

PABLO GONZÁLEZ SEQUEIROS

A DINÁMICA

DOS

MOSAICOS DE ROBINSON

107

2006

**Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología**

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

PABLO GONZÁLEZ SEQUEIROS

A DINÁMICA

DOS

MOSAICOS DE ROBINSON

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección do profesor Fernando Alcalde Cuesta, para obter o Grao de Licenciado en Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levouse a cabo a súa defensa o día 23 de febreiro de 2006 na Facultade de Matemáticas de dita universidade, obtendo a cualificación de Sobresaliente.

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 84-89390-24-X

Dep. Leg.: C-1395/2006

Ós meus pais.

Agradecementos

Quixera aproveitar estas liñas para mostrar o meu agradecemento a Fernando Alcalde, polo valioso tempo invertido na miña formación e pola oportunidade de tratar as Matemáticas do xeito ata o de agora máis próximo ao que idealizara cando pensaba en vir estudar a Santiago.

Tamén aos compañeiros da Licenciatura e do Departamento, por todas esas horas xuntos de traballo e de leria.

Por suposto, sen que precise explicación, á miña familia e amigos.

Índice

Introdución	1
1 Mosaicos	3
1.1 Definicións e propiedades básicas	3
1.2 Discretización	14
2 Os mosaicos de Robinson	19
2.1 As prototeselas de Robinson	19
2.2 Os mosaicos de Robinson	21
3 O espazo dos mosaicos de Robinson	27
3.1 A topoloxía de Gromov-Hausdorff	27
3.2 O espazo foliado de Gromov-Hausdorff	31
3.3 Mosaicos aperiódicos e repetitivos	35
3.4 O espazo dos mosaicos de Robinson.	40
3.5 Dinámica medible.	44
3.6 Propiedades ergódicas.	51

Introdución

Un *mosaico* ou *teselación* do plano é unha descomposición do plano en subconxuntos chamados *teselas*, xeralmente polígonos, obtidos por translación (ou mediante un subgrupo de movementos ríxidos que conteña ás translacións) a partir dun conxunto de teselas modelo ou *prototeselas*.

O interese polos mosaicos *aperiódicos*, que non se conservan por translación, ven dos traballos do lóxico H. Wang a comezos dos anos 60 sobre as máquinas de Turing. Wang, que tentaba atopar un algoritmo para ver se un conxunto de cadrados coas aristas coloreadas pode teselar o plano de xeito coherente ou non, probou que tal algoritmo existe se e só se calquera conxunto de prototeselas dun mosaico aperiódico é tamén conxunto de prototeselas dun mosaico periódico. En 1966, R. Berger probou que a conxectura de Wang era falsa, mostrando un conxunto de 20.426 teselas que só definen mosaicos aperiódicos. Robinson reduciu este número a seis e, de xeito independente, R. Ammann atopou outras 6 teselas coa mesma propiedade en 1977. Nese mesmo ano, R. Penrose deu un exemplo con dúas teselas, o dardo e o papaventos, que cubren o plano de xeito aperiódico.

A comezos de 1982, o equipo de D. Shechtman descubriu unha aleación de aluminio e manganeso que posúe todas as características dun cristal, pero presenta un patrón de difracción incompatible co teorema de clasificación de grupos cristalográficos de Bieberbach. En particular, a configuración dos átomos non se conserva por ningunha translación. Non obstante, cada configuración finita de átomos repítese uniformemente. Aparece así o primeiro exemplo de case-cristal. Trátase de aleacións metálicas con boas propiedades físicas como unha baixa conductividade eléctrica e unha excelente resistencia térmica.

Retómase así o estudo dos mosaicos aperiódicos como modelos dos patróns de difracción dos sólidos case-cristalinos. En realidade, en 1981, os mosaicos de Penrose xa foran aplicados na cristalografía por difracción láser.

O noso propósito é mostrar que o conxunto dos mosaicos de Robinson pode dotarse dunha topoloxía natural que fai del un espazo foliado e que a dinámica

transversa do único minimal (que corresponde aos mosaicos *repetitivos*) está representada (en sentido medible) por unha *máquina de sumar binaria*. O propio Robinson mostra no seu traballo [11] como codificar os seus mosaicos mediante os *enteiros 2-ádicos*, aínda que non explicita a aplicación de codificación nen se ocupa da dinámica.

No capítulo 1, comezamos lembrando algunhas propiedades básicas dos mosaicos, describimos a relación entre elas, pouco clara na bibliografía, e mostramos a súa tradución discreta logo de introducir as nocións de *conxunto base* e *conxunto de Delone*.

Fixado un conxunto finito de prototeselas, o espazo dos mosaicos construídos con estas prototeselas dótase da *topoloxía de Gromov-Hausdorff* de maneira que dous mosaicos son próximos se coinciden nunha grande bóla centrada na orixe salvo pequenas translacións [2], [4]. A acción natural de \mathbb{R}^2 induce unha estrutura de laminación na que a folla que pasa por un mosaico coincide coa súa órbita. A clausura da órbita dun mosaico repetitivo é un conxunto minimal. Se o mosaico é aperiódico, o minimal é transversalmente Cantor. Estas propiedades e as correspondentes versións discretas son descritas no capítulo 2.

O último capítulo adícase ao estudo topolóxico e dinámico dos mosaicos de Robinson. Estes constrúense por medio dun proceso repetitivo no que en cada etapa vanse obtendo bloques de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas, quedando determinado cada mosaico pola elección das pezas centrais dos bloques. Facendo corresponder as catro posibles pezas coas parellas de elementos de $\{0, 1\}$, obtemos unha identificación entre o conxunto dos mosaicos de Robinson repetitivos nunha transversal completa e o espazo de sucesións $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ coa relación cofinal. De maneira explícita, temos unha aplicación bixectiva, boreliana e aberta que define unha equivalencia orbital entre a relación de equivalencia inducida sobre unha transversal e a relación de equivalencia xerada pola suma de 1 nos enteiros 2-ádicos.

1. Mosaicos

O propósito deste capítulo é lembrar algunhas definicións e propiedades dos mosaicos do plano (véxanse [2], [5], [12]).

1.1 Definicións e propiedades básicas

Imos comezar coa definición de mosaico e a descripción das propiedades máis elementais.

Definición 1.1. Unha *prototesela* é un subconxunto de \mathbb{R}^2 homeomorfo a unha bóla pechada.

Definición 1.2. Un *mosaico* \mathcal{T} é unha familia numerable de subconxuntos de \mathbb{R}^2 , chamados *teselas*, que verifican as seguintes condicións:

- i) cada tesela $T \in \mathcal{T}$ é isométrica a unha prototesela dunha subfamilia $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$,
- ii) $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$,
- iii) $\forall T, T' \in \mathcal{T}, \overset{\circ}{T} \cap \overset{\circ}{T'} = \emptyset$.

Neste caso, dise que \mathcal{T} é un *mosaico de tipo* \mathcal{P} e escríbese $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$. As prototeselas de \mathcal{P} chamaranse tamén *teselas modelo*.

Cada prototesela $T \in \mathcal{P}$ determina un *tipo de tesela* definido salvo isometría e un *tipo de translación*. De maneira explícita, dúas prototeselas son do mesmo tipo se unha é a imaxe da outra por unha isometría de \mathbb{R}^2 . A relación de equivalencia denótase \sim . O tipo de translación de T está formado polas prototeselas $T' \in \mathcal{P}$ tales que $T \sim_t T' \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^2 : T' = T + v$. Logo temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}/\sim \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{P}/\sim_t & & \end{array}$$

onde todas as aplicacións son sobrexectivas. Sen perda de xeneralidade, podemos supoñer que prototeselas distintas representan tipos de translación distintos, é dicir, a aplicación vertical é bixectiva (cf. [2]).

Mostramos agora as definicións de mosaico poligonal e lado a lado, que son dúas restricións que cumprirán os exemplos cos que traballaremos:

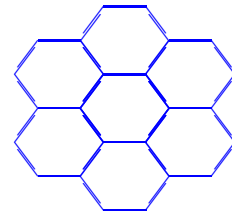
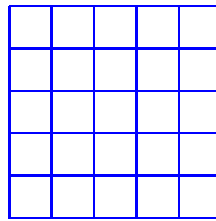
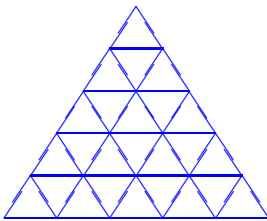
Definición 1.3. Dise que un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é *poligonal* se as prototeselas son polígonos (non necesariamente convexos). Se entendemos por lado dun polígono a súa acepción habitual e por arista a intersección de dúas teselas (véxase o exemplo 1.5.2), diremos que un mosaico \mathcal{T} é *lado a lado* se verifica as dúas condicións seguintes:

- i) calquera lado está contido nunha arista e calquera arista é unión de lados,
- ii) a intersección de dúas teselas é un conxunto conexo.

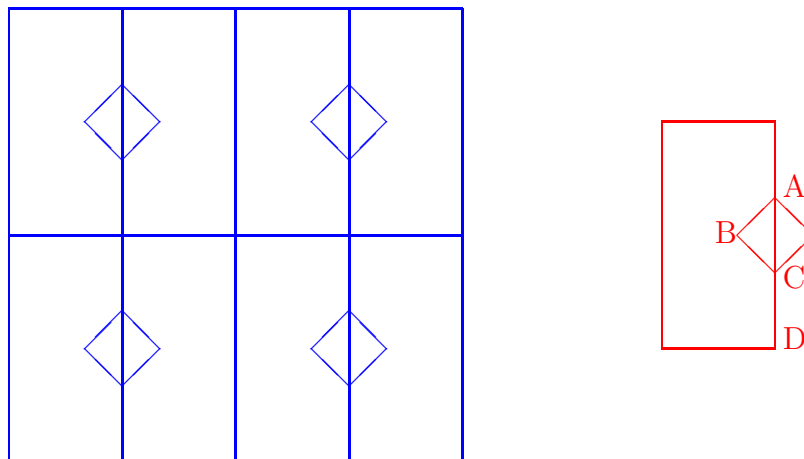
Dúas teselas intersecaranse logo nunha unión de lados e diremos que son *adxacentes*, ou nunha unión de vértices e chamáremolas *veciñas*.

Observación 1.4. En [5], defínense mosaicos *arista a arista* impoñendo unha condición algo máis forte cá condición (i): calquera lado dunha tesela é arista do mosaico e viceversa. A condición (ii) é esixida na definición de mosaico normal.

Exemplos 1.5. 1) Os mosaicos periódicos por triángulos, cadrados e hexágonos son poligonais e lado a lado.



2) O seguinte mosaico é poligonal e verifica (i), pero non (ii), na definición 1.3:



Sirva este exemplo para notar a diferenza entre *lado* e *arista*, *esquina* e *vértice*. Obsérvese que AB e BC son lados de dúas teselas, pero non son aristas do mosaico, e ABC é unha arista do mosaico, pero non é lado de ningunha tesela. Por outra banda, B é unha esquina (intersección de lados), mentres que D é un vértice (intersección de aristas).

Vistos estes primeiros exemplos, vaíamos agora con algunhas propiedades elementais dos mosaicos:

Definición 1.6 ([2], [5]). Un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é de *tipo finito* se só ten un número finito de prototeselas salvo translación, é dicir, se \mathcal{P}/\sim_t é finito. Posto que supuxemos que \mathcal{P} se identifica con \mathcal{P}/\sim_t , o mosaico \mathcal{T} é de tipo finito se e só se \mathcal{P} é finito.

Todos os exemplos anteriores son de tipo finito. Antes de comparar esta definición con outras convén introducir o seguinte termo:

Definición 1.7. Chámase *motivo* dun mosaico \mathcal{T} a calquera subfamilia finita de \mathcal{T} , identificada acotío coa súa unión.

Definición 1.8 ([2]). Diremos que \mathcal{T} ten un *número finito de patróns locais* se para todo $R > 0$ só hai un número finito de motivos de diámetro menor que R salvo translación, é dicir,

$$\# \{ M / M \text{ é un motivo de diámetro } \delta(M) < R \} / \sim_t < +\infty.$$

De maneira equivalente, \mathcal{T} ten un número finito de patróns locais se e só se para todo $R > 0$ só hai un número finito de teselas de diámetro $< R$ salvo translación. En efecto, calquera tesela é un motivo e calquera motivo de diámetro $< R$ é unión finita de teselas de diámetro $< R$. Tendo en conta a identificación entre as prototeselas e os seus tipos de translación, a condición anterior pode formularse do seguinte xeito: para todo $R > 0$, o conxunto $\mathcal{P}_R = \{ T \in \mathcal{P} / \delta(T) < R \}$ verifica $\#\mathcal{P}_R < +\infty$.

Proposición 1.9. *Todo mosaico de tipo finito ten un número finito de patróns locais.*

Proba. Para cada $R > 0$, temos que

$$\#\mathcal{P}_R \leq \#\mathcal{P} < +\infty. \quad \square$$

Lema 1.10. *Se \mathcal{T} ten un número finito de patróns locais, entón*

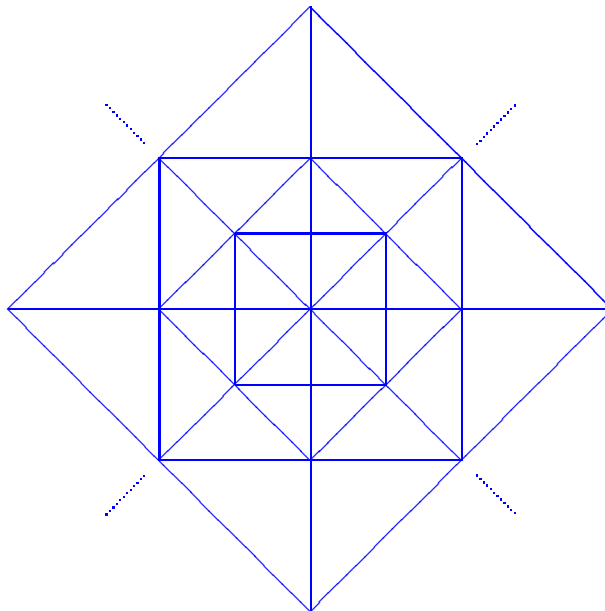
$$\inf\{\delta(T)/T \in \mathcal{T}\} = \min\{\delta(T)/T \in \mathcal{T}\} > 0.$$

Proba. Fixemos $R > 0$, co que temos:

$$\#\mathcal{P}_R = \#\{T \in \mathcal{P} / \delta(T) < R\} < +\infty.$$

Sexa $\delta = \min\{\delta(T)/T \in \mathcal{P}_R\} > 0$. Se $T \in \mathcal{P}_R$, entón $\delta(T) \geq \delta > 0$. Se $T \notin \mathcal{P}_R$, entón $\delta(T) \geq R > \delta$. Concluimos pois que $\inf\{\delta(T)/T \in \mathcal{T}\} = \delta > 0$. \square

Exemplo 1.11. O feito de que \mathcal{T} teña un número finito de patróns locais non implica que o diámetro das teselas estea superiormente limitado, nin polo tanto que \mathcal{T} sexa de tipo finito. Proba disto é o seguinte exemplo:



Proposición 1.12. *Se \mathcal{T} ten un número finito de patróns locais e o diámetro das teselas está superiormente limitado, entón \mathcal{T} é de tipo finito.*

Proba. Se $R = \sup\{\delta(T)/T \in \mathcal{T}\} + 1$, entón $\mathcal{P} = \mathcal{P}_R$ é un conxunto finito. \square

Introduzamos agora algunhas propiedades que nos dan, en certo modo, información sobre o tamaño das teselas:

Definición 1.13. Un mosaico \mathcal{T} é *normal* se existen $r > 0$ e $R > 0$ tales que

$$\exists x \in T : B(x, r) \subset T \quad (1.1)$$

$$\exists y \in T : B(y, R) \supset T \quad (1.2)$$

para calquera tesela $T \in \mathcal{T}$.

Observación 1.14. En [5], defínese un mosaico normal usando a condición anterior (dise que ten *teselas uniformemente limitadas*) e outras dúas condicións:

- i) cada tesela é homeomorfa a un disco pechado,
- ii) a intersección de dúas teselas é un conxunto conexo.

No noso caso, as condicións (i) e (ii) quedan garantidas polas definicións de mosaico e mosaico lado a lado, respectivamente.

Definición 1.15. Un mosaico \mathcal{T} dirase *feblemente normal* se verifica:

- i) o diámetro das teselas está limitado inferiormente:

$$\inf\{\delta(T)/T \in \mathcal{T}\} > 0,$$

- ii) o diámetro das teselas está limitado superiormente:

$$\sup\{\delta(T)/T \in \mathcal{T}\} < +\infty.$$

Proposición 1.16. *Todo mosaico de tipo finito é normal e todo mosaico normal é feblemente normal.*

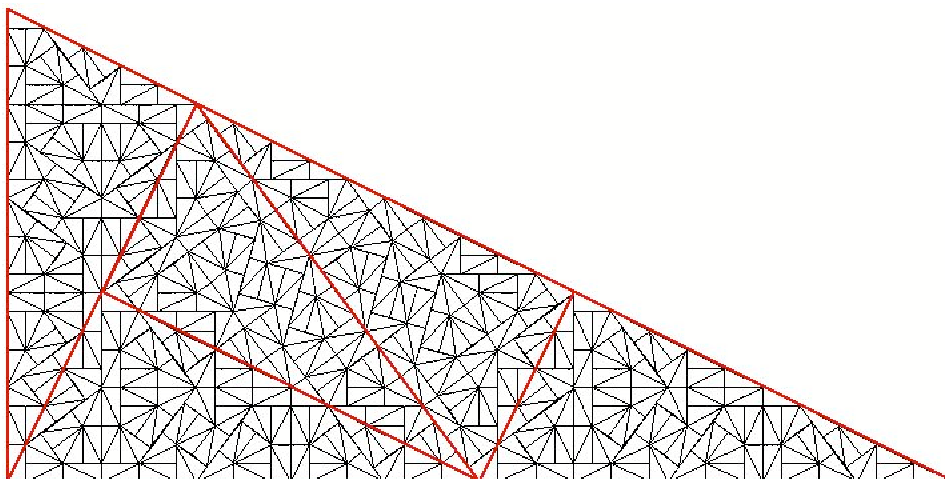
Proba. A primeira afirmación séguese de xeito inmediato das definicións. A proba da segunda será consecuencia da proba da implicación $(1.1) \Rightarrow (i)$ e da equivalencia $(1.2) \Leftrightarrow (ii)$.

$(1.1) \Rightarrow (i)$ Se calquera tesela $T \in \mathcal{T}$ contén unha bóla de radio $r > 0$, entón o seu diámetro $\delta(T) \geq 2r$ e polo tanto $\inf\{\delta(T)/T \in \mathcal{T}\} \geq 2r > 0$.

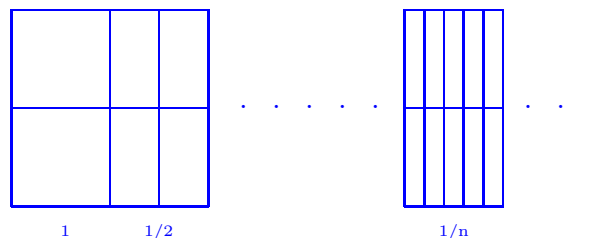
$(1.2) \Rightarrow (ii)$ Se calquera tesela $T \in \mathcal{T}$ está contida nunha bóla de radio $R > 0$, entón o seu diámetro $\delta(T) \leq 2R$ e polo tanto $\sup\{\delta(T)/T \in \mathcal{T}\} \leq 2R < +\infty$.

$(1.2) \Leftarrow (ii)$ Se o diámetro das teselas está limitado superiormente, entón tense $R = \sup\{\delta(T)/T \in \mathcal{T}\} + 1 < +\infty$. Daquela $T \subset B(y, R)$ para calquera tesela $T \in \mathcal{T}$ e calquera punto $y \in T$. \square

Exemplos 1.17. Os recíprocos das dúas afirmacións da proposición anterior non son certos. Un mosaico normal que non é de tipo finito é o *pinwheel* (véxase [9]).



O seguinte mosaico é feblemente normal, pero non é normal.

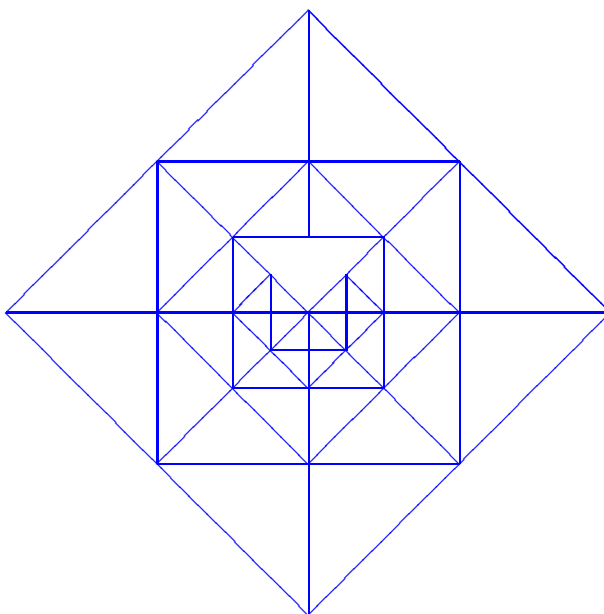


Definición 1.18 ([5]). Diremos que un mosaico \mathcal{T} é *localmente finito en x* se existe algún $\varepsilon > 0$ para o que se cumpre

$$\# \{ T \in \mathcal{T} / T \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset \} < +\infty.$$

Neste caso, diremos que x é un *punto regular* de \mathcal{T} e chamaremos *puntos singulares* a aqueles que non sexan regulares. Diremos que \mathcal{T} é *localmente finito* se todos os puntos $x \in \mathbb{R}^2$ son regulares.

Exemplo 1.19. O seguinte mosaico ten un único punto singular na orixe (véxase [5]):



Proposición 1.20. *Todo mosaico normal é localmente finito.*

Proba. Sexa \mathcal{T} un mosaico normal. Por definición, existen constantes $r > 0$ e $R > 0$ tales que calquera tesela contén unha bóla de radio r e está contida nunha bóla de radio R .

Pretendemos probar que calquera punto $x \in \mathbb{R}^2$ é regular, é dicir, para cada $\varepsilon > 0$, o conxunto

$$\{ T \in \mathcal{T} / T \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset \}$$

é finito. Agora ben, se $T \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, entón

$$T \subset B(x, \varepsilon + 2R).$$

En efecto, para cada punto $y \in T$, temos:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \delta(T) < \varepsilon + 2R$$

onde $z \in T \cap B(x, \varepsilon)$.

Agora chéganos con verificar que a bóla pechada $\overline{B}(x, \varepsilon + 2R)$ só pode conter un número finito de teselas. Cada unha desas teselas T contén unha bóla de centro x_T e radio $r > 0$. Como os interiores de dúas teselas T e T' son disxuntos, as bólas correspondentes son disxuntas e os centros verifican $d(x_T, x_{T'}) > 2r$. Deducimos que os centros forman un subconxunto discreto e pechado C da bóla pechada $\overline{B}(x, \varepsilon + 2R)$. En efecto, C é discreto, pois $B(x_T, r) \cap C = \{x_T\}$. Para comprobar que C é pechado, consideramos unha sucesión de centros $x_n \in C$ converxente a un punto $x \in \overline{B}(x, \varepsilon + 2R)$. Imos ver que o conxunto $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ é finito de maneira que a sucesión $\{x_n\}$ posúe unha subsucesión estacionaria e o seu límite $x \in C$. No caso contrario, substituindo $\{x_n\}$ por unha subsucesión, poderíamos supoñer que todos os termos da sucesión $\{x_n\}$ son distintos. Logo teríamos que $d(x_n, x_m) > 2r$ se $n \neq m$ e a sucesión $\{x_n\}$ non sería converxente.

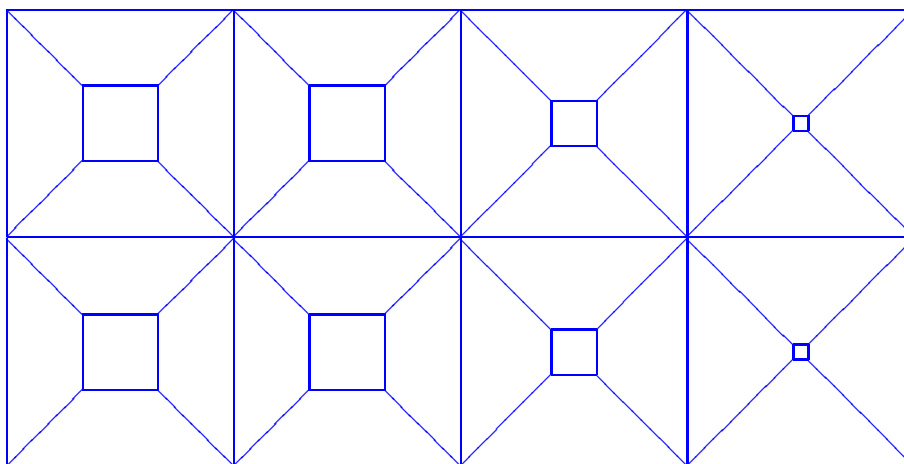
Por último, observemos que as bólas $B(x_T, r)$ e o conxunto

$$\overline{B}(x, \varepsilon + 2R) - \bigcup_{x_T \in C} \overline{B}(x_T, \frac{r}{2})$$

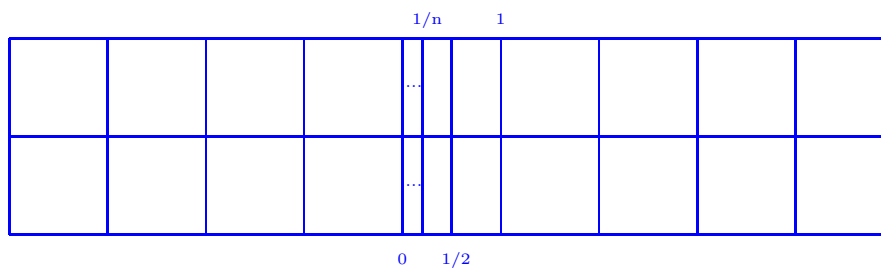
forman unha cobertura aberta de $\overline{B}(x, \varepsilon + 2R)$. Por compacidade, o conxunto C é finito. Logo $\# \{ T \in \mathcal{T} / T \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset \} < +\infty$. \square

O recíproco do resultado anterior non é certo. O exemplo 1.11 é un mosaico localmente finito que nen sequera é feblemente normal, xa que o diámetro das teselas tende a infinito.

Exemplo 1.21. O seguinte exemplo é do mesmo tipo, pero o diámetro das teselas tende a cero:



Exemplo 1.22. Tampouco temos que feblemente normal implique tipo finito. O seguinte mosaico é feblemente normal (o diámetro das teselas é constante e igual a 1) pero non é localmente finito (todos os puntos do eixo vertical son singulares).



Convén observar que tanto o exemplo 1.19 coma o exemplo precedente non son lado a lado. No primeiro exemplo, hai unha tesela que contén o único punto singular como vértice e que ten dous lados que non están contidos en ningunha arista. No segundo, todos os intervalos enteiros contidos no eixo vertical son lados de teselas, situados á esquerda do eixo, pero ningún destes lados é unha arista do mosaico.

Combinando as proposicións 1.16 e 1.20, temos que calquera mosaico de tipo finito é localmente finito. É natural preguntarse se os mosaicos cun número finito de patróns locais son localmente finitos ou non. Imos dar unha resposta parcial da cuestión e unha proba directa, sen pasar polo carácter normal, da afirmación anterior.

Lema 1.23. *Para cada punto $x \in \mathbb{R}^2$, cada número real $\varepsilon > 0$ e cada prototesela $T_0 \in \mathcal{P}$, só hai unha cantidade finita de teselas T co tipo de translación de T_0 tales que $T \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.*

Proba. Imos razoar por redución ao absurdo, supoñendo que hai unha cantidade infinita numerable de vectores $v_n \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$T_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$$

onde $T_n = T_0 + v_n$ para cada $n \geq 1$. Fixado un punto x_0 no interior da tesela T_0 , os puntos $x_n = x_0 + v_n \in T_n$ verifican:

$$\|x_n - x_m\| \geq 2d(x, \partial T_0) > 0$$

se $n \neq m$. Por outra banda, se denotamos $\delta = \varepsilon + d(x, \partial T_0)$, temos que $x_n \in \overline{B}(x, \delta)$. Por compacidade de $\overline{B}(x, \delta)$ e substituíndo $\{x_n\}$ por unha subsucesión, podemos supoñer que

$$x_n \longrightarrow y \in \overline{B}(x, \delta).$$

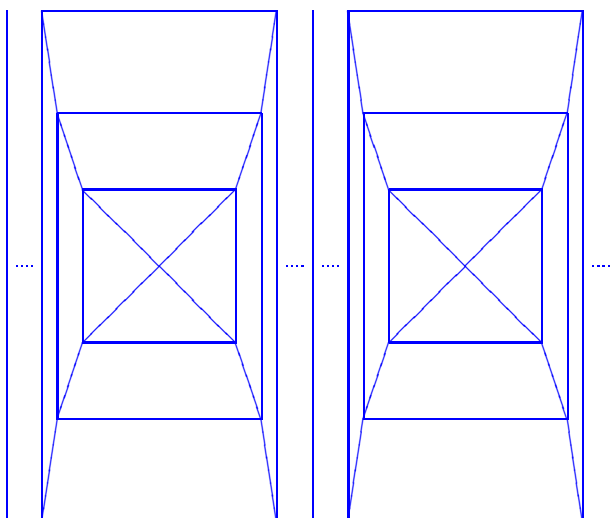
Entón, tería que existir un enteiro $N \geq 1$ tal que $\|x_n - x_m\| < 2d(x, \partial T)$ se $n, m \geq N$, e chegaríamos pois a unha contradición. \square

Observación 1.24. O lema anterior segue sendo certo se substituímos o tipo de translación polo tipo de isometría dunha prototesela (sen mais que substituír a translación por v_n por unha isometría).

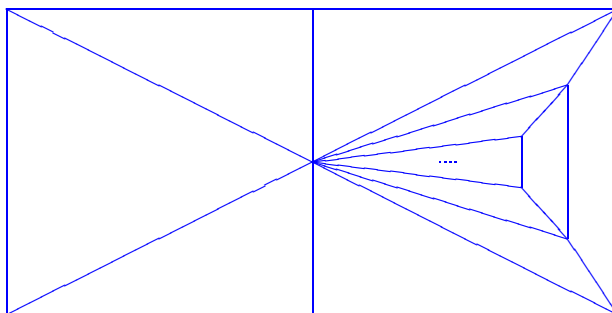
Proposición 1.25. *Todo mosaico cun número finito de patróns locais e diámetro das teselas limitado superiormente é localmente finito.*

Proba. Para cada $x \in \mathbb{R}^2$ e cada $\varepsilon > 0$, o conxunto das teselas $T \in \mathcal{T}$ tales que $T \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ descomponse na unión dos conxuntos de teselas $T \in \mathcal{T}$ que teñen o tipo de translación dunha prototesela $T_0 \in \mathcal{P}$ e satisfan a mesma condición. Polo lema anterior, cada un destes conxuntos é finito. Agora ben, nas condicións da proposición, a unión tamén é finita. \square

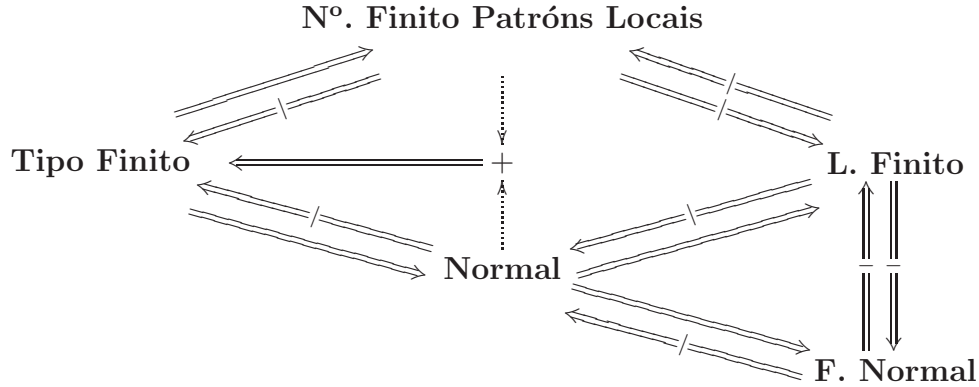
Observación 1.26. Se suprimimos a segunda condición, é dicir, se o diámetro das teselas non está limitado superiormente, a proposición non é certa. O seguinte exemplo mostra un mosaico cun número finito de patróns locais que non é localmente finito:



De novo, coma no caso dos exemplos 1.19 e 1.22, o exemplo anterior non é lado a lado. Cabería pensar que esta é unha condición suficiente para que un mosaico sexa localmente finito. Mais non é así, o seguinte mosaico é lado a lado pero non localmente finito:



Vistas xa todas as relacións entre as propiedades que temos introducido, mostramos o seguinte cadro que as compila dun xeito claro:



1.2 Discretização

Nesta secção imos reformular algunhas propiedades descritas na secção anterior usando noções de natureza discreta como conxuntos base, conxuntos de Delone e conxuntos de Meyer.

Definición 1.27. Sexa \mathcal{T} un mosaico de tipo \mathcal{P} . Se fixamos un punto base en cada prototesela, cada tesela $T \in \mathcal{T}$ posúe entón un punto base x_T e obtemos un conxunto $D = \{ x_T / T \in \mathcal{T} \}$ ao que chamaremos un *conxunto base de \mathcal{T}* .

Proposición 1.28. *Un mosaico \mathcal{T} é localmente finito se e só se calquera conxunto base é discreto e pechado.*

Proba.

“ \Rightarrow ” Se D é un conxunto base de \mathcal{T} , temos garantido por hipótese que

$$\# B(x, \varepsilon) \cap D \leq \# \{ T \in \mathcal{T} / T \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset \} < +\infty$$

para todo $x \in D$ e todo $\varepsilon > 0$. Logo D é un conxunto discreto.

Para ver que é pechado, consideremos unha sucesión de puntos $x_n \in D$ converxente a un punto $x \in \mathbb{R}^2$. Distinguímos dous casos:

i) Se o conxunto $\{ x_n / n \in \mathbb{N} \}$ é finito, a sucesión $\{ x_n \}$ posúe unha subsucesión estacionaria converxente a x . Teríamos que $x \in D$.

ii) Se o conxunto $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ é infinito, a sucesión $\{x_n\}$ posúe entón unha subsucesión de termos distintos converxente a x . Isto implica que calquera bóla $B(x, \varepsilon)$ é cortada por unha infinidade de teselas e daquela \mathcal{T} non é localmente finito.

Vemos pois que D é pechado.

“ \Leftarrow ” Supoñamos por redución ao absurdo que existen $x \in \mathbb{R}^2$ e $\varepsilon > 0$ tales que

$$\# \{T \in \mathcal{T} / T \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\}$$

é infinito. Se unha tesela T está contida na bóla $B(x, \varepsilon)$, entón o seu punto base x_T pertence á intersección do conxunto base D e da bóla pechada $\overline{B}(x, \varepsilon)$. Agora ben, pode que só haxa un número finito de tales teselas. En calquera caso, pola observación 1.24, hai unha familia de teselas T_n isométricas a una infinidade de prototeselas distintas tales que $T_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Cambiando os seus puntos base e tomándoos en $T_n \cap \overline{B}(x, \varepsilon)$, teríamos un novo conxunto base D e unha sucesión de puntos x_n en $D \cap \overline{B}(x, \varepsilon)$. Por hipótese, o conxunto D é pechado e daquela a intersección $D \cap \overline{B}(x, \varepsilon)$ é compacta. Así, a sucesión $\{x_n\}$ pódese substituír por unha subsucesión converxente a un punto $y \in D$. Pero como D é discreto, a subsucesión tería que ser estacionaria e isto contradí a súa construción. \square

Definición 1.29 ([7]). Un *conxunto de Delone* é un subconxunto D de \mathbb{R}^2 que verifica as dúas seguintes condicións :

i) é *uniformemente discreto*, i.e.:

$$\exists r > 0 : \overline{B}(x, r) \cap D \subset \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

ii) existe $R > 0$ tal que é *R denso*, i.e.:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \overline{B}(x, R) \cap D \neq \emptyset \Leftrightarrow d(x, D) \leq R.$$

Algúns autores chaman *R-redes* aos conxuntos *R-densos*. Outros falan de conxuntos *relativamente densos* (véxase [7]).

Proposición 1.30. *Todo mosaico normal posúe un conxunto base de Delone.*

Proba. Por definición, se un mosaico \mathcal{T} é normal, existen constantes $r > 0$ e $R > 0$ tales que calquera tesela $T \in \mathcal{T}$ verifica as dúas seguintes condicións:

1) $B(x_T, r) \subset T$ para algún $x_T \in T$,

2) $B(y_T, R) \supset T$ para algún $y_T \in T$.

Deste xeito, os puntos x_T correspondentes ás prototeselas $T \in \mathcal{P}$ definen un conxunto base D . Obsérvese que podemos supoñer sen perda de xeneralidade que todos os x_T nomeados pertencen ao conxunto base. Vexamos que D é un conxunto de Delone:

i) D é uniformemente discreto pois $\overline{B}(x, \frac{r}{3}) \cap D \subset \{x\}$ para calquera $x \in \mathbb{R}^2$. En efecto, se $\overline{B}(x, \frac{r}{3})$ contivese dous elementos $x_T, x_{T'} \in D$ distintos, teríamos logo

$$d(x_T, x_{T'}) \leq \frac{2r}{3} < r \Rightarrow B(x, r) \cap T' \neq \emptyset \Rightarrow B(x, r) \not\subset T,$$

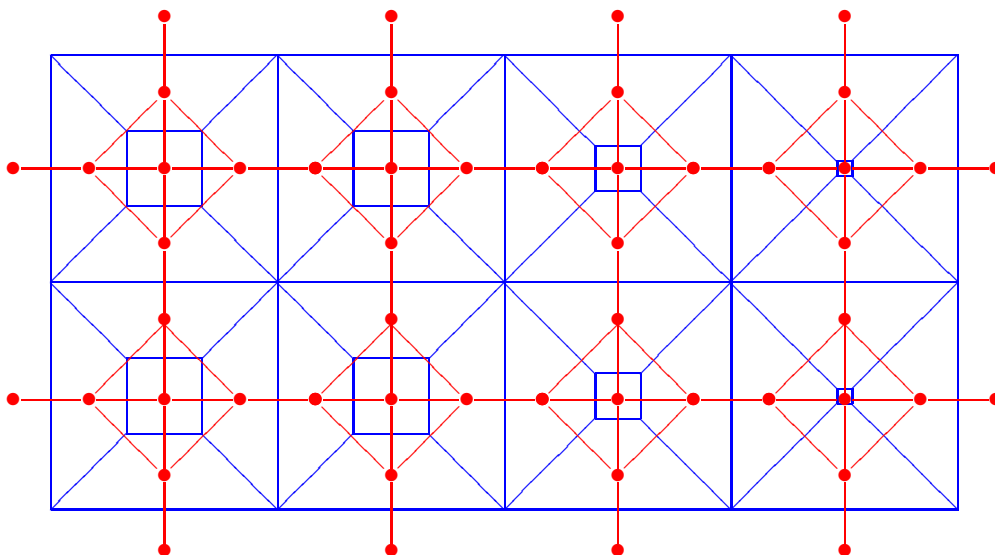
en contradición coa propiedade (1).

ii) D é relativamente denso pois calquera punto $x \in \mathbb{R}^2$ pertence a unha tesela T e calquera tesela T está contida nunha bóla $B(y_T, R)$ con $y_T \in T$. En efecto, deste xeito,

$$d(x, D) \leq d(x, y_T) \leq \delta(T) \leq 2R,$$

co que temos probado o resultado. \square

Observación 1.31. O recíproco non é certo. Un conxunto base pode ser un conxunto de Delone aínda que o mosaico non sexa normal. Aquí temos un exemplo que nin sequera é feblemente normal, pero posúe un conxunto base de Delone:



Consideremos neste exemplo o conxunto dos vectores de \mathbb{R}^2 entre puntos de D ,

$$D - D = \{x_T - x_{T'} / T, T' \in \mathcal{T}\}.$$

Estamos ante un conxunto discreto e pechado, xa que calquera bóla só contén a un número finito de elementos de $D - D$. De feito, $D - D$ é uniformemente discreto e relativamente denso, é dicir, un conxunto de Delone.

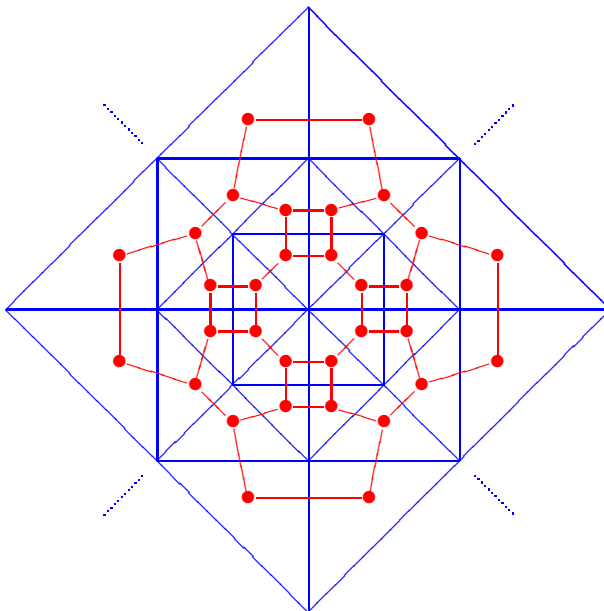
Precisamos estes aspectos coas seguintes definicións :

Definición 1.32 ([7]). Sexan D un conxunto de Delone, $D - D$ o conxunto dos vectores interpuntuais de D e $\langle D - D \rangle$ o grupo aditivo xerado polos elementos de $D - D$. Neste marco, diremos que:

- i) D é *finitamente xerado* se $\langle D - D \rangle$ é finitamente xerado;
- ii) D é *de tipo finito* se $D - D$ é localmente finito (i.e. a intersección de $D - D$ con calquera bóla é finita) ou de maneira equivalente pechado e discreto;
- iii) D é un *conxunto de Meyer* se $D - D$ é conxunto de Delone.

Nótese que estes tres conceptos non están desligados, senón que hai establecida unha xerarquía entre eles: todo conxunto de Meyer é de tipo finito e todo de tipo finito é finitamente xerado.

Observación 1.33. Nalgunhas das definicións anteriores non é preciso esixir que D sexa conxunto de Delone. Velaquí un conxunto base D tal que $D - D$ é localmente finito, aínda que D non é un conxunto de Delone:



Non obstante, o conxunto $D-D$ non é un conxunto de Delone. O seguinte resultado vai darnos unha condición suficiente:

Proposición 1.34. *Todo mosaico de tipo finito posúe un conxunto base de Meyer.*

Proba. Pola proposición 1.30, o mosaico posúe un conxunto base de Delone D , obtido fixando un punto x_T en cada prototesela $T \in \mathcal{P}$. Calquera vector de $D-D$ é suma de vectores da forma $x_T - x_{T'}$ onde T e T' teñen un lado común. Podemos supoñer que T é unha prototesela e T' a translación dalgunha prototesela. Como \mathcal{T} é de tipo finito, o número de prototeselas $\#\mathcal{P}$ é finito. Polo tanto, se limitamos a lonxitude dos vectores en $D-D$ só atoparemos un número finito, é dicir, $D-D$ é localmente finito. En outros termos, D é un conxunto de Delone de tipo finito. Tomando o mínimo das lonxitudes dos xeradores probamos que D é uniformemente discreto. E tomando dúas veces o máximo dos diámetros das prototeselas que é relativamente denso. \square

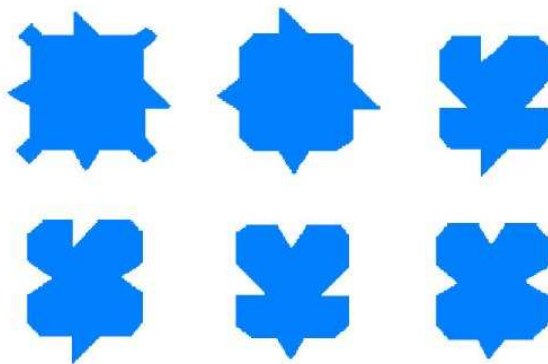
Observación 1.35. O pinwheel non verifica a proposición anterior, pois ningún conxunto base de Delone é de tipo finito.

2. Os mosaicos de Robinson

Adicaremos este capítulo a describir os *mosaicos de Robinson*. Trátase de exemplos de mosaicos aperiódicos e repetitivos que se constrúen usando 6 prototeselas descubertas en 1971 por Raphael M. Robinson [11].

2.1 As prototeselas de Robinson

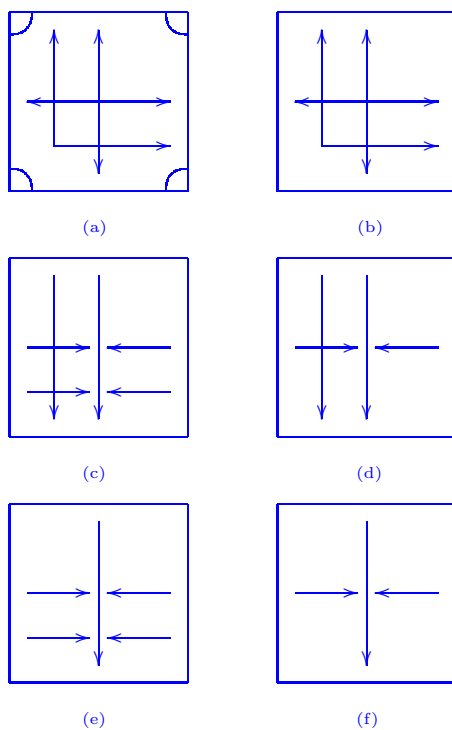
As seis teselas de Robinson, que mostramos a continuación, son basicamente cadrados con modificacións nos seus lados e esquinas. Se nos esquecemos nun principio das modificacións dos lados, podemos diferenciar dous tipos: a prototesela que ten prolongacións nas esquinas e as prototeselas que teñen as esquinas a modo de octógonos. Denominaremos *con cornos* á primeira e *sen cornos* ás restantes.



A idea entón é partir dun mosaico periódico por cadrados e modificar os cadrados como acabamos de comentar para que aparezan estes dous tipos de teselas alternados por filas e columnas. Pero facendo só estas modificacións o mosaico seguiría sendo periódico; velaquí a necesidade de introducir tamén modificacións

nos lados. Consideramos logo as modificacións dos lados e vemos que son lingüetas e rañuras de dous tipos: simétricas e asimétricas.

Mais imos deixar de lado esta idea das modificacións (véxanse [5] e [11]) e retomar a do mosaico por cadrados, decorando estes para obter outras seis teselas que se correspondan coas orixinais. Introducimos pois a seguinte representación na que as modificacións dos lados e as esquinas veñen denotadas respectivamente por frechas e marcas circulares nas esquinas. As frechas que apuntan cara dentro correspóndense con rañuras e as que o fan cara fóra con lingüetas, significando unha soa frecha simetría e dobre frecha asimetría. As marcas circulares indican que a tesela ten cornos.



Do mesmo xeito que Robinson, chamaremos *cruces* ao primeiro par de prototeselas e *brazos* ás restantes.

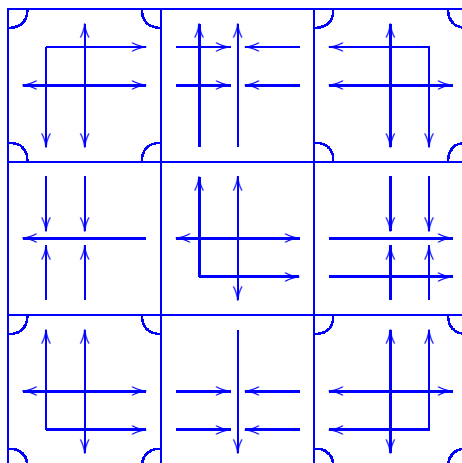
Con esta representación está claro que en cada vértice do mosaico debe aparecer unha marca circular (e só unha) e que cada punta de frecha debe apuntar á cola doutra frecha dunha tesela adxacente. Se vemos os cruces orientados coma na

figura, diremos que están *cara arriba e á dereita*, é dicir, nas direccións das dobres frechas. Chamaremos *costas* dos cruces ás direccións das frechas simples. Dous cruces do mesmo tipo consecutivos por filas ou columnas estarán sempre cara con cara ou costas con costas.

2.2 Os mosaicos de Robinson

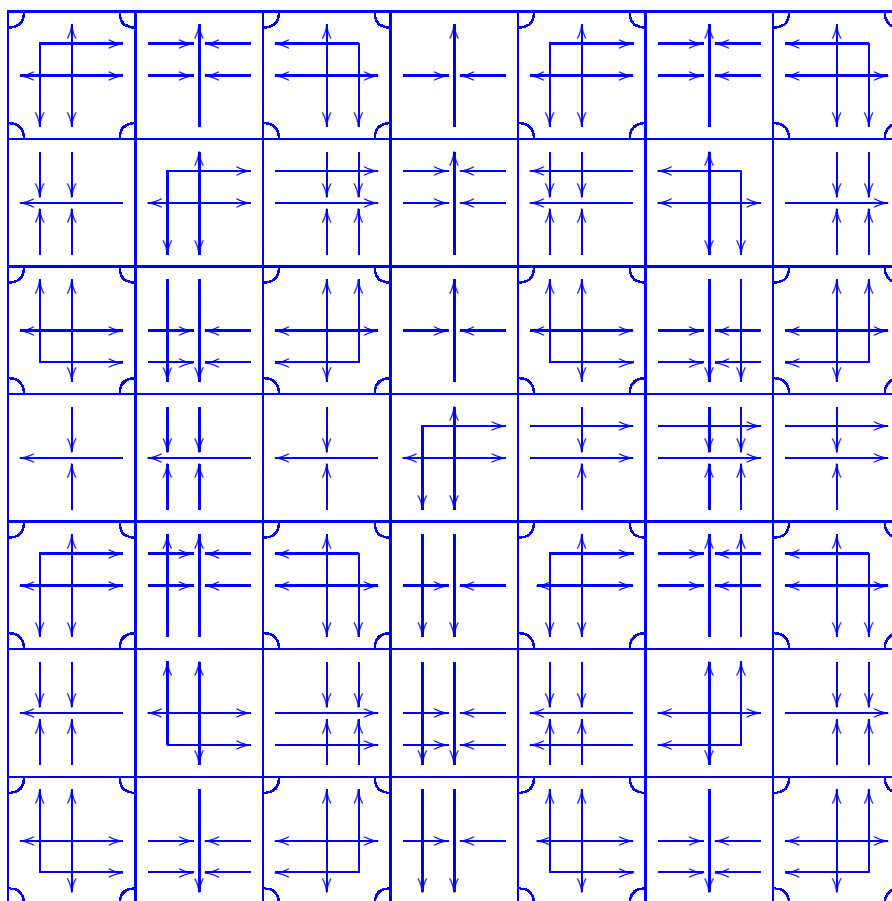
Descrita a representación que imos utilizar, comecemos a construción dos mosaicos de Robinson. Empregamos para isto un *proceso repetitivo*.

Partimos dun cruce con cornos, colocado cunha das catro orientacións posibles. Temos unha tesela a partir da cal imos construír un bloque de 3×3 teselas. Para facelo, replicamos a peza inicial (con xiros de 90, 180 e 270 graos) tendo en conta a orientación do cruce (isto é, nas direccións das dobres frechas) e deixando no centro un baleiro para 5 teselas con forma de cruz. Eliximos agora a peza central da cruz, que debe ser á forza un cruce sen cornos, e completamos o resto da cruz do único xeito posible tras a elección do cruce central. Xa construímos o bloque 3×3 , o noso bloque básico.



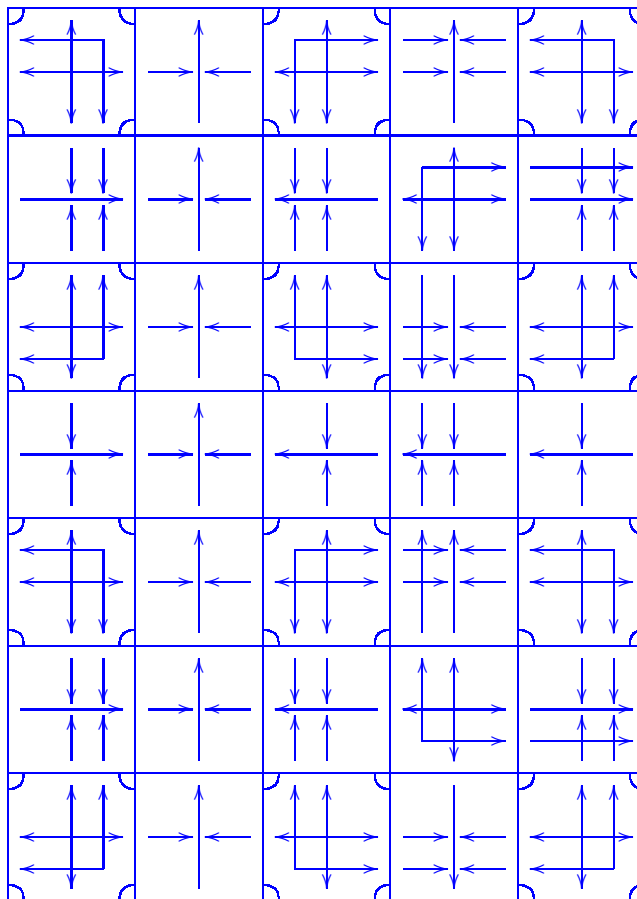
Para conseguir un bloque 7×7 procedemos de maneira análoga. Replicamos o bloque 3×3 (igual que antes) dacordo coa orientación do cruce central do bloque,

eliximos un novo cruce sen cornos para ocupar o centro da cruz e completamos do único xeito que podemos. Temos agora un bloque 7×7 a partir do que construío de 15×15 .

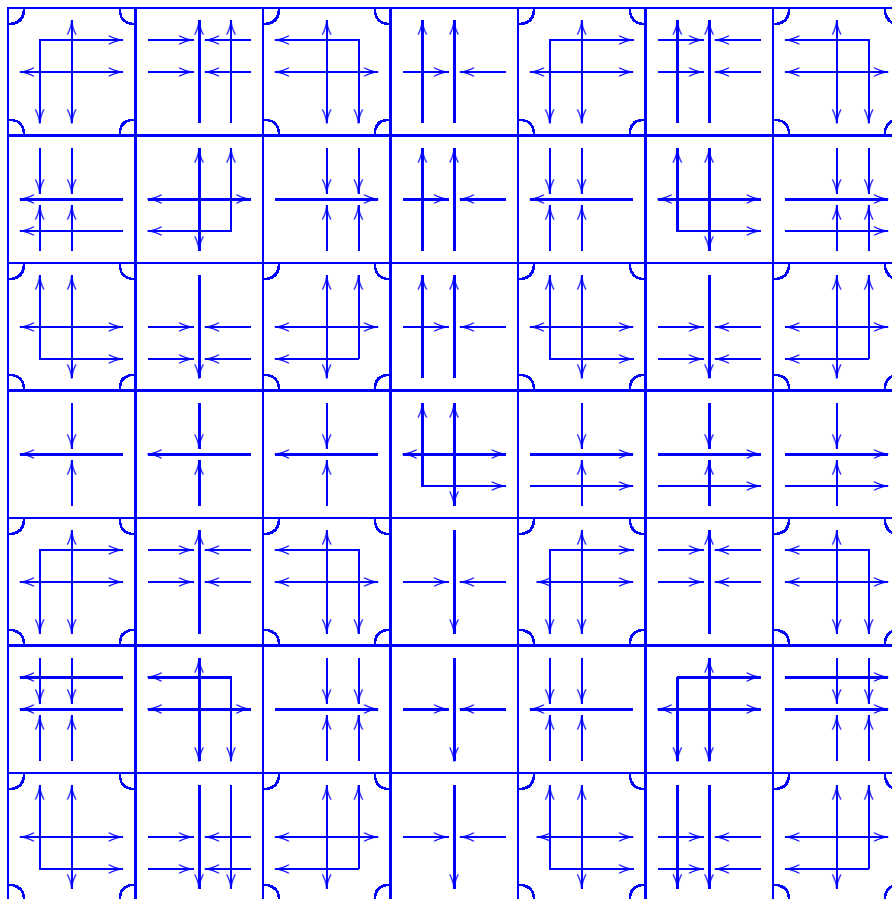


Descríbimos así un proceso repetitivo no que imos construíndo bloques de $(2^{n+1} - 1) \times (2^{n+1} - 1)$ teselas a partir de bloques $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$: replicando o bloque de partida segundo a orientación do seu cruce central, escollendo un novo cruce sen cornos como centro do novo bloque e completando do único xeito posible.

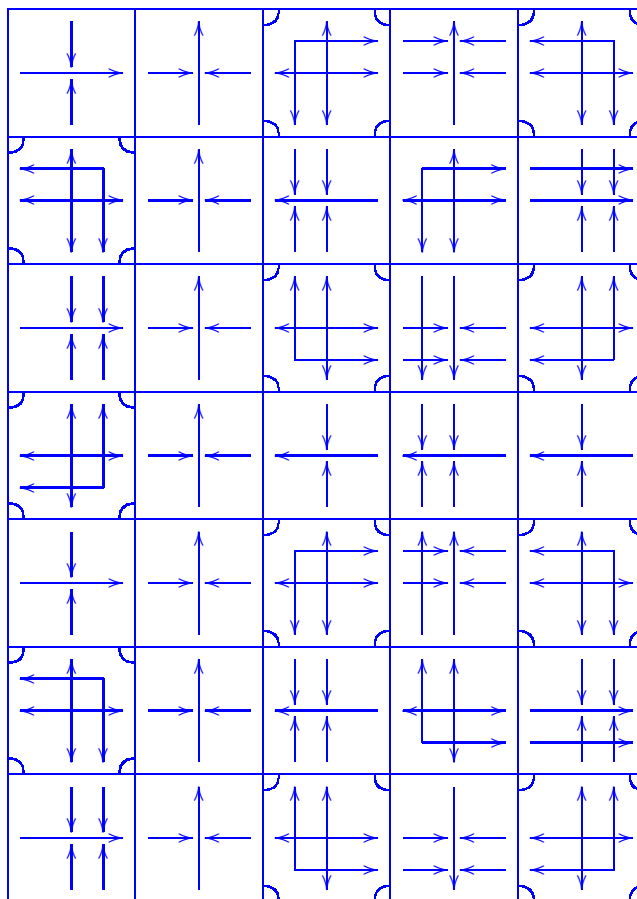
É importante observar que a elección que facemos do cruce central en cada bloque que imos construíndo determina a rexión do plano que teselamos. Por exemplo, se tomamos todos os cruces coa mesma orientación teselamos un cuarto de plano. Se fixamos unha dirección (por exemplo, de cara á dereita) e imos alternando as outras dúas (por exemplo, de cara arriba e de cara abaixo) teselamos medio plano e se imos alternando tres ou as catro orientacións infinitamente temos todo o plano. Non obstante, non é preciso proceder como no último caso para cubrir todo o plano. Podemos “pegar” dous medios planos, catro cuartos de plano ou dous cuartos de plano e medio plano, usando filas ou columnas infinitas de teselas dos tipos (d) ou (f).



No caso de cuartos de plano, podemos pegar tamén usando unha cruz infinita cun cruce sen cornos no centro, que determina o resto das teselas da cruz.



Observemos ademais que os pegados non teñen que ser forzosamente simétricos, senón que poden aparecer “faias”, aínda que os mosaicos resultantes serán dun tipo distinto.



Notemos por último que co proceso descrito obtemos unha infinidade non numerable de mosaicos. Chamemos \mathfrak{T} ao conxunto dos mosaicos de Robinson e \mathfrak{R} ao subconxunto dos mosaicos construídos de maneira repetitiva, é dicir, a unión do conxunto dos mosaicos construídos sen pegado, \mathfrak{R}_1 , o dos que se constrúen pegando dous medios planos de maneira simétrica ou sen faias, \mathfrak{R}_2 , e o dos pegados de cuartos de plano usando cruces infinitas cun cruce sen cornos por centro, \mathfrak{R}_4 . A motivación da notación é que \mathfrak{R} será precisamente o conxunto dos mosaicos ‘repetitivos’. Se identificamos as catro posibles orientacións que pode adoptar un cruce coas parellas de elementos do conxunto $\{0, 1\}$ e temos en conta que a forma dos bloques de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas depende unicamente do seu cruce central, obtemos unha correspondencia entre o conxunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e o conxunto \mathfrak{R} . Cada sucesión $\alpha = \{\alpha_n\} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ determina unha sucesión de bloques e polo tanto

un mosaico de Robinson, agás no caso do pegado de cuartos de plano ou medios planos que depende da elección do “pegado”. As sucesións periódicas que teñen períodos formados por unha parella de elementos de \mathbb{Z}_2 determinan mosaicos obtidos pegando con grandes cruces que teñan por centro o mesmo cruce sen cornos que o correspondente ao período. Do mesmo xeito, podemos asociar ás sucesións que teñen un número infinito de dúas parellas de elementos de $\{0, 1\}$ con distinta paridade e un número finito das outras dúas, que son as que determinan medios planos, os mosaicos obtidos do seguinte xeito. Se o semiplano codificado é o dereito, respectivamente o superior, asociámoslle o mosaico obtido pegando cun corredor de teselas do tipo (f) apuntando cara arriba, respectivamente cara a dereita, e se é o esquerdo, respectivamente o inferior, o mosaico obtido pegando cun corredor de teselas do mesmo tipo pero apuntando cara abaixo, respectivamente cara a esquerda. Obtemos así unha aplicación inxectiva de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ en \mathfrak{R} . A elección dun punto base nas seis prototeselas de Robinson determina un conxunto de Delone en calquera mosaico de Robinson. Nos mosaicos correspondentes aos elementos de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, a orixe do plano está situada no punto base dalgún cruce sen cornos e pertence ao conxunto de Delone. Se chamamos Σ ao conxunto destes mosaicos, temos que calquera elemento de \mathfrak{R} é translación dun elemento de Σ . Diremos que Σ é unha *transversal completa* contida na transversal canónica definida polo conxunto de Delone. Temos agora unha aplicación inxectiva entre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e o subconxunto $\mathfrak{R} \cap \Sigma$ de \mathfrak{R} . Estes argumentos mostran a relación (descrita en [11]) entre os mosaicos de Robinson e os enteiros 2-ádicos. O noso propósito é precisar esta relación dende un punto de vista dinámico. No próximo capítulo, detallaremos a descripción anterior.

3. O espazo dos mosaicos de Robinson

Neste capítulo, imos abordar o estudo dinámico dos mosaicos de Robinson dotando a este espazo dunha topoloxía que fai del un espazo métrico compacto foliado.

3.1 A topoloxía de Gromov-Hausdorff

Sexa \mathcal{P} un conxunto finito de prototeselas e $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ o espazo dos mosaicos de tipo \mathcal{P} . Insistimos no feito que dous mosaicos de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ que se diferencian nunha translación son diferentes a priori, é dicir, dous mosaicos son idénticos se posúen exactamente as mesmas teselas. Para ilustrar a situación, consideremos o caso trivial no que \mathcal{P} consta só do cadrado unidade. Dados un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ e un vector $v \in \mathbb{R}^2$, entón $\mathcal{T} + v$ é distinto de \mathcal{T} agás no caso $v \in \mathbb{Z}^2$. Neste caso $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ identifícase co cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{T}^2$.

Imos definir logo unha topoloxía en $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$, na que dous mosaicos serán próximos se coinciden nunha grande bóla centrada na orixe, salvo translacións por pequenos vectores (véxanse [2] e [4]):

Definición 3.1. Sexan $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Se denotamos $B_{\mathcal{T}}(0, R) = \mathcal{T} \cap B_{\mathbb{R}^2}(0, R)$ a traza do mosaico na bóla $B_{\mathbb{R}^2}(0, R)$, podemos entón definir

$$R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \sup\{R \in [0, +\infty] \mid B_{\mathcal{T}}(0, R) = B_{\mathcal{T}'}(0, R)\}$$

e dados $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$ e $R \geq 0$, denotamos

$$U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P}) \mid \exists v, v' \in \mathbb{R}^2 : \|v\| < \varepsilon, \|v'\| < \varepsilon', R(\mathcal{T}+v, \mathcal{T}'+v') > R\}.$$

Estes conxuntos constitúen unha base de topoloxía. Nós comprobáremolo directamente dotando a $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ dunha métrica (véxase [2]) e probando que a topoloxía inducida por esta métrica está xerada por estes conxuntos.

Definición 3.2. Sexa

$$A = \{\varepsilon \in (0, 1) / \exists v, v' \in B_{\mathbb{R}^2}(0, \varepsilon) : B_{\mathcal{T}+v}(0, \frac{1}{\varepsilon}) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, \frac{1}{\varepsilon})\}.$$

Definimos

$$d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \begin{cases} \inf A, & \text{se } A \neq \emptyset \\ 1, & \text{se } A = \emptyset \end{cases}$$

para cada par de mosaicos \mathcal{T} e \mathcal{T}' en $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$.

Proposición 3.3. *A aplicación $d : \mathfrak{T}(\mathcal{P}) \times \mathfrak{T}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ é unha métrica.*

Proba. Cúmrense as condicións de métrica, pois calquera que sexan os mosaicos $\mathcal{T}, \mathcal{T}', \mathcal{T}'' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, temos:

i) $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = 0$ se e só se para cada $0 < \varepsilon < 1$ existen $v, v' \in B_{\mathbb{R}^2}(0, \varepsilon)$ tales que

$$B_{\mathcal{T}+v}(0, \frac{1}{\varepsilon}) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, \frac{1}{\varepsilon}),$$

é dicir, $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$;

ii) $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = d(\mathcal{T}', \mathcal{T})$;

iii) $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}'') \leq d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') + d(\mathcal{T}', \mathcal{T}'')$, xa que se existen $v, v' \in B_{\mathbb{R}^2}(0, \varepsilon)$ tales que:

$$B_{\mathcal{T}+v}(0, \frac{1}{\varepsilon}) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, \frac{1}{\varepsilon}), \quad (1.1)$$

e $w, w' \in B_{\mathbb{R}^2}(0, \varepsilon')$ tales que:

$$B_{\mathcal{T}'+w}(0, \frac{1}{\varepsilon'}) = B_{\mathcal{T}''+w'}(0, \frac{1}{\varepsilon'}), \quad (1.2)$$

para $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$, entón $u = v + w$ e $u' = v' + w'$ verifican:

$$B_{\mathcal{T}+u}(0, \frac{1}{\varepsilon+\varepsilon'}) = B_{\mathcal{T}''+u'}(0, \frac{1}{\varepsilon+\varepsilon'}). \quad (1.3)$$

En efecto, se $\varepsilon' > \varepsilon\varepsilon'$, temos:

$$\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon' = \frac{1 - \varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon} > \frac{1 - \varepsilon\varepsilon' + \varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} = \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon'}.$$

Analogamente $\frac{1}{\varepsilon'} - \varepsilon > \frac{1}{\varepsilon+\varepsilon'}$, co que (1.1) e (1.2) garanten (1.3). \square

Exemplo 3.4. Consideremos o mosaico periódico por cadrados \mathcal{T} e o seu trasladado $\mathcal{T}' = \mathcal{T} + (\frac{1}{2}, 0)$:



Na figura, os puntos distinguidos sinalan a orixe do plano. Temos que $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \frac{1}{4}$. Por unha banda, é evidente que para todo $\frac{1}{4} < \varepsilon < 1$, os vectores $v = (\frac{1}{4}, 0)$ e $v' = (-\frac{1}{4}, 0)$ verifican que $B_{\mathcal{T}+v}(0, \frac{1}{\varepsilon}) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, \frac{1}{\varepsilon})$. Por outra, calquera par de vectores w e w' de lonxitude $< \frac{1}{4}$, verifica que $B_{\mathcal{T}+w}(0, r) \neq B_{\mathcal{T}'+w'}(0, r)$ para calquera $r \geq 1$.

Vexamos que a topoloxía definida pola métrica coincide coa topoloxía xerada polos conxuntos $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$:

Proposición 3.5. Para cada par $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$, cada $R \geq 0$ e cada $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, o conxunto $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$ é un aberto da topoloxía definida pola métrica d .

Proba. Comprobemos que, para cada $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$, existe unha bóla centrada en \mathcal{T}' contida en $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$. Como $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$, existen vectores v e v' con $\|v\| < \varepsilon$, $\|v'\| < \varepsilon'$ verificando

$$B_{\mathcal{T}+v}(0, R) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, R).$$

Sexan $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon' - \|v'\|}{2}$ e $R' = R + \varepsilon'' + \|v'\|$. Consideremos o conxunto $U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}')$ contido en $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$. En efecto, se $\mathcal{T}'' \in U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}')$, existen vectores w' e w'' con $\|w'\|, \|w''\| < \varepsilon''$ verificando $B_{\mathcal{T}'+w'}(0, R') = B_{\mathcal{T}''+w''}(0, R')$. Deste xeito, a igualdade

$$B_{\mathcal{T}'}(0, R + \|v'\|) = B_{\mathcal{T}''+w''-w'}(0, R + \|v'\|)$$

implica

$$B_{\mathcal{T}'+v'}(0, R) = B_{\mathcal{T}''+w''-w'+v'}(0, R).$$

Ademáis,

$$\|w'' - w' + v'\| < 2\varepsilon'' + \|v'\| = \varepsilon'$$

e polo tanto, $\mathcal{T}'' \in U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$. Tomando agora $r = \min\{\varepsilon'', \frac{1}{R'}\}$, é inmediato comprobar que $B(\mathcal{T}', r) \subset U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}')$ e así

$$\mathcal{T}' \in B(\mathcal{T}', r) \subset U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}).$$

□

Reciprocamente, calquera bóla $B(\mathcal{T}, \varepsilon)$ coincide cunha veciñanza da forma $U_{\varepsilon, \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}}(\mathcal{T})$. Temos probado pois que os conxuntos $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$ forman unha base da topoloxía definida pola métrica d .

A continuación mostramos cando $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é compacto:

Teorema 3.6. *Se o conxunto de prototeselas \mathcal{P} é finito, entón $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é compacto.*

Proba. Probaremos que $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é secuencialmente compacto usando un argumento diagonal clásico. Sexa $\{\mathcal{T}_n\}$ unha sucesión en $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Consideremos

$$\delta = \max\{\delta(T) \mid T \in \mathcal{T}\} + 1.$$

Fixada a orixe como punto base, a bóla $B(0, 1 + \delta)$ só contén un número finito de motivos. Existe logo unha subsucesión $\{\mathcal{T}_{n,1}\}$ de $\{\mathcal{T}_n\}$ tal que calquera bóla $B_{\mathcal{T}_{n,1}}(0, 1)$ está contida nun mesmo motivo $M_1 \subset B_{\mathcal{T}_{n,1}}(0, 1 + \delta)$. Por recurrencia, temos unha subsucesión $\{\mathcal{T}_{n,N}\}$ de $\{\mathcal{T}_{n,N-1}\}$ tal que calquera bóla $B_{\mathcal{T}_{n,N}}(0, N)$ está contida nun mesmo motivo $M_N \subset B_{\mathcal{T}_{n,N}}(0, N + \delta)$. Obtemos así unha sucesión exhaustiva de motivos

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{N-1} \subset M_N \subset \cdots \subset \bigcup_{N \geq 1} M_N = \mathbb{R}^2$$

que define un mosaico \mathcal{T} de \mathbb{R}^2 . Agora, a subsucesión $\{\mathcal{T}_{n,N}\}$ de $\{\mathcal{T}_n\}$ converge a \mathcal{T} . En efecto, dado $N \geq 1$, calquera motivo M_n con $n \geq N$ cumpre:

$$B_{\mathcal{T}_{n,n}}(0, N) \subset M_N \subset \mathcal{T}$$

e polo tanto $R(\mathcal{T}_{n,n}, \mathcal{T}) \geq N$, o que garante a converxencia. □

Observación 3.7. En [2] e [6] afirmase que a envoltura dun mosaico cun número finito de patróns locais é compacta. Agora ben, un mosaico con esa propiedade non ten por que ser localmente finito, como proba o exemplo da observación 1.26, e polo tanto o argumento anterior non é válido nesa situación.

3.2 O espazo foliado de Gromov-Hausdorff

O grupo das translacións actúa de forma natural sobre $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$, é dicir, temos unha acción continua

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{T}(\mathcal{P}) &\longrightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{P}) \\ (v, \mathcal{T}) &\longmapsto \mathcal{T} + v \quad . \end{aligned}$$

En efecto, cada translación

$$\begin{aligned} L_w : \mathfrak{T}(\mathcal{P}) &\longrightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{P}) \\ (w, \mathcal{T}) &\longmapsto \mathcal{T} + w \end{aligned}$$

é continua. Para comprobalo, fixemos $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ e tomemos unha veciñanza da súa imaxe $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T} + w)$ con $R > \|w\|$. Probemos que

$$U_{\varepsilon, \varepsilon', 2R}(\mathcal{T}) \subset (L_w)^{-1}(U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T} + w))$$

e teremos a continuidade de L_w en \mathcal{T} . Se $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, \varepsilon', 2R}(\mathcal{T})$ existen vectores v e v' con $\|v\| < \varepsilon$, $\|v'\| < \varepsilon'$ verificando

$$B_{\mathcal{T}+v}(0, 2R) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, 2R)$$

Isto implica

$$B_{\mathcal{T}+w+v}(0, R) = B_{\mathcal{T}'+w+v'}(0, R)$$

e logo que $\mathcal{T}' + w \in U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T} + w)$.

A acción de \mathbb{R}^2 define unha laminación de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. A folla que pasa por un mosaico \mathcal{T} é a súa órbita, é dicir, o conxunto dos trasladados $\mathcal{T} + v$ polos vectores $v \in \mathbb{R}^2$. O propósito do que segue é probar esta afirmación. Comezaremos pola construción dunha transversal completa (i.e. un subespazo que corta a todas as follas) antes de describir as trivializacións locais da laminación. Como xa vimos, se fixamos un punto base en cada prototesela de \mathcal{P} , obtemos un subconxunto D da unión de \mathcal{P} e un conxunto base $D_{\mathcal{T}} = \{ x_{\mathcal{T}} / \mathcal{T} \in \mathcal{T} \}$ de cada mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Ademais, se \mathcal{T} é de tipo finito, entón $D_{\mathcal{T}}$ é conxunto de Delone.

Lema 3.8. *A isotropía de cada mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$,*

$$Iso(\mathcal{T}) = \{ w \in \mathbb{R}^2 / \mathcal{T} + w = \mathcal{T} \},$$

é un conxunto discreto.

Proba. Tomemos D de xeito que cada punto $x_T \in D$ pertenza ao interior da tesela T . Como \mathcal{P} é finito, podemos tomar $\delta = \min\{d(x_T, \partial(T)) / T \in \mathcal{P}\} > 0$. Así, se temos $\mathcal{T} + w = \mathcal{T}$ para algún vector w , entón $\|w\| > \delta > 0$. Desta forma, concluímos que o grupo $Iso(\mathcal{T})$ é discreto. \square

Definición 3.9. Sexa D un conxunto de puntos base das prototeselas de \mathcal{P} e $D_{\mathcal{T}}$ o conxunto de Delone inducido en cada mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Chamamos *transversal canónica* ao conxunto

$$\Sigma = \Sigma(\mathcal{P}, D) = \{\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P}) / 0 \in D_{\mathcal{T}}\}.$$

Proposición 3.10. *Se \mathcal{P} é finito, a transversal canónica Σ é un subespazo compacto e totalmente disconexo de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$.*

Proba. A proba do carácter compacto de Σ emprega os mesmos argumentos utilizados para mostrar que $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é compacto. Para ver que Σ é totalmente disconexo veremos que a topoloxía inducida está definida por unha ultramétrica. Consideremos as veciñanzas dun mosaico $\mathcal{T} \in \Sigma$ na topoloxía inducida, é dicir, as trazas $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) \cap \Sigma$ das veciñanzas $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$ de \mathcal{T} en $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Agora definimos unha métrica sobre Σ dada por:

$$d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = e^{-R(\mathcal{T}, \mathcal{T}')}$$

para cada par $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \Sigma$. É doado comprobar que d é unha ultramétrica. Para concluír, só temos que probar que a topoloxía inducida sobre Σ pola topoloxía de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ coincide coa topoloxía xerada polas bólas

$$\begin{aligned} B_{\Sigma}(\mathcal{T}, e^{-R}) &= \{\mathcal{T}' \in \Sigma / d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') < e^{-R}\} \\ &= \{\mathcal{T}' \in \Sigma / R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') > R\}. \end{aligned}$$

En efecto, calquera aberto básico $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) \cap \Sigma$ é un aberto da topoloxía definida por d . Se $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) \cap \Sigma$, tomando ε'' e R' coma na proposición 3.5, temos que:

$$\mathcal{T}' \in B_{\Sigma}(\mathcal{T}', e^{-R'}) \subset U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}') \cap \Sigma \subset U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) \cap \Sigma.$$

Ademais, calquera bóla $B_{\Sigma}(\mathcal{T}, e^{-R})$ é traza dun aberto básico de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. De xeito explícito, para todo $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ e todo $R \geq 1$,

$$B_{\Sigma}(\mathcal{T}, e^{-R}) = U_{\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, R}(\mathcal{T}) \cap \Sigma$$

se o conxunto de Delone $D_{\mathcal{T}}$ é r -dicreto. \square

Introducida a transversal canónica no espazo dos mosaicos, vexamos como \mathbb{R}^2 induce unha laminación en $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$.

Teorema 3.11. *A acción de \mathbb{R}^2 induce unha estrutura de laminación en $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$.*

Proba. Imos ver como construír un atlas foliado, que dotará a $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ dunha estrutura de laminación na que as follas son as órbitas da acción e a transversal canónica será unha transversal completa. Deste xeito, a folla que pasa polo mosaico \mathcal{T} identifícase coa órbita $L_{\mathcal{T}} \cong \mathbb{R}^2/Is(\mathcal{T})$ e a transversal canónica cunha transversal completa.

Dado o conxunto de prototeselas \mathcal{P} , fixemos o conxunto D dos seus puntos base. Tomemos $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ e supoñamos que a orixe 0 pertence ao interior dalgunha tesela $T_0 \in \mathcal{T}$. Sexan

$$\delta = \max\{\delta(T) \mid T \in \mathcal{P}\} \quad \text{e} \quad \gamma = d(0, \partial(T_0))$$

onde $r > 0$ é o número que nos garante que o conxunto de Delone $D_{\mathcal{T}}$ é uniformemente discreto. Para $\varepsilon \leq \gamma$ e $R \geq \delta$, definimos unha aplicación

$$\begin{aligned} \phi_{\varepsilon,R} : B(0, \varepsilon) \times B_{\Sigma}(\mathcal{T}, e^{-R}) &\longrightarrow U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T}) \\ (v, \mathcal{T}') &\longmapsto \mathcal{T}' + v \end{aligned}$$

onde

$$U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{T}'' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P}) \mid \exists w \in \mathbb{R}^2 : \|w\| < \varepsilon, R(\mathcal{T}, \mathcal{T}'' + w) > R\}.$$

Temos as seguintes propiedades:

1) A aplicación $\phi_{\varepsilon,R}$ está ben definida: se $(v, \mathcal{T}') \in B(0, \varepsilon) \times B_{\Sigma}(\mathcal{T}, e^{-R})$ e $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}' + v$, entón:

$$B_{\mathcal{T}}(0, R) = B_{\mathcal{T}'}(0, R) = B_{\mathcal{T}''-v}(0, R),$$

con $-v \in B(0, \varepsilon)$ e daquela $\mathcal{T}'' \in U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T})$.

2) O conxunto $U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T})$ é unha veciñanza aberta de \mathcal{T} en $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$: se $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T})$, tomando ε'' e R' como na Proposición 3.5 temos que:

$$\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}') \subset U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T}).$$

Ademais, para cada mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, as veciñanzas $U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T})$ constitúen unha base de veciñanzas de \mathfrak{T} , pois dada unha veciñanza calquera $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$ verifícase

$$\mathcal{T} \in U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T}) \subset U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}).$$

3) A aplicación $\phi_{\varepsilon,R}$ é un homeomorfismo con inversa definida por

$$(\phi_{\varepsilon,R})^{-1}(\mathcal{T}'') = (-w, \mathcal{T}'' + w),$$

para todo mosaico $\mathcal{T}'' \in U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T})$, onde w é o vector asociado a \mathcal{T}'' pola definición de pertenza a $U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T})$.

Por seren as restantes comprobacións obvias, mostramos só o carácter inxectivo, que é consecuencia das restricións impostas a ε e R : se os pares $(v_1, \mathcal{T}_1), (v_2, \mathcal{T}_2) \in B(0, \varepsilon) \times B_{\Sigma}(\mathcal{T}, e^{-R})$ cumpren $v_1 + \mathcal{T}_1 = v_2 + \mathcal{T}_2$, entón

$$B_{\mathcal{T}_1}(0, R) = B_{\mathcal{T}}(0, R) = B_{\mathcal{T}_2}(0, R) = B_{\mathcal{T}_1+(v_1-v_2)}(0, R),$$

e isto implica, neste caso, que $v_1 - v_2 = 0$ e logo $(v_1, \mathcal{T}_1) = (v_2, \mathcal{T}_2)$.

Deste xeito, cos abertos $U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T})$ cubrimos todos os mosaicos desprazados de \mathcal{T} por vectores que levan a orixe nalgún punto da bóla $B(0, \varepsilon)$. Para cubrir o trasladado por calquera outro punto x_{T_0} do interior de T_0 , movemos a transversal, é dicir, tomamos un novo conxunto de puntos base das prototeselas D' de xeito que $x_{T_0} \in D'_{\mathcal{T}}$. Así, $\mathcal{T}' = \mathcal{T} - x_{T_0} \in \Sigma' = \Sigma(\mathcal{P}, D')$ e tomando agora $\gamma = \max\{d(0, \partial(T'_0)), \frac{r}{2}\}$ podemos definir novamente o homeomorfismo

$$\phi_{\varepsilon,R} : B(0, \varepsilon) \times B_{\Sigma'}(\mathcal{T}', e^{-R}) \longrightarrow U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T}')$$

para cada $\varepsilon \leq \gamma$ e cada $R \geq \delta$.

Faltaríanos por recubrir os puntos de ∂T_0 . Pero de xeito análogo, para un punto $x_{T_0} \in \partial T_0$ podemos tomar un conxunto de puntos base das prototeselas D'' que verifique $x_{T_0} \in D''_{\mathcal{T}}$, e así $\mathcal{T}'' = \mathcal{T} - x_{T_0} \in \Sigma'' = \Sigma(\mathcal{P}, D'')$. Considerando a unión das teselas adxacentes ou veciñas que conteñen a x_{T_0} e tomando $\gamma = \frac{r}{2}$, reducimos o problema aos casos anteriores e podemos definir novamente o homeomorfismo $\phi_{\varepsilon,R}$ para cada $\varepsilon \leq \gamma$ e cada $R \geq \delta$. Polo tanto, facendo que \mathcal{T} recorra Σ obtemos un recubrimento $\{U_{\varepsilon,R}(\mathcal{T})\}$. Por compacidade, existe un subrecubrimento finito $U_{\varepsilon_1,R_1}(\mathcal{T}_1), \dots, U_{\varepsilon_n,R_n}(\mathcal{T}_n)$ e obtemos así un atlas finito $\{(U_{\varepsilon_i,R_i}(\mathcal{T}_i), \phi_{\varepsilon_i,R_i})\}_{1 \leq i \leq n}$.

Comprobemos por último que o cambio de cartas funciona ben. En efecto, sexa $\mathcal{T} \in U_{\varepsilon_i,R_i}(\mathcal{T}_i) \cap U_{\varepsilon_j,R_j}(\mathcal{T}_j)$ e supoñamos sen perda de xeneralidade que $\mathcal{T}_i \neq \mathcal{T}_j$. Existen entón $(v_i, \mathcal{T}'_i) \in B(0, \varepsilon_i) \times B_{\Sigma}(\mathcal{T}, e^{-R_i})$, $(v_j, \mathcal{T}'_j) \in B(0, \varepsilon_j) \times B_{\Sigma'}(\mathcal{T}, e^{-R_j})$ de xeito que $\mathcal{T}'_i + v_i = \mathcal{T} = \mathcal{T}'_j + v_j$ e o cambio de carta $\Phi_{i,j} = (\phi_{\varepsilon_j,R_j})^{-1} \circ \phi_{\varepsilon_i,R_i}$ ven dado por

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j}(v_i, \mathcal{T}'_i) &= (v_j, \mathcal{T}'_j) = (v_j, \mathcal{T}'_i + v_i - v_j) \\ &= (v_i - (v_i - v_j), \mathcal{T}'_i + (v_i - v_j)) = (v_i - w, \mathcal{T}'_i + w), \end{aligned}$$

onde $w = v_i - v_j$ non depende do punto, pois se $R = \min\{R_j, R_i - \|w\|\}$ verificase

$$B_{\mathcal{T}_j}(0, R) = B_{\mathcal{T}'_j}(0, R) = B_{\mathcal{T}'_i+w}(0, R) = B_{\mathcal{T}_i+w}(0, R).$$

Rematamos así de probar que o atlas $\{(U_{\varepsilon_i, R_i}(\mathcal{T}_i), \phi_{\varepsilon_i, R_i}(\mathcal{T}_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ confire a $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ unha estrutura de laminación. \square

Observación 3.12. Como consecuencia do punto (2) da proba, temos que os conxuntos $U_{\varepsilon, R}(\mathcal{T})$ forman unha base de topoloxía para $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$.

3.3 Mosaicos aperiódicos e repetitivos

O espazo foliado $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ pode ser extremadamente grande. Interésannos os pechados saturados obtidos tomando a clausura das follas. Unha cuestión natural é saber cando estes pechados saturados son minimais por inclusión.

Definición 3.13. Sexa \mathcal{T} un mosaico de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Definimos a *envoltura de \mathcal{T}* como a clausura da súa órbita $\Omega_{\mathcal{T}} = \overline{L_{\mathcal{T}}}$.

Definición 3.14. Un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é *repetitivo* [2] ou ten a *propiedade de isomorfismo local* [10] se para cada motivo M existe unha constante $R \equiv R(M) > 0$ tal que calquera bóla de radio R centrada en calquera punto contén unha copia por translación de M , i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \exists v \in \mathbb{R}^2 : M + v \subset B(x, R).$$

Definición 3.15. Un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é *uniformemente repetitivo*, se dado $r > 0$, existe unha constante $R \equiv R(r) > 0$ tal que para calquera motivo M de diámetro menor que r existe unha copia por translación de M en toda bóla de radio R , i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \exists v \in \mathbb{R}^2 : M + v \subset B(x, R).$$

Lema 3.16. A envoltura $\Omega_{\mathcal{T}}$ dun mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é un conxunto minimal se e só se a órbita de cada mosaico $\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}}$ é densa en $\Omega_{\mathcal{T}}$.

Proba.

“ \Rightarrow ” Vexamos que $\Omega_{\mathcal{T}'} = \Omega_{\mathcal{T}}$ para todo mosaico $\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}}$. En efecto, dado que a envoltura dun mosaico é un pechado saturado, entón $\Omega_{\mathcal{T}'} = \overline{L_{\mathcal{T}'}} \subset \Omega_{\mathcal{T}}$ para todo $\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}}$. Como $\Omega_{\mathcal{T}}$ é minimal, temos que $\Omega_{\mathcal{T}'} = \Omega_{\mathcal{T}}$.

“ \Leftarrow ” Sexa F calquera pechado saturado contido en $\Omega_{\mathcal{T}}$. Para todo mosaico $\mathcal{T}' \in F$ temos que $\Omega_{\mathcal{T}'} \subset F \subset \Omega_{\mathcal{T}}$. Pero por hipótese $\Omega_{\mathcal{T}'} = \Omega_{\mathcal{T}}$, logo $F = \Omega_{\mathcal{T}}$ e temos que $\Omega_{\mathcal{T}}$ é minimal. \square

Teorema 3.17. *Sexa $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$. As seguintes condicións son equivalentes:*

- i) \mathcal{T} é repetitivo;*
- ii) \mathcal{T} é uniformemente repetitivo;*
- iii) $\Omega_{\mathcal{T}}$ é minimal.*

Proba. A implicación (ii) \Rightarrow (i) é evidente, así que probaremos as restantes:

(i) \Rightarrow (iii) Comprobemos que a órbita de cada mosaico $\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}}$ é densa en $\Omega_{\mathcal{T}}$, i.e. $\Omega'_{\mathcal{T}} = \Omega_{\mathcal{T}}$. Sabemos que $\Omega_{\mathcal{T}'} \subset \Omega_{\mathcal{T}}$, logo chega con probar $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{T}'}$ para ter $\Omega_{\mathcal{T}} \subset \Omega_{\mathcal{T}'}$. Fixemos $r \geq 1$ e tomemos un motivo M verificando $B_{\mathcal{T}}(0, r) \subset M$. Por hipótese, existe $R \equiv R(M)$ cumprindo que para todo $x \in \mathbb{R}^2$ existe un vector $v \in \mathbb{R}^2$ verificando

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}}(v, r) \subset M + v \subset B_{\mathcal{T}}(x, R).$$

Por outra banda, como $\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}}$, existe $y \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$B_{\mathcal{T}'}(0, R) = B_{\mathcal{T}-y}(0, R) = B_{\mathcal{T}}(y, R) - y.$$

En particular tense

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v - y = B_{\mathcal{T}}(v, r) - y \subset B_{\mathcal{T}}(y, R) - y = B_{\mathcal{T}-y}(0, R) = B_{\mathcal{T}'}(0, R)$$

e ademais

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v - y = B_{\mathcal{T}}(v, r) - y = B_{\mathcal{T}-y}(v - y, r) = B_{\mathcal{T}'}(v - y, r),$$

co que $w = v - y$ cumpre

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) = B_{\mathcal{T}'}(w, r) - w = B_{\mathcal{T}'-w}(0, r).$$

Atopamos así un mosaico $\mathcal{T}' - w \in L_{\mathcal{T}'}$ tal que $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}' - w) \leq e^{-r}$. Como isto podemos facelo para todo $r \geq 1$, concluímos que $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{T}'}$.

(iii) \Rightarrow (i) Dado $r \geq 1$, para todo $S \geq r$ definimos

$$U_S = \{\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}} / \exists v \in \mathbb{R}^2 : B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}'}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S)\}.$$

Estes conxuntos verifican as seguintes propiedades:

1) Os conxuntos U_S son abertos. Se $\mathcal{T}' \in U_S$, entón existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}'}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, r + \|v\|) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S).$$

Tomando $S' = r + \|v\|$ e $\varepsilon \leq S - S'$, temos

$$\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, S'}(\mathcal{T}') \subset U_S.$$

En efecto, se $\mathcal{T}'' \in U_{\varepsilon, S'}(\mathcal{T}')$, existe $v'' \in \mathbb{R}^2$ con $\|v''\| < \varepsilon$ e

$$B_{\mathcal{T}'}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S') = B_{\mathcal{T}''+v''}(0, S').$$

Polo tanto,

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}'}(v, r) = B_{\mathcal{T}''+v''}(v, r) = B_{\mathcal{T}''}(v - v'', r) + v'',$$

logo

$$B_{\mathcal{T}''}(v - v'', r) + v'' \subset B_{\mathcal{T}''+v''}(0, S')$$

e

$$B_{\mathcal{T}''}(v - v'', r) \subset B_{\mathcal{T}''+v''}(0, S') - v'' = B_{\mathcal{T}''}(-v'', S').$$

Así, $w = v - v''$ cumple:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + w = B_{\mathcal{T}''}(w, r) \subset B_{\mathcal{T}''}(-v'', S') \subset B_{\mathcal{T}''}(0, S)$$

e deste xeito, $\mathcal{T}'' \in U_S$.

2) Os abertos U_S recubren $\Omega_{\mathcal{T}}$. Calquera $\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}}$ verifica que $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{T}'}$ xa que $\Omega_{\mathcal{T}}$ é minimal. Polo tanto, para todo $r \geq 1$, existe $y \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) = B_{\mathcal{T}'-y}(0, r) = B_{\mathcal{T}'}(y, r) - y.$$

Tomando $S = r + \|y\|$,

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + y = B_{\mathcal{T}'}(y, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S),$$

co que $\mathcal{T}' \in U_S$.

Temos entón que $\{U_S\}_{S \geq r}$ é un recubrimento por abertos de $\Omega_{\mathcal{T}}$. Como $\Omega_{\mathcal{T}}$ é compacto e o recubrimento é monótono crecente, existe un $R \geq r$ tal que $U_R = \Omega_{\mathcal{T}}$. Así, para todo $y \in \mathbb{R}^2$, existe $v \in \mathbb{R}^2$ con

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}-y}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}-y}(0, R).$$

Transladando por y ,

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v + y = B_{\mathcal{T}-y}(v, r) + y \subset B_{\mathcal{T}-y}(0, R) + y = B_{\mathcal{T}}(y, R)$$

e entón, atopamos un vector $u = v + y \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + u \subset B_{\mathcal{T}}(y, R).$$

Polo tanto, como calquera motivo M está contido nunha bóla centrada na orixe de radio r suficientemente grande, temos probado que \mathcal{T} é repetitivo.

(iii) \Rightarrow (ii) Na proba da implicación (iii) \Rightarrow (i) atopamos unha constante $R > 0$ que dependía de cada motivo M . Busquemos agora outra constante que sirva para todo motivo M de diámetro menor que $r > 0$. Sexan $r \geq 2$ e $x \in \mathbb{R}^2$. Para cada $S \geq \frac{r}{2}$ definimos

$$U_{S,x} = \{\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}} / \exists v \in \mathbb{R}^2 : B_{\mathcal{T}}(x, \frac{r}{2}) + v = B_{\mathcal{T}'}(x + v, \frac{r}{2}) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S)\}.$$

Coma antes, deducimos que existe $R = R(\frac{r}{2}, x)$ tal que, para todo $y \in \mathbb{R}^2$, existe $v \in \mathbb{R}^2$ con:

$$B_{\mathcal{T}}(x, \frac{r}{2}) + v \subset B_{\mathcal{T}}(y, R).$$

Así, para cada motivo M contido en $B_{\mathcal{T}}(x, \frac{r}{2})$ verificase que, para todo $y \in \mathbb{R}^2$, existe $v \in \mathbb{R}^2$ con

$$M + v \subset B_{\mathcal{T}}(y, R).$$

Por outra banda, como \mathcal{T} é de tipo finito e ten un número finito de patróns locais, sabemos que fixado r só hai un número finito de motivos de diámetro menor que r , agás translación.

Sexan entón M_1, \dots, M_n os representantes das clases por translación de motivos de diámetro menor que r , contidos respectivamente en bólas de radio $\frac{r}{2}$ centradas en puntos x_1, \dots, x_n . Podemos tomar agora

$$R = \max\{R(\frac{r}{2}, x_1), \dots, R(\frac{r}{2}, x_n)\},$$

de maneira que, para cada motivo M de diámetro menor que r e para cada $y \in \mathbb{R}^2$, existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$M + v \subset B_{\mathcal{T}}(y, R),$$

pois M é o trasladado dalgún M_i coa mesma propiedade. \square

Observación 3.18. A proba da equivalencia (i) \Leftrightarrow (iii) pode verse en [1], [3] e [8]. Véxanse tamén [2] e [10]. A equivalencia (i) \Leftrightarrow (ii) aparece noutro contexto en [1] e [8].

Ímonos interesar agora polos conxuntos de prototeselas que definen espazos foliados de Gromov-Hausdorff nos que a transversal completa é un conxunto de Cantor.

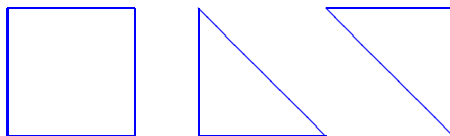
Definición 3.19. Un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ dise:

- i) *periódico* se $\mathcal{T} + v = \mathcal{T}$ e $\mathcal{T} + w = \mathcal{T}$ sendo v e w dous vectores de \mathbb{R}^2 linealmente independentes,
- ii) *aperiódico* se $\mathcal{T} + v \neq \mathcal{T}$ para todo v vector de \mathbb{R}^2 .

Compre observar que un mosaico non periódico non ten por que ser aperiódico.

Exemplo 3.20. Podemos atopar mosaicos periódicos tanto illados coma non illados na transversal completa.

- a) Consideremos o conxunto \mathcal{P} formado polas tres prototeselas seguintes:



Sexa $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ o mosaico por cadrados. Fixando calquera conxunto de puntos base D , temos que \mathcal{T} non é illado en Σ pois en toda bóla centrada en \mathcal{T} atopamos mosaicos distintos de \mathcal{T} .

- b) Se modificamos os tres lados dun dos triángulos con lingüetas e os do outro coas rañuras complementarias, obtemos un novo conxunto de tres prototeselas \mathcal{P}' . Agora, para calquera conxunto de puntos base D' , o mosaico por cadrados \mathcal{T} é illado en $\Sigma' = \Sigma(\mathcal{P}', D')$, pois neste caso $B(\mathcal{T}, e^{-R}) = \mathcal{T}$, para todo $R \geq 1$.

É natural preguntarse que ocorre se un mosaico é illado. O seguinte lema danos unha resposta:

Lema 3.21. *Un mosaico aperiódico non é illado en Σ .*

Proba. Se \mathcal{T} é illado en Σ , entón $L_{\mathcal{T}} \cap \Sigma$ é unión de mosaicos illados, co que coincide coa súa clausura. Deste xeito, $L_{\mathcal{T}}$ ten que ser compacta e \mathcal{T} non pode ser aperiódico. \square

Definición 3.22. Diremos que un mosaico é *fortemente aperiódico* se a súa envoltura só contén mosaicos aperiódicos. En [6], pídese só que a envoltura non conteña mosaicos periódicos.

Proposición 3.23. *Todo mosaico aperiódico e repetitivo é fortemente aperiódico.*

Proba. Razoemos por redución ao absurdo. Sexa $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ aperiódico e repetitivo e supoñamos que existe $\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}}$ verificando $\mathcal{T}' = \mathcal{T}' + v$, para algún $v \in \mathbb{R}^2$. Como $\Omega_{\mathcal{T}}$ é minimal, $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{T}'}$ e dado $R > \|v\|$, existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$B_{\mathcal{T}}(0, R) = B_{\mathcal{T}'-x}(0, R) = B_{(\mathcal{T}'+v)-x}(0, R).$$

Mais isto implica que

$$B_{\mathcal{T}+v}(0, R - \|v\|) = B_{(\mathcal{T}'+v)-x}(0, R - \|v\|) = B_{\mathcal{T}}(0, R - \|v\|)$$

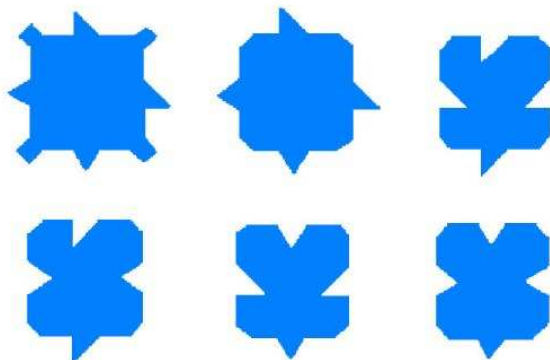
e polo tanto, como o razoamento é válido para todo $R > \|v\|$, \mathcal{T} non sería aperiódico. Logo \mathcal{T} é fortemente aperiódico. \square

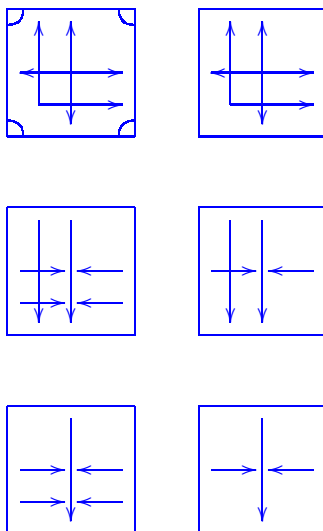
Tendo en conta o teorema 3.17 e combinando a proposición 3.10 cos dous resultados anteriores, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.24. *A envoltura $\Omega_{\mathcal{T}}$ dun mosaico aperiódico e repetitivo $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é un conxunto minimal transversalmente Cantor, é dicir, $\Omega_{\mathcal{T}} \cap \Sigma$ é un conxunto de Cantor.* \square

3.4 O espazo dos mosaicos de Robinson.

Retomamos agora os mosaicos de Robinson dende o punto de vista que adoptamos na última sección. Sexa \mathcal{P} o conxunto das seis prototeselas de Robinson, máis as súas imaxes polos xiros de 90, 180 e 270 graos e a reflexión respecto do eixo de abscisas. Chamaremos *espazo dos mosaicos de Robinson* ao espazo $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ de todos os mosaicos construídos con estas prototesela.





Nun principio, $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ podería conter algún tipo de mosaico distinto dos descritos en §2.2, é dicir, poderíamos ter $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Non obstante, de existir unha construción alternativa, os cruces terían que aparecer alternados só por filas ou por columnas, non por filas e columnas ao mesmo tempo. Agora ben, isto non é posible como mostramos no seguinte resultado:

Proposición 3.25. *O espazo dos mosaicos de Robinson $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ coincide co subespazo \mathfrak{T} .*

Para non interromper a descrición deste espazo pospoñemos a proba ao final da sección.

Proposición 3.26. *O conxunto das prototeselas de Robinson \mathcal{P} é aperiódico, é dicir, calquera mosaico de Robinson $\mathcal{T} \in \mathfrak{T} = \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é aperiódico.*

Proba. Para mostrar a aperiocidade dun mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}$, notamos que calquera translación que deixe o mosaico invariante debe respetar cada bloque de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas, é dicir, levalo noutro bloque do mesmo tamaño. Polo tanto, a norma do vector de translación debe ser alomenos $2^n - 1$, a distancia en horizontal e vertical entre os cruces centrais de dous bloques de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas. Agora ben, como o tamaño dos bloques é arbitrariamente grande, concluímos que non existe ningún vector de translación que deixe o mosaico invariante. \square

Lembremos que a familia \mathfrak{T} contén unha subfamilia \mathfrak{R} de mosaicos construídos de maneira repetitiva (véxase §2.2). O seguinte resultado precisa o tipo destes mosaicos.

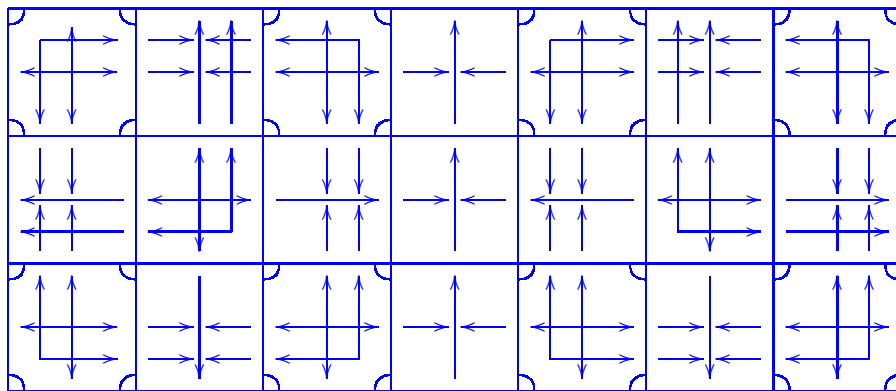
Proposición 3.27. *Calquera mosaico \mathcal{T} da familia \mathfrak{R} é repetitivo.*

Proba. Calquera mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{R}$ pódese filtrar por bloques, é dicir, posúe unha sucesión monótona crecente de bloques de teselas que dá lugar ao mosaico completo. Chéganos entón con ver que para calquera destes bloques, existe un $R > 0$ tal que toda bóla en \mathcal{T} de radio R contén unha copia do bloque por translación.

Se \mathcal{T} está construído sen pegados, o filtrado é o natural, é dicir, ven dado precisamente por como se vai construíndo o mosaico (según §2.2). Tomando entón $R = \sqrt{2}(2^{n+1})$, asegurámonos que toda bóla de radio R contén a unha copia por translación de calquera bloque de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas.

Se \mathcal{T} é un mosaico construído pegando catro cuartos de plano cunha cruz infinita, a filtración obtense por translación. Trátase da sucesión de bloques de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas centrados no cruce central da cruz infinita. Logo serve o mesmo razoamento.

Se \mathcal{T} é un mosaico obtido pegando dous medios planos simétricos por unha fila ou columna infinita, non podemos considerar a mesma filtración. Neste caso, imos considerar rectángulos formados por pequenas filas ou columnas de $(2^n - 1)$ teselas (idénticas á fila ou columna infinita) e dos bloques de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas situados a ambos os dous lados (sen importar onde centremos estes rectángulos). Con $R = \sqrt{2}(2^{n+3})$ garantimos que calquera bóla de radio R contén a unha copia por translación do rectángulo de lado menor $(2^n - 1)$ e completamos así a proba.



□

Observación 3.28. Ningún dos mosaicos de $\mathfrak{T} \setminus \mathfrak{R}$ é repetitivo. Lembremos que estes mosaicos obtéñense por pegado asimétrico de medios planos dous cuartos e un medio plano ou catro cuartos de plano. Polo tanto, o subespazo dos mosaicos de Robinson repetitivos coincide con \mathfrak{R} .

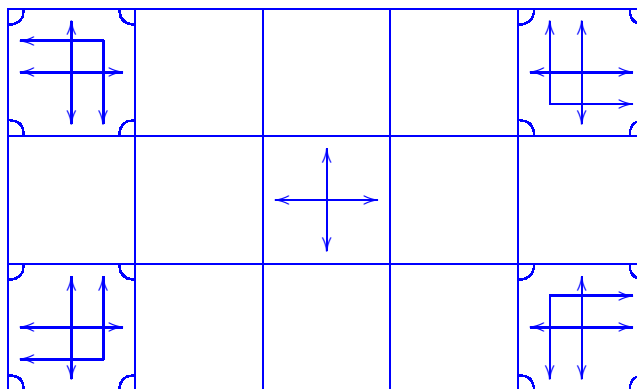
Ademais, podemos obter \mathfrak{R} como a envoltura de calquera mosaico repetitivo:

Teorema 3.29. *O subespazo dos mosaicos de Robinson aperiódicos e repetitivos \mathfrak{R} é o único conxunto minimal contido no espazo foliado \mathfrak{T} dos mosaicos de Robinson. En particular, \mathfrak{R} é a envoltura de calquera mosaico aperiódico e repetitivo.*

Proba. Como consecuencia dos resultados anteriores, bástanos comprobar que $\Omega_{\mathcal{T}} = \mathfrak{R}$ para cada $\mathcal{T} \in \mathfrak{R}$. O criterio de minimalidade 3.17 proba que $\Omega_{\mathcal{T}} \subset \mathfrak{R}$. Por outra banda, calquera elemento \mathcal{T}' de \mathfrak{R} pódese filtrar por bloques que tamén atopamos nalgún lugar de \mathcal{T} . Deste xeito, somos quen de ir aproximando \mathcal{T}' por elementos da órbita de \mathcal{T} . \square

Rematamos esta sección cunha proba anunciada:

Proba da proposición 3.25. En calquera construción coas prototeselas de \mathcal{P} , os cruces deben aparecer alternados por filas, por columnas ou por filas e columnas a un tempo. De existir outra construción, os cruces terían que aparecer alternados só por filas ou só por columnas, xa que ao aparecer alternados por filas e columnas forzan a construción vista. Unha primeira observación é que en ningún destes dous casos poderían utilizarse cruces sen cornos. En segundo lugar, a existencia dun mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ con calquera destas disposicións, implicaría a existencia de motivos con forma de rectángulo de 3×5 teselas, nos que as esquinas e o centro estarían ocupadas por cruces con cornos e o resto das teselas serían brazos.



Pero a construción deste tipo de motivos non é posible. Para comprobalo, consideramos rectángulos 3×5 con todas as combinacións de catro cruces con cornos dispostos simultaneamente nas esquinas e un cruce *parcial* (i.e. no que só aparecen debuxadas as frechas simples) no centro. Lembremos que dous cruces consecutivos nunha fila ou columna deben aparecer sempre cara con cara ou costas con costas. Isto, xunto co feito de considerar o cruce central parcial, reduce sensiblemente o número de casos. Se intentamos completar os rectángulos con brazos, vemos que non é posible rematar de construílos, calquera que sexan os brazos que vaiamos escollendo. Nuns casos, non podemos nin completar un ciclo de brazos arredor do cruce do centro. Noutros, é posible completar o ciclo, pero facelo implica non poder completar o cruce central, é dicir, engadir dobres frechas ao cruce parcial. \square

3.5 Dinámica medible.

No capítulo 2, comentouse a relación entre a transversal completa $\mathfrak{R} \cap \Sigma$ do espazo foliado minimal \mathfrak{R} e o conxunto \mathbb{Z}_2 dos enteiros 2-ádicos. Neste capítulo, imos precisar esa afirmación mostrando que a dinámica transversa medible do espazo dos mosaicos de Robinson repetitivos está representada pola suma de 1 nos enteiros 2-ádicos.

Como xa dixemos, asociando a cada orientación dun cruce sen cornos unha parella de elementos de $\{0, 1\}$, obtemos unha correspondencia entre as sucesións de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e os mosaicos de Robinson repetitivos. Asociemos ao cruce sen cornos orientado cara arriba e á dereita o par 00 e ás súas imaxes polas rotacións de ángulo 90° , 180° e 270° (no sentido das agullas do reloxo), os pares 01, 11 e 10 respectivamente. Chamaremos paridade dunha parella $\beta\alpha$ de elementos de $\{0, 1\}$ á suma $\beta + \alpha$. Cada sucesión $\alpha = \{\alpha_n\} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ determina unha sucesión de bloques e polo tanto un mosaico de Robinson repetitivo, agás no caso das sucesións periódicas de períodos 00, 01, 11, 10 ou das que conteñen infinitas parellas de elementos de $\{0, 1\}$ con distinta paridade e só un número finito de parellas coa mesma paridade. No primeiro caso, a sucesión de códigos determina un mosaico dun cuarto de plano e no segundo dun semiplano. En §2.2 explicamos como obter un mosaico do plano replicando os cuartos de plano ou os semiplanos e engadindo unha cruz infinita ou un corredor infinito. Nestes casos, a unha sucesión $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ correspóndelle máis dun mosaico. Xa indicamos como asignarlle un mosaico a cada sucesión de maneira que se obtén unha aplicación inxectiva Φ . Observemos agora, que mentres que a intersección con $Im\Phi$ da folla que pasa por un mosaico de \mathfrak{R}_1 é a propia folla, a traza con $Im\Phi$ da folla que pasa por un mosaico de \mathfrak{R}_4 ou \mathfrak{R}_2 redúcese respectivamente ós mosaicos da folla con punto base nun cruce sen cornos do cuarto de plano ou semiplano codificado.

Antes de retomar a aplicación de codificación, imos lembrar varias definicións. Comezamos recordando que o conxunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ pode dotarse da topoloxía produto da topoloxía discreta sobre $\{0, 1\}$, xerada polos cilindros

$$C_{\beta_0, \dots, \beta_n}^{i_0, \dots, i_n} = \{\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} / \alpha_{i_0} = \beta_0, \dots, \alpha_{i_n} = \beta_n\}$$

determinados polas sucesións finitas $i_0, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ e $\beta_0, \dots, \beta_n \in \{0, 1\}$. Como calquera destes cilindros é unión de cilindros do tipo

$$C_{\beta_0, \dots, \beta_n} = C_{\beta_0, \dots, \beta_n}^{0, \dots, n},$$

estes tamén forman unha base. Para o noso propósito, cando pretendamos probar propiedades da aplicación de codificación, consideraremos os cilindros da forma

$$C_{\gamma_0, \dots, \gamma_n} = C_{\beta_0 \beta_1, \dots, \beta_{2n-1} \beta_{2n}}$$

definidos por sucesións finitas $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in \{00, 01, 10, 11\}$, que forman base tamén. É dicir, identificaremos os espazos $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e $\{00, 01, 10, 11\}^{\mathbb{N}}$.

Chamamos *desprazamento de Bernoulli* á transformación

$$\begin{aligned} \sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \\ \alpha &\longmapsto \sigma(\alpha) \end{aligned}$$

tal que $\sigma(\alpha)_n = \alpha_{n+1}$, e definimos así a relación cofinal:

Definición 3.30. Sexan α e β dúas sucesións de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Diremos que son *cofinais* e escribiremos $\alpha \mathcal{R}_{cof} \beta$ se existe $n \geq 0$ tal que $\sigma^n(\alpha) = \sigma^n(\beta)$, é dicir, tal que $\alpha_m = \beta_m$, $\forall m \geq n$.

Definición 3.31. Chamamos *máquina de sumar binaria* ao sistema dinámico clásico xerado pola transformación

$$T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

que envía $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ en $T(\alpha) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ do seguinte xeito:

- i) se $\alpha_0 = 0$, entón $T(\alpha)_0 = 1$ e $T(\alpha)_n = \alpha_n$, $\forall n \geq 1$
- ii) se $\alpha_0 = 1$, entón $T(\alpha)_0 = 0$ e $T(\alpha)_1 = T(\sigma(\alpha))_0$.

A denominación débese a que a transformación T coincide coa suma de 1

$$S : x \in \mathbb{Z}_2 \longmapsto x + 1 \in \mathbb{Z}_2$$

no anel \mathbb{Z}_2 dos enteiros 2-ádicos. A clase de cofinalidade dun elemento α coincide coa súa órbita por T , agás as clases de cofinalidade de $000\dots$ e $111\dots$ contidas na mesma órbita. Diremos que a relación cofinal sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e a relación de equivalencia definida sobre \mathbb{Z}_2 polas orbitas da transformación S son *orbitalmente equivalentes*, pois $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e \mathbb{Z}_2 conteñen subconxuntos G_δ densos e saturados tales que as relacións de equivalencia inducidas son isomorfas.

Antes de continuar, convén precisar a definición anterior lembrando as versións borelianas dalgunhas nocións clásicas introducidas en [1]:

Definición 3.32. Sexa X un espazo boreliano estándar, dotado dunha σ -álgebra isomorfa á σ -álgebra dos borelianos dun espazo polaco (i.e. completamente metrizable e separable). Diremos que unha relación de equivalencia \mathcal{R} é *medible discreta* se as clases de equivalencia son numerables e o grafo é un subconxunto boreliano de $X \times X$.

Definición 3.33. Consideremos dúas relacións de equivalencia medibles discretas \mathcal{R} e \mathcal{R}' definidas sobre dous espazos topolóxicos polacos X e X' . Diremos que \mathcal{R} e \mathcal{R}' son *orbitalmente equivalentes* se X e X' conteñen subconxuntos G_δ densos Y e Y' saturados por \mathcal{R} e \mathcal{R}' tales que existe un isomorfismo boreliano $\varphi : Y \rightarrow Y'$ compatible con \mathcal{R} e \mathcal{R}' , i.e. $\varphi(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}'[\varphi(x)]$ para cada $x \in Y$.

Definición 3.34. Diremos que \mathcal{R} e \mathcal{R}' son *orbitalmente establemente equivalentes* se X e X' conteñen subconxuntos borelianos Y e Y' tales que as súas saturacións por \mathcal{R} e \mathcal{R}' son conxuntos G_δ densos e existe un isomorfismo boreliano $\varphi : Y \rightarrow Y'$ compatible coas relacións de equivalencia inducidas por \mathcal{R} e \mathcal{R}' . En particular, se X' é un boreliano de X que corta a unha familia residual de clases de equivalencia, a inclusión natural de X' en X define unha equivalencia orbital estable entre a relación de equivalencia inducida $\mathcal{R}' = \mathcal{R}|_{X'}$ e \mathcal{R} .

Comprobemos agora que a aplicación de codificación Φ é compatible coas relacións de equivalencia en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ e $\mathfrak{R} \cap \Sigma$:

Proposición 3.35. *Dous mosaicos codificados $\Phi(\alpha)$ e $\Phi(\beta)$ dan lugar á mesma órbita se e só se α e β son cofinais.*

Proba.

“ \Leftarrow ” Para probar esta implicación supoñamos que α e β son cofinais, é dicir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_m = \beta_m$ para cada $m \geq n$. Para cada $0 \leq i < n$, o código α_i corresponde a un cruce sen cornos que é centro dun bloque de $(2^{i+1} - 1) \times (2^{i+1} - 1)$ teselas de $\Phi(\alpha)$. Calquera outro cruce dun bloque de $(2^{i+1} - 1) \times (2^{i+1} - 1)$ teselas codificado por β_i obtense a partir do primeiro mediante a translación por un vector v_i . As sucesións de códigos $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ e $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ determinan dous bloques de $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ teselas relacionados por

$$\Phi(\beta_0, \dots, \beta_{n-1}) = \Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) + v$$

onde $v = v_1 + \dots + v_{n-1}$. A hipótese de partida garántenos que $\Phi(\beta) = \Phi(\alpha) + v$.

“ \Rightarrow ” Supoñamos agora que existe $v \in \mathbb{R}^2$ verificando $\Phi(\beta) = \Phi(\alpha) + v$, pero α e β non son cofinais, é dicir, existe unha sucesión de índices $\{m_n\}$ tal que $m_n \geq n$ e $\alpha_{m_n} \neq \beta_{m_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomemos n suficientemente grande para que os bloques $\Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_{m_n})$ e $\Phi(\beta_0, \dots, \beta_{m_n})$ de $(2^{m_n+1} - 1) \times (2^{m_n+1} - 1)$ teselas verifiquen

$$\Phi(\beta_0, \dots, \beta_{m_n}) = \Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_{m_n}) + v.$$

Por outra banda, se $w = w_1 + \dots + w_{m_n-1}$ é o vector construído como na implicación anterior, tamén verifica:

$$\Phi(\beta_0, \dots, \beta_{m_n}) = \Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_{m_n}) + w.$$

Logo $v = w$, pero isto implicaría que $\|v\| \rightarrow +\infty$ cando $n \rightarrow \infty$. □

As observacións precedentes permítennos probar o seguinte resultado:

Proposición 3.36. *A aplicación de codificación $\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathfrak{R} \cap \Sigma$ é inxectiva.*

Proba. Se α e β son dúas sucesións distintas, existe entón $n \geq 0$ tal que $\alpha_n \neq \beta_n$. Logo os bloques $\Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ e $\Phi(\beta_0, \dots, \beta_n)$ cumpren a relación

$$\Phi(\beta_0, \dots, \beta_n) = \Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_n) + v$$

para algún $v \neq 0$. Daquela, as trazas dos mosaicos $\Phi(\alpha)$ e $\Phi(\beta)$ nas bólas centradas na orixe son distintas. □

Imos observar agora que a aplicación Φ non é continua. Isto é consecuencia da súa definición para as sucesións periódicas que non determinan mosaicos do plano senón de medios planos ou cuartos de plano. En efecto, a sucesión $\{\alpha_n\}$ definida por $\alpha_n = 00 \overset{n}{.} 00\widehat{1101}$ converge á sucesión periódica de período 00, mentres que a sucesión de imaxes $\{\Phi(\alpha_n)\}$ non converge a $\Phi(\widehat{00})$, senón a $\Phi(\widehat{01})$. Non obstante, pola propia construción é razoable pensar que a aplicación Φ é boreliana. Imos describir entón a σ -álgebra dos conxuntos borelianos de Σ .

Lema 3.37. *Para calquera motivo cadrado M que conteña á orixe, o conxunto \mathfrak{B}_M formado polos mosaicos $\mathcal{T} \in \Sigma$ que conteñen ao motivo M é un aberto-pechado de Σ .*

Proba. Vexamos primeiro que \mathfrak{B}_M é aberto. Se M é un motivo de lado n , para todo $\mathcal{T} \in \mathfrak{B}_M$ tense que:

$$\mathcal{T} \in B(\mathcal{T}, e^{-\sqrt{2}n}) \subset \mathfrak{B}_M,$$

pois $M \subset B_{\mathcal{T}}(0, \sqrt{2}n)$. Por outra banda, \mathfrak{B}_M é pechado. Sexa $\{\mathcal{T}_m\}$ unha sucesión en \mathfrak{B}_M que converxe a un mosaico \mathcal{T} . Se n é a medida do lado de M , por definición de converxencia, para $R = \sqrt{2}n$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{T}_m \in B(\mathcal{T}, e^{-R}),$$

para todo $m \geq N$. Logo $M \subset \mathcal{T}$ e así $\mathcal{T} \in \mathfrak{B}_M$. □

Proposición 3.38. *Os abertos-pechados \mathfrak{B}_M forman base para a topoloxía de Σ e polo tanto xeneran a σ -álgebra dos conxuntos borelianos de Σ .*

Proba. Para cada mosaico \mathcal{T}' contido nunha bóla $B(\mathcal{T}, e^{-R})$, existe un motivo cadrado M en \mathcal{T}' contendo á bóla $B_{\mathcal{T}'}(0, R) = B_{\mathcal{T}}(0, R)$ de xeito que:

$$\mathcal{T}' \in \mathfrak{B}_M \subset B(\mathcal{T}, e^{-R}).$$

□

Comprobemos agora que a aplicación de codificación Φ é aberta e medible.

Proposición 3.39. *A aplicación de codificación $\Phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \text{Im}\Phi$ é aberta.*

Proba. A imaxe de cada aberto básico $C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$ é un aberto. En efecto,

$$\Phi(C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) = \mathfrak{B}_{\Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_n)} \cap \text{Im}\Phi,$$

pois se unha sucesión β pertence ao cilindro $C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}$, entón $\beta_0 = \alpha_0, \dots, \beta_n = \alpha_n$, co que

$$\Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \Phi(\beta_0, \dots, \beta_n) \subset \Phi(\beta)$$

e así $\Phi(\beta) \in \mathfrak{B}_{\Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_n)}$. □

Proposición 3.40. *A aplicación de codificación Φ é medible.*

Proba. Tendo en conta a proposición 3.38 bástanos probar que para calquera motivo cadrado M que conteña á orixe, o conxunto $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}_M)$ é un boreliano de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Lembremos que \mathfrak{R} é a unión disxunta $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_4$ e consideremos os subconxuntos \mathfrak{R}_4^β e $\mathfrak{R}_2^{\beta\gamma}$ definidos da seguinte maneira:

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{R}_4^\beta) = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \{0,1\}} \alpha_0 \dots \alpha_n \mathfrak{S}^\beta$$

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{R}_2^{\beta\gamma}) \cup \Phi^{-1}(\mathfrak{R}_4^\beta \cup \mathfrak{R}_4^\gamma) = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \{0,1\}} \alpha_0 \dots \alpha_n \mathfrak{S}^{\beta\gamma}$$

onde $\beta, \gamma \in \{00, 01, 10, 11\}$, \mathfrak{S}^β é a sucesión periódica de período β e $\mathfrak{S}^{\beta\gamma}$ o conxunto das sucesións de parellas β e γ con distinta paridade. Por unha banda, as imaxes inversas por Φ destes conxuntos son borelianos de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Por outra,

$$\mathfrak{R}_4 \cap \text{Im}\Phi = \mathfrak{R}_4^{00} \cup \mathfrak{R}_4^{01} \cup \mathfrak{R}_4^{10} \cup \mathfrak{R}_4^{11}$$

$$\mathfrak{R}_2 \cap \text{Im}\Phi = \mathfrak{R}_2^{0001} \cup \mathfrak{R}_2^{0010} \cup \mathfrak{R}_2^{0111} \cup \mathfrak{R}_2^{1011},$$

e daquela temos a seguinte descomposición

$$\Phi^{-1}(\mathfrak{B}_M \cap \mathfrak{R}) = \Phi^{-1}(\mathfrak{B}_M \cap \mathfrak{R}_1) \bigcup_{\beta\gamma} \Phi^{-1}(\mathfrak{B}_M \cap \mathfrak{R}_2^{\beta\gamma}) \bigcup_{\beta} \Phi^{-1}(\mathfrak{B}_M \cap \mathfrak{R}_4^\beta).$$

Sexa \mathfrak{S}_M o conxunto das sucesións finitas $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$ que satisfán $M \subset \Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$. Temos:

$$\text{i) } \Phi^{-1}(\mathfrak{B}_M \cap \mathfrak{R}_1) = \bigcup_{\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{S}_M} C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \cap \Phi^{-1}(\mathfrak{R}_1 \cap \Sigma)$$

$$\text{ii) } \Phi^{-1}(\mathfrak{B}_M \cap \mathfrak{R}_2^{\beta\gamma}) = \left(\bigcup_{\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{S}_M} C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \cap \Phi^{-1}(\mathfrak{R}_2^{\beta\gamma}) \right) \cup (\delta_0 \dots \delta_r \mathfrak{S}^{\beta\gamma} \setminus (\mathfrak{S}^\beta \cup \mathfrak{S}^\gamma))$$

onde a sucesión finita $\delta_0 \dots \delta_r$ vén determinada pola traza de M co semiplano que corresponde ao par $\beta\gamma$, é dicir, polos cruces sen cornos que contén esta traza.

$$\text{iii) } \Phi^{-1}(\mathfrak{B}_M \cap \mathfrak{R}_4^\beta) = \left(\bigcup_{\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{S}_M} C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \cap \Phi^{-1}(\mathfrak{R}_4^\beta) \right) \cup (\lambda_0 \dots \lambda_t \mathfrak{S}^{\beta\gamma} \setminus (\mathfrak{S}^\beta \cup \mathfrak{S}^\gamma))$$

onde a sucesión finita $\lambda_0 \dots \lambda_t$ vén determinada pola traza de M co cuarto de plano que corresponde a γ .

Isto mostra que $\Phi^{-1}(\mathfrak{B}_M)$ é un boreliano de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. \square

Os resultados anteriores permítennos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.41. *A dinámica transversa do espazo foliado dos mosaicos de Robinson repetitivos está representada por unha máquina de sumar binaria, é dicir, hai unha equivalencia orbital estable entre a suma de 1 nos enteiros 2-ádicos e a relación de equivalencia inducida sobre a transversal completa Σ .*

Proba. Concluimos o resultado probando que o conxunto dos mosaicos repetitivos de pegados de semiplanos e cuartos de plano na transversal, $(\mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_4) \cap \Sigma$, é un conxunto magro, é dicir, unha unión numerable de pechados con interior baleiro. Lembremos en principio que

$$(\mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_4) \cap Im\Phi = \Phi \left(\bigcup_{\beta\gamma} \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \{0,1\}} \alpha_0 \dots \alpha_n \mathfrak{S}^{\beta\gamma} \right)$$

onde β e γ son dúas parellas de elementos de $\{0,1\}$ con distinta paridade. Se denotamos por $\alpha_0 \dots \alpha_n \mathfrak{R}^{\beta\gamma}$ aos conxuntos $\Phi(\alpha_0 \dots \alpha_n \mathfrak{S}^{\beta\gamma})$ podemos escribir

$$(\mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_4) \cap Im\Phi = \bigcup_{\beta\gamma} \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \{0,1\}} \alpha_0 \dots \alpha_n \mathfrak{R}^{\beta\gamma}.$$

Segundo isto, temos:

$$(\mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_4) \cap \Sigma = \bigcup_{\beta\gamma} \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \{0,1\}} \alpha_0 \dots \alpha_n \widehat{\mathfrak{R}}^{\beta\gamma}$$

onde $\widehat{\mathfrak{R}}^{\beta\gamma}$ é o conxunto de todos os mosaicos repetitivos que se poden obter por pegado a partir de semiplanos ou cuartos de planos determinados por sucesións de $\alpha_0 \dots \alpha_n \mathfrak{S}^{\beta\gamma}$, é dicir, o conxunto $\alpha_0 \dots \alpha_n \mathfrak{R}^{\beta\gamma}$ máis as ‘copias’ de $\alpha_0 \dots \alpha_n \mathfrak{R}^{\beta\gamma}$ que se corresponden con outras eleccións da tesela de pegado, isto é, que se poderían facer corresponder con $\alpha_0 \dots \alpha_n \mathfrak{S}^{\beta\gamma}$ modificando a aplicación de codificación.

Rematamos logo a proba vendo que os $\alpha_0 \dots \alpha_n \widehat{\mathfrak{R}}^{\beta\gamma}$ son conxuntos pechados con interior baleiro:

i) Todo $\alpha_0 \dots \alpha_n \widehat{\mathfrak{R}}^{\beta\gamma}$ é pechado. Sexa $\{\mathcal{T}_m\}$ unha sucesión en $\alpha_0 \dots \alpha_n \widehat{\mathfrak{R}}^{\beta\gamma}$ converxendo a un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{R} \cap \Sigma$. Pola definición de converxencia, para todo $N \geq 1$, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N' \Rightarrow \mathcal{T}_m \in B_{\mathfrak{R} \cap \Sigma}(\mathcal{T}, e^{-N}) \Leftrightarrow B_{\mathcal{T}_m}(0, N) = B_{\mathcal{T}}(0, N)$. Logo $\mathcal{T} \in \alpha_0 \dots \alpha_n \widehat{\mathfrak{R}}^{\beta\gamma}$. De non ser así, \mathcal{T} contería un motivo da forma $\Phi(\lambda_0 \dots \lambda_r)$ con $\lambda_i \neq \alpha_i$ para algún $i \leq n$ ou $\lambda_i \neq \beta, \gamma$ para algún $i > n$, e daquela existiría un $N' \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Phi(\lambda_0 \dots \lambda_r) \subset B_{\mathcal{T}}(0, N') \neq B_{\mathcal{T}_m}(0, N'), \quad \forall m \geq N'.$$

ii) Todo $\alpha_0 \dots \alpha_n \widehat{\mathfrak{R}}^{\beta\gamma}$ ten interior baleiro. No caso contrario, $\alpha_0 \dots \alpha_n \widehat{\mathfrak{R}}^{\beta\gamma}$ contén un conxunto aberto U . Deste xeito, para calquera $\mathcal{T} \in \mathfrak{R}$ tense $L_{\mathcal{T}} \cap U \neq \emptyset$, pois a folla dun mosaico repetitivo é densa en \mathfrak{R} . Polo tanto, verificaríase $L_{\mathcal{T}} \cap \alpha_0 \dots \alpha_n \widehat{\mathfrak{R}}^{\beta\gamma} \neq \emptyset$ para todo $\mathcal{T} \in \mathfrak{R}$, o que non é certo. \square

Corolario 3.42. *O espazo foliado \mathfrak{R} dos mosaicos de Robinson repetitivos verifica:*

- i) hai unha infinidade non numerable de follas planas dotadas de mosaicos aperiódicos e repetitivos que forman un conxunto saturado e G_δ denso;*
- ii) hai unha infinidade non numerable de follas planas dotadas de mosaicos obtidos por pegado de medios planos que forman un conxunto saturado e magro;*
- iii) hai catro follas planas especiais dotadas de mosaicos obtidos por pegado de cuartos de planos.*

□

3.6 Propiedades ergódicas.

Imos comezar esta sección lembrando a clasificación das relacións de equivalencia ergódicas establecida por F. J. Murray e J. von Neumann. Antes, convén recordar a seguinte definición:

Definición 3.43. Sexa \mathcal{R} unha relación de equivalencia medible e discreta definida sobre un espazo boreliano estándar X . Chamamos entón *transformación parcial* $T : A \rightarrow A'$ a calquera isomorfismo boreliano entre subconxuntos borelianos A e A' de X tal que o grafo $G(T) = \{ (x, y) \in X \times X / y = T(x) \} \subset \mathcal{R}$. Unha medida boreliana μ sobre X dise:

- i) *case-invariante por \mathcal{R}* se calquera transformación parcial de \mathcal{R} conserva os conxuntos de medida nula, é dicir, se

$$\mu(B) = 0 \Leftrightarrow \mu(T(B)) = 0$$

para calquera transformación parcial $T : A \rightarrow A'$ e calquera boreliano $B \subset A$;

- ii) *invariante por \mathcal{R}* se é invariante por calquera transformación parcial de \mathcal{R} , é dicir, se

$$T_*\mu(B') = \mu(T^{-1}(B')) = \mu(B')$$

para cada boreliano $B' \subset A'$.

Por outra banda, unha medida case-invariante μ é *ergódica* se calquera conxunto boreliano saturado por \mathcal{R} ten medida nula ou total.

As relacións de equivalencia medibles e discretas dotadas de medidas case-invariantes ergódicas clasifícanse en tres tipos:

- i) *Tipo I_n* con $n = 1, 2, \dots, \infty$ se a relación \mathcal{R} é transitiva (i.e. ten unha única clase de equivalencia) e o cardinal $\#X = n$;
- ii) *Tipo II_n* con $n = 1$ ou ∞ se \mathcal{R} non é transitiva e posúe unha medida invariante finita ou infinita.
- ii) *Tipo III* se \mathcal{R} non posúe ningunha medida invariante.

Exemplo 3.44. A relación cofinal \mathcal{R}_{cof} sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ é unha relación de equivalencia medible discreta. En efecto, o seu grafo

$$\mathcal{R}_{\text{cof}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} (\pi_m \times \pi_m)^{-1}(\Delta)$$

é un boreliano de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, xa que as proxeccións

$$\pi_m : \alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mapsto \alpha_m \in \{0, 1\}$$

son continuas e a diagonal Δ é un aberto-pechado de $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$. Chamemos μ_2 á medida de probabilidade sobre o conxunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ que fai equiprobable todos os cilindros da mesma lonxitude, é dicir,

$$\mu_2(C_{\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_{n-1}}}^{i_0 \dots i_{n-1}}) = \frac{1}{2^n}.$$

A cada par de sucesións $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tales que

$$\alpha \mathcal{R}_{\text{cof}} \beta \iff \exists n \geq 0 : m \geq n \Rightarrow \alpha_m = \beta_m$$

asociámoslle a transformación $T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definida por:

$$T(\gamma)_i = \begin{cases} \beta_i & \text{si } i < n \\ \gamma_i & \text{si } i \geq n \end{cases}$$

que verifica $T(\alpha) = \beta$. Como as transformacións parciais de \mathcal{R}_{cof} están xeradas por estes homeomorfismos, temos que μ_2 é invariante por \mathcal{R}_{cof} .

De feito, a relación de equivalencia \mathcal{R}_{cof} é *únicamente ergódica*, é dicir, μ_2 é a única medida de probabilidade invariante por \mathcal{R}_{cof} . Se μ é outra medida de probabilidade invariante por \mathcal{R}_{cof} , os cilindros $C_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}$ e $C_{\beta_0 \dots \beta_{n-1}}$ deben ter a

mesma medida, pois temos unha transformación que leva un noutro. A partir da descomposición

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \coprod_{\alpha_i \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} C_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}$$

deducimos que:

$$\mu(C_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}) = \frac{1}{2^n} = \mu_2(C_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}).$$

Logo temos que $\mu = \mu_2$. □

O espazo dos mosaicos de Robinson repetitivos pode dotarse dunha medida de probabilidade invariante por translación:

Teorema 3.45. *A relación de equivalencia inducida polo espazo foliado dos mosaicos de Robinson repetitivos \mathfrak{R} sobre a transversal completa $\mathfrak{R} \cap \Sigma$ é de tipo II_1 .*

Proba. Segundo o teorema de representación de Riesz, as medidas borelianas regulares e finitas sobre $\mathfrak{R} \cap \Sigma$ identifícanse cos funcionais lineais definidos sobre o espazo das funcións continuas $C(\mathfrak{R} \cap \Sigma)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, chamemos B_n ao motivo cadrado, centrado na orixe e de lado n formado por $V(n) = n^2$ teselas (cadrados decorados) dun mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{R} \cap \Sigma$. A traza do motivo B_n co conxunto de Delone $D_{\mathcal{T}}$ identifícase co conxunto $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{R} \cap \Sigma$ dos trasladados de \mathcal{T} polos vectores de $B_n \cap D_{\mathcal{T}}$. Sexa μ_n a distribución uniforme sobre \mathfrak{B}_n . Noutros termos, para cada motivo cadrado contendo á orixe M de \mathcal{T} , a medida de probabilidade μ_n ven dada por:

$$\mu_n(\mathfrak{B}_M) = \frac{\# \mathfrak{B}_M \cap \mathfrak{B}_n}{\# \mathfrak{B}_n} = \frac{A(M, n)}{V(n)} \quad (6.4)$$

onde $A(M, n)$ é o número de copias por translación do motivo M que están contidas en B_n e $V(n)$ é o número de teselas (cadradas) contidas en B_n , é dicir, o cardinal do conxunto $B_n \cap D_{\mathcal{T}}$, igual ao do conxunto \mathfrak{B}_n .

Pola compacidade de $C(\mathfrak{R} \cap \Sigma)^*$, pódese supoñer que as medidas de probabilidade μ_n converxen feblemente a unha medida de probabilidade μ (sen máis que substituír a sucesión por unha subsucesión). Como \mathfrak{B}_M é un aberto-pechado, temos que $\mu(\mathfrak{B}_M) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathfrak{B}_M)$ e $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathfrak{B}_M) \leq \mu(\mathfrak{B}_M)$. Logo $\mu(\mathfrak{B}_M)$ coincide coa *tasa de aparición do motivo M* :

$$\mu(\mathfrak{B}_M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathfrak{B}_M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(M, n)}{V(n)}. \quad (6.5)$$

A medida de probabilidade μ é invariante por \mathcal{R} . En efecto, para cada motivo M e cada punto base v dalgunha tesela de M , temos unha translación

$$\mathcal{T} \in \mathfrak{B}_M \mapsto \mathcal{T} + v \in \mathfrak{R} \cap \Sigma$$

que ten como imaxe:

$$\mathfrak{B}_{M+v} = \{ \mathcal{T} + v / M \subset \mathcal{T} \} = \{ \mathcal{T} + v / M + v \subset \mathcal{T} + v \} = \mathfrak{B}_{M+v}.$$

Se \mathcal{T} contén ao motivo M arredor dun punto $x \in B_{n-2r}$, entón $\mathcal{T} - v$ contén o motivo $M - v$ arredor do punto $x - v \in B_n$ sendo $r > \|v\|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos pois que:

$$\begin{aligned} |\mu_n(\mathfrak{B}_{M-v}) - \mu_n(\mathfrak{B}_M)| &= \frac{|A(M-v, n) - A(M, n)|}{V(n)} \\ &\leq \frac{V(n) - V(n-2r)}{V(n)} \\ &\leq \frac{V(n+2r) - V(n-2r)}{V(n)} \\ &= \frac{(n+2r)^2 - (n-2r)^2}{n^2} = \frac{8r}{n} \end{aligned}$$

e polo tanto:

$$\begin{aligned} 0 \leq |\mu(\mathfrak{B}_{M-v}) - \mu(\mathfrak{B}_M)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n(\mathfrak{B}_{M-v}) - \mu_n(\mathfrak{B}_M)| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(n+2r) - V(n-2r)}{V(n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8r}{n} = 0 \end{aligned}$$

co que queda probado o teorema. □

Antes de enunciar os resultados desta sección, imos completar estes preliminares lembrando a definición de equivalencia orbital estable no contexto medible:

Definición 3.46. Sexan \mathcal{R} e \mathcal{R}' dúas relacións de equivalencia medibles e discretas definidas sobre dous espazos borelianos estándar X e X' , dotadas de dúas medidas de probabilidade invariantes μ e μ' . Diremos que \mathcal{R} e \mathcal{R}' son *orbitalmente equivalentes* se X e X' conteñen subconxuntos borelianos Y e Y' tales que os seus saturados por \mathcal{R} e \mathcal{R}' son de medida total e existe un isomorfismo boreliano $\varphi : Y \rightarrow Y'$ que é compatible coas relacións de equivalencia $\mathcal{R}|_Y$ e $\mathcal{R}'|_{Y'}$, e envía a medida $\mu|_Y$ sobre una medida equivalente a $\mu'|_{Y'}$.

Combinando os teoremas 3.41 e 3.45, temos agora unha versión medible do primeiro:

Teorema 3.47. *A aplicación de codificación Φ define unha equivalencia orbital entre a relación de equivalencia cofinal \mathcal{R}_{cof} sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dotado da medida μ_2 e a relación de equivalencia inducida polo espazo foliado dos mosaicos de Robinson repetitivos \mathfrak{R} sobre a transversal completa $\mathfrak{R} \cap \Sigma$ dotada da medida μ .*

Proba. Pola unicidade ergódica de $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{R}_{\text{cof}})$ temos que:

$$\Phi_*(\mu_2) = \mu /_{\text{Im}\Phi}.$$

O conxunto \mathfrak{R}_4 dos mosaicos de pegados de cuartos de plano repetitivos está composto polas catro follas correspondentes ás catro sucesións periódicas, polo que $\mathfrak{R}_4 \cap \Sigma$ é un conxunto numerable, logo de medida nula. Pola contra, o conxunto \mathfrak{R}_2 dos mosaicos repetitivos de pegados de semiplanos contén unha infinidade non numerable de follas. Non obstante, vexamos que tamén ten medida nula. A aplicación Φ establece unha correspondencia biunívoca entre $(\mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_4) \cap \text{Im}\Phi$ e a saturación por \mathcal{R}_{cof} do conxunto \mathfrak{S} das sucesións formadas por parellas $\beta, \gamma \in \{00, 01, 10, 11\}$ con distinta paridade, que se pode escribir da seguinte forma:

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{\beta\gamma} \mathfrak{S}^{\beta\gamma} = \bigcup_{\beta\gamma} \left(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \{\beta, \gamma\}} C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} \right)$$

Deducimos así que

$$0 \leq \mu_2(\mathfrak{S}) \leq 4\mu_2(\mathfrak{S}^{0011}) = 4\mu_2\left(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \{00, 11\}} C_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}\right) = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0.$$

Polo tanto, o saturado de \mathfrak{S} ten medida nula e así $0 \leq \mu(\mathfrak{R}_2 \cap \text{Im}\Phi) \leq \mu((\mathfrak{R}_2 \cup \mathfrak{R}_4) \cap \text{Im}\Phi) = 0$. Agora ben, posto que podemos modificar a aplicación de codificación cambiando a tesela de pegado, o mesmo argumento aplicado a cada unha das diferentes aplicacións de codificación mostra que $\mathfrak{R}_2 \cap \Sigma$ ten medida nula. \square

Tendo presente esta proba, podemos enunciar a versión medible do corolario 3.42:

Corolario 3.48. *O espazo foliado dos mosaicos de Robinson repetitivos \mathfrak{R} verifica:*

- i) hai unha infinidade non numerable de follas planas dotadas de mosaicos aperiódicos e repetitivos que forman un conxunto saturado e de medida total;*

- ii) *hai unha infinidade non numerable de follas planas dotadas de mosaicos obtidos por pegado de medios planos que forman un conxunto saturado de medida nula;*
- iii) *hai catro follas planas especiais dotadas de mosaicos obtidos por pegado de cuartos de planos.*

O enunciado do teorema 3.47 pode reformularse da seguinte maneira:

Corolario 3.49. *A dinámica transversa medible do espazo foliado dos mosaicos de Robinson repetitivos está representada pola suma de 1 nos enteiros 2-ádicos. \square*

Por último, tendo en conta que a proba do teorema 3.47 é válida para calquera medida invariante sobre a transversal completa $\mathfrak{R} \cap \Sigma$ e que a relación cofinal definida sobre o conxunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (ou de maneira equivalente a suma de 1 nos enteiros 2-ádicos) é unicamente ergódica, obtemos o seguinte corolario:

Corolario 3.50. *O espazo foliado dos mosaicos de Robinson repetitivos é unicamente ergódico. \square*

Bibliografía

- [1] F. Alcalde Cuesta, A. Lozano Rojo et M. Macho Stadler, Dynamique et géométrie non commutative de la lamination de Ghys-Kenyon. En preparación.
- [2] J. Bellissard, R. Benedetti and J.M. Gambaudo, Spaces of Tilings, Finite Telescopic Approximations and Gap-Labeling. Por aparecer en *Comm. Math. Phys.* Preprint in ArXiv: math.DS/0109062, 2001.
- [3] E. Blanc, *Propriétés génériques des Laminations*. Thèse UCB-Lyon 1, 2001.
- [4] E. Ghys, Laminations par surfaces de Riemann. *Panoramas et Synthèses*, **8** (1999), 49-95.
- [5] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman & Co., New York, 1987.
- [6] J. Kellendonk and I.F. Putnam, Tilings, C*-algebras and K-theory, in *Directions in Mathematical Quasycrystals*. CRM Monograph Series **13** (2000), 177-206, M.P. Baake & R.V. Moody Eds., AMS Providence.
- [7] J. C. Lagarias and P. A. B. Pleasants, Repetitive Delone sets and quasicrystals. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23** (2003), 831-867.
- [8] A. Lozano Rojo, *The dynamics of the Ghys-Kenyon lamination*, in *Foliations 2005*, Lodz, 2005.
- [9] C. Radin, *Miles of tiles*. Student Math. Library, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [10] C. Radin and M. Wolff, Space tilings and local isomorphism. *Geom. Dedicata*, **42** (1992), 355-360.
- [11] R. M. Robinson, Undecidability and Nonperiodicity fo Tilings of the Plane. *Inventiones Math.*, **12** (1971), 177-209.

- [12] B. Solomyak, Dynamics of self-similar tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **17** (1997), 695-738.