MATERIA
Análise Económica dos Mercados Financeiros II

TITULACIÓN
Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros

unidade didáctica 1

Ciencias Sociais e Xurídicas

# Equilibrio e valoración de activos


**Juan Carlos Reboredo Nogueira**

Departamento: Fundamentos da Análise Económica
Facultade ou Escola: Facultade de CC Económicas e Empresariais



unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

**Deseño e maquetación**
J. M. Gairí

**Edita**
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

ISBN
978-84-15876-37-3

**MATERIA: Análise Económica dos mercados financeiros II**
**TITULACIÓN: Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros**
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

## ÍNDICE

## INTRODUCIÓN

Esta unidade didáctica forma parte do curso de Análise Económica dos Mercados Financeiros II que se imparte no primeiro cuadrimestre do Máster en Economía: Organización Industrial e Mercados Financeiros.

O propósito da unidade é introducir o modelo de valoración de activos de equilibrio no contexto de mercados completos e incompletos con e sen activos Arrow-Debreu. Así, analízase como as decisións financeiras levan aparelladas a elección dunha senda temporal de consumo óptima e como estas decisións permiten ao individuo elixir o perfil de risco acorde coas súas preferencias. Finalmente, analízase a influencia do consumo agregado na determinación do valor dun activo financeiro, obtendo a valoración de equilibrio dada polo modelo CCAPM.

A comprensión desta unidade reviste un grao de dificultade elevado na mediada que require dun elevado nivel de abstracción e do manexo de técnicas de optimización e coñecementos de estatística. É por iso que ao longo da unidade se utilizan numerosos exemplos numéricos que tratan de ilustrar a conexión entre as intuicións financeiras dos modelos e a súas implicacións, así como as limitacións prácticas dos seus supostos básicos.

## PALABRAS CLAVE

Equilibrio, valoración, activos Arrow-Debreu, mercados completos, mercados incompletos, CCAPM.

## METODOLOXÍA

- A impartición do curso sempre adoptará como punto de partida as intuicións financeiras, que se tomarán como base, e a enmarcación destas intuicións no contexto do problema de valoración.
- Utilizarase preferentemente a linguaxe gráfica, máis intuitivo e máis fácil de asimilar polo estudante, pasando posteriormente á formulación dos problemas considerados en termos formais.
- Ilustraranse todos os conceptos con exemplos prácticos que estean próximos a realidade financeira do alumno coa finalidade de que o alumno aprenda a aplicar os instrumentos de valoración a activos financeiros con características semellantes.
- Propoñerase unha serie de exercicios prácticos que ilustren a aplicabilidade e utilidade dos coñecementos adquiridos.
- Fomentarase a participación do alumno, tanto no desenvolvemento dos contidos teóricos como na resolución dos casos prácticos.

## MERCADOS COMPLETOS

### 1. Equilibrio con activos Arrow-Debreu

Consideramos o problema de elección de carteira onde o investidor ten como obxectivo maximizar a súa utilidade esperada e non ten poder de mercado para determinar os prezos.
Consideramos un mercado coas seguintes características:

- Individuos: i = 1, . . ., I, adversos ao risco
- 2 períodos de tempo, $t = 0, \quad t = 1$
- Existe incerteza no momento t=1: s=1,...,S
- Dotacións iniciais de consumo nos diferentes momentos de tempo e estados da natureza: $e_0^i$ , $e_s^i$
- Consumos non duradeiro: $\left\{c_0^i, c_s^i \text{ para } s \in \Omega; i = 1,\ldots,I,\ s = 1,\ldots,S\right\}$
- Oferta igual a demanda:
  $$\sum_{i=1}^{I} c_0^i = C_0 \,,\ \sum_{i=1}^{I} c_s^i = C_s, \quad \text{para calquera estado } s \in \Omega$$
- No mercado intercámbianse tantos activos Arrow-Debreu (A-D) como estados da natureza (mercado completo)
  $\phi_s$ prezo hoxe dun activo Arrow-Debreu
  $\phi_0$ prezo das unidades de consumo hoxe, 1 unidade.
- O mercado de activos baléirase: $\sum_{i=1}^{I} q_s = 0 \quad \forall s$

