum_{i=1}^4 a_{4i}a_i),$$

tenemos que la condición $\xi(v)w=\xi(w)v$ equivale de nuevo a la simetría de la matriz (a_{ij}). Pongamos ahora

$$\varphi\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^4 b_{1i}a_i & \sum_{i=1}^4 b_{2i}a_i & \sum_{i=1}^4 b_{3i}a_i \\ -\sum_{i=1}^4 b_{1i}a_i & 0 & \sum_{i=1}^4 b_{4i}a_i & \sum_{i=1}^4 b_{5i}a_i \\ -\sum_{i=1}^4 b_{2i}a_i & -\sum_{i=1}^4 b_{4i}a_i & 0 & \sum_{i=1}^4 b_{6i}a_i \\ -\sum_{i=1}^4 b_{3i}a_i & -\sum_{i=1}^4 b_{5i}a_i & -\sum_{i=1}^4 b_{6i}a_i & 0 \end{pmatrix}.$$

La condición $\varphi(v)w - \varphi(w)v = [v,w]$ deriva en las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^4 (b_{1i}x_iy_2 + b_{2i}x_iy_3 + b_{3i}x_iy_4 \\ &-b_{1i}y_ix_2 - b_{2i}y_ix_3 - b_{3i}y_ix_4) = x_2y_3 - x_3y_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^4 (-b_{1i}x_iy_1 + b_{4i}x_iy_3 + b_{5i}x_iy_4 \\ &+b_{1i}y_ix_1 - b_{4i}y_ix_3 - b_{5i}y_ix_4) = x_3y_1 - x_1y_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^4 (-b_{2i}x_iy_1 - b_{4i}x_iy_2 + b_{6i}x_iy_4 \\ &+b_{2i}y_ix_1 + b_{4i}y_ix_2 - b_{6i}y_ix_4) = x_1y_2 - x_2y_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^4 (-b_{3i}x_iy_1 - b_{5i}x_iy_2 - b_{6i}x_iy_3 \\ &+b_{3i}y_ix_1 + b_{5i}y_ix_2 + b_{6i}y_ix_3) = 0, \end{aligned}$$

de las que resultan todos los coeficientes nulos excepto $b_{13} = b_{41} = \frac{-1}{2}$ y $b_{22} = \frac{1}{2}$. De este modo

$$\varphi\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2}a_3 & \frac{1}{2}a_2 & 0 \\ \frac{1}{2}a_3 & 0 & \frac{-1}{2}a_1 & 0 \\ \frac{-1}{2}a_2 & \frac{1}{2}a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, la igualdad

$$v\xi(w) - w\xi(v) + (w\xi(v))^t - (v\xi(w))^t + \varphi(v)\varphi(w) - \varphi(w)\varphi(v) = \varphi([v,w])$$

proporciona las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{4}(a_{2i}x_1y_i + a_{1i}x_iy_2 - a_{2i}x_iy_1 - a_{1i}x_2y_i) = \frac{1}{4}(x_2y_1 - x_1y_2),$$

$$\sum_{i=1}^{4}(a_{3i}x_1y_i + a_{1i}x_iy_3 - a_{3i}x_iy_1 - a_{1i}x_3y_i) = \frac{1}{4}(x_3y_1 - x_1y_3),$$

$$\sum_{i=1}^{4}(a_{4i}x_1y_i + a_{1i}x_iy_4 - a_{4i}x_iy_1 - a_{1i}x_4y_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{4}(a_{3i}x_2y_i + a_{2i}x_iy_3 - a_{3i}x_iy_2 - a_{2i}x_3y_i) = \frac{1}{4}(x_3y_2 - x_2y_3),$$

$$\sum_{i=1}^{4}(a_{4i}x_2y_i + a_{2i}x_iy_4 - a_{4i}x_iy_2 - a_{2i}x_4y_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{4}(a_{4i}x_3y_i + a_{3i}x_iy_4 - a_{4i}x_iy_3 - a_{3i}x_4y_i) = 0,$$

cuya solución es $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{-1}{2}$, $a_{44} = \frac{1}{2}$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Comoquiera que con estos parámetros se cumple también $\xi(v)\varphi(w) - \xi(w)\varphi(v) = \xi([v, w])$, se concluye que sobre $\mathbb{H} - \{0\}$ existe una única estructura invariante conformemente llana, que corresponde al único (N)-homomorfismo de $\mathfrak{G}$ en $\mathfrak{L}$ existente y que está dado por

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{8} \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5:
Es bien conocido que para $n \geq 3$ la esfera euclidiana

$$S^n = SO(n+1,\mathbb{R})/SO(n,\mathbb{R})$$

admite una estructura conforme llana e invariante por la acción natural de $SO(n+1,\mathbb{R})$, (las variedades riemannianas homogéneas conformemente llanas están clasificadas en [5]). Esto se deduce también muy fácilmente del (GP)-homomorfismo dado como segundo ejemplo en la sección 4.2, aplicando el teorema .

5.3 Estructura grassmanniana invariante llana en $GL(n,\mathbb{R})$

En esta sección hemos construido, en colaboración con J. F. Torres, un ejemplo de estructura grassmanniana sobre el grupo lineal general $GL(n,\mathbb{R})$. Dimos como ejemplo de (GP)-homomorfismo en el capítulo anterior la aplicación

$$f\colon \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathfrak{sl}(n+n,\mathbb{R}) \equiv \frac{\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{R})}{\{tI_{2n}\ ;\ t\in\mathbb{R}\}}$$

definida por

$$f(X) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X & X \\ X & X \end{bmatrix} + \{tI_{2n}\ ;\ t\in\mathbb{R}\}.$$

Por los resultados que hemos obtenido en el capítulo anterior, la clase de equivalencia de f define una $\mathbf{G}_0$-estructura llana $GL(n,\mathbb{R})$-invariante sobre

$M = GL(n,\mathbb{R})$, siendo $\mathbf{G}_0 = GL(n,\mathbb{R})\otimes GL(n,\mathbb{R})$ el grupo lineal de isotropía de la variedad de Grassmann $\mathcal{G}_n(\mathbb{R}^{n+n})$ pensada como espacio homogéneo semisimple llano asociado al álgebra de Lie semisimple graduada $\mathfrak{sl}(n+n,\mathbb{R})$. A continuación vamos a probar cómo puede obtenerse tal $\mathbf{G}_0$-estructura invariante llana usando los métodos clásicos de la teoría de G-estructuras, proceso que resulta considerablemente más laborioso que probar que f cumple las sencillas condiciones de la definición de (GP)-homomorfismo.

Consideremos el grupo $G = GL(n,\mathbb{R})$, cuya álgebra de Lie $\mathfrak{G} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ es isomorfa a $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*$. El espacio fibrado tangente $T(G)$ de G es isomorfo canónicamente a $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \times G$, es decir, a $(\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*) \times GL(n,\mathbb{R})$. Ahora bien, esto significa que el espacio fibrado tangente $T(G)$ es de tipo "producto tensor", es decir isomorfo al producto tensor de dos fibrados vectoriales. En efecto, sean $E_1 = \mathbb{R}^n \times G$ y $E_2 = (\mathbb{R}^n)^* \times G$ y consideremos los espacios fibrados triviales $(E_1, \pi_1, \mathbb{R}^n, G)$ y $(E_2, \pi_2, (\mathbb{R}^n)^*, G)$. El fibrado producto tensor $(E_1 \otimes E_2, \pi, (\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*), G)$, tiene como espacio total a

$$E_1 \otimes E_2 =: \bigcup_{A\in G} (\mathbb{R}^n \times \{A\}) \otimes ((\mathbb{R}^n)^* \times \{A\})$$

y como proyección la proyección natural

$$\pi\colon (v,A)\otimes(\xi,A) \in E_1\otimes E_2 \to A \in GL(n,\mathbb{R})\,.$$

Un isomorfismo natural entre éste fibrado producto tensor y el fibrado tangente $T(GL(n,\mathbb{R})$ está dado por

$$\mathcal{T}_\otimes\colon (v\otimes\xi, A) \in (\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*) \times G \to (v,A)\otimes(\xi,A) \in E_1\otimes E_2\,.$$

La inclusión del abierto $G = GL(n,\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{n^2} \equiv (\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*)$ define una carta global φ en G que a su vez induce una trivialización global en el fibrado $\mathcal{F}^2(G)$ de referencias holonómicas de segundo orden de G, dada por

$$\mathcal{T}_\varphi\colon j_0^2 f \in \mathcal{F}^2(G) \to (A, \mathrm{D}(\varphi\circ f)(0), \mathrm{D}^2(\varphi\circ f)(0)) \in G \times G^2(n^2),$$

donde $f\colon \mathbb{R}^{n^2} \to G$ es un difeomorfismo local que lleva $0 \in \mathbb{R}^{n^2}$ en $A \in G$ y donde $G^2(n^2)$ es el grupo de referencias de segundo orden de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Recordemos que si p y q son enteros ≥ 2, decimos que una variedad diferenciable M de dimensión pq posee una estructura producto tensor integrable o *grassmanniana* si y existen dos fibrados vectoriales $\pi_E\colon E \to M$ de rango p y $\pi_F\colon F \to M$ de rango q tales que el fibrado tangente TM es localmente isomorfo al fibrado vectorial $E\otimes F \to M$. Esto implica que el fibrado de referencias $\mathcal{F}M$ se reduce al grupo $GL(p,\mathbb{R})\otimes GL(q,\mathbb{R})$. En nuestro caso, si

$G = GL(n,\mathbb{R})$ lo anterior nos proporciona sobre G la $GL(p,\mathbb{R}) \otimes GL(p,\mathbb{R})$-estructura integrable P dada por

$$P = \{j_0^1 f = (X, A \otimes B)\ ;\ X \in G\ ,\ A \in GL(\mathbb{R}^n)\ ,\ B \in GL((\mathbb{R}^n)^*)\},$$

donde $j_0^1 f$ denota el 1-jet de un difeomorfismo local $f\colon (\mathbb{R}^{n^2}, 0) \to (G, A)$. En [6], la definición para variedades complejas de estructura grassmanniana, o de tipo "producto tensor", exige un isomorfismo global del fibrado cotangente con el producto tensor de dos fibrados vectoriales. En cambio Hangan demuestra en [52] que, para variedades reales, la condición de que el fibrado tangente sea localmente isomorfo al producto tensor de dos fibrados vectoriales es equivalente a la integrabilidad de la correspondiente $GL(p,\mathbb{R}) \otimes GL(p,\mathbb{R})$-estructura, cuando p y q son mayores o iguales que 3.

Pongamos $\mathbf{G}_0 = GL(n,\mathbb{R}) \otimes GL(n,\mathbb{R})$ y denotemos por $L_C\colon X \in G \to L_C(X) = CX \in G$ la traslación por la izquierda por $C \in G$. La $\mathbf{G}_0$-estructura P es invariante si es L_C-invariante para todo $C \in G$, es decir, si $L_C^{(1)}(j_0^1 f) = j_0^1(L_C \circ f) \in P$ para $j_0^1 \in P$, siendo $L_C^{(1)}$ la aplicación prolongación entre los fibrados de referencias definida en la sección 1.8. Sea pues $f\colon (\mathbb{R}^{n^2}, 0) \to (G, U)$ un difeomorfismo local tal que $j_0^1 f \in P$ y pongamos $\mathrm{D}(\varphi \circ f)(0) = A \otimes B$, $A \in GL(\mathbb{R}^n)$, $B \in GL((\mathbb{R}^n)^*)$. Como L_C conmuta con φ y es lineal, resulta que

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\varphi \circ L_C \circ f)(0) &= \mathrm{D}(L_C \circ (\varphi \circ f))(0) \\ = \mathrm{D}(L_C)(X) \circ \mathrm{D}(\varphi \circ f)(0) &= \mathrm{D}(L_C)(X)(A \otimes B) = L_C(A \otimes B), \end{aligned}$$

donde $L_C(A \otimes B)\colon \mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*$ está dada por

$$L_C(A \otimes B)(\xi_1 \otimes \xi_2) = C((A\xi_1) \otimes (\xi_2 B))\,.$$

Si ponemos $C = \sum x_i \otimes \alpha_j$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_j \in (\mathbb{R}^n)^*$ y para $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ denotamos

$$\langle \alpha | \xi \rangle = \alpha(\xi)\,,$$

entonces

$$C(A\xi_1 \otimes \xi_2 B) = \sum \langle \alpha_j | A\xi_1 \rangle x_i \otimes \xi_2 B = (CA \otimes B)(\xi_1 \otimes \xi_2)$$

ya que

$$(CA \otimes B)(\xi_1 \otimes \xi_2) = \sum (x_i \otimes \alpha_j)(A\xi_1) \otimes \xi_2 B$$

$$= \sum \langle \alpha_j | A\xi_1 \rangle x_i \otimes \xi_2 B.$$

Así, $\mathrm{D}(\varphi \circ L_C \circ f)(0) = CA \otimes B$ y la $\mathbf{G}_0$-estructura es invariante.

Consideremos ahora el álgebra de Lie $\mathfrak{L} = \mathfrak{sl}(n+n, \mathbb{R})$ con la graduación $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ dada en la sección 2.2, apartado a). Según se vio en la sección 2.8, el tensor de Tanaka de $\mathfrak{L}$ está dado, para $x = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A & 0 \end{array}\right)$, $x' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A' & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_{-1}$, $z = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_1$, por

$$\Psi(x,z)x' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline ABA' + A'BA & 0 \end{array}\right),$$

o bien, identificando x con A, z con B, x' con A', etcétera, por

$$\Psi(A,B)A' = ABA' + A'BA,$$

donde ahora $ABA' + A'BA$ se puede considerar como un elemento de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, es decir, de $T_e(G)$.

La aplicación bilineal $\nabla \colon \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ dada por

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$$

define una conexión invariante por la izquierda sobre $GL(n,\mathbb{R})$ que, además, no tiene torsión pues si X e Y son campos de vectores invariantes por la izquierda sobre G se tiene

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \frac{1}{2}[X,Y] - \frac{1}{2}[Y,X] = [X,Y].$$

Sea $\{E_{ij};\ i,j = 1,2,...,n\}$ la base usual de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Si ponemos

$$\nabla_{E_{j\beta}} E_{i\alpha} = \sum_{k,\gamma} \gamma^{k\gamma}_{i\alpha\, j\beta} E_{k\gamma},$$

las constantes $\gamma^{k\gamma}_{i\alpha\, j\beta}$ son los símbolos de conexión de ∇ [77]. Dado que, por definición,

$$\nabla_{E_{j\beta}} E_{i\alpha} = \frac{1}{2}(E_{j\beta}E_{i\alpha} - E_{i\alpha}E_{j\beta})$$

obtenemos

$$\gamma^{k\gamma}_{i\alpha\, j\beta} = \frac{1}{2}(\delta^i_\beta \delta^j_k \delta^\alpha_\gamma - \delta^j_\alpha \delta^i_k \delta^\beta_\gamma).$$

Utilizando la identificación dada arriba al describir el tensor Ψ de Tanaka, pongamos $\Psi(A,B)A' = ABA' + A'BA \in \mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Respecto a la base usual de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ se tendrá que

$$\Psi(E_{i\alpha}, E_{j\beta})E_{l\delta} = \sum_{k\,\gamma} \Psi^{j\beta\;k\gamma}_{i\alpha\;l\delta} E_{k\gamma}.$$

Ahora bien, $\Psi(E_{i\alpha}, E_{j\beta})E_{l\delta} = E_{i\alpha}E_{\beta j}E_{l\delta} + E_{l\delta}E_{\beta j}E_{i\alpha}$ y en general

$$E_{i\alpha}E_{\beta j}E_{l\delta} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha \neq \beta \\ 0 & \text{si} \quad l \neq j \\ E_{i\delta} & \text{si} \quad \alpha = \beta \text{ y } l = j \end{cases}$$

resulta

$$\Psi^{j\beta\;k\gamma}_{\alpha\;l\delta} = \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{j}_{l}\delta^{i}_{k}\delta^{\delta}_{\gamma} + \delta^{\beta}_{\delta}\delta^{i}_{j}\delta^{l}_{k}\delta^{\alpha}_{\gamma}.$$

Consideremos también la derivada covariante del tensor Ψ de Tanaka con respecto a un campo de vectores invariante por la izquierda representado por un elemento $E_{m\mu}$ de la base usual de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Dicha derivada covariante es un tensor del mismo tipo que Ψ y, por tanto, podemos poner

$$(\nabla_{E_{m\mu}}\Psi)(E_{i\alpha}, E_{\beta j})E_{l\delta} = \sum_{k,\gamma} (\nabla_{E_{m\mu}}\Psi)^{j\beta\;k\gamma}_{i\alpha\;l\delta} E_{k\gamma}$$

$$\equiv \sum_{k,\gamma} \Psi^{j\beta\;k\gamma}_{i\alpha\;l\delta,m\mu} E_{k\gamma}$$

Pongamos, por comodidad, $I = i\alpha$, $J = j\beta$, $L = l\delta$, $M = m\mu$, y $R = r\rho$. Es conocido que [77]

$$\Psi^{JK}_{IL,M} = E_M(\Psi^{JK}_{IL}) + \sum_R \Psi^{RK}_{IL}\gamma^{J}_{RM}$$

$$+ \sum_R \Psi^{JR}_{IL}\gamma^{K}_{RM} - \sum_R \Psi^{JK}_{RL}\gamma^{R}_{IM} - \sum_R \Psi^{JK}_{IR}\gamma^{R}_{LM},$$

siendo $E_M(\Psi^{JK}_{IL}) = 0$ ya que Ψ^{JK}_{IL} es constante. Luego,

$$
\begin{aligned}
&\Psi^{j\beta\,k\gamma}_{i\alpha\,l\delta,m\mu}\\
&= \sum_{r,\rho}(\delta^r_i\delta^k_l\delta^\rho_\delta\delta^\gamma_\alpha + \delta^\rho_\alpha\delta^\gamma_\delta\delta^r_l\delta^k_i)\gamma^{j\beta}_{r\rho\,m\mu} \quad + \quad \sum_{r,\rho}(\delta^i_j\delta^r_l\delta^\beta_\delta\delta^\rho_\alpha + \delta^\beta_\alpha\delta^\rho_\delta\delta^j_l\delta^r_i)\gamma^{k\gamma}_{r\rho\,m\mu}\\
&- \sum_{r,\rho}(\delta^j_r\delta^k_l\delta^\beta_\delta\delta^\gamma_\rho + \delta^\beta_\rho\delta^\gamma_\delta\delta^i_l\delta^k_r)\gamma^{r\rho}_{i\alpha\,m\mu} \quad - \quad \sum_{r,\rho}(\delta^j_i\delta^k_r\delta^\beta_\rho\delta^\gamma_\alpha + \delta^\beta_\alpha\delta^\gamma_\rho\delta^j_r\delta^k_i)\gamma^{r\rho}_{l\delta\,m\mu}\\
&= \gamma^{j\beta}_{i\delta\,m\mu}\delta^k_l\delta^\gamma_\alpha + \gamma^{j\beta}_{l\alpha\,m\mu}\delta^\gamma_\delta\delta^k_i \quad + \quad \gamma^{k\gamma}_{l\alpha\,m\mu}\delta^j_i\delta^\beta_\delta + \gamma^{k\gamma}_{i\delta\,m\mu}\delta^\beta_\alpha\delta^j_l\\
&-\gamma^{j\gamma}_{i\alpha\,m\mu}\delta^k_l\delta^\beta_\delta - \gamma^{k\beta}_{i\alpha\,m\mu}\delta^\gamma_\delta\delta^j_l \quad - \quad \gamma^{k\beta}_{l\delta\,m\mu}\delta^j_i\delta^\gamma_\alpha - \gamma^{j\gamma}_{l\delta\,m\mu}\delta^\beta_\alpha\delta^k_i.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta la expresión general ya obtenida para $\gamma^{k\gamma}_{i\alpha\,j\beta}$ resulta finalmente que

$$
\begin{aligned}
\Psi^{j\beta\,k\gamma}_{i\alpha\,l\delta,m\mu} = \frac{1}{2}[&\delta^i_\mu\delta^j_m\delta^\beta_\delta\delta^k_l\delta^\gamma_\alpha \quad - \quad \delta^m_\delta\delta^j_i\delta^\beta_\mu\delta^k_l\delta^\gamma_\alpha\\
&+\delta^l_\mu\delta^j_m\delta^\beta_\alpha\delta^\gamma_\delta\delta^k_i \quad - \quad \delta^m_\alpha\delta^j_l\delta^\beta_\mu\delta^\gamma_\delta\delta^k_i\\
&+\delta^l_\mu\delta^k_m\delta^\gamma_\alpha\delta^j_i\delta^\beta_\delta \quad - \quad \delta^m_\alpha\delta^k_l\delta^\gamma_\mu\delta^j_i\delta^\beta_\delta\\
&+\delta^i_\mu\delta^k_m\delta^\gamma_\delta\delta^\beta_\alpha\delta^j_l \quad - \quad \delta^m_\delta\delta^k_i\delta^\gamma_\mu\delta^\beta_\alpha\delta^j_l\\
&-\delta^i_\mu\delta^j_m\delta^\gamma_\alpha\delta^k_l\delta^\beta_\delta \quad + \quad \delta^m_\alpha\delta^j_i\delta^\gamma_\mu\delta^k_l\delta^\beta_\delta\\
&-\delta^i_\mu\delta^k_m\delta^\beta_\alpha\delta^\gamma_\delta\delta^j_l \quad + \quad \delta^m_\alpha\delta^k_i\delta^\beta_\mu\delta^\gamma_\delta\delta^j_l\\
&-\delta^l_\mu\delta^k_m\delta^\beta_\delta\delta^j_i\delta^\gamma_\alpha \quad + \quad \delta^m_\delta\delta^k_l\delta^\beta_\mu\delta^j_i\delta^\gamma_\alpha\\
&-\delta^l_\mu\delta^j_m\delta^\gamma_\delta\delta^\beta_\alpha\delta^k_i \quad + \quad \delta^m_\delta\delta^j_l\delta^\gamma_\mu\delta^\beta_\alpha\delta^k_i] = 0.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, si $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ denota el primer tensor de integrabilidad (tensor de Bernard) de la estructura (véanse [12], [37]), las componentes $(\mathcal{M}_\mathcal{S})^{i\alpha}_{j\beta\,k\gamma}$ del tensor $\mathcal{M}_\mathcal{S} = (n^2-1)\mathcal{B}_\mathcal{S}$ definido por Hangan en [52] son nulas, y por tanto, $(\mathcal{M}_\mathcal{S}) = 0$. Como los tensores $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ y $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ son equivalentes desde el punto de vista de la integrabilidad [52], se sigue que si $n \geq 3$ la $\mathbf{G}_0$-estructura sobre $G = GL(n,\mathbb{R})$ es integrable (notemos que $\mathbf{G}_0 = GL(n,\mathbb{R})\otimes GL(n,\mathbb{R})$ se denota por $G_{n,n}$ en [52]).

Observemos además que en el cálculo anterior se ha visto que $\nabla_{E_{m\mu}}\Psi = 0$ para todo $E_{m\mu}$ en la base usual de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Puesto que todo campo $Z \in \mathfrak{X}(G)$ se expresa en función de una base de campos invariantes por la izquierda y como $\nabla_{fX}\Psi = f\nabla_X\Psi$ para cualquier función f sobre G y cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(G)$, se sigue que

$$\nabla_Z\Psi = 0$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(G)$, es decir, el campo de tensores Ψ es paralelo, lo que significa que la conexión ∇ está a la $\mathbf{G}_0$-estructura que define Ψ sobre G.

REFERENCIAS

[1] Y. Agaoka, *Invariant flat projective structures on homogeneous spaces.*

Hokkaido Math. J. 11, 125-172 (1982).

[2] Y. Agaoka, *Geometric invariants associated with flat projective structures.*

J. Math. Kyoto Univ. 22, 701-718 (1983).

[3] M. A. Akivis, V. V. Goldberg, *Conformal differential geometry and its generalizations*

Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Series of Texts. New York (1996).

[4] M. A. Akivis, V. V. Goldberg, *On the theory of almost Grassmann structures*

New developments in differential geometry, Budapest 1996, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1-37 (1999).

[5] D. V. Alekseevskii, B. N. Kimel'fel'd, *Classification of homogeneous conformally flat riemannian manifolds.*

Moscow State Correspondence Pedagogic Institute. Translated from Mat. Zametki 24, 103-110 (1978).

[6] D. V. Alekseevsky, V Cortés and C. Devchand, *Yang-Mills connections over manifolds with Grassmann structure.*

A aparecer.

[7] M. F. Atiyah, *Complex anatytic connections in fibre bundles.*

Trans. Am. Math. Soc. 85, 181-207 (1957).

[8] L. Auslander, *Simply transitive groups of affine motions.*

Amer. J. Math. 99, 809-821 (1977).

[9] T. N. Bailey, M. G. Eastwood, *Complex paraconformal manifolds*

Forum Math. 3, 61-103 (1991).

[10] R. J. Baston, *Almost hermitian symmetric manifolds. I and II*

Duke Math. J. 63, No. 1, 81-138 (1991).

[11] Y. Benoist, *Une nilvariété non affine.*

J. Diff. Geom. 41, No. 1, 21-52 (1995).

[12] D. Bernard, *Sur la géométrie différentielle des G-structures.*

Ann. Inst. Fourier, 10, 151-270 (1960).

[13] P. Bernat, N. Conze, M. Duflo, M. Levy-Nahas, M. Rais, P. Renouard, M. Vergne, *Représentations des groupes de Lie resolubles.*

Monographies de la Societe MatHematique de France. 4. Paris: Dunod, (1972).

[14] D. Burde, F. Grunewald, *Modules for certain Lie algebras of maximal class.*

J. Pure Appl. Algebra 99, No. 3, 239-254 (1995).

[15] D. Burde, *Affine structures on nilmanifolds.*

International mathematics 99, 599-616 (1995).

[16] G. Burdet, M. Perrin, *Cartan structures on contact manifolds.*

Trans. Am. Math. Soc. 265, 563-602 (1981).

[17] E. Cartan, *Les espaces à connexion conforme.*

Ann. Soc. Pol. Math. 2, 171-221 (1923).

[18] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion projective.*

Bull. Soc. Math. France, 52, 205-241 (1924).

[19] E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spaces à connexion projective.*

aris, Gauthier-Villars (1937).

[20] E. B. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras.*

Am. Math. Soc., Transl., II. Ser. 6, 111-243 (1957).

[21] J. Dozias, *Sur les algèbres de Lie résolubles réelles de dimension inférieure ou égale à 5.*

Thèse de 3 cycle, Faculté des Sciences, Paris (1963).

[22] Ch. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable.*

Centre Belge Rech. Math., Colloque Topologie, Bruxelles, du 5 au 8 juin 1950, 29-55 (1951).

[23] Ch. Ehresmann, *Les prolongements d'une variété différentiable. I. Calcul des jets, prolongement principal. II. L'espace des jets d'ordre r de V_n dans V_m. III. Transitivité des prolongements.*

C. R. Acad. Sc. Paris, 233, 598-600, 777-779, 1081-1083 (1951).

[24] Ch. Ehresmann, *Les prolongements d'une variété différentiable. IV. Éléments de contact et éléments d'envelope.*

C. R. Acad. Sc. Paris, 234, 1028-1030 (1952).

[25] Ch. Ehresmann, *Les prolongements d'une variété différentiable. V. Covariants différentiels et prolongements d'une structure infinitésimale.*

C. R. Acad. Sc. Paris, 234, 1424-1425 (1952).

[26] Ch. Ehresmann, *Structures locales et structures infinitésimales.*

C. R. Acad. Sc. Paris, 234, 587-589 (1952).

[27] Ch. Ehresmann, *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie.*

Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci. 52, 97-110 (1953).

[28] Ch. Ehresmann, *Extension du calcul des jets aux jets non holonomes.*

C. R. Acad. Sc. Paris, 240, 397-399 (1955).

[29] L. P. Eisenhart, *Riemannian geometry.*

Princeton, N.J.: Princeton University Press; London: Oxford University Press. VII (1967).

[30] L. P. Eisenhart, *Non-riemannian geometry.*

American Mathematical Society. Colloquium Publications. Providence, Rhode Island. VIII (1972).

[31] M. Elzanowski and S. Prishepionok, *Connections on higher order frame bundles.*

New Developments in Differential Geometry, Kluwer Academic Publishers. MKath. Appl.,Dordr. 350, 131-142 (1996).

[32] M. Epstein, M. de León, *The Differential Geometry of Cosserat Media.*

New Developments in Differential Geometry, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 143-164, (1996).

[33] M. Epstein, M. de León, *Continuous distributions of inhomogeneities in liquid-crystal-like bodies.*

Proc. R. Soc. Lond. 457, 2507-2520 (2001).

[34] J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q. Lu, G. Roos, *Analysis and geometry on complex homogeneous domains.*

Progress in Mathematics (Boston, Mass.) 185. Boston, MA: Birkhäuser. xvii, (2000).

[35] A. Fomenko, *Symplectic Geometry.*

Gordon & Breach, N. York (1990).

[36] D. Fried, *Distality, completeness, and affine structures.*

J. Differ. Geom. 24, 265-273 (1986).

[37] A. Fujimoto, *Theory of G-structures.*

Publications of the Study Group of Geometry, Vol. I., Tokyo (1972).

[38] E. Gallego, A. Reventós, *Lie flows of codimension 3.*

Trans. Am. Math. Soc. 326. No. 2, 529-541 (1991).

[39] P. L. García, *Connections and 1-jet fiber bundles.*

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 47, 227-242 (1972).

[40] J. R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, Y. Khakimdjanov, *Low-dimensional filiform Lie algebras.*

J. Pure Appl. Algebra 130, No.2, 133-158 (1998).

[41] J. R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, Y. Khakimdjanov, *Symplectic structures on the filiform Lie algebras.*

J. Pure Appl. Algebra 156, No.1, 15-31 (2001).

[42] M. Goto, F. D. Grosshans, *Semisimple Lie algebras.*

Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 38, New York-Basel: Marcel Dekker, Inc. VII, (1978).

[43] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology. Vol. 1, Vol. 2.*

Academic Press, New York, (1972, 1973).

[44] M. Goze, Y. Khakimdjanov, *Nilpotent and solvable Lie algebras.*

Hazewinkel, M. (ed.), Handbook of algebra. Volume 2. Amsterdam: North-Holland. 615-663 (2000).

[45] M. Goze, Y. Khakimdjanov, A. Medina, *Symplectic or contact structures on Lie groups.*

A aparecer.

[46] R. C. Gunning, *On uniformization of complex manifolds: The role of connections.*

Mathematical Notes. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. Tokyo: University of Tokyio Press. II, (1978).

[47] T. Hangan, *Pseudogrupul grassmannian*

Ann. St. Univ. "Al. l. Cuza" Yassi, 11, 349-356 (1965).

[48] T. Hangan, *Géométrie différentielle grassmannienne*

Rev. Roum. Math. Pures et Appl., XI, 5, 519-531 (1966).

[49] T. Hangan, *Analogies entre la géométrie différentielle de l'espace projectif et celle la variété de Grassmann.*

Atti dil Convegno Internazionale di Geometria Diff., Bologna, IX, 1-11 (1967).

[50] T. Hangan, *Tensor product tangent bundles.*

Archiv der Math. 19, 436-440 (1968).

[51] T. Hangan, *L-systèmes de N. Tanaka et structures tensorielles associées.*

Journées franco-belges de geométrie differentielle, Blériot-Hage, (1978).

[52] T. Hangan, *Sur l'intégrabilité des structures tangentes produits tensoriels réels.*

Ann. Mat. Pura Appl. 126, 149-185 (1980).

[53] M. Hausner, J.T. Schwartz, *Lie groups, Lie algebras.*

Notes on Mathematics and its Applications. New York-London-Paris: Gordon and Breach Science Publishers. X (1968).

[54] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.*

Pure and Applied Mathematics, Vol. 80, Academic Press, New York-San Francisco-London (1978).

[55] G. P. Hochschild, *The structure of Lie Groups.* Holden-Day, San Francisco (1965).

[56] D. Husemoller, *Fibre bundles.* Third edition, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg (1994).

[57] T. Ishihara, *On tensor-product structures and grassmannian structures.*

J. Math. Tokushima Univ. 4, 1-17 (1970).

[58] S. Kaneyuki, *On the subalgebra* $\mathfrak{g}_0$ *and* $\mathfrak{g}_{ev}$ *of semisimple graded Lie algebras.*

J. Math. Soc. Japan, 45, No 1, 1-19 (1991).

[59] S. Kaneyuki, H. Asano, *Graded Lie algebras and generalized Jordan triple systems.*

Nagoya Math. J. 112, 81-115 (1988).

[60] S. KANEYUKI, *Compactification of parahermitian symmetric spaces and its applications, II: Stratifications and automorphism groups.*

A aparecer.

[61] Y. KHAKIMDJANOV, *Characteristically nilpotent, filiform and affine Lie algebras.*

Bajo, Ignacio (ed.) et al., Recent advances in Lie theory. Selected contributions to the 1st colloquium on Lie theory and applications, Vigo, Spain, July 17-22, 2000. Lemgo: Heldermann Verlag. Res. Expo. Math. 25, 271-287 (2002).

[62] Y. KHAKIMDJANOV, *Varieties of Lie algebra laws.*

Hazewinkel, M. (ed.), Handbook of algebra. Volume 2. Amsterdam: North-Holland. 509-541 (2000).

[63] Y. KHAKIMDJANOV, A. MARTÍN MÉNDEZ, J. F. TORRES LOPERA, *Invariant projective non affine structures on filiform Lie algebras.*

A aparecer.

[64] H. KIM, *Complete left-invariant affine structures on nilpotent Lie groups.*

J. Differ. Geom. 24, 373-394 (1986).

[65] A. KNAPP, *Lie groups beyond an introduction.*

Birkhäuser (2000).

[66] S. KOBAYASHI, *Canonical forms on frame bundles of higher order contact.*

Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 3, A.M.S. Providence R.I., 186-193 (1961).

[67] S. KOBAYASHI, *Transformations groups in differential geometry.*

Springer-Verlag (1972).

[68] S. KOBAYASHI, T. NAGANO, *On projective connections*

J. Math. Mech., 13, 215-236 (1964).

[69] S. Kobayashi, T. Nagano, *On filtered Lie algebras and geometric structures I.*

J. Math. Mech., Vol. 13, No. 5, 875-907 (1964).

[70] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, vol. I., vol. II.*

Interscience Publishers, New York (1963), (1969).

[71] I. Kolar, P. Michor, J. Slovak, *Natural Operations in Differential Geometry.*

Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg (1993).

[72] M. de León, M. Epstein, *The geometry of uniformity in second-grade elasticity.*

Acta Mech. 114, No.6, 1343-1373 (1996).

[73] M. de León, M. Epstein, *Geometrical theory of uniform Cosserat media.*

J. Geom. Phys. 26, No.1-2, 127-170 (1998).

[74] M. de León, E. Ortacgil, *On Frames Defined by Horizontal Spaces.*

Czech. Math. J. 46 (121), 241-248 (1996).

[75] P. Libermann, *Sur la Géométrie des prolongements des spaces fibrés vectoriels.*

Ann. Inst. Fourier, 14 (1), 145-172 (1964).

[76] P. Libermann, *Introduction to the theory of semi-holonomic jets.*

Arch. Math., Brno 32, No.3, 173-189 (1996).

[77] A. Lichnerowicz, *Theorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.*

Ed. Cremonese, Rome (1955).

[78] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations.*

Dunod, Paris (1958).

[79] A. Martín Méndez, *New examples of projective and conformal invariant flat structures on Lie groups.*

A aparecer.

[80] A. Martín Méndez, J. F. Torres Lopera, *On the Spencer complex of a G-structure and the difference tensor of two G-connections.*

Proceedings of the I Colloquium on Lie Theory and Applications, Universidad de Vigo, 135-142 (2002).

[81] A. Martín Méndez, J. F. Torres Lopera, *Non holonomic and semi-holonomic frames in terms of Stiefel and Grassmann tangent bundles.*

J. Geom. Phys. 47, 427-446 (2003).

[82] A. Martín Méndez, J. F. Torres Lopera, *Semi-holonomic structures and Cartan connections associated with semisimple graded Lie algebras.*

A aparecer.

[83] A. Martín Méndez, J. F. Torres Lopera, *Homogeneous spaces with invariant flat structures of graded type.*

A aparecer.

[84] Y. Matsushima, *Differentiable manifolds.*

Marcel Dekker, New York (1972).

[85] A. Medina, Y. Khakimdjanov, *Groupes de Lie nilpotents à structure affine invariante à gauche*

Transform. Groups 6, No. 2, 165-174 (2001).

[86] Y. I. Mikhailov, *On the structure of almost Grassmannian manifolds.*

Soviet Math., 22, no. 2, 54-63 (1978).

[87] J. Milnor, *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds.*

Adv. Math. 25, 178-187 (1977).

[88] T. Nagano, *Transformation groups on compact riemannian spaces* Trans. Amer. Math. Soc. 118, 428-353, (1965).

[89] S. Nishikawa, M. Takeuchi, Γ-*foliations and semisimple flat homogeneous spaces*

Tohoku Math. J. (2), 30, 307-335, (1978).

[90] T. Ochiai, *Geometry associated with semisimple flat homogeneous spaces.*

Trans. Amer. Math. Soc. 152, 159-193 (1970).

[91] T. Ochiai, *A survey on holomorphic G-structures.*

Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Science Press and Gordon and Breach, Science Publishers, 735-786 (1982).

[92] K. Ogiue, *Theory of conformal connections.*

Kodai Math. Sem. Rep., 19, 193-224, (1967).

[93] K. Ogiue, *G-structures of higher order.*

Kodai Math. Sem. Rep., 19, 488-497, (1967).

[94] W. A. Poor, *Differential geometric structures.*

McGraw-Hill, New York (1981).

[95] Pontryagin, *Grupos continuos.*

Mir, Moscú (1981).

[96] S. M. Salamon, *Differential geometry of quaternionic manifolds.*

Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19, 31-55 (1986).

[97] B. Salvador Allué, *The conformal connection of Élie Cartan.*

Mathematical Contributions. Homage to Prof. D. Joaquín Arregui Fernández. Madrid: Editorial Complutense. Homenajes de la Universidad Complutense, 307-342 (2000).

[98] H. Samelson, *Notes on Lie algebras.*

Van Nestrand Reinhold Mathematical Studies. 23. New-York, etc (1969).

[99] R. W. Sharpe, *Differential geometry. Cartan' s generalization of Klein' s Erlangen program.*

Springer-Verlag. New-York, etc (1997).

[100] J. P. Serre, *Complex semisimple Lie algebras.*
Springer-Verlag. IX. New-York, etc (1987).

[101] I. M. Singer, S. Sternberg, *On the Infinite Groups of Lie and Cartan.*
Ann. Inst. Fourier, 15, 1-114 (1965).

[102] S. Sternberg, *Lectures on differential Geometry.*
New York: Chelsea Publishing Company. XV (1983).

[103] A. Szybiak, *Generalized tangent bundles.*
Bull. Acad. Pol. Sci. Vol. 27, No. 5, 289-297 (1969).

[104] N. Tanaka, *Projective connections and projective transformations.*
Nagoya Math. J. 12, 1-24 (1957).

[105] N. Tanaka, *Conformal connections and conformal transformations.*
Trans. Amer. Math. Soc. 92, 168-190 (1959).

[106] N. Tanaka, *On the equivalence problems associated with a certain class of homogeneous spaces.*
Jour. Math. Soc. Japan, 17, 103-139 (1965).

[107] N. Tanaka, *On generalized graded Lie algebras and geometric structures I.*
Jour. Math. Soc. Japan, 19, No. 2, 215-254 (1966).

[108] N. Tanaka, *On differential systems, graded Lie algebras and pseudogroups.*
J. Math. Kyoto Univ. 10-I, 1-82 (1970).

[109] N. Tanaka, *On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections.*
Japan. J. Math. Vol. 2, No. 1, 131-190 (1976).

[110] N. Tanaka, *On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras.*
Hokkaido Math. J. 8, 23-84 (1979).

[111] C. L. Terng, *Natural vector bundles and natural differential operators.*

Am. J. Math. 100, 775-823 (1978).

[112] J. F. Torres Lopera, *Espacios homogéneos semisimples llanos, estructuras grassmannianas y foliaciones transversalmente grassmannianas.*

(tesis) Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, n 57. Universidad de Santiago de Compostela (1982).

[113] J. F. Torres Lopera, *A note on semisimple flat homogeneous spaces.*

Differential Geometry. Proc. of the International Symposium held at Peñíscola, 1982. Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1045, 117-124 (1984).

[114] J. F. Torres Lopera, *Grassmann structures and transversally Grassmann foliations.*

Proceedings of the ninth Spanish-Portuguese conference on mathematics, 2, 549-552, Acta Salmanticensia. Ciencias, 46, Univ. Salamanca, Salamanca (1982).

[115] J. F. Torres Lopera, *Infinitesimal equivalence transformations of linear connections.*

Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 263-277 (1984).

[116] P. Ver Eecke, *Géométrie différentielle. Fasc. I: Calcul des jets.*

Sao Paulo: Publicaçoes da Sociedade de Matemática de Sao Paulo, (1967).

[117] H. Weyl, *Zur infinitesimal geometrie Einordnung der projectiven und der conformen Auffassung.*

Götingen Nachr. 99-112 (1921).

[118] H. Whitney, *Complex analytic varieties.*

Addison-Wesley Series in Mathematics. Reading, Mass. etc.:Addison-Wesley Publishing Company (1972).

[119] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature.*

Boston, Mass.: Publish Perish, Inc. XV (1974).

[120] K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications.* Bibliotheca Mathematica Vol. 3. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. Groningen: P. Noordhoff Ltd. (1957).

[121] P. Ch. Yuen, *Higher order frames and linear connections.* Cah. Topol. Geom. Differ. XII, 333-371, 3 (1971).