Esteban Calviño Louzao

VARIEDADES DE OSSERMAN E IVANOV-PETROVA EN DIMENSIÓN CUATRO

108
2007
Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Esteban Calviño Louzao

VARIEDADES DE OSSERMAN E IVANOV-PETROVA EN DIMENSIÓN CUATRO

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección de Eduardo García Río e Ramón Vázquez Lorenzo, para obter o Diploma de Estudios Avanzados en Ciencias Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levouse a cabo a súa defensa o día 5 de Xullo de 2007 na Facultade de Matemáticas de dita Universidade, obtendo a cualificación de Sobresaliente.

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 978-84-89390-25-6

Dep. Leg.: C 4174-2007

A mi madre.

Agradecimientos

No es fácil en tan sólo una página nombrar a todos aquellos que durante los últimos años me ayudaron, directa o indirectamente en la elaboración de esta memoria.

Los primeros que quisiera mencionar son los directores de este trabajo, Eduardo García Río y Ramón Vázquez Lorenzo. Es difícil agradecerles la dedicación que tuvieron conmigo para que este trabajo llegara a buen puerto. También quisiera mencionar al profesor Luis M. Hervella Torrón por el apoyo incondicional que me mostró desde el primer día. Quiero hacer extensivo este agradecimiento al resto de los miembros del Departamento de Xeometría e Topoloxía, especialmente a los profesores José Antonio Oubiña Galiñanes y Elena Vázquez Abal.

Una mención especial se merecen mis compañeros de despacho, Miguel, Carlos, Pablo, Silvia, Ana... que con el tiempo se convirtieron en amigos.

Por último no quiero olvidarme de mi familia por el gran esfuerzo que tuvieron que hacer para que pudiese llegar hasta aquí. Simplemente gracias.

Abstract

Relating algebraic properties of the Riemannian curvature tensor to the underlying geometry of the manifold is a central problem in differential geometry. Due to the difficulties in dealing with the full curvature tensor, the investigation usually derives to the consideration of the algebraic structure of certain natural operators, the Jacobi operator and the skew-symmetric curvature operator being typical examples [15]. Properties of the Jacobi operator have been broadly studied since it measures the geodesic deviation. The skew-symmetric curvature operator is the part of the curvature tensor describing the behavior of circles. Geodesics and circles are classical objects in geometry and physics, the later being preserved by Möbius transformations and thus related to the conformal structure.

A pseudo-Riemannian manifold (M, g) is said to be *Osserman* if the eigenvalues of the Jacobi operators are constant on the unit pseudo-sphere bundles and it is said to be *spacelike* (respectively, *timelike* or *mixed*) *Ivanov-Petrova* (IP for short) if the eigenvalues of the skew-symmetric curvature operators are constant on the Grassmannian of all oriented non-degenerate spacelike (respectively, timelike or mixed) 2-planes. Since the eigenvalue structure does not completely determine neither a self-adjoint nor a skew-adjoint operator in the pseudo-Riemannian setting, (M, g) is said to be *Jordan Osserman* if the Jordan normal form of the Jacobi operators is constant on the unit pseudo-sphere bundles and, similarly, it is called *spacelike* (respectively, *timelike* or *mixed*) *Jordan IP* if the Jordan normal form of the skew-symmetric curvature operators is constant on the Grassmannian of all oriented non-degenerate spacelike (respectively, timelike or mixed) 2-planes. From now on, we will say that (M, g) is *Jordan Osserman–IP* if it is Jordan Osserman and spacelike, timelike and mixed Jordan IP.

Although many progress have been made towards a complete description of Osserman and IP manifolds, some problems still remain open, specially for metrics of $(--++)$-signature. Hence, in this work we concentrate on $(--++)$-metrics which satisfy both conditions simultaneously. Clearly any space of constant curvature is Osserman–IP. IP metrics which are Osserman with 2-step nilpotent Jacobi operators are known to exist (see for example [16]), but four-dimensional Osserman metrics whose Jacobi operators have a nonzero double root of the minimal polynomial are not IP [9]. Our purpose in this work is firstly to clarify the situation above by making a systematic study of four-dimensional Osserman–IP metrics. To do this, firstly we work at the purely algebraic level,

to obtain a complete description of all four-dimensional Osserman–IP algebraic curvature tensors as follows:

Theorem 4.1 *Let V be a four-dimensional vector space equipped with an inner product $\langle\, ,\,\rangle$ of neutral signature and A an algebraic curvature tensor. Then, A is Osserman–IP if and only if one of the following holds:*

(i) $A = \kappa A^0$ *for some constant* κ.

(ii) There exists an orthogonal complex structure J on $(V, \langle\, ,\,\rangle)$ such that $A = \kappa(A^0 - \frac{1}{2}A^J)$, for some constant $\kappa \neq 0$.

(iii) There exists an adapted paracomplex structure P on $(V, \langle\, ,\,\rangle)$ such that $A = \kappa(A^0 + \frac{1}{2}A^P)$, for some constant $\kappa \neq 0$.

(iv) There exists an adapted hyper-paracomplex structure $\{J, P, Q\}$ defined on $(V, \langle\, ,\,\rangle)$ such that $A = \kappa A^{J+P}$, for some constant $\kappa \neq 0$.

Moreover, in cases (i)–(iii) A is Jordan Osserman–IP, while in (iv) A is Jordan Osserman and spacelike and timelike Jordan IP, but not mixed Jordan IP.

As an immediate consequence, one obtains a complete description of four-dimensional Osserman-IP metrics as follows:

- *A $(--++)$-manifold is pointwise Osserman-IP if and only if it is a space of constant sectional curvature or otherwise the Jacobi operators either vanish or otherwise they are two-step nilpotent at each poitn $p \in M$.*

- *(M, g) is Jordan Osserman-IP if and only if it is a space of constant sectional curvature.*

The last part of this work is devoted to the study of IP metrics which are constructed by means of the Riemann extension of a torsion-free connection. Such family of metrics is of special interest when considering Osserman and IP problems. Indeed a self-dual Walker metric is IP if and only if it is the Riemann extension of a torsion-free connection whose Ricci tensor is symmetric and degenerated. Hence, special attention is paid to such connections, with main attention to the symmetric and homogeneous ones. Some interesting relations with the theory of recurrent and projectively flat connections are pointed out.

Introducción

La noción de curvatura es uno de los conceptos más importantes en geometría diferencial. Debido a la dificultad de manejar toda la información subyacente al tensor de curvatura, a menudo el estudio se centra en el análisis de ciertos operadores definidos de modo natural a partir del tensor de curvatura. En esta memoria nos centraremos principalmente en dos de ellos: el operador de Jacobi y el operador de curvatura antisimétrico. Estos operadores proporcionan gran información sobre geodésicas y círculos, los cuales son objetos de gran importancia tanto en Matemáticas como en Física.

Una variedad semi-Riemanniana (M, g) se dice que es *Osserman* [12] si los autovalores del operador de Jacobi son constantes en el fibrado pseudo-unitario $S(M)$ y se dice que es *Ivanov-Petrova* (IP) [17] si los autovalores de los operadores de curvatura antisimétrico son constantes en la Grassmanniana de todos los planos orientados no degenerados.

Se han hecho importantes progresos hacia la completa descripción de variedades Osserman e IP aunque muchos problemas continúan abiertos. En esta memoria nos centraremos en el análisis de las propiedades Osserman e Ivanov-Petrova para métricas de signatura $(--++)$. Las variedades 4-dimensionales con métricas de signatura neutra constituyen el primer caso abierto en la determinación de las variedades de Osserman. Además, aunque se conocen las métricas IP cuatro-dimensionales en signatura Riemanniana, el problema está completamente abierto en signatura neutra, donde la situación es mucho más compleja, como se pondrá de manifiesto a lo largo de esta memoria.

De una forma más precisa este trabajo se estructura como sigue.

En el Capítulo 1 recordamos algunos conceptos de geometría semi-Riemanniana, con el principal interés de fijar la notación que posteriormente utilizaremos. Por el importante papel que desempeñan en el estudio de la geometría semi-Riemanniana, recordaremos la definición de las estructuras de Walker y algunas de sus propiedades básicas. El concepto de extensión de Riemann, como caso particular de métrica de Walker, presenta no solo un interés por su posibilidad de interconectar la geometrías afín y semi-Riemanniana, sino que además las extensiones de Riemann desempeñarán un papel esencial en el análisis de las propiedades de Osserman e Ivanov-Petrova.

En el Capítulo 2 haremos un recorrido sobre el estudio de las variedades de Osserman en dimensión cuatro, tanto en el caso Riemanniano como en el Lorentziano, pero prestando una especial atención al caso de variedades semi-Riemannianas de signatura $(--++)$. Si bien en el caso Riemanniano y Lorentziano la clasificación de las variedades Osserman cuatro dimensionales es un problema cerrado, no se puede decir lo mismo en signatura neutra, puesto que no se conocen ejemplos de variedades Osserman Tipo III cuyos operadores de Jacobi sean no nilpotentes.

En el Capítulo 3 haremos un estudio, de modo análogo a como se hizo en el capítulo 2 con las variedades Osserman, de las variedades IP cuatro dimensionales. En este caso el problema permanece abierto para el caso Lorentziano y de signatura neutra. El caso Riemanniano está resuelto por Ivanov y Petrova en [17] y por Gilkey, Leahy y Sadofsky en [13]. Es importante enfatizar el hecho de que todas las variedades Riemannianas IP son localmente conformemente llanas, de donde se sigue que las únicas variedades Osserman-IP en geometría Riemanniana son los espacios de curvatura seccional constante. En el caso Lorentziano se conocen resultados parciales [25] sobre el rango del operador de curvatura antisimétrico en variedades IP. En signatura neutra sólo se conocían ejemplos de tensores de curvatura algebraicos Osserman-IP, véase [15]. Nosotros obtenemos una familia de métricas de Walker IP que no son autoduales ni anti-autoduales ni Einstein, y que por lo tanto no son Osserman.

En el Capítulo 4, motivados por la situación presentada en el capítulo 3, abordamos el estudio de las variedades Osserman-IP en dimensión cuatro. En el caso Lorentziano este estudio se trivializa ya que las variedades Osserman son aquellas de curvatura seccional constante. Un primer paso en este estudio es la descripción completa de los tensores curvatura algebraicos que son Osserman-IP:

Teorema 4.1 *Sea $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ un espacio vectorial 4-dimensional con un producto interior de signatura neutra, y sea A un tensor de curvatura algebraico. Entonces, A es Osserman-IP con operador de Jacobi diagonalizable si y sólo si se da alguna de las siguientes condiciones:*

(i) *$A = \kappa A^0$ para alguna constante κ, i.e., la A-curvatura seccional es constante.*

(ii) *Existe una estructura compleja ortogonal J en $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ tal que $A = \kappa(A^0 - \frac{1}{2}A^J)$, para alguna constante $\kappa \neq 0$.*

(iii) *Existe una estructura paracompleja adaptada P en $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ tal que $A = \kappa(A^0 + \frac{1}{2}A^P)$, para alguna constante $\kappa \neq 0$.*

Teorema 4.3 *Sea $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ un espacio vectorial 4-dimensional dotado de un producto interior de signatura neutra y sea A un tensor de curvatura algebraico. Entonces, A es Osserman-IP con operador de Jacobi no diagonalizable si y sólo si los operadores de Jacobi son nilpotentes en dos pasos.*

Como consecuencia obtenemos una descripción completa de las métricas Osserman-IP, así como de las Jordan Osserman-IP.

- *Una variedad semi-Riemanniana de dimensión cuatro (M, g) y signatura $(--++)$ es puntualmente Osserman-IP si y sólo si es un espacio de curvatura seccional constante* *o, en cada punto $p \in M$ los operadores de Jacobi se anulan o son nilpotentes en dos pasos.*

- *(M, g) es Jordan Osserman-IP si y sólo si es un espacio de curvatura constante.*

El Capítulo 5 se dedica al análisis de las extensiones de Riemann y extensiones de Riemann deformadas y su aplicación al estudio de las variedades Osserman y de las variedades IP. Mostramos en primer lugar que toda extensión de Riemann deformada es autodual y además que

- *Toda métrica de Walker autodual de Osserman es la extensión de Riemann deformada de una conexión sin torsión con tensor de Ricci antisimétrico.*

- *Toda métrica de Walker autodual IP es la extensión de Riemann deformada de una conexión sin torsión con tensor de Ricci simétrico y degenerado.*

El análisis de la primera condición anterior ha dado lugar al concepto de variedad afín de Osserman [11]. Motivados por la segunda condición anterior introducimos en este capítulo la noción de variedad afín IP y probamos que una variedad afín es IP si y sólo si su extensión de Riemann es Ivanov-Petrova. Finalmente dedicamos especial atención a las superficies afines IP, obteniendo una caracterización completa de las mismas en el caso localmente simétrico y homogéneo, lo que presenta importantes conexiones con la existencia de estructuras recurrentes y proyectivamente llanas.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos la notación básica y la terminología que emplearemos a lo largo del trabajo.

Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana. Un vector distinto de cero, $z \in T_pM$, se llama *temporal* si $g(z, z) < 0$, *espacial* si $g(z, z) > 0$ y *nulo* si $g(z, z) = 0$. Un vector no nulo z se llama *unitario* si $|g(z, z)| = 1$.

Sean $S_p^-(M), S_p^+(M)$ y $S_p(M)$ los conjuntos de vectores unitarios temporales, espaciales y no nulos en T_pM respectivamente. Es decir,

$$\begin{aligned}
S_p^-(M) &= \{z \in T_pM \, : \, g(z, z) = -1\}, \\
S_p^+(M) &= \{z \in T_pM \, : \, g(z, z) = 1\}, \\
S_p(M) &= \{z \in T_pM \, : \, |g(z, z)| = 1\} \\
&= S_p^-(M) \cup S_p^+(M).
\end{aligned}$$

Definición 1.1. Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana. Entonces

a) $S^-(M) = \bigcup\limits_{p \in M} S_p^-(M) = \{z \in TM \, : \, g(z, z) = -1\}$ se llama *fibrado unitario temporal* de (M, g).

b) $S^+(M) = \bigcup\limits_{p \in M} S_p^+(M) = \{z \in TM \, : \, g(z, z) = 1\}$ se llama *fibrado unitario espacial* de (M, g).

c) $S(M) = \bigcup\limits_{p \in M} S_p(M) = \{z \in TM \, : \, |g(z, z)| = 1\}$ se llama *fibrado unitario* de (M, g).

Dada (M, g) una variedad semi-Riemanniana, tenemos determinada de modo único la *conexión de Levi-Civita* asociada a (M, g), como la única conexión simétrica que hace paralela a la métrica g. La *fórmula de Koszul* nos da la expresión de tal conexión:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_x y, z) &= x(g(y,z)) + y(g(x,z)) - z(g(x,y)) \\ &\quad -g(x,[y,z]) + g(y,[z,x]) + g(z,[x,y]), \end{aligned}$$

donde x, y, z son campos de vectores sobre M y $[\cdot,\cdot]$ es el producto corchete de Lie. Una vez obtenida la conexión de Levi-Civita, nos apoyamos en ella para definir el *tensor de curvatura*, R, de tipo (1,3), como

$$R(x,y)z = \nabla_{[x,y]}z - \nabla_x\nabla_y z + \nabla_y\nabla_x z,$$

donde $x, y, z \in \Gamma TM$ son campos de vectores en M. El tensor de curvatura verifica las siguientes identidades:

$$R(x,y)z = -R(y,x)z,$$
$$R(x,y)z + R(y,z)x + R(z,x)y = 0,$$
$$(\nabla_x R)(y,z)v + (\nabla_y R)(z,x)v + (\nabla_z R)(x,y)v = 0.$$

La segunda igualdad anterior se conoce con el nombre de *primera identidad de Bianchi o identidad de Bianchi algebraica*, mientras que la última se conoce como *segunda identidad de Bianchi o identidad de Bianchi diferencial.*

En lugar del tensor de tipo $(1,3)$, a veces, necesitaremos usar el tensor de tipo $(0,4)$ asociado:

$$R(x,y,z,v) = g(R(x,y)z, v)$$

que además cumple las dos siguientes igualdades para campos x, y, z, v sobre M:

$$R(x,y,z,v) = R(z,v,x,y),$$
$$R(x,y,z,v) = -R(x,y,v,z).$$

El hecho de trabajar tanto con tensores de tipo $(0,4)$ como con tensores de tipo $(1,3)$ entraña cierta dificultad. Así debemos tener presente que existen ciertos objetos más sencillos que nos permiten recuperar sino toda la información que nos proporciona el tensor de curvatura, si la más relevante. Podemos destacar sobre los demás, tanto por representativo, como por utilizado, *la curvatura seccional.* Se define la curvatura seccional sobre un plano no degenerado π, es decir, sobre planos tales que la restricción de la métrica a ellos sea no degenerada, como

$$K(\pi) = \frac{R(x,y,x,y)}{g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2},$$

donde $\pi = \langle\{x,y\}\rangle$.

Observemos que la curvatura seccional no está definida sobre toda la Grassmanniana de 2-planos en cada punto. Esto acarrea consecuencias importantes, de manera especial que no tenemos asegurado que la curvatura seccional esté acotada y ni siquiera que tome valores en un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$. La única posibilidad de extender K con continuidad a toda la Grassmanniana ocurre cuando la curvatura seccional es constante [7].

Otros objetos de gran importancia son dos contracciones de la curvatura, el *tensor de Ricci* y la *curvatura escalar*. Se definen del siguiente modo

$$\rho(x,y)=\mathrm{Tr}\{z\to R(x,z)y\}$$

y

$$\tau=\mathrm{Tr}(\rho).$$

Localmente, y para una referencia ortonormal $e_1,\ldots,e_n$, ($n = dim\ M$) el tensor de Ricci lo podemos expresar del siguiente modo:

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{e_i}R(x,e_i,y,e_i),$$

mientras que la curvatura escalar se escribe como

$$\tau=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{e_i}\rho(e_i,e_i)=\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}R(e_i,e_j,e_i,e_j)$$

donde $\varepsilon_{e_k}=g(e_k,e_k)$, para todo $k=1,\ldots,n$.

Un ejemplo de una situación en la que la curvatura de la variedad es relativamente simple, es aquel en el que el tensor de Ricci se puede expresar como un múltiplo escalar de la métrica, es decir, $\rho=\lambda g$, donde λ es una constante real. En este caso, λ se puede expresar como un cociente de la curvatura escalar y de la dimensión de la variedad. A las variedades que verifican esta condición se les llama variedades de *Einstein*. No es difícil observar que en el caso particular de dimensión dos se tiene que $\rho=\lambda g$ siendo λ la curvatura de Gauss de la superficie, con lo cual es Einstein si y sólo si la superficie tiene curvatura de Gauss constante.

Nosotros trabajaremos tanto a nivel algebraico como a nivel diferenciable. La siguiente definición nos sirve para relacionar ambos contextos.

Definición 1.2. Sea $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial equipado con un producto interior no degenerado. Diremos que $A\in\otimes^4V^*$ es un *tensor curvatura algebraico* si verifica las identidades algebraicas del tensor curvatura, i.e.,

$$\begin{gathered}A(x,y,z,u)=-A(y,x,z,u)=-A(x,y,u,z),\\ A(x,y,z,u)+A(y,z,x,u)+A(z,x,y,u)=0,\\ A(x,y,z,u)=A(z,u,x,y).\end{gathered}$$

A continuación recordaremos la definición de algunos tensores curvatura algebraicos que desempeñarán un papel esencial a lo largo de esta memoria.

Ejemplo 1.3. Sea $(V, \langle\, , \rangle)$ un espacio vectorial con un producto interior definido sobre él. Entonces definimos el tensor de curvatura $A^0 : V \times V \times V \to V$ como

$$A^0(x, y)z = \langle x, z\rangle y - \langle y, z\rangle x.$$

Ejemplo 1.4. Una *estructura compleja* en un espacio vectorial V es una aplicación lineal $J : V \to V$ verificando $J^2 = -id$. Un producto interior, $\langle\, , \rangle$, en (V, J) se dice que es *Hermítico* si verifica que $\langle x, Jy\rangle + \langle Jx, y\rangle = 0$ para cualesquiera $x, y \in V$. Entonces, definimos el tensor de curvatura algebraico $A^J : V \times V \times V \to V$ como

$$A^J(x, y)z = \langle Jx, z\rangle Jy - \langle Jy, z\rangle Jx + 2\langle Jx, y\rangle Jz.$$

Ejemplo 1.5. Se llama *estructura producto* en un espacio vectorial V a una aplicación lineal $P : V \to V$ verificando que $P^2 = id$. Esto induce una descomposición de V en $V = V_{(+)} \oplus V_{(-)}$, donde $V_{(\pm)}$ son los autoespacios de P asociados a los autovalores ± 1.

Recíprocamente, si $V = V_{(+)} \oplus V_{(-)}$ es una descomposición en suma directa de V entonces la aplicación lineal $P : V \to V$ definida por $P = \pi_{(+)} - \pi_{(-)}$ es una estructura producto en V, donde las aplicaciones $\pi_{(\pm)} : V \to V_{(\pm)}$ son las proyecciones de V sobre los autoespacios. Si estamos en el caso especial en el que la dimensión de los dos autoespacios sea la misma, se dice que la estructura producto P en V es una *estructura paracompleja* en V.

Un producto interior, $\langle\, , \rangle$, en un espacio vectorial paracomplejo (V, P) se dice *para-Hermítico* si verifica que $\langle x, Py\rangle + \langle Px, y\rangle = 0$. En estas condiciones podemos definir un tensor de curvatura algebraico, A^P, como

$$A^P(x, y)z = \langle Px, z\rangle Py - \langle Py, z\rangle Px + 2\langle Px, y\rangle Pz.$$

Definición 1.6. Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana con tensor de curvatura R. Se dice que dicha variedad es la *realización geométrica* de un tensor curvatura algebraico A en un punto p de M, si existe una isometría ϕ del espacio tangente en p en el espacio vectorial V de modo que $\phi^* A = R_p$ en T_pM, es decir

$$g(\phi x, \phi y) = g(x, y)\ \forall\, x, y \in T_pM,\ y$$

$$A(\phi x, \phi y, \phi z, \phi w) = R(x, y, z, w)\ \forall\, x, y, z, w \in T_pM$$

La teoría de coordenadas normales nos permite garantizar que todo tensor curvatura algebraico es realizable geométricamente en un punto. Sin embargo, no todo tensor curvatura algebraico puede ser realizado en un entorno de un punto dado (los tensores A^J y A^P correspondientes a los ejemplos 1.4 y 1.5 no son realizables en ningún abierto).

1.1. Operadores asociados al tensor de curvatura

El tensor de curvatura codifica la mayor parte de la geometría de una variedad. Sin embargo, se trata de un objeto que es muy difícil de estudiar por sí mismo; por ello se estudian ciertos operadores definidos a partir del propio tensor de curvatura. Una de las técnicas consiste en estudiar las consecuencias que a nivel geométrico se obtienen si los autovalores, o más generalmente la forma canónica de Jordan de tales operadores son constantes en los dominios de definición. Los más comunes y más estudiados son: el operador de Jacobi, el operador de Jacobi de orden superior, el operador de curvatura antisimétrico, el operador de curvatura antisimétrico de orden superior y el operador de Szabó.

En esta memoria nos centraremos en el operador de Jacobi y el operador de curvatura antisimétrico. Definiremos a continuación todos estos operadores dando alguna de las propiedades más importantes de cada uno de ellos.

1.1.1. El operador de Jacobi

Sea V un espacio vectorial con un producto interior $\langle\ ,\ \rangle$ definido sobre él, y sea A un tensor curvatura algebraico sobre V. Fijado $z \in V$, el *operador de Jacobi* asociado a z viene dado por la aplicación lineal

$$\mathcal{J}_A(z) : V \to V$$

definida por $\mathcal{J}_A(z)(x) = (A(z,\cdot)z)x = A(z,x)z$. Teniendo en cuenta las identidades del tensor de curvatura se puede restringir el dominio de definición del operador de Jacobi a $z^\perp$. Por las propiedades de la curvatura se tiene que $\langle A(z,x)z, z\rangle = A(z,x,z,z) = 0$ por lo que $A(z,x)z \in z^\perp$ siempre que z sea no nulo, y $A(z,z)z = 0$, con lo que vemos que el operador de Jacobi se puede restringir a $z^\perp$ para cualquier z no nulo. Denotamos igualmente por $\mathcal{J}_A(z) : z^\perp \to z^\perp$ la restricción $A(z,\cdot)z$ a $z^\perp$. Cabe destacar que el operador de Jacobi es autoadjunto. Para verlo simplemente hay que tener en cuenta las simetrías del tensor de curvatura. En efecto:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}_A(z)(x), y\rangle &= \langle A(z,x)z, y\rangle = A(z,x,z,y) \\ &= A(z,y,z,x) = \langle A(z,y)z, x\rangle = \langle x, \mathcal{J}_A(z)(y)\rangle. \end{aligned}$$

Observación 1.7. Sea $z \in S(V)$ y $\mathcal{J}_A(z)$ el operador de Jacobi. Entonces, fijémonos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\mathcal{J}_A(z) &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_i, x_i\rangle \langle \mathcal{J}_A(z)x_i, x_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_i, x_i\rangle \langle A(z,x_i)z, x_i\rangle \\ &= \rho(z,z) \end{aligned}$$

donde $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ es una base ortonormal para $z^\perp$. Si tomamos $x \in z^\perp$ un vector unitario no nulo, tenemos que el plano $\pi = \langle\{x,z\}\rangle$ es un plano no degenerado de V, es decir, la restricción de $\langle\,,\,\rangle$ al plano π es no degenerada. Por tanto, la curvatura $K(\pi)$ de π viene dada por

$$K(\pi) = \frac{\langle A(z,x)z, x\rangle}{\langle x,x\rangle\langle z,z\rangle - \langle x,z\rangle^2} = \frac{\langle \mathcal{J}_A(z)x, x\rangle}{\langle x,x\rangle\langle z,z\rangle}.$$

Si nos centramos en el caso definido positivo, los autovalores del operador de Jacobi $\mathcal{J}_A(z)$ representan los valores extremos de la curvatura seccional de todos los planos que contienen a z.

1.1.2. El operador de Jacobi de orden superior

Definición 1.8. Sea $(V, \langle\,,\,\rangle, A)$ un espacio vectorial dotado de un producto interior $\langle\,,\,\rangle$, y A un tensor de curvatura algebraico sobre V. Sea $\mathfrak{B} := \{e_1, \ldots, e_k\}$ una base de un k-plano σ no degenerado de V. Sea $h_{ij} := \langle e_i, e_j\rangle$ para $1 \leq i, j \leq k$ las componentes de la restricción de $\langle\,,\,\rangle$ a σ con respecto a la base $\mathfrak{B}$. Puesto que σ es un k-plano no degenerado se tiene que $det(h_{ij}) \neq 0$ con lo que existe h^{ij} la matriz inversa. Entonces el *operador de Jacobi de orden superior* se define como:

$$\mathfrak{J}_\sigma y := \sum_{ij} h^{ij} A(e_i, y)e_j.$$

El siguiente resultado muestra que la definición que tomamos para el operador de Jacobi de orden superior es independiente de la base del k-plano σ. Además relaciona el operador de Jacobi de orden superior con el operador de Jacobi.

Teorema 1.9. [15] *Sea A un tensor de curvatura algebraico en un espacio vectorial V dotado con un producto interior $\langle\,,\,\rangle$ de signatura (p,q). Sea $\mathfrak{B} := \{e_1, \ldots, e_k\}$ una base de un subespacio σ no degenerado de V. Sea $h_{ij} := \langle e_i, e_j\rangle$ y sea h^{ij} su matriz inversa. Entonces si $\mathfrak{J}_\sigma y := \sum_{ij} h^{ij} A(e_i, y)e_j$ es el operador de Jacobi de orden superior se tiene que:*

1) *$\mathfrak{J}_\sigma$ es independiente de la elección de $\mathfrak{B}$.*
2) *Si σ es espacial, entonces $\mathfrak{J}_\sigma = \frac{k}{vol(S(\sigma))}\int_{x\in S(\sigma)} \mathcal{J}_A(x)$, donde $S(\sigma)$ son los vectores unitarios pertenecientes a σ.*

1.1.3. El operador de curvatura antisimétrico

Sea V un espacio vectorial con un producto interior $\langle\,,\,\rangle$ de signatura (p,q). Sean $Gr^+_{2,0}(V)$, $Gr^+_{1,1}(V)$ y $Gr^+_{0,2}(V)$ las *variedades Grassmannianas* de todos los planos *temporales* (i.e., de signatura $(--)$), *mixtos* (i.e., de signatura $(-+)$) y *espaciales* (i.e., de signatura $(++)$) orientados. Hay que tener en cuenta que en el caso Riemanniano ($p = 0$) se tiene que $Gr^+(V) := Gr^+_{0,2}(V)$.

Definición 1.10. Sea A un tensor de curvatura algebraico en $(V, \langle\,,\,\rangle)$. Si $\{x, y\}$ es una base orientada para un plano no degenerado π, entonces definimos el *operador de curvatura antisimétrico* como

$$A(\pi) := \frac{A(x,y)}{|\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2|^{\frac{1}{2}}}.$$

En los siguientes resultados veremos que el operador de curvatura antisimétrico está bien definido, es decir, es independiente de la base que tomemos para el plano π.

Lema 1.11. [15] *Sea V un espacio vectorial con un producto interior $\langle\,,\,\rangle$, de signatura (p, q). Sean x_1, x_2, y_1 e y_2 vectores de V, donde $x_2 = ax_1 + by_1$ e $y_2 = cx_1 + dy_1$ para ciertos valores a, b, c y d reales. Entonces*

$$\langle x_2,x_2\rangle\langle y_2,y_2\rangle - \langle x_2,y_2\rangle^2 = (ad-bc)^2\{\langle x_1,x_1\rangle\langle y_1,y_1\rangle - \langle x_1,y_1\rangle^2\}.$$

Demostración. Llamamos $h_{11} := \langle x_1, x_1\rangle$, $h_{12} := \langle x_1, y_1\rangle$ y $h_{22} := \langle y_1, y_1\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle x_2,x_2\rangle\langle y_2,y_2\rangle - \langle x_2,y_2\rangle^2 &= (a^2h_{11} + 2abh_{12} + b^2h_{22})(c^2h_{11} + 2cdh_{12} + d^2h_{22}) \\
&\quad -(ach_{11} + (ad+bc)h_{12} + bdh_{22})^2 \\
&= (a^2c^2 - a^2c^2)h_{11}^2 \\
&\quad +(2a^2cd + 2abc^2 - 2ac(ad+bc))h_{11}h_{12} \\
&\quad +(a^2d^2 + b^2c^2 - 2acbd)h_{11}h_{22} \\
&\quad +(4abcd - (ad+bc)^2)h_{12}^2 \\
&\quad +(2abd^2 + 2cdb^2 - 2(ad+bc)bd)h_{12}h_{22} \\
&\quad +(b^2d^2 - b^2d^2)h_{22}^2 \\
&= (ad-bc)^2(h_{11}h_{22} - h_{12}^2),
\end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Lema 1.12. [15] *Sea V un espacio vectorial con un producto interior $\langle\,,\,\rangle$ de signatura (p, q). Sea T una forma bilineal alternada de $V \times V$ en W, siendo W un espacio vectorial auxiliar. Sean $\{x_1, y_1\}$ y $\{x_2, y_2\}$ dos bases para un plano π no degenerado, de modo que induzcan la misma orientación. Entonces se tiene que*

$$\frac{T(x_1,y_1)}{|\langle x_1,x_1\rangle\langle y_1,y_1\rangle - \langle x_1,y_1\rangle^2|^{\frac{1}{2}}} = \frac{T(x_2,y_2)}{|\langle x_2,x_2\rangle\langle y_2,y_2\rangle - \langle x_2,y_2\rangle^2|^{\frac{1}{2}}}.$$

Demostración. Consideremos $\{x_1, y_1\}$ y $\{x_2, y_2\}$ dos bases que inducen la misma orientación en un plano π. Entonces podemos escribir una en función de la otra, es decir, $x_2 = ax_1 + by_1$ e $y_2 = cx_1 + dy_1$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Estamos en condiciones de aplicar el lema anterior, con lo cual tenemos que

$$\langle x_2,x_2\rangle\langle y_2,y_2\rangle - \langle x_2,y_2\rangle^2 = (ad-bc)^2\{\langle x_1,x_1\rangle\langle y_1,y_1\rangle - \langle x_1,y_1\rangle^2\}.$$

Cabe destacar que como inducen la misma orientación se tiene que $ad - bc > 0$. Por otro lado, puesto que T es una forma bilineal alternada, se obtiene que

$$T(x_2, y_2) = T(ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1) = |ad - bc| T(x_1, y_1),$$

con lo que tenemos el resultado □

Sin más que aplicar estos dos últimos resultados se tiene que el operador de curvatura antisimétrico está bien definido, pues no depende de la base que elijamos para el plano π.

1.1.4. El operador de curvatura antisimétrico de orden superior

Del mismo modo que definimos el operador de Jacobi de orden superior, también se puede definir el operador de curvatura antisimétrico de orden superior.

Definición 1.13. Sea A un tensor de curvatura algebraico en un espacio vectorial V dotado con un producto interior $\langle\, , \rangle$. Sea $\mathfrak{B} := \{e_1, \ldots, e_k\}$ una base de un k-plano σ no degenerado de V. Sea $h_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle$ para $1 \leq i, j \leq k$ las componentes de la restricción de $\langle\, , \rangle$ a σ con respecto a la base $\mathfrak{B}$. Sea h^{ij} la matriz inversa. Entonces el *operador de curvatura antisimétrico de orden superior* se define como:

$$\mathfrak{S}_\sigma := \sum_{i,j,k,l} h^{ik} h^{jl} A(e_i, e_j) A(e_k, e_l).$$

De nuevo se puede probar que esta definición no depende de la base elegida para σ:

Teorema 1.14. [15] *Sea A un tensor de curvatura algebraico en un espacio vectorial V dotado con un producto interior $\langle\, , \rangle$ de signatura (p, q). Tomemos $\mathfrak{B} := \{e_1, \ldots, e_k\}$ una base de un k-plano σ no degenerado de V. Sea $h_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle$ y sea h^{ij} su matriz inversa. Entonces si $\mathfrak{S}_\sigma := \sum_{i,j,k,l} h^{ik} h^{jl} A(e_i, e_j) A(e_k, e_l)$ es el operador de curvatura antisimétrico de orden superior se tiene que:*

1) *$\mathfrak{S}_\sigma$ es independiente de la elección de $\mathfrak{B}$.*
2) *Si σ es espacial, entonces $\mathfrak{S}_\sigma = \frac{k(k-1)}{vol(Gr_2^+(\sigma))} \int_{\pi \in Gr_2^+(\sigma)} A(\pi)^2$.*

1.1.5. El operador de Szabó

Al contrario que el resto de operadores vistos hasta ahora, el operador de Szabó se define a partir de la derivada covariante de un tensor de curvatura A. Decimos que $\nabla A \in \otimes^5 V^*$ es un *tensor derivada covariante algebraico* de A si satisface las siguientes simetrías:

$$\nabla A(x, y, z, t; w) = -\nabla A(y, x, z, t; w) = \nabla A(z, t, x, y; w),$$

$$\nabla A(x, y, z, t; w) + \nabla A(x, z, t, y; w) + \nabla A(x, t, y, z; w) = 0,$$

$$\nabla A(x, y, z, t; w) + \nabla A(x, y, t, w; z) + \nabla A(x, y, w, z; t) = 0.$$

Definición 1.15. El operador de Szabó se define como:

$$\mathcal{S}_{\nabla \mathcal{A}} x : y \longrightarrow (\nabla_x A)(y, x)x.$$

1.2. Métricas de Walker

Una *variedad de Walker* es un triple $(M, g, \mathcal{D})$ donde M es una variedad diferenciable n-dimensional, g es una métrica indefinida y $\mathcal{D}$ es una distribución paralela nula r-dimensional. Un caso de especial interés de este tipo de variedades es aquel en el que se admite un campo de planos nulos de dimensión máxima, es decir, cuando se tiene que $r = \frac{n}{2}$. Puesto que la dimensión del plano nulo es $r \leq \frac{n}{2}$, el caso de dimensión más baja es el de métricas de signatura $(--++)$ que admiten un campo de 2-planos nulos paralelos.

Las métricas de Walker serán utilizadas en esta memoria para dar ciertas familias de ejemplos en dimensión cuatro y sobre todo en el último capítulo, ya que la extensión de Riemann de una superficie afín a su fibrado cotangente es una métrica tipo Walker. Para ello será conveniente usar un sistema de coordenadas específico asociado a una métrica de Walker.

Consideremos g una métrica semi-Riemanniana de dimensión cuatro que admite una distribución nula paralela de dimensión dos. Walker [27] demostró que existe un sistema de coordenadas $\{x_1, \ldots, x_4\}$ de modo que la métrica se puede expresar como:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}$$

donde a,b y c son funciones que dependen de las coordenadas $(x_1, \ldots, x_4)$.

1.3. Extensiones de Riemann

Sea M una variedad n-dimensional y T_p^*M su espacio cotangente en un punto $p \in M$. El conjunto $T^*M = \cup_{p \in M} T_p^*M$ se llama *fibrado cotangente* sobre la variedad M. Un punto $\tilde{p} \in T^*M$ está dado por $\tilde{p} = (p, \omega)$, donde $p \in M$ y $\omega \in T_p^*M$. Si f es una función en M, definimos $f^V = f \circ \pi$ su levantamiento vertical a T^*M.

Si $(U, (x_i))$ es una carta en M, induce coordenadas $(x_i, x_{i'})$ en $\pi^{-1}(U)$, donde una 1-forma ω en U puede ser escrita como $\omega = \sum x_{i'} dx_i$.

Para cada campo de vectores ξ en M, definimos una función $\iota\xi : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\iota\xi(\tilde{p}) = \iota\xi(p, \omega) = \omega(\xi_p)$. Expresado en coordenadas locales, $\iota\xi(x_i, x_{i'}) = \sum x_{i'}\xi_i$, donde $\xi = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Observemos que dos campos de vectores $\tilde{\xi}$, $\tilde{\zeta}$ en T^*M coinciden si y sólo si $\tilde{\xi}(\iota z) = \tilde{\zeta}(\iota z)$ para todo campo de vectores z en M. Usando esto definimos el levantamiento completo de un campo de vectores x en M como el campo de vectores x^C en T^*M dado por $x^C(\iota z) = \iota[x, z]$, para todo campo de vectores z en M.

Es importante observar que dos tensores tipo $(0, s)$ $\tilde{T}$, $\tilde{S}$ en T^*M son el mismo si y sólo si $\tilde{T}(x_1^C, \ldots, x_s^C) = \tilde{S}(x_1^C, \ldots, x_s^C)$ para cualesquiera campos de vectores $x_1^C, \ldots, x_s^C$ en M.

Consideramos D una conexión simétrica en M y definimos su *extensión de Riemann* a

T^*M, como el tensor métrico g_D en T^*M dado por

$$g_D(x^C, y^C) = -\iota(D_x y + D_y x)$$

para todo campo de vectores x, y en M.

En el sistema de coordenadas inducido $(x_i, x_{i'})$ en T^*M, la *extensión de Riemann* se puede expresar como

$$g_D = \begin{pmatrix} -2x_{k'}\Gamma_{ij}^k & \delta_i^j \\ \delta_i^j & 0 \end{pmatrix}$$

con respecto a $\{\partial_1, \ldots, \partial_n, \partial_{1'}, \ldots, \partial_{n'}\}$ $(i, j = 1, \ldots n,\ i' = i + n)$, y donde Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel de la conexión D con respecto a las coordenadas (x_i) en la variedad afín M. En ciertas partes de la memoria usaremos algo un poco más general que la extensión de Riemann de una conexión afín, será lo que llamaremos *extensión de Riemann deformada* por un campo de tensores simétrico de tipo $(0, 2)$ ϕ sobre la variedad afín M, es decir, consideraremos el fibrado cotangente T^*M equipado con la métrica $g_D + \pi^*\phi$.

Las extensiones de Riemann son una estructura que tiene gran interés de por sí ya que relacionan la geometría afín con la geometría semi-Riemanniana. A continuación se darán ciertos resultados que serán de gran interés para nuestro trabajo y que nos muestran que ciertas propiedades de las variedades afines se conservan a través de su extensión de Riemann.

Teorema 1.16. [30] *La extensión de Riemann de una conexión D de una variedad afín M es localmente simétrica si y sólo si D es localmente simétrica.*

Otra propiedad importante y que usaremos a lo largo de esta memoria es la de ser curvatura recurrente o Ricci recurrente. Se dice que una variedad tiene *curvatura recurrente* si existe una 1-forma σ de modo que se verifique que $DR = \sigma \otimes R$ donde R es el tensor de curvatura asociado a D; de igual modo se dice que es *Ricci recurrente* si existe una 1-forma σ de modo que $D\rho = \sigma \otimes \rho$.

Teorema 1.17. [1] *La extensión de Riemann de una conexión D de una variedad afín M es recurrente* (*respectivamente, Ricci recurrente*) *si y sólo si D es recurrente* (*respectivamente, Ricci recurrente*).

Antes de terminar esta sección veremos como se traduce la condición de que (T^*M, g_D) sea conformemente llana a geometría afín. Decimos que una conexión D con tensor de Ricci simétrico es *proyectivamente llana* si en un entorno de cada punto existe un cambio proyectivo de D a una conexión afín llana $\overline{D}$.

Si consideramos una conexión afín D podemos definir el *tensor de Weyl proyectivo* como

$$W(x, y)z = R(x, y)z - \frac{1}{n-1}(\rho(y, z)x - \rho(x, z)y).$$

Ahora bien, es conveniente introducir el *tensor de Ricci normalizado* que viene dado por $\gamma = \frac{1}{n-1}\rho$, y por lo tanto se tiene que

$$W(x,y)z = R(x,y)z - (\gamma(y,z)x - \gamma(x,z)y).$$

El siguiente resultado será de gran utilidad a lo largo de la memoria.

Teorema 1.18. [21] *Una conexión afín simétrica D con tensor de Ricci simétrico en una variedad diferenciable M es proyectivamente llana si y sólo si se da alguna de las siguientes condiciones:*

a) $dim M \geq 3$ y W es idénticamente nulo;

b) $dim M = 2$ y el tensor de Ricci es Codazzi, i.e.,

$$(\nabla_x \rho)(y,z) = (\nabla_y \rho)(x,z)$$

para cualesquiera campos de vectores x, y, z.

El siguiente resultado nos dice como se traduce la condición de ser proyectivamente llana a la extensión de Riemann:

Teorema 1.19. [1] *La extensión de Riemann de una conexión D de una variedad afín M es conformemente llana si y sólo si D es proyectivamente llana.*

Capítulo 2

Variedades de Osserman

En este capítulo introduciremos el concepto de variedad de Osserman y realizaremos un pequeño estudio de ellas en geometría Riemanniana, Lorentziana y semi-Riemanniana, con especial atención al caso en el que la dimensión de la variedad sea cuatro.

Definición 2.1. Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana y $p \in M$.

a) (M, g) se dice que es *Osserman temporal en p* si el polinomio característico del operador $\mathcal{J}_R(z)$ es independiente de $z \in S_p^-(M)$.

b) (M, g) se dice que es *Osserman espacial en p* si el polinomio característico del operador $\mathcal{J}_R(z)$ es independiente de $z \in S_p^+(M)$.

c) (M, g) se dice que es *Jordan-Osserman temporal en p* si la forma canónica de Jordan del operador $\mathcal{J}_R(z)$ es independiente de $z \in S_p^-(M)$.

d) (M, g) se dice que es *Jordan-Osserman espacial en p* si la forma canónica de Jordan del operador $\mathcal{J}_R(z)$ es independiente de $z \in S_p^+(M)$.

Los conceptos de variedad Osserman temporal y espacial son equivalentes entre sí como nos muestra el siguiente resultado. Es importante resaltar el hecho de que esto no implica que el polinomio característico de $\mathcal{J}_R(z)$ sea independiente de $z \in S(M)$.

Teorema 2.2. [11, 12] *Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana y $p \in M$. Entonces es Osserman temporal en p si y sólo si es Osserman espacial en p.*

Nótese, sin embargo, que el caracter Jordan-Osserman espacial no es equivalente al Jordan-Osserman temporal. Gracias a este resultado podemos dar, sin pérdida de generalidad, la siguiente definición.

Definición 2.3. Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana. Entonces se dice que es *Osserman en p* si es Osserman temporal o espacial en p.

Definición 2.4. Decimos que la variedad (M, g) es *puntualmente Osserman* si es Osserman en cada punto $p \in M$ y que es *globalmente Osserman* si es puntualmente Osserman y los autovalores de los operadores de Jacobi no varían punto a punto.

Evidentemente la condición de ser Osserman es equivalente a que los autovalores del operador de Jacobi sean constantes, contados con multiplicidad sobre $S_p^-(M)$ y $S_p^+(M)$; ahora bien no tienen porque ser constantes sobre todo $S_p(M)$. Un primer ejemplo de variedad de Osserman es el siguiente:

Ejemplo 2.5. Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana de signatura (p, q). Si tiene curvatura seccional constante c, entonces es Osserman. De hecho, para una variedad de curvatura seccional constante c su tensor de curvatura se puede escribir como

$$R(x, y)z = cR^0(x, y)z$$

donde $x, y, z \in T_pM$. Entonces el operador de Jacobi asociado a $z \in S(M)$ está dado por

$$\mathcal{J}_R(z) = cg(z, z)id$$

con lo cual el polinomio característico de $\mathcal{J}_R(z)$ es $p_\lambda(\mathcal{J}_R(z)) = (\lambda - cg(z, z))^{n-1}$ para todo $z \in S(M)$ y por tanto es globalmente Osserman como queríamos ver. Además, se observa que los autovalores del operador de Jacobi cambian de signo según tomemos vectores espaciales o temporales.

También son Osserman los tensores de curvatura R^J y R^P definidos en los ejemplos 1.4 y 1.5, respectivamente.

Una propiedad interesante de las variedades Osserman es que son todas variedades de Einstein. Para poder verlo necesitaremos el siguiente lema previo.

Lema 2.6. [8] *Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con un producto interior indefinido y sea h una forma bilineal en V.*

a) Si $h(u, u) = 0$ para todo vector nulo $u \in V$, entonces $h = \lambda\langle\ ,\ \rangle$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Si $|h(x, x)| \leq d \in \mathbb{R}$ para todo vector unitario temporal (respectivamente para todo vector unitario espacial) $x \in V$, entonces $h = \lambda\langle\ ,\ \rangle$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Si $h(x, x) \leq d_1 \in \mathbb{R}$ para todo vector unitario temporal (respectivamente para todo vector unitario espacial) $x \in V$, y $h(y, y) \geq d_2 \in \mathbb{R}$ para todo vector unitario espacial (respectivamente para todo vector unitario temporal) $y \in V$, entonces $h = \lambda\langle\ ,\ \rangle$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Con este resultado ya estamos en condiciones de ver la siguiente:

Proposición 2.7. [12] *Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana. Si (M, g) es Osserman en $p \in M$ entonces también es Einstein en $p \in M$, es decir, $\rho = \lambda g$ en $p \in M$.*

Demostración. Supongamos que (M, g) es Osserman temporal en p. Entonces el polinomio característico del operador de Jacobi $\mathcal{J}_R(z)$ es $p_\lambda(\mathcal{J}_R(z)) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda^i$ independiente de $z \in S_p^-(M)$, donde $a_{n-1} = 1$. En particular, como la traza de $\mathcal{J}_R(z)$ es $-a_{n-2}$ y como la traza de $\mathcal{J}_R(z)$ es $\rho(z, z)$, se sigue inmediatamente que $\rho(z, z) = -a_{n-2}$ y por tanto es independiente de la elección de $z \in S_p^-(M)$.

Por tanto, si g es indefinida, por el lema anterior se tiene que $\rho = \lambda g$ en p, donde $\lambda \in \mathbb{R}$, y si g es definida se obtiene el resultado por la identidad de polarización. $\square$

Una vez vistas ciertas propiedades elementales que verifican las variedades de Osserman en cualquier dimensión, nos centraremos en el caso de dimensión cuatro, analizando por separado el caso Riemanniano, Lorentziano y por último el caso de signatura $(2, 2)$.

2.1. Variedades Osserman en Geometría de Riemann

El estudio de las variedades de Osserman y de Jordan-Osserman en geometría de Riemann se hace de modo conjunto. La razón para esto es que el operador de Jacobi, al ser un operador autoadjunto, es diagonalizable, por lo que es equivalente que la forma canónica de Jordan sea constante a la constancia de los autovalores.

Un espacio simétrico es una variedad de Riemann tal que para cada punto $p \in M$ existe una isometría, σ_p, en M, de modo que $(\sigma_p)_* = -id$ en T_pM. Decimos que un espacio es *localmente simétrico* si todas las reflexiones geodésicas locales son isometrías locales. El siguiente resultado es una caracterización de los espacios localmente simétricos debido a E. Cartan; M es un espacio localmente simétrico si y sólo si $\nabla R = 0$.

Daremos un primer resultado de las variedades Osserman en dimensión cuatro.

Teorema 2.8. [6] *Si (M, g) es una variedad de Riemann, de dimensión 4, globalmente Osserman, entonces o es llana o es un espacio localmente simétrico de rango uno.*

Nuestro propósito es ver la existencia de ejemplos de variedades puntualmente de Osserman (i.e., los autovalores de los operadores de Jacobi son constantes en cada $S_p(T_pM)$ pero pueden cambiar de un punto a otro), que no son globalmente Osserman. Recordar que una variedad se dice *k-stein* si existen constantes c_i tales que para todo $i = 1, \ldots, k$

$$\mathrm{Tr}((\mathcal{J}_R(x))^k) = c_i g(x, x)^k.$$

Teorema 2.9. [14] *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión cuatro. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) (M, g) es una variedad puntualmente Osserman.

b) Localmente existe una orientación para M tal que el tensor métrico es autodual y Einstein.

c) (M, g) es 2-stein.

Este teorema nos da múltiples ejemplos, como nos muestra el siguiente resultado.

Corolario 2.10. [14] *Existen variedades de Riemann de dimensión cuatro puntualmente Osserman pero no globalmente Osserman, y por tanto, no localmente isométricas a espacios simétricos de rango uno. Algunos ejemplos para este caso son aquellos en los que la función* $\|R\|^2$ *no es constante.*

Un ejemplo para el cual la función $\|R\|^2$ no es constante está tratado en [23] (véase también [12]). Llamamos *espacio complejo generalizado* a una variedad casi-Hermítica (M, g, J), cuyo tensor de curvatura R se escribe de la forma

$$R = fR^0 + hR^J.$$

Todo espacio complejo generalizado de dimensión cuatro es entonces Hermítico en el subconjunto abierto donde $h \neq 0$ y $f + h$ sea constante. Además, si f ó h son constantes entonces (M, g, J) es una variedad Kähler de curvatura seccional holomorfa constante y por tanto globalmente Osserman.

2.2. Variedades Osserman en Geometría de Lorentz

El caso de geometría de Lorentz, sobre todo cuando estamos sobre variedades de dimensión cuatro, tiene gran importancia, ya no sólo en el ámbito de las Matemáticas, sino también en la Física, sobre todo en el campo de la Teoría de la Relatividad. Si nos centramos en el campo de las Matemáticas, cuando trabajamos en geometría semi-Riemanniana, y como caso particular en geometría de Lorentz, nos encontramos con la existencia de vectores de norma positiva, negativa y con vectores no nulos pero de norma cero, es decir, nuestro producto interior no es definido positivo. Esto acarrea ciertas dificultades, siendo la más destacable en lo que a nosotros nos atañe, que no tenemos garantizado que el operador de Jacobi sea diagonalizable aún siendo autoadjunto con respecto a nuestra métrica g, con lo que los conceptos de variedad de Osserman y de variedad de Jordan-Osserman no son equivalentes.

En la literatura la solución de la conjetura de Osserman en geometría de Lorentz fue obtenida estudiando por separado el caso espacial y temporal. Ahora sabemos que las nociones de Osserman temporal y espacial son equivalentes, lo que facilita su estudio.

Como ya dijimos en el anterior capítulo, en geometría de Riemann la curvatura seccional es una función continua definida en toda la Grassmanniana de planos dos dimensionales tangentes a (M, g) en p, es decir, $K : G_2(T_pM) \to \mathbb{R}$ es una función continua. Ahora bien, como $G_2(T_pM)$ es compacto, se tiene inmediatamente que la curvatura seccional está acotada en todo punto. El problema llega cuando estamos en geometría semi-Riemanniana, ya que la función curvatura seccional no está definida sobre toda la Grassmanniana, sino que sólo está definida sobre los planos no degenerados, es decir, está definida sobre el abierto $\tilde{G}_2(T_pM) = G_2(T_pM) \setminus \{\pi = \langle\{x, y\}\rangle \,:\, g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2 = 0\}$. Debido a la no compacidad de $\tilde{G}_2(T_pM)$, K no tiene porque estar necesariamente acotada en cada punto.

Aparecen ante nosotros dos problemas relacionados con el estudio de la curvatura seccional en variedades con métricas no definidas, que son ver cuando K es acotada en un punto $p \in M$ dado y cuando se puede extender la función K con continuidad a toda la Grassmanniana. El siguiente lema trata de dar una solución a ambos problemas. La demostración que obviamos aquí puede verse en [12], [24].

Lema 2.11. *Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana de índice $0 < \nu < n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $K(\pi)$ es constante para todos los planos π no degenerados, tangentes a (M, g).

b) $R(x, y, y, x) = 0$ para todos los planos degenerados tangentes a (M, g) en $p \in M$.

c) $a \leq K(\pi)$ ó $K(\pi) \leq b$ para todos los planos no degenerados tangentes a (M, g) en $p \in M$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

d) $a \leq K(\pi) \leq b$ para todos los planos temporales π, tangentes a (M, g) en $p \in M$.

e) $a \leq K(\pi) \leq b$ para todos los planos definidos π, tangentes a (M, g) en $p \in M$.

Teorema 2.12. [12] *Sea (M, g) una variedad de Lorentz, tal que $dimM \geq 3$. Entonces, (M, g) es Osserman en $p \in M$ si y sólo si (M, g) es de curvatura seccional constante en $p \in M$.*

Demostración. La suficiencia es obvia por el ejemplo 2.5. Veamos la necesidad. Supongamos que (M, g) es Osserman temporal en $p \in M$ y sea $z \in S_p^-(M)$. Si tenemos en cuenta que el operador de Jacobi $\mathcal{J}_R(z)$ es una aplicación lineal de $z^\perp$ en $z^\perp$, y teniendo en cuenta que en $z^\perp$ tenemos inducido un producto interior definido, obtenemos que $\mathcal{J}_R(z)$ es diagonalizable. Llamamos $c_1, \ldots, c_{n-1}$ a los autovalores, contados con multiplicidad, de $\mathcal{J}_R(z)$, con autovectores ortonormales $v_1, \ldots, v_{n-1}$, respectivamente. Tomamos un vector unitario $x = \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i \in z^\perp$. Entonces

$$g(\mathcal{J}_R(z)x, x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i g(\mathcal{J}_R(z)v_i, x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i c_i g(v_i, x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 c_i,$$

y por tanto tenemos que

$$|g(\mathcal{J}_R(z)(x), x)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |a_i^2||c_i| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |c_i|,$$

puesto que $|a_i^2| \leq 1$ para cada $i = 1, \cdots, n-1$. Pero como $|g(\mathcal{J}_R(z)(x), x)| = |g(R(z, x)z, x)|$ $= |K(\pi)|$, donde $\pi = \langle\{x, z\}\rangle$, se sigue que $|K(\pi)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |c_i|$.

Pero por hipótesis tenemos que (M, g) es Osserman temporal en $p \in M$ y como $z^{\perp}$ tiene inducido un producto interior definido, se sigue que $c_1, \ldots, c_{n-1}$ son constantes para todo $z \in S_p^-(M)$, y por tanto, para todo plano temporal π, tangente a (M, g) en p tenemos que $|K(\pi)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |c_i| = cte$. Por lo tanto, por el Lema 2.11 tenemos que (M, g) es de curvatura seccional constante en $p \in M$. $\square$

Ahora ya estamos en condiciones de completar la respuesta al problema de Osserman en geometría Lorentziana.

Teorema 2.13. [12] *Sea (M, g) una variedad de Lorentz conexa, con $dimM \geq 3$. Si es puntualmente Osserman entonces es de curvatura seccional constante.*

Demostración. Por el Teorema 2.12 (M, g) es de curvatura seccional constante en cada punto $p \in M$. Entonces por el lema de Schur tenemos inmediatamente el resultado. $\square$

2.3. Variedades Osserman con signatura $(- - ++)$

El propósito de esta sección es analizar la condición de Osserman en el caso de tener un tensor métrico de signatura $(2, 2)$ sobre una variedad diferenciable de dimensión cuatro. Daremos ciertas relaciones para las componentes del tensor de curvatura, que nos permitirán aportar una solución al problema de Osserman en variedades con un producto interior neutro. El principal resultado de esta subsección se debe a Blažić, Bokan y Rakić, y describe como ha de ser el operador de Jacobi para que la variedad sea Osserman.

Teorema 2.14. [3] *Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana de signatura $(2, 2)$, y sea x un vector unitario tangente a M en un punto $p \in M$. Entonces el operador de Jacobi $\mathcal{J}_R(x)$ ha de ser necesariamente de uno de los siguientes cuatro tipos:*
Tipo Ia: Existe una base ortonormal para $\langle\{x\}\rangle^{\perp}$ tal que

$$\mathcal{J}_R(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Tipo Ib: Existe una base ortonormal para $\langle\{x\}\rangle^{\perp}$ tal que

$$\mathcal{J}_R(x) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \beta \neq 0.$$

Tipo II: Existe una base ortonormal para $\langle\{x\}\rangle^{\perp}$ tal que

$$\mathcal{J}_R(x) = \begin{pmatrix} \pm(\alpha - \frac{1}{2}) & \pm\frac{1}{2} & 0 \\ \mp\frac{1}{2} & \pm(\alpha + \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Tipo III: Existe una base ortonormal para $\langle\{x\}\rangle^{\perp}$ *tal que*

$$\mathcal{J}_R(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \alpha & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \alpha \end{pmatrix}.$$

Las diferentes posibilidades que nos presenta el teorema se corresponden con los siguientes casos: El operador de Jacobi $\mathcal{J}_R(x)$ es diagonalizable (Tipo Ia), el polinomio característico del operador de Jacobi tiene una raíz compleja (Tipo Ib), el polinomio mínimo del operador de Jacobi tiene una raíz doble (Tipo II) y, finalmente, el polinomio mínimo del operador de Jacobi tiene una raíz triple (Tipo III).

Con todo esto, podemos dar una descripción de todos los posibles tensores de curvatura algebraicos Osserman. Este resultado está probado en [3] (véase también [12]):

Teorema 2.15. *Sea* (M, g) *una variedad semi-Riemanniana de signatura* $(2, 2)$. *Entonces es Osserman en* $p \in M$ *si y sólo si existe una base ortonormal* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *para* T_pM *tal que las componentes no nulas del tensor de curvatura son:*
Tipo Ia:

$R_{1221} = R_{4334} = \alpha,\ R_{1331} = R_{4224} = -\beta,\ R_{1441} = R_{3223} = -\gamma,$

$R_{1234} = (-2\alpha + \beta + \gamma)/3,\ R_{1423} = (\alpha + \beta - 2\gamma)/3,$

$R_{1342} = (\alpha - 2\beta + \gamma)/3.$

Tipo Ib:

$R_{1221} = R_{4334} = \alpha,\ R_{1331} = R_{4224} = -\alpha,\ R_{1441} = R_{3223} = -\gamma,$

$R_{2113} = R_{2443} = -\beta,\ R_{1224} = R_{1334} = \beta,$

$R_{1234} = (-\alpha + \gamma)/3,\ R_{1423} = 2(\alpha - \gamma)/3,\ R_{1342} = (-\alpha + \gamma)/3.$

Tipo II:

$R_{1221} = R_{4334} = \pm(\alpha - \frac{1}{2}),\ R_{1331} = R_{4224} = \mp(\alpha + \frac{1}{2}),$

$R_{1441} = R_{3223} = -\beta,$

$R_{2113} = R_{2443} = \mp\frac{1}{2},\ R_{1224} = R_{1334} = \pm\frac{1}{2},$

$R_{1234} = (\pm(-\alpha + \frac{3}{2}) + \beta)/3,\ R_{1423} = 2(\pm\alpha - \beta)/3,$

$R_{1342} = (\pm(-\alpha - \frac{3}{2}) + \beta)/3.$

Tipo III:
$R_{1221} = R_{4334} = \alpha,\ R_{1331} = R_{4224} = -\alpha,\ R_{1441} = R_{3223} = -\alpha,$

$R_{2114} = R_{2334} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ R_{3114} = -R_{3224} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$R_{1223} = R_{1443} = R_{1332} = -R_{1442} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Sea $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión n dotado de un producto interior de signatura (ν, η) y sea $\mathsf{v}_{\langle\, ,\, \rangle}$ su elemento de volumen. Entonces $\Lambda^2 V^*$ puede equiparse con un producto interior, que también denotaremos por $\langle\, ,\, \rangle$, dado por la fórmula

$$\langle e^i \wedge e^j, e^k \wedge e^l \rangle = det \begin{pmatrix} \langle e_i, e_k \rangle & \langle e_i, e_l \rangle \\ \langle e_j, e_k \rangle & \langle e_j, e_l \rangle \end{pmatrix}.$$

Definimos el operador *estrella de Hodge*, $*$, como el isomorfismo $* : \Lambda^k V^* \longrightarrow \Lambda^{n-k} V^*$ dado por $\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \mathsf{v}_{\langle\, ,\, \rangle}$ para todas las $k-$formas, $\alpha, \beta \in \Lambda^k V^*$. Este operador satisface que $*^2 = (-1)^{k(n-k)+\eta} id_{\Lambda^k V^*}$. Por tanto cuando estamos en dimensión cuatro se tiene que el operador estrella de Hodge induce un automorfismo en $\Lambda^2 V^*$ que es una involución si el producto interior es definido o indefinido de signatura $(2, 2)$. En el caso que tengamos signatura Lorentziana $*$ define una estructura compleja en $\Lambda^2 V^*$.

Centrémonos en el caso en que $*^2 = id_{\Lambda^2 V^*}$. En este caso podemos descomponer $\Lambda^2 V^*$ como $\Lambda^2 V^* = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$, donde Λ_+ y Λ_- son los autoespacios correspondientes a los autovalores $+1$ y -1 del operador $*$, es decir

$$\Lambda_\pm = \left\{ \alpha \in \Lambda^2 V^* : *\alpha = \pm \alpha \right\}.$$

Las dos formas en Λ_+ y Λ_- son llamadas formas *autoduales* y *anti-autoduales*, respectivamente.

Cabe destacar que el producto interior definido en $\Lambda^2 V^*$ es definido positivo si $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ es definido positivo, o indefinido de signatura $(3, 3)$ si $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ es indefinido de signatura $(2, 2)$. En este último caso, $\Lambda_\pm$ son subespacios Lorentzianos de $(\Lambda^2 V^*, \langle\, ,\, \rangle)$.
Consideramos el caso en que $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ es un espacio de signatura $(--++)$ y tomamos una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y sea $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ su correspondiente base dual. Entonces se tiene que

$$\Lambda_+ = \langle \{ (e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4)/\sqrt{2},\ (e^1 \wedge e^3 - e^4 \wedge e^2)/\sqrt{2},\ (e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3)/\sqrt{2} \} \rangle$$

y

$$\Lambda_- = \langle \{ (e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4)/\sqrt{2},\ (e^1 \wedge e^3 + e^4 \wedge e^2)/\sqrt{2},\ (e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3)/\sqrt{2} \} \rangle.$$

Sea A un tensor de curvatura algebraico en $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ y denotemos por ρ^A y τ^A su tensor de Ricci y su curvatura escalar, respectivamente. Además denotamos por Z^A su tensor de Ricci sin traza, esto es

$$Z^A(x, y) = \rho^A(x, y) - \frac{\tau^A}{4}\langle x, y\rangle$$

para cualesquiera $x, y \in V$. Entonces el tensor de Weyl W^A de A viene dado por

$$\begin{aligned} W^A(x_1, x_2, x_3, x_4) &= A(x_1, x_2, x_3, x_4) + \tfrac{\tau^A}{6} A^0(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &- \tfrac{1}{2}\{\langle x_2, x_4\rangle Z^A(x_1, x_3) - \langle x_1, x_4\rangle Z^A(x_2, x_3) \\ &+ \langle x_1, x_3\rangle Z^A(x_2, x_4) - \langle x_2, x_3\rangle Z^A(x_1, x_4)\}, \end{aligned}$$

donde $x_i \in V$ para todo $i \in \{1, \ldots, 4\}$.
Considerando A, Z^A y W^A como aplicaciones lineales en $\Lambda^2 V^*$, se puede probar que $*W^A = W^A*$ y $*Z^A = -Z^A*$. Por tanto, y teniendo en cuenta todo lo anterior, el tensor de curvatura algebraico A puede descomponerse como

$$A = \frac{\tau^A}{12} id_{\Lambda^2 V^*} \oplus Z^A \oplus (W_+^A \oplus W_-^A),$$

donde $W_\pm^A$ son las restricciones de W^A a $\Lambda_\pm$.
Ahora, para un producto interior definido o indefinido de signatura $(2, 2)$ tenemos la siguiente definición

Definición 2.16. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con un producto interior definido en él, y sea A un tensor de curvatura algebraico en $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Entonces $(V, \langle\ ,\ \rangle, A)$ se llama *autodual*, (respectivamente, *anti-autodual*) si $W_-^A \equiv 0$ (respectivamente, $W_+^A \equiv 0$).

Una variedad semi-Riemanniana de dimensión cuatro (M, g) se dice *autodual* (respectivamente, *anti-autodual*) si es orientable y su tensor de curvatura es autodual (respectivamente, anti-autodual) en cada punto $p \in M$.

El siguiente teorema nos relaciona la condición de ser Osserman con la condición de ser autodual.

Teorema 2.17. [2], [4] *Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana con tensor métrico de signatura $(2, 2)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) (M, g) es puntualmente Osserman.

b) Existe una orientación para M tal que es Einstein y autodual (o Einstein y anti-autodual.)

Además, los tipos de la curvatura autodual W_+ (respectivamente, anti-autodual W_-) están en correspondencia uno a uno con los diferentes tipos de operadores de Jacobi dados en el Teorema 2.14.

Capítulo 3

Variedades Ivanov-Petrova

De modo análogo al capítulo anterior, realizaremos un estudio de las variedades Ivanov-Petrova (que denotaremos por IP en lo que sigue) en el contexto de la geometría de Riemann, geometría de Lorentz y por último en el caso de signatura neutra. Si nos centramos en el caso de dimensión cuatro, sólo existe la clasificación de las variedades que son IP en el caso Riemanniano. Tanto en el caso de Lorentz como en el caso de signatura neutra la clasificación de las variedades IP es un problema abierto. Todas las herramientas que se manejan para tratar de hacer esta clasificación necesitan espacios con dimensión más alta. Comenzaremos recordando la definición de variedad IP.

Definición 3.1. Sea A un tensor de curvatura algebraico en un espacio vectorial V equipado con un producto interior $\langle\,,\,\rangle$ de signatura (p,q). Diremos que A es *espacial, mixto o temporal IP* si los autovalores del operador de curvatura antisimétrico $A(\pi)$ son constantes en $Gr^+_{0,2}(V)$,$Gr^+_{1,1}(V)$ o $Gr^+_{2,0}(V)$ respectivamente.

La definición anterior se extiende de manera natural para una variedad semi-Riemanniana.

Definición 3.2. Diremos que una variedad semi-Riemanniana (M,g) es *espacial, mixta o temporal IP* si el tensor de curvatura algebraico asociado R es espacial, mixto o temporal IP en cada punto de M.

En el siguiente lema veremos que las condiciones de ser espacial, mixto o temporal IP son equivalentes

Lema 3.3. [15] *Sea A un tensor de curvatura algebraico en un espacio vectorial V dotado con un producto interior $\langle\,,\,\rangle$ de signatura (p,q). Las siguientes condiciones son equivalentes y todas definen la noción de tensor de curvatura algebraico IP:*

1) *Si $q \geq 2$, entonces A es temporal IP.*

2) *Si $p \geq 2$, entonces A es espacial IP.*

3) *Si* $p \geq 1$ *y* $q \geq 1$*, entonces* A *es mixto IP.*

Observación 3.4. Esta equivalencia no se da en el caso de tensores de curvatura algebraicos Jordan IP.

3.1. Variedades IP en Geometría de Riemann

En Geometría de Riemann las variedades IP fueron clasificadas por Ivanov y Petrova en [17] para el caso en que la dimensión sea menor o igual que cuatro. Antes de ver esto, introduciremos el concepto de $\mathfrak{O}$-espacio. Para ello definiremos lo que entendemos por círculo en una variedad de Riemann.

Sea $c(t)$ una curva diferenciable en una variedad (M, g) de Riemann, parametrizada por el parámetro longitud de arco. Sea c' su campo de vectores tangente. Entonces c se llama *círculo* de curvatura k_1 si su primera curvatura es k_1 y el resto de curvaturas son todas cero [22]. Un *círculo unitario* es un círculo con curvatura $k_1 = 1$. Para un círculo unitario, $\nabla_{c'} c' = \xi$ y $\nabla_{c'} \xi = -c'$, donde el campo de vectores unitario ξ es el primero normal de $c(t)$. Todos los otros normales ortogonales a c' y ξ son paralelos a lo largo de $c(t)$. Las ecuaciones diferenciales para el círculo unitario son equivalentes a

$$\nabla_{c'} \nabla_{c'} c' + c' = 0.$$

Si la dimensión de M es mayor o igual a dos, entonces para todo punto $p \in M$ y para todo par de vectores ortonormales $u, v \in T_p M$, existe localmente un único círculo unitario $c(t)$ parametrizado por arco y satisfaciendo las condiciones iniciales:

$$c(0) = p, \qquad c'(0) = u, \qquad (\nabla_{c'} c')(0) = v.$$

Definición 3.5. Una variedad de Riemann (M, g) se dice que es un $\mathfrak{O}$-*espacio* si para cada círculo $c(t)$ el operador de curvatura $k_c = R(c', \nabla_{c'} c')$ tiene autovalores constantes, contados con multiplicidad, a lo largo de $c(t)$.

Los $\mathfrak{O}$-espacios sólo están clasificados en el caso de dimensión dos y tres. Se sabe que una superficie es un $\mathfrak{O}$-espacio si y sólo si es de curvatura constante. En dimensión tres, tenemos el siguiente resultado que está probado en [18]:

Teorema 3.6. *Sea* (M, g) *un* $\mathfrak{O}$*-espacio de dimensión tres. Entonces* (M, g) *es localmente isométrico en casi todo punto, i.e., en un subconjunto abierto y denso de* M*, a uno de los siguientes espacios:*

a) Un espacio de curvatura seccional constante,

b) Un producto Riemanniano de la forma $(M \times \mathbb{R}, g \oplus dt^2)$*, donde* (M, g) *es un espacio Riemanniano de dimensión dos y curvatura seccional constante.*

c) Una variedad de Riemann con curvaturas principales de Ricci $r_1 = r_2 = 0, r_3 \neq 0$*.*

Recíprocamente, cualquiera de las variedades de Riemann anteriores es un $\mathfrak{O}$-espacio.

Nos centraremos a partir de ahora en las variedades IP, dando la clasificación de las variedades IP en dimensión tres y cuatro, puesto que en dimensión dos el problema es obvio. El siguiente teorema nos caracteriza las variedades IP en dimensión tres.

Teorema 3.7. [17] *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión tres. Entonces M es una variedad puntualmente IP (respectivamente, globalmente IP) si y sólo si o bien dos de las curvaturas principales de Ricci son cero y la tercera es una función diferenciable (respectivamente, constante), o bien es un espacio de curvatura seccional constante.*

El siguiente ejemplo ([13, 17]) será clave para dar la clasificación en dimensión cuatro. Para ello, primero introducimos los productos warped. Consideramos (B, g_B) y (F, g_F) dos variedades Riemannianas y f una función diferenciable positiva definida en B. Entonces, definimos el *producto warped* $B \times_f F$, como la variedad producto $M = B \times F$ equipada con la métrica

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F).$$

Ejemplo 3.8. Sea $n \geq 3$ y sea $B \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto no necesariamente acotado. Sea N un espacio de dimensión $n-1$ con curvatura seccional constante K. Sea f una función diferenciable en B definida por $f := \sqrt{Kx^2 + Cx + D}$ donde C y D son constantes reales satisfaciendo que $C^2 - 4KD \neq 0$. Entonces definimos el producto warped $M := B \times_f N$. Este es un ejemplo de una variedad puntualmente IP localmente conformemente llana de dimensión n. Los autovalores del operador de curvatura antisimétrico son el cero, con multiplicidad $n-2$, y $\pm(C^2 - 4KD)i/4(Kx^2 + Cx + D)^2$. Esta variedad tiene otra característica importante: si la curvatura seccional de N es distinta de cero entonces M no es Einstein y por tanto no es Osserman.

Estamos ya en condiciones de dar el teorema más importante de esta sección, demostrado en [17]:

Teorema 3.9. [17] *Sea (M, g) una variedad de Riemann de dimensión cuatro. Entonces M es puntualmente IP si y sólo si es localmente isométrica en casi todo punto (i.e. en un abierto denso) o a un espacio de curvatura seccional constante o a un producto warped de la forma del Ejemplo 3.8.*

Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.10. [17] *Toda variedad de Riemann de dimensión cuatro conexa y globalmente IP es de curvatura seccional constante.*

Las variedades de Riemann IP han sido clasificadas en [13] en dimensión superior, mostrando la validez del Teorema 3.9 en la situación general. Un aspecto relevante de dicha clasificación es que toda variedad de Riemann puntualmente IP es localmente conformemente llana.

3.2. Variedades IP en Geometría de Lorentz

El estudio de las variedades IP en geometría de Lorentz está completamente abierto. Salvo algún resultado parcial en dimensión cuatro [25], tan solo existen respuestas satisfactorias en dimensión tres, donde se presentan notables diferencias con el caso Riemanniano [10].

Desde un punto de vista puramente algebraico los tensores curvatura algebraicos IP en signatura $(-++)$ están completamente caracterizados.

Teorema 3.11. [10] *Un tensor curvatura algebraico A en signatura $(-++)$ es IP si y sólo si su operador de Ricci ρ_A satisface una de las siguientes condiciones:*

(i) ρ_A es un múltiplo de la identidad.

(ii) ρ_A es de rango uno, i.e., diagonalizable con dos autovalores nulos.

(iii) ρ_A es nilpotente en dos pasos i.e., $\rho_A^2 = 0, \rho_A \neq 0$.

Sin embargo, la resolución diferenciable del problema es compleja y tan sólo se tienen resultados satisfactorios bajo condiciones adicionales como son el ser homogéneo o localmente simétrico:

Teorema 3.12. [10] *Una variedad de Lorentz 3-dimensional (M, g) localmente simétrica es IP si y sólo si es un espacio de curvatura seccional constante o la métrica es de Walker*

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & f(t,x,y) \end{pmatrix}$$

donde $f(t,x,y) = -t\frac{Q'(y)}{Q(y)} + x^2 Q(y) + xS(y) + \xi(y)$ para funciones diferenciables arbitrarias $Q \neq 0$, S, ξ dependiendo de la variable y.

Observación 3.13. *Existen ejemplos de variedades IP de Lorentz que no son localmente conformemente llanas.*

En dimensión cuatro, uno de estos resultados a los que nos referimos nos da una restricción en cuanto al rango. De hecho se prueba en [25] que *no existe ningún tensor curvatura algebraico IP de modo que su operador de curvatura antisimétrico tenga rango 4 y autovalores constantes en las Grassmannianas de planos no degenerados*

Puesto que el rango del operador de curvatura antisimétrico es par, de lo anterior se deduce que el operador de curvatura antisimétrico de una variedad Lorentziana tiene necesariamente el cero como autovalor.

3.3. Variedades IP en signatura $(--++)$

En este contexto no existe ninguna clasificación de las variedades IP en dimensión cuatro. A lo largo de esta sección mostraremos una familia de métricas tipo Walker que siendo IP no son ni variedades Einstein, ni autoduales, ni anti-autoduales lo que viene a mostrar la gran casuística que se da en este tipo de variedades motivando así la clasificación de las variedades Osserman-IP que abordaremos en el siguiente capítulo. Estas familias dejan entrever la diferencia que existe entre el caso Riemanniano y el caso semi-Riemanniano ya que, a diferencia de aquel, en este contexto existen métricas IP que no son ni Einstein ni conformemente llanas.

Antes es conveniente ver un lema previo que nos ayudará a la hora de construir los ejemplos a los que nos referíamos. Además será uno de los resultados que usaremos en el siguiente capítulo para estudiar las métricas Osserman-IP.

Lema 3.14. *Sea $(V, \langle\, , \,\rangle)$ un espacio vectorial de dimensión cuatro con un producto interior de signatura neutra y A un tensor de curvatura algebraico. Entonces, A es IP si y sólo si* $\det A(\pi)$ *y* $\mathrm{Tr}(A(\pi)^2)$ *no dependen del plano π orientado espacial (respectivamente, mixto o temporal).*

Demostración. Tomando un plano orientado y no degenerado π se comprueba fácilmente que $A(\pi)$ se puede expresar con respecto a una base ortonormal de la siguiente manera:

$$A(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}(\pi) & a_{13}(\pi) & a_{14}(\pi) \\ -a_{12}(\pi) & 0 & a_{23}(\pi) & a_{24}(\pi) \\ a_{13}(\pi) & a_{23}(\pi) & 0 & a_{34}(\pi) \\ a_{14}(\pi) & a_{24}(\pi) & -a_{34}(\pi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Con un simple cálculo obtenemos que

$$\begin{aligned} &\det A(\pi) = (a_{12}(\pi)a_{34}(\pi) + a_{13}(\pi)a_{24}(\pi) - a_{14}(\pi)a_{23}(\pi))^2\,, \\ &\mathrm{Tr}(A(\pi)^2) = 2\left(-a_{12}(\pi)^2 + a_{13}(\pi)^2 + a_{14}(\pi)^2 + a_{23}(\pi)^2 + a_{24}(\pi)^2 - a_{34}(\pi)^2\right) \end{aligned}$$

y por tanto el polinomio característico $p_\lambda(A(\pi))$ de $A(\pi)$ viene dado por

$$p_\lambda(A(\pi)) = \lambda^4 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A(\pi)^2)\ \lambda^2 + \det A(\pi), \tag{3.1}$$

de donde se obtiene el resultado. □

Sea $M = \mathbb{R}^4$ con las coordenadas usuales (x, y, z, t). Consideramos a y b funciones arbitrarias de variable real que dependen de las coordenadas $(x, \dots, t)$ y definimos una métrica g como

$$g = dx \otimes dz + dz \otimes dx + dy \otimes dt + dt \otimes dy + a\, dz \otimes dz + b\, dt \otimes dt. \tag{3.2}$$

Esta métrica es un caso particular de métrica de Walker y será la que usemos para obtener los ejemplos a los que hacíamos antes referencia. Denotaremos por h_i la derivada parcial $\frac{\partial h}{\partial i}$, $i = x, \ldots, t$, para cualquier función $h(x, y, z, t)$. Usando esta notación el tensor de curvatura de la métrica (3.2) viene dado por

$$
\begin{aligned}
R_{zxx} &= \tfrac{1}{2} a_{xx} \partial_x, \qquad R_{zxy} = \tfrac{1}{2} a_{xy} \partial_x, \qquad R_{zxt} = \tfrac{1}{4}\{2a_{xt} - a_y b_x\}\partial_x, \\
R_{zxz} &= \tfrac{1}{2} a a_{xx} \partial_x + \tfrac{1}{4}\{a_y b_x - 2a_{xt} + 2b a_{xy}\}\partial_y - \tfrac{1}{2} a_{xx} \partial_z - \tfrac{1}{2} a_{xy} \partial_t, \\
R_{txx} &= \tfrac{1}{2} b_{xx} \partial_y, \qquad R_{txy} = \tfrac{1}{2} b_{xy} \partial_y, \qquad R_{txz} = \tfrac{1}{4}\{2b_{xz} - a_x b_x\}\partial_y, \\
R_{txt} &= \tfrac{1}{4}\{2a b_{xx} - 2b_{xz} + a_x b_x\}\partial_x + \tfrac{1}{2} b b_{xy} \partial_y - \tfrac{1}{2} b_{xx} \partial_z - \tfrac{1}{2} b_{xy} \partial_t, \\
R_{zyx} &= \tfrac{1}{2} a_{xy} \partial_x, \qquad R_{zyy} = \tfrac{1}{2} a_{yy} \partial_x, \qquad R_{zyt} = \tfrac{1}{4}\{2a_{yt} - a_y b_y\}\partial_x, \\
R_{zyz} &= \tfrac{1}{2} a a_{xy} \partial_x + \tfrac{1}{4}\{a_y b_y - 2a_{yt} + 2b a_{yy}\}\partial_y - \tfrac{1}{2} a_{xy} \partial_z - \tfrac{1}{2} a_{yy} \partial_t, \\
R_{tyx} &= \tfrac{1}{2} b_{xy} \partial_y, \qquad R_{tyy} = \tfrac{1}{2} b_{yy} \partial_y, \qquad R_{tyz} = \tfrac{1}{4}\{2b_{yz} - a_y b_x\}\partial_y, \\
R_{tyt} &= \tfrac{1}{4}\{2a b_{xy} - 2b_{yz} + a_y b_x\}\partial_x + \tfrac{1}{2} b b_{yy} \partial_y - \tfrac{1}{2} b_{xy} \partial_z - \tfrac{1}{2} b_{yy} \partial_t, \\
R_{tzx} &= \tfrac{1}{4}\{a_y b_x - 2a_{xt}\}\partial_x + \tfrac{1}{4}\{2b_{xz} - a_x b_x\}\partial_y, \\
R_{tzy} &= \tfrac{1}{4}\{a_y b_y - 2a_{yt}\}\partial_x + \tfrac{1}{4}\{2b_{yz} - a_y b_x\}\partial_y, \\
R_{tzz} &= \tfrac{1}{4} a\{a_y b_x - 2a_{xt}\}\partial_x + \tfrac{1}{4}\{a_t b_y + 2a_{tt} + 2b_{zz} - b_t a_y - 2b a_{yt} \\
&\qquad + b_z a_x - a_z b_x - a a_x b_x\}\partial_y + \tfrac{1}{4}\{2a_{xt} - a_y b_x\}\partial_z + \tfrac{1}{4}\{2a_{yt} - a_y b_y\}\partial_t, \\
R_{tzt} &= \tfrac{1}{4}\{2a b_{xz} + a_z b_x - 2a_{tt} - 2b_{zz} + b_t a_y - a_t b_y + b a_y b_y - b_z a_x\}\partial_x \\
&\qquad + \tfrac{1}{4} b\{2b_{yz} - a_y b_x\}\partial_y + \tfrac{1}{4}\{a_x b_x - 2b_{xz}\}\partial_z + \tfrac{1}{4}\{a_y b_x - 2b_{yz}\}\partial_t,
\end{aligned}
$$

donde $R_{ijk} = R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$, $i, j, k \in \{x, \ldots, t\}$, con $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\}$ los vectores coordenados.

Una vez que tenemos claro el contexto en el que vamos a trabajar, necesitamos imponer restricciones a las funciones a y b para que la métrica (3.2) sea IP. Lo primero que tenemos que ver es que forma tiene el operador de curvatura antisimétrico para una métrica del tipo (3.2). Usando las expresiones del tensor de curvatura y mediante un cálculo directo tenemos que el operador de curvatura antisimétrico $R(\pi)$ asociado a un plano no degenerado π se puede escribir con respecto a la base de vectores coordenados como

$$
R(\pi) = \begin{pmatrix} F(\pi) & G(\pi) \\ 0 & -{}^t F(\pi) \end{pmatrix},
$$

para ciertas matrices 2×2 $F(\pi)$ y $G(\pi)$. Se obtiene entonces que $\det R(\pi) = (\det F(\pi))^2$, mientras que por otro lado se tiene que $\mathrm{Tr}(R(\pi)^2) = 2\mathrm{Tr}(F(\pi)^2)$, por lo que si usamos el Lema 3.1 se tiene que la métrica (3.2) es IP si y sólo si tanto el determinante $\det F(\pi)$ como la traza $\mathrm{Tr}(F(\pi)^2)$ no dependen del plano orientado no degenerado espacial π elegido (respectivamente temporal o mixto). A partir de ahora intentaremos imponer las restricciones necesarias sobre la matriz $F(\pi)$ para que la métrica (3.2) sea IP. En lo que sigue escribimos

$$F(\pi)=\begin{pmatrix} f_{11}(\pi) & f_{12}(\pi) \\ f_{21}(\pi) & f_{22}(\pi) \end{pmatrix}.$$

Para comenzar a imponer restricciones sobre las funciones a y b analizaremos algunos casos particulares de planos mixtos no degenerados. De un modo similar se podría hacer este estudio usando planos temporales o espaciales. Comenzaremos tomando el plano $\pi_1 = \langle\{\partial_x+\lambda\partial_y,\partial_z\}\rangle$. Este plano tiene la siguiente matriz $F(\pi_1)$ asociada

$$F(\pi_1)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\lambda a_{xy}+a_{xx}) & -\frac{1}{2}(\lambda a_{yy}+a_{xy}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y la matriz de $F(\pi_1)^2$ viene dada por

$$F(\pi_1)^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\lambda a_{xy}+a_{xx}\right)^2 & \frac{1}{4}\left(\lambda a_{yy}+a_{xy}\right)\left(\lambda a_{xy}+a_{xx}\right) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$\det F(\pi_1)=0, \qquad \operatorname{Tr}(F(\pi_1)^2)=\tfrac{1}{4}(\lambda a_{xy}+a_{xx})^2,$$

y debido a que la traza de $F(\pi_1)^2$ ha de ser independiente del plano mixto elegido, se tiene que $a_{xy}=0$ y por tanto la función a es de la forma $a(x,y,z,t)=\bar{A}(x,z,t)+A(y,z,t)$. Entonces, $\operatorname{Tr}(F(\pi_1)^2)=\frac{1}{4}\bar{A}_{xx}^2$, por lo que $\bar{A}_{xx}$ debe ser una función constante κ_1, y la función a debe ser necesariamente de la forma

$$a(x,y,z,t)=x^2\tfrac{\kappa_1}{2}+xS(z,t)+A(y,z,t). \tag{3.3}$$

Realizando el mismo argumento tenemos unas restricciones parecidas para la función b tomando como plano mixto $\pi_2=\langle\{\lambda\partial_x+\partial_y,\partial_t\}\rangle$. En este caso la función b queda de la siguiente forma

$$b(x,y,z,t)=y^2\tfrac{\kappa_2}{2}+yV(z,t)+B(x,z,t), \tag{3.4}$$

donde $\operatorname{Tr}(F(\pi_2)^2)=\frac{1}{4}\kappa_2^2$.

Para continuar buscando las restricciones necesarias para las funciones a y b tomaremos el plano $\pi_3=\langle\{\partial_x-\partial_y,\partial_y-\partial_z+\partial_t\}\rangle$ con lo que la matriz asociada $F(\pi_3)$ viene dada por

$$F(\pi_3)=\begin{pmatrix} \frac{\kappa_1}{4} & -\frac{1}{4}A_{yy}(y,z,t) \\ -\frac{1}{4}B_{xx}(x,z,t) & \frac{\kappa_2}{4} \end{pmatrix}$$

y por tanto $\det F(\pi_3)=\frac{1}{16}(\kappa_1\kappa_2-A_{yy}B_{xx})$. Ahora bien, puesto que $\det F(\pi_3)$ tiene que anularse, necesariamente se debe cumplir que

$$A_{yy}(y,z,t)B_{xx}(x,z,t)=\kappa_1\kappa_2. \tag{3.5}$$

Se verá a continuación que $\kappa_1\kappa_2 = 0$. Para probar esto lo haremos mediante una demostración por reducción al absurdo. Supongamos entonces que $\kappa_1\kappa_2 \neq 0$. Por lo tanto, teniendo en cuenta (3.5) se tiene que $A_{yyy} = B_{xxx} = 0$ y así las funciones A y B se pueden escribir de la forma

$$\begin{aligned} A(y,z,t) &= y^2P(z,t) + yT(z,t) + \xi(z,t), \\ B(x,z,t) &= x^2Q(z,t) + xU(z,t) + \eta(z,t), \end{aligned} \tag{3.6}$$

con $PQ \neq 0$, puesto que si $P = 0$ ó $Q = 0$ entonces $\kappa_1\kappa_2 = 0$ y supusimos que no. Si tenemos ahora en cuenta la información que nos proporcionan las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.6), y después de realizar algunos cálculos, obtenemos que para el plano $\pi_4 = \langle\{\frac{1-a}{2}\partial_x + \partial_z, -\frac{1+b}{2}\partial_y + \partial_t\}\rangle$ la matriz asociada $F(\pi_4)$ tiene como componentes

$$\begin{aligned} f_{11}(\pi_4) &= -\tfrac{1}{4}\{(2yP+T)(2xQ+U) - 2S_t\}, \\ f_{12}(\pi_4) &= -\tfrac{1}{4}\{T(y\kappa_2 + V) - 2(2yP_t + T_t) \\ &\qquad + P(3y^2\kappa_2 + 2x(U+xQ) + 4yV + 2\eta + 2)\}, \\ f_{21}(\pi_4) &= \tfrac{1}{4}\{U(x\kappa_1 + S) - 2(2xQ_z + U_z) \\ &\qquad + Q(3x^2\kappa_1 + 2y(T+yP) + 4xS + 2\xi - 2)\}, \\ f_{22}(\pi_4) &= \tfrac{1}{4}\{(2yP+T)(2xQ+U) - 2V_z\}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

con lo cual se tiene que $\partial_x^4(\mathrm{Tr}(F(\pi_4)^2)) = -18PQ^2\kappa_1$, por lo que para que (3.2) sea IP necesariamente $PQ\kappa_1 = 0$. Con lo que encontramos la contradicción que buscábamos puesto que $PQ \neq 0$ y $\kappa_1\kappa_2 \neq 0$.

Además obtuvimos que si la métrica (3.2) es IP, necesariamente ha de ser nilpotente IP puesto que el polinomio característico es de la forma $p_\lambda(A(\pi)) = \lambda^4$, pues tanto la traza como el determinante del operador de curvatura antisimétrico son cero. Por otro lado las funciones a y b han de ser de la forma,

$$\begin{aligned} a(x,y,z,t) &= xS(z,t) + A(y,z,t), \\ b(x,y,z,t) &= yV(z,t) + B(x,z,t), \end{aligned} \tag{3.8}$$

con

$$A_{yy}(y,z,t)B_{xx}(x,z,t) = 0. \tag{3.9}$$

Observación 3.15. Para conseguir los ejemplos de variedades IP que perseguimos, estudiaremos soluciones particulares de (3.8)–(3.9). En concreto, tomamos como expresiones de las funciones a y b las siguientes:

$$\begin{aligned} a(x,y,z,t) &= y^2P(z,t) + xS(z,t) + yT(z,t) + \xi(z,t), \\ b(x,y,z,t) &= x^2Q(z,t) + xU(z,t) + yV(z,t) + \eta(z,t), \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde $P \neq 0$ y $Q = 0$ (se haría análogamente para el caso en que $P = 0$ y $Q \neq 0$). Algo importante a destacar es que estas métricas non son nunca autoduales como se puede ver en [9]. Por otro lado, tomamos un plano no degenerado arbitrario $\pi = \langle\{u, v\}\rangle$, donde $\{u = u_1\partial_x + u_2\partial_y + u_3\partial_z + u_4\partial_t,\ v = v_1\partial_x + v_2\partial_y + v_3\partial_z + v_4\partial_t\}$ es una base ortonormal. La matriz asociada $F(\pi)$ a esta base tiene por componentes

$$\begin{aligned} f_{11}(\pi) &= \tfrac{1}{4}(u_4v_3 - u_3v_4)\{(2yP + T)U - 2S_t\}, \\ f_{12}(\pi) &= \tfrac{1}{4}\{(u_4v_3 - u_3v_4)(2yPV - 2(2yP_t + T_t) + TV) \\ &\qquad + 4P(u_3v_2 - u_2v_3)\}, \\ f_{21}(\pi) &= \tfrac{1}{4}(u_4v_3 - u_3v_4)(2U_z - SU), \\ f_{22}(\pi) &= \tfrac{1}{4}(u_4v_3 - u_3v_4)\{-(2yP + T)U + 2V_z\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Mediante largos cálculos pero directos se tiene que $\partial_y^2(\mathrm{Tr}(F(\pi)^2)) = (u_4v_3 - u_3v_4)^2P^2U^2$. Y puesto que por hipótesis tenemos que $P \neq 0$ se tiene que $U = 0$. Una vez impuesta esta condición, podemos calcular de manera directa que

$$\det F(\pi) = -\tfrac{1}{4}(u_4v_3 - u_3v_4)^2S_tV_z, \quad \mathrm{Tr}(F(\pi)^2) = \tfrac{1}{4}(u_4v_3 - u_3v_4)^2(S_t^2 + V_z^2),$$

por lo que la condición de ser IP es equivalente a que $S_t = V_z = 0$.

Entonces, si suponemos que $Q = 0$, demostramos que (3.10) es IP si y sólo si las funciones a y b son de la forma

$$\begin{aligned} a(x, y, z, t) &= y^2P(z, t) + xS(z) + yT(z, t) + \xi(z, t), \\ b(x, y, z, t) &= yV(t) + \eta(z, t), \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde P es una función no nula diferenciable y S, T, V, ξ y η son funciones arbitrarias diferenciables. Además, un cálculo directo nos muestra que la métrica (3.12) es Einstein si y sólo si se dan las siguientes igualdades: $\eta(z, t) = \frac{2T_t - TV}{2P}$ y $P_t = PV$.
Por lo tanto una métrica de la forma (3.12) nos proporciona una familia de métricas IP que no son ni Einstein ni son localmente conformemente llanas; además tampoco son en ningún caso autoduales.

Observación 3.16. Para obtener ejemplos de métricas que no son Einstein ni autoduales ni anti-autoduales pero si IP usaremos un resultado dado en [9] por el cual si particularizamos las métricas dadas (3.12) del siguiente modo

$$\begin{aligned} a(x, y, z, t) &= y^2P(z) + xS(z) + yT(z, t) + \xi(z, t), \\ b(x, y, z, t) &= y\kappa + \eta(z, t), \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde $P \neq 0$ es una función diferenciable, $\kappa \neq 0$ es una constante real y S, T, ξ y η son funciones diferenciables arbitrarias, obtenemos la familia de ejemplos que queríamos, es decir, son ejemplos de métricas que no son nunca ni Einstein ni autoduales ni anti-autoduales, pero que si son IP.

Capítulo 4

Variedades Osserman e IP

En el capítulo anterior vimos la dificultad que entraña intentar dar una clasificación de las variedades IP en dimensión cuatro tanto a nivel algebraico como diferenciable. Es por eso que nos proponemos tratar de entender como son las variedades que son Osserman e IP a la vez. En el caso Riemanniano este estudio carece de sentido por estar totalmente clasificadas tanto las variedades Osserman como las IP. El estudio en el caso Lorentziano tampoco tiene interés puesto que sabemos que una variedad de Lorentz en dimensión cuatro si es Osserman es de curvatura seccional constante. Con lo cual el primer caso no trivial de variedades Osserman-IP es el caso de signatura $(- - ++)$. El propósito de este capítulo es el de realizar un estudio a nivel algebraico de las métricas que son Osserman e IP a un mismo tiempo, para a continuación ver cuales de estos casos se pueden realizar geométricamente. Recordaremos ahora en que contexto vamos a trabajar. Consideramos $(V, \langle\ ,\ \rangle, A)$ un espacio vectorial real de dimensión cuatro, dotado de un producto interior de signatura $(- - ++)$, y A un tensor de curvatura algebraico en V, i.e., $A \in \otimes^4(V^*)$ verificando las simetrías

$$A(x, y, z, v) = -A(y, x, z, v) = A(z, v, x, y),$$
$$A(x, y, z, v) + A(y, z, x, v) + A(z, x, y, v) = 0.$$

Consideraremos el operador de Jacobi, $\mathcal{J}_A$ asociado a A como el operador autoadjunto en V caracterizado por $\langle \mathcal{J}_A(x)y, z\rangle = A(x, y, x, z)$. Sabemos además que $(V, \langle\ ,\ \rangle, A)$ es *Osserman* si y sólo si su operador de Jacobi es de alguno de los cuatro tipos vistos en el Teorema 2.14. También tendremos que tener en cuenta el operador de curvatura antisimétrico asociado a un plano π no degenerado con base $\{x, y\}$. Partiendo, entonces, de la caracterización de variedades Osserman, dada en [3] y en [12], trataremos de dar la clasificación de las variedades Osserman e IP, tanto a nivel algebraico como a nivel diferenciable y para ello iremos analizando cada uno de los cuatro casos de tensores de curvatura algebraicos Osserman.

4.1. Clasificación a nivel algebraico

4.1.1. Operadores de Jacobi diagonalizables

A lo largo de esta sección x denotará un vector unitario temporal, con operador de Jacobi asociado

$$\mathcal{J}_A(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

y asumimos que el autoespacio $Ker(\mathcal{J}_A(x) - \alpha Id)$ es temporal. Veremos a continuación el siguiente resultado que caracteriza los tensores de curvatura algebraicos que son Osserman tipo I e IP.

Teorema 4.1. *Sea $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ un espacio vectorial 4-dimensional con un producto interior de signatura neutra, y sea A un tensor de curvatura algebraico. Entonces, A es Osserman-IP con operador de Jacobi diagonalizable si y sólo si se da alguna de las siguientes condiciones:*

(i) $A = \kappa A^0$ *para alguna constante κ, i.e., la A-curvatura seccional es constante.*

(ii) Existe una estructura compleja ortogonal J en $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ tal que $A = \kappa(A^0 - \frac{1}{2}A^J)$, para alguna constante $\kappa \neq 0$.

(iii) Existe una estructura paracompleja adaptada P en $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ tal que $A = \kappa(A^0 + \frac{1}{2}A^P)$, para alguna constante $\kappa \neq 0$.

Demostración. Para probar este resultado distinguiremos algunos casos según el número de autovalores del operador de Jacobi distintos.

Todos los autovalores son iguales.
Si los tres autovalores son iguales ($\alpha = \beta = \gamma$), entonces $A = \kappa A^0$ para alguna constante κ. Además, para un plano orientado no degenerado temporal π, $A(\pi)$ tiene autovalores constantes $\{0, 0, \pm\kappa\, i\}$, por lo que se tiene que A es IP, con lo que probamos el apartado (i).

Dos autovalores distintos.
Empezaremos con el caso en que $\beta = \gamma$. Entonces el autoespacio distinguido $Ker(\mathcal{J}_A(x) - \alpha Id)$ tiene la misma causalidad que x, por lo que se define una estructura compleja J que permite expresar el tensor curvatura algebraico A como

$$A = \kappa_1 A^0 + \kappa_2 A^J, \quad \kappa_2 \neq 0. \tag{4.1}$$

Veremos como definir la estructura compleja J. Para ello es suficiente fijar $\{x, x_\alpha, x_\beta, \bar{x}_\beta\}$ una base ortonormal de V, donde $x_\nu, \bar{x}_\nu \in Ker(\mathcal{J}_A(x) - \nu Id)$, $\nu = \alpha, \beta$, y consideramos la estructura compleja definida como $Jx = x_\alpha$, $Jx_\beta = \bar{x}_\beta$. Trataremos de analizar la condición IP para el tensor de curvatura algebraico A. Para ello consideramos un plano orientado mixto no degenerado π y tomamos una base ortonormal $\{x, y\}$ para dicho plano.

A partir de este momento consideramos la siguiente base ortonormal del espacio vectorial V $\{e_1 = x, e_2 = Jx, e_3, e_4 = Je_3\}$ de modo que $y = (\sinh\varphi_0)Jx + (\cosh\varphi_0)e_3$ para algún φ_0. Si tomamos la familia de planos orientados no degenerados mixtos $\pi_\varphi = \langle\{x, (\sinh\varphi)Jx + (\cosh\varphi)e_3\}\rangle$, un cálculo directo desde (4.1) nos muestra que $A(\pi_\varphi)$, cuando está expresado con respecto a la base ortonormal fijada es de la forma

$$\tag{4.2} \begin{pmatrix} 0 & (\kappa_1+3\kappa_2)\sinh\varphi & -\kappa_1\cosh\varphi & 0 \\ -(\kappa_1+3\kappa_2)\sinh\varphi & 0 & 0 & -\kappa_2\cosh\varphi \\ -\kappa_1\cosh\varphi & 0 & 0 & 2\kappa_2\sinh\varphi \\ 0 & -\kappa_2\cosh\varphi & -2\kappa_2\sinh\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\mathrm{Tr}(A(\pi_\varphi)^2) = 2\left(\kappa_1^2 + 3\kappa_1\kappa_2 + 7\kappa_2^2 - 3\kappa_2(\kappa_1+2\kappa_2)\cosh 2\varphi\right)$ y se sigue que $\partial_\varphi\left(\mathrm{Tr}(A(\pi_\varphi)^2)\right) = -12\kappa_2(\kappa_1+2\kappa_2)\sinh(2\varphi)$. Ahora bien, puesto que necesariamente debe anularse y $\kappa_2 \neq 0$, se puede concluir que $\kappa_1 = -2\kappa_2$. Finalmente, y teniendo en cuenta esta última condición, podemos calcular los autovalores del operador $A(\pi)$, obteniendo $\{\pm\kappa_2, \pm 2\kappa_2\}$. Puesto que el plano π es un plano arbitrario, acabamos de probar que A es IP cuando $A = -2\kappa_2(A^0 - \frac{1}{2}A^J)$, probando así el apartado (ii).

Una situación diferente ocurre cuando los autovalores que coinciden son α y β (o equivalentemente, α y γ) puesto que en este caso el autoespacio distinguido $Ker(\mathcal{J}_A(x) - \gamma Id)$ tiene causalidad opuesta a la de x. Entonces, existe una estructura paracompleja adaptada P de modo que el tensor de curvatura algebraico se puede expresar como

$$\tag{4.3} A = \kappa_1 A^0 + \kappa_2 A^P, \qquad \kappa_2 \neq 0.$$

Para definir P, fijamos $\{x, x_\alpha, \bar{x}_\alpha, x_\gamma\}$ una base ortonormal de V, siendo $x_\nu, \bar{x}_\nu \in \mathrm{Ker}(\mathcal{J}_A(x) - \nu Id)$, $\nu = \alpha, \gamma$, y consideramos la estructura paracompleja definida por $Px = x_\gamma$, $Px_\alpha = \bar{x}_\alpha$. Como en el caso anterior analizaremos la condición de ser IP para A tomando un plano arbitrario orientado no degenerado temporal π y una base ortonormal $\{x, y\}$ para este plano. Entonces fijamos la base ortonormal $\{e_1 = x, e_2, e_3 = Pe_2, e_4 = Px\}$ para V de modo que $y = (\cosh\varphi_0)e_2 + (\sinh\varphi_0)Px$, para algún φ_0, y procedemos como en el caso anterior. De nuevo, un cálculo directo desde (4.3) nos lleva a la siguiente expresión para $A(\pi_\varphi)$, donde π_φ es el plano temporal $\langle\{x, (\cosh\varphi)e_2 + (\sinh\varphi)Px\}\rangle$,

$$\tag{4.4} \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1\cosh\varphi & 0 & -(\kappa_1-3\kappa_2)\sinh\varphi \\ -\kappa_1\cosh\varphi & 0 & 2\kappa_2\sinh\varphi & 0 \\ 0 & 2\kappa_2\sinh\varphi & 0 & \kappa_2\cosh\varphi \\ -(\kappa_1-3\kappa_2)\sinh\varphi & 0 & -\kappa_2\cosh\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces se sigue que $\mathrm{Tr}(A(\pi_\varphi)^2) = -2\left(\kappa_1^2 - 3\kappa_1\kappa_2 + 7\kappa_2^2 + 3\kappa_2(\kappa_1-2\kappa_2)\cosh 2\varphi\right)$ y por lo tanto $\partial_\varphi\left(\mathrm{Tr}(A(\pi_\varphi)^2)\right) = -12\kappa_2(\kappa_1-2\kappa_2)\sinh(2\varphi)$ y puesto que $\kappa_2 \neq 0$ se tiene que $\kappa_1 = 2\kappa_2$. Además bajo esta condición los autovalores de $A(\pi)$ son de la forma $\{\pm\kappa_2\, i, \pm 2\kappa_2\, i\}$ y puesto que π es un plano arbitrario, se tiene que A es IP cuando $A = 2\kappa_2(A^0 + \frac{1}{2}A^P)$, probando así el apartado (iii).

Tres autovalores distintos.
Para este caso e igual que hicimos anteriormente, fijamos la base ortonormal $\{x, x_\alpha, x_\beta, x_\gamma\}$ de V, donde $x_\nu \in Ker(\mathcal{J}_A(x) - \nu Id)$, $\nu = \alpha, \beta, \gamma$, y definimos una estructura hiper-paracompleja adaptada $\{J, P, Q\}$ del modo $Jx = x_\alpha$, $Px = x_\beta$, $Qx = x_\gamma$ y usando las relaciones paracuaterniónicas $J^2 = -Id$, $P^2 = Id$, $Q^2 = Id$ y $JP = -PJ = Q$. Entonces el tensor de curvatura algebraico A satisface

$$A = \kappa_1 A^J - \kappa_2 A^P - \kappa_3 A^Q, \quad \kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \kappa_3 \neq \kappa_1. \tag{4.5}$$

A continuación veremos que A no puede ser en ningún caso IP. Para ello fijamos la base ortonormal $\{e_1 = x, e_2 = Jx, e_3 = Px, e_4 = Qx\}$ y consideramos la familia de planos mixtos de la forma $\pi = \langle\{x, \lambda_1 Jx + \lambda_2 Px + \lambda_3 Qx\}\rangle$, con $-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Un cálculo directo desde (4.5) nos muestra que $A(\pi)$, expresada con respecto a la base ortonormal $\{e_1, \dots, e_4\}$, tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 3\kappa_1\lambda_1 & 3\kappa_2\lambda_2 & 3\kappa_3\lambda_3 \\ -3\kappa_1\lambda_1 & 0 & (\kappa_1 - \kappa_2 + 2\kappa_3)\lambda_3 & (-\kappa_1 - 2\kappa_2 + \kappa_3)\lambda_2 \\ 3\kappa_2\lambda_2 & (\kappa_1 - \kappa_2 + 2\kappa_3)\lambda_3 & 0 & (2\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)\lambda_1 \\ 3\kappa_3\lambda_3 & (-\kappa_1 - 2\kappa_2 + \kappa_3)\lambda_2 & -(2\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, usando que $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 1$ se prueba que

$$\partial^4_{\lambda_2}(\det A(\pi)) = 216(\kappa_1 - \kappa_2)^2(2\kappa_1 + 2\kappa_2 - \kappa_3)^2,$$
$$\partial^4_{\lambda_3}(\det A(\pi)) = 216(\kappa_1 - \kappa_3)^2(2\kappa_1 - \kappa_2 + 2\kappa_3)^2.$$

Ahora bien, estas expresiones no se pueden anular al mismo tiempo, puesto que $\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \kappa_3 \neq \kappa_1$, y por lo tanto A no es IP. □

Observación 4.2. Un cálculo directo nos muestra que en cualquiera de los tres casos anteriores, la forma canónica de Jordan del operador de curvatura antisimétrico asociado a un plano orientado no degenerado espacial (respectivamente, temporal o mixto) es constante. Por lo tanto los tensores de curvatura algebraicos dados en el Teorema 4.1 son todos Jordan Osserman-IP. Además para un tensor de curvatura algebraico de curvatura A-seccional no nula el rango del operador de curvatura antisimétrico es 2, mientras que en los otros dos casos el operador de curvatura antisimétrico tiene rango 4.

4.1.2. Operadores de Jacobi no diagonalizables

En esta sección haremos un estudio parecido al que hicimos en la anterior, pero ahora bajo la hipótesis de que los tensores de curvatura algebraicos de Osserman tengan asociados operadores de Jacobi no diagonalizables. El resultado principal de esta sección es el siguiente, en el que caracterizamos entre estos tensores aquellos que son IP.

Teorema 4.3. *Sea* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espacio vectorial* 4*-dimensional dotado de un producto interior de signatura neutra y sea* A *un tensor de curvatura algebraico. Entonces,* A *es Osserman-IP con operador de Jacobi no diagonalizable si y sólo si los operadores de Jacobi son nilpotentes en dos pasos.*

Demostración. Para probar este resultado analizaremos por separado los casos Ib, II y III que se corresponden con las diferentes posibilidades de operadores de Jacobi.

Tipo Ib. $(V, \langle\ ,\ \rangle, A)$ es Osserman con un autovalor complejo para los operadores de Jacobi si y sólo si existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ para V tal que las componentes no nulas de A vienen dadas por ([3], [12])

$$\begin{aligned} &A_{1212} = -A_{1313} = -A_{2424} = A_{3434} = \gamma, \\ &A_{1213} = A_{1224} = A_{1334} = A_{2434} = -\beta \neq 0, \\ &A_{1234} = -A_{1324} = -\tfrac{\alpha-\gamma}{3},\ A_{1414} = A_{2323} = -\alpha,\ A_{1423} = \tfrac{2(\alpha-\gamma)}{3}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Usando estas componentes, podemos ver que $A(\pi)$, para cualquier plano orientado no degenerado mixto $\pi = \langle\{e_1, \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3 + \lambda_3 e_4\}\rangle$, verificando que $-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, cuando lo expresamos con respecto a la base ortonormal que acabamos de fijar, tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma\lambda_1 - \beta\lambda_2 & -\beta\lambda_1 - \gamma\lambda_2 & -\alpha\lambda_3 \\ -\gamma\lambda_1 + \beta\lambda_2 & 0 & \frac{2(\alpha-\gamma)}{3}\lambda_3 & -\beta\lambda_1 + \frac{\alpha-\gamma}{3}\lambda_2 \\ -\beta\lambda_1 - \gamma\lambda_2 & \frac{2(\alpha-\gamma)}{3}\lambda_3 & 0 & \frac{\alpha-\gamma}{3}\lambda_1 + \beta\lambda_2 \\ -\alpha\lambda_3 & -\beta\lambda_1 + \frac{\alpha-\gamma}{3}\lambda_2 & -\frac{\alpha-\gamma}{3}\lambda_1 - \beta\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, usando que $\lambda_3^2 = 1 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2$ obtenemos que $\partial_{\lambda_1}\partial_{\lambda_2}\left(\mathrm{Tr}(A(\pi)^2)\right) = -\frac{8}{3}\beta(\alpha - 4\gamma)$ y por tanto, $\alpha = 4\gamma$, puesto que $\beta \neq 0$. Finalmente, y bajo esta última condición tenemos que $\partial_{\lambda_1}\partial_{\lambda_1}\left(\mathrm{Tr}(A(\pi)^2)\right) = 8(\beta^2 + 9\gamma^2) \neq 0$, lo que implica directamente que A no puede ser IP.

Tipo II. $(V, \langle\ ,\ \rangle, A)$ es Osserman con una raíz doble del polinomio mínimo de los operadores de Jacobi si y sólo si existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ para V donde las componentes no nulas de A vienen dadas por ([3], [12])

$$\begin{aligned} &A_{1212} = A_{3434} = \beta + \tfrac{1}{2},\ A_{1213} = A_{1224} = A_{1334} = A_{2434} = -\tfrac{1}{2}, \\ &A_{1234} = -\tfrac{\alpha-\beta}{3} + \tfrac{1}{2},\ A_{1313} = A_{2424} = -\beta + \tfrac{1}{2}, \\ &A_{1324} = \tfrac{\alpha-\beta}{3} + \tfrac{1}{2},\ A_{1414} = A_{2323} = -\alpha,\ A_{1423} = \tfrac{2(\alpha-\beta)}{3}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Si usamos (4.7) para la familia de planos orientados mixtos no degenerados $\pi = \langle\{e_1, \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3 + \lambda_3 e_4\}\rangle$, con $-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, calculamos $A(\pi)$, obteniendo que con respecto a la base ortonormal fijada puede escribirse como sigue:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{(1+2\beta)\lambda_1-\lambda_2}{2} & \frac{-\lambda_1+(1-2\beta)\lambda_2}{2} & -\alpha\lambda_3 \\ \frac{-(1+2\beta)\lambda_1+\lambda_2}{2} & 0 & \frac{2(\alpha-\beta)}{3}\lambda_3 & \frac{-3\lambda_1+(3+2\alpha-2\beta)\lambda_2}{6} \\ \frac{-\lambda_1+(1-2\beta)\lambda_2}{2} & \frac{2(\alpha-\beta)}{3}\lambda_3 & 0 & \frac{(-3+2\alpha-2\beta)\lambda_1+3\lambda_2}{6} \\ -\alpha\lambda_3 & \frac{-3\lambda_1+(3+2\alpha-2\beta)\lambda_2}{6} & \frac{(3-2\alpha+2\beta)\lambda_1-3\lambda_2}{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, usando que $\lambda_3^2 = 1 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2$ obtenemos que $\partial_{\lambda_1}\partial_{\lambda_2}\left(\mathrm{Tr}(A(\pi)^2)\right) = -\frac{4}{3}(\alpha - 4\beta)$ y por tanto $\alpha = 4\beta$. Si tenemos en cuenta esta última condición podemos ver que $\partial_{\lambda_1}\partial_{\lambda_1}\left(\mathrm{Tr}(A(\pi)^2)\right) = 72\beta^2$, concluyendo que A necesariamente ha de ser Osserman con operador de Jacobi nilpotente, i.e., $\alpha = \beta = 0$. Finalmente, en el caso de que el operador de Jacobi sea nilpotente, y dado un plano orientado no degenerado π, si $\{u, v\}$ es una base de π, con $u = \sum_i u_i e_i$ y $v = \sum_i v_i e_i$, entonces tenemos que

$$A(\pi) = \frac{\zeta(\pi)}{|\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2|^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

donde $\zeta(\pi) = \frac{1}{2}\left((u_1 + u_4)(v_2 - v_3) - (u_2 - u_3)(v_1 + v_4)\right)$. Como consecuencia se prueba inmediatamente que $A(\pi)$ también es nilpotente, i.e., todos sus autovalores son nulos.

Tipo III. $(V, \langle\, ,\, \rangle, A)$ es Osserman y tiene una raíz triple del polinomio mínimo de los operadores de Jacobi si y sólo si existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ para V tal que las componentes no nulas de A vienen dadas por ([3], [12])

$$\begin{aligned} &A_{1212} = -A_{1313} = -A_{1414} = -A_{2323} = -A_{2424} = A_{3434} = \alpha, \\ &A_{1214} = A_{1323} = A_{1434} = A_{2324} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ &A_{1223} = A_{1314} = A_{1424} = A_{2334} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para estas componentes, y considerando planos orientados mixtos no degenerados $\pi_1 = \langle\{e_1, e_3\}\rangle$ y $\pi_2 = \langle\{e_1, e_4\}\rangle$, obtenemos que

$$A(\pi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\alpha & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(\pi_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & -\alpha \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ -\alpha & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene que $\det A(\pi_1) = \frac{1}{4}$, mientras que $\det A(\pi_2) = 0$. Por tanto, A no es IP. $\square$

Observación 4.4. Cabe destacar que para un tensor de curvatura algebraico con operador de Jacobi nilpotente en dos pasos la condición de ser Jordan-IP espacial, temporal o mixta viene determinada por (4.8). Analizaremos cuando se anula $\zeta(\pi)$ en (4.8). Para hacer esto, consideramos un plano orientado no degenerado $\pi = \langle\{u, v\}\rangle$, donde $\{u, v\}$ es una base para π con $u = \sum_i u_i e_i$ y $v = \sum_i v_i e_i$. Claramente $\zeta(\pi)$ es cero si y sólo si una de las siguientes condiciones se da:

- $v_2 = v_3$ y $v_1 = -v_4$.
- $v_2 = v_3$, $v_1 \neq -v_4$ y $u_2 = u_3$.
- $v_2 \neq v_3$ y $u_1 = \frac{-u_4(v_2-v_3)+(u_2-u_3)(v_1+v_4)}{v_2-v_3}$.

Un cálculo sencillo nos muestra que en todos los casos se tiene que $\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2 < 0$, lo que implica que $\zeta(\pi)$ nunca se anula para planos orientados no degenerados espaciales o temporales. En el caso en que consideremos planos orientados no degenerados mixtos la situación es distinta. Si tomamos $\pi_1 = \langle\{e_1, e_3\}\rangle$ y $\pi_2 = \langle\{e_2, e_3\}\rangle$ tenemos que $\zeta(\pi_1) = -\frac{1}{2} \neq 0$, mientras que $\zeta(\pi_2) = 0$. Por lo tanto el rango del operador de curvatura antisimétrico asociado a planos orientados no degenerados mixtos varía de 0 a 2. Como consecuencia, podemos concluir que un tensor de curvatura algebraico con operador de Jacobi nilpotente en dos pasos es Jordan Osserman y Jordan IP espacial y temporal pero nunca Jordan IP mixto (ver también [16]).

4.2. Clasificación a nivel diferenciable

Una vez visto lo que pasa a nivel algebraico, estudiaremos como se traduce esto a nivel diferenciable, tanto puntualmente como globalmente, el siguiente resultado nos lo resume:

Teorema 4.5. *Una variedad semi-Riemanniana de dimensión cuatro (M, g) y signatura $(--++)$ es puntualmente Osserman-IP si y sólo si es un espacio de curvatura seccional constante o, en cada punto $p \in M$ los operadores de Jacobi se anulan o son nilpotentes en dos pasos. Además, (M, g) es Jordan Osserman-IP si y sólo si se da el primero de los casos.*

Demostración. Primero hay que observar que por el Teorema 4.3 los tensores de curvatura algebraicos correspondientes a los tipos Ib y III no son IP. Además el tensor de curvatura algebraico correspondiente al tipo II es IP si y sólo si los operadores de Jacobi son nilpotentes en dos pasos. Por otro lado, se tiene que las métricas que son Osserman con operadores de Jacobi diagonalizables se corresponden con los casos (i)-(iii) en el Teorema 4.1.

Los casos (ii)-(iii) donde el tensor de curvatura satisface la condición $R = \kappa(R^0 \mp \frac{1}{2}R^\psi)$ para alguna función real κ no se pueden dar sin más que tener en cuenta el resultado visto en [26]. Un argumento usando la segunda identidad de Bianchi nos sirve para probar que

κ es necesariamente constante, y por tanto (M, g) es globalmente Osserman, y esto es una contradicción con el hecho de que una métrica globalmente Osserman con operadores de Jacobi diagonalizables son o bien espacios de curvatura seccional constante, o bien espacios complejos o paracomplejos. $\square$

Capítulo 5

Geometría Afín

En el capítulo anterior dimos una clasificación de las métricas cuatro dimensionales Osserman-IP de signatura neutra tanto a nivel algebraico como a nivel diferenciable. En este capítulo daremos nuevos ejemplos de variedades IP usando extensiones de Riemann de conexiones afines sin torsión al fibrado cotangente de una variedad afín (M, D). En el caso particular de las extensiones de Riemann de superficies afines veremos que la condición de ser IP y la de ser Osserman son condiciones totalmente opuestas. Como ya se dijo la métrica inducida en el fibrado cotangente se corresponde a una métrica de Walker, y por lo tanto es de signatura neutra, con lo cual estamos en el mismo contexto del capítulo anterior.

5.1. Extensiones de Riemann y métricas de Osserman

Las extensiones de Riemann no sólo son importantes por relacionar la Geometría Afín con la Geometría semi-Riemanniana, sino que además permiten traducir ciertas propiedades de la Geometría Afín al contexto de la Geometría semi-Riemanniana. En esta sección usaremos las extensiones de Riemann como una herramienta para el estudio de ciertas propiedades de las métricas autoduales, con especial atención a las que además son Osserman o IP.

Es necesario recordar que si tenemos una superficie M con una conexión afín D libre de torsión en M y ϕ un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico en M se define su *extensión de Riemann deformada* como $(T^*M, g_D + \pi^*\phi)$ donde

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -2x_{k'}\Gamma_{ij}^k + \phi_{ij} & \delta_i^j \\ \delta_i^j & 0 \end{pmatrix}$$

en coordenadas $(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'})$ y donde Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel de la conexión D (véase §1.3).

A lo largo del presente capítulo usaremos la notación anterior para las extensiones de Riemann, a fin de mantener la notación clásica [30].

5.1.1. Métricas de Walker autoduales

Comenzaremos viendo la propiedad de autodualidad en las extensiones de Riemann. Recordemos que una métrica es autodual si y sólo si $W_- = 0$. En [9] se caracterizan las métricas de Walker autoduales.

Teorema 5.1. [9] *Una métrica de Walker en dimensión cuatro es autodual si y sólo si las funciones $a(x_1,x_2,x_{1'},x_{2'})$, $b(x_1,x_2,x_{1'},x_{2'})$ y $c(x_1,x_2,x_{1'},x_{2'})$ están dadas por*

$$\begin{aligned}
a(x_1,x_2,x_{1'},x_{2'}) &= x_{1'}^3\mathcal{A} + x_{1'}^2\mathcal{B} + x_{1'}^2x_{2'}\mathcal{C} + x_{1'}x_{2'}\mathcal{D} + x_{1'}P + x_{2'}Q + \xi,\\
b(x_1,x_2,x_{1'},x_{2'}) &= x_{2'}^3\mathcal{C} + x_{2'}^2\mathcal{E} + x_{1'}x_{2'}^2\mathcal{A} + x_{1'}x_{2'}\mathcal{F} + x_{1'}S + x_{2'}T + \eta,\\
c(x_1,x_2,x_{1'},x_{2'}) &= \tfrac{1}{2}x_{1'}^2\mathcal{F} + \tfrac{1}{2}x_{2'}^2\mathcal{D} + x_{1'}^2x_{2'}\mathcal{A} + x_{1'}x_{2'}^2\mathcal{C} + \tfrac{1}{2}x_{1'}x_{2'}(\mathcal{B}+\mathcal{E})+\\
&\quad +x_{1'}U + x_{2'}V + \gamma,
\end{aligned}$$

donde todas las letras mayúsculas, caligráficas y griegas son funciones diferenciables dependiendo sólo de las coordenadas (x_1, x_2).

Si tenemos en cuenta este teorema la prueba del siguiente resultado es inmediata.

Teorema 5.2. *La extensión de Riemann deformada de una superficie afín con conexión simétrica es autodual, es decir, $W_- = 0$.*

Demostración. Sabemos que la extensión de Riemann deformada $(g_D + \pi^*\phi)$ de una superficie afín tiene una métrica inducida de Walker con matriz asociada

$$g_D + \pi^*\phi = \begin{pmatrix}
-2x_{1'}\Gamma_{11}^1 - 2x_{2'}\Gamma_{11}^2 + \phi_{11} & -2x_{1'}\Gamma_{12}^1 - 2x_{2'}\Gamma_{12}^2 + \phi_{12} & 1 & 0\\
-2x_{1'}\Gamma_{12}^1 - 2x_{2'}\Gamma_{12}^2 + \phi_{12} & -2x_{1'}\Gamma_{22}^1 - 2x_{2'}\Gamma_{22}^2 + \phi_{22} & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

por lo que se tiene que las funciones a, b y c tienen la forma de las del Teorema 5.1 sin más que tomar las funciones $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ nulas, obteniéndose así el resultado. □

Este teorema tiene un recíproco parcial que es el siguiente:

Teorema 5.3. *Si una variedad de Walker de dimensión cuatro autodual es Ricci llana entonces necesariamente es una extensión de Riemann.*

Demostración. Toda métrica de Walker autodual tiene la forma dada en el Teorema 5.1. Si suponemos que es Ricci llana entonces con un cálculo directo obtenemos:

$$\begin{aligned}
\rho_{21} &= 2x_{2'}\mathcal{A} + \mathcal{F},\\
\rho_{12} &= 2x_{1'}\mathcal{C} + \mathcal{D},\\
\rho_{11} &= \tfrac{1}{4}(16x_{1'}\mathcal{A} + 8x_{2'}\mathcal{C} + 5\mathcal{B} + \mathcal{E}),\\
\rho_{22} &= \tfrac{1}{4}(8x_{1'}\mathcal{A} + 16x_{2'}\mathcal{C} + \mathcal{B} + 5\mathcal{E})
\end{aligned}$$

y por tanto todas las letras caligráficas en el Teorema 5.1 se anulan, obteniendo así el resultado. □

Este resultado sólo es cierto bajo la hipótesis de que la variedad es Ricci llana. Si por el contrario el operador de Ricci es nilpotente en dos pasos el resultado no es cierto. No tenemos más que coger una métrica de Walker donde las funciones a, b y c vengan dadas por

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) &= 0, \\ b(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) &= x_{1'} x_{2'} A(x_1, x_2), \\ c(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) &= \tfrac{1}{2} x_{1'}^2 A(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.1.2. Métricas de Walker-Osserman en dimensión 4

En el resto de esta sección revisaremos la clasificación de las variedades Walker autoduales de Osserman vista en [9]. La teoría de las extensiones de Riemann permitirá obtener una descripción completa de las métricas de Walker autoduales con operador de Ricci nilpotente.

Teorema 5.4. [9] *Una métrica de Walker 4-dimensional es puntualmente Osserman autodual si y sólo si se da una de las siguientes condiciones:*

i) La curvatura escalar τ es no nula y el tensor métrico queda completamente determinado por las funciones $a(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'})$, $b(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'})$ y $c(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'})$ donde

$$\begin{aligned} a &= x_{1'}^2 \tfrac{\tau}{6} + x_{1'} P + x_{2'} Q + \tfrac{6}{\tau}\{Q(T-U) + V(P-V) - 2(Q_2 - V_1)\}, \\ b &= x_{2'}^2 \tfrac{\tau}{6} + x_{1'} S + x_{2'} T + \tfrac{6}{\tau}\{S(P-V) + U(T-U) - 2(S_1 - U_2)\}, \\ c &= x_{1'} x_{2'} \tfrac{\tau}{6} + x_{1'} U + x_{2'} V + \tfrac{6}{\tau}\{-QS + UV + T_1 - U_1 + P_2 - V_2\}, \end{aligned}$$

y donde las letras mayúsculas son funciones dependiendo sólo de (x_1, x_2).

ii) La curvatura escalar es nula y el tensor métrico está dado por

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) &= x_{1'} P + x_{2'} Q + \xi, \\ b(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) &= x_{1'} S + x_{2'} T + \eta, \\ c(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) &= x_{1'} U + x_{2'} V + \gamma, \end{aligned}$$

donde P, Q, S, T, U, V son funciones diferenciables que sólo dependen de (x_1, x_2) verificando el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 2(Q_2 - V_1) &= Q(T-U) + V(P-V), \\ 2(S_1 - U_2) &= S(P-V) + U(T-U), \\ T_1 - U_1 + P_2 - V_2 &= QS - UV. \end{aligned} \tag{5.2}$$

y ξ, η, γ son funciones diferenciables cualesquiera que solo dependen de (x_1, x_2). En este caso, el operador de Jacobi tiene todos sus autovalores cero.

Observación 5.5. Si nos fijamos el caso *ii*) del Teorema 5.4 nos dice que una variedad de Walker autodual de curvatura escalar nula es de Osserman si y sólo si es una extensión de Riemann deformada de una superficie afín, donde los símbolos de Christoffel de la conexión en la superficie afín verifican las condiciones señaladas en el teorema. Por otro lado si nos centramos en el caso *i*) del teorema anterior tenemos una métrica de Walker con curvatura escalar no nula τ y tensor de Ricci paralelo; en este caso se tiene que los autovalores asociados al operador de Jacobi son de la forma $\{\tau/6, \tau/24, \tau/24\}$. Por lo tanto, por el Teorema 4.5 podemos ver que esta métrica nunca es IP. A lo largo de este capítulo veremos que las extensiones de Riemann de superficies afines son Osserman-IP si y sólo si la superficie es llana. Así las únicas métricas de Walker autoduales que son Osserman-IP son extensiones de Riemann deformadas de superficies afines M con conexiones afines D llanas. Esto no implica que $(T^*M, g_D + \pi^*\phi)$ sea una variedad llana, debido a la contribución del tensor ϕ de tipo $(0, 2)$.

5.2. Estructuras afín-Osserman

En esta sección veremos cómo se traduce la condición de ser Osserman al caso de Geometría Afín, mostrando que esta propiedad se conserva por extensiones de Riemann. Los principales resultados de esta sección fueron probados en [11]. Comenzaremos viendo la definición de variedad afín-Osserman, lo que nos llevará a definir después el concepto de variedad afín-IP de un modo análogo.

Definición 5.6. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n con una conexión D. Entonces (M, D) es *afín-Osserman en un punto $p \in M$* si el operador de Jacobi $\mathcal{J}_R(z)$ tiene el mismo polinomio característico para todo $z \in T_pM$. Análogamente se dice que (M, D) es *afín-Osserman* si es afín-Osserman en cada punto.

Se puede probar que si una variedad es afín-Osserman los autovalores del operador de Jacobi son todos cero. Es decir el operador de Jacobi es nilpotente. Esto viene recogido en el siguiente resultado.

Proposición 5.7. [11] *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n con una conexión afín D. Entonces (M, D) es afín-Osserman en un punto $p \in M$ si y sólo si el polinomio característico de $\mathcal{J}_R(z)$ es $p_\lambda(\mathcal{J}_R(z)) = \lambda^n$ para todo $z \in T_pM$.*

Es importante que la propiedad de ser afín-Osserman se vea reflejada en su extensión de Riemann y esto es lo que se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 5.8. [11] *Sea (T^*M, g_D) el fibrado cotangente de una variedad afín (M, D) equipado con la extensión de Riemann de la conexión D. Entonces se tiene que (T^*M, g_D) es una variedad semi-Riemanniana de Osserman si y sólo si (M, D) es una variedad afín-Osserman.*

Observación 5.9. De un modo análogo a como se procede en el Teorema 5.16 se puede extender este resultado para el caso de extensiones de Riemann deformadas.

En el caso particular de una superficie afín se puede probar el siguiente resultado que caracteriza a las superficies afín-Osserman en función de su tensor de Ricci.

Teorema 5.10. [11] *Sea M una superficie con una conexión afín D. Entonces (M, D) es afín-Osserman en $p \in M$ si y sólo si el tensor de Ricci de D es antisimétrico en $p \in M$.*

La condición sobre una superficie de ser afín-Osserman es por tanto muy restrictiva. Esto tiene diversas consecuencias. Una de ellas, quizás muy representativa de lo restrictiva que es esta propiedad, es el hecho de que si una superficie es afín-Osserman con una conexión simétrica entonces es equivalente el hecho de ser *localmente simétrica* a ser llana. Otra fue probada por Wong en [28] y muestra que toda superficie que tenga tensor de Ricci antisimétrico en todo punto o es llana o es recurrente, es decir, existe una 1-forma σ de modo que $DR = \sigma \otimes R$. Wong probó el siguiente resultado donde nos da la conexión de este tipo de superficies.

Teorema 5.11. [28] *Sea D una conexión afín-Osserman sobre una superficie. Entonces es llana o existe un sistema de coordenadas (x_1, x_2) en el que los símbolos de Christoffel no nulos están dados por uno de los casos siguientes:*

i) $\Gamma_{11}^1 = -\partial_1\theta,\ \Gamma_{22}^2 = \partial_2\theta$,
donde θ es una función diferenciable verificando que $\partial_2\partial_1\theta \neq 0$; o

ii) $\Gamma_{22}^1 = \varphi,\ \Gamma_{11}^1 = -\partial_1 \log\varphi,\ \Gamma_{22}^2 = \partial_2 \log\varphi$,
donde φ es una función diferenciable tal que $\partial_2\partial_1 \log\varphi \neq 0$; o

iii) $\Gamma_{22}^1 = -\psi/(1 + x_1x_2),\ \Gamma_{11}^2 = 1/\{\psi(1 + x_1x_2)\}$,
$\Gamma_{11}^1 = -\partial_1 \log\psi + x_2/(1 + x_1x_2),\ \Gamma_{22}^2 = -\partial_2 \log\psi + x_1/(1 + x_1x_2)$,
donde ψ es una función diferenciable tal que $\partial_2\partial_1 \log\psi \neq 0$.

Apoyándose en este último resultado Kowalski, Opozda y Vlášek clasificaron las superficies afín-Osserman que son homogéneas y lo resumieron en el siguiente resultado.

Teorema 5.12. [20] *Sea D una conexión simétrica con tensor de Ricci antisimétrico en una superficie M. Si D es localmente homogénea entonces, en un entorno de un punto p de un abierto denso de M existe un sistema de coordenadas (u, v) en el que la conexión D tiene como símbolos de Christoffel no nulos:*

A1) $\Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{3}u^2,\ \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{u},\ \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{36}u^5,\ \Gamma_{22}^2 = -\frac{2}{3}u^2,$

o

A2) $\Gamma_{12}^1 = u,\ \Gamma_{22}^2 = u,$

o

B) $\Gamma_{11}^1 = -\frac{2}{u},\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2u},\ \Gamma_{12}^1 = \frac{\lambda}{u},\ \Gamma_{22}^2 = \frac{\lambda}{u},$

donde λ es un parámetro real arbitrario.

Observación 5.13. (T^*M, g_D) no es necesariamente homogénea aunque lo sea (M, D). De hecho no es necesariamente curvatura homogénea.

En la siguiente sección veremos como son las variedades afín-IP prestando especial atención al caso de las superficies comparando con lo que hemos visto para el caso de las superficies afín-Osserman.

5.3. Estructuras afín-IP

El objetivo principal de esta sección es definir el concepto de estructura afín-IP de un modo similar al de estructura afín-Osserman. Además analizaremos si la condición afín-IP sobre variedades afines puede ser trasladada a su fibrado cotangente dotándolo con la métrica inducida por la extensión de Riemann deformada. Esto nos llevará a probar el resultado más importante de esta sección.

Definición 5.14. Sea M una variedad n-dimensional con una conexión afín D. Entonces, (M, D) es *afín-IP* en $p \in M$ si $R(\pi)$ tiene el mismo polinomio característico para todo $\pi \in Gr_2(T_pM)$.

Para una variedad afín-IP necesariamente los autovalores del operador de curvatura antisimétrico tienen que ser cero. Esto se prueba en la siguiente proposición.

Proposición 5.15. *Sea M una variedad n-dimensional con una conexión afín D. Entonces (M, D) es afín-IP en $p \in M$ si y sólo si el polinomio característico de $R(\pi)$ es $p_\lambda(R(\pi)) = \lambda^n$ para todo plano π.*

Demostración. Una implicación es obvia. Para la demostración de la otra tomemos un plano $\pi = \langle\{x, y\}\rangle$ y sea $p_\lambda(R(\pi)) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ el polinomio característico de $R(\pi)$. Consideremos entonces $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ una constante y tomemos el plano $\overline{\pi} = \langle\{cx, cy\}\rangle$. El polinomio característico de $R(\overline{\pi})$ es

$$\begin{aligned} p_\lambda(R(\overline{\pi})) &= det(\lambda Id - R(\overline{\pi})) = det(\lambda Id - c^2 R(\pi)) = c^{2n} det\left(\tfrac{\lambda}{c^2} Id - R(\pi)\right) \\ &= \lambda^n + c^2 a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c^{2n} a_0. \end{aligned}$$

Puesto que la variedad es afín-IP se tiene que $p_\lambda(R(\pi)) = p_\lambda(R(\overline{\pi}))$, con lo cual se sigue que $a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$. $\square$

A continuación veremos un resultado análogo al Teorema 5.8 para el caso de una variedad afín-IP.

Teorema 5.16. *Sea $(T^*M, g_D + \pi^*\phi)$ el fibrado cotangente de una variedad afín (M, D) equipado con la extensión de Riemann deformada. Entonces se tiene que $(T^*M, g_D + \pi^*\phi)$ es una variedad semi-Riemanniana IP si y sólo si (M, D) es una variedad afín-IP.*

Demostración. La métrica inducida en el fibrado cotangente tiene asociada la siguiente matriz

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{pmatrix} -2x_{k'}\Gamma_{ij}^k + \phi_{ij} & \delta_i^j \\ \delta_i^j & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado su inversa tiene la siguiente forma

$$\tilde{g}^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \\ \delta_i^j & 2x_{k'}\Gamma_{ij}^k - \phi_{ij} \end{pmatrix}.$$

Teniendo esto en cuenta, determinamos los símbolos de Christoffel correspondientes a la extensión de Riemann deformada. Para nuestro propósito es suficiente el conocimiento de los siguientes

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k\,, \quad \tilde{\Gamma}_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = -\Gamma_{jk}^i\,, \quad \tilde{\Gamma}_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = -\Gamma_{ik}^j\,,$$
$$\tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^k = 0\,, \quad \tilde{\Gamma}_{i\bar{j}}^k = 0\,, \quad \tilde{\Gamma}_{\bar{i}j}^k = 0\,, \quad \tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} = 0.$$

Una vez obtenidos los símbolos de Christoffel de la métrica inducida en el cotangente un cálculo directo permite obtener las siguientes componentes $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^\delta$ del tensor de curvatura de $(T^*M, g_D + \pi^*\phi)$, relacionadas con las de (M, D) por

$$\tilde{R}_{kji}^h = R_{kji}^h, \quad \tilde{R}_{kji'}^{h'} = -R_{kjh}^i, \quad \tilde{R}_{kj'i}^{h'} = -R_{hik}^j, \quad \tilde{R}_{k'ji}^{h'} = R_{hij}^k. \tag{5.3}$$

Consideremos ahora un plano orientado no degenerado $\tilde{\pi} = \langle\{\tilde{x}, \tilde{y}\}\rangle$ en T^*M, con $\tilde{x} = \alpha_i\partial_i + \alpha_{i'}\partial_{i'}$ e $\tilde{y} = \beta_i\partial_i + \beta_{i'}\partial_{i'}$. Entonces se sigue directamente de (5.3) que la matriz del operador de curvatura antisimétrico $\tilde{R}(\tilde{\pi})$ con respecto a la base $\{\partial_i, \partial_{i'}\}$ es de la forma

$$\tilde{R}(\tilde{\pi}) = \begin{pmatrix} R(\pi) & * \\ 0 & -{}^tR(\pi) \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

donde $R(\pi)$ es la matriz del operador de curvatura antisimétrico correspondiente al plano $\pi = \langle\{x, y\}\rangle$, con $x = \alpha_i\partial_i$ e $y = \beta_i\partial_i$ en M, con respecto a la base $\{\partial_i\}$.

Supongamos que $(T^*M, g_D + \pi^*\phi)$ es una variedad IP. Si π es un plano en M, entonces se puede considerar como un plano en T^*M y (5.4) implica que el polinomio característico $p_\lambda(\tilde{R}(\pi))$ de $\tilde{R}(\pi)$ es menos el cuadrado del polinomio característico $p_\lambda(R(\pi))$ de $R(\pi)$.

Puesto que $p_\lambda(\tilde{R}(\tilde{\pi}))$ debe ser constante para todo $\tilde{\pi}$, se sigue que $p_\lambda(R(\pi))$ es independiente del plano elegido. Entonces, si $\pi = \langle\{X, Y\}\rangle$ y $p_\lambda(R(\pi)) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$, para $\pi_\alpha = \langle\{\alpha X, \alpha Y\}\rangle$, $\alpha \neq 0$, se tiene que

$$p_\lambda(R(\pi_\alpha)) = \lambda^n + \alpha^2 a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha^{2n} a_0.$$

Por tanto, puesto que $p_\lambda(R(\pi_\alpha)) = p_\lambda(R(\pi))$, se sigue que $a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$ y así el operador de curvatura antisimétrico en M es necesariamente nilpotente y por lo tanto M es afín-IP.

Recíprocamente, si la variedad afín (M, D) se supone afín-IP, entonces $R(\pi)$ tiene autovalores cero para cada π en M. Por tanto se sigue de (5.4) que los autovalores de $\tilde{R}(\tilde{\pi})$ se anulan para cada plano orientado no degenerado $\tilde{\pi}$ en T^*M. Entonces, $(T^*M, g_D + \pi^*\phi)$ es IP. □

5.3.1. Extensiones de Riemann de dimensión cuatro

Es importante destacar que las extensiones de Riemann aparecen de modo natural cuando trabajamos con métricas de Walker. Por ejemplo, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.17. *Toda métrica de Walker de dimensión cuatro autodual IP (M, g) es necesariamente una extensión de Riemann deformada.*

Demostración. Antes de empezar con la demostración, recordamos el resultado visto en el Lema 3.1 que nos decía que para una variedad semi-Riemanniana de dimensión cuatro de signatura neutra el polinomio característico $p_\lambda(R(\pi))$ de $R(\pi)$ viene dado por

$$p_\lambda(R(\pi)) = \lambda^4 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(R(\pi)^2)\ \lambda^2 + \det(R(\pi)), \tag{5.5}$$

y por lo tanto la variedad es IP si y sólo si $\det(R(\pi))$ y $\mathrm{Tr}(R(\pi)^2)$ no dependen del plano orientado no degenerado espacial elegido (respectivamente, mixto o temporal). En el caso particular de una métrica de Walker un cálculo directo nos muestra que el operador de curvatura antisimétrico $R(\pi)$ asociado con un plano no degenerado π, cuando se expresa con respecto a los campos de vectores coordenados $\{\partial_i, \partial_{i'}\}$, $i = 1, 2$, tiene la siguiente matriz asociada

$$R(\pi) = \begin{pmatrix} F(\pi) & G(\pi) \\ 0 & -{}^tF(\pi) \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

para ciertas (2×2)-matrices $F(\pi)$ y $G(\pi)$. Por lo tanto el determinante de $R(\pi)$ y la traza de $R(\pi)^2$ vienen determinadas por las matrices $F(\pi)$ y $F(\pi)^2$, respectivamente. Además, $\det(R(\pi)) = \det(F(\pi))^2$, mientras que $\mathrm{Tr}(R(\pi)^2) = 2\mathrm{Tr}(F(\pi)^2)$. Por lo tanto, una métrica de Walker es IP si y sólo si $\det(F(\pi))$ y $\mathrm{Tr}(F(\pi)^2)$ no dependen del plano no degenerado orientado espacial (respectivamente, mixto o temporal) π. Esta caracterización la usaremos repetidas veces a lo largo de la demostración con la siguiente notación,

$$F(\pi) = \begin{pmatrix} f_{11}(\pi) & f_{12}(\pi) \\ f_{21}(\pi) & f_{22}(\pi) \end{pmatrix}.$$

Supongamos que la métrica de Walker es autodual, con lo cual viene dada como se muestra en el Lema 5.1 y además que es IP. Comenzaremos nuestro análisis tomando el plano no degenerado $\pi_1 = \langle\{\partial_1, \partial_{1'} + \lambda\partial_{2'}\}\rangle$. Obtenemos que:

$$\begin{aligned} f_{11}(\pi_1) &= x_{1'}(\lambda\mathcal{C} + \mathcal{A}) + x_{2'}\mathcal{C} + \tfrac{1}{2}(\lambda\mathcal{D} + 2\mathcal{B}), & f_{12}(\pi_1) &= x_{1'}\mathcal{C} + \tfrac{1}{2}\mathcal{D}, \\ f_{21}(\pi_1) &= x_{1'}\lambda\mathcal{A} + x_{2'}(\lambda\mathcal{C} + \mathcal{A}) + \tfrac{1}{4}(\lambda(\mathcal{B} + \mathcal{E}) + 2\mathcal{F}), & f_{22}(\pi_1) &= x_{1'}\mathcal{C} + \tfrac{1}{2}\mathcal{D}. \end{aligned}$$

Como consecuencia se sigue que $\partial_{1'}\partial_{1'}(\det(F(\pi)) = 2\lambda^2\mathcal{C}^2 + 6\lambda\mathcal{A}\mathcal{C} + 6\mathcal{A}^2$, y por lo tanto $\mathcal{A} = \mathcal{C} = 0$, obteniéndose que $\det(F(\pi)) = \frac{1}{4}\lambda^2\mathcal{D}^2 + \frac{1}{2}\lambda\mathcal{B}\mathcal{D} + \frac{1}{4}(\mathcal{B}^2 + \mathcal{B}\mathcal{E} - \mathcal{D}\mathcal{F})$, de donde se sigue que $\mathcal{D} = 0$. Por lo tanto las funciones a, b y c se reducen a

$$\begin{aligned} a &= x_{1'}^2\mathcal{B} + x_{1'}P + x_{2'}Q + \xi, \\ b &= x_{2'}^2\mathcal{E} + x_{1'}x_{2'}\mathcal{F} + x_{1'}S + x_{2'}T + \eta, \\ c &= \tfrac{1}{2}x_{1'}^2\mathcal{F} + \tfrac{1}{2}x_{1'}x_{2'}(\mathcal{B} + \mathcal{E}) + x_{1'}U + x_{2'}V + \gamma. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Consideremos ahora el plano orientado no degenerado $\pi_2 = \langle\{\partial_1 + \lambda\partial_2, \partial_{1'}\}\rangle$. En este caso,

$$f_{11}(\pi_2) = \tfrac{1}{2}(\lambda\mathcal{F} + 2\mathcal{B}),\ f_{12}(\pi_2) = f_{22}(\pi_2) = \tfrac{1}{4}\lambda(\mathcal{B} + \mathcal{E}),\ f_{21}(\pi_2) = \tfrac{1}{2}\mathcal{F},$$

de donde $\det(F(\pi_2)) = \frac{1}{4}\lambda^2\mathcal{F}^2 + \frac{1}{2}\lambda\mathcal{B}\mathcal{F} + \frac{1}{2}\mathcal{B}(\mathcal{B} + \mathcal{E})$. Por lo tanto $\mathcal{F} = 0$ y (5.7) se reduce a

$$\begin{aligned} a &= x_{1'}^2\mathcal{B} + x_{1'}P + x_{2'}Q + \xi, \\ b &= x_{2'}^2\mathcal{E} + x_{1'}S + x_{2'}T + \eta, \\ c &= \tfrac{1}{2}x_{1'}x_{2'}(\mathcal{B} + \mathcal{E}) + x_{1'}U + x_{2'}V + \gamma \end{aligned} \tag{5.8}$$

con

$$\det(F(\pi_2)) = \tfrac{1}{4}\mathcal{B}(\mathcal{B} + \mathcal{E}), \qquad \mathrm{Tr}(F(\pi)^2) = \mathcal{B}^2 + \tfrac{1}{16}(\mathcal{B} + \mathcal{E})^2. \tag{5.9}$$

Consideraremos ahora el plano orientado no degenerado $\pi_3 = \langle\{\partial_{1'} - \partial_{2'}, \partial_{2'} - \partial_1 + \partial_2\}\rangle$, para el cual

$$f_{11}(\pi_3) = \tfrac{1}{8}(5\mathcal{B} + \mathcal{E}),\ f_{12}(\pi_3) = f_{21}(\pi_3) = -\tfrac{1}{8}(\mathcal{B} + \mathcal{E}),\ f_{22}(\pi_3) = \tfrac{1}{8}(\mathcal{B} + 5\mathcal{E})$$

y por lo tanto

$$\det(F(\pi_3)) = \tfrac{1}{16}(\mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2 + 6\mathcal{B}\mathcal{E}), \quad \mathrm{Tr}(F(\pi)^2) = \tfrac{1}{16}(7\mathcal{B}^2 + 7\mathcal{E}^2 + 6\mathcal{B}\mathcal{E}). \tag{5.10}$$

Comparando (5.9) y (5.10), se concluye que $\mathcal{E} = \mathcal{B}$. Entonces, $\det(F(\pi_3)) = \frac{1}{2}\mathcal{B}^2$, lo cual implica que $\mathcal{B} = \kappa$ y (5.8) se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
a &= x_{1'}^2\kappa + x_{1'}P + x_{2'}Q + \xi,\\
b &= x_{2'}^2\kappa + x_{1'}S + x_{2'}T + \eta, \qquad (5.11)\\
c &= x_{1'}x_{2'}\kappa + x_{1'}U + x_{2'}V + \gamma.
\end{aligned}
$$

Para terminar con la demostración mostraremos que $\kappa = 0$. Para ello tomaremos el plano $\pi_4 = \langle\{\partial_2 - c\partial_{1'} - \frac{1+b}{2}\partial_{2'}, \partial_1 + \frac{1-a}{2}\partial_{1'}\}\rangle$. Un cálculo largo pero directo nos muestra que

$$
\begin{aligned}
f_{11}(\pi_4) &= x_{1'}x_{2'}\kappa^2 - x_{1'}\tfrac{\kappa}{4}(x_{2'}\kappa - 3U) + x_{2'}\tfrac{3\kappa}{4}V\\
&\quad + \tfrac{1}{4}\left(QS - UV + 4\kappa\gamma + 2P_2 - 2U_1\right),\\
f_{12}(\pi_4) &= \tfrac{1}{4}\left(\kappa - \kappa\xi + Q(T-U) + PV - V^2 - 2Q_2 + 2V_1\right),\\
f_{21}(\pi_4) &= \tfrac{1}{4}\left(\kappa + \kappa\eta + S(V-P) - TU - U^2 + 2S_1 - 2U_2\right),\\
f_{22}(\pi_4) &= \tfrac{1}{2}x_{1'}x_{2'}\kappa^2 + x_{1'}\tfrac{\kappa}{4}(x_{2'}\kappa + 3U) + x_{2'}\tfrac{3\kappa}{4}V\\
&\quad - \tfrac{1}{4}\left(QS - UV - 2\kappa\gamma + 2T_1 - 2V_2\right),
\end{aligned}
$$

de donde se obtiene que $\partial_{1'}\partial_{1'}\partial_{2'}\partial_{2'}(\det(F(\pi_4))) = \frac{9}{4}\kappa^4$, lo que nos muestra que $\kappa = 0$. Esto nos lleva a que (5.11) se reduce a

$$
a = x_{1'}P + x_{2'}Q + \xi, \quad b = x_{1'}S + x_{2'}T + \eta, \quad c = x_{1'}U + x_{2'}V + \gamma, \qquad (5.12)
$$

y por lo tanto la métrica se corresponde con una extensión de Riemann deformada. □

5.4. Superficies afines IP

A lo largo de esta sección estudiaremos la condición de ser afín-IP en el contexto de las superficies afines tratando de caracterizar esta propiedad en términos del tensor de Ricci, acabando la sección analizando esta propiedad en ciertas superficies especiales. Para ello antes daremos algunos conceptos previos que nos serán de utilidad a lo largo de esta sección.

Diremos que una conexión afín D es *localmente equiafín* si en un entorno de cada punto $p \in M$ hay un elemento de volumen paralelo, i.e., una n-forma ω tal que $D\omega = 0$, $n = dimM$.

Proposición 5.18. [21] *Una conexión afín D simétrica tiene tensor de Ricci simétrico si y sólo si es localmente equiafín.*

Llamaremos *conexión equiafín* D en M a una conexión simétrica que admita un elemento de volumen ω paralelo en M. Es decir, si ω es un elemento de volumen en M tal que $D\omega = 0$, en tal caso diremos que (D, ω) es una *estructura equiafín* en M.

Caracterizamos una superficie afín-IP de un modo análogo al Teorema 5.10 (cuya prueba como ya se dijo se puede ver en [11]) para las superficies afín-Osserman.

Teorema 5.19. *Sea M una superficie con una conexión D. Entonces (M, D) es una superficie afín-IP si y sólo es una superficie equiafín con tensor de Ricci degenerado.*

Demostración. Supongamos que la superficie es afín-IP y tomemos el plano $\pi = \langle\{x, y\}\rangle$ donde $x = \sum_{i=1}^{2} a_i\partial_i$ e $y = \sum_{i=1}^{2} b_i\partial_i$. Entonces la matriz del operador de curvatura antisimétrico es

$$R(\pi) = \begin{pmatrix} (a_1b_2 - b_1a_2)R_{121}^1 & (a_1b_2 - b_1a_2)R_{122}^1 \\ (a_1b_2 - b_1a_2)R_{121}^2 & (a_1b_2 - b_1a_2)R_{122}^2 \end{pmatrix}.$$

O lo que es lo mismo

$$R(\pi) = \begin{pmatrix} -(a_1b_2 - b_1a_2)\rho_{21} & -(a_1b_2 - b_1a_2)\rho_{22} \\ (a_1b_2 - b_1a_2)\rho_{11} & (a_1b_2 - b_1a_2)\rho_{12} \end{pmatrix}.$$

Así el polinomio característico viene dado por

$$p_\lambda(R(\pi)) \;\; = \;\; \lambda^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)\,(\rho_{12} - \rho_{21})\,\lambda + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 det\rho.$$

Como el polinomio ha de ser de la forma $p_\lambda(R(\pi)) = \lambda^2$ necesariamente $\rho_{12} - \rho_{21} = 0$ por lo que el tensor de Ricci es simétrico, y por lo tanto es una superficie equiafín.
Entonces la matriz del operador de curvatura antisimétrico queda del siguiente modo

$$R(\pi) = \begin{pmatrix} (a_1b_2 - b_1a_2)\rho_{12} & (a_1b_2 - b_1a_2)\rho_{22} \\ -(a_1b_2 - b_1a_2)\rho_{11} & -(a_1b_2 - b_1a_2)\rho_{12} \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico

$$p_\lambda(R(\pi)) = \lambda^2 - (a_1b_2 - b_1a_2)^2\, det\rho$$

donde necesariamente $\det\rho$ debe ser nulo, que es la condición de que el tensor de Ricci sea degenerado. □

Observación 5.20. Se tiene como una consecuencia inmediata que una superficie afín es Osserman-IP si y sólo si es una superficie con conexión D llana. Por lo tanto, una métrica de Walker autodual es Osserman-IP si y sólo si es la extensión de Riemann de una superficie con conexión D llana.

5.4.1. Superficies afines IP con curvatura recurrente

Recordamos que una variedad afín (M, D) tiene curvatura recurrente si existe una 1-forma σ tal que $DR = \sigma \otimes R$. Este concepto para el caso particular de superficies es equivalente al de ser Ricci recurrentes, es decir, $D\rho = \omega \otimes \rho$ donde ω es una 1-forma. Wong [28] ha obtenido una descripción completa de las superficies afines recurrentes

Teorema 5.21. [28] *Una conexión afín 2-dimensional para la que la parte simétrica A y la parte antisimétrica B del tensor de Ricci tienen las siguientes propiedades tiene curvatura recurrente si en un entorno de cada punto existe un sistema de coordenadas (x_1, x_2) en el que las componentes no nulas de la conexión están determinadas de la forma siguiente:*

1) $\operatorname{rango} A = 1,\ B \neq 0.$

$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = \partial_2\theta,\ \Gamma_{11}^2 = \partial_1\theta - \partial_2\theta,$

donde θ es una función escalar tal que $\partial_2\partial_2\theta \neq 0$.

2) $\operatorname{rango} A = 1,\ B = 0.$

Γ_{11}^2 *con* $\partial_2\Gamma_{11}^2 \neq 0.$

En este caso el tensor de Ricci es de rango 1 y alrededor de cada punto existen un vector paralelo y un covector paralelo.

3) $\det A < 0,\ B \neq 0.$

(i) Γ_{22}^2 *con* $\partial_1\Gamma_{22}^2 \neq 0$*, ó*

(ii) $\Gamma_{11}^1 = \partial_1\varphi/(1-c),\ \Gamma_{22}^2 = \partial_2\varphi/(1+c),$

donde φ es una función escalar tal que $\partial_2\partial_1\varphi \neq 0$ y c es una constante distinta de 0 y ± 1. En el caso (i) el tensor de Ricci es de rango 1 y alrededor de cada punto existen un vector paralelo y un covector paralelo.

4) $\det A < 0,\ B = 0.$

$\Gamma_{11}^1 = \partial_1\varphi,\ \Gamma_{22}^2 = \partial_2\varphi,$

donde φ es una función escalar tal que $\partial_2\partial_1\varphi \neq 0$.

5) $\det A > 0,\ B \neq 0.$

$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{\partial_1\psi + c\partial_2\psi}{1+c^2},$

$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{-c\partial_1\psi + \partial_2\psi}{1+c^2},$

donde ψ es una función escalar tal que $\partial_1\partial_1\psi + \partial_2\partial_2\psi \neq 0$ y c es una constante no nula.

6) $\det A > 0$, $B = 0$.
$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \partial_1\psi$,
$\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \partial_2\psi$,
donde ψ *es una función escalar tal que* $\partial_1\partial_1\psi + \partial_2\partial_2\psi \neq 0$.

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.22. *Sea* (M, D) *una superficie afín con curvatura recurrente. Entonces* (M, D) *es afín-IP si y sólo si en un entorno de cada punto existe un sistema de coordenadas* (x_1, x_2) *en el que las componentes no nulas de* D *vienen dadas por*

$$D_{\partial_1}\partial_1 = a(x_1, x_2)\partial_2,$$

con $\partial_2 a(x_1, x_2) \neq 0$. *Además,* (M, D) *es localmente simétrica si y sólo si* $a(x_1, x_2) = \alpha\, x_2 + \xi(x_1)$, *con* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* ξ *una función diferenciable que depende sólo de* x_1.

Demostración. Descompongamos el tensor de Ricci como suma de su parte simétrica y su parte antisimétrica, $\rho = \rho_s + \rho_a$. Por el Teorema 5.19 tenemos que (M, D) es afín-IP si y sólo si $\rho_a = 0$ y $\det \rho_s = 0$. Por lo tanto se sigue ([28]) que la única posibilidad para tal superficie recurrente es que en un entorno de cada punto exista un sistema de coordenadas (x_1, x_2) en el que las únicas componentes no nulas de D estén dadas por

$$D_{\partial_1}\partial_1 = a(x_1, x_2)\partial_2,$$

con $\partial_2 a(x_1, x_2) \neq 0$. Ahora bien, se puede comprobar que la única componente no nula del tensor de Ricci es $\rho_{11} = \partial_2 a(x_1, x_2)$ y por lo tanto se sigue que M es localmente simétrica si y sólo si $a(x_1, x_2) = \alpha\, x_2 + \xi(x_1)$. □

Observación 5.23. A diferencia de las superficies afín-Osserman, las superficies afín-IP no son necesariamente de curvatura recurrente. (Véase por ejemplo el Teorema 5.27*).*

5.4.2. Superficies afines IP localmente homogéneas

En este apartado veremos en que caso una superficie localmente homogénea es afín-IP. Para ello usaremos el siguiente teorema que caracteriza las conexiones de las superficies localmente homogéneas con conexión afín simétrica.

Teorema 5.24. [19] *Sea* D *una conexión afín localmente homogénea en una superficie* M. *Entonces, o* D *es una conexión de Levi-Civita de curvatura constante o, en un entorno* U *de cada punto* $p \in M$, *existe un sistema* (x_1, x_2) *de coordenadas locales y constantes* a, b, c, d, e, f *tal que* D *se expresa en* U *de una de las siguientes maneras:*

$$D_{\partial_1}\partial_1 = a\partial_1 + b\partial_2, \quad D_{\partial_1}\partial_2 = c\partial_1 + d\partial_2, \quad D_{\partial_2}\partial_2 = e\partial_1 + f\partial_2, \tag{5.13}$$

o

$$D_{\partial_1}\partial_1 = \tfrac{1}{x_1}(a\partial_1 + b\partial_2), \quad D_{\partial_1}\partial_2 = \tfrac{1}{x_1}(c\partial_1 + d\partial_2), \quad D_{\partial_2}\partial_2 = \tfrac{1}{x_1}(e\partial_1 + f\partial_2). \tag{5.14}$$

A continuación estudiaremos las restricciones que le tenemos que pedir a la conexión para que sea una superficie afín-IP. Siguiendo la terminología de [19], de ahora en adelante nos referiremos a los dos casos anteriores (5.13) y (5.14) como *Tipo A* y *Tipo B*, respectivamente.

Teorema 5.25. *Sea (M,D) una superficie afín-IP. Si (M,D) es localmente homogénea de Tipo A entonces es recurrente.*

Demostración. Supongamos que (M,D) es una superficie afín-IP localmente homogénea i.e., su tensor de Ricci es simétrico y degenerado como vimos en el Teorema 5.19. En nuestro caso el tensor de Ricci tiene por componentes

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= -d^2 + ad + (f-c)b,\\ \rho_{12} &= \rho_{21} = cd - eb,\\ \rho_{22} &= -c^2 + fc + (a-d)e,\end{aligned} \tag{5.15}$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\rho_{11;1} &= -da^2 + (d^2 - bf + cb)a + (be - cd)b,\\ \tfrac{1}{2}\rho_{11;2} &= \tfrac{1}{2}\rho_{12;1} = -acd + (c^2 - fc + de)b,\\ \tfrac{1}{2}\rho_{12;2} &= \tfrac{1}{2}\rho_{22;1} = bce - (ae + cf - de)d,\\ \tfrac{1}{2}\rho_{22;2} &= fc^2 - (de + f^2)c - (af - be - df)e,\end{aligned} \tag{5.16}$$

con $\rho_{ij;k} = (D_{\partial_k}\rho)(\partial_i, \partial_j)$. En nuestro caso ρ es siempre simétrico, y es degenerado si y sólo si

$$\begin{aligned}b^2e^2 - \left\{d^3 - 2ad^2 + (a^2 + 3bc - bf)d + (f-c)ab\right\} e&\\ + \left\{fd^2 + a(c-f)d - b(c-f)^2\right\} c = 0.&\end{aligned} \tag{5.17}$$

La ecuación (5.17) se puede ver como una ecuación de segundo grado en e. Veremos que todos los casos nos llevan a que la superficie es de curvatura recurrente. Comenzando con el caso en el que $b = 0$, la ecuación se reduce a

$$d \cdot \left\{ac^2 - (a-d)fc - (a-d)^2 e\right\} = 0, \tag{5.18}$$

y por lo tanto se tienen las siguientes tres soluciones:

(A.1): $d = 0$ y en tal caso, $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = (-2f)dx^2$.

(A.2): $d \neq 0$ y $a = 0$. En este caso, $e = d^{-1}cf$ y $D\rho = 0$.

(A.3): $d \neq 0 \neq a$. Entonces de (5.18) se obtiene que

$$ac^2 - (a-d)fc - (a-d)^2 e = 0$$

y por tanto c es un número real cuando $f^2+4ae \geq 0$. En particular, $c = (2a)^{-1}(a-d)(f+\varepsilon(f^2+4ae)^{\frac{1}{2}})$, donde $\varepsilon \in \{-1,1\}$. Además, si $d = a$, se obtiene que $D\rho = 0$ es decir, (M, D) es localmente simétrica, mientras que si $d \neq a$ un cálculo directo nos muestra que $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = (-2a)dx^1 - (f + \varepsilon(f^2+4ae)^{\frac{1}{2}})dx^2$.

Consideremos el caso en el que $b \neq 0$; viendo como ya dijimos la ecuación (5.17) como una ecuación de segundo grado en la variable e obtenemos el último caso:

(A.4): La variable e es un número real en el caso en el que $\zeta = (a-d)^2 + 4bc \geq 0$. En tal caso,

$$e = \frac{1}{2b^2}\left\{d^3 - 2ad^2 + (a^2+3bc-bf)d + (f-c)ab + \varepsilon(d^2 - ad + (c-f)b)\zeta^{\frac{1}{2}}\right\},$$

con $\varepsilon \in \{-1,1\}$, y un largo cálculo nos lleva a que si $c = b^{-1}(-d^2+ad+bf)$, entonces $D\rho = 0$. En caso contrario la superficie también es recurrente, es decir, $D\rho = \omega \otimes \rho$, con

$$\omega = (-a-d-\varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}})dx^1 + b^{-1}(-d^2+ad-2bc-\varepsilon d\zeta^{\frac{1}{2}})dx^2.$$

Por lo tanto en este caso toda superficie localmente homogénea afín-IP es de curvatura recurrente. □

Observación 5.26. En general se tiene que una superficie homogénea tipo A no tiene necesariamente que ser de curvatura recurrente. Tomemos por ejemplo una conexión homogénea tipo A donde $b = c = 0$. En este caso $\rho_{12} = 0$ pero $\rho_{12;2} = 2de(d-a)$, lo que muestra que la conexión no es recurrente en general.

En caso de imponer que la conexión sea homogénea tipo A las condiciones de ser afín-IP y recurrente son equivalentes, puesto que:

$$\begin{aligned} det\rho &= -\frac{1}{2}e(\rho_{11;1} - \omega_1\rho_{11}) \\ &\quad +\frac{1}{2}(c-f)(\rho_{12;1} - \omega_1\rho_{12} \\ &\quad +\frac{1}{2}d(\rho_{22;1} - \omega_1\rho_{22}) \end{aligned}$$

y en caso de que $e = d = 0$ y $c = f$ entonces la conexión es llana.

En este resultado caracterizamos las superficies afín-IP que son localmente homogéneas.

Teorema 5.27. *Sea (M, D) una superficie afín-IP. Entonces (M, D) es localmente homogénea si y sólo si es recurrente o, entorno a cada punto, existe un sistemas de coordenadas (x_1, x_2) en el que la conexión D se puede expresar como*

$$D_{\partial_1}\partial_1 = \frac{1}{x_1}(a\partial_1 + b\partial_2),\ D_{\partial_1}\partial_2 = \frac{1}{x_1}(c\partial_1 + d\partial_2),\ D_{\partial_2}\partial_2 = \frac{1}{x_1}(e\partial_1 + f\partial_2), \tag{5.19}$$

para coordenadas reales a, b, c, d, e, f que satisfacen una de las siguientes condiciones:

(i) $b = 0$ *y*

(i.1) $d \neq 0,\ e = 0,\ c \neq 0,\ a = \frac{d^2-1}{2d}$, *o*
(i.2) $d \cdot e \neq 0,\ c = 0,\ a = d \pm 1$, *o*
(i.3) $d \cdot e \neq 0,\ c \neq 0,\ e \neq -\frac{c^2}{d},\ a = \frac{d(c^2+de)\pm\zeta^{\frac{1}{2}}}{de}$, *con* $\zeta = d(c^2 d + e)(c^2 + de) \geq 0$,

o

(ii) $b \neq 0$ *y*

(ii.1) $d = 0,\ c \neq 0,\ e = \frac{-abc\pm\left(b^2c^2(a^2+4bc-1)\right)^{\frac{1}{2}}}{b^2}$, *con* $a^2 + 4bc - 1 \geq 0$, *o*
(ii.2) $d \neq 0,\ a \neq \pm(d-1),\ c = \frac{(a-d+1)d}{2b},\ e = \frac{(a-d+1)(d-1)d}{2b^2}$, *o*
(ii.3) $d \neq 0,\ c \notin \{0, \frac{ad}{b}, \frac{(a-d+1)d}{2b}\},\ e = \frac{((d-a)^2+4bc-1)d-2abc\pm\zeta^{\frac{1}{2}}}{2b^2}$, *con* $\zeta = ((d-a+1)d + 2bc)((d-a-1)d + 2bc)((d-a)^2 + 4bc - 1) \geq 0$, *o*
(ii.4) $d \neq 0,\ c = 0,\ a \neq d - 1,\ e = \frac{d^3-2ad^2+(a^2-1)d\pm|d||(a-d)^2-1|}{2b^2} \neq 0$, *o*
(ii.5) $d \neq 0,\ c = \frac{ad}{b},\ a \neq 1 - d,\ e = \frac{d^3+2ad^2-(a^2+1)d\pm|d||(a+d)^2-1|}{2b^2} \neq -\frac{a^2 d}{b^2}$.

Demostración. Usando los resultados de [19] y el Teorema 5.25, sólo nos queda por analizar el caso de la superficies localmente homogéneas Tipo B que sean afín-IP. En este caso el tensor de Ricci tiene por componentes

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \tfrac{1}{x_1^2}\{(a-d+1)d + (f-c)b\}, \\ \rho_{12} &= \tfrac{1}{x_1^2}\{cd - be + f\}, \\ \rho_{21} &= \tfrac{1}{x_1^2}\{cd - be - c\}, \\ \rho_{22} &= \tfrac{1}{x_1^2}\{(a-d-1)e + (f-c)c\}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Entonces ρ es simétrico si y sólo si

$$f = -c, \tag{5.21}$$

con lo cual desde ahora supondremos esta condición, y de (5.20) se obtiene que

$$\begin{aligned} \tfrac{x_1^3}{2}\rho_{11;1} &= (a+1)(d-a-1)d + (2a-d+3)bc + b^2 e, \\ \tfrac{x_1^3}{2}\rho_{11;2} &= 2bc^2 - adc + bde, \\ x_1^3\rho_{12;1} &= (a + 4bc - 2(a+1)d + 2)c + (2d+3)be, \\ \tfrac{x_1^3}{2}\rho_{12;2} &= c^2 d + bec + (d-a)de, \\ \tfrac{x_1^3}{2}\rho_{22;1} &= (d+1)(d-a+1)e + (d+3)c^2 + bce, \\ \tfrac{x_1^3}{2}\rho_{22;2} &= -2c^3 + be^2 + (a-2d)ce, \end{aligned} \tag{5.22}$$

con $\rho_{ij;k} = (D_{\partial_k}\rho)(\partial_i, \partial_j)$. Además, (5.20) implica que el tensor de Ricci ρ es no degenerado si y sólo si

$$\begin{aligned} b^2e^2 - \left\{d^3 - 2ad^2 + (a^2 + 4bc - 1)d - 2abc\right\} e \\ - \left\{d^2 - 2ad + 4bc - 1\right\} c^2 = 0. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Igual que en el Teorema 5.25 analizaremos las soluciones de esta ecuación. Primero, supongamos que $b = 0$, con lo que la ecuación (5.23) se reduce a

$$dea^2 - 2d(c^2 + de)a + (d^2 - 1)(c^2 + de) = 0, \tag{5.24}$$

obteniendo así los siguientes casos:

(B.1): $d = 0$. En este caso, $c = 0$ y se tiene que la superficie es de curvatura recurrente es decir, $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = -\frac{2}{x_1}dx^1$.

(B.2): $d \neq 0$, $e = 0$, $c = 0$. Ahora, $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = -\frac{2+2a}{x_1}dx^1$.

(B.3): $d \neq 0$, $e = 0$, $c \neq 0$. Para este caso se tiene que necesariamente a es de la forma $a = (2d)^{-1}(d^2 - 1)$ y se tiene que la conexión afín nunca es de curvatura recurrente (caso (i.1)). En efecto, escribiendo $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2$, se obtiene que

$$\rho_{22;2} - \omega_2\rho_{22} = \frac{2c^2(x_1\omega_2 - 2c)}{x_1^3},$$

con lo que $\omega_2 = \frac{2c}{x_1}$ y, bajo esta condición, $\rho_{12;2} - \omega_2\rho_{12} = \frac{2c^2}{x_1^3}$, que nunca se anula puesto que supusimos que $c \neq 0$

(B.4): $d \neq 0 \neq e$. Puesto que $d \neq 0 \neq e$, (5.24) puede ser vista como una ecuación de segundo grado en a y por lo tanto se tiene que $a = (de)^{-1}(d(c^2+de)+\varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}})$, con $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ y $\zeta = d(c^2d+e)(c^2+de) \geq 0$. Entonces, un cálculo directo nos muestra que la conexión afín no es recurrente de donde se obtiene el caso (i.2) o (i.3). En efecto, escribamos $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2$. Si tomamos $c = 0$, se obtiene que $\zeta = d^2e^2 \geq 0$, mientras que $a = d \pm 1$, y si calculamos $\rho_{12;2} - \omega_2\rho_{12} = \frac{-2\varepsilon|d||e|}{x_1^3}$, lo cual es siempre no nulo (caso (i.2)). Si suponemos ahora que $c \neq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} x_1^3\,(\rho_{12;1} - \omega_1\rho_{12}) &= \tfrac{c^3d(1-2d)-cde(2d^2+d-2)-\varepsilon c(2d-1)\zeta^{\frac{1}{2}}}{de} - c(d-1)x_1\omega_1, \\ x_1^3\,(\rho_{12;2} - \omega_2\rho_{12}) &= -2\varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}} - c(d-1)x_1\omega_2. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Para $d = 1$ la segunda expresión se reduce a $\rho_{12;2} - \omega_2\rho_{12} = \frac{-2\varepsilon|c^2+e|}{x_1^3}$; por tanto, si $e \neq -c^2$ la superficie no es de curvatura recurrente (caso (i.3) con $d = 1$), mientras que si $e = -c^2$

se puede comprobar que $D\rho = 0$. Ahora bien si tenemos que $d \neq 1$, ω_1 y ω_2 vienen determinados por (5.25) y obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&dx_1^3\,(\rho_{22;1} - \omega_1\rho_{22}) = c^2 + de - \varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}},\\
&\tfrac{1}{2}c(d-1)ex_1^3\,(\rho_{11;2} - \omega_2\rho_{11}) = (c^2+de)(d(c^2+e) + \varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}}),\\
&\tfrac{1}{2}c(d-1)dx_1^3\,(\rho_{22;2} - \omega_2\rho_{22}) = (c^2+de)(d(c^2+e) - \varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}}).
\end{aligned}
$$

Cabe destacar que estas tres expresiones no se pueden anular simultáneamente para $e \neq -\frac{c^2}{d}$ y por tanto en este caso la superficie no es de curvatura recurrente (caso (i.3) con $d \neq 1$); para $e = -\frac{c^2}{d}$ se tiene que $\omega = -\frac{2}{x_1}dx^1$ y se obtiene que $D\rho = \omega \otimes \rho$ con lo que para este caso la superficie es de curvatura recurrente.

La prueba acaba analizando el caso en el que $b \neq 0$

(B.5): Podemos ver la (5.23) como una ecuación de segundo grado para la variable e,

$$e = \frac{1}{2b^2}\left\{((d-a)^2 + 4bc - 1)d - 2abc + \varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}}\right\},$$

con $\zeta = ((d-a+1)d + 2bc)((d-a-1)d+2bc)((d-a)^2+4bc-1) \geq 0$ y $\varepsilon \in \{-1,1\}$. Escribamos $D\rho = \omega\otimes\rho$, con $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2$. En primer lugar analizaremos el caso en el que $d = 0$; así tenemos que

$$\frac{1}{2b}x_1^3\,(\rho_{11;2} - \omega_2\rho_{11}) = c(2c + x_1\omega_2).$$

Si suponemos que $c \neq 0$, se tiene que $\omega_2 = -\frac{2c}{x_1}$ y bajo esta condición se tiene que $\rho_{12;2} - \omega_2\rho_{12} = -\frac{2c^2}{x_1^3}$, la cual no se anula nunca puesto que supusimos que $c \neq 0$ (caso (ii.1)); en cambio si suponemos que $c = 0$, se obtiene que $D\rho = 0$.

Por último analizaremos el caso en el que $d \neq 0$. En este caso obtenemos que

$$
\begin{aligned}
x_1^3\,(\rho_{11;1} - \omega_1\rho_{11}) &= (a+d+3)((d-a-1)d+2bc) + \varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}}\\
&\quad + ((d-a-1)d+2bc)x_1\omega_1,\\
x_1^3\,(\rho_{11;2} - \omega_2\rho_{11}) &= b^{-1}\left\{((d-a-1)d+2bc)((d-a+1)d+2bc) + d\varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}}\right\}\\
&\quad + ((d-a-1)d+2bc)x_1\omega_2.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, si $(d-a-1)d + 2bc = 0$, i.e, $c = \frac{(a-d+1)d}{2b}$, las expresiones anteriores se anulan y además $\rho_{12;1} - \omega_1\rho_{12} = \frac{(a^2-(d-1)^2)d}{2bx_1^3}$. Se tiene que para $a \neq \pm(d-1)$ la superficie no es de curvatura recurrente (caso (ii.2)), mientras que si $a = \pm(d-1)$ se tiene que $D\rho = 0$. En cambio si tenemos que $c \neq \frac{(a-d+1)d}{2b}$ entonces ω_1 y ω_2 vienen determinadas por las expresiones anteriores y se obtiene que

$$2b^{-1}d(\rho_{12;1} - \omega_1\rho_{12}) - (\rho_{12;2} - \omega_2\rho_{12}) = \frac{2c(bc-ad)}{bx_1^3}.$$

Con lo cual si $c(bc - ad) \neq 0$ la superficie no es recurrente obteniendo así el caso (ii.3). Si $c = 0$, entonces $c \neq \frac{(a-d+1)d}{2b}$ lo que nos lleva a que $a \neq d-1$ y $D\rho = \omega \otimes \rho$ si y sólo si $e = 0$ (caso (ii.4)). Si $bc - ad = 0$, entonces $c \neq \frac{(a-d+1)d}{2b}$ se tiene que $a \neq 1 - d$, y $D\rho = \omega \otimes \rho$ si y sólo si $e = -\frac{a^2 d}{b^2}$ (caso (ii.5)). □

5.4.3. Superficies proyectivamente llanas

Esta última parte está dedicada al estudio de las superficies proyectivamente llanas.

Teorema 5.28. *Sea (M, D) una superficie con curvatura recurrente y conexión afín D libre de torsión. Entonces (M, D) es proyectivamente llana si y sólo si es localmente simétrica o existe un sistema de coordenadas (x_1, x_2) donde el único símbolo de Christoffel no nulo es Γ_{11}^2 verificando $\partial_2 \Gamma_{11}^2 \neq 0$ pero $\partial_2 \partial_2 \Gamma_{11}^2 = 0$.*

Demostración. En la demostración trataremos por separado los casos equiafín y no equiafín.

Caso equiafín. Como el tensor de Ricci determina por completo la curvatura, es equivalente que la superficie sea de curvatura recurrente a que sea Ricci recurrente, es decir, $D\rho = \omega \otimes \rho$, donde ω es una 1-forma. Es bien conocido que la 1-forma ω se anula en todo punto o no se anula en ninguno [29], con lo que podemos suponer que no se anula en ninguno.

Sea (e_1, e_2) un sistema de coordenadas en un entorno de un punto. Puesto que la superficie es equiafín la condición de ser proyectivamente llana se traduce en

$$\begin{aligned} D_1 \rho_{21} &= D_2 \rho_{11}, \\ D_2 \rho_{12} &= D_1 \rho_{22}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Teniendo en cuenta que la superficie es de curvatura recurrente y escribiendo la 1-forma ω como $\omega = \omega_1 de_1 + \omega_2 de_2$, se tiene que estas condiciones son equivalentes a

$$\begin{aligned} \omega_1 \rho_{21} &= \omega_2 \rho_{11}, \\ \omega_2 \rho_{12} &= \omega_1 \rho_{22}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Como ω es no nula, podemos suponer por ejemplo que en el entorno fijado $\omega_1 \neq 0$. Ahora, si $\omega_2 = 0$ se tiene que $\rho_{21} = \rho_{22} = 0$ y por lo tanto el tensor de Ricci es degenerado. En el caso en que $\omega_1 \neq 0$ y $\omega_2 \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \tfrac{\omega_1}{\omega_2} \rho_{21}, \\ \rho_{22} &= \tfrac{\omega_2}{\omega_1} \rho_{12}, \end{aligned} \tag{5.28}$$

de donde se sigue que $\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} = \frac{\omega_1}{\omega_2}\rho_{21}\frac{\omega_2}{\omega_1}\rho_{12} - \rho_{12}\rho_{21} = 0$, con lo que de nuevo el tensor de Ricci es degenerado.

Analizamos ahora los diferentes casos de superficies con curvatura recurrente que tienen tensor de Ricci degenerado. Por el Teorema 5.21, sólo el caso 2) es posible. En ese caso, es inmediato comprobar que

$$D_{\partial_1}\rho_{12} = 0, \quad D_{\partial_2}\rho_{11} = \partial_2\partial_2\Gamma_{11}^2, \tag{5.29}$$

para un cierto sistema de coordenadas (x_1, x_2). Entonces, si $\partial_2\partial_2\Gamma_{11}^2 = 0$ la superficie es proyectivamente llana, y es localmente simétrica si y sólo si $\partial_1\partial_2\Gamma_{11}^2 = 0$.

Caso no equiafín. Si la superficie no es equiafín, el tensor de Ricci puede descomponerse en su parte simétrica y su parte antisimétrica, $\rho = \rho_s + \rho_a$. Supondremos en primer lugar que $\rho_s = 0$. En tal caso el tensor de Ricci de la superficie es antisimétrico y por lo tanto la superficie es afín-Osserman (Teorema 5.10). Como la superficie es afín-Osserman, por el Teorema 5.8 (ver también [12]) se tiene que su extensión de Riemann es Osserman y por lo tanto es Einstein. Además por ser M proyectivamente llana su extensión de Riemann es conformemente llana por lo que (T^*M, g_D) es de curvatura seccional constante. Pero toda extensión de Riemann tiene curvatura escalar cero con lo que se tiene que (T^*M, g_D) es una variedad llana y por lo tanto M también.

Nos queda por analizar el caso en el que ρ_s y ρ_a son no nulos, que se corresponden con los casos 1), 3) y 5) del Teorema 5.21. Veremos que en todos estos casos M no es proyectivamente llana. Comenzando por el caso 1), la conexión está dada por

$$D_{\partial_1}\partial_1 = \partial_2\theta\ \partial_1 + (\partial_1\theta - \partial_2\theta)\ \partial_2, \qquad D_{\partial_1}\partial_2 = \partial_2\theta\ \partial_2, \tag{5.30}$$

con θ una función escalar verificando que $\partial_2\partial_2\theta \neq 0$. En este caso, se obtiene que el tensor de Weyl de la extensión de Riemann de esta superficie verifica

$$W_{1'121} = \partial_2\partial_2\theta \neq 0,$$

por lo que la extensión de Riemann no es conformemente llana y por lo tanto M no es proyectivamente llana.

Veamos ahora el tipo $3) - (i)$, cuya conexión viene dada por

$$D_{\partial_2}\partial_2 = \theta\ \partial_2, \tag{5.31}$$

con $\partial_1\theta \neq 0$, en cuyo caso

$$W_{1'121} = -\tfrac{1}{2}\partial_1\theta \neq 0,$$

por lo que de nuevo la extensión de Riemann no es conformemente llana y así M no es proyectivamente llana.

En el caso $3) - (ii)$ la conexión viene dada por

$$D_{\partial_1}\partial_1 = \frac{\partial_1\varphi}{1-c}\ \partial_1, \qquad D_{\partial_2}\partial_2 = \frac{\partial_2\varphi}{1+c}\ \partial_2, \tag{5.32}$$

siendo φ una función escalar verificando que $\partial_2\partial_1\varphi \neq 0$, y c una constante distinta de 0 y ± 1. En este caso, el tensor de Weyl de la extensión de Riemann cumple que

$$W_{1'121} = \tfrac{c\ \partial_2\partial_1\varphi}{1-c^2} \neq 0.$$

Ahora bien como $c \neq 0, \pm 1$ y $\partial_2\partial_1\varphi \neq 0$ entonces $W_{1'121}$ nunca se anula y por lo tanto (T^*M, g_D) no es conformemente llana y así M no es proyectivamente llana.

Sólo queda por analizar el caso 5), en el que la conexión de la superficie viene dada por

$$\begin{aligned}
D_{\partial_1}\partial_1 &= \frac{\partial_1\psi + c\partial_2\psi}{1+c^2}\,\partial_1 - \frac{-c\partial_1\psi + \partial_2\psi}{1+c^2}\partial_2,\\
D_{\partial_1}\partial_2 &= \frac{-c\partial_1\psi + \partial_2\psi}{1+c^2}\partial_1 + \frac{\partial_1\psi + c\partial_2\psi}{1+c^2}\,\partial_2,\\
D_{\partial_2}\partial_2 &= -\frac{\partial_1\psi + c\partial_2\psi}{1+c^2}\,\partial_1 + \frac{-c\partial_1\psi + \partial_2\psi}{1+c^2}\partial_2,
\end{aligned}$$

donde ψ es una función escalar que verifica $\partial_1\partial_1\ \psi + \ \partial_2\partial_2\ \psi \neq 0$ y c es una constante real no nula. Con un cálculo directo se obtiene que el tensor de Weyl de la extensión de Riemann verifica que

$$W_{1'121} = \tfrac{c(\partial_1\partial_1\psi + \partial_2\partial_2\psi)}{1+c^2} \neq 0.$$

Por lo tanto, (T^*M, g_D) no es conformemente llana y así M no es proyectivamente llana.

$\square$

Pasaremos a analizar las superficies afín-IP localmente homogéneas y proyectivamente llanas. Para empezar tenemos la siguiente observación:

Observación 5.29. Toda superficie localmente homogénea tipo A es proyectivamente llana, puesto que es localmente equiafín y en un entorno de cada punto existe un sistema de coordenadas (x_1, x_2) de forma que

$$\begin{aligned}
D_{\partial_1}\rho_{22} = D_{\partial_2}\rho_{12} &= 2(bce + d(-ae + de - cf)),\\
D_{\partial_2}\rho_{11} = D_{\partial_1}\rho_{12} &= 2(-acd + b(c^2 + de - cf)).
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Teorema 5.30. *Sea (M, D) una superficie localmente homogénea tipo B. Entonces si es proyectivamente llana existe un sistema de coordenadas en el que la conexión se puede expresar de una de las siguientes formas:*

i) $e = c = 0$, *ó*

ii) $e \neq 0$, $c = 0$, $b = 0$, $a = 1 + 2d$, *ó*

iii) $e \neq 0$, $c \neq 0$, $a = \frac{3c^2+2de+e}{e}$, $b = \frac{-c^3-ce}{e^2}$.

Demostración. En primer lugar nótese que si una superficie localmente homogénea tipo B es proyectivamente llana necesariamente tiene Ricci simétrico, ya que un cálculo directo nos muestra que el término $W_{1211'}$ de la extensión de Riemann es $\frac{c+f}{2x_1^2}$, con lo que $c = -f$, siendo esta la condición necesaria y suficiente para que una superficie homogénea tipo B tenga Ricci simétrico. Ahora, bajo esta condición, la superficie es proyectivamente llana si

$$
\begin{aligned}
D_{\partial_1}\rho_{21} - D_{\partial_2}\rho_{11} &= \tfrac{c(a-2d+2)+3be}{x_1^3} = 0,\\
D_{\partial_1}\rho_{22} - D_{\partial_2}\rho_{12} &= \tfrac{2\left(3c^2-ae+2de+e\right)}{x_1^3} = 0.
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

Teniendo en cuenta esto, las superficies proyectivamente llanas se obtienen como las soluciones del sistema de ecuaciones dado por (5.34). Analizamos en primer lugar el caso en el que $e = 0$; entonces el sistema se reduce a

$$
\begin{aligned}
&c(a-2d+2) = 0,\\
&6c^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

por lo que debe ser $e = c = 0$ para que la superficie sea proyectivamente llana.

Supongamos ahora que $e \neq 0$ y $c = 0$; entonces el sistema (5.34) se reduce a

$$
\begin{aligned}
&3be = 0,\\
&2\,(-ae + 2de + e) = 0,
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

con lo que $b = 0$ y $a = 1 + 2d$ para que la superficie sea proyectivamente llana.

Por último sólo nos queda por analizar el caso en el que $e \neq 0$ y $c \neq 0$. En este último caso las soluciones del sistema (5.34) vienen dadas por $a = \frac{3c^2+2de+e}{e}$ y $b = \frac{-c^3-ce}{e^2}$. □

Observación 5.31. A modo de resumen, es conveniente señalar que todas las conexiones homogéneas de tipo A son proyectivamente llanas, y son IP si y solo si son recurrentes. Las conexiones homogéneas de tipo B son proyectivamente llanas en las condiciones establecidas en el Teorema 5.30 y, en tal caso, son IP las correspondientes a los casos (*i*), (*ii*) si $d = 0$ ó $d = -2$, y (*iii*) si $d = -\frac{c^2}{e}$ ó $d = -\frac{c^2}{e} - 2$.

Bibliografía

[1] Z. Afifi, Riemann extensions of affine connected spaces, *Quart. J. of Math. Oxford (2)* (1954), 312–320.

[2] D. M. Alekseevski, N. Blažić, N. Bokan, Z. Razić, Self dual and pointwise Osserman spaces, *Arch. Math. (Brno)* **35** (1999), 193–201.

[3] N. Blažić, N. Bokan, Z. Razić, Osserman pseudo-Riemannian manifolds of signature (2,2), *J. Austr. Math. Soc* **71** (2001), 367–395.

[4] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, R. Vázquez-Lorenzo, Conformally Osserman four-dimensional manifolds whose conformal Jacobi operators have complex eigenvalues, *Proc. R. Soc. A* **462** (2006), 1425–1441.

[5] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, R. Vázquez-Lorenzo, Four-dimensional Osserman-Ivanov-Petrova metrics of neutral signature, *Class. Quantum Grav.* **24** (2007), 2343–2355.

[6] Q. S. Chi, Curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces, *J. Diff. Geom.* **28** (1988), 187–202.

[7] M. Dajczer, K. Nomizu, On sectional curvature of indefinite metrics II, *Math. Ann.* **247** (1980), 279–282.

[8] M. Dajczer, K. Nomizu, On the boundedness of the Ricci curvature of an indefinite metric, *Bol. Soc. Brasil. Mat* **11** (1980), 267–272.

[9] J. C. Díaz-Ramos, E. García-Río, R. Vázquez-Lorenzo, Four-dimensional Osserman metrics with nondiagonalizable Jacobi operators, *J. Geom. Anal.* **16** (2006), 39–52.

[10] E. García-Río, A. Haji-Badali, R. Vázquez-Lorenzo, Lorentzian 3-manifolds with special curvature operators, *Class. Quantum Grav.* **25** (2008), 015003.

[11] E. García-Río, D. N. Kupeli, M. E. Vázquez-Abal, R. Vázquez-Lorenzo, Affine Osserman connections and their Riemann extensions, *Differential Geom. Appl.* **11** (1999), 145–153.

[12] E. García-Río, D. N. Kupeli, R. Vázquez-Lorenzo, *Osserman Manifolds in Semi-Riemannian Geometry*, Lecture Notes in Mathemathics **1777**, Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg 2002.

[13] P. Gilkey, J. V. Leahy, H. Sadofsky, Riemannian manifolds whose skew-symmetric curvature operator has constant eigenvalues, *Indiana Univ. Math. J.* **48** (1999), 615–634.

[14] P. Gilkey, A. Swann, L. Vanhecke, Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator, *Quart. J. Math. Oxford* **46** (1995), 299–320.

[15] P. Gilkey, *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemannian Curvature Tensors*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.

[16] P. Gilkey, R. Ivanova, T. Zhang, Szabó Osserman IP pseudo-Riemannian manifolds, *Publ. Math. Debrecen* **62** (2003), 387–401

[17] S. Ivanov, I. Petrova, Riemannian manifold in which the skewsymmetric curvature operator has pointwise constant eigenvalues, *Geom. Dedicata* **70** (1998), 269–282.

[18] S. Ivanov, I. Petrova, Riemannian manifold in which certain curvature operator has constant eigenvalues along each circle, *Ann. Global Anal. Geom.* **15** (1997), 157–171.

[19] O. Kowalski, B. Opozda, Z. Vlášek, A classification of locally homogeneous connections on 2-dimensional manifolds via group-theoretical approach, *Cent. Eur. J. Math.* **2** (2004), 87–102.

[20] O. Kowalski, B. Opozda, Z. Vlášek, A classification of locally homogeneous affine connections with skew-symmetric ricci tensor on 2-dimensional manifolds, *Monatsh. Math.* **130** (2000), 109–125.

[21] K. Nomizu, T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[22] K. Nomizu, K. Yano, On circles and spheres in Riemannian geometry, *Math. Ann.* **210** (1974), 163–170.

[23] Z. Olszak, On the existence of generalized complex space forms, *Israel J. Math.* **210** (1989), 214–218.

[24] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry, with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[25] K. J. Pearson, T. Zhang, The non existence of rank 4 IP tensors in signature (1,3), *Int. J. Math. Math. Sci.* **31** (2002), 259–269.

[26] F. Tricerri, L. Vanhecke, Curvature Tensors on Almost Hermitian Manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981), 365–397.

[27] A. G. Walker, Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, *Quart. J. Math. Oxford* **(2) 1** (1950), 69–79.

[28] Y. C. Wong, Two Dimensional Linnear Connexions with Zero Torsion and Recurrent Curvature, *Monatsh. Math* **68** (1964), 175–184.

[29] Y. C. Wong , Recurrent tensors on a linearly connected differentiable manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.* **99** (1961), 223–232.

[30] K. Yano, S. Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundle*, Marcel Dekker, New York, 1973.