Miguel Brozos Vázquez

PROPIEDADES CONFORMES DE PRODUCTOS DEFORMADOS

105
2004
Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Miguel Brozos Vázquez

PROPIEDADES CONFORMES

DE

PRODUCTOS DEFORMADOS

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección de Eduardo García Río e Ramón Vázquez Lorenzo, para obter o Diploma de Estudios Avanzados en Ciencias Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levouse a cabo a súa defensa o día 15 de Xullo de 2004 na Facultade de Matemáticas de dita Universidade, obtendo a cualificación de Sobresaliente.

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 84-89390-22-3

Dep. Leg.: C-3005-2004

Ós meus pais.

Agradecementos

Non quixera deixar pasar a oportunidade que me brinda esta páxina, ata hai pouco en branco pero pronto negra de tinta se quixera facer fe ó seu título, pois moitos son os merecedores de figurar nela, para expresar o meu agradecemento a todos aqueles que me axudaron durante o último ano.

Sabendo que por cuestións de lexibilidade debo restrinxirme ós máis destacados, quixera comezar polos directores do traballo, Eduardo García Río e Ramón Vázquez Lorenzo, quen sen dúbida sobrepasaron a súa encomenda titorial para colaborar comigo e guiarme ó longo deste curso. Merécese facer estensivo este agradecemento ós meus compañeiros e amigos de despacho, especialmente a Alexandre Andrés Cortés Ayaso e José Carlos Díaz Ramos, así como demais membros do Departamento de Xeometría e Topoloxía, entre os que, por implicación neste traballo debo mencionar a Luis M. Hervella Torrón, José Antonio Oubiña Galiñanes e Elena Vázquez Abal.

Ademais, non podo esquecer, por imprescindible, o apoio recibido da miña familia, a quen quixera adicar cada unha das letras das diversas páxinas que constitúen esta memoria.

Finalmente; debo dicir, dende a sinxeleza sinceira da brevidade, gracias Ana.

Abstract

Isothermal coordinate systems in Riemannian surfaces are generalized in a natural way by locally conformally flat manifolds. Although there is not a complete classification of this sort of manifolds when their dimension is greater than two, there exist some important results under suitable topological conditions. Among those a relevant role is played by Kuiper's Theorem: *a compact simply connected locally conformally flat manifold is isometric to an Euclidean sphere [20]*. We are also interested in the following, due to Zhu [37]: *the universal cover of a complete locally conformally flat manifold with nonnegative Ricci curvature is in the conformal class of* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ *or* $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. In spite of these results, among many others, there is a lack of information concerning negative curvature.

The aim of this work is to obtain new examples of complete locally conformally flat manifolds with negative Ricci curvature. In order to do that, we use a geometric construction introduced by Bishop and O'Neill [5], which was extensively used to create examples of complete manifolds with negative curvature, called warped products. Apart from this kind of manifolds, we will study some generalizations like twisted products or multiply warped products. We will focus in multiply warped products, since twisted products can be reduced to warped products under our essential assumption of local conformal flatness (if the base and the fiber are not one-dimensional), as it is shown in Teorema 1.5.13.

Firstly, we give a characterization of locally conformally flat warped products (Chapter 2), based on the fact that any warped product is in the conformal class of a suitable direct product. Such characterization provides the key for the later development of the study of locally conformally flat multiply warped products.

In Chapter 3 the case of multiply warped products with one-dimensional base is analyzed, summarizing results in Teorema 4.3.1.; it provides a characterization of this products, showing that at most three fibers may occur. Later on multiply warped products with base of dimension greater than two are approached, obtaining a characterization in Teorema 5.3.5., as well as restrictions in the number of fibers (which must be less or equal than the dimension of the base plus two).

Multiply warped products with topological conditions on their basis are the subjects of Chapter 6, where Teorema 6.2.1. shows that if the base is compact, then the multiply warped product is already a warped product (i.e., it only admits one fiber if it is locally conformally flat). Special attention is paid to multiply warped products with base a model space, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ and $\mathbb{S}^n$.

As an application of the previous results, examples of complete locally conformally flat manifolds of negative sectional curvature are obtained in Chapter 7. Also, multiply warped spaces are used to construct new examples of complete locally conformally flat manifolds of nonpositive Ricci curvature.

Introducción

As variedades riemannianas localmente conformemente chás son unha xeneralización natural da estructura conforme das superficies riemannianas. De feito, a posibilidade de construír sistemas de coordenadas isotermais garante a existencia de transformacións conformes locais entre unha superficie de Riemann calquera e o plano euclidiano. Sen embargo, en dimensións superiores, non toda variedade riemanniana admite unha estructura localmente conformemente chá e é, actualmente, un problema aberto o obter unha boa clasificación das variedades cunha estructura deste tipo. O estudio das propiedades globais de variedades localmente conformemente chás foi iniciado por Kuiper [20], quen clasificou as variedades compactas localmente conformemente chás simplemente conexas, mostrando que son esferas. Posteriormente, Tani [30] probou que unha variedade localmente conformemente chá, compacta, conexa e orientada con curvatura escalar constante é isométrica a unha esfera se a súa curvatura de Ricci é positiva. Estes resultados foron xeneralizados máis tarde por Cheng [8] e Zhu [37], obténdose finalmente que unha variedade completa localmente conformemente chá con curvatura de Ricci non negativa está na clase conforme de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{S}^k$ denota a esfera euclidiana k-dimensional.

A pesar dos progresos realizados no estudio de variedades localmente conformemente chás con curvatura de Ricci non negativa, é moi escasa a información que se dispón no caso en que a curvatura de Ricci sexa non positiva. Obviamente, un paso previo a calquera intento de clasificación de tales variedades é o de dispor de exemplos significativos das mesmas. Así, é claro que $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{H}^{n-1} \times \mathbb{R}$ proporcionan exemplos completos de variedades localmente conformemente chás con curvatura de Ricci non positiva, onde $\mathbb{H}^k$ denota o espacio hiperbólico k-dimensional. Polo tanto, o primeiro problema a estudiar é a posible existencia de outros exemplos, á vista dos resultados coñecidos para curvaturas positivas.

Unha técnica amplamente utilizada para xenerar exemplos de variedades completas con curvatura negativa baséase nunha construcción xeométrica sinxela descrita por Bishop e O'Neill [5]: os productos warped (ou, nunha situación máis xeral, os productos twisted [28]). Tales estructuras consisten en deformar a métrica da variedade producto mediante unha homotecia nun dos factores, a cal varía segundo os puntos do outro factor. Na situación máis sinxela, as superficies de revolución son productos warped e, dunha forma máis xeral, as coordenadas polares xeodésicas permiten unha descripción local da xeometría dunha variedade como producto warped.

É coñecido [36] que, localmente, unha variedade producto localmente conformemente chá é chá ou ben se reduce a un producto con dous factores de curvatura seccional constante e oposta, sempre que as súas dimensións sexan maiores que un. Así pois, se ben a técnica de construír productos directos de variedades localmente conformemente chás non parece efectiva á hora de producir novos exemplos, si o será cando na variedade producto se considere unha métrica producto deformado.

Dada a súa maior flexibilidade os productos warped supoñen un recurso actualmente en auxe para atopar exemplos de diversos tipos de variedades con diferentes características, xa que, a pesar de que a súa xeometría é relativamente sinxela, a función de deformación permite en moitos casos perturbar a xeometría da fibra e, en definitiva, a da variedade, para adaptarse ós requisitos esixidos. Seguindo o mesmo curso, xeneralízanse os productos warped de diversos modos, entre os que destacan os productos twisted (con pouco interés no devir deste traballo, como se mostra no Teorema 1.5.13), e os productos multiwarped, nos que se basea a busca de exemplos de variedades localmente conformemente chás con tensor de Ricci non positivo. Comezando por estudiar a conformalidade chá local, caracterízanse localmente os productos multiwarped con esta propiedade (Teorema 5.3.5) para obter, como consecuencia e globalizando o resultado, novos exemplos de variedades completas localmente conformemente chás que, baixo certas condicións adicionais, teñen curvatura seccional ou tensor de Ricci non positivo.

Cómpre sinalar que o feito que permitiu comprender as ecuacións diferenciais inherentes á estructura localmente conformemente chá dun producto warped ou multiwarped radicou na propiedade de que todo producto warped está na clase conforme dun determinado producto directo. Esta propiedade esencial que, sen embargo, semella non ter sido explotada con anterioridade no estudio dos productos deformados, é probablemente un punto de partida adecuado para enfocar tanto o estudio de problemas de causalidade en xeometría de Lorentz, como o estudio de puntos de corte ó longo de xeodésicas nulas, dado que ambos posúen a característica de invarianza conforme [1].

Dunha maneira máis precisa, o contido desta memoria estructúrase segundo a descripción que se dá a continuación.

O Capítulo 1 adícase a introducir os conceptos básicos para o desenvolvemento da memoria e as propiedades necesarias para levar a cabo este estudio. Introdúcense os productos warped e twisted, estudiándose algúns aspectos relacionados coa súa curvatura. Ademais, dado que as transformacións conformes desempeñan un papel fundamental neste traballo; recordamos algúns resultados relativos á súa influencia sobre operadores diferenciais como o gradiente, o hessiano e o laplaciano. Trátanse no Capítulo 2 os productos warped localmente conformemente chans, obtendo condicións necesarias e suficientes que caracterizan os productos con esta propiedade, as cales son descritas no teorema seguinte:

Teorema 2.1.5. *Sexa $M = B \times_f F$ un producto warped.*

(i) Se $\dim B = 1$, entón $M = B \times_f F$ é localmente conformemente chá se e só se (F, g_F) ten curvatura seccional constante.

(ii) *Se* $\dim B > 1$ *e* $\dim F > 1$*, entón* $M = B \times_f F$ *é localmente conformemente chá se e só se*

(ii.1) (F, g_F) *é unha variedade de curvatura seccional constante* c_F*.*

(ii.2) *A función* $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *define un cambio conforme en* B *de modo que* $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ *ten curvatura seccional constante* $\widetilde{c}_B = -c_F$*.*

(iii) *Se* $\dim F = 1$*, entón* $M = B \times_f F$ *é localmente conformemente chá se e só se a función* $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *define un cambio conforme en* B *tal que* $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ *é unha variedade de curvatura seccional constante.*

Como xa mencionamos, o anterior teorema supón unha caracterización local dos productos warped localmente conformemente chans. De feito, para calquera base (B, g_B) localmente conformemente chá e calquera fibra (F, g_F) de curvatura seccional constante, existen funcións de deformación definidas localmente sobre B, $f|_U \colon U \subset B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de maneira que $U \times_{f|_U} F$ é localmente conformemente chá. Así, o problema esencial radica na posibilidade de estender as funcións $f|_U$ a toda a base B.

Unha vez caracterizados os productos warped localmente conformemente chans, estúdianse en función da base, con especial énfase en que esta sexa unha variedade compacta ou un espacio modelo ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$). Neste punto é importante sinalar que os productos $B \times_f F$ localmente conformemente chans con base de curvatura seccional constante correspóndense coa situación na que $\frac{1}{f^2} g_B$ é un cambio conforme definido por unha transformación de Möbius en (B, g_B). Ademais, cobra especial importancia a función de deformación, que marca a diferencia entre o estudio local e global levado a termo (pois non sempre é posible estender a función a toda a variedade, aínda que se poida definir localmente), así como a unicidade da mesma á hora de construír un producto warped localmente conformemente chan dada a base e a fibra.

Este estudio dos productos warped constitúe a primeira parte da memoria que, se ben posúe interese en si mesma, supón tamén un preludio ós catro capítulos seguintes, onde se introduce unha xeneralización dos productos warped: os productos multiwarped. Xeneralización esta que, como se verá, amplía dende diversos ángulos a estructura de producto deformado anterior, supoñendo en moitas situacións unha estructura máis rica. Non obstante, noutras ocasións non permitirá enriquecer, como veremos no Capítulo 6, a gama de exemplos obtidos a partir dos productos warped.

Esta segunda parte segue unha orde linear, comenzando cun pequeno achegamento á xeometría dos productos multiwarped, baseado na xeneralización da estructura warped, que se desenvolve principalmente no Capítulo 3. Este pequeno estudio da xeometría da estructura multiwarped porá de manifesto o papel diferenciado que xoga a base do producto, o que se enfatizará aínda máis á hora de abordar a condición de conformalidade chá local. En concreto, obtéñense as expresións do tensor de curvatura, curvatura seccional, de Ricci e escalar dun producto multiwarped. Estas fórmulas serán esenciais para abordar os problemas que son obxectivo na presente memoria. Neste capítulo facemos especial énfase en dous aspectos dos productos multiwarped: a súa completitude (Teorema 3.2.1) e a caracterización dos mesmos fronte a outras xeneralizacións dos productos warped, a primeira vista máis xerais, en termos do tensor de Ricci (Teorema 3.3.1).

O estudio da conformalidade chá local dos productos multiwarped realízase nos tres capítulos seguintes. O primeiro deles, o Capítulo 4, está adicado ós productos multiwarped con base de dimensión un. Esta condición supón unha maior maleabilidade das funcións de deformación, permitindo obter as solucións concretas das ecuacións diferenciais que xorden neste ámbito, o que se reflexa nun achegamento máis estreito á condición de conformalidade chá local nestes productos. O principal resultado deste capítulo é o seguinte, que caracteriza os productos multiwarped con base de dimensión un e localmente conformemente chans:

Teorema 4.3.1. *Sexa M un producto multiwarped con base un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entón é localmente conformemente chan se e só se cumple unha das tres posibilidades seguintes:*

(i) *M é un producto warped $M = I \times_f F$ con fibra F de curvatura seccional constante e función de deformación f arbitraria (positiva).*

(ii) *M é un producto biwarped $M = I \times_{f_1} F_1 \times_{f_2} F_2$ con fibras de curvatura seccional constante e as funcións de deformación veñen dadas por*

$$f_1 = (\xi \circ f)\frac{1}{f'}, \qquad f_2 = \frac{1}{f'}$$

onde f é unha función estrictamente crecente arbitraria, ξ é unha función de deformación que fai o producto $I \times_\xi F_1$ de curvatura seccional constante e $\xi \circ f > 0$.

(iii) *$M = I \times_{f_1} F_1 \times_{f_2} F_2 \times_{f_3} F_3$ con fibras de curvatura seccional constante e as funcións de deformación veñen dadas por*

$$f_1 = (\xi_1 \circ f)\frac{1}{f'}, \qquad f_2 = (\xi_2 \circ f)\frac{1}{f'}, \qquad f_3 = \frac{1}{f'}$$

onde f é unha función estrictamente crecente arbitraria, ξ_1, ξ_2 son funcións de deformación que fan o producto $I \times_{\xi_1} F_1 \times_{\xi_2} F_2$ de curvatura seccional constante e $\xi_i \circ f > 0$, $i = 1, 2$.

Dous aspectos no teorema anterior merecen ser destacados: por unha banda, as posibles funcións de deformación que fan o producto $I \times_{\xi_1} F_1 \times_{\xi_2} F_2$ de curvatura seccional constante están completamente determinadas no Teorema 4.1.1. Por outra banda, é interesante sinalar que a propiedade de conformalidade chá local é independente da última función de deformación en cada unha das distintas situacións posibles no Teorema 4.3.1.

O caso en que a base ten dimensión maior ou igual que dous é substancialmente máis complexo, e require un tratamento diferente dada a dificultade de obter solucións das posibles ecuacións diferencias. O estudio das variedades localmente conformemente chás con base de dimensión maior que un, desenvólvese nos Capítulos 5 e 6, onde se trata o problema de dar condicións necesarias e suficientes para que un producto multiwarped sexa localmente conformemente chan, dende un punto de vista local, e o de estender as funcións de deformación a toda a variedade, atopando así restriccións importantes para definir productos multiwarped localmente conformemente chans completos. Debido á complexidade do problema, ocuparán un lugar central os productos multiwarped con base un espacio modelo ou unha variedade compacta, onde se caracterizará completamente a conformalidade chá local. Cómpre sinalar que a restricción a bases de curvatura seccional constante exprésase analiticamente polo feito de que as funcións de deformación inducen transformacións de Möbius na base (B, g_B). No Capítulo 5 caracterízanse localmente os productos multiwarped localmente conformemente chans mediante o seguinte:

Teorema 5.3.5. *Sexa $M = B \times_{h_1} F_1 \times \cdots \times_{h_k} F_k$ un producto multiwarped con $\dim B = s$. Entón M é localmente conformemente chan se e só se as fibras teñen curvatura seccional constante e localmente as funcións de deformación verifican*

$$h_i = f_i \cdot \varphi$$

onde φ é un factor conforme definido nun aberto $V \subset B$ de tal forma que $g_B = \varphi^2 g_{\mathbb{R}^s}$ e as funcións f_i verifican:

(i) *As funcións de deformación f_i son solucións da ecuación de Möbius, e polo tanto son da forma*

(1) $$f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a_i \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c_i, \quad a_i, c_i \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\mathbf{b_i}} \in \mathbb{R}^s$$

(ii) *Para cada dúas funcións de deformación verifícase a ecuación seguinte:*

(2) $$\langle \overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{b}}_j \rangle = 2a_i c_j + 2a_j c_i$$

onde a métrica $\langle , \rangle$ é o producto escalar euclidiano usual.

(iii) *Para cada fibra F_i con dimensión maior que un, a correspondente función de deformación f_i cumpre a ecuación:*

(3) $$\|\overrightarrow{\mathbf{b}}_i\|^2 = 4a_i c_i + K^{F_i}$$

sendo $\|\cdot\|$ a norma usual en $\mathbb{R}^s$ e K^{F_i} a curvatura seccional da fibra F_i.

Ó caracterizar a condición localmente mediante este teorema, áchanse tamén restriccións tanto sobre o posible número de fibras como na súa xeometría. Así:

Corolario 5.3.6. *Sexa $B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un poducto multiwarped localmente conformemente chan, con $s = \dim B$. Entón $k \leq s + 2$. Ademais, de entre as fibras con* *dimensión maior que un, pode haber ó sumo unha con curvatura negativa ou nula e $s+1$ con curvatura positiva.*

Neste punto merece a pena destacar que as condicións (2) e (3) no Teorema 5.3.5 teñen unha interpretación moi sinxela en termos de certos vectores nun espacio métrico de dimensión $s+2$, o que permite construír unha gran cantidade de exemplos de variedades localmente conformemente chás utilizando a estructura de producto multiwarped con calquera número de fibras (menor ou igual que $s+2$).

Ademais, novas restriccións aparecerán á hora de tratar as condicións anteriores globalmente, pois a topoloxía da variedade marcará pautas certamente restrictivas, obténdose, por exemplo, que os únicos productos multiwarped con base compacta (ou $\mathbb{R}^s$) que son localmente conformemente chans son os productos warped:

Teorema 6.2.1. *Sexa B unha variedade compacta de dimensión $s \geq 2$. Se $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ é un producto multiwarped localmente conformemente chan, entón $k=1$, i.e., os únicos productos multiwarped localmente conformemente chans con base compacta son os productos warped.*

Xa no último capítulo, e como aplicación do traballo precedente, estudiaranse as posibilidades de atopar productos multiwarped completos localmente conformemente chans con curvatura seccional ou tensor de Ricci non positivos. A flexibilidade que presentan os productos warped fronte ós productos directos foi, en diversas ocasións, fonte de exemplos para variedades con diversas características [18]. De modo similar, preténdese atopar nos productos multiwarped exemplos de variedades riemannianas cun maior grao de complexidade que satisfagan certas propiedades. Así, baseándose en resultados dos Capítulos 2, 5 e 6, obtense que ademais dos exemplos obvios de variedades completas localmente conformemente chás con curvatura seccional non positiva dados por $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}^{n-1} \times \mathbb{R}$,

> *a clase de variedades localmente conformemente chás completas con curvatura seccional non positiva contén ós productos warped do tipo*
>
> $$\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^d, \qquad \mathbb{R}^s \times_f \mathbb{H}^d, \qquad \mathbb{R}^s \times_f \mathbb{R}$$
>
> *con funcións de deformación f dadas polo Teorema 7.1.2;*
>
> *e productos multiwarped do tipo*
>
> $$\mathbb{H}^2 \times_{f_1} \mathbb{H}^2 \times_{f_2} \mathbb{R}$$
>
> *onde as funcións de deformación veñen dadas por*
>
> $$f_1(x_1, x_2) = \frac{\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_2 + 1}{x_2}, \qquad f_2(x_1, x_2) = \frac{\frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2) + x_2 + \frac{1}{2}}{x_2}$$
>
> *ou,*
>
> $$\mathbb{H}^2 \times_{f_1} \mathbb{R}^2 \times_{f_2} \mathbb{R}$$

onde as funcións de deformación veñen dadas por

$$f_1(x_1,x_2) = \frac{\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)+x_1+1}{x_2}, \qquad f_2(x_1,x_2) = \frac{\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+2x_1+x_2+2}{x_2}.$$

Analogamente, obtéñense condicións que caracterizan os productos multiwarped localmente conformemente chans con tensor de Ricci non positivo. Engadindo a esta a condición de seren completa, móstranse, ademais dos productos que posúen curvatura seccional non positiva (e que, por tanto, teñen tamén tensor de Ricci non positivo),

exemplos de variedades completas localmente conformemente chans con tensor de Ricci non positivo, tales como

$$\mathbb{H}^2 \times_{f_1} \mathbb{H}^2 \times_{f_2} \mathbb{S}^2 \times_{f_3} \mathbb{S}^2 \times_{f_4} \mathbb{S}^2$$

onde as funcións de deformación veñen dadas por

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= \tfrac{\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2)+x_1+4x_2+3}{x_2}, \\ f_2(x_1,x_2) &= \tfrac{(x_1^2+x_2^2)+3x_2+2}{x_2}, \\ f_3(x_1,x_2) &= \tfrac{\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+x_1+2x_2+2}{x_2}, \\ f_4(x_1,x_2) &= \tfrac{(x_1^2+x_2^2)+x_1+2x_2+1}{x_2}. \end{aligned}$$

Obsérvese que a curvatura seccional destes exemplos non posúe signo constante, a pesar de que as curvaturas de Ricci sexan estrictamente negativas. De feito, o Corolario 7.1.4 garante que non existen funcións de deformación para as que $\mathbb{H}^2 \times_{f_1} \mathbb{H}^2 \times_{f_2} \mathbb{S}^2 \times_{f_3} \mathbb{S}^2 \times_{f_4} \mathbb{S}^2$ sexa localmente conformemente chá con curvatura seccional non positiva. Con estes exemplos alcánzase o obxectivo marcado ó comezo destas liñas que, por outra banda, vai acompañado de resultados sobre conformalidade chá local en productos deformados (incluindo diversas xeneralizacións), os cales posúen interese propio e, como vén de mencionarse, abre as portas para o estudio de propiedades conformes relacionadas con variedades que se describen mediante estructuras de productos deformados.

Índice Xeral

Capítulo 1

Preliminares

Dado que o ámbito de estudio deste traballo se enmarca na xeometría riemanniana, comezamos o primeiro capítulo recordando os principais elementos que forman parte desta, co fin de fixar a notación que empregaremos no desenvolvemento da memoria. Posto que o obxectivo é analizar a xeometría de variedades riemannianas, trataremos, en xeral, cunha variedade M de dimensión n sobre a que está definida unha métrica g definida positiva; denotaremos a este par (M,g) ou, indistintamente, $(M,\langle,\rangle)$. Sobre a variedade riemanniana, existe unha única conexión simétrica que fai paralela a métrica g, denominada *conexión de Levi-Civita*. A súa expresión vén dada pola *fórmula de Koszul*:

$$\begin{aligned} 2\,g\,(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ &\quad + g(X,[Z,Y]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

para campos de vectores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. A partir da conexión de Levi-Civita definimos a *curvatura* como o tensor de tipo $(1,3)$:

$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$$

que verifica:

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$$

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0 \tag{1.1}$$

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = 0 \tag{1.2}$$

para calesquera campos de vectores $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$ e sendo $[\cdot,\cdot]$ o corchete de Lie para campos de vectores en M. No que segue referirémonos á expresión (1.1) como *Primeira Identidade de Bianchi* (ou *Identidade de Bianchi Alxébrica*) e a (1.2) como *Segunda Identidade de Bianchi* (ou *Identidade de Bianchi Diferencial*).

A partir do tensor curvatura de tipo $(1,3)$ defínese o tensor curvatura de tipo $(0,4)$, que tamén denotaremos por R, como:

$$R(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z,V)$$

Este presenta, ademais das propiedades que se derivan directamente das tres anteriores, dúas referidas á antisimetría nos dous últimos argumentos e á simetría entre o primeiro e o segundo par, é dicir, $R(X,Y,Z,V) = -R(X,Y,V,Z)$ e $R(X,Y,Z,V) = R(Z,V,X,Y)$.

A curvatura da variedade é un obxecto de importancia fundamental no estudio xeométrico dunha variedade de Riemann, mais dunha dificultade extrema, debido ó seu carácter de tipo $(0,4)$. Non obstante, o uso das súas simetrías fai posible definir e estudiar obxectos xeométricos asociados ó tensor de curvatura que permiten, non só un tratamento máis sinxelo, senón dar unha interpretación máis tanxible. Este é o caso da *curvatura seccional*, definida sobre planos Π xenerados por campos de vectores X, Y, como segue:

$$K(\Pi) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

e que dá a curvatura de Gauss en cada punto p da superficie tanxente en p ó plano Π que é imaxe pola aplicación exponencial do propio plano Π, é dicir, a curvatura de Gauss en p da superficie $S^\Pi = exp_p(\Pi)$. Parte da importancia da curvatura seccional reside en que é posible obter o tensor curvatura a partir dela, é dicir, que a curvatura seccional determina univocamente a curvatura da variedade.

A contracción de tensores permite tamén definir, a partir do tensor curvatura o *Tensor de Ricci*:

$$\rho(X,Y) = Tr[Z \rightsquigarrow R(X,Z)Y]$$

para campos de vectores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Expresando o tensor de Ricci respecto dunha base ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ chégase a:

$$\rho(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} R(X, E_i, Y, E_i)$$

Cunha nova contracción sobre o tensor de Ricci, obtense a *curvatura escalar*, que denotamos por τ:

$$\tau = Tr(\rho)$$

e que respecto dunha base ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ exprésase:

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \rho(E_i, E_i)$$

1.1 Descomposición do tensor curvatura

Entre a moita información que ofrece o tensor curvatura dunha variedade riemanniana, podemos discernir entre diferentes aspectos que afectan a propiedades concretas da xeometría da mesma. Así, o tensor curvatura pódese descompoñer en diferentes tensores, relacionados cada un deles con información que atinxe a distintas propiedades da variedade. Nesta sección veremos unha descomposición do tensor curvatura que nos permitirá introducir o *tensor de Weyl*, ferramenta fundamental para levar a cabo o traballo desenvolvido nesta memoria.

Definición 1.1.1 Sexan A, B tensores simétricos de tipo $(0,2)$. Defínese o *producto de Kulkarni-Nomizu* como segue:

$$\begin{aligned}(A \bullet B)(X,Y,Z,V) \;:=\; & A(X,Z)B(Y,V) + A(Y,V)B(X,Z) \\ & - A(X,V)B(Y,Z) - A(Y,Z)B(X,V)\end{aligned}$$

Así definido, $\bullet$ é un producto exterior simétrico e para calesquera A, B tensores simétricos de tipo $(0,2)$ tense que $A \bullet B$ é un tensor curvatura alxébrico. Máis aínda, pódese probar ([10],[14]), que os tensores curvatura alxébricos R están xenerados por tensores da forma $R = A \bullet A$, sendo A un tensor simétrico. Así, denotamos por R^0 o tensor curvatura dado deste xeito onde os tensores simétricos son o propio tensor métrico da variedade, isto é, $R^0 = \frac{1}{2}\, g \bullet g$.

Empregaremos o producto de Kulkarni-Nomizu para expresar a forma das diferentes compoñentes do tensor curvatura no teorema seguinte.

Teorema 1.1.1 [19, Teorema 8.24] *O tensor curvatura dunha variedade riemanniana n-dimensional descomponse nas compoñentes seguintes*

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{\tau}{n(n-1)} R^0 \\ Z &= \tfrac{1}{n-2}\left(\rho - \tfrac{\tau}{n} g\right) \bullet g \\ W &= R - U - Z = R - C \bullet g \end{aligned}$$

onde $C = \frac{1}{n-2}\left(\rho - \frac{\tau}{2(n-1)} g\right)$ *denota o tensor de Schouten.*

Observación 1.1.2 As compoñentes dadas no Teorema 1.1.1 son ortogonais no correspondente espacio de 2-formas, onde se poden reinterpretar os tensores curvatura, respecto de certa métrica dada pola traza da composición de endomorfismos. É dicir, que se asociamos a cada tensor curvatura o correspondente endomorfismo de 2-formas, as compoñentes asociadas a U, Z e W son ortogonais respecto da métrica $\langle A, B\rangle = Tr(A \circ B)$.

Cada unha destas compoñentes tén un significado xeométrico, e a súa anulación impón fortes restriccións sobre a xeometría da variedade. O seguinte corolario resume algunhas propiedades das compoñentes anteriores do tensor curvatura

Corolario 1.1.3 [19, Corolario 8.25] *Sexa* (M, g) *unha variedade riemanniana n-dimensional, con* $n \geq 3$. *Tense:*

(i) (M, g) *ten curvatura constante se e só se* $Z = W = 0$.

(ii) (M, g) *é Einstein se e só se* $Z = 0$.

(iii) $\tau = 0$ *se e só se* $U = 0$.

(iv) $\rho = 0$ *(i.e.,* (M, g) *é Ricci chá) se e só se* $U = Z = 0$.

Demostración.

(i) Sabemos que se unha variedade ten curvatura seccional constante, o seu tensor curvatura é un múltiplo de R^0, co que as compoñentes Z e W son nulas. Reciprocamente, se as compoñentes Z e W son nulas, o tensor curvatura é un múltiplo de R^0, co cal a variedade ten curvatura seccional constante.

(ii) Unha variedade é einstein se e só se $\rho = \frac{\tau}{n} g$, e esta condición equivale a que $Z = 0$ dada a expresión de Z do Teorema 1.1.1.

(iii) Dedúcese directamente da expresión de U dada no Teorema 1.1.1.

(iv) De novo atendemos ás expresións de U e Z que nos proporciona o Teorema 1.1.1. Se $\rho = 0$, necesariamente temos que $\tau = 0$, anulándose a compoñente Z, e, por (iii), $\tau = 0$ equivale a $U = 0$. Reciprocamente, se $U = 0$ temos que $\tau = 0$, o cal, unido a que $Z = 0$ implica que o tensor de Ricci é nulo, outra vez polo Teorema 1.1.1.

□

A compoñente W do tensor curvatura recibe o nome de *Tensor de Weyl* e, como xa indicamos anteriormente, supón unha peza fundamental para o desenvolvemento deste traballo. A forma que empregaremos para levarmos a termo cálculos posteriores é a seguinte:

$$\begin{aligned} W(X,Y,Z,V) &= R(X,Y,Z,V) \\ &\quad + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{\langle X,Z\rangle\langle Y,V\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,V\rangle\} \\ &\quad - \tfrac{1}{n-2}\{\rho(X,Z)\langle Y,V\rangle - \rho(Y,Z)\langle X,V\rangle \\ &\qquad + \rho(Y,V)\langle X,Z\rangle - \rho(X,V)\langle Y,Z\rangle\} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Observación 1.1.4 Nunha variedade 3-dimensional o tensor de Weyl é nulo, dado que o tensor de Ricci determina completamente a curvatura da variedade [19, Corolario 8.25].

Observación 1.1.5 Dos apartados (i) e (ii) do corolario anterior extráese que unha variedade ten curvatura seccional constante se e só se é einstein e $W = 0$.

O tensor de Weyl está relacionado coa *clase conforme* da métrica, como veremos nos seguintes resultados que enunciamos. Pero antes, recordamos que dúas métricas en M, g, g_c, dinse *conformemente equivalentes* se os ángulos teñen a mesma magnitude medidos coas dúas métricas, é dicir, se existe unha función escalar ϕ tal que $g_c = \phi^2\, g$.

Teorema 1.1.6 [19, Lema 8.30] *O tensor de Weyl dun tensor curvatura é conformemente invariante, esto é, dadas g, g_c conformemente equivalentes ($g_c = \phi^2 g$), tense $W = W^c$ para os tensores de tipo $(1,3)$, e $W^c = \phi^2 W$ para os tensores de tipo $(0,4)$.*

Dicimos que unha métrica g é *localmente conformemente chá* se para cada punto $p \in M$ existe unha veciñanza U e un difeomorfismo $\psi : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ con $\psi^* g = \phi^2\, g_{\mathbb{R}^n}$ para un certo natural n, é dicir, se a métrica é localmente un cambio conforme dunha métrica euclidiana usual. Á vista do Teorema 1.1.6, temos que se unha métrica é localmente conformemente chá entón o seu tensor de Weyl é nulo. O seguinte resultado completa este feito dando a caracterización de variedades localmente conformemente chás.

Teorema 1.1.7 [19, Teorema 8.31] *Sexa (M, g) unha variedade riemanniana de dimensión n.*

(i) Se $n \geq 4$, g é conformemente chá se e só se $W = 0$.

(ii) Para $n = 3$, g é conformemente chá se e só se

$$(\nabla_X C)(Y, Z) = (\nabla_Y C)(X, Z)$$

para calesquera campos de vectores X, Y, Z; onde C denota o tensor de Schouten ($R = C \bullet g + W$).

1.2 Variedades de curvatura seccional constante

No desenvolvemento destes preliminares vimos de destacar propiedades como o carácter einstein que proporcionan información substancial sobre a xeometría da variedade. Máis restrictivo que o seren einstein, é ter curvatura seccional constante, como mostra o Corolario 1.1.3; de feito, do corolario dedúcese unha caracterización das variedades con curvatura seccional constante, de xeito que isto é equivalente ó carácter einstein e localmente conformemente chá, feito no que reparamos na Observación 1.1.5. Cómpre, logo, indagar na existencia de cambios conformes entre variedades de curvatura seccional constante. O seguinte resultado mostra que se poden caracterizar localmente as variedades de curvatura seccional constante pola existencia dun cambio conforme dun tipo concreto da métrica euclidiana:

Teorema 1.2.1 [34, Teorema 2.4.11] *Sexa M unha variedade riemanniana de dimensión $n \geq 2$ e sexa $c \in \mathbb{R}$. Entón equivalen:*

(i) M ten curvatura seccional constante c

(ii) Para cada $p \in M$ existen coordenadas locais $(u_1, \ldots, u_n)$ nunha veciñanza de p nas que a métrica ten a expresión

$$g = \frac{du_1 \otimes du_1 + \cdots + du_n \otimes du_n}{\left(1 + \frac{c}{4} \sum (u_i)^2\right)^2} \tag{1.4}$$

(iii) *Para cada $p \in M$ existe unha veciñanza de p que é isométrica a un subconxunto aberto de $\mathbb{S}^n$ se $c > 0$, $\mathbb{R}^n$ se $c = 0$ ou de $\mathbb{H}^n$ se $c < 0$.*

Observación 1.2.2 Como consecuencia do Teorema 1.2.1 toda variedade de curvatura seccional constante é localmente conformemente chá. Sen embargo, existen numerosos exemplos de variedades localmente conformemente chás con curvatura seccional non constante. Para exemplificar este feito temos as variedades producto $\mathbb{R} \times N(c)$ ou $N_1(c) \times N_2(-c)$, para unha constante $c \neq 0$, que son localmente conformemente chás, mais a súa curvatura seccional non é constante.

A terceira afirmación do Teorema 1.2.1 reduce, localmente, as variedades de curvatura seccional constante ós espacios modelo $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{S}^n$. En numerosas ocasións nesta memoria basearemos o estudio dunha certa variedade nun destes espacios. É por isto que damos a continuación unha breve descripción deles:

O *espacio euclidiano* $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$, onde a métrica ten como matriz asociada a matriz identidade, así a súa expresión é

$$g_{\mathbb{R}^n} = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n$$

O *espacio hiperbólico* $(\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n})$, onde o modelo que consideraremos será o que toma $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ como variedade subxacente, é dicir, definimos a métrica no semiespacio positivo con respecto á última coordenada. Dita métrica vén dada por un cambio conforme global da métrica euclidiana:

$$g_{\mathbb{H}^n} = \frac{1}{R^2\, x_n^2}\,(dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n)$$

para certa constante R. Con esta expresión da métrica o valor da curvatura seccional é $-R^2$.

O *espacio esférico* $(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$, formado pola esfera de radio $1/R$ sobre a que se define a métrica inducida polo embebemento da mesma en $\mathbb{R}^{n+1}$. A expresión para certa parametrización da esfera é

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{S}^n} \;=\; & \tfrac{1}{R^2}\big(dx_1 \otimes dx_1 + sen^2(x_1) dx_2 \otimes dx_2 + \cdots \\ & \qquad \cdots + sen^2(x_1) cos^2(x_2) \cdots cos^2(x_{n-1}) dx_n \otimes dx_n\big) \end{aligned}$$

e, así, a curvatura seccional é R^2.

1.3 Operadores diferenciais

Sobre unha variedade de Riemann (M, g) de dimensión n, seguindo os convenios de [26], damos as seguintes definicións:

Se X é un campo de vectores, definimos a *diverxencia* de X como $divX = Tr(\nabla X)$, onde denota Tr a contracción con respecto á métrica g. Polo tanto, nunha base $\{E_1, \ldots, E_n\}$ ortonormal temos

$$divX = \sum_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle$$

Sexa f unha función definida sobre a variedade M. Defínese o *gradiente de f* como o campo de vectores ∇f que verifica

$$\langle \nabla f, Z \rangle = df(Z) = Zf, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M)$$

ou, empregando a notación usual para os isomorfismos musicais, $\nabla f = {}^{\sharp}df$.

O *hessiano* da función f definímolo como

$$H_f = \nabla(\nabla f)$$

É importante salientar que o hessiano H_f de f é o campo de tensores simétrico de tipo $(0, 2)$ [26, Lema 49]:

$$\begin{aligned} H_f(X, Y) &= XYf - (\nabla_X Y)f \\ &= \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle \end{aligned}$$

Así, denotamos con h_f o tensor de tipo $(1, 1)$ asociado ó hessiano, é dicir, h_f é o campo de tensores caracterizado por $\langle h_f(X), Y \rangle = H_f(X, Y)$ para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Para unha función f en M definimos o *laplaciano* Δf como a diverxencia do gradiente:

$$\Delta f = div(\nabla f)$$

Deste xeito tense

$$\Delta f = Tr(h_f)$$

Algunhas das propiedades que serán de maior utilidade no devir deste traballo móstranse no lema seguinte e o posterior corolario.

Lema 1.3.1 [13, Proposición 2.4.2] *Sexan $f_1, f_2 : (M, g) \longrightarrow \mathbb{R}$, e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entón:*

(i) $div(f_1 X) = g(\nabla f_1, X) + f_1 divX$

(ii) $\nabla(f_1 f_2) = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1$

(iii) $h_{f_1 f_2}(X) = f_1 h_{f_2}(X) + f_2 h_{f_1}(X) + g(\nabla f_1, X)\nabla f_2 + g(\nabla f_2, X)\nabla f_1$

(iv) $$\begin{aligned} H_{f_1 f_2}(X, Y) &= f_1 H_{f_2}(X, Y) + f_2 H_{f_1}(X, Y) \\ &\quad + g(\nabla f_1, X) g(\nabla f_2, Y) + g(\nabla f_2, X) g(\nabla f_1, Y) \end{aligned}$$

(v) $\Delta(f_1 f_2) = f_1 \Delta f_2 + f_2 \Delta f_1 + 2g(\nabla f_1, \nabla f_2)$

Corolario 1.3.2 *Para unha función $f : (M, g) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vectores en M, o hessiano de $\frac{1}{f}$ vén dado pola expresión seguinte:*

$$H_{\frac{1}{f}}(X,Y) = -\frac{1}{f^2}H_f(X,Y) - \frac{1}{f}\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla \frac{1}{f}, Y\rangle - \frac{1}{f}\langle \nabla \frac{1}{f}, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle$$

Demostración.
A fórmula dedúcese facilmente a partir do Lema 1.3.1 escribindo a expresión correspondente para $H_{f\frac{1}{f}}$ e despexando $H_{\frac{1}{f}}$. □

1.4 Transformacións conformes e ecuación de Möbius

Á hora de estudiar a xeometría dunha variedade, unha das propiedades de relevancia fundamental é, como salientamos anteriormente, o carácter einstein. Ademais, entre os morfismos que se definen entre variedades de Riemann, alcanzan unha importancia moi singular as transformacións conformes, por seren aplicacións que conservan a magnitude dos ángulos. Atendendo a estes dous elementos, resulta de especial interese identificar as transformacións conformes que conservan o carácter einstein, é dicir, caracterizar as aplicacións conformes que definidas sobre unha variedade einstein dan lugar a outra variedade con métrica einstein. A este obxectivo adicamos esta sección, baseada fundamentalmente nos traballos [11] e [27]. Comezamos dando as expresións dos operadores diferenciais tras un cambio conforme.

Lema 1.4.1 [13, Lema 6.1.1] *Sexa (M, g) unha variedade riemanniana de dimensión n e sexa $g_c = \phi^2 g$ unha transformación conforme da métrica g. Entón:*

(i) $\nabla^c = \frac{1}{\phi^2}\nabla$, *onde ∇ e ∇^c son os gradientes con respecto a g e g_c, respectivamente.*

(ii) Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla^c_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{\phi}X(\phi)Y + \frac{1}{\phi}Y(\phi)X - \frac{1}{\phi}g(X,Y)\nabla\phi$$

onde ∇ e ∇^c son as conexións de Levi-Civita de g e g_c, respectivamente.

(iii) Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función en M, e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} H^c_f(X,Y) &= H_f(X,Y) - \tfrac{1}{\phi}\{g(\nabla\phi, X)g(\nabla f, Y) + g(\nabla\phi, Y)g(\nabla f, X) \\ &\quad - g(\nabla\phi, \nabla f)g(X,Y)\} \end{aligned}$$

(iv) Para unha función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, tense:

$$\Delta^c f = \frac{1}{\phi^2}\Delta f + \frac{n-2}{\phi^3}g(\nabla\phi, \nabla f)$$

onde Δ and Δ^c son os laplacianos con respecto ás métricas g e g_c, respectivamente.

Os lemas precedentes, pese á súa tecnicidade, xunto coa expresión dada no seguinte resultado, permitirán levar a cabo moitos dos cálculos a realizar en capítulos posteriores.

Lema 1.4.2 *Sexan $f, h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funcións definidas sobre unha variedade riemanniana (M, g). Sexa g_c o cambio conforme da métrica g dado por $g_c = \frac{1}{f^2} g$. Entón*

$$H^c_{\frac{h}{f}} = \frac{1}{f} H_h - \frac{h}{f^2} H_f - \frac{1}{f^2}\langle \nabla f, \nabla h\rangle g + \frac{h}{f^3}\langle \nabla f, \nabla f\rangle g \tag{1.5}$$

Demostración.
A demostración será unha sucesión de cálculos baseados no Lema 1.3.1, o Corolario 1.3.2 e o Lema 1.4.1:

$$\begin{aligned}
H^c_{\frac{h}{f}}(X,Y) &= H_{\frac{h}{f}}(X,Y) - f\Big(\langle \nabla \tfrac{1}{f}, X\rangle\langle \nabla \tfrac{h}{f}, Y\rangle + \langle \nabla \tfrac{h}{f}, X\rangle\langle \nabla \tfrac{1}{f}, Y\rangle - \langle \nabla \tfrac{1}{f}, \nabla \tfrac{h}{f}\rangle\langle X, Y\rangle\Big) \\
&= H_{\frac{h}{f}}(X,Y) + \tfrac{1}{f}\Big(\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla \tfrac{h}{f}, Y\rangle + \langle \nabla \tfrac{h}{f}, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla \tfrac{h}{f}\rangle\langle X, Y\rangle\Big) \\
&= \tfrac{1}{f} H_h(X,Y) + h H_{\frac{1}{f}}(X,Y) + \langle \nabla \tfrac{1}{f}, X\rangle\langle \nabla h, Y\rangle + \langle \nabla h, X\rangle\langle \nabla \tfrac{1}{f}, Y\rangle \\
&\quad + \tfrac{1}{f}\Big(\tfrac{1}{f^2}\langle \nabla f, X\rangle\langle f\nabla h - h\nabla f, Y\rangle + \tfrac{1}{f^2}\langle f\nabla h - h\nabla f, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle \\
&\qquad - \tfrac{1}{f^2}\langle \nabla f, f\nabla h - h\nabla f\rangle\langle X, Y\rangle\Big) \\
&= \tfrac{1}{f} H_h(X,Y) - h\tfrac{1}{f^2} H_f(X,Y) - \tfrac{h}{f}\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla \tfrac{1}{f}, Y\rangle - \tfrac{h}{f}\langle \nabla \tfrac{1}{f}, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle \\
&\quad + \langle \nabla \tfrac{1}{f}, X\rangle\langle \nabla h, Y\rangle + \langle \nabla h, X\rangle\langle \nabla \tfrac{1}{f}, Y\rangle + \tfrac{1}{f^2}\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla h, Y\rangle \\
&\quad - \tfrac{h}{f^3}\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle + \tfrac{1}{f^2}\langle \nabla h, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle - \tfrac{h}{f^3}\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle \\
&\quad - \tfrac{1}{f^2}\langle \nabla f, \nabla h\rangle\langle X, Y\rangle + \tfrac{h}{f^3}\langle \nabla f, \nabla f\rangle\langle X, Y\rangle \\
&= \tfrac{1}{f} H_h(X,Y) - \tfrac{h}{f^2} H_f(X,Y) + \tfrac{h}{f^3}\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle + \tfrac{h}{f^3}\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle \\
&\quad - \tfrac{1}{f^2}\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla h, Y\rangle - \tfrac{1}{f^2}\langle \nabla h, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle + \tfrac{1}{f^2}\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla h, Y\rangle \\
&\quad - \tfrac{h}{f^3}\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle + \tfrac{1}{f^2}\langle \nabla h, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle - \tfrac{h}{f^3}\langle \nabla f, X\rangle\langle \nabla f, Y\rangle \\
&\quad - \tfrac{1}{f^2}\langle \nabla f, \nabla h\rangle\langle X, Y\rangle + \tfrac{h}{f^3}\langle \nabla f, \nabla f\rangle\langle X, Y\rangle \\
&= \tfrac{1}{f} H_h(X,Y) - \tfrac{h}{f^2} H_f(X,Y) - \tfrac{1}{f^2}\langle \nabla f, \nabla h\rangle\langle X, Y\rangle + \tfrac{h}{f^3}\langle \nabla f, \nabla f\rangle\langle X, Y\rangle
\end{aligned}$$

□

A continuación damos as expresións da conexión, a curvatura e o tensor de Ricci para un cambio conforme na métrica. Para iso empregamos o producto de Kulkarni-Nomizu entre dous tensores de tipo $(0, 2)$:

Teorema 1.4.3 [29] *Sexa (M, g) unha variedade riemanniana de dimensión n. Dada $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ consideramos a métrica $g_c = \phi^2\, g$ en M e f tal que $\phi = e^f$. Entón temos as seguintes relacións:*

(i) $\nabla^c_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X,Y)\nabla f$

(ii) $R^c = e^{2f}\left(R - \left(H_f - df \otimes df + \frac{1}{2}g(\nabla f, \nabla f)g\right) \bullet g\right)$

(iii) $\rho^c = \rho - (n-2)(H_f - df \otimes df) - (\Delta f + (n-2)g(\nabla f, \nabla f))g$

Atendendo á expresión dada neste teorema para o tensor de Ricci tras un cambio conforme da métrica, dáse a definición seguinte para unha variedade riemanniana (M, g) de dimensión $n \geq 2$ e unha función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. O campo de tensores

$$B(f) = B_g(f) = H_f - df \otimes df - \frac{1}{n}\{\Delta f - \|\nabla f\|^2\}g$$

recibe o nome de *tensor Schwarziano*, e entre as súas propiedades destaca a de ser un tensor simétrico de traza nula. A ecuación $B(f) = 0$ denomínase ecuación de Möbius, e supón a peza clave para caracterizármonos os cambios conformes que conservan o carácter einstein, como mostra este teorema:

Teorema 1.4.4 [11] *Sexa (M, g) unha variedade riemanniana de dimensión n. Dada unha función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfai a ecuación de Möbius, é dicir, tal que $B_g(f) = 0$, os tensores curvatura e de Ricci da métrica conforme $g_c = e^{2f}g$ verifican:*

(i)

$$R^c = e^{2f}\left(R - \frac{1}{n}\left(\Delta f + \frac{n-2}{2}g(\nabla f, \nabla f)\right) g \bullet g\right)$$

(ii)

$$\rho^c = \rho - \frac{n-1}{n}(2\Delta f + (n-2)g(\nabla f, \nabla f))g$$

No apartado (ii) do teorema apréciase cómo o tensor de Ricci se expresa en función do tensor de Ricci da métrica conformemente equivalente e da propia métrica. Esta observación condúcenos ó corolario seguinte:

Corolario 1.4.5 [11] *Sexa (M, g) unha variedade riemanniana de dimensión n e consideremos a métrica $g_c = e^{2f}g$, para $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Se f satisfai a ecuación de Möbius entón os autoespacios do operador de Ricci de g_c coinciden cos autoespacios do operador de Ricci de g.*

Así, este corolario achéganos ó seguinte, que dá a identificación pretendida das transformacións conformes que conservan o carácter einstein.

Corolario 1.4.6 [11] *Sexa (M, g) unha variedade conexa de Einstein n-dimensional con $n \geq 3$ e sexa $g_c = e^{2f}g$, para $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Entón, (M, g_c) é de Einstein se e só se $B_g(f) = 0$.*

A ecuación de Möbius, $B(f) = 0$, pódese linearizar co cambio de variable $u = e^{-f}$, obtendo a ecuación:

$$H_u = \frac{1}{n}(\Delta u)g \tag{1.6}$$

chamada *ecuación local de Möbius.* Esta ecuación linearizada é máis manexable e no caso euclídeo permite dar o conxunto das súas solucións localmente:

Lema 1.4.7 *As solucións da ecuación $B(f) = 0$ nun aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, son da forma*

$$u(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c, \quad \textit{con} \quad a, c \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$$

Demostración.
No espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ a ecuación (1.6) escríbese

$$(H_u)_{ij} = \frac{1}{n}(\Delta u)\delta^i_j$$

para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Polo tanto resulta equivalente a

$$\partial_i\partial_i u = \partial_j\partial_j u, \quad \partial_i\partial_j u = 0, \quad i \neq j$$

Da segunda ecuación despréndese que a solución ten variables separadas e, da primeira, tendo en conta este feito, que é un polinomio de segundo grao da forma seguinte:

$$u = ax_1^2 + ax_2^2 + \cdots + ax_n^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n + c$$

□

1.5 Productos deformados

No estudio de propiedades xeométricas de variedades riemannianas, xoga un papel fundamental o producto directo ou producto riemanniano pois, o teorema de descomposición de de Rham [9], permite reducir certas variedades a un producto directo no que estudiar individualmente cada factor. Sen embargo, a rixidez desta estructura dificulta a obtención de exemplos de variedades con certas características. É por isto que entran en escena os productos deformados, nos que a xeometría dos factores pódese ver *deformada* polos demais. Como veremos nesta sección, a flexibilidade de certos productos engadida á súa relativa sinxeleza e o conseguinte coñecemento da súa xeometría, permitiu xerar exemplos de diversos tipos de variedades. En primeiro lugar introducimos productos deformados con dous únicos factores, para logo dar unha xeneralización a un tipo de producto cun número de factores arbitrario.

1.5.1 Productos warped

Definición 1.5.1 Sexan (B, g_B) e (F, g_F) dúas variedades riemannianas e f unha función diferenciable positiva definida en B. Defínese o *producto warped* $M = B \times_f F$ como a variedade producto $M = B \times F$ equipada coa métrica

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F)$$

onde π denota a proxección canónica de M en B e σ a correspondente proxección de M en F. Diremos que B é a *base* e F a *fibra* do producto warped.

A xeometría riemanniana no seu sentido máis amplo adquiriu unha grande importancia a raíz da fundamentación da *Teoría da Relatividade* nos seus principios. É neste contexto onde as métricas semi-riemannianas, e máis en concreto a xeometría de Lorentz, atopa unha maior utilidade e motivación física ó serviren de modelo a unha teoría que revoluciona, a comezos do século XX, a concepción do Universo e, en xeral, da Física. Fronte ós distintos aspectos a estudiar a escala macroscópica, hai unha diferenciación clara entre os que se deron en chamar modelos espacio-temporais *cosmolóxicos* e modelos espacio-temporais *estáticos*. Os modelos cosmolóxicos tratan de describir o espacio-tempo a grande escala, sen alteracións gravitatorias relevantes, pois supoñen unha densidade de materia uniforme no espacio-tempo; destacan entre eles os chamados *modelos de Robertson-Walker*, que se caracterizan por variedades do tipo

$$I \times_f N$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é a subvariedade que describe a temporalidade e N é unha variedade riemanniana 3-dimensional de curvatura seccional constante. A métrica vén dada por $g_{R-W} = -dt^2 \oplus f^2(t) d\sigma^2$, onde $d\sigma^2$ é o elemento de liña de N. Esta métrica é, como se deduce da súa expresión, un producto warped lorentziano.

Outro tipo de modelos relativistas, que tratan de describir rexións alteradas por campos gravitacionais, son os *modelos estáticos*. As variedades empregadas para describir estes modelos son tamén productos warped, se ben a expresión que os caracteriza é

$$N \times_f I$$

onde de novo $I \subset \mathbb{R}$, pero agora N é unha variedade de Riemann por determinar. A métrica é da forma $g_{ST} = d\sigma^2 \oplus -f^2 dt^2$ onde t é a coordenada temporal. Veremos no sucesivo propiedades conformes destes modelos, pois pese a que os resultados deste traballo están desenvolvidos exclusivamente para métricas riemannianas, moitos dos resultados son válidos tamén para métricas indefinidas [6].

Para achegarmos a xeometría dos productos warped, vexamos as expresións da súa conexión con respecto a vectores na base e na fibra.

Proposición 1.5.1 [26, Proposicion 35] *En* $M = B \times_f F$, *con* $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ *e* $U, V \in \mathfrak{X}(F)$, *a conexión de Levi-Civita vén dada por:*

(i) $\nabla_X Y$ *é o levantado a* $B \times F$ *de* $\nabla^B_X Y$*,*

(ii) $\nabla_X U = \nabla_U X = \frac{Xf}{f} U$*,*

(iii) $nor(\nabla_U V) = II(U,V) = -\frac{\langle U,V\rangle}{f}\nabla f$*,*

(iv) $tan(\nabla_U V)$ *é o levantado a* $B \times F$ *de* $\nabla^F_U V$*,*

onde ∇^B *e* ∇^F *denotan as conexións de Levi-Civita de* (B, g_B) *e* (F, g_F)*, respectivamente, e* II *a segunda forma fundamental respecto de* F*.*

Dado un producto warped $M = B \times_f F$, denotemos por $\mathfrak{L}_B$ e $\mathfrak{L}_F$ as foliacións canónicas asociadas ás subvariedades determinadas por B e F. En vista das expresións da conexión, a foliación canónica $\mathfrak{L}_B$ é totalmente xeodésica, mentres que a foliación canónica $\mathfrak{L}_F$ é totalmente esférica. Este feito é característico, entre os espacios producto, dos productos warped, para foliacións ortogonais:

Proposición 1.5.2 [28, Proposición 3] *Sexa* g *unha métrica definida na variedade* $B \times F$*. Se* $\mathfrak{L}_B$ *e* $\mathfrak{L}_F$ *se intersecan ortogonalmente, entón a métrica* g *é un producto warped se e só se* $\mathfrak{L}_B$ *é totalmente xeodésica e* $\mathfrak{L}_F$ *é esférica.*

Os productos warped foron introducidos en [5] para construír exemplos de variedades de Riemann con curvatura non positiva. Mais, a partir de aí foron extensivamente estudiados, obtendo resultados referentes a eles de moi diversa índole. Sen dúbida unha das motivacións máis importantes que levaron a estudiar este tipo de variedades é a diversidade de modelos físicos que se axustan a esta estructura, especialmente na Teoría da Relatividade, como vimos de ver, onde moitos dos modelos que se propoñen para describir a xeometría espacio-temporal son realmente productos warped, ou, en numerosas ocasións, xeneralizacións destes, como veremos nas seguintes seccións.

A continuación damos as expresións correspondentes ás distintas compoñentes do tensor curvatura.

Proposición 1.5.3 [26, Proposicion 42] *En* $M = B \times_f F$ *riemanniano, con* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$ *e* $U, V, W \in \mathfrak{X}(F)$*, con tensor curvatura* R*, temos*

(i) $R(X,Y)Z$ *é o levantado a* $B \times F$ *de* $R^B(X,Y)Z$ *en* B*,*

(ii) $R(U,X)Y = \frac{H_f(X,Y)}{f} U$*,*

(iii) $R(X,Y)U = R(U,V)X = 0$*,*

(iv) $R(X,U)V = \frac{\langle U,V\rangle}{f}\nabla_X(\nabla f)$*,*

(v) $R(U,V)W = R^F(U,V)W - \frac{\langle \nabla f, \nabla f\rangle}{f^2}(\langle U,W\rangle V - \langle V,W\rangle U)$*,*

onde R^B *e* R^F *son as curvaturas respectivas da base* B *e a fibra* F*.*

Corolario 1.5.4 [26, Corolario 43] *En* $M = B \times_f F$ *producto warped con* $d = dim\, F > 1$*,* $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ *e* $U, V \in \mathfrak{X}(F)$*, verifícase:*

(i) $\rho(X,Y) = \rho^B(X,Y) - \frac{d}{f} H_f(X,Y)$,

(ii) $\rho(X,U) = 0$,

(iii) $\rho(U,V) = \rho^F(U,V) - \langle U,V\rangle \left(\frac{\Delta f}{f} + (d-1)\frac{\langle \nabla f, \nabla f\rangle}{f^2}\right)$,

sendo ρ^B, ρ^F *os tensores de Ricci de* B *e* F*, respectivamente.*

Do corolario anterior deducimos a expresión para a curvatura escalar dun producto warped:

Corolario 1.5.5 *No producto warped* $M = B \times_f F$*, a curvatura escalar vén dada por:*

$$\tau = \tau^B + \frac{\tau^F}{f^2} - 2d\frac{\Delta f}{f} - d(d-1)\frac{\langle \nabla f, \nabla f\rangle}{f^2}$$

onde $d = dim F$.

Como xa comentamos, os productos warped foron empregados para dar exemplos de variedades con curvatura negativa, caracterizándose do xeito seguinte:

Teorema 1.5.6 [5, Teorema 7.5, Lema 7.6] *Sexan* B *e* F *variedades riemannianas, e sexa* f *unha función positiva definida en* B*. Entón o producto warped* $B \times_f F$ *ten curvatura* $K < 0$ *se e só se:*

(i) $dim\, B = 1$ *ou* $K^B < 0$

(ii) f *é estrictamente convexa*

(iii) (*a*) $dim\, F = 1$*, ou*
(*b*) $K^F < 0$ *se* f *ten un mínimo;* $K^F \leq 0$ *se* f *non ten un mínimo.*

Tamén nesta liña, Besse propón en [4] a busca de exemplos de variedades einstein compactas baseada nos productos warped fronte á rixidez dos productos directos, se ben non con moito éxito. Pola contra, os productos warped si proporcionaron exemplos de variedades completas einstein. Finalmente, na mesma referencia, móstranse os productos warped como variedades que aparecen en certo sentido de forma natural como subconxuntos densos no espacio das variedades completas. Tamén nesta liña de actuación foron desenvolvidos outros traballos, entre os que salientamos [3] e [17].

1.5.2 Productos twisted

A primeira xeneralización dos productos warped que analizamos é a seguinte, introducida en [7], e estudiada sistemáticamente por Ponge e Reckziegel [28]:

Definición 1.5.2 Sexan (B, g_B) e (F, g_F) dúas variedades riemannianas, f unha función diferenciable positiva definida en $M = B \times F$. Defínese o *producto twisted* $M = B \times_f F$ como a variedade producto $M = B \times F$ equipada coa métrica

$$g = \pi^*(g_B) + f^2 \sigma^*(g_F)$$

onde π denota a proxección canónica de M en B e σ a correspondente proxección de M en F. Ás variedades B e F chamámoslle *base* e *fibra*, respectivamente, do producto twisted.

Unha curiosa interpretación dos cambios conformes dunha variedade riemanniana en función dos productos twisted ten lugar cando se considera como variedade base un único punto. Así, fixado un punto p, pódese identificar o producto twisted $\{p\} \times_f F$ co cambio conforme de F dado pola función de deformación: $(F, f^2 g_F)$. Neste marco identificativo, os productos warped relaciónanse coas homotecias, pois a función de deformación é constante.

Para achegármonos á xeometría propia dun producto twisted, pasamos a describir a conexión e a curvatura cos correspondentes tensores obtidos mediante contracción. Por comodidade as expresións están referidas a $\xi = Log\, f$, no canto de a f directamente.

Proposición 1.5.7 [11, Proposición 1.3.1.] *Sexa $M = B \times_f F$ un producto twisted, $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $U, V \in \mathfrak{X}(F)$ campos de vectores. A conexión de Levi-Civita de M descríbese en función das conexións dos factores B e F como segue*

(i) $\nabla_X Y$ *é o levantado a* $B \times F$ *de* $\nabla^B_X Y$

(ii) $\nabla_X U = X(\xi)U$

(iii) $\nabla_U V = \nabla^F_U V + U(\xi)V + V(\xi)U - g(U,V)\nabla\xi$

onde ∇^B e ∇^F son as conexións de Levi-Civita de B e F, respectivamente.

Desta proposición despréndese que as foliacións canónicas respecto de B e F, que denotamos respectivamente por $\mathfrak{L}_B$ e $\mathfrak{L}_F$, son totalmente xeodésica a primeira delas e totalmente umbílica a segunda. Coma no caso dos productos warped, tamén aquí este feito caracteriza os productos twisted para foliacións ortogonais:

Proposición 1.5.8 [28, Proposición 3] *Sexa g unha métrica definida na variedade $B \times F$. Se as foliacións canónicas $\mathfrak{L}_B$ e $\mathfrak{L}_F$ se intersecan perpendicularmente, entón a métrica g é un producto twisted se e só se $\mathfrak{L}_B$ é totalmente xeodésica e $\mathfrak{L}_F$ é totalmente umbílica.*

A seguinte proposición dános a expresión da curvatura nun producto twisted.

Proposición 1.5.9 [11, Proposición 1.3.4.] *Para $M = B \times_f F$ producto twisted, a curvatura está completamente determinada por:*

(i) $R(X,Y)Z = R^B(X,Y)Z$

(ii) $R(U,X)Y = (H_\xi(X,Y) + X(\xi)Y(\xi))U$

(iii) $R(X,U)V = g(U,V)(X(\xi)\nabla\xi + h_\xi(X)) - XV(\xi)U$

(iv) $R(U,V)X = XV(\xi)U - XU(\xi)V$

(v)
$$\begin{aligned} R(U,V)W = R^F(U,V)W \quad &+ \quad g(\nabla\xi,\nabla\xi)(g(U,W)V - g(V,W)U) \\ &+ \quad H_\xi(V,W)U - H_\xi(U,W)V \\ &+ \quad g(V,W)h_\xi(U) - g(U,W)h_\xi(V) \\ &+ \quad W(\xi)(V(\xi)U - U(\xi)V) \\ &+ \quad (U(\xi)g(V,W) - V(\xi)g(U,W))\nabla\xi \end{aligned}$$

onde denotamos por $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$ e $U, V, W \in \mathfrak{X}(F)$ os campos de vectores, e por R^B e R^F os tensores curvatura de B e F, respectivamente.

A proposición seguinte describe o tensor de Ricci nun producto twisted.

Proposición 1.5.10 [11, Proposición 1.3.6.] *Sexa $M = B \times_f F$ un producto twisted. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{X}(F)$ temos*

(i) $\rho(X, Y) = \rho^B(X, Y) - d(X(\xi)Y(\xi) + H_\xi(X, Y))$

(ii) $\rho(X, V) = (1 - d)XV(\xi)$

(iii) $$\begin{aligned}\rho(V, W) = \rho^F(V, W) &+ (2 - d)(V(\xi)W(\xi) + H_\xi(V, W)) \\ &+ (d - 2)g(V, W)g(\nabla\xi, \nabla\xi) - g(V, W)\Delta\xi\end{aligned}$$

onde ρ^B e ρ^F son, respectivamente, os tensores de Ricci de B e F e $d = \dim F$.

O seguinte teorema caracteriza cando certos productos twisted son productos warped.

Teorema 1.5.11 [12, Teorema 1] *Sexa $B \times_f F$ un producto twisted con $\dim F > 1$. Entón, $\rho(X, V) = 0$ para calesquera X, V con X tanxente a B e V tanxente a F se e só se $B \times_f F$ pódese expresar como un producto warped $B \times_{\tilde{f}} F$ de (B, g_B) e $(F, \widetilde{g_F})$, onde $\widetilde{g_F}$ é unha métrica conformemente equivalente a g_F.*

O seguinte corolario amosa unha condición suficiente para que o producto twisted sexa simplemente un producto warped. Tal condición resulta de gran utilidade por mor da sinxeleza que presenta á hora de traballar con ela.

Corolario 1.5.12 [12, Corolario 1] *Sexa $M = B \times_f F$, con $\dim F > 1$, un producto twisted. Entón, se (M, g) é einstein, pódese expresar como un producto warped.*

Na mesma liña que o corolario anterior, o teorema seguinte mostra que a condición de ser localmente conformemente chá en moitos casos reduce os productos twisted a productos warped.

Teorema 1.5.13 *Sexa $M = B \times_f F$ un producto twisted riemanniano con $\dim B > 1$, $\dim F > 1$. Se o tensor de Weyl é nulo entón M pódese escribir como un producto warped.*

Demostración.
Empregando o Teorema 1.5.11, a demostración redúcese a probar que $\rho(X, V) = 0$, para calesquera $X \in \mathfrak{X}(B)$ e $V \in \mathfrak{X}(F)$.

Sexa $X_1, \ldots, X_s$ unha referencia ortogonal en B e sexa $V_1, \ldots, V_d$ unha referencia ortogonal en F. Basta calcular a compoñente $W(X_i, X_j, X_i, V_k)$, con $i \neq j$, do tensor de

Weyl, como segue

$$
\begin{aligned}
W(X_i, X_j, X_i, V_k) &= R(X_i, X_j, X_i, V_k) \\
&\quad + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{\langle X_i, X_i\rangle\langle X_j, V_k\rangle - \langle X_j, X_i\rangle\langle X_i, V_k\rangle\} \\
&\quad - \tfrac{1}{n-2}\{\rho(X_i, X_i)\langle X_j, V_k\rangle - \rho(X_j, X_i)\langle X_i, V_k\rangle \\
&\qquad + \rho(X_j, V_k)\langle X_i, X_i\rangle - \rho(X_i, V_k)\langle X_j, X_i\rangle\} \\
&= \tfrac{-1}{n-2}\langle X_i, X_i\rangle\rho(X_j, V_k)
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

para ver que, se $W = 0$, entón necesariamente $\rho(X_j, V_k) = 0$ para calesquera $j \in \{1, \ldots, s\}$ e $k \in \{1, \ldots, d\}$. Dado que j e k son arbitrarios, conclúe a demostración, xa que podemos escoller sempre $i \neq j$ por ser $dim\, B > 1$. □

Observación 1.5.14 Se ben este traballo queda enmarcado dentro do contexto riemanniano e atendendo a tal se enunciou o Teorema que precede, este pódese estender á situación máis xeral de variedades semi-riemannianas con idéntica proba.

Observación 1.5.15 No Teorema 1.5.13 imponse como hipótese que tanto a dimensión da base coma a da fibra sexan maiores que un. Nótese que no Corolario 1.5.12 só se esixe que a dimensión da fibra sexa maior que un, pois é necesario para empregar o Teorema 1.5.11. O mesmo sucede neste caso, en que a mesma hipótese permite empregar o mesmo teorema; sen embargo, a diferencia está en que precisamos alo menos dimensión dous na base para escoller vectores ortogonais na ecuación (1.7). Isto xustifica ambas hipóteses, pero ademais, a esixencia dunha delas garante a necesidade da outra mediante a seguinte dualidade que presentan os productos twisted localmente conformemente chans:
Sexa $M = B \times_f F$ un producto twisted localmente conformemente chan. A métrica pódese escribir dos seguintes xeitos

$$
g_B \oplus f^2 g_F = f^2 \left(\frac{1}{f^2} g_B \oplus g_F \right)
$$

e así, M é localmente conformemente chá se e só se $N = \frac{1}{f^2} g_B \oplus g_F$ o é, e, xa que f está definida sobre toda a variedade, N é de novo un producto twisted que ten por base F e por fibra B. Polo tanto, existe unha dualidade entre a base e a fibra nos productos twisted, que interpreta a doble hipótese feita no enunciado do Teorema 1.5.13.

Ademais, vexamos que esta dualidade é coherente coa interpretación dun producto twisted como producto warped, é dicir, que se a variedade M é de feito un producto warped, tamén o é a variedade N. Así, condición necesaria e suficiente para que M sexa un producto warped é que a función $f : B \times F \longrightarrow \mathbb{R}^+$ poida escribirse como producto de outras dúas $f = f_1 \cdot f_2$ tales que $f_1 : B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ e $f_2 : F \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Pero en caso de ser así, a función de deformación do producto twisted N, tamén se poderá escribir como $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1 \cdot f_2} = \frac{1}{f_1} \cdot \frac{1}{f_2}$ que é á súa vez o producto de funcións requerido para que N sexa un producto warped. Desta maneira, obtense a equivalencia entre o carácter twisted estricto (non warped) entre as dúas variedades M e N.

Observación 1.5.16 Cómpre preguntármonos se a hipótese sobre a dimensión da base e a fibra é realmente necesaria. O seguinte exemplo sinxelo dá resposta afirmativa a tal interrogante:

Consideremos $M_1 = I \times_{f_1} U$, con función de deformación dada por

$$f_1(x, y, z, t) = \frac{1}{x + y + z + t}$$

onde I é un intervalo de $\mathbb{R}$ e $U \subset \mathbb{R}^3$, ambos abertos, escollidos de modo que f_1 sexa positiva en $I \times U$.

A anulación do tensor de Weyl garante a conformalidade chá de M_1. Resta probar que M_1 non é realmente un producto warped, con tal obxecto calculamos o tensor de Ricci avaliado sobre un vector de cada factor e comprobamos que non é cero. Esta é unha caracterización que permite diferenciar os productos twisted dos productos warped, pois para productos warped, o Corolario 1.5.4 mostra que é nulo, de modo que se nun producto twisted non se anula, temos garantido que non se pode reducir a un producto warped. Se tomamos unha base ortonormal $\{U_1, U_2, U_3\}$ en U, ó facermos os cálculos para este exemplo concreto obtemos:

$$\rho(X, U_i) = \frac{-2}{(x + y + z + t)^2}$$

para calquera $i \in \{1, 2, 3\}$, e así tense que a condición de ter a base dimensión maior que un é necesaria. Ademais, atendendo á dualidade mencionada na observación anterior, o producto twisted $N_1 = U \times_{\frac{1}{f_1}} I$ ten fibra de dimensión un, *é localmente conformemente chan e non se pode reducir a un producto warped.*

1.6 Productos multiwarped

Veremos nesta sección unha xeneralización dos productos warped baseada na adición dun número arbitrario de fibras deformadas. Así, tense a definición seguinte.

Definición 1.6.1 Dicimos que unha variedade (M, g) é un producto *multiwarped* se M pode escribirse como un producto de variedades: $M = B \times F_1 \times \cdots \times F_k$ e g vén dada pola expresión seguinte:

$$g = g_B \oplus f_1^2 g_1 \oplus \cdots \oplus f_k^2 g_k$$

onde $f_1, \ldots, f_k : B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ son funcións definidas en B e $g_B, g_1, \ldots, g_k$ son métricas riemannianas en $B, F_1, \ldots, F_k$. B é a base do producto multiwarped, $F_1, \ldots, F_k$ son as fibras e $f_1, \ldots, f_k$ son as funcións de deformación.

Como se desprende da definición anterior e como xa comentamos anteriormente, os productos warped correspóndense con productos multiwarped dunha única fibra. Asimesmo, cobran especial importancia os productos multiwarped de dúas fibras, que chamaremos *biwarped*, pois en certas ocasións convirá *reducir* os productos con múltiples fibras a dúas, por simplicidade. Veremos máis adiante o que queremos dicir con *reducir* neste contexto.

Observación 1.6.1 Nótese que un producto multiwarped é unha xeneralización que se pode entender en diversos sentidos. Por un lado, un producto destas características é en si un producto warped, pois o producto multiwarped $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ pódese pensar coma un producto warped con base $B \times F_1 \times \cdots \times F_{k-1}$ e fibra F_k, e analogamente para calquera permutación das fibras. Á súa vez, esta base é un producto multiwarped que se pode descompoñer de novo como base e fibra dun producto warped. Cómpre resaltar que estes productos multiwarped que se entenden como base do producto warped M son totalmente xeodésicos como subvariedades do producto. Por outro lado, os productos multiwarped xeneralizan os productos warped en tanto que, partindo dun producto warped $B \times_{f_1} F_1$, sen alterar a xeometría deste producto en absoluto, convírtese en subvariedade do producto $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ engadindo novas fibras coa correspondente función de deformación. Non debemos deixar pasar por alto neste intre o feito de que tódalas consideracións que facemos sobre algunha fibra son válidas para calquera delas, e así, podemos dicir que os productos multiwarped mostran unha certa simetría no que ás súas fibras se refire, no sentido de que ningunha delas xoga un papel destacado sobre as outras; se ben si o fai a base, e veremos que esta é precisamente a que determinará, se non completamente si en grande medida, a xeometría do producto.

Observación 1.6.2 En vista da definición dos productos multiwarped, a estructura da métrica que os caracteriza é un tanto flexible, xa que diferentes funcións e diferentes fibras poden dar lugar a un mesmo producto multiwarped, de xeito que poderiamos escribir un producto multiwarped de varios modos sendo esencialmente idénticos. Para eludir as confusións que poidan xurdir deste feito, tomaremos en consideración os seguintes criterios:

- As funcións de deformación que sexan iguais módulo un escalar serán escritas como a mesma función, modificando co escalar correspondente a métrica da fibra.
- As fibras que teñan a mesma función de deformación (tendo en conta o criterio anterior), serán consideradas unha mesma fibra.

Como consecuencia deste criterio, de agora en diante, se temos un producto multiwarped da forma $M = B \times_{f_1} F_1 \times_{cf_1} F_2$, con $c \in \mathbb{R}$, pasaremos a consideralo coma un producto warped $M = B \times_{f_1} (F_1 \times F_2)$, e con métrica $g = g_B \oplus f_1^2(g_{F_1} \oplus c^2 g_{F_2})$. Deste modo evitaremos, en moitos casos, analizar por separado productos multiwarped idénticos xeometricamente. Se ben estes criterios non son suficientes para evitar completamente reiteracións análogas, pois quedarían por considerar diferentes parametrizacións dunha mesma variedade, si son suficientes para evitar analizar máis casos dos necesarios, e o coste de criterios máis estrictos sería unha considerable perda de claridade no desenvolvemento do traballo.

Os productos multiwarped, como vimos de ver, xeneralizan os productos warped; intuitivamente, mentres nos productos warped temos dous factores con un deles modificando a xeometría do outro, nos productos multiwarped ténse un número indefinido de factores cun deles xogando un papel destacado, pois conserva a xeometría no producto e altera a dos restantes. Esta consideración refléxase na conexión da variedade, que se describe a continuación:

Lema 1.6.3 *Sexa $M = B\times_{f_1} F_1\times_{f_2} F_2\times\cdots\times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped, $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $U_i, V_i \in \mathfrak{X}(F_i)$. Entón a conexión de Levi-Civita vén dada por:*

(i) $\nabla_X Y = \nabla^B_X Y$

(ii) $\nabla_X V_i = \nabla_{V_i} X = \frac{X f_i}{f_i} V_i$

(iii) $nor\nabla_{U_i} V_i = II(U_i, V_i) = -\frac{\langle U_i, V_i\rangle}{f_i}\nabla f_i$

(iv) $tan\nabla_{U_i} V_i = \nabla^{F_i}_{U_i} V_i$

(v) $\nabla_{V_i} V_j = 0, \forall i \neq j$

onde ∇^B e ∇^{F_i} denotan as conexións de Levi-Civita en B e F_i, respectivamente, e II a segunda forma fundamental respecto da subvariedade F_i, con $i \in \{1,\ldots,k\}$.

Demostración.
Dado que os productos multiwarped son unha xeneralización dos productos warped que conservan integramente a xeometría do producto warped formado pola base e unha calquera das fibras, as expresións *(i)*,*(ii)*, *(iii)* e *(iv)* son as dadas na Proposición 1.5.1 e non requiren unha demostración engadida.

A expresión nova é a dada en *(v)*. Para chegar a ela empregamos a *fórmula de Koszul*, tense:

$$\begin{aligned} 2\langle\nabla_{V_i} V_j, A\rangle &= V_i\langle V_j, A\rangle + V_j\langle A, V_i\rangle - A\langle V_i, V_j\rangle \\ &\quad + \langle V_i, [A, V_j]\rangle + \langle V_j, [A, V_i]\rangle + \langle A, [V_i, V_j]\rangle \end{aligned}$$

para $V_i \in \mathfrak{X}(F_i)$, $V_j \in \mathfrak{X}(F_j)$ e $A \in \mathfrak{X}(M)$. Analizamos os catro casos seguintes que nos conducen ó resultado:

- $A \in \mathfrak{X}(B)$, entón

$$2\langle\nabla_{V_i} V_j, A\rangle = V_i(0) + V_j(0) - A(0) + \langle V_i, 0\rangle + \langle V_j, 0\rangle + \langle A, 0\rangle = 0$$

  onde empregamos que se $B \in \mathfrak{X}(N_1)$ e $C \in \mathfrak{X}(N_2)$, onde N_1 e N_2 son subvariedades dunha variedade dada, entón $[B, C] = 0$ (Corolario 1.44 en [26]).

- $A \in \mathfrak{X}(F_i)$, neste caso tense

$$2\langle\nabla_{V_i} V_j, A\rangle = V_i(0) + V_j\langle A, V_i\rangle - A(0) + \langle V_i, 0\rangle + \langle V_j, [A, V_i]\rangle + \langle A, 0\rangle = 0$$

  xa que $[A, V_i] \in \mathfrak{X}(F_i)$ e $\langle A, V_i\rangle \in \mathfrak{F}(F_i)$.

- $A \in \mathfrak{X}(F_j)$, entón, dado que $[,]$ se anula en campos de vectores de distintas fibras (Corolario 1.44 en [26]), tense que $\nabla_{V_i} V_j = \nabla_{V_j} V_i$ e o resultado dedúcese por simetría co caso anterior.
- Noutro caso os termos da fórmula de Koszul son cero, trivialmente.

□

Ó presentarmos a conexión dos productos warped e twisted, vimos que había unha estricta relación entre estes e a xeometría das foliacións canónicas respecto dos dous factores. En tanto os productos multiwarped son unha xeneralización dos productos warped baseada no aumento do número de fibras, parece natural agardar un resultado similar que xeneralice o correspondente dos productos warped. Como mostran as expresións da conexión, a foliacion canónica respecto da base $\mathfrak{L}_B$ é totalmente xeodésica, mentres que as foliacións canónicas respecto das fibras $\mathfrak{L}_{F_1}, \mathfrak{L}_{F_2}, \ldots, \mathfrak{L}_{F_k}$ son esféricas. A implicación inversa tamén é certa para foliacións ortogonais e tense, entón, o resultado seguinte:

Teorema 1.6.4 [22, Proposición 4] *Sexa $M = B \times F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_k$ unha variedade producto con foliacións canónicas $\mathfrak{L}_B$, $\mathfrak{L}_{F_1}$, $\mathfrak{L}_{F_2}$, $\ldots$, $\mathfrak{L}_{F_k}$ respecto da base e as fibras respectivamente. Se as foliacións son perpendiculares ó definir unha métrica g sobre M, entón a métrica g é un producto multiwarped se e só se a folición canónica asociada á base $\mathfrak{L}_B$ é totalmente xeodésica e as foliacións canónicas asociadas ás fibras $\mathfrak{L}_{F_1}$, $\mathfrak{L}_{F_2}$, $\ldots$, $\mathfrak{L}_{F_k}$ son esféricas.*

Este tipo de disertacións deu lugar a unha extensa bibliografía e a numerosos resultados de destacado interés sobre productos multiplemente warped. Entre eles, un dos máis relevantes é a xeneralización levada a cabo en [15] onde se dá un teorema de descomposición análogo ó teorema de de Rham para productos multiwarped, é dicir, caracterízanse as variedades riemannianas que se poden descompoñer como un producto multiwarped. A importancia do teorema de de Rham radica fundamentalmente na simplificación que supón no estudio da xeometría dunha variedade a posibilidade de descompoñela en factores máis simples, que se poden estudiar independentemente, pois os productos directos conservan a xeometría dos factores como subvariedades do producto. Esta mesma utilidade transmítese ó teorema dado por Hiepko [15], pois, se ben non se pode estudiar por separado a xeometría dos factores, pois a base inflúe mediante a función de deformación na xeometría das fibras, si posúen numerosas propiedades de carácter local, como veremos no decorrer desta memoria, que permiten un estreito achegamento a innumerables propiedades xeométricas das variedades que son obxecto de estudio.

Capítulo 2

Conformalidade chá dun producto warped

Como vimos de mencionar na introducción, os productos warped preséntanse en moitos casos como excelentes candidatos na busca de exemplos de variedades satisfacendo certas condicións, como pode ser, no caso que nos ocupa, a conformalidade chá local. Fronte á rixidez do producto directo, os productos warped exhiben, mediante a función de deformación, un grao de liberdade que flexibiliza a súa estructura, permitindo así o amoldamento requerido en certas situacións. Ademais, lonxe de posuír unha estructura rebuscada ou artificial, os productos warped aparecen en moi diversos contextos, e o seu estudio permanece ligado a diversos ámbitos como a xeometría de variedades completas [4], características de amplo espectro (negatividade da curvatura en [5]), modelos cosmolóxicos, etc.

Este capítulo está adicado ó estudio da conformalidade chá local en productos warped, o que supón, no desenvolvemento global desta memoria, un paso previo á abordaxe do caso máis xeral de conformalidada chá local en productos deformados múltiples. Mais, á súa vez, o capítulo ten interese en si mesmo, pois identifica os productos que, deformados, poden admitir a propiedade de conformalidade chá local. Concretamente, o obxectivo deste capítulo é caracterizar os productos warped localmente conformemente chans, cuestión que reduciremos ó estudio da conformalidade chá local en productos directos. Posteriormente abordaremos os productos warped con base un espacio modelo, describindo as funcións de deformación localmente, nunha primeira etapa, para obter as condicións que garanten a súa definición global nunha segunda.

2.1 Condicións necesarias e suficientes

O obxectivo desta sección é caracterizar os productos warped localmente conformemente chans. Para iso comezamos por estudiar os productos directos, xa que particularizan os productos warped para funcións de deformacións constantes, e basearemos o estudio dos productos warped nunha transformación conforme que nos permita reducir o problema á análise da conformalidade chá local dun producto directo.

Lema 2.1.1 *Sexa $M = B \times F$ un producto riemanniano localmente conformemente chan tal que $dim\, M \geq 4$. Entón $W^B = 0$ e $W^F = 0$.*

Demostración.
Posto que o producto é directo, os dous factores xogan o mesmo papel e a proba é análoga para ambos; farémola, pois, para B. Se $dim\, B < 4$ entón $W^B = 0$ sempre, co que non temos nada que probar. Supoñamos pois que $dim\, B \geq 4$. Que B sexa localmente conformemente chá equivale ([21, Teorema 3.2]) a que para calesquera vectores ortogonais $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ se verifique

$$K_{12} + K_{34} = K_{14} + K_{23}$$

onde empregamos a notación $K_{ij} = K(e_i, e_j)$. Polo tanto temos que a igualdade anterior é certa para M. Pero se tomamos calesquera vectores ortogonais en B ou F, tamén serán ortogonais en M, por ser un producto directo, e ademais

$$K^B_{ij} = K_{ij}$$

así que, para calesquera $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortogonais en B

$$K^B_{12} + K^B_{34} = K^B_{14} + K^B_{23}$$

e isto equivale a que $W^B = 0$. □

Lema 2.1.2 *Sexa $M = B \times F$ un producto riemanniano localmente conformemente chan tal que $dim\, M \geq 3$. Entón B e F teñen curvatura seccional constante.*

Demostración.
Empregaremos a caracterización da conformalidade chá dada no Teorema 1.1.7 e, dado que diferencia os casos de $dim\, M = 3$ e $dim\, M \geq 4$, tamén o faremos nós aquí.

- $n = dim\, M \geq 4$. Por un lado temos que $W = 0 \Rightarrow W^B = 0 = W^F$. Polo tanto, basta con probar que B e F son einstein, como mostra o Corolario 1.1.3.

  Sexa $s = dimB$, $\{e_1, e_2, ..., e_{s+1}, e_{s+2}, ..., e_n\}$ unha base ortonormal de M. Empregamos i, j para subíndices de campos en B e a, b para subíndices de campos en F.

  Dado que $W = 0$, temos:

$$\begin{aligned} W_{i(s+1)i(s+1)} &= R_{i(s+1)i(s+1)} + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \tfrac{1}{n-2}(\rho_{ii} + \rho_{(s+1)(s+1)}) = 0 \\ &\vdots \\ W_{inin} &= R_{inin} + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \tfrac{1}{n-2}(\rho_{ii} + \rho_{nn}) = 0 \end{aligned}$$

pero $R_{i(s+1)i(s+1)} = \cdots = R_{inin} = 0$, así que

$$\rho_{(s+1)(s+1)} = \cdots = \rho_{nn}$$

e polo tanto,

$$\rho^F_{(s+1)(s+1)} = \cdots = \rho^F_{nn}$$

Ademais,

$$\begin{aligned} W_{iaib} &= R_{iaib} + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)}(g_{ii}g_{ab} - g_{ia}g_{ib}) \\ &\quad -\tfrac{1}{n-2}(\rho_{ii}g_{ab} + \rho_{ab} - \rho_{ia}g_{ib} - \rho_{ib}g_{ia}) = 0 \end{aligned}$$

redúcese a

$$W_{iaib} = -\frac{\rho_{ab}}{n-2} = 0$$

co cal, esta base ortonormal diagonaliza o tensor de Ricci e, así, temos que $\rho^F = \lambda Id = \lambda g_F$.

Por outro lado,

$$W_{ijij} = R_{ijij} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n-2}(\rho_{ii} + \rho_{jj}) = 0, \quad \text{para}\, i \neq j$$

e dado que $R_{ijij} = R^B_{ijij}$, $\tau = \tau^B + \tau^F$ e $\rho_{ii} = \rho^B_{ii}$, temos que na anterior ecuación tódolos sumandos dependen de B excepto τ^F, que por este motivo ha ser necesariamente constante.

Como $\tau^F = \sum_{a=s+1}^n \rho_{aa} = (n-s)\rho_{nn}$ temos que ρ_{aa} tamén é constante e, como o tensor de Rici é un múltiplo da métrica, F é einstein.

Analogamente próbase que B ten necesariamente que ser einstein.

- $n = dim\, M = 3$. Neste caso procedemos de xeito diferente, pois o tensor de Weyl é sempre nulo e non nos proporciona ningunha información sobre a conformalidade chá da variedade. Atendendo á caracterización da conformalidade chá dada no Teorema 1.1.7 temos que se M é localmente conformemente chá, entón, para calesquera vectores X, Y, Z verifícase a seguinte igualdade:

$$(\nabla_X C)(Y, Z) = (\nabla_Y C)(X, Z)$$

Tomando campos de vectores X en B e $Y = Z$ en F, ou viceversa, X en F e $Y = Z$ en B, a igualdade anterior redúcese a:

$$X(\tau) = 0$$

e deducimos que τ é constante. Pero dado que $\tau = \tau^B + \tau^F$ e os factores teñen dimensión un e dous, deducimos que ambos son einstein, e, polo tanto, teñen curvatura seccional constante. □

Como consecuencia directa do teorema precedente tense o seguinte corolario.

Corolario 2.1.3 *Sexa $M = B \times F$ un producto riemanniano localmente conformemente chan. Entón B e F son localmente conformemente chás.*

Demostración.
Polo resultado anterior sabemos que B e F teñen curvatura seccional constante, logo ambas son localmente conformemente chás. □

Coa axuda dos lemas precedentes probaremos o seguinte teorema, que caracteriza os productos directos de dúas variedades que son localmente conformemente chás, dado en [36], se ben damos aquí unha demostración alternativa para dimensión de M arbitraria.

Teorema 2.1.4 *Sexa $M = B \times F$ un producto riemanniano. Entón (M, g) é localmente conformemente chan se e só se B e F teñen curvatura seccional constante e ademais dáse unha das tres condicións seguintes:*

- $dimB = 1$.
- $dimF = 1$.
- $dimB > 1$, $dimF > 1$ *e* $K^B = -K^F$.

Demostración.
Os dous primeiros casos son similares. Aplicamos o lema anterior para concluir que B e F, nos seus respectivos casos, teñen curvatura seccional constante. Para probar a suficiencia basta asumir a constancia da curvatura e substituir nas expresións das compoñentes do tensor de Weyl, vendo así que son todas nulas.

Se $dim\, B > 1$ e $dim\, F > 1$, sabemos polo lema anterior que (B, g_B) e (F, g_F) teñen curvatura seccional constante, poñamos K^B e K^F. Substituindo nas expresións das compoñentes do tensor de Weyl chegamos ás tres ecuacións seguintes, onde $s = dimB$, $d = dimF$ e $n = dimM$:

$$\{(n-1)(n-2) + s(s-1) - 2(n-1)(s-1)\}K^B + d(d-1)K^F = 0$$

$$s(s-1)K^B + \{(n-1)(n-2) + d(d-1) - 2(n-1)(d-1)\}K^F = 0$$

$$\{s(s-1) - (s-1)(n-1)\}K^B + \{d(d-1) - (n-1)(d-1)\}K^F = 0$$

que podemos escribir do seguinte xeito tendo en conta que $s + d = n$:

$$d(d-1)(K^B + K^F) = 0$$

$$s(s-1)(K^B + K^F) = 0$$

$$(s-1)(d-1)(K^B + K^F) = 0$$

Vemos que, dado que supoñemos $s, d > 1$ as tres ecuacións redúcense a $K^B + K^F = 0$.

Para probar a suficiencia basta facer estas últimas contas inversamente para calcular as compoñentes do tensor de Weyl, que serán nulas. □

Unha vez que coñecemos os productos directos (de dous factores) localmente conformemente chás, atopámonos en condicións de afrontar o problema de caracterizar os productos warped localmente conformemente chás, que se resolve no seguinte teorema.

Teorema 2.1.5 *Sexa $M = B \times_f F$ un producto warped. Entón:*

(i) Se $\dim B = 1$, entón $M = B \times_f F$ é localmente conformemente chá se e só se (F, g_F) ten curvatura seccional constante.

(ii) Se $\dim B > 1$ e $\dim F > 1$, entón $M = B \times_f F$ é localmente conformemente chá se e só se

(ii.1) (F, g_F) é unha variedade de curvatura seccional constante c_F.

(ii.2) A función $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ define un cambio conforme en B de modo que $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ ten curvatura seccional constante $\widetilde{c}_B = -c_F$.

(iii) Se $\dim F = 1$, entón $M = B \times_f F$ é localmente conformemente chá se e só se a función $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ define un cambio conforme en B tal que $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ é unha variedade de curvatura seccional constante.

Demostración.
Sexa $(M = B \times_f F, g = g_B \oplus f^2 g_F)$ un producto warped riemanniano de dimensión arbitraria n. A métrica pódese escribir, sacando factor común f^2,

$$g = \left(\begin{array}{c|c} g_B & \\ \hline & f^2 g_F \end{array}\right) = f^2 \left(\begin{array}{c|c} f^{-2} g_B & \\ \hline & g_F \end{array}\right)$$

Se consideramos un cambio conforme na métrica g:

$$g_c = f^{-2} g$$

a expresión de g_c será

$$g_c = \left(\begin{array}{c|c} f^{-2} g_B & \\ \hline & g_F \end{array}\right)$$

que é un producto directo das variedades (B, g_B^c), con $g_B^c = f^{-2} g_B$, e (F, g_F).

Posto que a conformalidade chá se conserva por cambios conformes, a métrica g será localmente conformemente chá se e só se g_c é localmente conformemente chá. Pero a conformalidade chá en productos directos está caracterizada totalmente polo Teorema 2.1.4, de onde se segue o presente resultado. □

Nótese que o teorema anterior xeneraliza ó Teorema 2.1.4. Do xeito que os productos directos particularizan os productos warped para funcións de deformación constante, tamén considerando o mesmo tipo de funcións obtense como caso particular o Teorema 2.1.4 partindo do Teorema 2.1.5.

Observación 2.1.6 Os productos warped de tipo cosmolóxico, referidos co nome de Robertson-Walker, teñen, como xa mencionamos, a forma $I \times_f N(c)$, onde N é unha variedade de curvatura seccional constante c. Atendendo a un teorema análogo ó anterior, en [6], dáse explicación ó feito de seren os espacios Robertson-Walker localmente conformemente chans para calquera función de deformación f. Vese tamén, pola contra, como os espacio-tempo estáticos, da forma $B \times_f \mathbb{R}$, deben cumplir condicións certamente restrictivas na base B e na función de deformación para ser localmente conformemente chans, pois isto depende de que a variedade B coa métrica $\frac{1}{f^2} g_B$ teña curvatura seccional constante.

Corolario 2.1.7 *Sexa $M = B \times_f F$ un producto warped localmente conformemente chan. Entón a base B é localmente conformemente chá e a fibra F ten curvatura seccional constante.*

Demostración.
Polo Teorema 2.1.5, F ten en calquera caso curvatura seccional constante (trivializamos o caso en que a fibra teña dimensión 1). Por outro lado, sempre que $dim\, B > 1$, a métrica $f^{-2} g_B$ ten curvatura seccional constante, e polo tanto é localmente conformemente chá; en consecuencia tamén o é a propia g_B. $\square$

2.2 Estudio local da conformalidade chá local

Queremos coñecer a estructura local das variedades que, deformadas, poden dar lugar a un producto warped localmente conformemente chan. Para iso servímonos do Teorema 2.1.5 e, se partimos de dúas variedades (B, g_B) e (F, g_F), queremos saber qué condicións deben cumplir a función de deformación f e a variedade (B, g_B) para que $(B, f^{-2} g_B)$ teña curvatura seccional constante. Deberemos atender, ademais, á condición adicional que se presenta nos casos en que $dim\, B > 1$ e $dim\, F > 1$, isto é, que as curvaturas seccionais de $(B, f^{-2} g_B)$ e (F, g_F) sexan opostas.

Se (B, g_B) é unha variedade localmente conformemente chá, entón temos garantida a existencia local de funcións f de forma que $(B, f^{-2} g_B)$ ten curvatura seccional constante arbitraria (bastaría pasar a curvatura seccional nula mediante o cambio conforme que a fai conformemente chá e compoñer co cambio conforme que a fai da curvatura requerida, como amosa o Teorema 1.2.1). Polo tanto, temos o seguinte recíproco local do Corolario 2.1.7:

Teorema 2.2.1 *Sexa (B, g_B) unha variedade localmente conformemente chá e (F, g_F) un espacio de curvatura seccional constante. Entón existen funcións de deformación f definidas localmente sobre B de xeito que $U \times_f F$ é localmente conformemente chá (sendo $U \subset B$ o aberto U de definición de f).*

Demostración.
Partimos de (B, g_B) variedade localmente conformemente chá. Para cada punto de B existe un entorno $U \subset B$ e un difeomorfismo $\psi : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ verificando $\psi^* g = \phi^2 g_{\mathbb{R}^n}$. O Teorema 1.2.1 mostra a existencia de funcións, como $\varphi = 1/(1 + \frac{-K^F}{4} \sum (u_i)^2)$, definida nun aberto de $\mathbb{R}^n$, tal que a curvatura seccional da métrica $\varphi^2 g_{\mathbb{R}^n}$ é $-K^F$. Polo tanto, construímos a variedade seguinte

$$\mathbb{R}^n \times_{\frac{1}{\varphi}} F$$

Deste xeito, polo Teorema 2.1.5, este producto warped é localmente conformemente chán. Pero dado que $g_{\mathbb{R}^n} = \frac{1}{\phi^2} g_B$, o producto $U \times F$ coa métrica

$$\frac{1}{\phi^2} g_B \oplus \frac{1}{\varphi^2} g_F$$

tamén é localmente conformemente chán. Agora, como a conformalidade chá local é preservada por transformacións conformes, obtense que

$$U \times_f F$$

é localmente conformemente chá para $f = \phi/\varphi$. $\square$

Observación 2.2.2 Como consecuencia do teorema anterior, cómpre analizar dous aspectos de especial interese; estes son:

1. a posibilidade de estender a función de deformación f a toda a variedade B, con obxecto de construír productos warped completos, e
2. a unicidade da función de deformación.

Na vindeira sección trataremos o primeiro punto, facendo un estudio global da conformalidade chá de productos warped. Referido á unicidade da función de deformación, é dicir, a se dado un producto warped que é localmente conformemente chan, existen máis funcións que deformen o mesmo producto e que fagan que este siga sendo conformemente chan, trataremos o problema localmente.

Sexa $(B \times_f F, g_B \oplus f^2 g_F)$ un producto warped localmente conformemente chan. Sabemos que $(B, f^{-2} g_B)$ ten curvatura seccional constante. Queremos ver agora qué funcións $\widetilde{f}$ definidas localmente en B fan que $(B, \widetilde{f}^{-2} g_B)$ teña curvatura seccional constante. En primeiro lugar descartamos o caso en que $dim\, B = 1$, pois neste caso calquera función $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^+$ fai o producto warped conformemente chan sen máis que esixir a constancia da curvatura seccional da variedade F (Teorema 2.1.5).

Para estudiar os casos restantes, escribimos a variedade $(B, \widetilde{f}^{-2} g_B)$ como

$$(B, \frac{f^2}{\widetilde{f}^2} \frac{1}{f^2} g_B)$$

Á vista desta expresión basta con atopar os cambios conformes da métrica en $(B, f^{-2}g_B)$ que manteñen a curvatura seccional constante para coñecer as funcións que buscamos.

Deste modo, o problema tradúcese en buscar os cambios conformes de variedades de curvatura seccional constante que conservan a constancia da curvatura seccional. Para iso, dado que o tensor de Weyl é invariante por cambios conformes, bastará con atopar aqueles que conserven o carácter einstein. O Corolario 1.4.6 achéganos a resposta para variedades conexas de dimensión ≥ 3: os cambios conformes que conservan o carácter einstein son exactamente aqueles da forma $g_c = e^{2f}g$ que son solución da ecuación de Möbius $B_g(f) = 0$.

O caso máis sinxelo é o caso euclídeo, no que o Lema 1.4.7 caracteriza as posibles solucións: para un cambio conforme $g_c = e^{2f}g_0$ no espacio euclídeo, sabemos que, tras facer o cambio $u = e^{-f}$, temos que as funcións $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son da forma

$$u(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c, \quad \text{con} \quad a, c \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$$

Polo tanto, desfacendo o cambio anterior, temos que, a transformación da métrica que buscamos é

$$g_c = \frac{1}{(a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c)^2} g_0$$

así, obtemos que as funcións $\widetilde{f}$ requeridas son as da forma:

$$\widetilde{f}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = (a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c) f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) \tag{2.1}$$

Esta expresión local, para calesquera $a, c \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ caracteriza as funcións definidas localmente que conservan a constancia da curvatura seccional. Pero isto só resolve o noso problema da conformalidade chá no producto warped se a variedade F ten dimensión un. Noutro caso, o cambio conforme sobre a base debe conservar o valor da curvatura seccional. Polo tanto, cómpre estudiar cómo varía a curvatura seccional ó facer un cambio conforme deste tipo.

Lema 2.2.3 *Sexa* $(\mathbb{R}^n, e^{2f}g_0)$ *unha transformación de Möbius da métrica euclídea. Entón, para* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *base ortonormal, tense*

- *A curvatura de* $(\mathbb{R}^n, e^{2f}g_0)$ *vén dada por*

$$R_{ijij} = \frac{4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2}{u^4}, \quad \textit{para} \quad i \neq j$$

  onde $u = e^{-f}$ *ten a forma* $u(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c$.

- *A curvatura seccional de* $(\mathbb{R}^n, e^{2f}g_0)$ *ten a expresión*

$$K = 4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2$$

Demostración.
Empregando o Teorema 1.4.4, a expresión da curvatura vén dada por

$$\begin{aligned}
R_{ijij} &= \tfrac{1}{u^2}\left\{-\tfrac{2}{n}\left(\Delta(Log\, u^{-1}) + \tfrac{(n-2)}{2}\|\nabla(Log\, u^{-1})\|^2\right)\right\} \\
&= \tfrac{-1}{u^2 n}\left(2\Delta(Log\, u^{-1}) + (n-2)\|\nabla(Log\, u^{-1})\|^2\right) \\
&= \tfrac{-1}{u^2 n}\left(2\tfrac{\|\overrightarrow{b}\|^2 - 4ac - 2(n-2)au}{u^2} + (n-2)\tfrac{\|\overrightarrow{b}\|^2 - 4ac + 4au}{u^2}\right) \\
&= \tfrac{-1}{u^2 n}\left(\tfrac{n\|\overrightarrow{b}\|^2 - 4nac}{u^2}\right) \\
&= \tfrac{4ac - \|\overrightarrow{b}\|^2}{u^4}
\end{aligned}$$

Se agora calculamos a curvatura seccional a partir da expresión anterior, temos

$$K_{ij} = \frac{4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2}{u^4} u^4 = 4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2$$

tal como enunciamos. □

Temos pois, que os cambios conformes que manteñen constante o valor da curvatura seccional para o espacio euclídeo son aqueles que verifican:

$$4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 = 0$$

2.3 Estudio global da conformalidade chá local

Nesta sección estudiamos a posibilidade de definir globalmente sobre a base B funcións de deformación que fagan o producto $B \times_f F$ localmente conformemente chan.

Dada a complexidade do problema, limitarémonos ó caso en que a base sexa un espacio completo e simplemente conexo de curvatura seccional constante.

Observación 2.3.1 Consideremos un producto warped $B \times_f F$ localmente conformemente chan. Establecer como hipótese que B teña curvatura seccional constante equivale a que sexa einstein, pois, por ser o producto warped localmente conformemente chan, tamén o é a base (Corolario 2.1.7). Pero, dado que $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ ten curvatura seccional constante, como se deduce do Teorema 2.1.5, tense que $1/f$ é unha transformación de Möbius.

Reciprocamente, que $1/f$ sexa unha transformación de Möbius en (B, g_B) equivale a que f sexa unha transformación de Möbius en $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$, e dado que esta variedade ten curvatura seccional constante, (B, g_B) será einstein e, por ser localmente conformemente chá, tamén terá curvatura seccional constante (pódese chegar á mesma conclusión tendo en conta que as transformacións de Möbius conservan os autoespacios do operador de

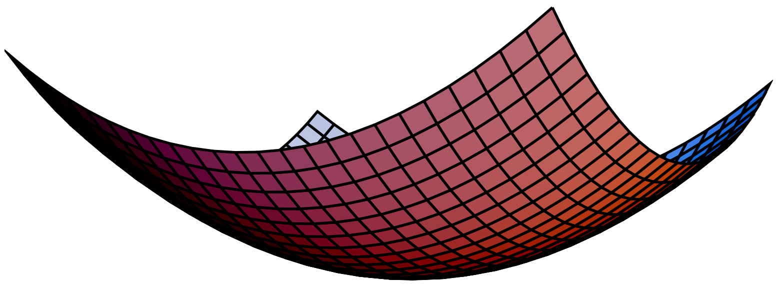
Ricci, como vimos no Corolario 1.4.5). Polo tanto, impoñer a hipótese sobre a base da constancia da curvatura seccional equivale a que a función de deformación dea lugar a unha transformación de Möbius mediante a súa inversión.

2.3.1 Productos warped localmente conformemente chans con base o espacio euclidiano

Na sección anterior vimos que a función $\theta(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{1}{a\|\overrightarrow{x}\|^2+\langle\overrightarrow{b},\overrightarrow{x}\rangle+c}$, con $a, c \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^s$, é a única que conserva a constancia da curvatura seccional en $\mathbb{R}^s$ na deformación conforme correspondente. Vexamos agora cándo se pode definir a función en todo $\mathbb{R}^s$.

$\theta(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{1}{a\|\overrightarrow{x}\|^2+\langle\overrightarrow{b},\overrightarrow{x}\rangle+c}$ non está definida no conxunto $\Gamma = \{\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^s : a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c = 0\}$. Vexamos que conxunto é este segundo nos casos seguintes:

- $\underline{a, c > 0}$. Entón o grafo da función $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle\overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c$ é un paraboloide convexo.



A función de deformación é un paraboloide convexo.

A función ten un mínimo absoluto no punto $P_m = (\frac{-b_1}{2a}, \ldots, \frac{-b_s}{2a})$, polo tanto, a función terá algún punto onde se anule se e só se $f(P_m) \leq 0$, o cal significa que necesariamente ha verificar

$$f(P_m) = a\|(\frac{b_1}{2a}, \ldots, \frac{b_s}{2a})\|^2 + \frac{-b_1^2}{2a} + \cdots + \frac{-b_s^2}{2a} + c = \frac{-\|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2}{4a} + c > 0$$

- $\underline{a > 0,\ c < 0}$. Teriamos que $f \to c$ cando $x \to 0$, tomando así valores negativos, co cal, non obtemos funcións de deformación desta forma.
- $\underline{a = 0}$. Neste caso a función toma valores negativos salvo que $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ sexa nulo e $c > 0$. Pero esta situación corresponde a unha homotecia, e trivializa o producto warped nun producto directo. Polo que descartamos tamén esta situación.
- $\underline{a < 0,\ c \text{ arbitrario}}$. O paraboloide non podería estar definido en todo $\mathbb{R}^s$ sendo a función positiva, pois $f \to -\infty$ cando $x \to \infty$ (si podería ser f sempre negativa con $c < 0$, obtendo así cálculos simétricos ós que faremos, polo que convimos restrinxirnos a funcións de deformación estrictamente positivas).

En resume, tense que necesariamente deben ser positivos a e c, na función θ, para que estea ben definida e sexa positiva. Ademais, o seu mínimo debe ser positivo, o que se traduce na desigualdade $4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 > 0$.

Resumimos os resultados deste apartado no lema seguinte:

Lema 2.3.2 *Sexa $M = \mathbb{R}^s \times_f F$ un producto warped localmente conformemente chan con base euclidiana. Entón f é da forma:*

$$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c, \qquad \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^s,\ a, c \in \mathbb{R}$$

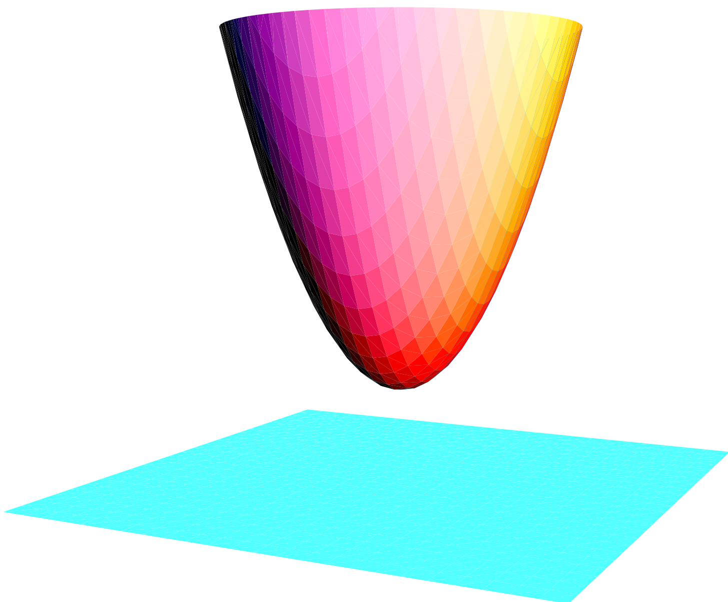
cos coeficientes $a > 0$, $c > 0$ e $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ satisfacendo a desigualdade $4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 > 0$.

Xa vimos que, para que un cambio conforme conserve a constancia da curvatura seccional, a función de deformación debe verificar a ecuación de Möbius. Pero ademais, cómprenos en ocasións que manteña o valor da curvatura seccional e, como vimos anteriormente, unha condición necesaria e suficiente para que iso ocorra é que a, c e $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ verifiquen

$$4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 = 0$$

pero vimos de ver que para poder definir f en todo $\mathbb{R}^s$ débese verificar que

$$4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 > 0$$



A función de deformación non corta ó plano $x_{s+1} = 0$.

Esta incompatibilidade é a clave do teorema seguinte:

Teorema 2.3.3 *Sexa* $\mathbb{R}^s \times_f F$*,* $s > 1$*, un producto warped, entón é localmente conformemente chan se e só se* $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c$ *con* $4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 > 0$*,* $a, c > 0$ *e, ademais, se* $\dim F > 1$*,* F *ten curvatura seccional constante e cúmprese unha das condicións seguintes:*

(i) $K^F = 0$ *e o producto é directo, i.e.,* f *é constante.*

(ii) $K^F < 0$*, verificando* $K^F = \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 - 4ac$*.*

Demostración.
O resultado séguese do Lema 2.3.2, así como dos comentarios anteriores, tendo en conta a incompatibilidade entre o requisito de definición global da función ($4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 > 0$) e a necesidade de ser nula a curvatura seccional se a dimensión da fibra é maior que un ($4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 = 0$), para o caso ($i$). No apartado ($ii$) o valor de K^F debe ser oposto ó da curvatura seccional da base deformada conformemente, como vimos no Teorema 2.1.5. □

Atinxindo ó problema da unicidade da función de deformación, xa tratado dende un punto de vista local, podemos dar na mesma liña dos resultados anteriores o seguinte:

Corolario 2.3.4 *Sexa* $(B \times_f F, g_B \oplus f^2 g_F)$*un producto warped localmente conformemente chan tal que* $\dim B > 1$ *e* $\dim F > 1$*. Se* $(B, f^{-2} g_B) = (\mathbb{R}^s, g_0)$ *entón* f *é a única función de deformación que fai o producto warped localmente conformemente chan.*

Demostración.
De haber outro producto warped $(B \times_{\widetilde{f}} F, g_B \oplus \widetilde{f}^2 g_F)$ localmente conformemente chan, teriamos que $(B, \widetilde{f}^{-2} g_B)$ ten curvatura seccional nula, pois debe ser oposta á da fibra F (esta é nula por ser localmente conformemente chan o producto $\mathbb{R}^s \times F$). Pero entón temos un cambio conforme da métrica $f^{-2} g_B$ dado por $\widetilde{f}/f$, que conserva a nulidade da curvatura seccional de $\mathbb{R}^s$, o que contradí o Lema 2.3.2. □

2.3.2 Productos warped localmente conformemente chans con base o espacio hiperbólico

Unha vez que coñecemos os productos warped con base $\mathbb{R}^s$ que son localmente conformemente chans, trataremos de estudiar os outros espacios modelo de curvatura seccional constante. Comezamos polo espacio hiperbólico, que trataremos de relacionar co espacio euclídeo mediante unha transformación conforme global.

A identidade é unha aplicación conforme entre o semi-espacio superior euclidiano e o espacio hiperbólico (pensado no seu modelo de semi-espacio de Poincaré) verificando

$$\begin{array}{rccc} \vartheta : & (U^s, g_0) & \longrightarrow & (\mathbb{H}^s, g_{\mathbb{H}}) \\ & (x_1, \ldots, x_s) & \rightsquigarrow & (x_1, \ldots, x_s) \\ & & \vartheta^* g_{\mathbb{H}} = \frac{1}{x_s^2} g_0 & \end{array}$$

onde denotamos por $(U = \{\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^s : x_s > 0\}, g_0)$ o semi-espacio euclidiano e por $(\mathbb{H}^s, g_{\mathbb{H}})$ o modelo de Poincaré do espacio hiperbólico.

Nótese que ϑ é unha aplicación de Möbius, pois conserva a constancia da curvatura seccional. De feito, e como era de esperar, é da forma (2.1) con $a = c = 0$ e $b = (0, \ldots, 0, 1)$, pois está definida nun aberto de $\mathbb{R}^s$.

Cada vez que teñamos unha aplicación $\phi : (\mathbb{H}^s, g_{\mathbb{H}}) \longrightarrow (\mathbb{H}^s, \frac{1}{f^2} g_{\mathbb{H}})$ que conserva a constancia da curvatura seccional, sabemos que verifica a ecuación de Möbius e, polo tanto, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \phi & \\ (\mathbb{H}^s, g_{\mathbb{H}}) & \longrightarrow & (\mathbb{H}^s, \frac{1}{f^2} g_{\mathbb{H}}) \\ \vartheta \uparrow & \nearrow_{\phi \circ \vartheta} & \\ (U^s, g_0) & & \end{array}$$

Así, dada unha función $\phi : (\mathbb{H}^s, g_{\mathbb{H}}) \longrightarrow (\mathbb{H}^s, \frac{1}{f^2} g_{\mathbb{H}})$ que verifique a ecuación de Möbius $B(\phi) = 0$, temos unha función $\phi \circ \vartheta : (U^s, g_0) \longrightarrow (\mathbb{H}^s, \frac{1}{f^2} g_{\mathbb{H}})$, que tamén é de Möbius, pois é a composición de dúas aplicacións de Möbius, e, dado que está definida nun aberto de $\mathbb{R}^s$, é da forma (2.1):

$$(\phi \circ \vartheta)^* (\frac{1}{f^2} g_{\mathbb{H}}) = \frac{1}{\Big(a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c\Big)^2} g_0$$

Entón, dado que $\vartheta^* g_{\mathbb{H}} = \frac{1}{x_s^2} g_0$, chegamos a

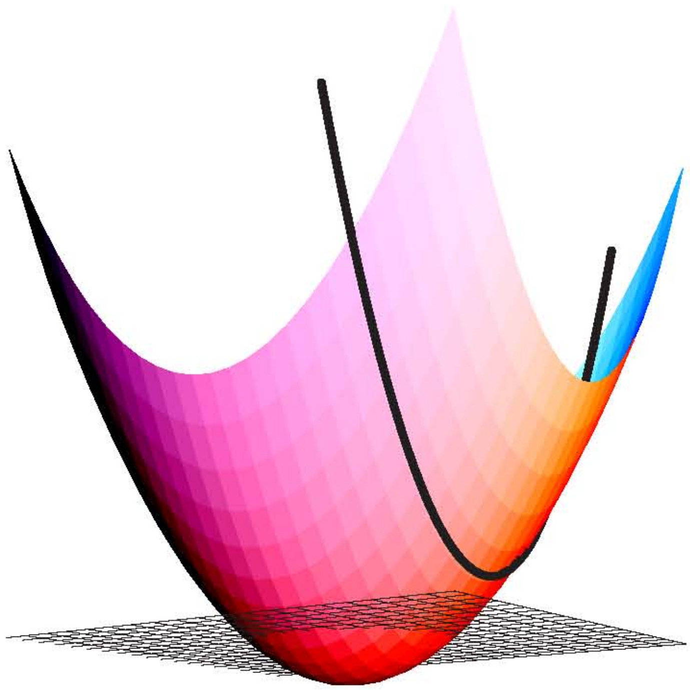
$$\frac{1}{f(\overrightarrow{\mathbf{x}})^2} = \frac{x_s^2}{\Big(a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c\Big)^2}$$

para uns certos $a, c \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^s$, verificando $4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 > 0$ ou $\frac{-b_s}{2a} \leq 0$ e $4ac - (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{s-1}^2) \geq 0$, o que garante que $a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c > 0$, $\forall \overrightarrow{\mathbf{x}} \in U^s$. Outra forma de chegar a esta expresión sería resolver a ecuación de Möbius para o espacio hiperbólico, resolvendo o sistema de ecuacións en derivadas parciais que se obtén empregando o Lema 1.4.1 para reescribir a ecuación de Möbius neste espacio.

Observación 2.3.5 Queremos dar as condicións pertinentes para que ϕ estea ben definida en U^s, o que ben sendo que $a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c \neq 0$, pero tomando $a, c > 0$, isto queda reducido a $a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c > 0$. A condición $4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 > 0$ garántenos que $a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c > 0$ en todo $\mathbb{R}^s$. Pero, dado que reducimos o dominio da función, agora temos máis casos favorables: aqueles nos que $a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c$ se anula no semiespacio negativo pechado $\{\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^s : x_s \leq 0\}$.

Para caracterizar estes casos temos:

No caso en que o punto mínimo do paraboloide, $\frac{-b_s}{2a}$, teña a última coordenada negativa



A función de deformación pode ser positiva aínda que o paraboloide sexa negativo en puntos que cumplan $x_s < 0$.

ou nula, é dicir, $\frac{-b_s}{2a} \leq 0$, teriamos a situación representada no debuxo, onde o plano corta ó paraboloide en $a\|x\|^2 + bx + c = 0$. Nesta situación, para que o paraboloide non corte ó semiespacio U^s basta con que $a\|x\|^2 + bx + c \geq 0$ en $x_s = 0$. Isto no debuxo queda ilustrado con que a línea negra, é dicir, o paraboloide $(s-1)$-dimensional obtido ó intersecar o hiperplano $x_s = 0$ co paraboloide, corta ó hiperplano horizontal ó sumo nun punto. Escribimos esta condición como

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{s-1}^2) + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_{s-1}x_{s-1} + c \geq 0$$

Repetindo os cálculos anteriores para este novo paraboloide $(s-1)$-dimensional, obtemos que a condición é

$$4ac - (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{s-1}^2) \geq 0$$

En resumen, temos a función ϕ definida globalmente neste modelo do espacio hiperbólico se

- $4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 > 0$, ou
- $\frac{-b_s}{2a} \leq 0$ e $4ac - (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_{s-1}^2) \geq 0$

Estas reflexións demostran o lema seguinte:

Lema 2.3.6 *Sexa $M = \mathbb{H}^s \times_f F$ un producto warped localmente conformemente chan, con $\mathbb{H}^s$ denotando o espacio hiperbólico no modelo do semi-espacio de Poincaré. Entón as funcións de deformación f teñen a forma:*

$$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c}{x_s}, \qquad \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^s,\ a, c \in \mathbb{R}$$

para coeficientes $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^s$ verificando unha das dúas condicións

(1) $4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 > 0$

(2) $4ac - (b_1^2 + \cdots + b_{s-1}^2) \geq 0$ *e* $b_s \geq 0$

Coa axuda deste lema, chegamos ó seguinte resultado:

Teorema 2.3.7 *Sexa $\mathbb{H}^s \times_f F$, $s > 1$, un producto warped con fibra completa e simplemente conexa. Entón é localmente conformemente chan se e só se $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c}{x_s}$, $a > 0$, e unha das condicións seguinte é verificada:*

(i) $F = \mathbb{R}$ *con f cumplindo* (1) *ou* (2).

(ii) $F = \mathbb{H}^d$, *con $d > 1$ e* $\|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 - 4ac = -1$.

(iii) $F = \mathbb{R}^d$, *con $d > 1$ e $\|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 - 4ac = 0$, ademais para que f sexa positiva debe verificarse* $4ac - (b_1^2 + \ldots + b_{s-1}^2) \geq 0$ *e* $b_s \geq 0$.

(iv) $F = \mathbb{S}^d$, *con $d > 1$ e $\|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 - 4ac = 1$, ademais para que f sexa positiva debe verificarse* $4ac - (b_1^2 + \ldots + b_{s-1}^2) \geq 0$ *e* $b_s \geq 0$.

Demostración.
A expresión da función obtense a partir do Lema 2.3.6. Polo Teorema 2.1.5 a fibra ten curvatura seccional constante e, por ser completa e simplemente conexa, redúcense as posibilidades a $\mathbb{S}^d$, $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{H}^d$. Ademais, se $dim\, F > 1$, obtéñense as condicións de $K^F = \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 - 4ac$. $\square$

2.3.3 Productos warped localmente conformemente chans con base a esfera

O caso da esfera preséntase moi diferente ó do espacio hiperbólico, pois posúe unha característica, como é a compacidade, que nos permite aproveitar as propiedades que se derivan dela. Sen embargo, neste caso topamos cun obstáculo importante: non temos un cambio conforme global, como tiñamos no espacio hiperbólico, que nos permita reducir o problema ó espacio euclídeo. É por estes motivos que a análise que facemos nesta sección se desmarca das dúas anteriores.

Queremos estudiar cándo un producto warped que ten como base a esfera de dimensión s é localmente conformemente chan. Para iso sabemos que unha condición necesaria é que $(\mathbb{S}^s, \frac{1}{f^2} g_{\mathbb{S}})$ teña curvatura seccional constante. Dado que $(\mathbb{S}^s, g_{\mathbb{S}})$ ten curvatura seccional constante, a función $\frac{1}{f^2}$ ten que verificar a ecuación de Möbius, é dicir, $B(\phi) = B(\frac{1}{f}) = 0$; a cal, tras facer o cambio de variable $u = f = e^{-\phi}$, linearízase para adquiri-la forma

$$H_f = \frac{1}{s} \Delta f \, g \tag{2.2}$$

Consideremos o campo de vectores

$$X = \nabla f$$

definido sobre $\mathbb{S}^s$. Vexamos que así definido, X é un campo de vectores conforme. Para iso, vexamos que $\mathcal{L}_X g = 2\mu g$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) &= g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) \\
&= g(\nabla_Y \nabla u, Z) + g(\nabla_Z \nabla u, Y) \\
&= H_f(Y, Z) + H_f(Z, Y) \\
&= 2H_f(Y, Z)
\end{aligned}$$

e, así, substituindo por (2.2), chegamos a

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = 2H_f(Y, Z) = 2\frac{1}{s} \Delta f g(Y, Z)$$

co que X é un campo de vectores conforme.

Agora ben, para un campo de vectores conforme temos o seguinte lema que dá unha expresión para o laplaciano da diverxencia:

Lema 2.3.8 [35, Lema 4.2] *Sexa Z un campo de vectores conforme nunha variedade n-dimensional (M, g_M). Entón*

$$-\Delta(divZ) = \frac{\tau}{n-1} \, div(Z) + \frac{n}{2(n-1)} Z(\tau) \tag{2.3}$$

Na expresión (2.3) substituimos o campo de vectores Z por $X = \nabla f$, e entón, temos que

$$-\Delta(divX) = \frac{\tau}{s-1} \, div(X) + \frac{s}{2(s-1)} X(\tau)$$

pero para a variedade que nos ocupa, é dicir, a esfera $\mathbb{S}^s$ a curvatura escalar é constante e a expresión anterior queda reducida a

$$\Delta(divX) = \frac{-\tau}{s-1} \, div(X)$$

ou

$$\Delta(div\nabla f) = \frac{-\tau}{s-1} \, div(\nabla f)$$

que vén a ser, dado que $div\nabla f = \Delta f$,

$$\Delta(\Delta f) = \frac{-\tau}{s-1}\,\Delta f \tag{2.4}$$

Esta ecuación pódese interpretar dicindo que Δf é unha autofunción para o autovalor $\lambda_1 = -\frac{\tau}{s-1}$ do laplaciano na esfera. Da ecuación (2.4), aplicando a linearidade do laplaciano, chegamos a

$$\Delta(\Delta f + \frac{\tau}{s-1}\,f) = 0$$

Interpretamos esta ecuación dicindo que a función $\Delta f + \frac{\tau}{s-1}\,f$ é unha función armónica que, por estar definida nunha variedade compacta, ha ser necesariamente constante:

$$\Delta f + \frac{\tau}{s-1}\,f = C \tag{2.5}$$

onde C é tal constante. Se denotamos por ψ unha λ_1-autofunción para o laplaciano na esfera, entón na expresión (2.5) despexamos f para obter

$$f = -\frac{s-1}{\tau}\psi + C$$

Nótese que C debe ser escollida de xeito que a función f sexa positiva.

Observación 2.3.9 O autoespacio asociado ó autovalor $\lambda_1 = -\frac{\tau}{s-1}$ do laplaciano en $\mathbb{S}^s$ está xenerado pola restricción a $\mathbb{S}^s$ dos polinomios homoxéneos de grao un en $\mathbb{R}^{s+1}$ [2, Capítulo 3]. Polo tanto, unha λ_1-autofunción é a restricción a $\mathbb{S}^s$ dun polinomio P do tipo seguinte

$$P(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle, \quad \mathrm{con}\, 0 \neq \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{s+1}$$

Observación 2.3.10 Dada unha transformación de Möbius f na esfera de dimensión s, vimos de ver que é da forma $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = -\frac{s-1}{\tau}\langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + C$, con $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{s+1}$, entón a condición de ser f positiva pódese escribir $0 < -\frac{s-1}{\tau}\langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \frac{\overrightarrow{\mathbf{b}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|} \rangle + C$, ou, equivalentemente $C > \frac{s-1}{\tau}\|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|$.

Como conclusión temos o lema seguinte:

Lema 2.3.11 *Sexa $M = \mathbb{S}^s \times_f F$ un producto warped localmente conformemente chan, entón a función de deformación f é da forma*

$$f = -\frac{s-1}{\tau}\psi + C \tag{2.6}$$

onde ψ é unha autofunción para o laplaciano, $\Delta\psi = -\frac{\tau}{s-1}\psi$, e C é unha constante que fai á función f positiva.

Teorema 2.3.12 *Sexa $\mathbb{S}^s \times_f F$, $s > 1$, un producto warped. Entón é localmente conformemente chan se e só se a función de deformación é da forma $f = -\frac{s-1}{\tau}\psi + C$ (con ψ autofunción para o laplaciano) e, ademais, se $dim\, F > 1$ a fibra F ten curvatura seccional constante negativa.*

Demostración.
A expresión da función vén dada polo Lema 2.3.11. Por outro lado, se consideramos un cambio conforme $(\mathbb{S}^s, \frac{1}{f}g_{\mathbb{S}^s})$, onde f vén dada pola expresión (2.6), a curvatura seccional é constante con valor $K = C^2 - \frac{(s-1)^2}{\tau^2}\|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2$, onde $\psi = P|_{\mathbb{S}^s}$ para $P(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle$ polinomio homoxéneo definido en $\mathbb{R}^{s+1}$. Debemos ter en conta que, dado que f é positiva tense $C > \frac{s-1}{\tau}\|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|$ (Observación 2.3.10) e, polo tanto, a curvatura seccional dun cambio conforme da esfera tamén é positivo: $K = C^2 - \frac{(s-1)^2}{\tau^2}\|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 > 0$. Polo Teorema 2.1.5, se $dim\, F > 1$ isto obriga á fibra a ter curvatura negativa. □

		Fibras			
Base	Función de deformación	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^d$	$\mathbb{S}^d$	$\mathbb{H}^d$
$\mathbb{R}^s$	$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c$	Si	Non	Non	Si
$\mathbb{S}^s$	$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = -\frac{s-1}{\tau}\langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + C$	Si	Non	Non	Si
$\mathbb{H}^s$	$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c}{x_s}$	Si	Si	Si	Si

A táboa amosa as posibles combinacións de bases e fibras.

2.4 Productos warped con base compacta e completa

Adicamos esta sección a analizar a unicidade da función de deformación para productos warped localmente conformemente chans nos que a base presenta algunha propiedade topolóxica como a compacidade, ou xeométrica, como é a completitude xeodésica. Veremos que en ambos casos os posibles productos warped teñen como base un espacio modelo ou un producto warped específico.

Teorema 2.4.1 *Sexa (B, g_B) unha variedade riemanniana compacta sobre a que se definen dúas funcións de deformación f e $\hat{f}$, distintas (i.e., $f \neq c\hat{f}$) de modo que, para unha certa variedade F, os productos warped $B \times_f F$ e $B \times_{\hat{f}} F$ son localmente conformemente chans. Entón $(B, \frac{1}{f^2}g_B)$ é isométrico a unha esfera euclidiana e a función $\hat{f}/f$ ten a forma descrita no Teorema 2.3.11.*

Demostración.
Dado que $B \times_f F$ e $B \times_{\hat{f}} F$ son localmente conformemente chans, sabemos polo Teorema 2.1.5 que as variedades $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ e $(B, \frac{1}{\hat{f}^2} g_B)$ teñen curvatura seccional constante.

Tense, polo tanto, que $id : (B, \frac{1}{f^2} g_B) \longrightarrow (B, \frac{1}{\hat{f}^2} g_B)$ é unha aplicación conforme entre dous espacios compactos de curvatura seccional constante. Repetindo o argumento da sección anterior, chégase a que $\hat{f}/f$ é solución da ecuación linearizada de Möbius en $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$, é dicir, se $dim\, B = s$,

$$H_{\hat{f}/f} = \frac{1}{s} \Delta(\hat{f}/f) g \tag{2.7}$$

e entón $\nabla(\hat{f}/f)$ é un campo de vectores conforme en $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$. Do Lema 2.3.8 obtense a ecuación

$$\Delta \left(\Delta(\hat{f}/f) + \frac{\tau}{s-1} \hat{f}/f \right) = 0 \tag{2.8}$$

de onde

$$\Delta(\hat{f}/f) + \frac{\tau}{s-1} \hat{f}/f = C \tag{2.9}$$

con C constante, por ser unha función armónica definida nunha variedade compacta. Empregando de novo a ecuación de Möbius linearizada e substituindo $\Delta(\hat{f}/f)$ en (2.9), chegamos a

$$\frac{s-1}{\tau} H_{C-\Delta(\hat{f}/f)} - \frac{1}{s} \Delta(\hat{f}/f) g = 0$$

e, finalmente,

$$H_{\Delta(\hat{f}/f)} + \frac{\tau}{s(s-1)} \Delta(\hat{f}/f) g = 0 \tag{2.10}$$

que, para $\tau > 0$, é a *Ecuación de Obata* para $\Delta(\hat{f}/f)$. Dado que $\hat{f}/f$ non é constante, da ecuación (2.9) séguese que tampouco o é $\Delta(\hat{f}/f)$, e entón $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ é isométrica a unha esfera euclidiana [24].

Resta por comprobar que non pode suceder $\tau \leq 0$; farémolo vendo como conduce a unha contradicción. Se $\tau < 0$, entón a existencia dunha solución $\Delta(\hat{f}/f)$ de (2.10) non constante, é característica de productos warped da forma $\mathbb{R} \times_\xi N$ entre as variedades completas (nótese que B é completa, pois é compacta), onde N é unha variedade riemanniana completa e a función de deformación cumple $\xi'' + \frac{\tau}{s(s-1)} \xi = 0$. Pero unha variedade deste tipo non é compacta, co que obtemos a contradicción que buscabamos para $\tau < 0$. Sexa agora $\tau = 0$, entón, por (2.9), $\Delta(\hat{f}/f)$ é constante. Así, volvendo a (2.7), temos

$$H_{f/\hat{f}} = \frac{\alpha}{s} g$$

para unha constante α. Desta ecuación dedúcese que $\hat{f}/f$ é unha función concircular e, por [31, Teorema 2], $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ é isométrica a unha esfera, o que contradí a suposición $\tau = 0$. $\square$

Observación 2.4.2 Nótese que no Teorema 2.4.1 chégase a que $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ é unha esfera, pero tamén o é $(B, \frac{1}{\hat{f}^2} g_B)$, pois bastaría repetir o argumento da demostración intercambiando os papeis de f e $\hat{f}$.

Teorema 2.4.3 *Sexa $M = B \times_f F$, con $s = dim\, B > 1$, un producto warped localmente conformemente chan con $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ completa. Se existe unha función de deformación $\hat{f}$ distinta de f (i.e., $\hat{f} \neq cf$ para calquera constante c) para a que $M = B \times_{\hat{f}} F$ é localmente conformemente chá, entón tense unha das seguintes situacións:*

(i) $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ *é un espacio de curvatura seccional constante completo e simplemente conexo.*

(ii) $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ *é un producto warped $\mathbb{R} \times_{\alpha exp(\alpha t+\beta)} N$, onde (N, g_N) é unha variedade riemanniana chá completa e as funcións f e $\hat{f}$ verifican*

$$\frac{f}{\hat{f}} = exp(\alpha\, t + \beta) + C$$

para certas constantes $\alpha > 0$, β, $C \geq 0$ e con $\alpha^2 = -\frac{\tau}{s(s-1)}$ sendo τ a curvatura escalar de $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$.

Demostración.
Supoñamos que f e $\hat{f}$ son dúas funcións distintas (módulo unha constante) definidas en B que fan os productos warped $(B \times_f F)$ e $(B \times_{\hat{f}} F)$ localmente conformemente chans. Polo Teorema 2.1.5, $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ e $(B, \frac{1}{\hat{f}^2} g_B)$ teñen curvatura seccional constante, polo que id : $(B, \frac{1}{f^2} g_B) \longrightarrow (B, \frac{1}{\hat{f}^2} g_B)$ é unha transformación de Möbius e, empregando o [18, Teorema 27], $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ é un espacio de curvatura seccional constante completo e simplemente conexo, é dicir, isométrico a un espacio modelo, ou ó producto warped $\mathbb{R} \times_{\alpha exp(\alpha t+\beta)} N$, con N variedade completa e ricci-chá de dimensión $(s-1)$; ademais, neste caso a función de deformación é $f/\hat{f} = exp(\alpha t + \beta) + C$. Pódese engadir que, dado que $\mathbb{R} \times_{\alpha exp(\alpha t+\beta)} N$ é localmente conformemente chá, N ten curvatura seccional constante, e así é chá (pois sabiamos que era ricci-chá). Calculando para este producto warped a curvatura seccional, obtense $\tau = -s(s-1)\alpha^2$. □

Observación 2.4.4 Se $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ é un espacio modelo, coma no apartado (i) do teorema anterior, as funcións $f/\hat{f}$ están dadas polos Lemas 2.3.2, 2.3.6 e 2.3.11. Ademais, dado que o argumento é aplicable tanto á variedade $(B, \frac{1}{f^2} g_B)$ como a $(B, \frac{1}{\hat{f}^2} g_B)$, os mesmos teoremas dan a expresión de $\hat{f}/f$.

Base	Función de deformación		Fibra	
	Forma	Condicións	Curvatura	Condicións
$\mathbb{R}^s$	$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c$	$4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 > 0$	$K^F < 0$	$K^F = \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 - 4ac$
	$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = c$	$c > 0$	$K^F = 0$	
$\mathbb{H}^s$	$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c}{x_s}$	$4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 > 0$	$K^F < 0$	$K^F = \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 - 4ac$
		$4ac - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 + b_{is}^2 \geq 0$ e $b_{is} \geq 0$	$K^F > 0$	
			$K^F = 0$	
			$K^F < 0$	
$\mathbb{S}^s$	$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = -\frac{s-1}{\tau}\langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + C$	$C > \frac{s-1}{\tau}\|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|$	$K^F < 0$	$K^F = \frac{(s-1)^2}{\tau^2}\|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 - C^2$

Táboa coas posibles curvaturas e as condicións correspondentes para productos warped localmente conformemente chans con base un espacio modelo.

Capítulo 3

Xeometría de productos multiwarped

No primeiro capítulo discutimos dúas xeneralizacións dos productos warped. A primeira delas, os productos twisted, baseaban a súa xeneralidade na ampliación do dominio das funcións de deformación a toda a variedade. Non obstante, vimos que certas restriccións nas propiedades xeométricas da variedade garanten que o producto twisted é, realmente, un producto warped. A segunda delas son os productos *multiwarped* (tamén aparecen na bibliografía como *multiply warped*), que en vez de modificar a xeometría da fibra, consideran a existencia dun número arbitrario delas, de xeito que o producto ten unha única base onde a xeometría permanece inalterada (como subvariedade do producto a base é totalmente xeodésica), e distintas fibras nas que a métrica se ve modificada por funcións definidas sobre a base (así as fibras son totalmente esféricas como subvariedades do producto).

No Capítulo 1 falabamos dos espacio-tempos cosmolóxicos e estáticos como modelos de productos warped. Xa vimos tamén, na Observación 1.6.1, que os productos multiwarped son unha xeneralización dos productos warped (interésanos agora, das dúas posibles xeneralizacións, a que considera a base como un producto multiwarped e unha única fibra), e aparecen en certas ocasións modelos de espacio-tempos que se axustan á estructura dos productos multiwarped. Adquire especial importancia o espacio de *Schwarzschild*, modelo estático que é solución do *problema gravitacional estático de simetría central.* A súa métrica pódese escribir

$$g_{SC} = \frac{1}{1-\frac{A}{r}}dr^2 + r^2(sen^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) - \left(1 - \frac{A}{r}\right)dt^2$$

en coordenadas espaciais esféricas (r, φ, θ) e onde A depende do corpo que crea o campo gravitatorio. Á vista da expresión da métrica, este espacio é estático, pois podemos consideralo como un producto warped con base o factor con métrica definida positiva; ou ben podemos considerar como base a subvariedade con elemento de línea denotado por dr^2, e dúas fibras, unha de dimensión dous espacial e outra de dimensión un temporal.

3.1 Expresións xeométricas

Nesta sección describiremos mediante unha serie de lemas os tensores xeométricos relacionados coa curvatura destes productos deformados.

Lema 3.1.1 *Sexa* $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ *un producto multiwarped. Entón as compoñentes do tensor curvatura verifican:*

(i) $R_{XY}Z = R^B_{XY}Z$

(ii) $R_{V_iX}Y = \frac{H_{f_i}(X,Y)}{f_i}V_i$

(iii) $R_{XY}V_i = R_{U_iV_i}X = 0$

(iv) $R_{XU_i}V_i = \frac{\langle U_i,V_i\rangle}{f_i}\nabla_X(\nabla f_i)$

(v) $R_{U_iV_i}W_i = R^{F_i}_{U_iV_i}W_i - \frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2}\{\langle U_i, W_i\rangle V_i - \langle V_i, W_i\rangle U_i\}$

para calesquera campos de vectores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$ *e calesquera* $U_i, V_i, W_i \in \mathfrak{X}(F_i)$ *campos de vectores tanxentes a calquera fibra* F_i*. Ademais,*

(vi) $R_{XU_i}U_j = R_{U_iX}U_j = R_{U_iU_j}X = 0, \quad i \neq j$

para calesquera $X \in \mathfrak{X}(B)$ *e* $U_i \in \mathfrak{X}(F_i)$*,* $U_j \in \mathfrak{X}(F_j)$*,* $i \neq j$*. E,*

(vii) $R_{U_iU_j}U_k = 0$

(viii) $R_{U_iV_i}U_j = 0$

(ix) $R_{U_jU_i}V_i = \frac{\langle U_i,V_i\rangle\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_if_j}U_j$

para campos de vectores $U_i \in \mathfrak{X}(F_i)$*,* $U_j \in \mathfrak{X}(F_j)$*,* $U_k \in \mathfrak{X}(F_k)$ *calesquera con* $i \neq j \neq k \neq i$*.*

Demostración.
Debido a que os productos multiwarped xeneralizan os productos warped respetando a xeometría da subvariedade formada pola base e unha calquera das fibras, podemos empregar a Proposición 1.5.3 para probar (*i*), (*ii*), (*iii*), (*iv*) e (*v*) que, como se observa, ofrecen unha expresión análoga ás correspondentes dos productos warped. Probaremos, entón, as expresións (*vi*), (*vii*), (*viii*) e (*ix*). Empregaremos o Lema 1.6.3 e a definición do tensor curvatura. Tense:

(vi)

$$\begin{aligned} R_{XU_i}U_j &= \nabla_{U_i}\nabla_X U_j - \nabla_X\nabla_{U_i}U_j + \nabla_{[X,U_i]}U_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

para calesquera $X \in \mathfrak{X}(B)$ e $U_i \in \mathfrak{X}(F_i)$, $U_j \in \mathfrak{X}(F_j)$, $i \neq j$. Por outro lado,

(vii)

$$R_{U_iU_j}U_k = \nabla_{U_j}\nabla_{U_i}U_k - \nabla_{U_i}\nabla_{U_j}U_k + \nabla_{[U_i,U_j]}U_k = 0$$

(viii)

$$R_{U_iV_i}U_j = \nabla_{V_i}\nabla_{U_i}U_j - \nabla_{U_i}\nabla_{V_i}U_j + \nabla_{[U_i,V_i]}U_j = 0$$

(ix)

$$\begin{aligned} R_{U_jU_i}V_i &= \nabla_{U_i}\nabla_{U_j}V_i - \nabla_{U_j}\nabla_{U_i}V_i + \nabla_{[U_j,U_i]}V_i \\ &= \tfrac{\langle U_i,V_i\rangle}{f_i}\nabla_{U_j}\nabla f_i \\ &= \tfrac{\langle U_i,V_i\rangle\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_if_j}U_j \end{aligned}$$

para $U_i \in \mathfrak{X}(F_i)$, $U_j \in \mathfrak{X}(F_j)$, $U_k \in \mathfrak{X}(F_k)$ campos de vectores calesquera verificando $i \neq j \neq k \neq i$. □

Ata este punto, vimos como as variedades de curvatura seccional constante xogan un papel esencial no estudio de productos riemannianos (tanto directos como deformados: warped e twisted) localmente conformemente chans. Isto tamén sucederá con productos deformados múltiples, polo que as seguintes fórmulas, que expresan as curvaturas seccionais asociadas ós distintos tipos de campos de vectores que compoñen o fibrado tanxente dun producto multiwarped, serán de grande utilidade.

Lema 3.1.2 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $U_i, V_i \in \mathfrak{X}(F_i)$, entón a curvatura seccional verifica:*

(i) $K_{XY} = K^B_{XY}$, *onde K^B_{XY} denota a curvatura seccional con respecto ó plano $\{X, Y\}$ en (B, g_B).*

(ii) $K_{XU_i} = -\frac{H_{f_i}(X,X)}{f_i\|X\|^2}$

(iii) $K_{U_iV_i} = \frac{1}{f_i^2}K^{F_i}_{U_iV_i} - \frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2}$, *onde $K^{F_i}_{U_iV_i}$ denota a curvatura seccional respecto do plano $\{U_i, V_i\}$ en (F_i, g_{F_i})*

(iv) $K_{U_iU_j} = -\frac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_if_j}$

e onde ∇f_i e H_{f_i} denotan, respectivamente, o gradiente e o hessiano da función de deformación f_i.

Demostración.
O resultado séguese de forma inmediata das expresións do lema anterior. Dado que as tres primeiras son análogas ás correspondentes para productos warped, escribiremos con certo detalle e a modo de exemplo a proba de (iv):

$$\begin{aligned} K_{U_iU_j} &= \tfrac{R(U_i,U_j,U_i,U_j)}{\langle U_i,U_i\rangle\langle U_j,U_j\rangle - \langle U_i,U_j\rangle^2} \\ &= -\tfrac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_if_j\langle U_i,U_i\rangle\langle U_j,U_j\rangle}\langle U_i,U_i\rangle\langle U_j,U_j\rangle \\ &= -\tfrac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_if_j} \end{aligned}$$

para campos de vectores $U_i \in \mathfrak{X}(F_i)$ e $U_j \in \mathfrak{X}(F_j)$, con $i \neq j$, e sendo ∇f_i o gradiente da función f_i. $\square$

Unha vez obtida a expresión de cada tipo de compoñente do tensor curvatura, contraemos nos argumentos primeiro e terceiro para obter o tensor de Ricci.

Lema 3.1.3 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped, $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $U_i, V_i \in \mathfrak{X}(F_i)$, e sexa $d_i = dim\, F_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Entón o tensor de Ricci vén dado por:*

(i) $\rho(X,Y) = \rho^B(X,Y) - \sum_{i=1}^k \frac{H_{f_i}(X,Y)}{f_i} d_i$

(ii) $\rho(X,V_i) = 0$, *para todo* $i = 1, \ldots, k$.

(iii) $\rho(U_i,V_i) = \rho^{F_i}(U_i,V_i) - \langle U_i, V_i\rangle \left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + (d_i - 1)\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} + \sum_{j\neq i} d_j \frac{\langle \nabla f_i, \nabla f_j\rangle}{f_i f_j}\right)$ *para todo* $i = 1, \ldots, k$.

(iv) $\rho(V_i, V_j) = 0$, *sempre que* $i \neq j$.

Demostración.
Sexa $s = dim\, B$, e $\{X_1, \ldots, X_s, E_{11}, \ldots, E_{1d_1}, \ldots, E_{k1}, \ldots, E_{kd_k}\}$ unha referencia local ortonormal en M, con $X_r \in \mathfrak{X}(B)$ e $E_{ir} \in \mathfrak{X}(F_i)$. Empregando esta base calculamos as diferentes compoñentes do tensor de Ricci:

(i) Sexan $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$, entón:

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) &= \sum_{r=1}^s R(X,X_r,Y,X_r) + \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^{d_i} R(X,E_{ir},Y,E_{ir}) \\ &= \sum_{r=1}^s R^B(X,X_r,Y,X_r) + \sum_{i=1}^k \sum_{r=1}^{d_i} -\frac{H_{f_i}(X,Y)}{f_i} \\ &= \rho^B(X,Y) - \sum_{i=1}^k \frac{H^{f_i}(X,Y)}{f_i}(d_i)\end{aligned}$$

(ii) Sexan $X \in \mathfrak{X}(B)$ e $V_i \in \mathfrak{X}(F_i)$, entón:

$$\begin{aligned}\rho(X,V_i) &= \sum_{r=1}^s R(X,X_r,V_i,X_r) + \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^{d_l} R(X,E_{lr},V_i,E_{lr}) \\ &= \sum_{r=1}^{d_r} -\langle \frac{\nabla_X(\nabla f_r)}{f_r}, V_r\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

(iii) Sexan $U_i, V_i \in \mathfrak{X}(F_i)$, daquela:

$$\begin{aligned}\rho(U_i,V_i) &= \sum_{r=1}^s R(U_i,X_r,V_i,X_r) + \sum_{l=1}^k \sum_{r=1}^{d_l} R(U_i,E_{lr},V_i,E_{lr}) \\ &= \sum_{r=1}^s -\frac{H^{f_i}(X_r,X_r)}{f_i}\langle U_i,V_i\rangle + \sum_{l\neq i}\sum_{r=1}^{d_l} -\frac{\langle \nabla f_i, \nabla f_r\rangle}{f_i f_r}\langle U_i, V_i\rangle \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n_i}\left(R^{F_i}(U_i,E_{ir},V_i,E_{ir}) - \frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2}\{\langle U_i,V_i\rangle - \langle U_i,E_{ir}\rangle\langle V_i,E_{ir}\rangle\}\right) \\ &= \rho^{F_i}(U_i,V_i) \\ &\quad -\langle U_i,V_i\rangle\left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + (d_i-1)\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} + \sum_{l\neq i}(d_l)\frac{\langle \nabla f_i,\nabla f_l\rangle}{f_i f_l}\right)\end{aligned}$$

(iv) Sexan $V_i \in \mathfrak{X}(F_i)$ e $V_j \in \mathfrak{X}(F_j)$, entón:

$$\begin{aligned} \rho(V_i, V_j) &= \textstyle\sum_{r=1}^{s} R(V_i, X_r, V_j, X_r) + \sum_{l=1}^{k} \sum_{r=1}^{d_l} R(V_i, E_{lr}, V_j, E_{lr}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Contraendo o tensor de Ricci, obtense a curvatura escalar. Para iso servímonos das expresión do lema precedente.

Lema 3.1.4 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped. Entón a curvatura escalar ten a expresión seguinte:*

$$\begin{aligned} \tau &= \tau^B + \textstyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\tau^{F_i}}{f_i^2} \\ &\quad - \textstyle\sum_{i=1}^{k} 2\, d_i \frac{\Delta f_i}{f_i} - \sum_{i=1}^{k} d_i (d_i - 1) \frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} \\ &\quad - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{j \neq i} d_i d_j \frac{\langle \nabla f_i, \nabla f_j \rangle}{f_i f_j} \end{aligned}$$

onde τ^B e τ^{F_i} denotan as curvaturas escalares da base (B, g_B) e das fibras (F_i, g_{F_i}), respectivamente, e $d_i = dim\, F_i$.

Ademais do interese que encerran en si mesmas as fórmulas obtidas nos lemas anteriores, xa que proporcionan un achegamento á xeometría deste tipo de productos, serán fundamentais á hora de escribir o tensor de Weyl dun producto multiwarped localmente conformemente chan, aspecto esencial no desenvolvemento do traballo e, en concreto, do Capítulo 5.

3.2 Completitude de productos multiwarped

A completitude dun producto directo de variedades riemannianas está determinada pola completitude de cada un dos factores, pois cada un deles é unha subvariedade totalmente xeodésica, como xa vimos. Veremos no seguinte resultado que nun producto multiwarped, a pesar de estar a métrica de cada fibra influenciada pola variedade base, tamén a completitude do producto depende da completitude de cada factor, sen que as funcións de deformación xoguen ningún papel neste sentido.

Teorema 3.2.1 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped riemanniano con métrica g. Entón M é completa se e só se (B, g_B),(F_1, g_1),...,(F_k, g_k) son completas.*

Demostración.
De comezo vexamos que se o producto M é completo, entón éo a base e cada unha das fibras. Así, supoñamos M completo. Empregando o teorema de Hopf-Rinow, veremos

a completitude xeodésica analizando sucesións de Cauchy. Sexa $\{p_i\}$ unha sucesión de Cauchy en B. Dado que a métrica en B é a inducida pola proxección na base, escollendo puntos $q_1 \in F_1, \dots, q_k \in F_k$, consideramos a sucesión $\{(p_i, q_1, \dots, q_k)\}$, que é de Cauchy en M e, por ser esta completa, converxe en M e, polo tanto, en B. Para unha fibra F_j sexa $\{q_i\}$ unha sucesión de Cauchy. Tomando $p \in B, q_1 \in F_1, \dots, q_k \in F_k$, tense que $\{(p, q_1, \dots, q_i, \dots, q_k)\}_{i\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy (pois $\langle(p, q_1, \dots, q_{i_\alpha}, \dots, q_k), (p, q_1, \dots, q_{i_\beta}, \dots, q_k)\rangle = f(p)^2 g_j(q_{i_\alpha}, q_{i_\beta}))$ e, por ser M completa, converxente.

Vexamos agora a implicación inversa, é dicir, supoñamos que tanto a base B como as fibras $F_1, \dots, F_k$ son completas. De novo empregamos Hopf-Rinow e, así, sexa unha sucesión de Cauchy $\{(p_i, q_{1i}, \dots, q_{ki})\}$ en M. Posto que $\langle(p_{i_\alpha}, q_{1i_\alpha}, \dots, q_{ki_\alpha}), (p_{i_\beta}, q_{1i_\beta}, \dots, q_{ki_\beta})\rangle \geq g_B(p_{i_\alpha}, p_{i_\beta})$ tamén $\{p_i\}$ é unha sucesión de Cauchy que, por ser B completo por hipótese, converxe. Ademais, xa que esta sucesión en B é converxente, existe un compacto K tal que $\{p_i\} \subset K$, e así cada función f_j verifica $0 < c \leq f_j|_K \leq d$ para certos $c, d \in \mathbb{R}$. Esta acotación permítenos escribir $\langle(p_{i_\alpha}, q_{1i_\alpha}, \dots, q_{ki_\alpha}), (p_{i_\beta}, q_{1i_\beta}, \dots, q_{ki_\beta})\rangle \geq c g_j(q_{ji_\alpha}, q_{ji_\beta})$ e deducir que cada $\{q_{ji}\}$ é de Cauchy. Posto que cada F_j é completa estas sucesións son todas converxentes na correspondente fibra F_j. Agora, a acotación superior anterior das f_j permítenos concluir que a sucesión converxe en M, e así, M é completa. $\square$

Observación 3.2.2 O teorema anterior segue a liña de demostración do Lema 7.40 en [26]. De feito, e facendo uso deste lema, poderiamos dar unha demostración alternativa considerando o producto multiwarped como un producto warped con base outro producto warped, é dicir, agrupando $\left(B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_{k-1}} F_{k-1}\right) \times_{f_k} F_k$. Deste xeito teriamos que o producto é completo se o son os dous factores e, actuando recursivamente, se o son a base e cada unha das fibras, tal e como afirma o Teorema 3.2.1.

3.3 Productos quasi-warped ou multitwisted

Como vimos na sección adicada ós productos deformados do Capítulo 1, existen xeneralizacións dos productos warped, como son os productos twisted, que se basean na ampliación do dominio da función de deformación. Os productos multiwarped, sen embargo, basean a súa xeneralidade na consideración de diversas fibras, neles as funcións de deformación están definidas unicamente sobre a base. Combinando ambas ideas pódense definir outros tipos de variedades, que gozan dunha maior liberdade na estructura da métrica. Exemplos desta índole pódense ver en [32], onde se mostran descomposicións análogas á de de Rham para este tipo de productos.

A continuación definimos os productos quasi-multiwarped e multitwisted, que engloban a tódolos descritos ata agora nesta memoria.

Definición 3.3.1 *Sexan (B, g_B), (F_1, g_{F_1}), ..., (F_k, g_{F_k}) variedades riemannianas. A variedade produto $M = B \times F_1 \times \cdots \times F_k$ dotada coa métrica*

$$g = g_B \oplus f_1^2 g_{F_1} \oplus \cdots \oplus f_k^2 g_{F_k}$$

dise un producto quasi-multiwarped (respectivamente, multiwisted) se as funcións de deformación son da forma $f_i : B \times F_i \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $i \in \{1, \dots, k\}$ (respectivamente, $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $i \in \{1, \dots, k\}$).

Atendento á definición dada, tanto os productos warped como os productos twisted son casos particulares dos productos quasi-multiwarped, que á súa vez se ven xeneralizados polos productos multitwisted.

A métrica dos productos multitwisted presenta unha forma moi flexible, o que se traduce en que un gran número de variedades quedan englobadas neste tipo; pola contra, isto supón que a xeometría non presente características específicas que faciliten o seu estudio. Non obstante, e pese a que os productos quasi-multiwarped conteñen estrictamente ós productos multiwarped, posúen a rixidez necesaria na súa xeometría para que, baixo hipóteses como a conformalidade chá local, se reduzan a aqueles, de modo similar a como sucedía cos productos twisted.

Teorema 3.3.1 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto quasi-multiwarped localmente conformemente chan con $\dim B > 1$, $\dim F_1 > 1, \dots, \dim F_k > 1$. Entón M é un producto multiwarped.*

Demostración.
A demostración segue as mesmas pautas que a do Teorema 1.5.13. Sexan $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $V_i \in \mathfrak{X}(F_i)$, entón, posto que $W = 0$, os termos das igualdades seguintes son nulos:

$$\begin{aligned} W(X,Y,X,V_i) &= R(X,Y,X,V_i) - \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{\langle X,X\rangle\langle Y,V_i\rangle - \langle X,V_i\rangle\langle Y,X\rangle\} \\ &\quad -\tfrac{1}{n-2}\left(\langle X,X\rangle\rho(Y,V_i) + \langle Y,V_i\rangle\rho(X,X)\right. \\ &\qquad \left. -\langle Y,X\rangle\rho(X,V_i) - \langle X,V_i\rangle\rho(Y,X)\right) \\ &= -\tfrac{1}{n-2}\langle X,X\rangle\rho(Y,V_i) \end{aligned}$$

Polo tanto, tense $\rho(Y, V_i) = 0$. Vexamos agora este termo en particular. Como os termos da forma $R(Y, U_j, V_i, U_j)$ son nulos, dada a forma que toma a conexión de Levi-Civita asociada a unha métrica deste tipo, o tensor de Ricci para estas compoñentes é:

$$\rho(Y, V_i) = (1 - d_i) Y V_i(Log\, f_i)$$

onde $d_i = dim\, F_i$.

De xeito análogo a como se fai no Teorema 1.5.11, conclúese que a función f_i separa variables de B e F_i, obténdose así o resultado. □

As hipóteses de dimensionalidade na base e nas fibras son esperables se temos en conta que os productos quasi-multiwarped están xogando un papel similar, en canto a interrelación entre a xeometría da base e as fibras, ó dos productos twisted. Así, pódense obter contraexemplos, coma no Exemplo 1.5.16, sen máis que engadir fibras a este, de modo que sexa unha subvariedade totalmente xeodésica.

Pese á existencia de productos máis xerais que os productos multiwarped, centrarémonos no estudio destes, pois a flexibilidade na estructura dos productos multitwisted dificulta o seu estudio xenérico. Ademais, como mostra o Teorema 3.3.1, outros casos que semellan máis xerais a simple vista non o son realmente, e cubrimos, así, gran parte dos productos múltiples considerados ata o momento.

Capítulo 4

Productos multiwarped con base de dimensión un

Á hora de afrontar o estudio de productos multiwarped, atopamos que a base xoga un papel fundamental, influindo coas súas características nas propiedades xerais do producto. Por este motivo consideramos separadamente o caso en que a base ten dimensión un. Este feito ten unha relevancia transcendental sobre as funcións de deformación, que son dunha única variable, e, consecuentemente, son máis manexables. En concreto, poderemos resolver as ecuacións diferenciais que se nos plantexen, conseguindo, a partir das solucións das mesmas, dar unha caracterización dos productos multiwarped localmente conformemente chans con base 1-dimensional. Por outra banda, ó ter a base dimensión unitaria, esta é esencialmente $\mathbb{R}$ ou un intervalo, o que minimiza os casos a estudiar, en contraposición a capítulos posteriores nos que a natureza da base marcará a xeometría do producto, como veremos.

Na primeira sección daremos unha clasificación dos productos multiwarped con base de dimensión un que teñen curvatura seccional constante. Como xa vimos no Capítulo 2, as variedades de curvatura seccional constante interveñen decisivamente nos productos warped; dado que os productos multiwarped son unha xeneralización deles, tamén neste capítulo tomaremos servicio delas.

É na segunda sección onde se afronta a caracterización propiamente dita, xa mencionada, dos productos multiwarped localmente conformemente chans con base de dimensión un. En primeiro lugar farase dende un punto de vista local, o que supón unha primeira aproximación, para, na seguinte sección, completalo coas restriccións que aparecen ó tratar de estender os resultados a toda a variedade. O Capítulo remata cunha serie de exemplos que cubren cada un dos diferentes casos interesantes que aparecerán.

4.1 Clasificación local de productos multiwarped de curvatura seccional constante e base de dimensión un

Nesta sección clasificaremos os productos multiwarped con base 1-dimensional de curvatura seccional constante. Para iso facemos uso do Lema 3.1.2, interpretando as diferentes expresións que nel aparecen para o caso en que as funcións teñen unha única variable.

O seguinte teorema dá a clasificación pretendida, e na súa proba veremos como inflúen as diferentes condicións do Lema 3.1.2 no resultado.

Teorema 4.1.1 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped con base de dimensión* 1. *Entón M ten curvatura seccional constante K se e só se $k \leq 2$ e ademais se dá unha das seguintes posibilidades:*

(i) Se $K = 0$, entón $M = B \times_{\alpha_1} F_1$ ou $M = B \times_{\alpha_1} F_1 \times_{\alpha_2} F_2$ e as funcións de deformación están dadas por

$$\alpha_i(t) = a_i t + b_i$$

con $a_1 a_2 = 0$ no caso de ter M dúas fibras, e as fibras (F_i, g_i) son de curvatura seccional constante $K^{F_i} = a_i^2$, se $dim\, F_i \geq 2$, $i = 1, 2$.

(ii) Se $K = c^2$, entón $M = B \times_{\beta_1} F_1$ ou $M = B \times_{\beta_1} F_1 \times_{\beta_2} F_2$, as funcións de deformación son

$$\beta_i(t) = a_i\, sen\, ct + b_i \cos ct$$

con $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ de haberen dúas fibras en M, e as fibras (F_i, g_i) teñen curvatura seccional constante $K^{F_i} = c^2(a_i^2 + b_i^2)$, nos casos en que $dim\, F_i \geq 2$, $i = 1, 2$.

(iii) Se $K = -c^2$, entón $M = B \times_{\gamma_1} F_1$ ou $M = B \times_{\gamma_1} F_1 \times_{\gamma_2} F_2$, as funcións de deformación son

$$\gamma_i(t) = a_i\, senh(ct) + b_i\, cosh(ct)$$

con $a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0$ se M ten dúas fibras, e as fibras (F_i, g_i) teñen curvatura seccional constante $K^{F_i} = c^2(a_i^2 - b_i^2)$, nos casos en que $dim\, F_i \geq 2$, $i = 1, 2$.

Demostración.
Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped con $dim\, B = 1$ e curvatura seccional constante K. Entón, as expresións do Lema 3.1.2 dan lugar ás ecuacións:

(ii') $f_i''(t) + K f_i(t) = 0$

(iii') $K^{F_i} = f_i'(t)^2 + K f_i(t)^2$

(iv') $f_i'(t) f_j'(t) + K f_i(t) f_j(t) = 0$

A ecuación (ii') depende unicamente da función de deformación e do valor da curvatura seccional de M. Polo tanto, esta ecuación restrinxe as funcións de deformación ós tres tipos seguintes, segundo K sexa nulo, positivo ou negativo, respectivamente:

$$\begin{aligned} K = 0 : &\quad \alpha_i(t) = a_i\, t + b_i \\ K = c^2 : &\quad \beta_i(t) = a_i\, sen(ct) + b_i\, cos(ct) \\ K = -c^2 : &\quad \gamma_i(t) = a_i\, senh(ct) + b_i\, cosh(ct) \end{aligned}$$

Tomando a ecuación (ii') e multiplicando ambos membros da igualdade por $2f_i'$, obtemos

$$2f_i'(t)f_i''(t) + 2Kf_i(t)f_i'(t) = 0$$

e, integrando con respecto a t, chégase a

$$f_i'(t)^2 + Kf_i(t)^2 = cte$$

onde cte é unha constante arbitraria. Se comparamos esta ecuación con (iii'), vemos que a diferencia estriba no valor da constante de integración, que en (iii') ten o valor fixo K^{F_i}. Atendendo a que esta ecuación expresa a curvatura seccional con respecto ó plano xenerado por dous vectores da mesma fibra, interprétase dicindo que no caso en que $dim\, F_i \geq 2$, mostra a compatibilidade da fibra coa función de deformación. Así, nos tres casos anteriores, e para fibras de dimensión maior que un tense:

$$\begin{aligned} K = 0 : &\quad K^{F_i} = a_i^2 \\ K = c^2 : &\quad K^{F_i} = c^2(a_i^2 + b_i^2) \\ K = -c^2 : &\quad K^{F_i} = c^2(a_i^2 - b_i^2) \end{aligned}$$

As dúas ecuacións anteriores bastarían para o caso en que M fose un producto warped. Sen embargo, se M ten dúas ou máis fibras, entón aparece a ecuación (iv') que corresponde á condición de curvatura seccional K con respecto a un plano xenerado por campos de vectores en distintas fibras. Así, a ecuación (iv') supón unha condición de compatibilidade entre as funcións de deformación, pois, á vista da ecuación, non xoga ningún papel neste sentido o valor da curvatura seccional de cada fibra. Esta esixencia suporá unha cota no número de fibras: supoñamos que temos tres funcións de deformación f_i, f_j e f_k; entón cada dúas verifican a ecuación (iv'), de modo que se ten

$$\frac{f_i'}{f_i} = -c\frac{f_j}{f_j'} = \frac{f_k'}{f_k}$$

e, polo tanto, $f_i'/f_i = f_j'/f_j$, pero dado que $(Log\, f_i)' = f_i'/f_i$, pódese escribir a igualdade anterior como $0 = (Log\, f_i)' - (Log\, f_j)' = (Log\,(f_i/f_j))'$, co que $Log\,(f_i/f_j)$ é constante, e tamén o é, entón, f_i/f_j, o que supón unha contradicción. Supoñendo que temos dúas únicas funcións de deformación, chegamos a:

$$\begin{aligned} K = 0 : &\quad a_ia_j = 0 \\ K = c^2 : &\quad a_ia_j + b_ib_j = 0 \\ K = -c^2 : &\quad a_ia_j - b_ib_j = 0 \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$. Obtendo así tódalas condicións do enunciado. □

Observación 4.1.2 No teorema precedente, ó darmos as solucións da ecuación (ii') para o caso $K = -c^2$, poderiamos ter expresado as solucións do xeito equivalente $f_i(t) = a_i\, exp(ct) + b_i\, exp(-ct)$. Desta maneira obtéñense as condicións

$(\widetilde{iii})$ $K^{F_i} = -4\,c^2\,a_i\,b_i$ para a curvatura das fibras con dimensión maior que un, e

$(\widetilde{iv})$ $a_i b_j + a_j b_i = 0$ como condición de compatibilidade das funcións de deformación.

Non obstante, preferimos para o teorema a forma dada con obxeto de manter a analoxía co caso $K = c^2$.

As táboas seguintes esquematizan os posibles casos que clasifica o Teorema 4.1.1, para un producto multiwarped con base un intervalo real I, unha fibra na primeira táboa e dúas fibras na segunda.

PRODUCTO WARPED $I \times_f F$			
	$K = 0$	$K = c^2$	$K = -c^2$
Función de deformación	$\alpha_i(t) = a\,t + b$	$\beta_i(t) = a\,sen(ct) + b\,cos(ct)$	$\gamma_i(t) = a\,senh(ct) + b\,cosh(ct)$
$dim\,F = 1$			
$dim\,F > 1$	$K^F = a^2$	$K^F = c^2(a^2 + b^2)$	$K^F = c^2(a^2 - b^2)$

Productos warped con base 1-dimensional e curvatura seccional constante.

PRODUCTO BIWARPED $I \times_{f_1} F_1 \times_{f_2} F_2$			
	$K = 0$	$K = c^2$	$K = -c^2$
Función de deformación	$\alpha_i(t) = a_i\,t + b_i$	$\beta_i(t) = a_i\,sen(ct) + b_i\,cos(ct)$	$\gamma_i(t) = a_i\,senh(ct) + b_i cosh(ct)$
$dim\,F_1 = 1$ $dim\,F_2 = 1$	$a_1 a_2 = 0$	$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$	$a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0$
$dim\,F_1 = 1$ $dim\,F_2 > 1$	$a_1 a_2 = 0$ $K^{F_2} = a_2^2$	$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ $K^{F_2} = c^2(a_2^2 + b_2^2)$	$a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0$ $K^{F_2} = c^2(a_2^2 - b_2^2)$
$dim\,F_1 > 1$ $dim\,F_2 > 1$	$a_1 a_2 = 0$ $K^{F_1} = a_1^2$ $K^{F_2} = a_2^2$	$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ $K^{F_1} = c^2(a_1^2 + b_1^2)$ $K^{F_2} = c^2(a_2^2 + b_2^2)$	$a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0$ $K^{F_1} = c^2(a_1^2 - b_1^2)$ $K^{F_2} = c^2(a_2^2 - b_2^2)$

Productos biwarped con base 1-dimensional e curvatura seccional constante.

4.2 Productos multiwarped localmente conformemente chans con base de dimensión un

Nesta sección estudiamos a conformalidade chá en productos multiwarped con base de dimensión 1. Para levar a cabo este obxectivo facemos uso da sección anterior, pois, dado que os productos multiwarped xeneralizan os productos warped e no Capítulo 2 as variedades con curvatura seccional constante xogaron un papel fundamental, tamén aquí o farán.

Teorema 4.2.1 *Sexa $I \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped localmente conformemente chan con funcións de deformación diferentes entre si (módulo un escalar). Entón o número de fibras é $k \leq 3$.*

Demostración.
Escribindo o producto multiwarped da forma seguinte

$$f_k^2 \left(\frac{1}{f_k^2} I \times_{\frac{f_1}{f_k}} F_1 \times \cdots \times_{\frac{f_{k-1}}{f_k}} F_{k-1} \times F_k \right)$$

o novo producto multiwarped

$$\frac{1}{f_k^2} I \times_{\frac{f_1}{f_k}} F_1 \times \cdots \times_{\frac{f_{k-1}}{f_k}} F_{k-1} \times F_k$$

tamén é localmente conformemente chan e, polo tanto, a subvariedade

$$\frac{1}{f_k^2} I \times_{\frac{f_1}{f_k}} F_1 \times \cdots \times_{\frac{f_{k-1}}{f_k}} F_{k-1}$$

ten curvatura seccional constante. Reescalando a métrica en I mediante $\widetilde{t} = \int \frac{1}{f_k(t)} dt$, a anterior variedade escríbese

$$I \times_{\widetilde{f}_1} F_1 \times \cdots \times_{\widetilde{f}_{k-1}} F_{k-1}$$

con $\widetilde{f}_i(\widetilde{t}) = \frac{f_i(\widetilde{t})}{f_k(\widetilde{t})}$, e, dado que ten curvatura seccional constante, empregando o Lema 3.1.2, chégase a que se deben cumplir as seguintes ecuacións

$$K_{V_1 W_2} = -\frac{\widetilde{f}_1' \widetilde{f}_2'}{\widetilde{f}_1 \widetilde{f}_2} = K_{V_1 W_{k-1}} = -\frac{\widetilde{f}_1' \widetilde{f}_{k-1}'}{\widetilde{f}_1 \widetilde{f}_{k-1}}$$

de onde se deduce que $\widetilde{f}_1$ é constante (e, polo tanto, $f_1 = c_{1k} f_k$) ou $\frac{\widetilde{f}_2'}{\widetilde{f}_2} = \cdots = \frac{\widetilde{f}_{k-1}'}{\widetilde{f}_{k-1}}$ e entón $\widetilde{f}_2 = c_{23} \widetilde{f}_3 = \cdots = c_{24} \widetilde{f}_4$. Repetindo o argumento precedente con outras funcións, en caso de ser necesario, conclúese que só pode haber dúas funcións diferentes (módulo unha constante) entre $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \ldots, \widetilde{f}_{k-1}$. E, consecuentemente, só tres entre $f_1, \ldots, f_k$. $\square$

Observación 4.2.2 O Teorema 4.2.1 dedúcese directamente dos Teoremas 2.1.5 e 4.1.1, pois se $I \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ é un producto multiwarped localmente conformemente chan, como en particular é un producto warped con base $I \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_{k-1}} F_{k-1}$, polo Teorema 2.1.5, sacando factor común f_k^2, tense que $\frac{1}{f_k^2} I \times_{f_1/f_k} F_1 \times \cdots \times_{f_{k-1}/f_k} F_{k-1}$ ten curvatura seccional constante. Mais, empregando agora o Teorema 4.1.1 obtense a cota de dúas fibras para esta variedade, e engadindo de novo a fibra F_k téñense as tres fibras como cota superior para un producto multiwarped localmente conformemente chan con base de dimensión un.

Teorema 4.2.3 *Sexa M un producto multiwarped localmente conformemente chan con base 1-dimensional, entón tense unha das tres posibilidades seguintes:*

- *M é un producto warped $M = I \times_f F$ con fibra F de curvatura seccional constante e función de deformación f arbitraria.*
- *M é un producto biwarped $M = I \times_{f_1} F_1 \times_{f_2} F_2$ con fibras F_1, F_2 de curvatura seccional constante, f_2 unha función arbitraria e f_1 dada por*

$$f_1(t) = \xi \left(\int \frac{1}{f_2(t)} dt \right) f_2(t)$$

  onde ξ é unha función de deformación que fai o producto warped $I \times_\xi F_1$ de curvatura seccional constante.
- *$M = I \times_{f_1} F_1 \times_{f_2} F_2 \times_{f_3} F_3$ con F_1, F_2, F_3 de curvatura seccional constante , f_3 unha función de deformación arbitraria e f_1, f_2 dadas por*

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \xi_1 \left(\int \tfrac{1}{f_3(t)} dt \right) f_3(t) \\ f_2(t) &= \xi_2 \left(\int \tfrac{1}{f_3(t)} dt \right) f_3(t) \end{aligned}$$

  onde ξ_1, ξ_2 son funcións que fan o producto biwarped $I \times_{\xi_1} F_1 \times_{\xi_2} F_2$ de curvatura seccional constante.

Demostración.
Polo Teorema 4.2.1, o número de fibras só pode ser 1, 2 ou 3. En calquera dos tres casos as fibras teñen curvatura seccional constante. Ademais, se M é un producto warped entón esta condición, ademais de ser necesaria, é suficiente, como proba o Teorema 2.1.5. Por outro lado, se o número de fibras é maior que un, supoñamos en primeiro lugar que ten dúas fibras, sexa $M = I \times_{f_1} F_1 \times_{f_2} F_2$, entón

$$\frac{1}{f_2^2} dt^2 \oplus \frac{f_1^2}{f_2^2} g_{F_1} \tag{4.1}$$

ten curvatura seccional constante. Pero 4.1 pódese escribir, reparametrizando a coordenada t, como

$$d\tilde{t} \oplus \xi(\tilde{t})^2 g_{F_1} \tag{4.2}$$

onde este é un producto warped con curvatura seccional constante, $\xi(\widetilde{t}) = \frac{f_1(t)}{f_2(t)}$ e $\widetilde{t} = \int \frac{1}{f_2(t)} dt$. Despexando f_1 e substituindo $\widetilde{t}$ polo seu valor obtense a expresión do enunciado.

Se o número de fibras é tres, $M = I \times_{f_1} F_1 \times_{f_2} F_2 \times_{f_3} F_3$, entón

$$\frac{1}{f_3^2} dt^2 \oplus \frac{f_1^2}{f_3^2} g_{F_1} \oplus \frac{f_2^2}{f_3^2} g_{F_2} \tag{4.3}$$

ten curvatura seccional constante, e, mediante unha reparametrización, pódese escribir

$$d\widetilde{t} \oplus \xi_1(\widetilde{t})^2 g_{F_1} \oplus \xi_2(\widetilde{t})^2 g_{F_2} \tag{4.4}$$

con $\xi_1(\widetilde{t}) = \frac{f_1(t)}{f_3(t)}$ e $\xi_2(\widetilde{t}) = \frac{f_2(t)}{f_3(t)}$, e a reparametrización vén dada por $\widetilde{t} = \int \frac{1}{f_3(t)} dt$. Despexando f_1 e f_2 e, de novo, substituindo $\widetilde{t}$ polo seu valor, obtéñense as expresións do enunciado. $\square$

4.3 Estudio global.

O obxectivo desta sección é estudiarmos cándo un producto multiwarped localmente conformemente chan con base de dimensión un, é dicir, do tipo descrito na sección anterior, pode estenderse a toda a variedade. O Teorema 4.2.3 mostra condicións necesarias e suficientes para que un producto multiwarped cumpla esta condición no entorno dun punto. Cómpre agora coñecer cales son as condicións adicionais que limitan a existencia de productos multiwarped definidos globalmente e que posúan esta propiedade.

En xeral, partimos de dous tipos de condicións: unha de tipo xeométrico que restrinxe os factores a variedades de curvatura seccional constante (alo menos as fibras, para a base basta con que sexa conformemente de curvatura seccional constante), e outra de tipo topolóxico, que esixe á función de deformación estar definida en toda a variedade e ser positiva. A primeira delas, a constancia da curvatura seccional, non supón unha gran restricción se partimos de que se satisfacen as condicións localmente, pois se unha variedade ten curvatura seccional constante nun entorno de cada punto, e a tal variedade é conexa, entón terá curvatura seccional constante. Sen embargo, que poidamos definir unha función de deformación localmente sobre cada punto da variedade non asegura que exista unha función definida sobre a variedade. É por isto que a principal dificultade estriba en coñecer cándo a función de deformación pode ser estendida, cumplindo os requisitos de seren función warping, isto é, estrictamente positiva.

Teorema 4.3.1 *Sexa M un producto multiwarped con base $\mathbb{R}$, entón é localmente conformemente chan se e só se cumple unha das tres posibilidades seguintes:*

(i) M é un producto warped $M = \mathbb{R} \times_f F$ con fibra F de curvatura seccional constante e función de deformación f arbitraria (positiva).

(ii) *M é un producto biwarped $M = \mathbb{R} \times_{f_1} F_1 \times_{f_2} F_2$ con fibras de curvatura seccional constante e as funcións de deformación veñen dadas por*

$$f_1 = (\xi \circ f)\frac{1}{f'}, \qquad f_2 = \frac{1}{f'}$$

onde f é unha función estrictamente crecente arbitraria e ξ é unha función de deformación que fai o producto $\mathbb{R} \times_\xi F_1$ de curvatura seccional constante e $\xi \circ f > 0$.

(iii) *$M = \mathbb{R} \times_{f_1} F_1 \times_{f_2} F_2 \times_{f_3} F_3$ con fibras de curvatura seccional constante e as funcións de deformación veñen dadas por*

$$f_1 = (\xi_1 \circ f)\frac{1}{f'}, \qquad f_2 = (\xi_2 \circ f)\frac{1}{f'}, \qquad f_3 = \frac{1}{f'}$$

onde f é unha función estrictamente crecente arbitraria e ξ_1, ξ_2 son funcións de deformación que fan o producto $\mathbb{R} \times_{\xi_1} F_1 \times_{\xi_2} F_2$ de curvatura seccional constante e $\xi_i \circ f > 0$, $i = 1, 2$.

Demostración.
Do Teorema 4.2.3 obtéñense condicións necesarias e suficientes para que un producto multiwarped con base 1-dimensional sexa localmente conformemente chan. A partir del, a extensión da condición de estar definida a función de deformación a toda a variedade é o que engade este teorema. Así, a demostración consiste en ver que as funcións auxiliares f e ξ garanten a positividade de f_1, f_2 e f_3 segundo os casos. Dado que nos casos de dúas e tres fibras unha función vén dada por $\frac{1}{f'}$, aparece a condición de ser f estrictamente crecente, garantindo a positividade de f_2 ou f_3 segundo esteamos con dúas ou tres fibras. Fixada a forma de crecemento de f, só resta asegurar que $\xi \circ f$ ou $\xi_1 \circ f$ e $\xi_2 \circ f$ sexan positivas, e esta é a outra condición que aparece no enunciado do teorema. $\square$

Se ben o teorema anterior caracteriza os productos multiwarped localmente conformemente chans con base $\mathbb{R}$, as condicións que mostra sobre eles non son tanxibles abondo como para intuilas nunha primeira aproximación. A continuación trataremos de interpretalas dando exemplos para diferentes tipos de fibras. Para iso servirémonos da clasificación dada na primeira sección de productos multiwarped con curvatura seccional constante, posto que, a partir dunha variedade de curvatura seccional constante, podemos obter mediante un producto directo con un factor de curvatura oposta, e o consecuente cambio conforme, un producto warped localmente conformemente chan. Como xa comentamos no seu momento, un producto multiwarped pódese entender como un producto warped onde a base é, á súa vez, un producto multiwarped cunha fibra menos; esta consideración xunto coa anterior serán a clave para proporcionar os exemplos que damos a continuación.

Xa que os productos warped foron estudiados previamente, e de feito é coñecida a conformalidade chá en productos do Robertson-Walker (se ben adoitan estudiarse con signatura $(1, n-1)$, para n a dimensión da variedade [6]); pasaremos directamente a productos estrictamente multiwarped, comezando con exemplos de dúas fibras, que diferenciaremos segundo o carácter positivo, negativo ou nulo da curvatura seccional K, a cal representa a curvatura seccional do producto correspondente da primeira sección do capítulo. Da clasificación feita na sección 4.1 obtéñense exemplos de productos multiwarped con curvatura seccional constante de unha e dúas fibras, que tamén son localmente conformemente chans. A continuación daremos exemplos diferentes de dúas fibras, como xa explicamos, e exemplos con tres fibras. Con isto abarcamos tódalas posibilidades con interese, pois sabemos polo Teorema 4.2.1 que non pode haber productos multiwarped localmente conformemente chans con máis de tres fibras.

Para proporcionarmos os exemplos de cada tipo, precisamos unha función que xogue o papel da f no Teorema 4.3.1. Dado que esta f debe ser estrictamente crecente e queremos poder controlar o seu percorrido para facer a composición $\xi \circ f$ positiva, tomaremos $f(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} arctg(t)$ como función base, pois tomando valores no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ verifica $-\frac{\pi}{2} < arctg(t) < \frac{\pi}{2}$. Isto permitiranos controlar a imaxe da función f para que composta con ξ sexa positiva. Non obstante, en moitos dos exemplos será necesario facer pequenas modificacións sobre ela para asergurar esta positividade.

Variedade producto: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- $\underline{K = 0}$

  Condicións:

  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi(t) = a\,t + b$
  3. $\xi \circ f(t) = a\,f(t) + b > 0 \Leftrightarrow f(t) > \frac{-b}{a}$ (se $a > 0$) ou $f(t) < \frac{-b}{a}$ (se $a < 0$)

  Exemplo:

$$\mathbb{R} \times_{(\pi + arctg(t))(1+t^2)} \mathbb{R} \times_{1+t^2} \mathbb{R}$$

- $\underline{K > 0}$

  Condicións:

  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi(t) = a\,sen(c\,t) + b\,cos(c\,t)$
  3. $\xi \circ f(t) = a\,sen(c\,f(t)) + b\,cos(c\,f(t)) > 0$

  Exemplo:

$$\mathbb{R} \times_{(sen(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} arctg(t)) + cos(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} arctg(t)))(1+t^2)} \mathbb{R} \times_{(1+t^2)} \mathbb{R}$$

- $\underline{K < 0}$

  Condicións:

  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi(t) = a\,e^{c\,t} + b\,e^{-c\,t}$
  3. $\xi \circ f(t) = a\,e^{c\,f(t)} + b\,e^{-c\,f(t)} > 0$

Exemplo:

$$\mathbb{R} \times_{(e^{(\pi+arctg(t))}+e^{-(\pi+arctg(t))})(1+t^2)} \mathbb{R} \times_{(1+t^2)} \mathbb{R}$$

Variedade producto: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times F_2$, con $d = dim\, F_2 > 1$.

Neste caso as condicións sobre f e ξ son as mesmas que para o producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pero temos unha nova condición na fibra que ten dimensión maior que un: a curvatura seccional é oposta á do producto warped $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}$.

- $\underline{K = 0}$

  Condicións:

  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi(t) = a\, t + b$
  3. $\xi \circ f(t) = a\, f(t) + b > 0 \Leftrightarrow f(t) > \frac{-b}{a}$ (se $a > 0$) ou $f(t) < \frac{-b}{a}$ (se $a < 0$)
  4. $K^{F_2} = 0$

  Exemplo:

$$\mathbb{R} \times_{(\pi+arctg(t))(1+t^2)} \mathbb{R} \times_{1+t^2} \mathbb{R}^d$$

- $\underline{K > 0}$

  Condicións:

  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi(t) = a\, sen(c\, t) + b\, cos(c\, t)$
  3. $\xi \circ f(t) = a\, sen(c\, f(t)) + b\, cos(c\, f(t)) > 0$
  4. $K^{F_2} < 0$

  Exemplo:

$$\mathbb{R} \times_{(sen(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}arctg(t))+cos(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}arctg(t)))2(1+t^2)} \mathbb{R} \times_{2(1+t^2)} \mathbb{H}^d$$

- $\underline{K < 0}$

  Condicións:

  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi(t) = a\, e^{c\, t} + b\, e^{-c\, t}$
  3. $\xi \circ f(t) = a\, e^{c\, f(t)} + b\, e^{-c\, f(t)} > 0$
  4. $K^{F_2} > 0$

  Exemplo:

$$\mathbb{R} \times_{(e^{(\pi+arctg(t))}+e^{-(\pi+arctg(t))})(1+t^2)} \mathbb{R} \times_{(1+t^2)} \mathbb{S}^d$$

Variedade producto: $\mathbb{R} \times F_1 \times \mathbb{R}$, con $d = dim\, F_1 > 1$.

Aquí aparecen novas condicións sobre a curvatura de F_1.

- $\underline{K = 0}$
  Condicións:
  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi(t) = a\,t + b$
  3. $\xi \circ f(t) = a\,f(t) + b > 0 \Leftrightarrow f(t) > \frac{-b}{a} \quad (\text{se } a > 0) \quad \text{ou} \quad f(t) < \frac{-b}{a} \quad (\text{se } a < 0)$
  4. $K^{F_1} = a^2$

  Exemplo:
  $$\mathbb{R} \times_{(\pi + arctg(t))(1+t^2)} \mathbb{S}^d \times_{1+t^2} \mathbb{R}$$

- $\underline{K > 0}$
  Condicións:
  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi(t) = a\,sen(c\,t) + b\,cos(c\,t)$
  3. $\xi \circ f(t) = a\,sen(c\,f(t)) + b\,cos(c\,f(t)) > 0$
  4. $K^{F_1} = c^2(a^2 + b^2)$

  Exemplo:
  $$\mathbb{R} \times_{(\frac{1}{\sqrt{2}} sen(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} arctg(t)) + \frac{1}{\sqrt{2}} cos(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} arctg(t)))2(1+t^2)} \mathbb{S}^d \times_{2(1+t^2)} \mathbb{R}$$

- $\underline{K < 0}$
  Condicións:
  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi(t) = a\,e^{c\,t} + b\,e^{-c\,t}$
  3. $\xi \circ f(t) = a\,e^{c\,f(t)} + b\,e^{-c\,f(t)} > 0$
  4. $K^{F_1} = -4c^2ab$

  Exemplo:
  $$\mathbb{R} \times_{(\frac{1}{2} e^{(\pi + arctg(t))} + \frac{1}{2} e^{-(\pi + arctg(t))})(1+t^2)} \mathbb{H}^d \times_{(1+t^2)} \mathbb{R}$$

Variedade producto: $\mathbb{R} \times F_1 \times F_2$, con $d_1 = dim\,F_1 > 1$ e $d_2 = dim\,F_2 > 1$.

Cando as dimensións das fibras son maiores que un temos condicións no valor da súa curvatura seccional.

- $\underline{K = 0}$
  Condicións:
  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi(t) = a\,t + b$
  3. $\xi \circ f(t) = a\,f(t) + b > 0 \Leftrightarrow f(t) > \frac{-b}{a} \quad (\text{se } a > 0) \quad \text{ou} \quad f(t) < \frac{-b}{a} \quad (\text{se } a < 0)$
  4. $K^{F_1} = a^2$, $K^{F_2} = 0$

Exemplo:

$$\mathbb{R} \times_{(\pi+arctg(t))(1+t^2)} \mathbb{S}^{d_1} \times_{1+t^2} \mathbb{R}^{d_2}$$

- $\underline{K > 0}$

  Condicións:

  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi(t) = a\, sen(c\, t) + b\, cos(c\, t)$
  3. $\xi \circ f(t) = a\, sen(c\, f(t)) + b\, cos(c\, f(t)) > 0$
  4. $K^{F_1} = c^2(a^2 + b^2)$, $K^{F_2} < 0$

  Exemplo:

$$\mathbb{R} \times_{(\frac{1}{\sqrt{2}} sen(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} arctg(t))+\frac{1}{\sqrt{2}} cos(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} arctg(t)))2(1+t^2)} \mathbb{S}^{d_1} \times_{2(1+t^2)} \mathbb{H}^{d_2}$$

- $\underline{K < 0}$

  Condicións:

  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi(t) = a\, e^{c\, t} + b\, e^{-c\, t}$
  3. $\xi \circ f(t) = a\, e^{c\, f(t)} + b\, e^{-c\, f(t)} > 0$
  4. $K^{F_1} = -4c^2 ab$, $K^{F_2} > 0$

  Exemplo:

$$\mathbb{R} \times_{(\frac{1}{2} e^{(\pi+arctg(t))}+\frac{1}{2} e^{-(\pi+arctg(t))})(1+t^2)} \mathbb{H}^{d_1} \times_{(1+t^2)} \mathbb{S}^{d_2}$$

Con estes exemplos fixemos un percorrido por cada tipo de producto multiwarped, diferenciando fibras con dimensión un ou maior. Sen embargo, como vimos na clasificación dada na Sección 4.1, segundo pasamos de fibras de dimensión un a dimensión maior, aparece unha nova restricción na función de deformación. Así, as funcións válidas para exemplos con fibras de dimensión maior que un, tamén son válidas para fibras de dimensión un, se ben ó contrario non é certo. É por este motivo e polo feito de seren moitos os casos a analizar, que daremos exemplos de productos multiwarped con tres fibras con funcións adecuadas para que fagan estes productos localmente conformemente chans no caso en que a dimensión das fibras sexa maior que un, pero polo dito anteriormente, as mesmas funcións valerán para fibras de dimensión un.

Variedade producto: $\mathbb{R} \times F_1 \times F_2 \times F_3$, con $d_1 = dim\, F_1 > 1$, $d_2 = dim\, F_2 > 1$ e $d_3 = dim\, F_3 > 1$.

- $\underline{K = 0}$

  Condicións:

  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi_1(t) = a_1\, t + b_1$, $\xi_2(t) = b_2$

3. $\xi_1 \circ f(t) = a_1\, f(t) + b_1 > 0$, $\xi_2 \circ f(t) = b_2 > 0$
4. $K^{F_1} = a_1^2$, $K^{F_2} = 0$

Exemplo:

$$\mathbb{R} \times_{(\pi+arctg(t))(1+t^2)} \mathbb{S}^{d_1} \times_{1+t^2} \mathbb{R}^{d_2} \times_{1+t^2} \mathbb{R}^{d_3}$$

Este exemplo é de dúas fibras, pois ó seren necesariamente $\xi_2(t) = b_2$, a segunda e terceira fibras fusiónanse nunha soa segundo o criterio adoptado ó comezo do traballo.

- $K > 0$

  Condicións:

  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi_1(t) = a_1\, sen(c\,t) + b_1\, cos(c\,t)$, $\quad \xi_2(t) = a_2\, sen(c\,t) + b_2\, cos(c\,t)$ con $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$
  3. $\xi_1 \circ f(t) = a_1\, sen(c\, f(t)) + b_1\, cos(c\, f(t)) > 0$, $\xi_2 \circ f(t) = a_2\, sen(c\, f(t)) + b_2\, cos(c\, f(t)) > 0$
  4. $K^{F_1} = c^2(a_1^2 + b_1^2)$, $K^{F_2} = c^2(a_2^2 + b_2^2)$

  Exemplo:

  $$\mathbb{R} \times_{f_1} \mathbb{S}^{d_1} \times_{f_2} \mathbb{S}^{d_2} \times_{f_3} \mathbb{H}^{d_3}$$

  con

  $$\begin{aligned} f_1(t) &= \{\tfrac{1}{\sqrt{2}} sen(\tfrac{3\pi}{8} + \tfrac{1}{4} arctg(t)) + \tfrac{1}{\sqrt{2}} cos(\tfrac{3\pi}{8} + \tfrac{1}{4} arctg(t))\} 4(1+t^2) \\ f_2(t) &= \{\tfrac{1}{\sqrt{2}} sen(\tfrac{3\pi}{8} + \tfrac{1}{4} arctg(t)) - \tfrac{1}{\sqrt{2}} cos(\tfrac{3\pi}{8} + \tfrac{1}{4} arctg(t))\} 4(1+t^2) \\ f_3(t) &= 4(1+t^2) \end{aligned}$$

- $K < 0$

  Condicións:

  1. f estrictamente crecente
  2. $\xi_1(t) = a_1\, e^{c\,t} + b_1\, e^{-c\,t}$, $\quad \xi_2(t) = a_2\, e^{c\,t} + b_2\, e^{-c\,t}$ con $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$
  3. $\xi_1 \circ f(t) = a_1\, e^{c\, f(t)} + b_1\, e^{-c\, f(t)} > 0$, $\xi_2 \circ f(t) = a_2\, e^{c\, f(t)} + b_2\, e^{-c\, f(t)} > 0$
  4. $K^{F_1} = -4c^2 a_1 b_1$, $K^{F_2} = -4c^2 a_2 b_2$

  Exemplo:

  $$\mathbb{R} \times_{f_1} \mathbb{H}^{d_1} \times_{f_2} \mathbb{S}^{d_2} \times_{f_3} \mathbb{S}^{d_3}$$

  con

  $$\begin{aligned} f_1(t) &= (\tfrac{1}{2} e^{(2\pi+arctg(t))} + \tfrac{1}{2} e^{-(2\pi+arctg(t))})(1+t^2) \\ f_2(t) &= (\tfrac{1}{2} e^{(2\pi+arctg(t))} - \tfrac{1}{2} e^{-(2\pi+arctg(t))})(1+t^2) \\ f_3(t) &= 1+t^2 \end{aligned}$$

Capítulo 5

Productos multiwarped con base de dimensión $s \geq 2$. Estudio local.

Comeza neste capítulo o estudio dos productos multiwarped localmente conformemente chans con base de dimensión maior que un. Pese ás analoxías obvias co capítulo anterior, sobre todo no que atinxe a funcións de deformación e fibras do producto, este apartado esixe un tratamento diferente no que asumen papeis fundamentais a curvatura seccional da base e os respectivos cambios conformes dados polas funcións de deformación. Así, neste capítulo adquire unha candente relevancia a Ecuación de Möbius e as súas solucións.

A primeira sección mostra a independencia que entre si teñen as fibras, recalcando que na xeometría do producto multiwarped é a base a que xoga un papel destacado e, por isto, é posible esquecerse das fibras intrascendentes do producto multiwarped, considerando unha subvariedade totalmente xeodésica dada pola base e un número arbitrario das fibras iniciais.

O desenvolvemento posterior do capítulo farase diferenciando, nun primeiro momento, os productos con base chá; dando unha caracterización da conformalidade chá local nestes. O feito de seren as bases dos productos multiwarped totalmente xeodésicas, e polo tanto herdar a xeometría da variedade, fainas tamén localmente conformemente chás ó selo o producto. Este cambio conforme permitirá reducir o problema localmente ó de base chá, e así obter, en xeral, restriccións no número de fibras, que se enfatiza dependendo dos signos das curvaturas destas.

5.1 Reducción no número de fibras

No decorrer desta memoria, atopamos en diversas ocasións que podemos reducir as variedades obxecto de estudio a outras máis sinxelas ou ben, e máis concretamente, descompoñer os productos multiwarped en subvariedades da forma que máis conveña para traballar sobre eles. Nesta liña damos o seguinte teorema, enfocado ó estudio da conformalidade chá en productos multiwarped, pois permitirá considerar productos multiwarped con menos fibras para obter condicións necesarias en posteriores seccións.

Teorema 5.1.1 *Se $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ é localmente conformemente chá, entón $B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_{k-1}} F_{k-1}$ tamén é localmente conformemente chá; en particular, B é localmente conformemente chá. Ademais, cada fibra F_i ten curvatura seccional constante se $\dim F_i > 1$.*

Demostración.
M é localmente conformemente chá se e só se $\frac{1}{f_k^2}B \times_{\frac{f_1}{f_k}} F_1 \times \cdots \times_{\frac{f_{k-1}}{f_k}} F_{k-1}$ ten curvatura seccional constante e, se $dim F_k > 1$, esta é oposta á curvatura seccional de F_k, que á súa vez é constante. En calquera caso, tanto $\frac{1}{f_k^2}B \times_{\frac{f_1}{f_k}} F_1 \times \cdots \times_{\frac{f_{k-1}}{f_k}} F_{k-1}$ coma as fibras $F_1, \ldots, F_k$ teñen curvatura seccional constante, e $B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_{k-1}} F_{k-1}$ é localmente conformemente chá. $\square$

Corolario 5.1.2 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ unha variedade localmente conformemente chá. Entón, cada subvariedade do tipo $B \times_{f_{i_1}} F_{i_1} \times \cdots \times_{f_{i_r}} F_{i_r}$, $\forall\, i_1, \ldots i_r \in \{1, \ldots, k\}$, é localmente conformemente chá.*

Demostración.
O resultado séguese directamente do Teorema 5.1.1, pois a orde das fibras non importa e, así, non importa con que fibra fagamos a reducción anterior. $\square$

5.2 Caracterización dos productos multiwarped con base chá

Como primeiro achegamento ó estudio dos productos multiwarped localmente conformemente chans con base de dimensión maior que un, estudiaremos aqueles que teñan como base unha variedade chá. O motivo de estudiar este tipo de productos multiwarped, ademais do interese intrínseco que estes posúan, está no feito de que calquera producto multiwarped localmente conformemente chan obtense localmente como cambio conforme dun deste tipo.

Posto que nos interesan os productos multiwarped con base chá, obtemos aquí as expresións para o tensor de Weyl dun producto destas características no caso máis xeral de base con curvatura seccional constante, pois o coste é similar con respecto a considerar a base chá, coa ventaxa de gañarmos en xeneralidade.

Lema 5.2.1 *Sexa B unha variedade de curvatura seccional constante e $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped, $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $U_i, V_i \in \mathfrak{X}(F_i)$ campos de vectores* *ortonormais. As compoñentes non nulas do tensor de Weyl son:*

$$\begin{aligned}
W(X,Y,X,Y) &= R^B(X,Y,X,Y) + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \tfrac{1}{n-2}\{\rho(X,X)+\rho(Y,Y)\} \\
W(X,U_i,X,U_i) &= -\tfrac{H_{f_i}(X,X)}{f_i} + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \tfrac{1}{n-2}\{\rho(X,X)+\rho(U_i,U_i)\} \\
W(U_i,U_j,U_i,U_j) &= -\tfrac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_i f_j} + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \tfrac{1}{n-2}\{\rho(U_i,U_i)+\rho(U_j,U_j)\} \\
W(U_i,V_i,U_i,V_i) &= f_i^2 R^{F_i}(U_i,V_i,U_i,V_i) - \tfrac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} \\
&\quad + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \tfrac{1}{n-2}\{\rho(U_i,U_i)+\rho(V_i,V_i)\}
\end{aligned}$$

Demostración.
Nas condicións dadas polo enunciado tense que o tensor de Weyl é nulo se o aplicamos sobre catro campos de vectores ortogonais de xeito que tres deles sexan distintos, pois nese caso teriamos, para $A,B,C \in \mathfrak{X}(M)$ distintos,

$$W(A,B,C,B) = R(A,B,C,B) - \frac{1}{n-2}\rho(A,C)$$

pero dos Lemas 3.1.1 e 3.1.3, tendo en conta que a curvatura seccional da base e das fibras é constante, obtense que $W(A,B,C,B) = 0$ en calquera caso. Por este motivo, basta con calcular as compoñentes dadas no enunciado e estas obtéñense empregando de novo o Lema 3.1.1 na fórmula (1.3). □

Agora, a partir do lema anterior obtemos as expresións para o caso en que a base sexa chá.

Lema 5.2.2 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ sendo B unha variedade chá, $X,Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $U_i,V_i \in \mathfrak{X}(F_i)$ campos de vectores ortonormais. As compoñentes non nulas do tensor de Weyl son:*

$$\begin{aligned}
W(X,Y,X,Y) &= \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \tfrac{1}{n-2}\{\rho(X,X)+\rho(Y,Y)\} \\
W(X,U_i,X,U_i) &= -\tfrac{H_{f_i}(X,X)}{f_i} + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \tfrac{1}{n-2}\{\rho(X,X)+\rho(U_i,U_i)\} \\
W(U_i,U_j,U_i,U_j) &= -\tfrac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_i f_j} + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \tfrac{1}{n-2}\{\rho(U_i,U_i)+\rho(U_j,U_j)\} \\
W(U_i,V_i,U_i,V_i) &= f_i^2 R^{F_i}(U_i,V_i,U_i,V_i) - \tfrac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} \\
&\quad + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \tfrac{1}{n-2}\{\rho(U_i,U_i)+\rho(V_i,V_i)\}
\end{aligned}$$

Continuamos co estudio dos productos multiwarped con base unha variedade chá. As expresións do tensor de Ricci e da curvatura escalar veñen dadas polos seguintes lemas:

Lema 5.2.3 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped con base chá, $X,Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $U_i,V_i \in \mathfrak{X}(F_i)$ campos de vectores ortonormais e $d_i = dim\, F_i$. Entón as compoñentes non nulas do tensor de Ricci veñen dadas por:*

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= -\textstyle\sum_{i=1}^k \frac{H_{f_i}(X,Y)}{f_i} d_i \\
\rho(U_i,V_i) &= \rho^{F_i}(U_i,V_i) - \langle U_i,V_i\rangle \left\{ \frac{\Delta f_i}{f_i} + (d_i-1)\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} + \textstyle\sum_{j\neq i} d_j \frac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_i f_j} \right\}
\end{aligned}$$

Lema 5.2.4 *Sexa* $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ *un producto multiwarped con base chá,* $d_i = dim\, F_i$. *A curvatura escalar ten a expresión seguinte:*

$$\begin{aligned} \tau \;=\; & \textstyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\tau^{F_i}}{f_i^2} \\ & - \textstyle\sum_{i=1}^{k} 2d_i \frac{\Delta f_i}{f_i} - \sum_{i=1}^{k} d_i(d_i-1)\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} \\ & - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{j \neq i} d_i d_j \frac{\langle \nabla f_i, \nabla f_j \rangle}{f_i f_j} \end{aligned}$$

Con toda esta ferramenta achámonos en condicións de afrontar a tarefa de atopar condicións que caractericen os productos multiwarped con base chá localmente conformemente chans. Para comezar, dado que os productos multiwarped son, en particular, productos warped con base outro producto multiwarped,

$$\underbrace{B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_{k-1}} F_{k-1}}_{\text{Base}} \quad \times_{f_k} \quad \underbrace{F_k}_{\text{Fibra}}$$

aplicando o Teorema 2.1.5, obtemos que cada fibra ten curvatura seccional constante, como vimos no Teorema 5.1.1. Ademais, a base deste producto warped deformada pola función correspondente ten curvatura seccional constante, e, en particular, a deformación conforme da base B ten curvatura seccional constante, polo que é einstein, e, así, debe verificar a ecuación de Möbius. Entón, para $s = dim\, B$, teriamos que cada función f_i verifica a ecuación $H_{f_i} = \frac{\Delta f_i}{s}\, g$.

Se un producto multiwarped da forma $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$, con B unha variedade chá, é localmente conformemente chan, polo Corolario 5.1.2, tamén o é $N_i = B \times_{f_i} F_i$, con $n_i = dim\, N_i$, para calquera $i \in \{1, \ldots, k\}$. Así, empregando as expresións dadas nos lemas anteriores, obtemos unha condición necesaria, se $dim\, F_i \geq 2$ (se $dim\, F_1 = 1$ trivialízase), para que un producto multiwarped sexa localmente conformemente chan:

$$\begin{aligned} W^{N_i}(X,Y,X,Y) &= \tfrac{1}{(n_i-1)(n_i-2)}\tau - \tfrac{1}{n_i-2}\left\{\rho(X,X) + \rho(Y,Y)\right\} \\ &= \tfrac{1}{(n_i-1)(n_i-2)}\left\{\tfrac{\tau^{F_i}}{f_i^2} - 2d_i\tfrac{\Delta f_i}{f_i} - d_i(d_i-1)\tfrac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2}\right\} \\ & \quad + \tfrac{2}{n_i-2}\tfrac{\Delta f_i}{s\, f_i} d_i \\ &= \tfrac{d_i(d_i-1)}{(n_i-1)(n_i-2)}\left\{\tfrac{K^{F_i}}{f_i^2} + 2\tfrac{\Delta f_i}{s\, f_i} - \tfrac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2}\right\} \end{aligned}$$

Polo tanto, débese verificar para cada función de deformación e a correspondente fibra con $dim\, F_i \geq 2$ a condición:

$$\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} = \frac{K^{F_i}}{f_i^2} + 2\frac{\Delta f_i}{s\, f_i}$$

Seguindo co mesmo procedemento, reducindo o número de fibras do producto multiwarped, e asumindo que para cada fibra F_i de dimensión maior que un e cada función de deformación f_i se cumple $\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} = \frac{K^{F_i}}{f_i^2} + 2\frac{\Delta f_i}{s\, f_i}$, extraemos unha nova condición para cada dúas fibras a partir da variedade $N_{ij} = B \times_{f_i} F_i \times_{f_j} F_j$, con $n_{ij} = dim\, N_{ij}$, que polo Corolario 5.1.2 sabemos que é localmente conformemente chá:

$$\begin{aligned} W^{N_{ij}}(X,Y,X,Y) &= \tfrac{1}{(n_{ij}-1)(n_{ij}-2)}\tau - \tfrac{1}{n_{ij}-2}\left\{\rho(X,X)+\rho(Y,Y)\right\} \\ &= \tfrac{1}{(n_{ij}-1)(n_{ij}-2)}\left\{\tfrac{\tau^{F_i}}{f_i^2} + \tfrac{\tau^{F_j}}{f_j^2} - 2d_i\tfrac{\Delta f_i}{f_i} - 2d_j\tfrac{\Delta f_j}{f_j} - d_i(d_i-1)\tfrac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2}\right. \\ &\qquad\qquad \left. -d_j(d_j-1)\tfrac{\|\nabla f_j\|^2}{f_j^2} - 2d_id_j\tfrac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_if_j}\right\} \\ &\quad +\tfrac{2}{n_{ij}-2}\tfrac{\Delta f_i}{s\,f_i}d_i + \tfrac{2}{n_{ij}-2}\tfrac{\Delta f_j}{s\,f_j}d_j \\ &= \tfrac{2d_id_j}{(n_{ij}-1)(n_{ij}-2)}\left\{\tfrac{\Delta f_i}{s\,f_i} + \tfrac{\Delta f_j}{s\,f_j} - \tfrac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_if_j}\right\} \end{aligned}$$

Para calquera dimensión nas fibras, obtemos que para cada dúas delas, a seguinte ecuación é condición necesaria:

$$\frac{\Delta f_i}{s\,f_i} + \frac{\Delta f_j}{s\,f_j} = \frac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_if_j}$$

O seguinte teorema mostra como estas condicións necesarias que vimos de obter tamén son suficientes para que o producto multiwarped sexa localmente conformemente chan.

Teorema 5.2.5 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped con base B chá e $s = dim\, B$. Entón M é localmente conformemente chan se e só se:*

(i) $H_{f_i} = \frac{\Delta f_i}{s} g$ para todo $i \in \{1,\ldots,k\}$, i.e., cada función de deformación f_i é unha transformación de Möbius.

(ii) Para todo $i \neq j$, cúmplese a ecuación

$$\frac{\Delta f_i}{s\,f_i} + \frac{\Delta f_j}{s\,f_j} = \frac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_if_j} \tag{5.1}$$

(iii) Se $dim\, F_i \geq 2$, entón F_i ten curvatura seccional constante K^{F_i} e cúmplese

$$\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} = \frac{K^{F_i}}{f_i^2} + 2\frac{\Delta f_i}{s\,f_i} \tag{5.2}$$

Demostración.
Os cálculos previos ó teorema mostran que as condicións son necesarias. Para vermos que tamén son suficientes, calculamos as diferentes compoñentes do tensor de Weyl, pero antes, para facilitar os cálculos, escribimos as expresións das compoñentes do tensor de Ricci e da curvatura escalar asumindo estas condicións.

Para o tensor de Ricci, as compoñentes non nulas son:

$$
\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= -\textstyle\sum_{i=1}^k d_i \frac{H^{f_i}(X,Y)}{f_i} = -\sum_{i=1}^k d_i \frac{\Delta f_i}{s f_i}\langle X,Y\rangle \\
\rho(U_i,V_i) &= \rho^{F_i}(U_i,V_i) - \langle U_i,V_i\rangle \left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + (d_i-1)\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} + \textstyle\sum_{j\neq i} d_j \frac{\langle \nabla f_i, \nabla f_j\rangle}{f_i f_j}\right) \\
&= \rho^{F_i}(U_i,V_i) \\
&\quad -\langle U_i,V_i\rangle \left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + (d_i-1)\frac{2\Delta f_i}{s f_i} + (d_i-1)\frac{K^{F_i}}{f_i^2} + \textstyle\sum_{j\neq i} d_j \frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + \frac{\Delta f_j}{f_j}\right)\right) \\
&= \rho^{F_i}(U_i,V_i) \\
&\quad -\langle U_i,V_i\rangle \left(\frac{s+2(d_i-1)}{s}\frac{\Delta f_i}{f_i} + (d_i-1)\frac{K^{F_i}}{f_i^2} + \textstyle\sum_{j\neq i} d_j \frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + \frac{\Delta f_j}{f_j}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Análogamente, para a curvatura escalar tense:

$$
\begin{aligned}
\tau &= \textstyle\sum_{i=1}^k \frac{\tau^{F_i}}{f_i^2} - \sum_{i=1}^k 2d_i \frac{\Delta f_i}{f_i} - \sum_{i=1}^k d_i(d_i-1)\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} - \sum_{i=1}^k \sum_{j\neq i} d_i d_j \frac{\langle \nabla f_i, \nabla f_j\rangle}{f_i f_j} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^k \frac{\tau^{F_i}}{f_i^2} - \sum_{i=1}^k 2d_i \frac{\Delta f_i}{f_i} - \sum_{i=1}^k d_i(d_i-1)\left(\frac{2\Delta f_i}{s f_i} + \frac{K^{F_i}}{f_i^2}\right) \\
&\quad - \textstyle\sum_{i=1}^k \sum_{j\neq i} d_i d_j \frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + \frac{\Delta f_j}{f_j}\right)
\end{aligned}
$$

Os catro tipos de compoñentes, non nulas *a priori*, do tensor de Weyl son os que desenvolvemos a continuación.

Para calesquera $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ ortonormais:

$$
\begin{aligned}
W(X,Y,X,Y) &= \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n-2}\{\rho(X,X)+\rho(Y,Y)\} \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)}\left\{\textstyle\sum_{i=1}^k \frac{\tau^{F_i}}{f_i^2} - \sum_{i=1}^k 2d_i\frac{\Delta f_i}{f_i} - \sum_{i=1}^k d_i(d_i-1)\left(\frac{2\Delta f_i}{s f_i} + \frac{K^{F_i}}{f_i^2}\right)\right. \\
&\quad \left. - \textstyle\sum_{i=1}^k \sum_{j\neq i} d_i d_j \frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + \frac{\Delta f_j}{f_j}\right)\right\} + \frac{1}{n-2}\textstyle\sum_{i=1}^k d_i \frac{\Delta f_i}{s f_i} \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)}\left\{\textstyle\sum_{i=1}^k \frac{d_i(d_i-1)K^{F_i}}{f_i^2} - \sum_{i=1}^k 2d_i \frac{\Delta f_i}{f_i}\right. \\
&\quad \left. - \textstyle\sum_{i=1}^k d_i(d_i-1)\left(\frac{2\Delta f_i}{s f_i} + \frac{K^{F_i}}{f_i^2}\right) - \sum_{i=1}^k \sum_{j\neq i} d_i d_j \frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + \frac{\Delta f_j}{f_j}\right)\right\} \\
&\quad + \frac{2}{n-2}\textstyle\sum_{i=1}^k d_i \frac{\Delta f_i}{s f_i} \\
&= \frac{1}{s(n-1)(n-2)}\textstyle\sum_{i=1}^k (-2sd_i - 2d_i(d_i-1) + 2(n-1))\frac{\Delta f_i}{f_i} \\
&\quad - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\textstyle\sum_{i=1}^k \sum_{j\neq i} d_i d_j \frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + \frac{\Delta f_j}{f_j}\right) \\
&= \frac{1}{s(n-1)(n-2)} \\
&\qquad \textstyle\sum_{i=1}^k \{-2(n-s-d_i)d_i - 2sd_i - 2d_i(d_i-1) + 2d_i(n-1)\}\frac{\Delta f_i}{f_i} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Sexan $l, m \in \{1, \ldots, k\}$ e $U_l \in \mathfrak{X}(F_l)$, $U_m \in \mathfrak{X}(F_m)$ campos de vectores ortonormais, entón:

$$\begin{aligned}
W(U_l,U_m,U_l,U_m) &= -\frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_l}{f_l}+\frac{\Delta f_m}{f_m}\right)+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}-\frac{1}{n-2}\{\rho(U_i,U_i)+\rho(U_j,U_j)\}\\
&= -\frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_l}{f_l}+\frac{\Delta f_m}{f_m}\right)+\frac{1}{(n-1)(n-2)}\left\{\sum_{i=1}^k\frac{\tau^{F_i}}{f_i^2}-\sum_{i=1}^k 2d_i\frac{\Delta f_i}{f_i}\right.\\
&\qquad -\sum_{i=1}^k d_i(d_i-1)\left(\frac{2\Delta f_i}{sf_i}+\frac{K^{F_i}}{f_i^2}\right)\\
&\qquad \left.-\sum_{i=1}^k\sum_{j\neq i} d_id_j\frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_i}{f_i}+\frac{\Delta f_j}{f_j}\right)\right\}\\
&\quad +\frac{1}{n-2}\left\{\frac{s+2(d_l-1)}{s}\frac{\Delta f_l}{f_l}+\sum_{j\neq l}d_j\frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_l}{f_l}+\frac{\Delta f_j}{f_j}\right)\right.\\
&\qquad \left.+\frac{s+2(d_m-1)}{s}\frac{\Delta f_m}{f_m}+\sum_{j\neq m}d_j\frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_m}{f_m}+\frac{\Delta f_j}{f_j}\right)\right\}\\
&= \frac{-n+2+s+2(d_l-1)+n-2d_l-s}{s(n-2)}\frac{\Delta f_l}{f_l}+\frac{-n+2+s+2(d_m-1)+n-2d_m-s}{s(n-2)}\frac{\Delta f_m}{f_m}\\
&\quad +\frac{1}{s(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^k\{-2sd_i-2d_i(d_i-1)-2d_i(n-d_i-s)\\
&\qquad +d_i(n-1)+d_i(n-1)\}\frac{\Delta f_i}{f_i}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Sexan $X\in\mathfrak{X}(B)$ e $U_l\in\mathfrak{X}(F_l)$ unitarios en $M=B\times_{f_1}F_1\times\cdots\times_{f_k}F_k$. Entón:

$$\begin{aligned}
W(X,U_l,X,U_l) &= -\frac{H_{f_l}(X,X)}{f_l}+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}-\frac{1}{n-2}\{\rho(X,X)+\rho(U_l,U_l)\}\\
&= -\frac{\Delta f_l}{sf_l}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}\left\{-\sum_{i=1}^k 2d_i\frac{\Delta f_i}{f_i}-\sum_{i=1}^k d_i(d_i-1)\frac{2\Delta f_i}{sf_i}\right.\\
&\quad \left.-\sum_{i=1}^k\sum_{j\neq i}d_id_j\frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_i}{f_i}+\frac{\Delta f_j}{f_j}\right)\right\}+\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^k d_i\frac{\Delta f_i}{sf_i}\\
&\quad -\frac{1}{n-2}\left\{\rho^{F_l}(U_l,U_l)-\left(\frac{s+2(d_l-1)}{s}\frac{\Delta f_l}{f_l}+(d_l-1)\frac{K^{F_l}}{f_l^2}\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.+\sum_{j\neq l}d_j\frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_l}{f_l}+\frac{\Delta f_j}{f_j}\right)\right)\right\}\\
&= -(n-2-s-2(d_l-1)-n+2d_l+s-n+1)\frac{\Delta f_l}{sf_l}\\
&\quad +\frac{1}{(n-1)(n-2)s}\sum_{i=1}^k\{-2sd_i-2d_i(d_i-1)-2d_i(n-d_i-s)\\
&\qquad +2d_i(n-1)\}\frac{\Delta f_i}{f_i}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Sexan U_l, V_l campos de vectores ortonormais en M tanxentes á fibra F_l. Entón:

$$
\begin{aligned}
W(U_l,V_l,U_l,V_l) &= f_l^2 R^{F_l}(U_l,V_l,U_l,V_l) \\
&\qquad -\tfrac{\|\nabla f_l\|^2}{f_l^2} + \tfrac{\tau}{(n-1)(n-2)} - \tfrac{1}{n-2}\{\rho(U_l,U_l)+\rho(V_l,V_l)\} \\
&= \tfrac{K^{F_l}}{f_l^2} - \tfrac{2\Delta f_l}{s f_l} - \tfrac{K^{F_i}}{f_i^2} - \tfrac{1}{(n-1)(n-2)}\Big(\textstyle\sum_{i=1}^k \tfrac{\tau^{F_i}}{f_i^2} - \sum_{i=1}^k 2d_i \tfrac{\Delta f_i}{f_i} \\
&\quad - \textstyle\sum_{i=1}^k d_i(d_i-1)\Big(\tfrac{2\Delta f_i}{s f_i} + \tfrac{K^{F_i}}{f_i^2}\Big) - \sum_{i=1}^k \sum_{j\neq i} d_i d_j \tfrac{1}{s}\Big(\tfrac{\Delta f_i}{f_i} + \tfrac{\Delta f_j}{f_j}\Big)\Big) \\
&\quad -\tfrac{1}{n-2}\Big\{\rho^{F_l}(U_l,V_l) - \Big(\tfrac{s+2(d_l-1)}{s}\tfrac{\Delta f_l}{f_l} + (d_l-1)\tfrac{K^{F_l}}{f_l^2} \\
&\qquad\qquad + \textstyle\sum_{j\neq l} d_j \tfrac{1}{s}\Big(\tfrac{\Delta f_l}{f_l} + \tfrac{\Delta f_j}{f_j}\Big)\Big) \\
&\quad +\rho^{F_l}(U_l,V_l) - \Big(\tfrac{s+2(d_l-1)}{s}\tfrac{\Delta f_l}{f_l} + (d_l-1)\tfrac{K^{F_l}}{f_l^2} \\
&\qquad\qquad + \textstyle\sum_{j\neq l} d_j \tfrac{1}{s}\Big(\tfrac{\Delta f_l}{f_l} + \tfrac{\Delta f_j}{f_j}\Big)\Big)\Big\} \\
&= -\tfrac{2\Delta f_l}{s f_l} - \tfrac{1}{(n-1)(n-2)}\Big(-\textstyle\sum_{i=1}^k 2d_i \tfrac{\Delta f_i}{f_i} \\
&\quad - \textstyle\sum_{i=1}^k d_i(d_i-1)\Big(\tfrac{2\Delta f_i}{s f_i}\Big) - \sum_{i=1}^k \sum_{j\neq i} d_i d_j \tfrac{1}{s}\Big(\tfrac{\Delta f_i}{f_i} + \tfrac{\Delta f_j}{f_j}\Big)\Big) \\
&\quad + \tfrac{1}{n-2}\Big\{\tfrac{s+2(d_l-1)}{s}\tfrac{\Delta f_l}{f_l} + \textstyle\sum_{j\neq l} d_j \tfrac{1}{s}\Big(\tfrac{\Delta f_l}{f_l} + \tfrac{\Delta f_j}{f_j}\Big) \\
&\qquad\qquad + \tfrac{s+2(d_l-1)}{s}\tfrac{\Delta f_l}{f_l} + \textstyle\sum_{j\neq l} d_j \tfrac{1}{s}\Big(\tfrac{\Delta f_l}{f_l} + \tfrac{\Delta f_j}{f_j}\Big)\Big\} \\
&= \tfrac{-2(n-2)+2s+4(d_l-1)+2n-4d_l-2s}{s(n-2)}\tfrac{\Delta f_l}{f_l} \\
&\quad + \tfrac{1}{s(n-1)(n-2)}\textstyle\sum_{i=1}^k\{-2sd_i - 2d_i(d_i-1) - 2d_i(n-d_i-s) \\
&\qquad\qquad + 2d_i(n-1)\}\tfrac{\Delta f_i}{f_i} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

5.3 Estructura local de produtos multiwarped localmente conformemente chans

Estudiaremos nesta sección os productos multiwarped que teñen por base un aberto de $\mathbb{R}^s$ coa métrica euclidiana. Por comodidade, convimos en chamarlle U^s, denotando con isto un aberto $U^s \subset \mathbb{R}^s$, coa métrica inducida pola aplicación inclusión.

O Teorema 5.2.5 mostra condicións necesarias e suficientes para que un producto multiwarped con base de curvatura nula sexa localmente conformemente chan. Se tomamos como base $\mathbb{R}^s$, podemos interpretar estas condicións máis concretamente e obtemos así o seguinte:

Teorema 5.3.1 *Sexa $M = U^s \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$, con $U^s \subset \mathbb{R}^s$, un producto multiwarped. Entón M é localmente conformemente chan se e só se:*

(*i*) *As funcións de deformacións f_i verifican a ecuación de Möbius, e polo tanto son da forma*

$$f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle\overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c_i, \quad a_i, c_i \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\mathbf{b_i}} \in \mathbb{R}^s \tag{5.3}$$

(*ii*) *Para cada dúas funcións de deformación verifícase a ecuación seguinte:*

$$\langle\overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{b}}_j\rangle = 2a_ic_j + 2a_jc_i \tag{5.4}$$

onde a métrica $\langle,\rangle$ é a dada pola matriz identidade.

(*iii*) *Para cada fibra F_i con dimensión maior que un, F_i ten curvatura seccional constante, e a correspondente función de deformación f_i cúmple a ecuación:*

$$\|\overrightarrow{\mathbf{b}}_i\|^2 = 4a_ic_i + K^{F_i} \tag{5.5}$$

sendo $\|\cdot\|$ a norma usual en $\mathbb{R}^s$ e K^{F_i} a curvatura seccional da fibra F_i.

Demostración.
A proba deste teorema non é máis que a interpretación do Teorema 5.2.5 no caso en que a base é U^s. O seren as funcións de deformación transformacións de Möbius, polo Lema 1.4.7, equivale a que teñan a expresión

$$f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle\overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c_i$$

para algún $\overrightarrow{\mathbf{b}}_i \in \mathbb{R}^s$ e constantes $a_i, c_i \in \mathbb{R}$.

Coñecida a expresión das función, pódese substituir nas expresións (5.1) e (5.2), para obter, respectivamente,

$$\begin{aligned}\frac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_if_j} - \frac{\Delta f_i}{s\,f_i} - \frac{\Delta f_j}{s\,f_j} &= \frac{\langle 2a_i\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}_i, 2a_j\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}_j\rangle}{f_if_j} - \frac{2sa_i}{sf_i} - \frac{2sa_j}{sf_j}\\ &= \frac{\langle\overrightarrow{\mathbf{b}}_i,\overrightarrow{\mathbf{b}}_j\rangle - 2a_ic_j - 2a_jc_i}{f_if_j}\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} - \frac{K^{F_i}}{f_i^2} - 2\frac{\Delta f_i}{s\,f_i} &= \frac{\|2a_i\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{b}}_i\|^2}{f_i^2} - \frac{K^{F_i}}{f_i^2} - \frac{4sa_i}{sf_i}\\ &= \frac{\|\overrightarrow{\mathbf{b}}_i\|^2 - 4a_ic_i - K^{F_i}}{f_i^2}\end{aligned}$$

Deste modo as ecuacións do Teorema 5.2.5 son equivalentes ás dadas no enunciado. □

Dado que neste caso as funcións de deformación veñen dadas pola expresión (5.3), unha función de deformación deste tipo queda caracterizada polos coeficientes $a_i, c_i \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{\mathbf{b}}_i \in \mathbb{R}^s$. Introducimos pois a notación seguinte: a partir de cada función de deformación definida en $\mathbb{R}^s$, definimos un vector en $\mathbb{R}^{s+2}$ de xeito que, se $f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}})$ ten a expresión $f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle\overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c_i$, o vector que a identifica será $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_s}, a_i, c_i)$.

Neste espacio vectorial, $\mathbb{R}^{s+2}$, definimos un producto escalar expresado pola matriz

$$g_{MER} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

que é a suma directa dos espacios métricos $\mathbb{R}^s$ e $\mathbb{R}^2$ coas métricas

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g_L = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Obsérvese que g_0 é a métrica euclidiana en $\mathbb{R}^s$ e, polo tanto, é unha métrica riemanniana (definida positiva); sen embargo, g_L é unha métrica indefinida de signatura $(1,1)$, é dicir, é unha métrica de Lorentz definida sobre o plano $\mathbb{R}^2$. En definitiva, tense que a métrica g_{MER}, suma das dúas anteriores é unha métrica de Lorentz definida en $\mathbb{R}^{s+2}$, pois ten signatura $(1, s+1)$.

Facendo uso da métrica g_{MER}, pódense expresar as ecuacións (5.5) e (5.4) máis comodamente:

– Ecuación (5.5): $\|\overrightarrow{\mathbf{b}}_i\|^2 = 4a_ic_i + K^{F_i}$ pódese escribir de modo equivalente como

$$g_{MER}(\overrightarrow{\xi}_i, \overrightarrow{\xi}_i) = K^{F_i}$$

– Ecuación (5.4): $\langle \overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{b}}_j \rangle = 2a_ic_j + 2a_jc_i$ transcríbese como

$$g_{MER}(\overrightarrow{\xi}_i, \overrightarrow{\xi}_j) = 0$$

onde as funcións $f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c_i$ están identificadas cos vectores $\overrightarrow{\xi}_i = (b_{i_1}, \dots, b_{i_s}, a_i, c_i)$ en $\mathbb{R}^{s+2}$.

Observación 5.3.2 A notación que vimos de introducir permite reescribir o Teorema 5.2.5 para productos multiwarped con base $U^s \subset \mathbb{R}^s$, $s \geq 2$. *Así as condicións necesarias e suficientes para que $U^s \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ sexa localmente conformemente chan son:*

(i) *As funcións de deformación f_i cumplen a ecuación de Möbius, polo tanto, son da forma*

$$f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c_i$$

(ii) *Para cada dúas funcións de deformación f_i e f_j, tense $f_i \perp f_j$ na métrica g_{MER}.*

(iii) *As fibras F_i que verifiquen $\dim F_i \geq 2$ teñen curvatura seccional constante e, ademais, a función de deformación f_i cumple $\|f_i\|^2_{MER} = K^{F_i}$, onde $\| \cdot \|_{MER}$ é a norma inducida pola métrica g_{MER}.*

Apoiándonos nesta notación, estamos en condicións de probar o seguinte teorema:

Teorema 5.3.3 *Sexa* $M = U^s \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ *un producto multiwarped localmente conformemente chan, entón* $k \leq s+2$*. Ademais, de entre as fibras con dimensión maior que un, pode haber ó sumo unha con curvatura seccional negativa e* $s+1$ *con curvatura seccional positiva; ou, se hai unha fibra chá, entón só pode haber* s *fibras máis, e estas terán curvatura positiva.*

Demostración.
Para obtermos a limitación no número de fibras, servímonos da Observación 5.3.2, e así tense que para cada dúas fibras debe verificarse que as correspondentes funcións de deformación son ortonormais na métrica g_{MER}. Pero dado que g_{MER} é unha métrica definida en $\mathbb{R}^{s+2}$, o maior número de vectores ortonormais entre si é $s+2$, o que supón a restricción que buscabamos. Ademais, dado que g_{MER} ten signatura $(1, s+1)$ e as funcións de deformación das fibras con dimensión maior que un teñen por norma a curvatura da fibra, obtense que o número de fibras con curvatura positiva non pode ser maior que $s+1$, que é o máximo número de vectores espaciais linealmente independentes que podemos atopar en $(\mathbb{R}^{s+2}, g_{MER})$, e, análogamente, o máximo número de fibras con curvatura negativa é un, que corresponde co máximo número de vectores temporais en $(\mathbb{R}^{s+2}, g_{MER})$ linealmente independentes.

Non obstante, se un vector é nulo en $(\mathbb{R}^{s+2}, g_{MER})$, non pode haber no seu subespacio ortogonal máis que s vectores de xeito que todos eles sexan linealmente independentes, ademais todos eles serán espaciais. Polo tanto, dada a correspondencia do carácter dos vectores coas condicións sobre as funcións de deformación e a curvatura das fibras, estas s fibras, de existeren, terán curvatura seccional positiva. □

Observación 5.3.4 O teorema anterior establece unha cota para o número de fibras dun producto multiwarped localmente conformemente chan, pero non establece en principio que esa sexa a mellor das cotas, é dicir, que poida realmente haber unha variedade destas características con base de dimensión s e con $s+2$ fibras. Para probarmos que realmente é así, consideremos o seguinte exemplo xenérico: para o producto multiwarped $U^s \times_{f_1} \mathbb{R} \times \cdots \times_{f_{s+2}} \mathbb{R}$ definimos as funcións de deformación $f_1, \ldots, f_{s+2}$ sobre $U^s \subset \mathbb{R}^s$ na variable $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s$:

$$\begin{array}{rclcrcl}
\overrightarrow{\xi}_1 & = & (1,0,\ldots,0,0,0) & \leftrightarrow & f_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & x_1 \\
\overrightarrow{\xi}_2 & = & (0,1,\ldots,0,0,0) & \leftrightarrow & f_2(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & x_2 \\
\vdots & = & \vdots & \leftrightarrow & \vdots & = & \vdots \\
\overrightarrow{\xi}_s & = & (0,0,\ldots,1,0,0) & \leftrightarrow & f_s(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & x_s \\
\overrightarrow{\xi}_{s+1} & = & (0,0,\ldots,0,1,1) & \leftrightarrow & f_{s+1}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & \|x\|^2+1 \\
\overrightarrow{\xi}_{s+2} & = & (0,0,\ldots,0,1,-1) & \leftrightarrow & f_{s+2}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & \|x\|^2-1
\end{array}$$

estas funcións defínense nun aberto $U^s \subset \mathbb{R}^s$ de forma que todas elas sexan positivas, por exemplo, $U^s = \{\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s : x_i > 1, \forall i = 1, \ldots, s\}$.

Trataremos a continuación os productos multiwarped localmente conformemente chans con base de dimensión $s \geq 2$ arbitraria. Neste contexto, a primeira restricción que atopamos sobre a base para que o producto multiwarped sexa localmente conformemente chan é a dada polo Teorema 5.1.1: que a propia base sexa localmente conformemente chan.

Teorema 5.3.5 *Sexa $M = B \times_{h_1} F_1 \times \cdots \times_{h_k} F_k$ un producto multiwarped con $dim\, B = s$. Entón M é localmente conformemente chan se e só se as fibras teñen curvatura seccional constante e localmente as funcións de deformación verifican*

$$h_i = f_i \cdot \varphi$$

onde as funcións f_i veñen dadas polo Teorema 5.3.1 e φ é un factor conforme definido nun aberto $V \subset B$ de tal forma que $g_B = \varphi^2 g_{\mathbb{R}^s}$.

Demostración.
Dado que M é localmente conformemente chá, tamén a base B é localmente conformemente chá. Pero isto equivale a que exista unha función φ tal que $g_B = \varphi^2 g_{\mathbb{R}^s}$, sendo $g_{\mathbb{R}^s}$ a métrica euclidiana en $\mathbb{R}^s$ para $s = dim\, B$. Sacando factor común φ^2 na expresión da métrica de M, esta pódese escribir como

$$\varphi^2 \left(U^s \times_{\frac{h_1}{\varphi}} F_1 \times \cdots \times_{\frac{h_k}{\varphi}} F_k \right)$$

para un certo $U^s \subset \mathbb{R}^s$, pero, dado que $U^s \times_{\frac{h_1}{\varphi}} F_1 \times \cdots \times_{\frac{h_k}{\varphi}} F_k$ é un cambio conforme de M, esta será localmente conformemente chá se e só se o é aquela. Polo tanto, para dar as condicións que caracterizan a conformalidade chá de M, centrarémonos no producto multiwarped $U^s \times_{\frac{h_1}{\varphi}} F_1 \times \cdots \times_{\frac{h_k}{\varphi}} F_k$, que ten como base un aberto euclidiano e foi obxecto de estudio anteriormente nesta mesma sección. Así, facendo uso do Teorema 5.3.1, obtemos as condicións dadas no enunciado para as funcións de deformación h_i que son da forma $f_i \cdot \varphi$. □

A consideración feita na demostración precedente, isto é, o sacarmos factor común φ^2 sendo φ o cambio conforme local da base co espacio euclidiano, e estudiar a variedade así obtida con base un aberto de $\mathbb{R}^s$, permítenos adaptar os teoremas anteriores ó caso en que a base do producto multiwarped non é chá, obtendo de modo similar cotas para o número de fibras. Tense, polo tanto, o seguinte resultado:

Corolario 5.3.6 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un poducto multiwarped localmente conformemente chan, con $s = dim\, B$. Entón $k \leq s + 2$. Ademais, de entre as fibras con dimensión maior que un, pode haber ó sumo unha con curvatura negativa e $s + 1$ con curvatura positiva; ou, se hai unha fibra chá, entón só pode haber s fibras máis, e estas terán curvatura positiva.*

Demostración.
Repetindo o argumento anterior, sexa $g_B = \varphi^2\, g_{\mathbb{R}^s}$, entón, sacando factor común φ^2 en M, temos que $U^s \times_{\frac{f_1}{\varphi}} F_1 \times \cdots \times_{\frac{f_k}{\varphi}} F_k$, $U^s \subset \mathbb{R}^s$, é localmente conformemente chá. Mais, dado que non fixemos ningún cambio nas fibras do producto multiwarped, as condicións que sobre estas impón o Teorema 5.3.3 permanecen inalteradas, e o corolario é inmediato. □

Observación 5.3.7 No Teorema 4.3.1 probamos que o maior número de fibras que admite un producto multiwarped localmente conformemente chan con base undimensional é tres. Atendendo ó Corolario 5.3.6, o número máximo de fibras que pode ter un producto multiwarped localmente conformemente chan é $dim\, B + 2$, onde B é a base do producto mutiwarped. Pese a que o modo de achegamento ó estudio dos dous casos: base undimensional e base de dimensión maior que un, son sensiblemente diferentes, o resultado obtido é que en ambos a cota das fibras é $dim\, B + 2$.

Capítulo 6

Productos multiwarped con base de dimensión $s \geq 2$. Estudio global.

Neste capítulo continuamos o estudio dos productos multiwarped localmente conformemente chans con base de dimensión superior a un, que comezamos no capítulo anterior. Daquela fixemos un achegamento local co que obtivemos fortes restriccións, atopando cotas para o número de fibras. Agora trataremos os productos globalmente, analizando a conformalidade chá local segundo a base sexa unha variedade compacta (onde adquire especial importancia a esfera, que xorde de modo natural), ou outro espacio modelo, é dicir, $\mathbb{R}^s$ ou $\mathbb{H}^s$.

Para desenvolver esta tarefa servirémonos do resultado dado na primeira sección, que permite relacionar a curvatura dos cambios conformes da base mediante as funcións de deformación. Así, obteremos moitas restriccións que permitirán, no caso de variedades compactas e o espacio euclidiano, mellorar a cota dada anteriormente para o número de fibras. Concretamente veremos que os productos multiwarped localmente conformemente chans con base compacta de dimensión dous ou maior son, de feito, productos warped. Similar situación atoparemos ó tratarmos con bases euclidianas. Sen embargo, e a pesar das similitudes formais entre o espacio hiperbólico e o euclidiano (pois un obtense conformemente de modo global a partir do outro), o comportamento que presenta o semiespacio de Poincaré é totalmente diferente, xa que con el como base pódese alcanzar o máximo número de fibras, é dicir, veremos un exemplo dun producto multiwarped completo, localmente conformemente chan, con base $\mathbb{H}^s$ e $s + 2$ fibras.

6.1 Algúns resultados sobre productos multiwarped localmente conformemente chans

O seguinte teorema será de grande utilidade para estudiar os productos multiwarped con base compacta ou euclidiana.

Teorema 6.1.1 *Se* $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ *é un producto multiwarped localmente conformemente chan, entón, para calesquera* $i, j \in \{1, \ldots, k\}$*, os productos warped* ${}^iP_j = \frac{1}{f_i^2} g_B \oplus \frac{f_j^2}{f_i^2} g_j$ *e* ${}^jP_i = \frac{1}{f_j^2} g_B \oplus \frac{f_i^2}{f_j^2} g_i$ *teñen curvatura seccional constante* $K^{{}^iP_j}, K^{{}^jP_i}$*, respectivamente, verificando a seguinte fórmula*

$$-K^{{}^iP_j} f_j^2 - K^{{}^jP_i} f_i^2 = \|f_j \nabla f_i - f_i \nabla f_j\|^2 \tag{6.1}$$

Demostración.
Consideramos o producto biwarped $N = B \times_{f_i} F_i \times_{f_j} F_j$ para certos $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ con $i \neq j$ que, polo Corolario 5.1.2, tamén é localmente conformemente chan. Este producto N pódese escribir dos dous xeitos seguintes:

$$f_j^2 \left(\frac{1}{f_j^2} g_B \oplus \frac{f_i^2}{f_j^2} g_i \oplus g_j \right) \tag{6.2}$$

$$f_i^2 \left(\frac{1}{f_i^2} g_B \oplus g_i \oplus \frac{f_j^2}{f_i^2} g_j \right) \tag{6.3}$$

así, a expresión (6.2) mostra que N está na clase conforme do producto directo de $(B \times F_i, \frac{1}{f_j^2} g_B \oplus \frac{f_i^2}{f_j^2} g_i)$ e (F_j, g_j), e a expresión (6.3) amosa como a mesma variedade N está tamén na clase conforme do producto directo de $(B \times F_j, \frac{1}{f_i^2} g_B \oplus \frac{f_j^2}{f_i^2} g_j)$ e (F_i, g_i).

Polo Teorema 2.1.4 séguese que ${}^iP_j$ e ${}^jP_i$ teñen curvatura seccional constante, $K^{{}^iP_j}$ e $K^{{}^jP_i}$, respectivamente.

No que segue desta proba, adoptamos a notación: $g^{(i)} = \frac{1}{f_i^2} g_B$, $g^{(j)} = \frac{1}{f_j^2} g_B$ e $H^i = H^{g^{(i)}}$ e $H^j = H^{g^{(j)}}$, os hessianos para as métricas conformes correspondentes.

Do Lema 3.1.2 chégase á seguinte expresión para a curvatura seccional de ${}^iP_j = \frac{1}{f_i^2} g_B \oplus \frac{f_j^2}{f_i^2} g_j$ relativa a X e V, campos de vectores na base e na fibra, respectivamente.

$$K_{XV}^{{}^iP_j} = -\frac{H^i_{\frac{f_j}{f_i}}(X, X)}{\frac{f_j}{f_i} g^{(i)}(X, X)}$$

Polarizando, obtense a seguinte igualdade

$$-K^{{}^iP_j} \frac{f_j}{f_i} g^{(i)} = H^i_{\frac{f_j}{f_i}}$$

Agora, $H^i_{\frac{f_j}{f_i}}$ exprésase en termos do hessiano de B, denotado por H, e das funcións f_i e f_j. Do Lema 1.4.2 obtense:

$$\begin{aligned} H^i_{\frac{f_j}{f_i}}(X,Y) &= \tfrac{1}{f_i}H_{f_j}(X,Y) - \tfrac{f_j}{f_i^2}H_{f_i}(X,Y) \\ &\quad -\tfrac{1}{f_i^2}\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle\langle X,Y\rangle + \tfrac{f_j}{f_i^3}\langle\nabla f_i,\nabla f_i\rangle\langle X,Y\rangle \end{aligned}$$

Polo que, finalmente,

$$-K^{{}^iP_j}\frac{f_j}{f_i}g = f_iH_{f_j} - f_jH_{f_i} - \langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle g + \frac{f_j}{f_i}\langle\nabla f_i,\nabla f_i\rangle g \tag{6.4}$$

e, de xeito similar, para a variedade ${}^jP_i$, tense

$$-K^{{}^jP_i}\frac{f_i}{f_j}g = f_jH_{f_i} - f_iH_{f_j} - \langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle g + \frac{f_i}{f_j}\langle\nabla f_j,\nabla f_j\rangle g \tag{6.5}$$

Sumando as ecuacións (6.4) e (6.5), obtense a seguinte

$$-K^{{}^iP_j}\frac{f_j}{f_j} - K^{{}^jP_i}\frac{f_i}{f_j} = -\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle + \frac{f_j}{f_i}\langle\nabla f_i,\nabla f_i\rangle - \langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle + \frac{f_i}{f_j}\langle\nabla f_j,\nabla f_j\rangle$$

que dá lugar á que segue

$$-K^{{}^iP_j}f_j^2 - K^{{}^jP_i}f_i^2 = \|f_j\nabla f_i - f_i\nabla f_j\|^2 \tag{6.6}$$

□

O seguinte Corolario está englobado polo Corolario 5.3.3 dado no capítulo anterior, sen embargo, presentámolo aquí de novo cunha demostración alternativa baseada no Teorema 6.1.1.

Corolario 6.1.2 *Sexa $M = B\times_{f_1}F_1\times\cdots\times_{f_k}F_k$ un producto multiwarped localmente conformemente chan. Entón, todas as fibras con dimensión maior que un teñen curvatura seccional constante positiva excepto, ó sumo, unha delas.*

Demostración.
Polo Teorema 5.1.1 tódalas fibras teñen curvatura seccional constante e, polo Teorema 2.1.5, empregando a notación do teorema anterior, $K^{F_i} = -K^{{}^iP_j}$, onde F_i é unha fibra con dimensión maior que un. Entón, do Teorema 6.1.1 séguese a seguinte fórmula

$$K^{F_i}f_j^2 + K^{F_j}f_i^2 = \|f_j\nabla f_i - f_i\nabla f_j\|^2 \tag{6.7}$$

Dado que o lado dereito da igualdade é non negativo, K^{F_i} e K^{F_j} non poden ser os dous negativos. Se $K^{F_i} = K^{F_j} = 0$, entón $\|f_j\nabla f_i - f_i\nabla f_j\| = 0$, e polo tanto

$$\frac{\nabla f_i}{f_i} = \frac{\nabla f_j}{f_j}$$

pero isto significa que $\nabla(Log f_i) = \nabla(Log f_j)$ ou, equivalentemente, $\nabla(Log\frac{f_i}{f_j}) = 0$, entón $Log\frac{f_i}{f_j}$ é constante e tamén o é $\frac{f_i}{f_j}$; pero isto non é posible tendo asumido o criterio que adoptamos inicialmente sobre as funcións de deformación.

Temos, polo tanto, que dadas dúas fibras, unha delas ten curvatura estrictamente positiva. Se a outra ten curvatura negativa ou nula, repetindo o argumento anterior coas outras fibras (con dimensión maior que un), chegamos a que esa será a única con curvatura non positiva. □

6.2 Productos multiwarped con base compacta

O principal resultado desta sección amosa a imposibilidade de construír productos multiwarped localmente conformemente chans con máis dunha fibra se a base é compacta.

Teorema 6.2.1 *Sexa B unha variedade compacta de dimensión $s \geq 2$. Se $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ é un producto multiwarped localmente conformemente chan, entón $k = 1$, i.e., os únicos productos multiwarped localmente conformemente chans con base compacta son productos warped.*

Demostración.
Supóñase $k > 1$. Collendo f_i, f_j con $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, a variedade

$$\frac{1}{f_i^2} B \times_{\frac{f_1}{f_i}} F_1 \times \cdots \widehat{F_i} \cdots \times_{\frac{f_k}{f_i}} F_k$$

ten curvatura seccional constante, e, polo tanto, tamén $\frac{1}{f_i^2}B$ ten curvatura constante, que é compacta por hipótese. Análogamente,

$$\frac{1}{f_j^2} B \times_{\frac{f_1}{f_j}} F_1 \times \cdots \widehat{F_j} \cdots \times_{\frac{f_k}{f_j}} F_k$$

e $\frac{1}{f_j^2}B$ teñen curvatura seccional constante. Pero $\frac{1}{f_j^2}B$ é unha transformación conforme mediante $\frac{f_i^2}{f_j^2}$ de $\frac{1}{f_i^2}B$ e, por [18] (véxase tamén [24] e [31]), $\frac{1}{f_i^2}B$ e $\frac{1}{f_j^2}B$ teñen que ser esferas euclidianas de un certo radio.

Por outro lado, da ecuación (6.1) no Teorema 6.1.1, $\frac{1}{f_i^2}B$ ou $\frac{1}{f_j^2}B$ ten curvatura seccional constante negativa, mais isto é unha contradicción co feito de seren ambalas dúas esferas euclidianas e, consecuentemente, de curvatura positiva. □

Observación 6.2.2 O estudio dos productos warped localmente conformemente chans con base a esfera $\mathbb{S}^s$ foi desenvolvido ó longo do Capítulo 2. Nótese que en virtude do Teorema de Kuiper, a única variedade compacta simplemente conexa que pode ser base dun producto warped localmente conformemente chan é a esfera euclidiana [20]. Sen embargo, debilitando a condición de ser simplemente conexa, é sinxelo construir exemplos como segue:

Considerando o toro chan $\mathbb{T}^s$, sexa f unha función positiva definida sobre $\mathbb{T}^s$. Entón o producto warped

$$\left(\mathbb{T}^s, f^2 g_{\mathbb{T}^s}\right) \times_f \left(\mathbb{R}^d, g_{\mathbb{R}^d}\right)$$

é localmente conformemente chan.

6.3 Productos multiwarped con base completa e simplemente conexa de curvatura seccional constante

Nesta sección estudiamos os productos multiwarped localmente conformemente chans con base completa. Como vimos facendo ó longo do traballo, restrinxímonos ó caso no que a base ten curvatura seccional constante. Ademais, supoñendo que B é un espacio modelo ($B = \mathbb{R}^s$ ou $B = \mathbb{H}^s$) téñense situacións completamente opostas, como veremos.

Teorema 6.3.1 *Sexa $s > 1$, o producto multiwarped $M = \mathbb{R}^s \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ é localmente conformemente chan se e só se $k = 1$ e a función de deformación f é da forma seguinte*

$$f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c$$

para uns certos escalares $a, c > 0$ e un vector $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^s$, verificando $\|\overrightarrow{\mathbf{b}}\|^2 - 4ac = K^{F_i}$ se $dim\, F_i > 1$.

Demostración.
Supoñamos que o número de fibras é $k > 1$ para obter unha contradicción. Sexan f_1, f_2 dúas funcións de deformación diferentes. Do Teorema 6.1.1 e a ecuación (6.1), alo menos unha entre k_1 e k_2 é estrictamente positiva, onde $-k_1$ e $-k_2$ son as curvaturas de $\frac{1}{f_1^2} g_{\mathbb{R}^s}$ e $\frac{1}{f_2^2} g_{\mathbb{R}^s}$, respectivamente. Dado que son transformacións de Möbius en $\mathbb{R}^s$, son da forma $f_i(\overrightarrow{x}) = a_i\|\overrightarrow{x}\|^2 + \langle \overrightarrow{b}_i, \overrightarrow{x}\rangle + c_i$, $i = 1, 2$, e a curvatura seccional $-k_1, -k_2$ tras a transformación conforme é estrictamente positiva como vimos no Capítulo 2 (Lema 2.3.2 e Teorema 2.3.3). Pero isto supón unha contradicción que provén do feito de supoñer $k > 1$. Entón M é, de feito, un producto warped, e a función de deformación ten a forma $f(\overrightarrow{x}) = a\|\overrightarrow{x}\|^2 + \langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}\rangle + c$, $a, c > 0$, verificando a condición (5.5) se $dim\, F_i > 1$.□

Observación 6.3.2 No resultado anterior facemos uso do Teorema 6.1.1 para deducir que k_1 ou k_2 é positivo. No caso en que tódalas fibras teñan dimensión maior que un non é necesario recurrir a el, pois o Teorema 5.3.3 garante que como moito unha de k_1, k_2 é negativa ou nula, co que alo menos unha é positiva, de onde, de novo polo Lema 2.3.2, acádase unha contradicción.

No capítulo anterior atopamos unha cota superior para o número de fibras que pode ter un producto multiwarped localmente conformemente chan. Ademais, para atoparmos esta cota traballamos dende un punto de vista local, é dicir, que non podemos atopar ningunha variedade cumplindo que no entorno dun punto verifique a condición de ser conformemente chá e ter máis de $s+2$ fibras (tendo como base do producto multiwarped unha variedade de dimensión s). Acabamos de ver tamén no presente capítulo, que se a base é unha variedade compacta ou o espacio euclidiano $\mathbb{R}^s$ non pode haber máis dunha fibra se o producto multiwarped é localmente conformemente chan, independentemente da dimensión da base. Dos tres espacios modelos, $\mathbb{R}^s$, $\mathbb{H}^s$ e $\mathbb{S}^s$, resta por ver como se comporta o espacio hiperbólico como base dun producto tal.

Sabemos, ademais, que se a base ten dimensión s de ningún xeito pode ter máis de $s+2$ fibras, pero veremos no seguinte exemplo que cando a base é o espacio hiperbólico s-dimensional, é posible alcanzar o máximo número de fibras.

Exemplo. Sexa $\mathbb{H}^s \times_{f_1} \mathbb{R} \times \cdots \times_{f_{s+2}} \mathbb{R}$ un producto multiwarped coas funcións de deformación dadas polos vectores seguintes (empregamos a notación introducida na Observacion 5.3.4):

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{\xi}_1 & = & (1,\ldots,1,1,s+2,\frac{s+4}{4},s+1) \\
\overrightarrow{\xi}_2 & = & (1,\ldots,1,1,s,\frac{s+2}{4},s-1) \\
\overrightarrow{\xi}_3 & = & (0,\ldots,0,0,3,1,2) \\
\overrightarrow{\xi}_4 & = & (0,\ldots,0,0,1,2,\frac{1}{2},2) \\
\overrightarrow{\xi}_5 & = & (0,\ldots,0,1,0,2,\frac{1}{2},2) \\
\overrightarrow{\xi}_6 & = & (0,\ldots,1,0,0,2,\frac{1}{2},2) \\
\vdots & = & \vdots \\
\overrightarrow{\xi}_{s+2} & = & (1,0,\ldots,0,2,\frac{1}{2},2)
\end{array}$$

é dicir, que as funcións, escritas na súa forma habitual son:

$$\begin{array}{rcl}
f_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & \frac{\frac{s+4}{4}\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+x_1+\cdots+x_{s-1}+(s+2)x_s+s+1}{x_s} \\
f_2(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & \frac{\frac{s+2}{4}\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+x_1+\cdots+x_{s-1}+s\,x_s+s-1}{x_s} \\
f_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & \frac{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+3\,x_s+2}{x_s} \\
f_4(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & \frac{\frac{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2}{2}+x_{s-1}+2\,x_s+2}{x_s} \\
f_5(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & \frac{\frac{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2}{2}+x_{s-2}+2\,x_s+2}{x_s} \\
f_6(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & \frac{\frac{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2}{2}+x_{s-3}+2\,x_s+2}{x_s} \\
\vdots & & \vdots \\
f_{s+2}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & \frac{\frac{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2}{2}+x_1+2\,x_s+2}{x_s}
\end{array}$$

este producto cumple as condicións do Teorema 5.3.5 e, polo tanto, é localmente conformemente chan. Ademais, as función f_i así definidas son positivas en todo o semiplano hiperbólico, pois cumplen as condicións dadas no Lema 2.3.6. Desta maneira, temos exemplos globais, con base o espacio hiperbólico de dimensión arbitraria, de productos multiwarped localmente conformemente chans e co máximo número de fibras posible.

Por simplicidade, no exemplo anterior escolléronse fibras de dimensión 1, pero poderíanse coller de dimensión maior sen máis que ter en conta que o valor da curvatura está dado pola función de deformación.

Como conclusión ás precedentes consideracións sobre os productos multiwarped con base o espacio hiperbólico, temos o seguinte teorema.

Teorema 6.3.3 *Sexa $M = \mathbb{H}^s \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$, con $s > 1$, un producto multiwarped localmente conformemente chan. Entón $k \leq s+2$ e as funcións f_i son da forma*

$$f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b_i}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c_i}{x_s}$$

con $a_i > 0, c_i \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{\mathbf{b_i}} \in \mathbb{R}^s$ verificando unha das dúas condicións

1. $4a_ic_i - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}_i\|^2 > 0$
2. $4a_ic_i - (b_{i1}^2 + \cdots + b_{i(s-1)}^2) \geq 0$ *e* $b_{is} \geq 0$

Ademais, pódense atopar funcións $f_1, \ldots, f_{s+2}$ deste tipo de modo que $\mathbb{H}^s \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_{s+2}} F_{s+2}$ sexa localmente conformemente chan, onde unha das fibras ten curvatura negativa e $s+1$ teñen curvatura positiva.

Inversamente, o seguinte corolario permite crear exemplos de productos multiwarped localmente conformemente chans con base o espacio hiperbólico.

Corolario 6.3.4 *Sexa $M = \mathbb{H}^s \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped, entón se as fibras teñen curvatura seccional constante e as funcións de deformación son da forma*

$$f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b_i}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + c_i}{x_s}$$

con $a_i > 0, c_i \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{\mathbf{b_i}} \in \mathbb{R}^s$ e verifican unha das condicións seguintes

1. $4a_ic_i - \|\overrightarrow{\mathbf{b}}_i\|^2 > 0$
2. $4a_ic_i - (b_{i1}^2 + \cdots + b_{i(s-1)}^2) \geq 0$ *e* $b_{is} \geq 0$

e, ademais, as funcións x_sf_i verifican as ecuacións (5.4) *e* (5.5)*, entón M é localmente conformemente chan.*

Demostración.
Dado que o espacio hiperbólico pode ser obtido como cambio conforme global do espacio euclidiano, o resultado obtense a partir dos Teoremas 5.3.1 e 5.3.5. □

Capítulo 7

Aplicacións

Como foi mencionado en diversas ocasións ó longo desta memoria, os productos warped foron introducidos en [5] co obxecto de estudiar variedades con curvatura seccional negativa. Por este motivo, semella natural estudiar cándo os productos multiwarped, que xeneralizan ós anteriores baixo dous puntos de vista diferentes (Observación 1.6.1), teñen curvatura seccional nonpositiva. A primeira sección do capítulo está adicada a este propósito; nela empregaremos o teorema seguinte, que xeneraliza o Teorema 5.2.5 a productos multiwarped con base de curvatura seccional constante. A proba deste resultado é análoga á do xa mencionado Teorema 5.2.5, e obviámola:

Teorema 7.0.1 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped con base B de curvatura seccional constante. Entón M é localmente conformemente chan se e só se:*

(i) $H_{f_i} = \frac{\Delta f_i}{s} g$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, k\}$.

(ii) Para todo $i \neq j$, cúmprese a ecuación

$$\frac{\Delta f_i}{s\, f_i} + \frac{\Delta f_j}{s\, f_j} + K^B = \frac{\langle \nabla f_i, \nabla f_j \rangle}{f_i f_j} \tag{7.1}$$

(iii) Se $\dim F_i \geq 2$, entón F_i ten curvatura seccional constante K^{F_i} e cúmprese

$$\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} = \frac{K^{F_i}}{f_i^2} + 2\frac{\Delta f_i}{s\, f_i} + K^B \tag{7.2}$$

Para variedades localmente conformemente chás, baixo as hipóteses de completitude e nonnegatividade do tensor de Ricci, existe unha clasificación [37] que reduce as posibilidades, agás conformalidade, a $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$. Veremos na Sección 7.2 cómo construir exemplos de productos multiwarped localmente conformemente chans con tensor de Ricci nonpositivo, que non pertencen ás clases análogas das anteriormente citadas, isto é, as dadas por $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^{n-1}$. Deste modo, probamos que, de darse unha clasificación similar para variedades con tensor de Ricci nonpositivo, teriamos unha maior riqueza na diversidade de clases que a constituísen.

7.1 Curvatura seccional non positiva

O estudio do carácter positivo ou negativo da curvatura seccional en variedades riemannianas entraña a dificultade que conleva a comprobación deste feito con respecto a cada plano mais, no caso de productos multiwarped, o seguinte resultado simplifica enormemente esta tarefa.

Lema 7.1.1 *Sexa $M = B\times_{f_1}F_1\times\cdots\times_{f_k}F_k$ un producto multiwarped localmente conformemente chan de dimensión n e con base de curvatura seccional constante. Sexa $\{E_1,\dots,E_n\}$ unha base ortogonal respecto da cal se verifica $K_{E_iE_j}\geq 0$ (respectivamente, $K_{E_i,E_j}\leq 0$). Entón $K\geq 0$ (respectivamente, $K\leq 0$).*

Demostración.
Supoñamos $K_{E_i,E_j}\geq 0$ para todo $i\in\{1,\dots,n\}$. Sexan $U,V\in\mathfrak{X}(M)$ distintos; pódense escribir como combinación linear dos elementos da base $U=\sum_{a=1}^n u_aE_a$ e $V=\sum_{b=1}^n v_bE_b$. Entón

$$K_{UV}=\frac{R(U,V,U,V)}{\langle U,U\rangle\langle V,V\rangle-\langle U,V\rangle^2}$$

Dado que o denominador é sempre positivo, basta con ver que $R(U,V,U,V)\geq 0$. Tense

$$R(U,V,U,V)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^n u_iv_ju_lv_mR(E_i,E_j,E_l,E_m)$$

pero polo Lema 3.1.1, tendo en conta que cada función de deformación verifica a ecuación de Möbius e tanto a base coma as fibras teñen curvatura seccional constante, os únicos sumandos que non se anulan son os da forma $u_i^2v_j^2R(E_i,E_j,E_i,E_j)$ ou ben os da forma $u_iv_ju_jv_iR(E_i,E_j,E_j,E_i)$. Así, obtemos

$$R(U,V,U,V)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\big(u_i^2v_j^2R(E_i,E_j,E_i,E_j)+u_iu_jv_jv_iR(E_i,E_j,E_j,E_i)\big)$$

que se pode escribir de modo equivalente como

$$\begin{aligned}R(U,V,U,V)&=\textstyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=i+1}^n(u_i^2v_j^2-2u_iu_jv_jv_i+u_j^2v_i^2)R(E_i,E_j,E_i,E_j)\\&=\textstyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=i+1}^n(u_iv_j-u_jv_i)^2R(E_i,E_j,E_i,E_j)\end{aligned}$$

e, dado que cada sumando é non negativo, obtense que tamén o é a suma. Para o caso en que $K_{E_iE_j}\leq 0$ o resultado é análogo. □

En [5], danse condicións necesarias e suficientes para que un producto warped teña curvatura seccional negativa. Dado que neste traballo vimos de abordar o estudio dos productos multiwarped, que xeneralizan ós alí descritos, e coa hipótese adicional da conformalidade chá local, estudiaremos nesta sección os productos multiwarped localmente conformemente chans con curvatura secccional non positiva. Ademais, dado o destacado papel que veñen xogando os espacios modelo de curvatura seccional constante, restrinxirémonos a productos multiwarped con base $\mathbb{R}^s$, $\mathbb{H}^s$ ou $\mathbb{S}^s$.

Teorema 7.1.2 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped localmente conformemente chan con curvatura seccional K.*

(i) Se $B = \mathbb{R}^s$ entón $k = 1$ e sempre se cumple $K \leq 0$.

(ii) Se $B = \mathbb{H}^s$ as funcións de deformación son da forma $f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+\langle\overrightarrow{\mathbf{b}}_i,\overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle+c_i}{x_s}$ e condicións necesarias e suficientes para que $K \leq 0$ son

(ii.a) $f_i \geq 2b_{is}$ se $dim\, F_i \geq 2$ e

(ii.b) $1 \geq \frac{b_{is}}{f_i} + \frac{b_{js}}{f_j}$ para cada dúas funcións de deformación.

(iii) Se $B = \mathbb{S}^s$ nunca se cumple $K \leq 0$.

Demostración.
Por ser M un producto multiwarped localmente conformemente chan con base de curvatura seccional constante K^B, verifícanse as ecuacións seguintes (Teorema 7.0.1):

1. $H_{f_i} = \frac{\Delta f_i}{s} g$
2. Se $dim\, F_i \geq 2$, entón K^{F_i} é constante e $\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} = \frac{2\Delta f_i}{sf_i} + \frac{K^{F_i}}{f_i^2} + K^B$
3. $\frac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_i f_j} = \frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + \frac{\Delta f_j}{f_j}\right) + K^B$

Entón, do Lema 3.1.2 obtéñense as condicións

(a) $K_{XY} = K^B_{XY} \leq 0$

(b) $K_{XU_i} = -\frac{H_{f_i}(X,X)}{f_i\|X\|^2} \leq 0$

(c) $K_{U_iV_i} = \frac{1}{f_i^2}K^{F_i}_{U_iV_i} - \frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} \leq 0$

(d) $K_{U_iU_j} = -\frac{\langle\nabla f_i,\nabla f_j\rangle}{f_i f_j} \leq 0$

que se poden reescribir

(a) $K^B_{XY} \leq 0$

(b) $\frac{\Delta f_i}{sf_i} \geq 0$

(c) $\frac{1}{f_i^2}K^{F_i} - (\frac{2\Delta f_i}{sf_i} + \frac{K^{F_i}}{f_i^2} + K^B) = -(\frac{2\Delta f_i}{sf_i} + K^B) \leq 0 \Rightarrow \frac{2\Delta f_i}{sf_i} + K^B \geq 0$

(d) $\frac{1}{s}\left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + \frac{\Delta f_j}{f_j}\right) + K^B \geq 0$

Da condición (a) obtemos (iii) do teorema. Vexamos (i) e (ii).

Se $B = \mathbb{R}^s$, polo Teorema 6.3.1, só pode haber unha fibra, a función de deformación é da forma $f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = a\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle\overrightarrow{\mathbf{b}},\overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c$ e as condicións anteriores redúcense a:

(b') $\frac{2a}{f} \geq 0$

(c') $\frac{4a}{f} \geq 0$

onde (b') e (c') son equivalentes, co que temos probado (i), pois tomamos sempre $a > 0$.

Se $B = \mathbb{H}^s$ entón as funcións de deformación son da forma $f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c_i}{x_s}$ e, tendo en conta que $\Delta f_i = sf_i - sb_{is}$ (esta expresión obtense do apartado (iv) do Lema 1.4.1 tendo en conta que o espacio hiperbólico vén dado por unha transformación conforme do euclidiano), as condicións anteriores escríbense como:

(b'') $\frac{sf_i - sb_{is}}{sf_i} = 1 - \frac{b_{is}}{f_i} \geq 0$

(c'') $2\frac{sf_i - sb_{is}}{sf_i} - 1 = 1 - 2\frac{b_{is}}{f_i} \geq 0$

(d'') $\frac{1}{s}\left(\frac{sf_i - sb_{is}}{f_i} + \frac{sf_j - sb_{js}}{f_j}\right) - 1 = 1 - \frac{b_{is}}{f_i} - \frac{b_{js}}{f_j} \geq 0$

Analicemos a condición (b''). Tense $1 - \frac{b_{is}}{f_i} \geq 0$, pero isto é equivalente a $f_i \geq b_{is}$, é dicir, que se ten a desigualdade:

$$\frac{a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b_i}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c_i}{x_s} \geq b_{is}$$

ou, equivalentemente,

$$\big(a_i(x_1^2 + \cdots + x_{s-1}^2) + b_{i1}x_1 + \cdots + b_{i(s-1)}x_{s-1} + c_i\big) + a_i x_s^2 \geq 0$$

pero esta condición é verificada por calquera función de deformación para $\mathbb{H}^s$, como vimos nas condicións expresadas no Lema 2.3.6. De (c'') e (d'') obténense, respectivamente, $(ii.a)$ e $(ii.b)$. $\square$

Observación 7.1.3 Nótese que as condicións (a), (b) e (c), dadas no curso da demostración anterior, identifícanse coas condicións do Teorema 7.5 de [5], para que un producto warped teña curvatura seccional negativa.

Desenvolvendo as condicións do teorema anterior para o caso en que a base do producto multiwarped é o espacio hiperbólico, obtense o resultado seguinte.

Corolario 7.1.4 *Sexa $M = \mathbb{H}^s \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped localmente conformemente chan con curvatura seccional non positiva. Entón M posúe ó sumo unha fibra de dimensión maior que un, e esta ten, necesariamente, curvatura non positiva.*

Demostración.
A condición $(ii.a)$ é $f_i \geq 2b_{is}$, é dicir:

$$\frac{a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c_i}{x_s} \geq 2b_{is}$$

ou,

$$a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle (b_{i1}, \ldots, b_{i(s-1)}, -b_{is}), \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c_i \geq 0$$

O anterior paraboloide será positivo cando se cumpla unha das dúas condicións seguintes:

1. $4a_ic_i - \|b_i\|^2 > 0$
2. $b_{is} \leq 0$ e $4a_ic_i - (b_{i1}^2 + \cdots + b_{i(s-1)}^2) \geq 0$

que non son disxuntivas. Atendendo á condición 2 e á segunda condición dada no Lema 2.3.6, dedúcese que os únicos casos que se poden dar son aqueles en que $4a_ic_i - \|\overrightarrow{b}_i\|^2 > 0$ ou $4a_ic_i - \|\overrightarrow{b}_i\|^2 = 0$ con $b_{is} \geq 0$. Polo tanto, dado que nunca se cumple $4a_ic_i - \|\overrightarrow{b}_i\|^2 < 0$, a esfera non pode ser fibra dun producto multiwarped deste tipo, e só pode haber fibras con curvatura seccional constante negativa ou cero. Non obstante, o Corolario 5.3.3 asegúranos que só pode haber unha fibra de dimensión maior que un con curvatura seccional non positiva e, así, un producto multiwarped destas características só pode ter unha fibra con dimensión maior que un. □

Á vista do Teorema 7.1.2, dado que pretendemos atopar exemplos de productos multiwarped con curvatura seccional non positiva, a base que ofrece máis liberdade á hora de escoller as fibras é o espacio hiperbólico. Atendendo ó Corolario 7.1.4, non se poden construír exemplos cunha fibra de curvatura seccional positiva. Unha vez excluído este caso, os dous exemplos seguintes mostran cada unha das posibilidades. Posto que só pode haber unha fibra con dimensión maior que un, construímos cada exemplo con dúas fibras, unha das cales é $\mathbb{R}$. No Exemplo 7.1.5 unha fibra ten curvatura seccional negativa e no Exemplo 7.1.6 a fibra con dimensión maior que un é chá.

Exemplo 7.1.5 Consideremos o espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e denotemos os puntos do espacio por $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Definimos a métrica seguinte:

$$g(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1^2(\overrightarrow{\mathbf{x}})\frac{1}{x_4^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_1^2(\overrightarrow{\mathbf{x}})\frac{1}{x_4^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_2^2(\overrightarrow{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

para as funcións

$$\begin{aligned} f_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) &= \frac{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + x_2 + 1}{x_2} \\ f_2(\overrightarrow{\mathbf{x}}) &= \frac{\frac{1}{4}\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + x_2 + \frac{1}{2}}{x_2} \end{aligned}$$

Esta variedade ten estructura de producto multiwarped e é localmente conformemente chá. A súa curvatura seccional vén dada polas expresións do Lema 3.1.2; así tense, para

$X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$, $U_1, V_1 \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$ e $U_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} K_{XY} & = & -1 \\ K_{U_1V_1} & = & -\frac{x_1^2+(x_2-1)^2+1}{2x_2f_1} \\ K_{XU_1} & = & -\frac{x_1^2+x_2^2+2}{2x_2f_1} \\ K_{XU_2} & = & -\frac{x_1^2+x_2^2+2}{4x_2f_2} \\ K_{U_1U_2} & = & -\frac{x_1^4+(-2+x_2^2)^2+2x_1^2(2+x_2^2)}{8x_2^2f_1f_2} \end{array}$$

que en cada caso é menor ou igual que cero.

Exemplo 7.1.6 Consideremos o espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ e, coma no exemplo anterior, denotamos $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, onde definimos a métrica seguinte:

$$g(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1^2(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_1^2(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_2^2(\overrightarrow{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

para as funcións

$$\begin{array}{rcl} f_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & \frac{\frac{1}{4}\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+x_1+1}{x_2} \\ f_2(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & = & \frac{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+2x_1+x_2+2}{x_2} \end{array}$$

Ó igual que no exemplo anterior a variedade é un producto multiwarped localmente conformemente chan. Ademais, para $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^2)$, $U_1, V_1 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ e $U_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} K_{XY} & = & -1 \\ K_{U_1V_1} & = & -1 \\ K_{XU_1} & = & -1 \\ K_{XU_2} & = & -\frac{x_1^2+x_2^2+4x_1+4}{2x_2f_2} \\ K_{U_1U_2} & = & -\frac{x_1^2+x_2^2+4x_1+4}{2x_2f_2} \end{array}$$

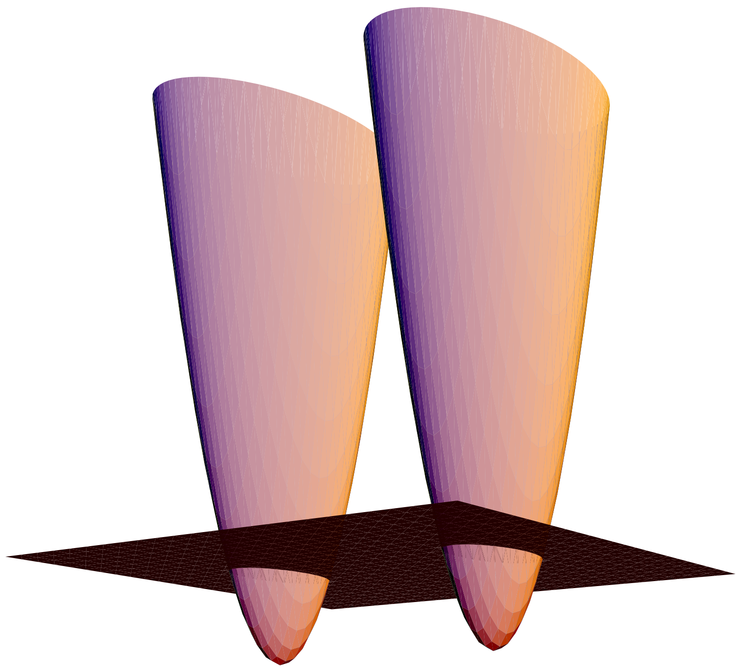
que, como se pode comprobar, é menor ou igual que cero para calquera dos planos.

O Corolario 7.1.4 dá unha interpretación da condición $(ii.a)$ do Teorema 7.1.2, obtendo importantes restriccións no posible número de fibras con dimensión maior que un para un producto multiwarped localmente conformemente chan con $K \leq 0$. Na seguinte observación trataremos de achegarnos xeométricamente á condición $(ii.b)$.

Observación 7.1.7 A condición $(ii.b)$ expresa a restricción entre cada dúas funcións de deformación, dada pola expresión $1 \geq \frac{b_{is}}{f_i} + \frac{b_{js}}{f_j}$. Obsérvese en primeiro lugar que, se f_i e f_j son funcións verificando a condición $(ii.a)$, tamén verifican a condición $(ii.b)$, pois

$$\frac{b_{is}}{f_i} \leq \frac{1}{2}, \frac{b_{js}}{f_j} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 \geq \frac{b_{is}}{f_i} + \frac{b_{js}}{f_j}$$

Por outro lado, na proba do Corolario 7.1.4 vimos que a condición $(ii.a)$ equivale a $a_i\|\overrightarrow{x}\|^2 + \langle(b_{i1}, \ldots, b_{i(s-1)}, -b_{is}), \overrightarrow{x}\rangle + c_i \geq 0$. Mais, como vimos no Corolario 5.3.3, só unha fibra pode verificar $4a_ic_i - \|\overrightarrow{b}_i\|^2 \geq 0$, co que se fai necesaria unha maior profundidade na análise destas condicións.



As interseccións dos paraboloides co plano $x_{s+1} = 0$ son disxuntas.

Atendamos a estas consideracións puntualmente para dar unha interpretación xeométrica á condición de compatibilidade entre funcións de deformación $(ii.b)$. As funcións que verifican $4a_ic_i - \|\overrightarrow{b}_i\|^2 < 0$, estendidas a todo o conxunto $\mathbb{R}^s$, son negativas no hiperplano negativo (con respecto á coordenada x_s). Agora ben, para calquera destas funcións $f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle\overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c_i}{x_s}$ existe un conxunto U onde $f_i(U) \leq 0$, e, por simetría, existe un conxunto $C = \{\overrightarrow{\mathbf{x}} : (x_1, \ldots, x_{s-1}, -x_s)\}$ contido en $\mathbb{H}^s$ no que a función $\widetilde{f}_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) =$

$f_i(x_1, \dots, x_{s-1}, -x_s)$ é negativa. Sendo así, tense:

$$a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle (b_{i1}, \dots, b_{i(s-1)}, -b_{is}), \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c_i \leq 0$$

co que

$$\frac{a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c_i}{2x_s} \leq b_{is}$$

e, entón, $\frac{b_{is}}{f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}})} \geq \frac{1}{2}$. Pero cando isto se cumpla, é dicir, en U, debe verificarse (atendendo a $(ii.b)$) para calquera $j \neq i$,

$$\frac{b_{js}}{f_j(\overrightarrow{\mathbf{x}})} \leq \frac{1}{2}$$

é dicir, que $\widetilde{f_j}(\overrightarrow{\mathbf{x}}) \geq 0$ para $x \in U$. Dito doutro xeito, as funcións de deformación non poden ser nonpositivas simultaneamente. Na figura, o plano representa o semiespacio $x_s \leq 0$, entón as interseccións dos paraboloides co plano non poden ter ningún punto en común.

7.2 Tensor de Ricci non positivo

Esta sección condúcenos a un exemplo, con estructura de producto multiwarped e localmente conformemente chan con base de curvatura seccional constante, no que o tensor de Ricci é nonpositivo. O feito de ter curvatura seccional nonpositiva garante que o tensor de Ricci tamén o sexa, polo que é apto para este propósito calquera dos exemplos da sección anterior. Sen embargo, a conversa non é certa, e isto tamén será posto de manifesto cos exemplos dados nesta sección.

Desenvolvemos a continuación as expresións non nulas dadas no Lema 3.1.3 para o tensor de Ricci dun producto multiwarped, é dicir, as compoñentes do tensor de Ricci que corresponden a considerar dous vectores na base ou en cada unha das fibras. O noso propósito é estudiar os autovalores do operador de Ricci, se ben as expresións que temos son para o tensor de tipo $(0, 2)$, tomamos vectores ortonormais que representaremos por $X \in \mathfrak{X}(B)$ e $U_i \in \mathfrak{X}(F_i)$ e, así, obtemos:

$$\begin{aligned}
\rho(X, X) &= \rho^B(X, X) - \textstyle\sum_{i=1}^k \frac{H_{f_i}(X,X)}{f_i} d_i = (s-1)K^B - \sum_{i=1}^k d_i \frac{\Delta f_i}{s f_i} \\
\rho(U_i, U_i) &= \rho^{F_i}(U_i, U_i) - \left(\frac{\Delta f_i}{f_i} + (d_i - 1)\frac{\|\nabla f_i\|^2}{f_i^2} + \textstyle\sum_{j\neq i} d_j \frac{\langle \nabla f_i, \nabla f_j\rangle}{f_i f_j} \right) \\
&= (d_i - 1)K^{F_i} - \Big(s\frac{\Delta f_i}{s f_i} + (d_i - 1)\big(\frac{2\Delta f_i}{s f_i} + \frac{K^{F_i}}{f_i^2} + K^B\big) \\
&\qquad + \textstyle\sum_{j\neq i} d_j \left(\frac{1}{s}\big(\frac{\Delta f_i}{f_i} + \frac{\Delta f_j}{f_j}\big) + K^B \right) \Big) \\
&= -\left((s + 2d_i - 2)\frac{\Delta f_i}{s f_i} + (n - s - 1)K^B + (n - s - d_i)\frac{\Delta f_i}{s f_i} + \textstyle\sum_{j\neq i} d_j \frac{\Delta f_j}{s f_j} \right) \\
&= -\left((n-2)\frac{\Delta f_i}{s f_i} + (n - s - 1)K^B + \textstyle\sum_j d_j \frac{\Delta f_j}{s f_j} \right) \\
&= -\left((n-2)\frac{\Delta f_i}{s f_i} + (n-2)K^B + \textstyle\sum_j d_j \frac{\Delta f_j}{s f_j} - (s-1)K^B \right)
\end{aligned}$$

onde $d_i = dim\, F_i$.

Destas expresións dedúcese o teorema seguinte, que describe os casos en que a base é $\mathbb{R}^s$, $\mathbb{H}^s$ e $\mathbb{S}^s$.

Teorema 7.2.1 *Sexa $M = B \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_k} F_k$ un producto multiwarped localmente conformemente chan. Denotando $n = dim\, M$ e $d_i = dim\, F_i$, tense:*

(i) Se $B = \mathbb{R}^s$ entón $k = 1$ e sempre se cumple $\rho \leq 0$.

(ii) Se $B = \mathbb{H}^s$ as funcións de deformación son da forma $f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b_i}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c_i}{x_s}$ e condicións necesarias e suficientes para que $\rho \leq 0$ son

(ii.a) $(n-1) - \sum_{i=1}^{k} d_i \frac{b_{is}}{f_i} \geq 0$ e

(ii.b) $(n-1) - (n-2)\frac{b_{is}}{f_i} - \sum_j d_j \frac{b_{js}}{f_j} \geq 0$

(iii) Se $B = \mathbb{S}^s$ nunca se cumple $\rho \leq 0$.

Demostración.
Se $B = \mathbb{R}^s$ o producto multiwarped só pode ter unha fibra (Teorema 6.3.1), que debe verificar a condición:

$$\frac{\Delta f_i}{s f_i} \geq 0$$

e, dado que a función de deformación ten a forma $f(x) = a\|\overrightarrow{x}\|^2 + \langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}\rangle + c$, a condición anterior tradúcese en que $a \geq 0$, co que non temos condicións neste caso, e sempre se cumple $\rho \leq 0$.

Se $B = \mathbb{H}^s$, entón as funcións de deformación teñen a forma

$$f_i(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{a_i\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \langle \overrightarrow{\mathbf{b}}_i, \overrightarrow{\mathbf{x}}\rangle + c_i}{x_s}$$

e deben verificarse as condicións seguintes:

$$(s-1) + \sum_{i=1}^{k} d_i \frac{\Delta f_i}{s f_i} \geq 0$$

e

$$(n-2)\frac{\Delta f_i}{s f_i} - (n-s-1) + \sum_j d_j \frac{\Delta f_j}{s f_j} \geq 0$$

Pero tendo en conta que $\Delta f_i = s f_i - s b_{is}$, redúcense a:

$$(n-1) - \sum_{i=1}^{k} d_i \frac{b_{is}}{f_i} \geq 0$$

e

$$(n-2)\frac{s f_i - s b_{is}}{s f_i} - (n-s-1) + \sum_j d_j \frac{s f_j - s b_{js}}{s f_j} = (n-1) - (n-2)\frac{b_{is}}{f_i} - \sum_j d_j \frac{b_{js}}{f_j} \geq 0$$

Se $B = \mathbb{S}^s$, entón polo Teorema 6.2.1 só pode haber unha fibra. Pero, tomando a expresión de $\rho(X,X)$, onde $X \in \mathfrak{X}(B)$, vemos que é positivo, pois neste caso $K^B > 0$ e $\Delta f(\overrightarrow{\mathbf{x}}) < 0$, para algún $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}^s$, dado que $\Delta\psi = -\frac{\tau}{n-1}\psi$ con ψ autofunción para o laplaciano, como vimos no Lema 2.3.11. □

É un feito ben coñecido, como xa recalcamos na introducción da sección, que se unha variedade ten curvatura seccional constante nonpositiva, tamén o seu tensor de Ricci será non positivo. Por este motivo, calquera exemplo dado na sección anterior verifica as condicións dadas no teorema precedente. Sen embargo, non se verifica a conversa, é dicir, existen variedades con curvatura seccional positiva en algún punto e con tensor de Ricci nonpositivo, como amosa o seguinte exemplo.

Exemplo 7.2.2 Sexa o producto multiwarped $\mathbb{H}^2 \times_{f_1} \mathbb{S}^2 \times_{f_2} \mathbb{S}^2$ coas métricas usuais, ou sexa, consideramos a métrica

$$g(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1^2(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_1^2(\overrightarrow{\mathbf{x}})Sen(x_3)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_2^2(\overrightarrow{\mathbf{x}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_2^2(\overrightarrow{\mathbf{x}})Sen(x_5)^2 \end{pmatrix}$$

e como funcións de deformación tomamos:

$$\begin{aligned} f_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) &= \frac{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+3x_2+2}{x_2} \\ f_2(\overrightarrow{\mathbf{x}}) &= \frac{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+x_1+2x_2+2}{x_2} \end{aligned}$$

A variedade é localmente conformemente chá (basta ver que atende ás condicións do Teorema 6.3.4) e, tras os tediosos cálculos que permiten calcular os autovalores do tensor de Ricci, obtéñense os tres seguintes, cada un deles con multiplicidade dous:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{5x_1^4+10x_1^3+16x_1^2+20x_1+20}{2x_2^2f_1f_2} - \frac{21x_2^3+33x_2^2+60x_2+20}{2x_2^2f_1f_2} - \frac{9(x_1+x_2)^2}{2x_2^2f_1f_2} \\ &\quad -\frac{5(x_1+x_2^2)^2}{2x_2^2f_1f_2} - \frac{21x_1^2x_2}{2x_2^2f_1f_2} - \frac{5x_1^2x_2^2}{x_2^2f_1f_2} \\ \rho_2 &= -\frac{5x_1^4+10x_1^3+16x_1^2+20x_1+20}{2x_2^2f_1f_2} - \frac{9x_2^3-7x_2^2+12x_2+20}{2x_2^2f_1f_2} - \frac{(3x_1-x_2)^2}{2x_2^2f_1f_2} \\ &\quad -\frac{5(x_1+x_2^2)^2}{2x_2^2f_1f_2} - \frac{9x_1^2x_2}{2x_2^2f_1f_2} - \frac{5x_1^2x_2^2}{x_2^2f_1f_2} \\ \rho_3 &= -\frac{5x_1^4+10x_1^3+16x_1^2+20x_1+20}{2x_2^2f_1f_2} - \frac{5x_2^3-15x_2^2+28x_2+20}{2x_2^2f_1f_2} - \frac{9(x_1+x_2)^2}{2x_2^2f_1f_2} \\ &\quad -\frac{5(x_1+x_2^2)^2}{2x_2^2f_1f_2} - \frac{5x_1^2x_2}{2x_2^2f_1f_2} - \frac{5x_1^2x_2^2}{x_2^2f_1f_2} \end{aligned}$$

Nótese que en cada sumando o signo do denominador está determinado polo producto das funcións de deformación, co que é sempre positivo, e o numerador de cada sumando é sempre non negativo.

Non obstante, esta variedade non ten curvatura seccional nonpositiva, pois sabemos polo Corolario 7.1.4 que nese caso non podería haber dúas fibras con dimensión maior que un se a base é o espacio hiperbólico.

Exemplo 7.2.3 O exemplo precedente pódese ampliar con dúas fibras máis, obtendo así a cota de 4 fibras para a base de dimensión 2. Así, o producto warped

$$\mathbb{H}^2 \times_{f_1} \mathbb{H}^2 \times_{f_2} \mathbb{S}^2 \times_{f_3} \mathbb{S}^2 \times_{f_4} \mathbb{S}^2$$

con

$$\begin{aligned} f_1(\overrightarrow{\mathbf{x}}) &= \tfrac{\frac{3}{2}\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+x_1+4x_2+3}{x_2} \\ f_2(\overrightarrow{\mathbf{x}}) &= \tfrac{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+3x_2+2}{x_2} \\ f_3(\overrightarrow{\mathbf{x}}) &= \tfrac{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+x_1+2x_2+2}{x_2} \\ f_4(\overrightarrow{\mathbf{x}}) &= \tfrac{\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2+x_1+2x_2+1}{x_2} \end{aligned}$$

é localmente conformemente chan e o seu tensor de Ricci é menor ou igual que cero, como se pode comprobar a partir de (ii) no Teorema 7.2.1.

Observación 7.2.4 Na referencia [37], dáse unha clasificación das variedades completas localmente conformemente chás con $\rho \geq 0$, obtendo como resultado as clases representadas polos tres espacios: $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$. Neste capítulo proporcionamos mediante productos multiwarped diferentes exemplos de variedades localmente conformemente chás con $\rho \leq 0$. Á vista destes exemplos, e ante a posibilidade de xerar outros moitos con base de dimensión maior (co consecuente aumento no posible número de fibras), ponse de manifesto que unha clasificación análoga á dada en [37] para $\rho \leq 0$ posuiría unha maior diversidade de variedades e, por tanto, unha maior complexidade.

Bibliografía

[1] J. K. Beem, P. Ehrlich, K. L. Easley; *Global Lorentzian Geometry (2nd Edition)*, Marcel Dekker, New York, 1996.

[2] M. Berger, P. Gauduchon, E.Mazet; *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Lecture Notes in Math. **194**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[3] M. Bertola, D. Gouthier; Warped products with special Riemannian curvature, *Bol. Soc. Brasil. Mat.(N.S.)* **32** (2001), 45-62.

[4] A. L. Besse; *Einstein Manifolds*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 2002.

[5] R. L. Bishop, B. O'Neill; Manifolds of Negative Curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.* **145** (1969), 1-49.

[6] M. Brozos Vázquez, E. García Río, R. Vázquez Lorenzo; Some remarks on locally conformally flat static space-times, *J. Math. Phys.* **46** (2005), n 2, a aparecer.

[7] B.-Y. Chen; Geometry of Submanifolds and its Applications, *Science University of Tokyo*, 1981.

[8] Q.-M. Cheng; Compact locally conformally falt riemannian manifolds, *Bull. London Math. Soc.* **33** (2001), 459-465.

[9] G. de Rham; Sur la réducibilité d'un espace de Riemann, *Comm. Math. Helv.* **26** (1952), 328-344.

[10] J. C. Díaz Ramos, E. García Río; A note on the structure of algebraic curvature tensors, *Linear Algebra Appl.* **382** (2004), 271-277.

[11] M. Fernández López; *Resultados de descomposición asociados á ecuación de Möbius*, Publicaciónes del Departamento de Geometría y Topología **96**, Universidade de Santiago de Compostela, 2002.

[12] M. Fernández López, E. García Río, D. N. Kupeli, B. Ünal; A curvature condition for a twisted product to be a warped product, *Manuscripta Math.* **106** (2001), 213-217.

[13] E. García Río, D. N. Kupeli; *Semi-Riemannian maps and their applications*, Mathematics an its Applications **475**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[14] P. Gilkey; *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemann Curvature Tensor*, World Scientific Publishing Co., River Edge, 2001.

[15] S. Hiepko; Eine innere Kennzeichnung der verzerrten Produkte, *Math. Ann.* **241** (1979), 209-215.

[16] H. Kamada, Y. Machida; Serf-duality of metrics of type (2,2) on four-dimensional manifolds, *Tôhoku Math. J.* **49** (1997), 259-275.

[17] D. S. Kim, Y. H. Kim; Compact Einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 2573-2576.

[18] W. Kühnel; Conformal Transformations between Einstein Spaces, *Conformal Geometry* (R. S. Kulkarni and U. Pinkall, eds.) Aspects of Math., vol. E12, Braunschweig, Vieweg-Verlag, 1988, 105-146.

[19] W. Kühnel; *Differential Geometry. Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library **16**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[20] N. H. Kuiper; On conformally flat spaces in the large, *Ann. Math.* **50** (1949), 916-924.

[21] R. S. Kulkarni; Curvature structures and conformal transformations, *J. Diff. Geometry* **54** (1969), 425-451.

[22] M. Meumertzheim, H. Reckziegel,M. Schaaf; Decomposition of twisted and warped product nets., *Result. Math.* **36** (1999), 297-312.

[23] S. Mignemi, H. J. Schmidt; Classification of multidimensional inflationary models, *J. Math. Phys.* **39** (1998), 998-1010.

[24] M. Obata; Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere, *J. Math. Soc. Japan* **14** (1962), 333-340.

[25] Y. Ogawa; On conformally flat spaces with warped product Riemannian metric, *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.* **29** (1978), 117-127.

[26] B. O'Neill; *Semi-Riemannian Geometry. With applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics **103**, Academic Press, Inc., New York, 1983.

[27] B. Osgood, D. Stowe; The Schwarzian derivative and conformal mapping of riemannian manifolds, Duke Math. J. **67** (1992), 57-99.

[28] R. Ponge, H. Reckziegel; Twisted products in pseudo-riemannian geometry, *Geom. Dedicata* **48** (1993), 1-15.

[29] T. Sakai; *Riemannian Geometry*, Translations of Mathematical Monographs **149**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[30] M. Tani; On a conformally flat Riemannian manifold, *Tôhoku Math. J.* **19** (1967) 205-214.

[31] Y. Tashiro; Complete Riemannian manifolds and some vector fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* **117** (1965), 251-275.

[32] R. Tojeiro; Conformal de Rham decomposition of Riemannian manifolds, Pendente de publicación.

[33] F. Tricerri, L. Vanhecke; Curvature tensors on almost Hermitian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981), 365-398.

[34] J. A. Wolf; *Spaces of Constant Curvature*, Third Edition, Publish or Perish, Inc., Boston, Mass., 1974.

[35] X. Xu; On the existence and uniqueness of solutions of Möbius Equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), n 2, 927-945.

[36] S. T. Yau; Remarks on conformal transformations, *J. Diff. Geometry* **8** (1973), 369-381.

[37] S. Zhu; The classification of complete locally conformally flat manifolds of nonnegative Ricci curvature, *Pacific J. Math.* **163** (1994), n 1, 189-199.