Baixo estes supostos, podemos determinar o prezo de equilibrio dos activos que se intercambian no mercado coa condición de baleirado de mercado. As decisións dos individuos serán tales que:

$$\max_{\left\{c_0^i, c_s^i;\, i=1,\ldots,I\right\}} U^i\left(c_0^i\right) + \sum_{s=1}^{S} \pi_{is} U^i\left(c_s^i\right)$$

$$\text{t.q.} \quad \phi_0 c_0^i + \sum_{s=1}^{S} \phi_s c_s^i \le \phi_0 e_0^i + \sum_{s=1}^{S} \phi_s e_s^i, \quad c_0^i, c_s^i \ge 0$$

Resolvendo este problema de optimización, teremos que:

$$L = U^i\left(c_0^i\right) + \sum_{s=1}^{S} \pi_{is} U^i\left(c_s^i\right) + \lambda^i \left[\phi_0 e_0^i + \sum_{s=1}^{S} \phi_s e_s^i - \phi_0 c_0^i - \sum_{s=1}^{S} \phi_s c_s^i\right]$$

Das condicións de primeiro orde (C.P.O.), derivamos os prezos dos A-D:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U^i}{\partial c_0^i} = \lambda^i \phi_0 \\ &\pi_{is} \frac{\partial U^i}{\partial c_s^i} = \lambda^i \phi_s \ ;\ s = 1,\ldots,S \end{aligned}\right\} \qquad \frac{\pi_{is} \partial U^i / \partial c_s^i}{\partial U^i / \partial c_0^i} = \frac{\phi_s}{\phi_0} \ ;\ s = 1,\ldots,S \qquad \frac{\pi_{is} \partial U^i / \partial c_s^i}{\pi_{ik} \partial U^i / \partial c_k^i} = \frac{\phi_s}{\phi_k} \ ;\ s \ne k$$

Prezo do activo A-D

$$\phi_0 e_0^i + \sum_{s=1}^{S} \phi_s e_s^i = \phi_0 c_0^i + \sum_{s=1}^{S} \phi_s c_s^i$$

De acordo coas C.P.O., o prezo relativo dos A-D está determinado pola “RMS” entre o consumo presente e consumo futuro ou entre os consumos futuros en diferentes estados da natureza.

<u>Exemplo 1</u>:

Un individuo con: t=0, 1; s =1, 2; $\phi_1 = 0{,}60$, $\phi_2 = 0{,}50$ $e_0 = 10$ $e_1 = 5$ $e_2 = 2$

Preferencias: $u(c_0, c_s) = \ln(c_0) + \left[\frac{1}{2}\ln(c_1) + \frac{1}{2}\ln(c_2)\right]$

$$\max_{c_0,c_1,c_2} \ln(c_0) + \left[\frac{1}{2}\ln(c_1) + \frac{1}{2}\ln(c_2)\right] \quad \text{t.q.} \quad c_0 + \phi_1 c_1 + \phi_2 c_2 \le 10 + \phi_1 5 + \phi_2 2$$

$$L = \ln(c_0) + \left[\frac{1}{2}\ln(c_1) + \frac{1}{2}\ln(c_2)\right] + \lambda\left[14 - c_0 - 0{,}6\, c_1 - 0{,}5\, c_2\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial c_0} = \dfrac{1}{c_0} - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{c_1} - 0{,}6\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{c_2} - 0{,}5\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 14 - c_0 - \phi_1 c_1 - \phi_2 c_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{c_0} \\ c_0 = 1{,}2 c_1 \\ c_0 = c_2 \\ 1{,}2 c_1 + 0{,}6 c_1 + 0{,}5 \cdot 1{,}2 c_1 = 14 \end{array}\right\}$$

Optimo:

$$\boxed{\begin{array}{l} c_0 = 7 \\ c_1 = 5{,}83 \\ c_2 = 7 \end{array}}$$

$u(c_0, c_s) = 3{,}45$

$u(c_0^*, c_s^*) = 3{,}80$

<u>Exemplo 2</u>:

2 individuos; t = 0, 1; s =1, 2; $e_0^1 = 5$ $e_1^1 = 5$ $e_2^1 = 2$ , $e_0^2 = 15$ $e_1^2 = 3$ $e_2^2 = 8$

Preferencias:

$$\left\{\begin{array}{l} u(c_0^1, c_s^1) = c_0^1 + \left[\frac{1}{2}\ln(c_1^1) + \frac{1}{2}\ln(c_2^1)\right] \\ u(c_0^2, c_s^2) = c_0^2 + \left[\frac{1}{2}\ln(c_1^2) + \frac{1}{2}\ln(c_2^2)\right] \end{array}\right.$$

Individuo 1:

$$\max_{c_0,c_1,c_2} c_0^1 + \left[\frac{1}{2}\ln(c_1^1) + \frac{1}{2}\ln(c_2^1)\right] \quad \text{t.q.} \quad c_0^1 + \phi_1 c_1^1 + \phi_2 c_2^1 \le 5 + \phi_1 5 + \phi_2 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial c_0} = 1 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{c_1^1} - \phi_1\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial c_2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{c_2^1} - \phi_2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 5 + \phi_1 5 + \phi_2 2 - c_0^1 - \phi_1 c_1^1 - \phi_2 c_2^1 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ c_1^1 = \dfrac{1}{2\phi_1} \\ c_2^1 = \dfrac{1}{2\phi_2} \\ 5 + \phi_1 5 + \phi_2 2 = c_0^1 + \phi_1 c_1^1 + \phi_2 c_2^1 \end{array}\right\}$$

Individuo 2:

$$\max_{c_0,c_1,c_2} c_0^2 + \left[\frac{1}{2}\ln\left(c_1^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(c_2^2\right)\right] \quad \text{t.q.} \quad c_0^2 + \phi_1 c_1^2 + \phi_2 c_2^2 \le 15 + \phi_1 3 + \phi_2 8$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial c_0} = 1 - \lambda = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{c_1^2} - \phi_1 \lambda = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial c_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{c_2^2} - \phi_2 \lambda = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 15 + \phi_1 3 + \phi_2 8 - c_0^2 - \phi_1 c_1^2 - \phi_2 c_2^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\lambda = 1 \\ &c_1^2 = \frac{1}{2\phi_1} \\ &c_2^2 = \frac{1}{2\phi_2} \\ &15 + \phi_1 3 + \phi_2 8 = c_0^2 + \phi_1 c_1^2 + \phi_2 c_2^2 \end{aligned}\right\}$$

Equilibrio: baleirado de mercado

$$\left.\begin{aligned} c_0^1 + c_0^2 &= 20 \\ c_1^1 + c_1^2 &= 8 \\ c_2^1 + c_2^2 &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{1}{2\phi_1} + \frac{1}{2\phi_1} &= 8 \\ \frac{1}{2\phi_2} + \frac{1}{2\phi_2} &= 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \phi_1 &= 0{,}125 \\ \phi_2 &= 0{,}10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} c_1^1 = c_1^2 &= 4 \\ c_2^1 = c_2^2 &= 5 \end{aligned}$$

Da restrición orzamentaria de cada axente podemos determinar os consumos óptimos no momento presente:

$$c_0^1 = 5 + 0{,}125 \cdot 5 + 0{,}10 \cdot 2 - 0{,}125 \cdot 4 - 0{,}10 \cdot 5 = 4{,}825$$

$$c_0^2 = 15 + 0{,}125 \cdot 3 + 0{,}10 \cdot 8 - 0{,}125 \cdot 4 - 0{,}10 \cdot 5 = 15{,}175$$

En resumo:

| | ANTES | | | | EQUILIBRIO | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **t = 0** | **t = 1** | | **u(·)** | **t = 0** | **t = 1** | | **u(·)** |
| | | **s = 1** | **s = 2** | | | **s = 1** | **s = 2** | |
| individuo 1 | 5 | 5 | 2 | 6.15 | 4.825 | 4 | 5 | 6.32 |
| individuo 2 | 15 | 3 | 8 | 16.59 | 15.175 | 4 | 5 | 16.67 |
| Total | **20** | **8** | **10** | | **20** | **8** | **10** | |

Ademais, teremos que:

- O mercado de activos está en equilibrio: oferta e demanda de activos A-D iguálanse
- O resultado de equilibrio depende das probabilidades que cada individuo teña sobre os distintos estados da natureza, pero a existencia do equilibrio é independente da discrepancia ou non entre os individuos sobre as probabilidades (ver condicións de optimalidade).

O equilibrio competitivo que acabamos de derivar ten dúas características fundamentais:

**A.** A asignación de equilibrio competitivo é óptima no sentido de Pareto: non existe unha reasignación alternativa que mellore o benestar dun individuo sen empeorar o benestar do outro individuo. Podemos demostralo da seguinte maneira:

$$\max_{\{c_{i0},c_{is};i=1,\dots,I\}} L=\sum_{i=1}^{I}\lambda_i\left[\sum_{s=1}^{S}\pi_{is}U^i\left(c_0^i,c_s^i\right)\right]+\phi_0\left(C_0-\sum_{i=1}^{I}c_0^i\right)+\sum_{s=1}^{S}\phi_s\left(C_s-\sum_{i=1}^{I}c_s^i\right)$$

C.P.O.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_i\sum_{s=1}^{S}\pi_{is}\dfrac{\partial U^i}{\partial c_0^i}=\phi_0\quad ;\ i=1,\dots,I\\[2ex] \lambda_i\pi_{is}\dfrac{\partial U^i}{\partial c_s^i}=\phi_s\quad ;\ s=1,\dots,S\ ;\ i=1,\dots,I\end{array}\right\}\quad \frac{\pi_{is}\partial U^i/\partial c_s^i}{\sum_{s=1}^{S}\pi_{is}\partial U\Big/\partial c_0^i}=\frac{\phi_s}{\phi_0}\ ;\ s=1,\dots,S\ ;\ i=1,\dots,I$$

$$\sum_{i=1}^{I}c_s^i=C_s\ ;\ s=1,\dots,S$$

$$\sum_{i=1}^{I}c_o^i=C_0$$

A RMS entre consumo presente e consumo futuro continxente é igual ao cociente dos prezos sombra dos consumos (idénticos para todos os individuos). No óptimo todos os individuos teñen a mesma RMS.

**B.** Distribución do risco en equilibrio: a asignación óptima que se produce co intercambio de activos A-D dá lugar a unha redistribución do risco entre os individuos. Esta distribución depende das seguintes circunstancias:

- Sen risco agregado e con aversión ao risco:

  Exemplo 1: $u\left(c_1,c_2\right)=\frac{1}{2}\left(-e^{-Ac_1}\right)+\frac{1}{2}\left(-e^{-Ac_2}\right)$

| | ANTES | | $A_1=A_2=1$ | | $A_1=1,\quad A_2=2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | t = 1 | | t = 1 | | t = 1 | |
| | s = 1 | s = 2 | s = 1 | s = 2 | s = 1 | s = 2 |
| individuo 1 | 1 | 4 | 2,5 | 2,5 | 3,10 | 3,10 |
| individuo 2 | 4 | 1 | 2,5 | 2,5 | 1,90 | 1,90 |
| Total | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |

  Teremos que:

  - Se os individuos teñen a mesma aversión ao risco, hai un aseguramento mutuo: fondo de mutualidade.
  - Se os individuos teñen distinta aversión ao risco, o individuo menos averso ao risco prové seguro ao máis averso.
  - RMS(1)=RMS(2)=1. Os individuos teñen o mesmo consumo en ambos os estados, aínda que (posiblemente) diferente cantidade entre individuos.

- Con risco agregado e con aversión ao risco:

  Exemplo 2: $u\left(c_1,c_2\right)=\frac{1}{2}\left(-e^{-Ac_1}\right)+\frac{1}{2}\left(-e^{-Ac_2}\right)$

ANTES

| | t = 1 | | u(·) |
|---|---|---|---|
| | s = 1 | s = 2 | |
| individuo 1 | 1 | 2 | -0,252 |
| individuo 2 | 5 | 8 | -0,004 |
| Total | 6 | 10 | |

$A_1 = A_2 = 1$

| t = 1 | | u(·) |
|---|---|---|
| s = 1 | s = 2 | |
| 3 | 5 | -0,028 |
| 3 | 5 | -0,028 |
| 6 | 10 | |

$A_1 = 1, \quad A_2 = 2$

| t = 1 | | u(·) |
|---|---|---|
| s = 1 | s = 2 | |
| 4.23 | 6.9 | -0,008 |
| 1.77 | 3.1 | -0,016 |
| 6 | 10 | |

Se un individuo é máis rico (independentemente de s): non é posible o intercambio.

ANTES

| | t = 1 | | u(·) |
|---|---|---|---|
| | s = 1 | s = 2 | |
| individuo 1 | 4 | 8 | -0,009 |
| individuo 2 | 10 | 3 | -0,025 |
| Total | 14 | 11 | |

$A_1 = A_2 = 1$

| t = 1 | | u(·) |
|---|---|---|
| s = 1 | s = 2 | |
| 7 | 5.5 | -0,002 |
| 7 | 5.5 | -0,002 |
| 14 | 11 | |

$A_1 = 1, \quad A_2 = 2$

| t = 1 | | u(·) |
|---|---|---|
| s = 1 | s = 2 | |
| 9.56 | 7.56 | 0,000 |
| 4.44 | 3.44 | -0,001 |
| 14 | 11 | |

Cunha distribución desigual entre individuos e estados: é posible o intercambio. O individuo menos adverso provê seguro ao máis adverso.

## 2. Equilibrio sen activos Arrow-Debreu

Consideremos que non se intercambian activos A-D no mercado e en cambio se intercambian j = 1,…,N activos financeiros (bonos e accións) con pagos $X_{js}$ unidades de consumo en t = 1 e s, para s = 1, . . . , S. Ademais, os individuos teñen unas dotacións iniciais de $e_j^i$ de activos e $e_0^i$ unidades de consumo en t = 0.

Podemos replicar o patrón de consumo desexado por medio dunha combinación de activos complexos e construír os activos A-D.

<u>Exemplo</u>:
S = 2 e temos 2 activos con prezos 2€ e 5€ e uns pagos dados por:

$$\begin{array}{cc} s=1 & s=2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Replicamos os fluxos dos activos A-D da seguinte maneira:

Activo A-D para o estado 1: $\alpha \cdot 3 + \beta \cdot 2 = 1$, $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 6 = 0$

Activo A-D para o estado 2: $\delta \cdot 3 + \eta \cdot 2 = 0$, $\delta \cdot 1 + \eta \cdot 6 = 1$

Invertible

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 & -0.125 \\ -0,0625 & 0,1875 \end{pmatrix}$$

E obtemos o prezo dos activos A-D como:
$\phi_1 = 0,375 \cdot 2 - 0,0625 \cdot 5 = 0,438 \quad \phi_2 = -0.125 \cdot 2 + 0,1875 \cdot 5 = 0,6875$ .

O problema dos individuos consiste en determinar o patrón intertemporal de consumo óptimo resolvendo o seguinte problema:

$$\max_{\{c_0^i, z_j^i; i=1,\dots,I\}} U^i\left(c_0^i\right)+\sum_{s=1}^{S}\pi_{is}U^i\left(\sum_{j=1}^{N}z_j^iX_{js}\right)$$

$$\text{t.q.}\quad c_0^i+\sum_{j=1}^{N}P_jz_j^i\le e_0^i+\sum_{j=1}^{N}P_je_j^i$$

As C.P.O. para resolver este problema son:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial U^i}{\partial c_0^i}=\lambda\\ \displaystyle\sum_{s=1}^{S}\pi_{is}\frac{\partial U^i}{\partial z_j^i}X_{js}=\lambda P_j\end{array}\right] \Rightarrow \frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{S}\pi_{is}\boxed{\dfrac{\partial U^i}{\partial z_j^i}}X_{js}}{\boxed{\dfrac{\partial U^i}{\partial c_0^i}}}=P_j;\ j=1,\dots,N \Rightarrow P_j=E\left(MX_j\right);\quad j=1,\dots,N$$

M

$$\Rightarrow \frac{\displaystyle\sum_{s=1}^{S}\pi_{is}\frac{\partial U^i}{\partial z_j^i}X_{js}}{\displaystyle\sum_{s=1}^{S}\pi_{is}\frac{\partial U^i}{\partial z_h^i}X_{hs}}=\frac{P_j}{P_h};\ j\ne h$$

Cada individuo i axusta o seu consumo en t = 0 e a súa carteira de activos financeiros de forma que esta relación se cumpre.

Para un activo de renda fixa: $\dfrac{\partial U^i}{\partial c_0^i}P_f=\dfrac{\partial U^i}{\partial z_j^i}X_f$

A condición de equilibrio podemos reescribila como:

$$\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12} & . & . & X_{1S}\\ X_{21} & X_{22} & . & . & X_{2S}\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ X_{N1} & X_{N2} & . & . & X_{NS}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_{i1}\dfrac{\partial U^i/\partial z_1^i}{\partial U^i/\partial c_0^i}\\ \pi_{i2}\dfrac{\partial U^i/\partial z_2^i}{\partial U^i/\partial c_0^i}\\ .\\ .\\ .\\ \pi_{is}\dfrac{\partial U^i/\partial z_N^i}{\partial U^i/\partial c_0^i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\\ .\\ .\\ .\\ P_N\end{pmatrix}$$

invertible

Deste sistema obtemos o número óptimo, z, de activos de cada tipo.

<u>Exemplo</u>: consideremos 2 activos:

| | Pagos | | Prezo |
|---|---|---|---|
| | s=1 | s=2 | |
| Activo 1 | 4 | 20 | 8 |
| Activo 2 | 5 | 15 | 9 |
| Probabilidades | 0,5 | 0,5 | |

e un individuo con $c_0=20,\quad e_1=2,\quad e_2=1\ (\text{activos 1 y 2})$. O problema do individuo será:

$$\begin{cases} u(c_0,c_s) = c_0 + \left[\frac{1}{2}\ln(z_1 4 + z_2 5) + \frac{1}{2}\ln(z_1 20 + z_2 15)\right] \\ c_0 + z_1 8 + z_2 9 \le 45 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{z_1 4 + z_2 5}4 + \frac{1}{2}\frac{1}{z_1 20 + z_2 15}20 = \lambda 8 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{z_1 4 + z_2 5}5 + \frac{1}{2}\frac{1}{z_1 20 + z_2 15}15 = \lambda 9 \\ c_0 + z_1 8 + z_2 9 = 45 \end{array}\right\} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{1}{z_1 4 + z_2 5} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{z_1 20 + z_2 15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,33 \end{pmatrix}$$

Resultado da asignación:

ANTES

| | t = 0 | t = 1 | | u(·) |
|---|---|---|---|---|
| | | s = 1 | s = 2 | |
| individuo 1 | 20 | 13 | 55 | 23,29 |

EQUILIBRIO

| t = 0 | t = 1 | | u(·) |
|---|---|---|---|
| | s = 1 | s = 2 | |
| 44 | 0,3333 | 5 | 44,25 |

## MERCADOS INCOMPLETOS

### 1. Equilibrio con activos Arrow-Debreu

Se non temos tantos activos A-D como estados da natureza, a asignación óptima reporta menos utilidade aos individuos.

<u>Exemplo</u>:

1 individuo; t = 0, 1; s =1, 2; $\phi_1 = 0,60$, $e_0 = 10 \quad e_1 = 5 \quad e_2 = 2$

$$\max_{c_0,c_1} \ln(c_0) + \left[\frac{1}{2}\ln(c_1) + \frac{1}{2}\ln(2)\right] \quad \text{t.q.} \quad c_0 + 0,6\cdot c_1 + 2 \le 10 + 0,6\cdot 5 + 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial c_0} = \frac{1}{c_0} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{c_1} - 0,6\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 + 0.6\cdot 5 + 2 - c_0 - 0,6\cdot c_1 - 2 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{c_0} \\ c_0 = 1,2\cdot c_1 \\ c_0 + 0,6\cdot c_1 = 13 \end{array}\right\}$$

Optimo:

$$\boxed{\begin{array}{l} c_0 = 7,22 \\ c_1 = 8,66 \\ c_2 = 2 \end{array}}$$

$$u(c_0,c_s) = 3,45 \rightarrow u(c_0^*,c_s^*) = 3,80$$

$$\rightarrow u(c_0^\bullet,c_s^\bullet) = 3,40 \longleftarrow$$ Non habería intercambio

## 2. Equilibrio sen activos Arrow-Debreu

Cando non se intercambian activos A-D e só activos que xeran diferentes fluxos pero o mercado non é completo, as asignacións de consumo resultantes da condición de optimalidade non serán óptimo paretianas: só é posible elixir unha distribución de consumo que é unha función lineal dos pagos dos activos existentes.

<u>Exemplo</u>:

Consideremos S=2 e un único activo:

| | Pagos | | Prezo |
|---|---|---|---|
| | s=1 | s=2 | |
| Activo 1 | 4 | 20 | 8 |
| Probabilidades | 0,5 | 0,5 | |

con $c_0 = 29, \quad e_1 = 3{,}125 \ (\text{activo } 1)$. Teremos que:

$$\left.\begin{array}{l} u(c_0, c_s) = c_0 + \left[\frac{1}{2}\ln(z_1 4) + \frac{1}{2}\ln(z_1 20)\right] \\ c_0 + z_1 8 \le 45 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{z_1 4}4 + \frac{1}{2}\frac{1}{z_1 20}20 = 8 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} z_1 = 0{,}125 \\ z_1 = 0 \end{array}\right]$$

Resultado da asignación:

ANTES

| | t = 0 | t = 1 | | u(·) |
|---|---|---|---|---|
| | | s = 1 | s = 2 | |
| individuo 1 | 29 | 12,5 | 62,5 | 32,33 |

EQUILIBRIO

| t = 0 | t = 1 | | u(·) |
|---|---|---|---|
| | s = 1 | s = 2 | |
| 44 | 0,5 | 2,5 | 44,11 |

Con mercados completos:

ANTES

| | t = 0 | t = 1 | | u(·) |
|---|---|---|---|---|
| | | s = 1 | s = 2 | |
| individuo 1 | 20 | 13 | 55 | 23,29 |

EQUILIBRIO

| t = 0 | t = 1 | | u(·) |
|---|---|---|---|
| | s = 1 | s = 2 | |
| 44 | 0,3333 | 5 | 44,25 |

## EQUILIBRIO E VALORACIÓN CON CONSUMO: CCAPM

Consideramos un axente representativo con preferencias homoxéneas, funcións de utilidade aditivas temporalmente e independentes entre estados que son estritamente crecentes, cóncavas e diferenciables.
Dispone dun activo incerto j con prezo igual a $P_j$ e pagos futuros $X_{js}$, $z_j$ é a cantidade a investir neste activo.
O problema do axente representativo podemos expresalo como:

$$\max_{\{z_j\}} U\left(C_0 - z_j P_j\right) + \sum_{s=1}^{S} \pi_s U\left(C_{1s} + z_j X_{js}\right) \Rightarrow \max_{\{z_j\}} U\left(C_0 - z_j P_j\right) + E\left[U\left(C_1 + z_j X_j\right)\right]$$

C.P.O.

$$P_j U'\left(C_0 - z_j P_j\right) = E\left[U'\left(C_1 + z_j X_j\right) X_j\right] \underset{z_i = 0}{\Rightarrow} P_j = \frac{E\left[U'(C_1) X_j\right]}{U'\left(C_0\right)}$$

Ademais:

$$P_j = \frac{E\left[U'(C_1) X_j\right]}{U'\left(C_0\right)} = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \frac{U'(C_{1s}) X_{js}}{U'\left(C_0\right)} = \sum_{s=1}^{S} \pi_s M X_{js} = \sum_{s=1}^{S} \phi_s X_{js} \quad j = 1, \ldots, N$$

M é o cociente de utilidades marxinais de consumo agregado ou a relación marxinal de substitución entre consumo agregado presente e consumo agregado futuro.

Se consideramos un bono (básico):

$$\frac{1}{1 + r_f} = E\left[\frac{U'(C_1)}{U'\left(C_0\right)}\right] \Rightarrow 1 = E\left[\frac{U'(C_1)(1 + r_f)}{U'\left(C_0\right)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{E\left[U'(C_1)\left(r_j - r\right)\right]}{U'\left(C_0\right)} = 0 \Rightarrow E\left[U'(C_1)\left(r_j - r_f\right)\right] = 0 \quad j = 1, \ldots, N$$

Utilizando a definición de covarianza:

$$E\left(r_j - r_f\right) = -\left\{\frac{1}{E\left[U'(C_1)\right]}\right\} \operatorname{cov}\left[U'(C_1), r_j\right],$$

podemos reescribir a expresión multiplicando e dividindo por $U'\left(C_0\right)$:

$$\bar{r}_j - r_f = -(1 + r_f) \operatorname{cov}\left[\frac{U'(C_1)}{U'\left(C_0\right)}, r_j\right]$$

A esta expresión que nos da o valor do activo en equilibrio denomínaselle modelo de valoración con consumo agregado, CCAPM

Calquera activo j cun rendemento positivamente correlacionado coa utilidade marxinal do consumo agregado terá unha prima de risco reducida: o activo será máis atractivo para o investidor, polo que o seu prezo será máis baixo.

Consideramos a carteira de mercado, m, con pagos futuros idénticos á riqueza agregada, $W_{1m}$, entón:

$$\bar{r}_m - r_f = -\left\{\frac{1}{E\left[U'(W_{1m})\right]}\right\} \operatorname{cov}\left[U'(W_{1m}), (r_m - r_f)\right]$$

Substituíndo $E\left[U'\left(W_{1m}\right)\right]$ na prima de risco do activo j:

$$\bar{r}_j - r_f = \frac{\operatorname{cov}\left[U'(W_{1m}), r_j\right]}{\operatorname{cov}\left[U'(W_{1m}), r_m\right]} \left(\bar{r}_m - r_f\right),$$

onde $\frac{\operatorname{cov}\left[U'\left(W_{1m}\right), r_j\right]}{\operatorname{cov}\left[U'\left(W_{1m}\right), r_m\right]}$ é unha medida de risco sistemático que xeneraliza a beta. No caso particular que as preferencias do individuos son cuadráticas, a medida de risco sistemático é a beta.

## ACTIVIDADES PROPOSTAS

**1.** Nunha economía de dous períodos, con dous estados da natureza e dous individuos dispone de 10 unidades de consumo hoxe e de 30 e 50 unidades de consumo mañá se estamos no estado 1 ou 2, respectivamente. As preferencias dos dous individuos sobre o consumo están representadas polas seguintes funcións de utilidade: $u(c)=\mathrm{Ln}(c)$ e $u(c)=-e^{-c}$. Se a probabilidade de estar en cada un dos estados é de 0,6 e 0,4, e existen a posibilidade de comprar activos A-D, determinar:
(a) O consumo óptimo de cada individuo en cada período de tempo e estado da natureza.
(b) A demanda de activos A-D e o seu prezo.
(c) Analizar como é a distribución de risco entre os individuos.
(d) Cal é o prezo dun bono cupón cero que ten un valor nominal de 100€?.

**2.** Consideremos unha economía con 3 individuos que teñen unhas preferencias sobre o consumo representables por medio dunha función de utilidade logarítmica. Nesta economía só hai dous períodos e unicamente consómese no segundo período. A única empresa produtora de bens de consumo é propiedade do tres individuos cunha participación do 40%, 50% e 10% para os individuos 1, 2 e 3, respectivamente. A produción de bens de consumo varía segundo o estado da natureza, podendo ser de 100, 80, 40 ou 15 unidades de bens de consumo, e cada un dos estados teñen a mesma probabilidade de ocorrencia. O mercado financeiro é completo.
Determinar:
(a) A distribución óptima de consumo para cada individuo.
(b) O equilibrio no mercado financeiro.

## BIBLIOGRAFÍA

DANTHINE, JEAN-PIERRE Y DONALDSON, JOHN B. (2005): INTERMEDIATE FINANCIAL THERORY. ACADEMIC PRESS ADVANCED FINANCE SERIES. CAPÍTULOS 9 E 10.

HENS, THORSTEN Y RIEGER, MARC O. (2010): FINANCIAL ECONOMICS. A CONCISE INTRODUCTION TO CLASSICAL AND BEHAVIORAL FIINANCE. SPRINGER. CAPITULO 4.

MARÍN, JOSÉ MARÍA Y RUBIO, GONZALO (2001): ECONOMÍA FINANCIERA. ANTONI BOSCH. CAPÍTULO 19.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA