MATERIA
Análise Económica dos Mercados Financeiros I

TITULACIÓN
Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros

unidade didáctica
2

Ciencias Sociais e Xurídicas

Cálculo financeiro

Juan Carlos Reboredo Nogueira

Departamento: Fundamentos da Análise Económica
Facultade ou Escola: Facultade de CC Económicas e Empresariais

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

DESCATALOGADO

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

ISBN
978-84-15876-30-4

MATERIA: Análise Económica dos mercados financeiros I
TITULACIÓN: Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Introdución: Economía Financeira e valoración
- Problemas básicos da Economía Financeira
- Valoración
- Arbitraxe e equilibrio

Unidade II. Cálculo financeiro
- Valor do diñeiro no tempo
- Rendas
- Préstamos
- Empréstitos

Unidade III. Estrutura temporal dos tipos de xuro
- A Curva Cupón Cero
- Métodos de estimación da curva cupón cero
- Teorías explicativas de estrutura temporal dos tipos de xuro

Unidade IV. Activos de renda fixa
- Activos de renda fixa
- Risco de activos de renda fixa
- Inmunización

Unidade V. Valoración de activos continxentes
- Activos continxentes
- Activos Arrow-Debreu
- Probabilidades neutrais ao risco
- Martingalas
- Mercados completos

Unidade VI. Decisións financeiras con incerteza
- Preferencias e incerteza
- Análise media-varianza
- Dominio estocástico

Unidade VII. Modelo de valoración de activos CAPM
- Alternativas de investimento no espazo media-varianza
- Equilibrio de mercado: modelo CAPM

Unidade VIII. Modelo de valoración de activos APT
- Modelo factorial e carteiras de activos
- Valoración con ausencia de arbitraxe: modelo APT

ÍNDICE

INTRODUCIÓN

Esta unidade didáctica forma parte do curso de Análise Económica dos Mercados Financeiros I que se imparte no primeiro cuadrimestre do Máster en Economía: Organización Industrial e Mercados Financeiros.
O propósito da unidade é introducir o cálculo financeiro e as diferentes formas de capitalización e desconto que se utilizan na práctica para valorar activos. Aínda que parte dos coñecementos que se desenvolven nesta unidade xa son coñecidos polo estudante que xa cursou un curso de matemáticas financeiras, o enfoque desde o punto de vista da utilización da idea de non arbitraxe e da ecuación fundamental de valoración é diferente. Nesta unidade revísanse as operación de capitalización e desconto simple, composto e continuo, a valoración de rendas e de préstamos con diferentes características.
As matemáticas que se requiren para a comprensión de esta temática son relativamente sinxelas. O obxectivo da unidade é que alumno adquira un grao de autonomía elevado no manexo das operación de capitalización e desconto que resultan fundamentais para a valoración de calquera activo financeiro.

PALABRAS CLAVE

Valor temporal do diñeiro, tipos de xuro, capitalización, desconto, tipo xuro simple, tipo de xuro composto, tipo de xuro continuo, rendas, prestamos, cota de amortización, capital pendente, cota de xuro, empréstitos.

METODOLOXIA

- A impartición do curso sempre adoptará como punto de partida as intuicións financeiras, que se tomarán como base, e a enmarcación destas intuicións no contexto do problema de valoración.
- Utilizarase preferentemente a linguaxe gráfica, máis intuitivo e máis fácil de asimilar polo estudante, pasando posteriormente á formulación dos problemas considerados en termos formais.
- Ilustraranse todos os conceptos con exemplos prácticos que estean próximos a realidade financeira do alumno coa finalidade de que o alumno aprenda a aplicar os instrumentos de valoración a activos financeiros con características semellantes.
- Propoñerase unha serie de exercicios prácticos que ilustren a aplicabilidade e utilidade dos coñecementos adquiridos.
- Fomentarase a participación do alumno, tanto no desenvolvemento dos contidos teóricos como na resolución dos casos prácticos.

VALOR DO DIÑEIRO NO TEMPO

O prezo que é necesario pagar (ou recibir) para poder dispor dun diñeiro prestado (ou estar disposto a prestalo) denomínase tipo de xuro. O tipo de xuro danos polo tanto o valor temporal do diñeiro, o valor dunha unidade monetaria en momentos diferentes do tempo.
Este valor temporal está xustificado pola preferencia temporal dos individuos: o uso do diñeiro na compra de bens que podemos consumir en momentos próximos ao presente reporta unha maior satisfacción que os bens que compremos co diñeiro en momento máis afastados do presente.

O tipo de xuro permitíndonos establecer unha relación entre o prezo dun activo (diñeiro, por exemplo) no momento presente e futuro.

A. Consideremos un único período de tempo t (un ano, un mes, un día,…):

$$\mathrm{P}_{\mathrm{t+1}} = (1+i_1)\mathrm{P}_{\mathrm{t}}$$

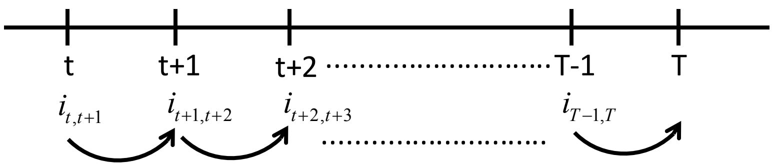
- $(1+i_1)$ determina a evolución temporal do prezo do activo desde t ata t+1. Denomínase factor de capitalización.
- $\dfrac{1}{(1+i_1)}$ determina a evolución temporal do prezo do activo desde t+1 ata t. Denomínase factor de desconto (fd).

Teremos que a relación entre o valor do activo en t e t+1 podemos expresala como:

Rendibilidade bruta: $\dfrac{\mathrm{P}_{\mathrm{t+1}}}{\mathrm{P}_{\mathrm{t}}} = (1+i_1)$

Rendibilidade neta: $i_1 = \dfrac{\mathrm{P}_{\mathrm{t+1}} - \mathrm{P}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{P}_{\mathrm{t}}}$

B. Consideremos varios períodos de tempo, desde t hasta T:
A dinámica temporal do prezo do activo depende da frecuencia e forma de capitalización dos xuros



O primeiro subíndice indica o inicio do período e o segundo a data final do período.

A dinámica temporal do prezo do activo depende da frecuencia e forma de capitalización dos xuros.

Podemos distinguir entre: (a) tipo de xuro spot ou de contado e (b) tipo de xuro forward ou a plazo.

1. Capitalización simple

Os xuros que xera o diñeiro nun período de tempo non xeran xuros nos períodos sucesivos; é dicir, os xuros non son produtivos.
Así, o valor dun activo podémolo expresar como:

$$\mathrm{P_T} = \mathrm{P_t}\left[1+\sum_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{T\text{-}t\text{-}1}} i^s_{\mathrm{t+j,t+j+1}}\right] = \mathrm{P_t}\left(1+i^s_{t,T}\right)$$

A frecuencia de capitalización ou a duración dos períodos de tempo non ten porque ser igual, e os tipos de xuro poden ser diferentes nos distintos períodos.

- Se o tipo de xuro é o mesmo en todos os períodos:

$$\mathrm{P_T} = \mathrm{P_t}\left(1+(\mathrm{T\text{-}t})\,i^s\right)$$

- A rendibilidade media anualizada (neta), $\bar{i}^s_{t,T}$, obtense como a media da rendibilidade para os diferentes períodos:

$$\bar{i}^s_{t,T} = \frac{1}{\mathrm{T\text{-}t}}\sum_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{T\text{-}t\text{-}1}} i^s_{\mathrm{t+j,t+j+1}}$$

Convención: O tipo de xuro sempre se expresa en termos anuais e axústase o número de días de capitalización polo número de días do ano:

$$\left(1+\frac{dias}{Base}\,i^s_{anual}\right) \quad Base = 360 \text{ o } 365 \text{ días}$$

A equivalencia entre diferentes bases está dada por: $i_{365} = \frac{365}{360}\,i_{360}$.

Deste xeito, o tipo de xuro para períodos inferiores ao ano e o tipo anual son proporcionais.
O factor de desconto con tipos de xuro simples podemos expresalo da seguinte maneira:

$$fd_{\mathrm{T}} = \left[1+\sum_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{T\text{-}t\text{-}1}} i^s_{\mathrm{t+j,t+j+1}}\right]^{-1} = \left(1+\frac{dias}{Base}\,i^s_{anual}\right)^{-1} \Rightarrow i^s_{anual} = \frac{Base}{dias}\left[\frac{1}{fd_{\mathrm{T}}}-1\right]$$

Así mesmo, a partir dos fd podemos obter os tipos forward como:

$$i^s_{t,T} = \frac{1}{fd_{\mathrm{T}}} - \frac{1}{fd_t}$$

A relación entre o desconto comercial e o desconto racional será tal que:

$$\mathrm{P_T}\left(1-\sum_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{T\text{-}t\text{-}1}} i^s_{\mathrm{t+j,t+j+1}}\right) < \mathrm{P_T}\,fd_{\mathrm{T}}$$

2. Capitalización composta

Os xuros que xera o diñeiro nun período de tempo xeran xuros nos períodos sucesivos; é dicir, os xuros son produtivos.
Así, o valor dun activo podémolo expresar como:

$$P_T = P_t\left(1+i_{t,t+1}\right)\left(1+i_{t+1,t+2}\right)\cdots\left(1+i_{T-1,T}\right) = P_t\prod_{j=0}^{T-t-1}\left(1+i_{t+j,t+j+1}\right) = P_t\left(1+i_{t,T}\right)$$

A frecuencia de capitalización ou a duración dos períodos de tempo non ten porque ser igual, e os tipos de xuro poden ser diferentes nos distintos períodos.

- Se o tipo de xuro é o mesmo en todos os períodos:

$$P_T = P_t\left(1+i\right)^{T-t}$$

- A rendibilidade media anualizada obtense como a media xeométrica de la rendibilidade para os diferentes períodos (TIR):

$$\bar{i}_{t,T} = \left[\prod_{j=0}^{T-t-1}\left(1+i_{t+j,t+j+1}\right)\right]^{\frac{1}{T-t}} - 1$$

Convención: O tipo de xuro sempre se expresa en termos anuais e axústase á <u>frecuencia de capitalización</u>.

$$\left(1+\frac{dias}{Base}i_{anual}\right)^{\frac{Base}{dias}} \qquad Base = 360 \text{ o } 365 \text{ días}$$

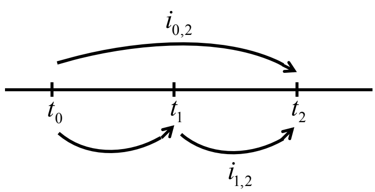
- o $\frac{dias}{Base}$ período/frecuencia de capitalización. Ex. Trimestral 90/360 = 0,25
- o $\frac{Base}{dias}$ número períodos de capitalización. Ex. Trimestral 360/90 = 4

O tipo de xuro nominal e o tipo efectivo (e) están relacionados da seguinte forma:

$$\left(1+i^{e}_{anual}\right) \underset{arbitraxe}{=} \left(1+\frac{dias}{Base}i_{anual}\right)^{\frac{Base}{dias}} \Rightarrow \underset{(TAE)}{i^{e}_{anual}} = \left[\left(1+\frac{dias}{Base}i_{anual}\right)^{\frac{Base}{dias}} - 1\right]$$

TAE é a taxa anual efectiva. Tamén podemos calcular o tipo efectivo que se corresponde co tipo anual. De acordo coa expresión anterior, no existe proporcionalidade entre os dous tipos de xuro.

A partir dos tipos de xuro para un período determinado, podemos obter o tipo de xuro implícito para períodos inferiores posto que están cotizados a futuro (forward) nos tipos spot:



Por non arbitraxe, temos que:

$$\left(1+\frac{t_2-t_0}{360}i_{0,2}\right)=\left(1+\frac{t_1-t_0}{360}i_{0,1}\right)\left(1+\frac{t_2-t_1}{360}i_{1,2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad i_{1,2}=\left[\frac{\left(1+\frac{t_2-t_0}{360}i_{0,2}\right)}{\left(1+\frac{t_1-t_0}{360}i_{0,1}\right)}-1\right]\left(\frac{360}{t_2-t_1}\right)$$

O factor de desconto con tipos de xuro compostos podemos expresalo da seguinte maneira:

$$fd_{\mathrm{T}}=\frac{1}{\prod_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{T-t-1}}\left(1+i_{\mathrm{t+j,t+j+1}}\right)}=\frac{1}{\left(1+i_{\mathrm{t,T}}\right)}$$

Así mesmo, a partir dos fd podemos obter os tipos forward como:

$$i_{\mathrm{t,T}}=\frac{fd_t}{fd_{\mathrm{T}}}-1$$

A relación entre o desconto comercial e o desconto racional é:

- $\mathrm{P_T}\left[\prod_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{T-t-1}}\left(1-i_{\mathrm{t+j,t+j+1}}\right)\right]$ ou con tipo constante $\mathrm{D}=\mathrm{P_T}\left(1-(1-i_{anual})^{\mathrm{T-t}}\right)$
- $\mathrm{P_T}\,fd_{\mathrm{T}}$ ou con tipo constante $\mathrm{D}=\mathrm{P}_T\left(1-(1-i_{anual})^{-\mathrm{(T-t)}}\right)$

3. Capitalización continua

Os xuros que xera o diñeiro nun período de tempo xeran xuros nos períodos sucesivos de forma instantánea ou continua; é dicir, os xuros son produtivos considerandos períodos de tempo moi reducidos.
Podemos obter a capitalización continua de tres formas diferentes:

A. $\mathrm{r_{t,T}}=\ln\left(1+i_{\mathrm{t,T}}\right)=\ln\left(\frac{\mathrm{P_T}}{\mathrm{P_t}}\right)=\ln\left(\mathrm{P_T}\right)-\ln\left(\mathrm{P_t}\right)$

De xeito que:

$$\mathrm{P_T}=\underset{\uparrow \atop \left(1+i_{\mathrm{t,T}}\right)}{\mathrm{P_t}e^{\mathrm{r_{t,T}}}}=\mathrm{P_t}\,e^{\sum_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{T-t-1}}\log(1+i_{\mathrm{t+j,t+j+1}})}\underset{\uparrow}{=}\mathrm{P_t}\,e^{\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}}r(\mathrm{u})\,\mathrm{du}}$$

r(u) tipo de xuro instantáneo (*spot e forward*)

B. $r_{t,T} = \lim_{f\to\infty}\left[\left(1+\frac{i}{f}\right)^{f}\right]^{T-t} = e^{(T-t)i}$, $f = \frac{Base}{dias}$ e todos os forward son iguais.

C. $P_T = P_t\left(1+\frac{dias}{Base}r\right) \Rightarrow P_T = P_t\left(1+r\Delta t\right) \Rightarrow \Delta P_T = P_t r\Delta t$

Se: $\Delta t \to 0^+ \quad (dias \to 0^+) \Rightarrow dP_t = P_t\, r\, dt$

$$\frac{\frac{dP_t}{dt}}{P_t} = r \Rightarrow \frac{d\ln P_t}{dt} = r \Rightarrow \int_t^T \frac{d\ln P_t}{dt} = \int_t^T r(u)du \Rightarrow \ln P_t\Big|_t^T = \int_t^T r(u)du$$

$$\ln\frac{P_T}{P_t} = \int_t^T r(u)du \Rightarrow P_T = P_t\, e^{\int_t^T r(u)\,du} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{(Tipos constantes)}}}{P_t\, e^{(T-t)r}}$$

O factor de desconto con tipos de xuro continuos podemos expresalo da seguinte maneira:

$$fd_T = e^{-\int_t^T r(u)\,du} = e^{-(T-t)r}$$

A partir do factor de desconto podemos obter información de:

- Tipo de xuro continuo spot:

  Con forwards iguais: $r_{t,T} = -\frac{\mathrm{Ln}\left(fd_T\right)}{T\text{-}t}$

  Con forwards diferentes: $r_{t,T} = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(u)\,du$

- Tipo de xuro continuo forward: $r(u) = -\frac{fd'_u}{fd_u}$

Unha característica, de utilidade practica para os cálculos, do tipo de xuro continuo é a aditividade dos tipos:

$$r_{t,T} = \ln\left(1+i_{t,T}\right) = \ln\left(1+i_{t,t+1}\right)+\cdots+\ln\left(1+i_{T-1,T}\right) = r_{t,t+1}+\cdots+r_{T-1,T}$$

4. Análise comparada de capitalizacións

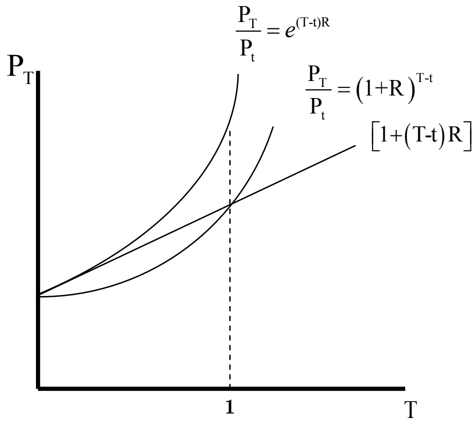
- Relación capitalización continua e composta:

$$i_{t,T} = e^{\int_t^T r(u)\,du} - 1 = e^{(T-t)r} - 1 \quad\Rightarrow\quad (T\text{-}t)r < i_{t,T}$$

- Relación capitalización continua e simple:

$$\frac{dias}{Base} r_{anual} = \ln\left(1 + \frac{dias}{Base} i^{s}_{anual}\right) \Rightarrow i^{s}_{anual} = \frac{Base}{dias}\left[e^{\frac{dias}{Base} r} - 1\right]$$

- Relación entre as tres formas de capitalización (forwards constantes):



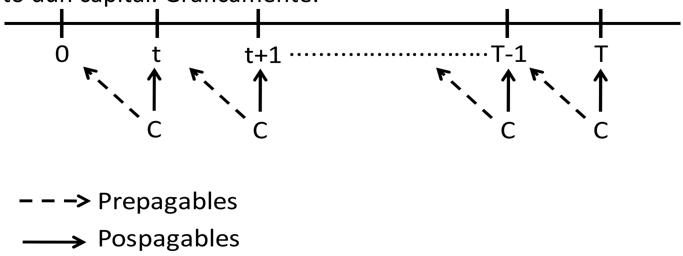
Exemplo 1:

Precio del activo: 100€
Tipo de xuro anual: 5%

	Capitalización			Tipo xuro		
Tiempo (meses)	Simple	Composta	Continua	Simple	Composto	Continuo
1	100,4167	100,4074	100,4175	1,0042	1,0041	1,0042
2	100,8333	100,8165	100,8368	1,0083	1,0082	1,0084
3	101,2500	101,2272	101,2578	1,0125	1,0123	1,0126
4	101,6667	101,6396	101,6806	1,0167	1,0164	1,0168
5	102,0833	102,0537	102,1052	1,0208	1,0205	1,0211
6	102,5000	102,4695	102,5315	1,0250	1,0247	1,0253
7	102,9167	102,8870	102,9596	1,0292	1,0289	1,0296
8	103,3333	103,3062	103,3895	1,0333	1,0331	1,0339
9	103,7500	103,7270	103,8212	1,0375	1,0373	1,0382
10	104,1667	104,1496	104,2547	1,0417	1,0415	1,0425
11	104,5833	104,5740	104,6900	1,0458	1,0457	1,0469
12	**105,0000**	**105,0000**	**105,1271**	**1,0500**	**1,0500**	**1,0513**
13	105,4167	105,4278	105,5661	1,0542	1,0543	1,0557
14	105,8333	105,8573	106,0068	1,0583	1,0586	1,0601
15	106,2500	106,2886	106,4494	1,0625	1,0629	1,0645
16	106,6667	106,7216	106,8939	1,0667	1,0672	1,0689
17	107,0833	107,1564	107,3402	1,0708	1,0716	1,0734
18	107,5000	107,5930	107,7884	1,0750	1,0759	1,0779

RENDAS

Unha renda é unha sucesión de cobros ou pagos periódicos en concepto de rendemento dun capital. Graficamente:



1. Rendas constantes

Os pagos non varían ao longo do tempo. Se consideramos que os tipos de xuro son constantes, a valoración deste tipo de rendas está dado por:

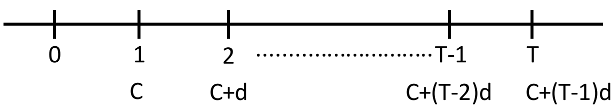
	Valor actual	Valor final	Perpetua
Pospagable	$a_{\overline{T}\rvert i} = C\frac{1-(1+i)^{-T}}{i}$	$s_{\overline{T}\rvert i} = C\frac{(1+i)^{T}-1}{i}$	$a_{\overline{\infty}\rvert i} = \frac{C}{i}$
Prepagable	$A_{\overline{T}\rvert i} = C(1+i)\frac{1-(1+i)^{-T}}{i}$	$S_{\overline{T}\rvert i} = C(1+i)\frac{(1+i)^{T}-1}{i}$	$A_{\overline{\infty}\rvert i} = \frac{C(1+i)}{i}$

Se as rendas son diferidas, entón valóranse d períodos antes de que comecen os dereitos. O valor actual e o valor perpetuo é o mesmo que no cadro anterior, só que debe ser descontado ao momento da valoración (d períodos antes de inicio dos dereitos) usando o factor $(1+i)^{-d}$.

2. Rendas variables

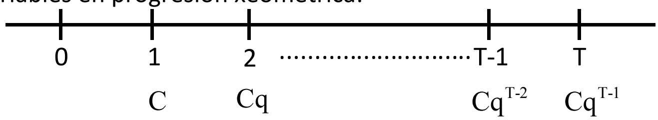
Os pagos non varían ao longo do tempo. Se consideramos que os tipos de xuro son constantes, a valoración está dado por:

- Variables en progresión aritmética:



	Valor actual	Valor final	Perpetua
Pospagable	$a_{(C,d)\overline{T}\vert i} = a_{\overline{T}\vert i}\left[1+\frac{d}{iC}+\frac{dT}{C}\right]-\frac{dT}{i}$	$s_{(C,d)\overline{T}\vert i} = (1+i)^T a_{(C,d)\overline{T}\vert i}$	$a_{(C,d)\overline{\infty}\vert i} = \left[C+\frac{d}{i}\right]\frac{1}{i}$
Prepagable	$A_{(C,d)\overline{T}\vert i} = A_{\overline{T}\vert i}\left[1+\frac{d}{iC}+\frac{dT}{C}\right]-\frac{dT}{i}(1+i)$	$S_{(C,d)\overline{T}\vert i} = (1+i)^T A_{(C,d)\overline{T}\vert i}$	$A_{(C,d)\overline{\infty}\vert i} = \left[i+\frac{d}{i}\right]\frac{(1+i)}{i}$

- Variables en progresión xeométrica:



	Valor actual	Valor final	Perpetua
Pospagable	$a_{(C,q)\overline{T}\vert i} = C\frac{1-q^T(1+i)^{-T}}{(1+i)-q}$	$s_{(C,q)\overline{T}\vert i} = (1+i)^T a_{(C,q)\overline{T}\vert i}$	$a_{(C,q)\overline{\infty}\vert i} = \frac{C}{(1+i)-q}$
Prepagable	$A_{(C,q)\overline{T}\vert i} = (1+i)a_{(C,q)\overline{T}\vert i}$	$S_{(C,d)\overline{T}\vert i} = (1+i)^T A_{(C,d)\overline{T}\vert i}$	$a_{(C,q)\overline{\infty}\vert i} = \frac{(1+i)C}{(1+i)-q}$

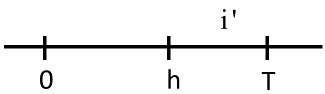
PRÉSTAMOS

Contrato mediante o cal o prestamista entrega unha cantidade de diñeiro ao prestatario a cambio do compromiso deste de devolución da cantidade prestada en determinadas condicións e prazos e cun custo de xuros. Á devolución da cantidade de diñeiro prestada e dos xuros denomínaselle amortización do préstamo.

1. Amortizables con reembolso único

- Pago de xuros e capital (k) nun único momento do futuro (T): $R = k(1+i)^T$, onde K é o importe do reembolso. De non ser en T, o reembolso pode ser:

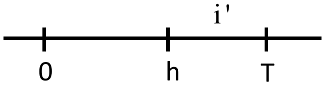
  (a) Reembolso total anticipado en el momento h < T:



$$R_h(1+i')^{T-h} = k(1+i)^T$$

<u>Exemplo 1</u>: Préstamo de 500.000 euros a 10 anos cun tipo de xuro anual do 6%, amortízase totalmente aos 6 anos cando o tipo de xuro é do 4%. $R = 765.412,07$

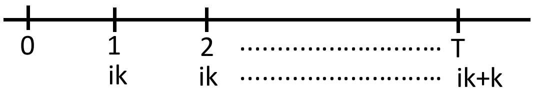
(b) Reembolso parcial anticipado (PA) en el momento h < T:



$$\left(k(1+i)^h - PA_h\right)(1+i)^{T-h} + PA_h(1+i')^{T-h} = k(1+i)^T$$

No exemplo anterior: $PA_6 = 250.000$, capital pendente: 477.600,16.

- Pago periódico de xuros e reembolso único:



(a) Reembolso total anticipado en el momento h < T: $R_h = k + k(i-i')a_{\overline{T-h}|i'}$ ou $i\,k\,\overline{s}_{\overline{T-h}|i'} + k = R_h(1+i')^{T-h}$.

Exemplo 2: Préstamo de 500.000 euros a 10 anos cun tipo de xuro anual do 6%, con pago periódico de xuros, amortízase totalmente aos 6 anos cando o tipo de xuro pasa ao 4%. $R = 536.298,95$.

(b) Reembolso parcial anticipado (PA) en el momento h < T:

$PA_h(1+i')^{T-h} + i\,KP_h\,\overline{s}_{\overline{T-h}|i'} + KP_h = i\,k\,\overline{s}_{\overline{T-h}|i'} + k$ (KP é o capital pendente) ou ben $KP_h = k - PA_h \dfrac{(1+i')^{T-h}}{1+i\,\overline{s}_{\overline{T-h}|i'}}$.

2. Amortizables mediante unha renda

Pago de rendas periódicas (mensual, semestral, anual,...) equivalente financeiramente ao capital prestado. Ingredientes fundamentais son:

i: tipo de interes do préstamo

a_h: renda periódica ou cota do préstamo no momento h, $0 < h < T$

I_h: cota de intereses no momento h, $0 < h < T$

M_h: cota de amortización de k no momento h, $0 < h < T$

C_h: Capital pendente de amortizar no momento h, $0 < h < T$

T: Período de pago da renda

Teremos que: $a_h = I_h + M_h = iC_h + M_h$. O valor do préstamo ten que verificar:

Valor (actual) da renda periódica = Valor do capital prestado

2.1 Cota de amortización constante

- Cota amortización: $M_1 = M_2 = \cdots = M_T = M$

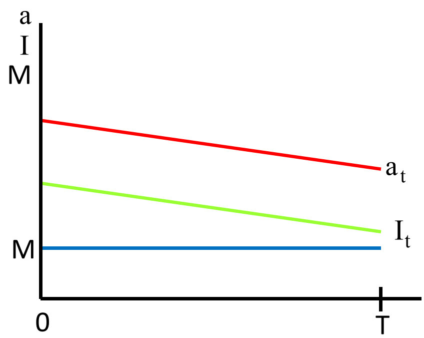
$$k = \sum_{t=1}^{T} M_T = TM \quad \Rightarrow \quad M = \frac{k}{T}$$

- Capital pendente: $C_h = k - \sum_{t=1}^{h-1} M_h = k - (h-1)M = k\left(1 - \frac{h-1}{T}\right)$
- Cota de xuros: $I_h = i\,C_h = i\,k\left(1 - \frac{h-1}{T}\right) \Rightarrow I_{h+1} = I_h - \frac{k}{T}i$. Segue unha progresión arimética de razón $-\frac{k}{T}i$
- Cota do préstamo: $a_h = I_h + M_h = i\,k\left(1 - \frac{h-1}{T}\right) + M$, con lo que:

$$a_{h+1} = a_h - \frac{k}{T}i$$

segue unha progresión arimética de razón $-\frac{k}{T}i$

- Representación gráfica:



- Exemplo:

Capital	100000
tipo interese	5
Plazo	10

	C. pendiente	Intereses	Amortización	Cota
1	100000	5000	10000	15000
2	90000	4500	10000	14500
3	80000	4000	10000	14000
4	70000	3500	10000	13500
5	60000	3000	10000	13000
6	50000	2500	10000	12500
7	40000	2000	10000	12000
8	30000	1500	10000	11500
9	20000	1000	10000	11000
10	10000	500	10000	10500
		27500	**100000**	**127500**

2.2 Sistema francés con cotas constantes

- Cota préstamo: $a_1 = a_1 = \cdots = a_T = a$

$$k = a\frac{1-(1+i)^{-T}}{i} = a\,\bar{a}_{\overline{T}|i} \Rightarrow a = \frac{k}{\bar{a}_{\overline{T}|i}}$$

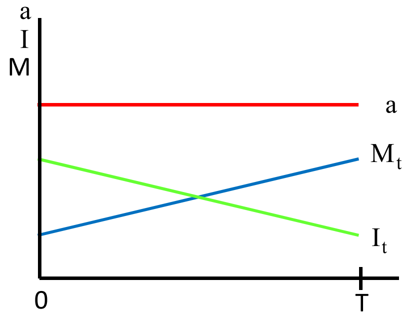
- Cota amortización: dado que $a = M_h + I_h = M_h + iC_h$ e $a = M_{h+1} + I_{h+1} = M_{h+1} + iC_{h+1}$, obtemos $M_{h+1} = M_h(1+i) = M_1(1+i)^h$
- Capital pendente:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = k \\ C_2 = k - M_1 \\ C_3 = k - (M_1 + M_2) = k - M_1(1+(1+i)) \end{array}\right\} \begin{array}{l} h > 1 \\ C_{h+1} = k - \sum_{t=1}^{h} M_t = k - M_1 s_{\overline{h}|i} \end{array}$$

- Cota de xuros:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = iC_1 = ik \\ I_2 = iC_2 = i(k - M_1) \\ I_3 = iC_3 = i(k - M_1 - M_1(1+i)) \end{array}\right\} I_{h+1} = iC_{h+1} = i(k - M_1 s_{\overline{h}|i})$$

- Representación gráfica:



- Exemplo:

Cota constante (sistema francés)				
Capital	100000			
tipo interese	5			
Plazo	10			
	C. pendiente	Intereses	Amortización	Cota
1	100000	5000	7950.46	12950.46
2	92049.54	4602.48	8347.98	12950.46
3	83701.56	4185.08	8765.38	12950.46
4	74936.18	3746.81	9203.65	12950.46
5	65732.53	3286.63	9663.83	12950.46
6	56068.70	2803.44	10147.02	12950.46
7	45921.68	2296.08	10654.37	12950.46
8	35267.31	1763.37	11187.09	12950.46
9	24080.22	1204.01	11746.45	12950.46
10	12333.77	616.69	12333.77	12950.46
		29504.57	**100000**	**129504.57**

2.3 Sistema francés con cotas en progresión aritmética

- Cota do préstamo:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= a+d \\ &\vdots \\ a_T &= a+(T-1)d \end{aligned}\right\} \quad k = a_{(a,d)\overline{T}|i} = \left[1+\frac{d}{a\,i}+\frac{d\,T}{a}\right] a_{\overline{T}|i} - \frac{d\,T}{i}$$

$$\Downarrow$$

$$a = \left[k+\frac{d\,T}{i}\right]\frac{1}{a_{\overline{T}|i}} - \left[\frac{d}{i}+d\,T\right]$$

- Cota de amortización:

$$M_1 = a - I_1 = a - i\,k$$

$$\left.\begin{aligned} a_h &= a+(h-1)d = M_h + i\,C_h \\ a_{h+1} &= a+h\,d = M_{h+1} + i\,C_{h+1} \end{aligned}\right\} \quad M_{h+1} = M_h(1+i)+d \qquad h>0$$

$$\Downarrow$$

$$M_{h+1} = M_1(1+i)^h + d\,s_{\overline{h}|i}$$

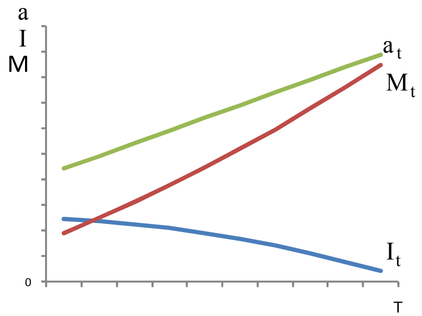
- Capital pendente:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= k \\ C_2 &= k - M_1 = k-(a-I_1) \\ C_3 &= k-(M_1+M_2) = k-\left[M_1(1+(1+i))+d\right] \\ &\vdots \\ C_{h+1} &= k-\sum_{t=1}^{h} M_t = k-\left[M_1 s_{\overline{h}|i} + d\left(1+\sum_{j=2}^{h-1} s_{\overline{j}|i}\right)\right] \end{aligned}\right\}$$

- Cota de xuros:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= i\,C_1 = i\,k \\ I_2 &= i\,C_2 = i\,(k-M_1) \end{aligned}\right\} \quad I_{h+1} = iC_{h+1} = i\left(k-\left[M_1 s_{\overline{h}|i} + d\left(1+\sum_{j=2}^{h-1} s_{\overline{j}|i}\right)\right]\right)$$

- Representación gráfica:



- Exemplo:

Cuota Progresión aritmética	
Capital	100000
tipo interese	5
Plazo	10
d	1000

	C. pendiente	Intereses	Amortización	Cota
1	100000	5000	3851.37	8851.37
2	96148.63	4807.43	5043.94	9851.37
3	91104.69	4555.23	6296.14	10851.37
4	84808.55	4240.43	7610.95	11851.37
5	77197.60	3859.88	8991.49	12851.37
6	68206.11	3410.31	10441.07	13851.37
7	57765.04	2888.25	11963.12	14851.37
8	45801.92	2290.10	13561.28	15851.37
9	32240.65	1612.03	15239.34	16851.37
10	17001.31	850.07	17001.31	17851.37
		33513.72	**100000**	**133513.72**

2.4 Sistema francés con cotas en progresión xeométrica

- Cota do préstamo:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a \\ a_2 = a\,q \\ \vdots \\ a_T = a\,q^{T-1} \end{array}\right\} \quad k = a_{(a,q)\overline{T}|i} = a\frac{1-q^T(1+i)^{-T}}{(1+i)-q}$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{\left((1+i)-q\right)k}{1-q^T(1+i)^{-T}}$$

- Cota de amortización:

$$M_1 = a - I_1 = a - i\,k$$

$$\left.\begin{array}{l} a_h = aq^{h-1} = M_h + i\,C_h \\ a_{h+1} = aq^h = M_{h+1} + i\,C_{h+1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} h \geq 1 \\ M_{h+1} = M_h(1+i) + a\left[q^h - q^{h-1}\right] \end{array}$$

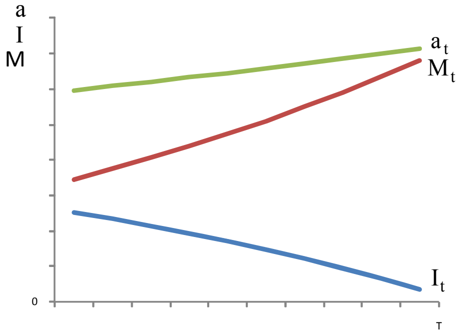
- Capital pendente:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = k \\ C_2 = k - M_1 = k - (a - I_1) \\ \vdots \\ C_{h+1} = k - \sum_{t=1}^{h} M_t \end{array}\right\}$$

- Cuota de xuros:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = i\,C_1 = i\,k \\ I_2 = i\,C_2 = i\,(k - M_1) \\ \vdots \\ I_{h+1} = iC_{h+1} = a\,q^h - M_{h+1} \end{array}\right\}$$

- Representación gráfica:



- Exemplo:

Cota Progresión geométrica	
Capital	100000
tipo interese	5
Plazo	10
q	1.02

	C. pendiente	Intereses	Amortización	Cota
1	100000	5000	6921.64	11921.64
2	93078.36	4653.92	7506.16	12160.08
3	85572.20	4278.61	8124.67	12403.28
4	77447.53	3872.38	8778.97	12651.34
5	68668.57	3433.43	9470.94	12904.37
6	59197.62	2959.88	10202.58	13162.46
7	48995.05	2449.75	10975.95	13425.71
8	38019.09	1900.95	11793.27	13694.22
9	26225.83	1311.29	12656.81	13968.10
10	13569.02	678.45	13569.02	14247.47
		30538.66	**100000**	**130538.66**

2.5 Sistema alemán

Os xuros páganse por anticipado

- Cota préstamo:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = i\,k \\ a_1 = M_1 + i\,C_2 \\ \vdots \\ a_T = M_T \end{array}\right\}$$

Cotas constantes:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_T = a$$

- Cota de amortización:

$$\left.\begin{array}{l} a_h = M_h + iC_{h+1} \\ a_{h+1} = M_{h+1} + iC_{h+2} \end{array}\right\} M_h + iC_{h+1} = M_{h+1} + iC_{h+2}$$

$$\Downarrow$$

$$M_{h+1} = \frac{1}{1-i} M_h \Rightarrow M_{h+1} = \left(\frac{1}{1-i}\right)^h M_1$$

A contía da cota de amortización determínase como:

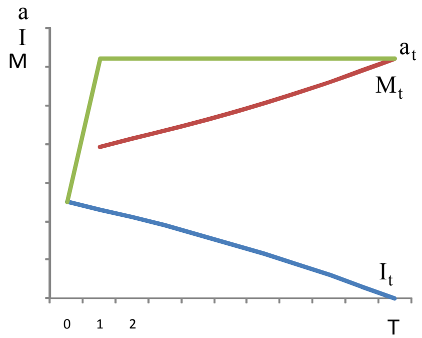
$$a = M_T = \left(\frac{1}{1-i}\right)^{T-1} M_1 = \left(\frac{1}{1-i}\right)^{T-1} \frac{a-ik}{(1-i)} = \frac{a-ik}{(1-i)^T} \Rightarrow a = \frac{ik}{1-(1-i)^T}$$

$$M_1 = a - iC_2 = a - i(k - M_1) \Rightarrow M_1 = \frac{a-ik}{1-i}$$

- Capital pendente:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = k \\ C_2 = k - M_1 = k - \dfrac{a-ik}{1-i} \\ \vdots \\ C_{h+1} = k - \sum_{t=1}^{h} M_t = k - M_1 \dfrac{(1-i)^{-h} - (1-i)}{i} \end{array}\right\}$$

- Cota de xuros: $I_h = iC_{h+1}$
- Representación gráfica:



- Exemplo:

Sistema alemán	
Capital	100000
tipo interese	5
Plazo	10

	C. pendiente	Intereses	Amortización	Cota
0		5000		5000
1	100000	4607.33	7853.32	12460.65
2	92146.68	4194.00	8266.65	12460.65
3	83880.03	3758.91	8701.74	12460.65
4	75178.29	3300.93	9159.73	12460.65
5	66018.56	2818.84	9641.82	12460.65
6	56376.75	2311.37	10149.28	12460.65
7	46227.47	1777.20	10683.45	12460.65
8	35544.01	1214.91	11245.74	12460.65
9	24298.27	623.03	11837.62	12460.65
10	12460.65	0	12460.65	12460.65
		29606.54	**100000.00**	**129606.54**

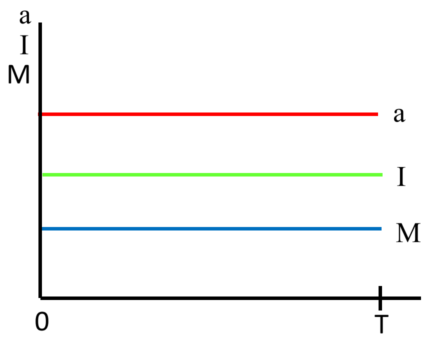
2.6 Sistema americano

Pago periódico de xuros ao prestamista e reconstrución por parte do prestatario dun fondo que se capitaliza a un xuro específico de forma que o seu valor final é igual ao capital prestado.

- Cota amortización:

$$M=\beta \quad \text{tal que} \quad k=\beta\,\bar{s}_{\overline{T}|i'} \;\Rightarrow\; M=\frac{k}{\bar{s}_{\overline{T}|i'}}$$

- Capital pendiente: K ata o final do préstamo
- Cota de xuros: $I = i\,k$
- Cota do préstamo: $a = I + M = i\,k + M = i\,k + \dfrac{k}{\bar{s}_{\overline{T}|i'}} = k(i - i') + \dfrac{k}{\bar{a}_{\overline{T}|i'}}$
- Representación gráfica:



- Exemplo:

Sistema americano	
Capital	100000
tipo interese	5
tipo interese reconstrucción	3
Plazo	10

	C. pendiente	Intereses	Cota R	Reconstrucion	Cota
1	100000	5000	8723.05	8723.05	13723.05
2	100000	5000	8723.05	17707.79	13723.05
3	100000	5000	8723.05	26962.08	13723.05
4	100000	5000	8723.05	36493.99	13723.05
5	100000	5000	8723.05	46311.86	13723.05
6	100000	5000	8723.05	56424.27	13723.05
7	100000	5000	8723.05	66840.05	13723.05
8	100000	5000	8723.05	77568.30	13723.05
9	100000	5000	8723.05	88618.40	13723.05
10	100000	5000	8723.05	100000.00	13723.05
		50000	**87230.51**		**137230.51**

EMPRÉSTITOS

Préstamo dunha contía elevada que require ser cuberta por varios prestamistas. A débeda divídese en partes iguais denominadas bonos ou obrigacións, cada un dos cales ten un funcionamento similar ao dun préstamo dunha contía reducida determinada polo valor nominal do bono.
A diferenza dun préstamo, un empréstito é emitido polo prestatario, que é quen fixa as condicións da emisión.

Tipos de empréstitos:

- Prezo de emisión:
  -á par: prezo de emisión igual ao valor nominal do título
  -baixo a par: prezo de emisión menor que o valor nominal do título
- Prezo de amortización
  -á par: amortízanse polo valor nominal do título
  -á par e con lote constante: existe un premio ou lote que recae por sorteo nalgúns dos títulos amortizables nese período
  -sobre a par ou con prima: prémianse os títulos amortizados
  -sobre a par e con lote
  -sobre a par e con lote variable
- Devindicación de xuros:
  -pago periódico de xuros: prepagables ou pospagables
  -sen pago periódico de xuros: bono cupón cero

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. Se os tipos de xuro trimestrais nun ano son: do 2% para o primeiro trimestre, 2,4% para o segundo trimestre e 2,8% para o segundo semestre, cal é o tipo de xuro efectivo nese ano utilizando os diferentes sistemas de capitalización?

2. Se o tipo de xuro anual é do 4%, cales son os tipos de xuro semestrais, cuadrimestrais, trimestrais, mensuais, semanais e diarios equivalentes ao tipo anual? Para cada un destes tipos, calcular o tipo de xuro efectivo anual.

3. O valor de factor de desconto a 6 meses, 1 ano e 2 anos é de 0,95, 0,90 e 0,85, respectivamente. Calcular o tipo de xuro a prazo (forward) simple e composto para (a) dentro de 6 meses para uns prazos de 6 e 18 meses, (b) dentro de 1 ano para un prazo de 1 ano.

4. O banco X ofrece un 8% anual por un depósito a un prazo fixo durante dous anos. Se os xuros se liquidan mensualmente, cal é o valor final dun depósito de 1.000€ utilizando o sistema de capitalización simple, composta e continua? Cal é o tipo anual efectivo de cada un dos sistemas de capitalización?

5. Para un tipo de xuro anual do 6% calcular cal tería que ser o tipo de xuro continuo mensual para que a capitalización composta e continua dese lugar ao mesmo capital.

6. O valor dun activo dentro de 5 anos é de 1.000€. Cal sería o seu valor hoxe se utilizamos o desconto racional e comercial simple e composto se o tipo de xuro anual é do 5%?

7. Se o tipo de xuro continuo está dado por: $r(u) = 0,03 + 0,02u \quad 0 \leq u \leq 1$ (1 refírese a un ano), calcular: (a) o factor de desconto continuo a 6 meses, (b) o tipo de xuro anual simple, composto e continuo.

8. Para os próximos 5 anos o tipo de xuro é do 5%, mentres que para os seguintes 5 o tipo aumenta ao 7%. Se temos unha renda anual pospagable de 1.000€, cal sería o seu valor actual e final? Se esta renda increméntase cada ano un 10% sobre o pago inicial de 1.000?, cal sería o seu valor actual e final? Se esta renda increméntase cada ano un 10%, cal sería o seu valor actual e final?

9. Temos un fondo de pensións de 100.000?. Se queremos rescatar o fondo en forma de renda mensual constante durante os próximos 10 anos, para os que o tipo de xuro anual é igual ao 6%, cal sería a renda que percibiriamos ao final de cada mes?
Se queremos que a renda mensual increméntese a un ritmo do 1% para compensar a perda de poder adquisitivo, cal sería a renda mensual que percibiriamos ao final de cada mes?
Se queremos rescatar o fondo como renda mensual perpetua e o tipo de xuro mantense no 6%, cal sería a renda mensual que percibiriamos ao final de cada mes?

10. O contrato de aluguer dunha vivenda por tres anos é de 500€ mensuais que se pagan a final de mes. A duración do contrato é de 3 anos, incrementándose o aluguer mensual ao final de cada ano nun 3%. Se o tipo de xuro anual para o primeiro ano do contrato é do 6%, para o segundo do 5% e para o terceiro do 8%, cal é valor deste contrato?

11. O 15 de xullo de 2010 obtense un préstamo por un valor de 50.000€. O préstamo é amortizable nun ano con cotas mensuais, sendo a primeira cota exixible o 30 de agosto. O tipo de xuro anual para o préstamo é do 6%.
(a) Calcular o cadro amortización do préstamo se amortiza con: (1) cotas de amortización constantes, (2) cotas mensuais constantes, (3) cotas mensuais que crecen en progresión aritmética, cunha taxa do 3% do importe do préstamo, (4) cotas mensuais que crecen en progresión xeométrica, a unha taxa do 5%, (5) a utilización do sistema alemán e (6) a utilización do sistema americano cun tipo de xuro de reconstrución do 3%.
(b) Calcular a TAE do préstamo utilizando cada un dos sistemas de amortización do apartado anterior.

12. Un individuo pide un préstamo de 200.000€ a 25 anos para un tipo de xuro anual do 3% amortizable mediante cotas mensuais. Se durante o tres primeiro anos só pode pagar cotas mensuais de 500€, determinar cal sería o importe das cotas mensuais constantes do préstamo a partir do terceiro ano se o tipo de xuro subise nese momento até o 4%.

BIBLIOGRAFÍA

CABELLO, JOSÉ MANUEL (2006): VALORACIÓN FINANCIERA. TEORÍA Y PRÁCTICA CON EXCEL. DELTA PUBLICACIONES.

NAVARRO, ELISEO E NAVE, JUAN M. (2001) FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS. BARCELONA. ANTONI BOSCH, D.L.

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

VICERREITORÍA DE ESTUDANTES,
CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA