MATERIA
Econometría II

TITULACIÓN
Grao en Administración e Dirección de Empresas

unidade didáctica
4

Ciencias Sociais e Xurídicas

Heterocedasticidade

Mª del Carmen López Andión
Economía Cuantitativa
Departamento de Economía Cuantitativa
Facultade de Ciencias Económicas e Empresariais

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

DESCATALOGADO

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

ISBN
978-84-15876-56-4

MATERIA: Econometría II
TITULACIÓN: Grao en Administración e Dirección de Empresas
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Bloque Temático I: Incumprimento das hipóteses do Modelo de Regresión Lineal Clásico

Unidade I. Incumprimento das hipóteses do Modelo de Regresión Lineal Clásico
- Esperanza matemática non nula
- Matriz de varianzas-covarianzas non escalar
- Non normalidade
- Regresores estocásticos
- Non linealidade

Bloque Temático II: O modelo de regresión lineal xeneralizado: hipóteses, propiedades dos estimadores, inferencia e predición

Unidade II. Modelo Xeneralizado
- Hipóteses
- Estimación Mínimo-Cuadrática Xeneralizada.Propiedades dos estimadores.
- O método da matriz de transformación
- Contrastes de hipóteses e predición

Unidade III. Autocorrelación
- Exposición do problema. Causas e consecuencias sobre á estimación MCO
- Autocorrelación de primeira orde
- Métodos para detectar a autocorrelación
- Estimación, contrastación de hipóteses e predición dun modelo con autocorrelación de primeira orde

Unidade IV. Heterocedasticidade
- Exposición do problema. Causas e consecuencias sobre a estimación MCO
- Estruturas de heterocedasticidade
- Métodos para detectar heterocedasticidade
- Estimación, contrastación de hipóteses e predición nun modelo con heterocedasticidade

Bloque Temático III: Modelos dinámicos uniecuacionais. Modelos de series de tempo. Introdución á cointegración

Unidade V. Modelos dinámicos
- Clases de modelos con retardos nas variables
- Modelos con retardos nas variables esóxenas
- Modelos autorregresivos

Unidade VI. Modelos ARIMA e Introdución á cointegración

Modelos ARIMA: definición y conceptos
Modelos ARIMA: Fases de elaboración
Introdución á cointegración

Bloque Temático IV: Microeconometría e decisión.

Unidade VII. Modelos de variable dependente cualitativa

Modelo lineal de probabilidade
Introdución aos modelos logit e probit

Unidade VIII. Introdución os modelos de datos de panel

Exposición xeral
Modelos estáticos: Estimadores alternativos e contrastes de especificación

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

A unidade didáctica que aquí se presenta sitúase no marco da materia Econometría II que se imparte no 3º curso do Grao de Administración e Dirección de Empresas. Esta materia corresponde ao segundo cuadrimestre e necesita dos coñecementos previos adquiridos na materia introdutoria do primeiro cuadrimestre Econometría I.

Como continuación dunha materia do primeiro cuadrimestre na que se estudan os conceptos e ferramentas básicas, a Econometría II complementa e amplía a anterior xa que proporciona ao estudantado técnicas econométricas de dificultade media que permiten a análise cuantitativa da realidade económica e empresarial. Tamén aborda de xeito introdutorio algúns temas de gran relevancia na modelización econométrica proporcionado as ideas básicas e conceptos necesarios para poder abordalos en cursos máis avanzados, se se dá esa circunstancia, con profundidade.

A materia comeza cunha primeira unidade na que da unha visión xeral moi esquemática das consecuencias que ten o incumprimento das hipóteses do Modelo de Regresión Lineal Normal Clásico (MRLNC), estudado en Econometría I, sobre a estimación mínimo-cuadrática ordinaria (MCO).

A unidade II aborda con maior detalle algúns dos incumprimentos analizados brevemente na unidade anterior e engloba o modelo xeneralizado, a súa estimación, contrastación de hipóteses e predición. Este modelo xorde cando se incumpren as hipóteses de incorrelación e/ou de homocedasticidade do MRLNC.

Nas unidades III e IV preséntanse por separado os dous casos particulares aos que da lugar o modelo xeneralizado: a autocorrelación e a heterocedaticidade, destacando as causas, as consecuencias sobre a estimación MCO e os métodos para detectar estas situacións así como os métodos de estimación, os contrastes de hipóteses e a predición axeitados en cada situación.

Nesta unidade desenvólvese a problemática relacionada coa heterocedasticidade, situación que se pode producir nos modelos econométricos cando se traballa con mostras de corte transversal, é dicir, información estatística recollida nun determinado momento do tempo sobre diferentes unidades económicas, familias, empresas, rexións, países, etc.

A unidade V, centrada na problemática relacionada co traballo con series de tempo, aborda modelos econométricos uniecuacionais que inclúen relacións non contemporáneas entre as variables que interveñen nos mesmos. A seguinte unidade incorpora a análise de series temporais univariantes, estudando as súas características evolutivas e a dependencia entre as súas observacións. Ademais, introduce o concepto de proceso estocástico, a definición de estacionariedade, e desenvolve a tipoloxía de modelos univariantes, e as distintas fases de elaboración dun modelo ARIMA. Por último, trátase de modo introdutorio o fenómeno da regresión espuria e a interpretación de cointegración entre dúas series temporais coa mesma orde de integración, así como algúns contrastes para detectala.

As dúas últimas unidades abordan modelos que na actualidade teñen adquirido unha gran difusión, en parte pola dispoñibilidade de amplas bases de datos que permiten a aplicación das técnicas econométricas adecuadas para os mesmos. A unidade VII introduce sucintamente algúns modelos nos que a variable dependente é de natureza cualitativa. Na unidade VIII desenvólvese o tratamento da combinación de series temporais e datos de corte transversal. Esta metodoloxía é importante de cara o futuro profesional do estudantado, xa que tanto no ámbito empresarial como económico é frecuente encontrarse ante este tipo de datos.

O programa da materia inclúe unha última unidade de carácter transversal sobre emprego de aplicacións informáticas dirixida a que o alumnado aprenda o manexo de software econométrico. O paquete econométrico de uso común no centro é o Eviews, pero o alumnado pode utilizar tamén software de uso libre, como o GRETL.

A unidade didáctica ten asignadas dúas sesións expositivas, nas que se desenvolverán os contidos teóricos, e dúas sesións interactivas onde se levarán a cabo prácticas con ordenador para a resolucións de exercicios de heterocedasticidade aplicados á realidade económico-empresarial. A totalidade de horas empregadas é de 7, 2 expositivas e 5 interactivas.

Esta materia comparte algúns contidos coa materia Econometría do Máster en Economía: Organización Industrial e Mercados Financeiros, máster oficial da Universidade de Santiago de Compostela, polo que esta unidade didáctica pode ser utilizada polo alumnado do mesmo, especialmente o que non teña estudos previos de Econometría.

OS OBXECTIVOS

Ao rematar a unidade didáctica o alumnado será capaz de:

— **obxectivo 1.** Explicar a natureza e o significado da heterocedasticidade e saber en que situacións pode estar presente;

— **obxectivo 2.** Distinguir os tipos de heterocedasticidade máis habituais que poden presentar os modelos econométricos;

— **obxectivo 3.** Aplicar correctamente os diferentes contrastes para detectar a presenza de heterocedasticidade nun modelo;

— **obxectivo 4.** Describir como se pode estimar axeitadamente un modelo que presente heterocedasticidade tanto se adopta unha forma coñecida como descoñecida;

— **obxectivo 5.** Adquirir destreza no manexo de paquetes informáticos específicos de Econometría no caso concreto da detección e tratamento da heterocedasticidade;

— **obxectivo 6.** Mellorar a capacidade de traballo en equipo.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

A metodoloxía utilizada está relacionada co carácter aplicado da materia á problemática económica e empresarial.

A presentación dos contidos faise nas sesións expositivas proporcionándolle ao alumnado os recursos adicionais no curso virtual para o correcto proceso de aprendizaxe autónoma. O curso virtual emprégase non só como repositorio de materiais senón coma unha ferramenta de interacción entre alumnado e profesorado a través de foros, mensaxería, etc.

As clases interactivas desenvólvense na aula de informática en grupos de alumnos/as máis reducidos para que o estudantado consiga unha maior comprensión dos contidos básicos, se familiarice coas novas ferramentas informáticas e coa resolución de problemas concretos no ámbito económico-empresarial.

Estas sesións teórico-prácticas poderán complementarse con actividades concretas que o alumnado deberá realizar de forma autónoma, nas que se desenvolverán habilidades para elaborar e presentar estudos referentes á realidade empresarial. Estas actividades detállanse no apartado Actividades propostas.

OS CONTIDOS BÁSICOS

Os contidos estrutúranse da seguinte forma. En primeiro lugar preséntase o problema da heterocedasticidade, as súas posibles causas e as consecuencias para a estimación por MCO. En segundo lugar móstranse as diferentes formas de detectar a súa presenza nun modelo econométrico. Por último estúdase a forma máis axeitada de abordar a estimación dun modelo se concluímos que as perturbacións son heterocedásticas.

1. Exposición do problema. Causas e consecuencias sobre a estimación MCO

1.1. Introdución

A existencia de heterocedasticidade nun modelo econométrico supón o incumprimento dunha das hipóteses do modelo clásico, a referida a varianza dos diferentes termos de perturbación. No modelo clásico supoñemos que $Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 \ \forall t$ o cal significa que as perturbacións correspondentes ás diferentes observacións mostrais presentan igual dispersión arredor do seu valor esperado, é dicir, teñen a mesma varianza. Esta hipótese xunto coas restantes hipóteses do modelo clásico implica tamén a mesma varianza para a distribución do regresando, é dicir, $Var(y_t) = \sigma^2 \ \forall t$. Graficamente este suposto estaría representado na figura 1

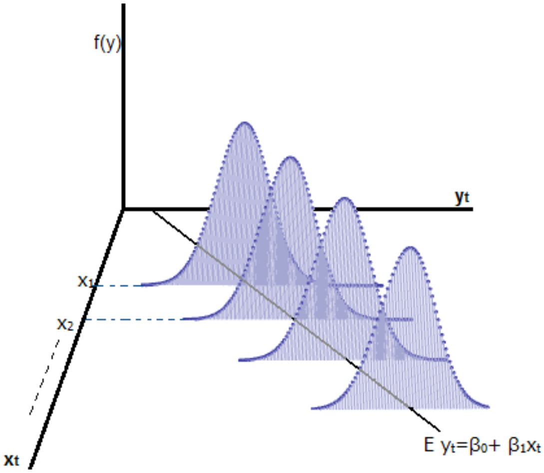

Figura 1. Homocedasticidade

Diremos, polo tanto que existe heterocedasticidade cando as perturbacións non teñen todas a mesma varianza, e en xeral isto podémolo escribir así

$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 \quad t = 1,, 2, ...T$

Un exemplo desta situación sería o da figura 2.

Aínda que o problema da heterocedasticidade se pode presentar en mostras temporais, o máis frecuente é que apareza cando traballamos con series atemporais, ao contrario do que ocorría coa autocorrelación. Isto é debido a que unha das causas máis frecuentes de que se produza esta situación é o incremento na varianza do regresando (e polo tanto da perturbación) a medida que o fai o valor dalgún regresor e, en xeral, a variabilidade dos regresores é maior en mostras atemporais.

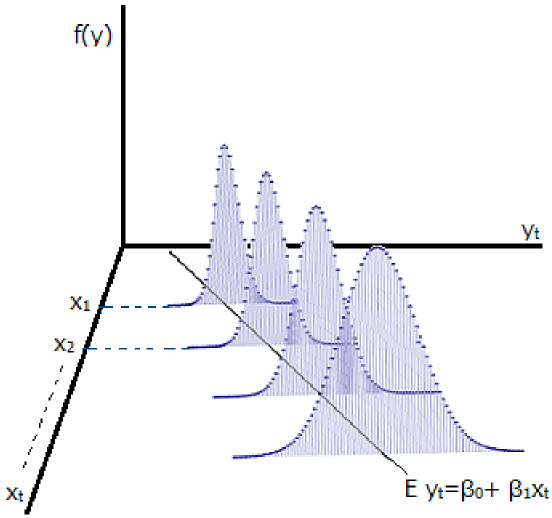

Figura 2. Exemplo de heterocedasticidade

Vexamos algún exemplo de heterocedasticidade. Consideremos un estudo transversal referido ao comportamento de T individuos no que relacionamos o consumo (y_t) e a renda dos mesmos (x_t). Esta relación vén dada polo modelo $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$. Dispoñemos dunha mostra na que o máis probable é que algunhas observacións correspondan a individuos con rendas elevadas e outras a individuos con baixos niveis de renda. Neste tipo de estudos é de esperar que os individuos con ingresos baixos teñan unha variabilidade do consumo moi pequena; poderán consumir só un pouco por encima ou por debaixo da media. O consumo non se pode reducir moi por debaixo da media porque se chegaría ó nivel mínimo necesario para a supervivencia e non pode aumentar moi por encima do nivel medio porque a renda, ao ser pequena, non o faría posible. Estas limitacións non se van dar en individuos con altos niveis de ingresos. Neste caso o consumo pode variar en maior ou menor medida para cada individuo xa que teñen maior oportunidade para elixir como dispoñer dos seus ingresos. Este exemplo podémolo ver graficamente na figura 3.

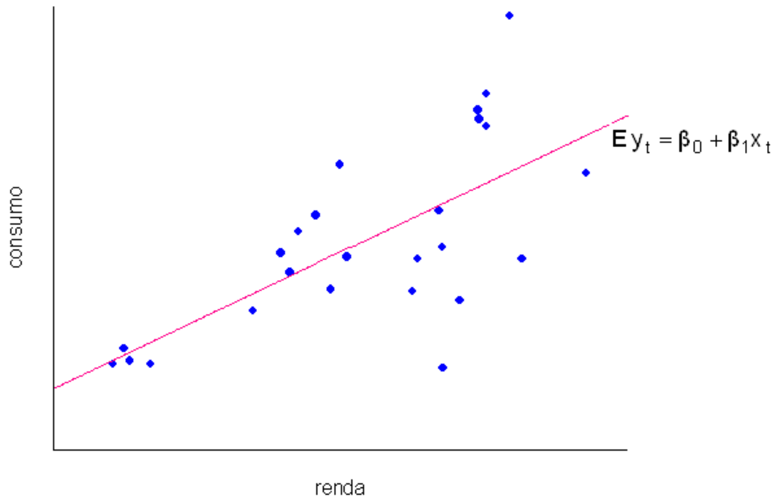

Figura 3. Nube de puntos e recta de regresión poboacional

A medida que aumenta a renda dáse unha maior variabilidade no consumo e, polo tanto, na perturbación aleatoria xa que a varianza de cada y_t é igual á varianza de cada ε_t. Na figura as distancias entre os puntos da nube e a recta de regresión real son as perturbacións. Para valores baixos da renda a perturbación toma valores pequenos e a súa varianza e polo tanto moi reducida. Porén, para valores elevados da renda a variabilidade da perturbación é maior. Esta situación observada correspóndese coa situación teórica da figura 2.

Se no canto de corresponder as observacións de consumo e renda a distintos individuos nun mesmo momento do tempo, correspondesen a un mesmo individuo ao longo de varios períodos de tempo o máis probable é que esa renda non sexa demasiado variable co que aínda que a varianza da perturbación tenda a aumentar coa renda, como a variabilidade da renda será moito menor, tamén a varianza da perturbación será aproximadamente constante. Se a mostra é temporal é menos probable que exista heterocedasticidade xa que as variables económicas acostuman a evolucionar de forma lenta a través do tempo e, polo tanto, a varianza da perturbación non sofre grandes alteracións.

Unha situación similar de heterocedasticidade poderíase presentar se relacionamos os dividendos repartidos polas empresas cos beneficios obtidos polas mesmas. Aquelas con altos niveis de beneficios acostuman a presentar máis variabilidade en canto á súa política de dividendos cás de menores ganancias.

En conclusión, existe heterocedasticidade cando $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$. Se supoñemos que as demais hipóteses do modelo clásico se cumpren, teríamos en xeral a seguinte matriz de varianzas-covarianzas das perturbacións:

$$V = E\varepsilon\varepsilon' = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_T^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \sigma_1^2/\sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2/\sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_T^2/\sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \Omega$$

Trátase polo tanto dun modelo de regresión lineal xeneralizado e esta matriz xa non é escalar senón que é igual a unha constante, σ^2, por unha matriz definida positiva, Ω. A constante non é a varianza da perturbación, porque non existe unha única varianza para todas. Pode ser a varianza dunha concreta ou simplemente un factor de proporcionalidade ou escala.

1.2. Causas da existencia de heterocedasticidade

Entre as posibles causas de heterocedasticidade podemos citar as seguintes.

— A natureza e o tamaño dalgunhas variables poden orixinar perturbacións heterocedásticas. Pode ocorrer que a variabilidade do regresando -e polo tanto a da perturbación- garde relación cos valores que tome algunha variable explicativa. Así, como se comentou no exemplo inicial , é habitual que a variabilidade no consumo dos individuos aumente a medida que o fai a súa renda. Se isto ocorre, o modelo que relaciona ambas variables presentará heterocedasticidade.

— Erros na especificación do modelo, ben por omisión de variables relevantes ben por unha forma funcional incorrecta, por exemplo, por considerar un modelo lineal nas variables cando a verdadeira relación é lineal nos logaritmos das variables.

— A agregación de datos - totais ou medias dun grupo de individuos- cando o comportamento deses individuos pode ser explicado mediante un modelo clásico.

— A formulación de modelos nos que o regresando é unha variable cualitativa.

1.3. Consecuencias sobre a estimación MCO

Se un modelo presenta heterocedasticidade e o estimamos por mínimos cadrados ordinarios atoparémonos con que:

— os estimadores MCO son lineais e innesgados, pero no son os óptimos, xa que existen outros estimadores con varianzas máis pequenas, os estimadores mínimo-cuadráticos xeneralizados (MCX); tamén seguirán sendo consistentes;

— as súas varianzas e covarianzas estimadas están nesgadas;

— os contrastes de hipóteses baseados nos resultados da estimación MCO non son válidos porque os estatísticos de proba que se utilizan non seguirán as distribucións que lles atribuímos;

— as predicións obtidas a partir de MCO xa non son as óptimas.

2. Estruturas de heterocedasticidade

A heterocedasticidade nun modelo pode adoptar diferentes formas. Veremos a continuación as máis comúns.

Un suposto habitual é que a varianza da perturbación varíe en función dos valores dalgunha variable explicativa. Isto ocorrerá se a orixe da heterocedasticidade é o tamaño dalgunha ou algunhas das variables x_{it}. Polo tanto, pódese considerar algunha estrutura do tipo

$$\sigma_t^2 = f(x_{it})$$

Sendo f(.) unha forma funcional axeitada, por exemplo, no caso máis simple,

$$f(x_{it}) = \sigma_t^2 x_{it} \text{ ou } f(x_{it}) = \sigma_t^2 x_{it}^2$$

No primeiro caso a matriz de varianzas-covarianzas das perturbacións quedaría

$$V = E\varepsilon\varepsilon' = \begin{bmatrix} \sigma^2 x_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 x_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 x_{iT} \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} x_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{iT} \end{bmatrix} = \sigma^2 \Omega$$

No segundo caso teriamos

$$V = E\varepsilon\varepsilon' = \begin{bmatrix} \sigma^2 x_{i1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 x_{i2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 x_{iT}^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} x_{i1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{i2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{iT}^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \Omega$$

Incluso poden aparecer varias variables na función sen ser necesariamente os regresores do modelo

Outro tipo de heterocedasticidade que se pode presentar con certa frecuencia, sobre todo se traballamos con determinados tipos de datos, é a chamada heterocedasticidade por grupos. Caracterízase pola existencia de diferentes grupos de perturbacións con varianzas distintas entre si pero iguais dentro de cada grupo. Isto leva que a matriz de varianzas-covarianzas adopte a forma:

$$V = E\varepsilon\varepsilon' = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \sigma_1^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \sigma_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_2^2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_2^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \sigma_p^2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \sigma_p^2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \sigma_p^2
\end{array}\right]$$

supoñendo que, se temos en conta algún criterio, podemos considerar **p** grupos dentro da mostra, cada un cun determinado tamaño T_i , para i=1,2,...p.

A anterior matriz pódese expresar de xeito resumido particionada en submatrices

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_{T_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{T_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_p^2 I_{T_p} \end{bmatrix}$$

ou, alternativamente, se multiplicamos e dividimos por unha varianza calquera, por exemplo a do primeiro grupo:

$$V = \sigma_1^2 \begin{bmatrix} I_{T_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} I_{T_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_p^2}{\sigma_1^2} I_{T_p} \end{bmatrix}$$

Se definimos $k_i = \sigma_i^2 / \sigma_1^2$, que indica a proporción que representa a varianza de cada grupo respecto da varianza do grupo 1, a matriz V terá como expresión xeral

$$V = \sigma_1^2 \begin{bmatrix} I_{T_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 I_{T_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_p I_{T_p} \end{bmatrix} = \sigma_1^2 \Omega$$

Este tipo de heterocedasticidade pode aparecer, por exemplo, cando traballamos cunha combinación de series temporais e atemporais, é dicir, datos correspondentes a diferentes unidades económicas observados ao longo de varios períodos de tempo.

3. Métodos para detectar a heterocedasticidade

Para detectar a posible presenza de heterocedasticidade nun modelo econométrico dispoñemos de diferentes criterios baseados na análise dos residuos da estimación MCO, e_t. Considerámolos como aproximacións aos valores descoñecidos das perturbacións xa que asintoticamente teñen a mesma distribución de probabilidade. En primeiro lugar expoñemos algunhas representacións gráficas que poden axudar na detección da heterocedasticidade e a continuación explicamos algúns dos contrastes máis utilizados.

3.1. As representacións gráficas

Existen diferentes representacións gráficas relacionadas cos residuos que poden axudar a determinar a existencia de heterocedasticidade. Unha primeira aproximación consiste en representar graficamente os residuos ordenados en función dalgún criterio, por exemplo segundo valores crecentes dalgunha variable explicativa que garde relación coa varianza da perturbación. A aparición dun gráfico do tipo dos representados a continuación pode indicar a posible presenza de heterocedasticidade. No caso da figura 4 a) a dispersión dos residuos aumenta a medida que o fan os valores da variable. No caso menos frecuente da figura 4 b), a variabilidade dos residuos diminúe.

Tamén se poden representar os residuos fronte aos valores das diferentes variables explicativas do modelo. Un exemplo desta representación que indicaría heterocedasticidade é o da figura 5

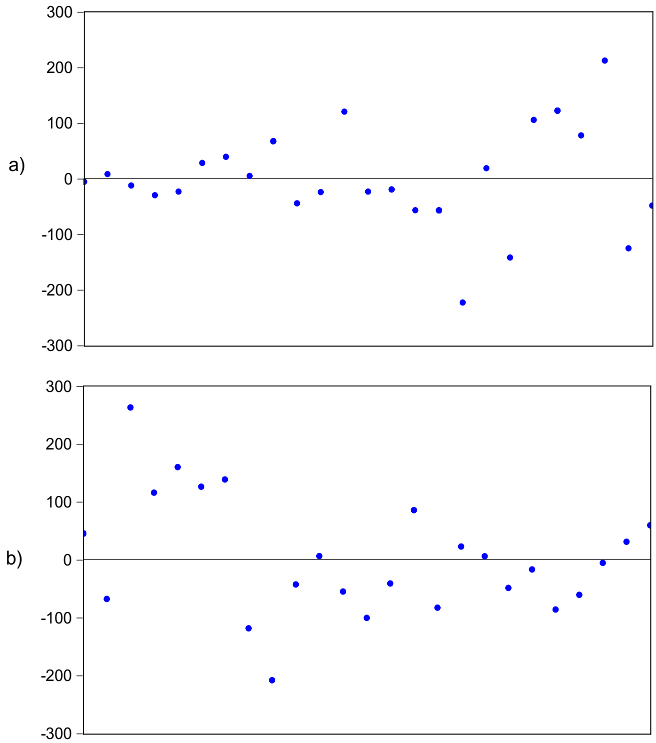

Figura 4. Residuos MCO ordenados en función dos valores crecentes dunha variable explicativa

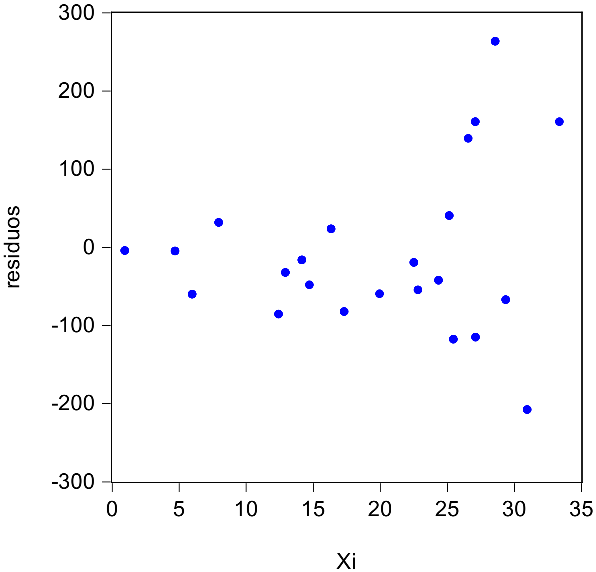

Figura 5. Gráfica dos residuos MCO fronte a valores de X_i

Todas estas representacións gráficas constitúen un indicio, pero non unha proba formal de existencia de heterocedasticidade

3.2. Os contrastes de heterocedasticidade

Existe unha gran variedade de contrastes que se poden utilizar para detectar a presenza de diferentes estruturas de heterocedasticidade. Entre eles podemos citar o test de White, o de Golfeld e Quandt, o test da razón de verosimilitude ou o test de Breusch–Pagan-Godfrey. O test da razón de verosimilitude é un test bastante xeral, pero especialmente útil para detectar heterocedasticidade por grupos. Unha descrición detallada do mesmo atópase en Guisán (1997, 91). O contraste de Breusch–Pagan-Godfrey pódese consultar en Greene (1999, 479) entre outros. A continuación explicamos o procedemento a seguir nos tests citados en primeiro lugar.

3.2.1. Test de White

Foi proposto en 1980 e trátase dun test asintótico moi xeral no sentido de que para a súa aplicación non se precisa ningún suposto especial sobre a forma que pode adoptar a heterocedasticidade. Para aplicalo necesitamos en primeiro lugar estimar o modelo orixinal por MCO e obter os residuos, e_t. En segundo lugar temos que estimar por MCO unha regresión auxiliar na que a variable dependente son os cadrados deses residuos. Como regresores aparecen as variables explicativas do modelo, os seus cadrados e os produtos cruzados das mesmas. Co R^2 obtido nesta regresión construímos o estatístico de proba do contraste no que a hipótese nula é a de homocedasticidade fronte a alternativa de existencia de heterocedasticidade. Este estatístico defínese como TR^2 , onde T é o tamaño da mostra, e asíntoticamente, baixo a hipótese nula segue unha distribución χ^2 con **n** graos de liberdade, sendo n o número de regresores da regresión auxiliar do contraste excluído o ficticio. Así, se na ecuación do modelo aparecen, por exemplo, dúas variables explicativas, a ecuación auxiliar do contraste sería:

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \alpha_3 x_{1t}^2 + \alpha_4 x_{2t}^2 + \alpha_5 x_{1t} x_{2t} + v_t$$

e polo tanto **n**= 5. Como o cadrado do residuo é unha aproximación a varianza da perturbación, un R^2 próximo a cero estará indicando que ningún dos regresores desa ecuación auxiliar garda relación coa varianza da perturbación. Polo tanto se $TR^2 > \chi_n^{2(\alpha)}$ rexeitamos a hipótese nula.

Cando no modelo no que realizamos o contraste existe un número amplo de variables explicativas, pode ser excesivo o número de regresores da ecuación auxiliar, sobre todo se o tamaño mostral non é grande. Unha alternativa neste caso pasa por non ter en conta os produtos cruzados á hora de estimar a ecuación auxiliar co que no exemplo anterior non aparecería $x_{1t}x_{2t}$ e **n**= 4.

3.2.2.Test de Goldfeld e Quandt

Este contraste proposto en 1965 é un test indicado para todo tipo de mostras, que se pode aplicar cando na mostra podemos distinguir dous grupos de observacións con diferente varianza da perturbación. Tamén está indicado para situacións nas que a varianza da perturbación garda relación cos valores dalgunha variable, xeralmente unha das variables explicativas.

No primeiro caso, baixo a hipótese de homocedasticidade a varianza da perturbación sería a mesma nos dous grupos, mentres que baixo a hipótese alternativa, a varianza sería distinta. O contraste aplícase dividindo a mostra nos dous grupos de T_1 e T_2 observacións e levando a cabo a estimación MCO do modelo para cada grupo por separado. O estatístico de proba defínese a partir das sumas de cadrados dos residuos (SCE) das dúas regresións (SCE_1 y SCE_2):

$$GQ=\frac{SCE_2/(T_2-k-1)}{SCE_1/(T_1-k-1)}$$

no que supoñemos que SCE_2 é a suma dos cadrados dos residuos da regresión con T_2 observacións, grupo ao que lle corresponde a maior varianza da perturbación. Baixo a hipótese nula de homocedasticidade este estatístico segue unha distribución F con T_2-k-1 e T_1-k-1 graos de liberdade. Se $GQ > F^{\alpha}_{T_2-k-1,\,T_1-k-1}$ rexéitase a hipótese nula.

No segundo caso pódese proceder do seguinte xeito. Supoñamos que se pensa que σ_t^2 está relacionada positivamente coa variable explicativa x_{it}. Entón o contraste de

H_0: $\sigma_t^2=\sigma^2$

H_1: $\sigma_t^2=f(x_{it})$

consiste en:

— Ordenar as observacións mostrais segundo os valores crecentes de x_{it}.

— Omitir un número a determinar de observacións centrais (c).

— Estimar dúas veces o modelo orixinal, unha coas $\frac{T-c}{2}$ primeiras observacións mostrais (que se corresponden cos valores máis pequenos de x_{it}) e outra coas $\frac{T-c}{2}$ últimas observacións da mostra (as correspondentes aos valores máis grandes de x_{it})

— Sexan SCE_1 e SCE_2 as sumas dos cadrados dos residuos das dúas regresións, onde o subíndice 1 corresponde á dos valores máis pequenos de x_{it}. Entón, baixo o suposto de homocedasticidade das perturbacións, o estatístico $GQ=\frac{SCE_2}{SCE_1}$ distribúese como unha F con m graos de liberdade no numerador e m graos de liberdade no denominador, sendo $m=\frac{T-c}{2}-(k+1)$.

A idea deste contraste é a seguinte: se existe heterocedasticidade do tipo suposto dende un principio entón, coa ordenación da mostra, a varianza da perturbación será maior cara o final da mostra (cando a variable x_{it} toma os valores máis grandes). Como o cadrado dos residuos está asociado coa varianza de ε_t, a SCE_2 debería ser sensiblemente superior á SCE_1. Polo tanto, se $GQ > F^{\alpha}_{m,m}$ rexeitamos a hipótese nula.

Observacións:

— Recoméndase que o número c de observacións centrais que se suprimen non exceda da terceira parte das observacións mostrais.

— Se se pensa que a varianza da perturbación pode depender inversamente dos valores da variable x_{it}, deberíase ordenar a mostra en función dos valores decrecentes da devandita variable e proceder da maneira xa explicada. Desta forma, se existe heterocedasticidade, a SCE_2 será sensiblemente superior á SCE_1.

— Se non se rexeita a hipótese nula, isto non significa que non exista heterocedasticidade, dado que esta podería estar asociada a outra variable, e sería conveniente repetir o proceso con outras variables.

Un exemplo de aplicación deste test cando temos dous grupos de observacións con diferente varianza pódese consultar en Hill, Griffiths e Lim (2012, 307).

4. Estimación, contrastes de hipóteses e predición con heterocedasticidade

A forma adecuada de abordar a estimación dun modelo con heterocedasticidade vai depender de se coñecemos ou non a forma que pode adoptar a mesma. Se coñecemos ou temos unha idea aproximada desa estrutura podemos aplicar o método de mínimos cadrados xeneralizados (MCX). Se descoñecemos a estrutura de heterocedasticidade podemos aplicar MCO para estimar os parámetros da ecuación do modelo e utilizar a corrección de White para obter un estimador consistente da matriz V(b).

4.1. A estimacion por mínimos cadrados xeneralizados

A estimación por mínimos cadrados xeneralizados pódese efectuar directamente ou transformando o modelo con heterocedasticidade nun modelo clásico e aplicando neste MCO. As dúas alternativas conducen ao mesmo resultado

$$\tilde{b} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y = (X^{*\prime}X^{*})^{-1}X^{*\prime}y^{*} \text{ con } X^{*} = PX \text{ e } y^{*} = Py$$

se temos en conta que a matriz de transformación P debe cumprir como condición $P'P = \Omega^{-1} = \sigma^2 V^{-1}$.

Para a transformación do modelo necesitamos a matriz P que vai depender de Ω e esta, da forma da matriz de varianzas-covarianzas das perturbacións e polo tanto do tipo de heterocedasticidade existente.

Así, se consideramos o primeiro exemplo do epígrafe 2, $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2 x_{it}$, que implica considerar que a varianza da perturbación está relacionada cos valores dunha determinada variable explicativa, as matrices Ω^{-1} e P serían respectivamente

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_{i1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{i2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x_{iT}} \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_{i1}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{x_{i2}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{x_{iT}}} \end{bmatrix}$$

O modelo transformado, que adopta en xeral a expresión $y^* = X^*\beta + \varepsilon^*$ ou o que é o mesmo, $Py = PX\beta + P\varepsilon$ sería neste caso

$$\begin{bmatrix} \frac{y_1}{\sqrt{x_{i1}}} \\ \frac{y_2}{\sqrt{x_{i2}}} \\ \vdots \\ \frac{y_T}{\sqrt{x_{iT}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_{i1}}} & \frac{x_{11}}{\sqrt{x_{i1}}} & \cdots & \frac{x_{k1}}{\sqrt{x_{i1}}} \\ \frac{1}{\sqrt{x_{i2}}} & \frac{x_{12}}{\sqrt{x_{i2}}} & \cdots & \frac{x_{k2}}{\sqrt{x_{i2}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{x_{iT}}} & \frac{x_{1T}}{\sqrt{x_{iT}}} & \cdots & \frac{x_{kT}}{\sqrt{x_{iT}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{x_{i1}}} \\ \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{x_{i2}}} \\ \vdots \\ \frac{\varepsilon_T}{\sqrt{x_{iT}}} \end{bmatrix}$$

Modelo transformado que en notación ordinaria podemos expresar como:

$$\frac{y_t}{\sqrt{x_{it}}} = \beta_0 \frac{1}{\sqrt{x_{it}}} + \beta_1 \frac{x_{1t}}{\sqrt{x_{it}}} + \ldots.. + \beta_k \frac{x_{kt}}{\sqrt{x_{it}}} + \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{x_{it}}} \text{ con t=1,2,...T}$$

Se agora definimos as variables transformadas

$$y_t^* = \frac{y_t}{\sqrt{x_{it}}}, \qquad x_{0t}^* = \frac{1}{\sqrt{x_{it}}}, \qquad x_{1t}^* = \frac{x_{1t}}{\sqrt{x_{it}}}, \qquad x_{kt}^* = \frac{x_{kt}}{\sqrt{x_{it}}}, \qquad \varepsilon_t^* = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{x_{it}}},$$

o anterior modelo quedaría

$$y_t^* = \beta_0 x_{0t}^* + \beta_1 x_{1t}^* + \ldots.. + \beta_k x_{kt}^* + \varepsilon_t^*$$

Modelo no que se pode comprobar que a nova perturbación cumpre o suposto de homocedasticidade.

$$E(\varepsilon_t^*)^2 = E\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{x_{it}}}\right)^2 = \frac{1}{x_{it}} E\varepsilon_t^2 = \frac{1}{x_{it}} \sigma^2 x_{it} = \sigma^2$$

A estimación MCO do modelo transformado coincide coa estimación MCX do modelo orixinal. Deste xeito temos estimadores lineais, innesgados e óptimos dos parámetros da ecuación do modelo.

A estimación por MCX no caso de heterocedasticidade coñécese tamén co nome de Mínimos Cadrados Ponderados.

No caso da heterocedasticidade en grupos, como vimos anteriormente, a matriz Ω sería:

$$\Omega = \begin{bmatrix} I_{T_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 I_{T_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_p I_{T_p} \end{bmatrix}$$

Entón

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} I_{T_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} I_{T_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k_p} I_{T_p} \end{bmatrix}$$

E a matriz de transformación adecuada

$$P = \begin{bmatrix} I_{T_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k_2}} I_{T_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{k_p}} I_{T_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{T_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1}{\sigma_2} I_{T_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_1}{\sigma_p} I_{T_p} \end{bmatrix}$$

xa que $k_i = \sigma_i^2 / \sigma_1^2$.

Pódese comprobar que a perturbación do modelo transformado mediante esta matriz é homocedástica xa que

$$E(\varepsilon_t^*)^2 = E\left(\frac{\varepsilon_t}{\sqrt{k_i}}\right)^2 = \frac{1}{k_i} E\,\varepsilon_t^2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_i^2}\sigma_i^2 = \sigma_1^2$$

Neste caso, tanto se estimamos directamente por MCX como se transformamos o modelo e lle aplicamos MCO, atopámonos con que Ω e P son descoñecidas e hai que estimalas. A estimación consistente das mesmas pasa por estimar os k_i da seguinte forma:

$\hat{k}_i = \hat{\sigma}_i^2 / \hat{\sigma}_1^2$ sendo $\hat{\sigma}_i^2 = SCE_i / T_i$, $SCE_i = \sum_{t=1}^{T_i} e_t^2$ e e_t os residuos da estimación MCO do modelo utilizando a totalidade da mostra.

O procedemento seguido neste caso coñécese co nome de estimación por mínimos cadrados xeneralizados factibles (MCXF). Aplícase cando a matriz Ω é descoñecida e baséase en substituír a matriz descoñecida Ω na estimación MCX (ou P, de ser o caso) por un estimador consistente da mesma.

Para utilizar adecuadamente procedemento de estimación por MCX é importante identificar correctamente a forma concreta que adopta a heterocedasticidade no modelo. De non ser así, a aplicación de MCX non suporía ningunha vantaxe sobre MCO. Unha forma de comprobar isto consiste en ver se no modelo transformado, que debe ser un modelo clásico, a aplicación de diferentes tests de heterocedasticidade nos leva a concluír que este problema xa non existe.

Se queremos efectuar contrastes de hipóteses sobre os parámetros cando existe heterocedasticidade, o máis práctico é aplicalos no modelo transformado. Dado que este modelo é un modelo clásico, podemos utilizar os estatísticos de proba xa vistos nese modelo.

Se queremos utilizar o modelo para predicir o comportamento do regresando, a predición óptima é a que se basea na estimación MCX, en concreto a fórmula do predictor óptimo será $\hat{y}_\tau = X'_\tau \tilde{b}$, onde τ indica o período de predición ou, se os datos son atemporais, unha unidade económica extramostral.

4.2. Estimación cando se descoñece a estrutura da heterocedasticidade

En ocasións non resulta doado acertar co tipo de heterocedasticidade presente no modelo. Pode ocorrer que, despois de ter en conta un tipo determinado e utilizalo para corrixir a heterocedasticidade, os contrastes efectuados no modelo transformado conclúan que segue existindo ese problema.

Sabemos que os estimadores MCO en presenza de heterocedasticidade seguen sendo innesgados, pero non o son os estimadores das súas varianzas e covarianzas. Este feito invalida os contrastes de hipóteses sobre os parámetros. Para resolver este problema, White en 1980 propuxo unha alternativa para estimar a matriz de varianzas-covarianzas dos estimadores MCO, V(b), de forma que se obteña un estimador consistente da mesma. para así conseguir que os contrastes de hipóteses baseados nela teñan validez asintótica. Deste xeito podemos utilizar MCO como procedemento de estimación para os parámetros da ecuación do modelo xunto cun procedemento específico para obter as varianzas e covarianzas estimadas no caso no que se descoñeza a estrutura da heterocedasticidade

Dado que a verdadeira matriz de varianzas-covarianzas dos estimadores MCO nun modelo xeneralizado é:

$$V(b) = E(b-\beta)(b-\beta)' = (X'X)^{-1}X'VX(X'X)^{-1}$$

Como os elementos de V son descoñecidos a proposta consiste en utilizar os residuos MCO ao cadrado no canto de σ^2 e, deste xeito, a estimación da anterior matriz sería:

$$\hat{V}(b) = (X'X)^{-1}X'\begin{bmatrix} e_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_T^2 \end{bmatrix}X(X'X)^{-1}$$

matriz que tamén se pode expresar como

$$\hat{V}(b) = (X'X)^{-1}\left(\sum_{t=1}^{T} e_t^2 X_t X'_t\right)(X'X)^{-1}$$

se temos en conta que $X'_t = (1\ x_{1t}\ x_{2t}\ldots\ldots x_{kt})$.

Opcionalmente pódese incluír o axuste polos grao de liberdade, T/(T-k-1), procedemento este último similar ao utilizado no modelo clásico para estimar σ^2. Os resultados nos dous casos son asintoticamente equivalentes. A variante seguida na práctica soe ser a que incorpora o software econométrico utilizado.

Así obtemos estimacións das varianzas e covarianzas robustas á heterocedasticidade, coñecidas tamén co nome de *erros standard robustos á heterocedasticidade* ou *matriz de covarianzas de White consistente á heterocedasticidade*.

Finalmente, cando a heterocedasticidade sexa debida a algún erro de especificación, a solución axeitada sería corrixir ese erro, pero é evidente que se o coñecésemos, probablemente non teríamos incorrido nel, polo tanto é habitual utilizar algún dos procedementos antes descritos.

ACTIVIDADES PROPOSTAS

Actividades do alumnado na aula

— Realización dunha práctica sobre heterocedasticidade na que con datos reais o alumnado aprenda a detectar a existencia deste problema coa aplicación de diferentes contrastes estatísticos e a propoñer solucións para o tratamento do mesmo.

— Resolución dun caso práctico mediante un traballo en grupo. Os grupos, de tres membros como máximo, son establecidos pola profesora. Na aula de informática cada grupo de forma colaborativa debe ir dando resposta ás cuestións propostas e elaborar un informe coas súas conclusións. Todas as fases desta actividade contan co soporte da aula virtual

Actividades do alumnado fóra da aula.

— Realización dun exercicio práctico coa finalidade de consolidar os coñecementos adquiridos na aula.

— Reunión dos membros de cada grupo para elaborar as conclusións do caso práctico desenvolvido na aula de informática.

AVALIACIÓN DA UNIDADE DIDÁCTICA

A avaliación desta unidade didáctica constará:

— Participación activa nas clases e resolución da actividade en grupo proposta. Constitúe o 10% da nota da materia na que se valorará fundamentalmente a corrección da interpretación dos resultados, a claridade expositiva, a presentación formal e a interconexión entre as partes do informe presentado.

— Realización dunha proba do bloque temático II no que se encadra esta unidade didáctica, no que a parte correspondente á mesma supoña o 30% da cualificación total.

— Realización dun exame final no que a parte correspondente a esta unidade didáctica supoña o 12% da cualificación total.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso Antón, Aurora, Javier Fernández Macho e Inmaculada. Gallastegui Zulaica (2005): *Econometría*, Madrid: Pearson Educación, S. A.
Greene, William H. (1999): *Análisis Econométrico*, Madrid: Prentice Hall Iberia.
Guisán, Mª del Carmen (1997): *Econometría*, Madrid: McGraw-Hill.
Hill, R. Carter, William E. Griffiths e Guay C. Lim (2012): *Principles of Econometrics*, Asia: John Wiley & Sons.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA