MATERIA
Análise Económica dos Mercados Financeiros II

TITULACIÓN
Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros

unidade didáctica
2

Ciencias Sociais e Xurídicas

Valoración intertemporal de activos

Juan Carlos Reboredo Nogueira

Departamento: Fundamentos da Análise Económica
Facultade ou Escola: Facultade de CC Económicas e Empresariais

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

DESCATALOGADO

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

ISBN
978-84-15876-38-0

MATERIA: Análise Económica dos mercados financeiros II
TITULACIÓN: Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

ÍNDICE

INTRODUCIÓN

Esta unidade didáctica forma parte do curso de Análise Económica dos Mercados Financeiros II que se imparte no primeiro cuadrimestre do Máster en Economía: Organización Industrial e Mercados Financeiros.
O propósito da unidade é estudar a valoración de activos nun contexto intertemporal no que os investidores adoptan decisións en mercados que poden ser dinamicamente completos na medida que poden corrixir ou adaptar as decisións financeiras adoptadas no pasado á nova información que se foi revelando co paso do tempo. Concretamente, estúdanse os determinantes dos prezos dos activos financeiros a nivel agregado, fundamentalmente o consumo, e analízase a determinación do seu prezo en equilibrio nun contexto no que os investidores adoptan decisións de consumo e de investimento óptimas. A valoración de equilibrio que emerxe como resultado denomínase modelo ICCAPM.
A comprensión desta unidade reviste un alto grao de dificultade debido ao elevado nivel de abstracción e na mediada que require do manexo das técnicas de optimización nalgún caso complexas e dunha compresión adecuada de estatística. Para facilitar a superación destas dificultades, ao longo da unidade se utilizan numerosos exemplos numéricos que tratan de ilustrar os conceptos desenvolvidos e a utilidade financeira práctica dos modelos así como as súas limitacións.

PALABRAS CLAVE

Equilibrio, valoración, activos Arrow-Debreu, estrutura informativa, mercados completos, ICCAPM.

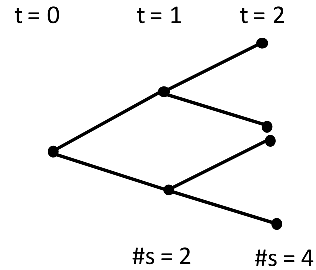
METODOLOXÍA

- A impartición do curso sempre adoptará como punto de partida as intuicións financeiras, que se tomarán como base, e a enmarcación destas intuicións no contexto do problema de valoración.
- Utilizarase preferentemente a linguaxe gráfica, máis intuitivo e máis fácil de asimilar polo estudante, pasando posteriormente á formulación dos problemas considerados en termos formais.
- Ilustraranse todos os conceptos con exemplos prácticos que estean próximos a realidade financeira do alumno coa finalidade de que o alumno aprenda a aplicar os instrumentos de valoración a activos financeiros con características semellantes.
- Propoñerase unha serie de exercicios prácticos que ilustren a aplicabilidade e utilidade dos coñecementos adquiridos.
- Fomentarase a participación do alumno, tanto no desenvolvemento dos contidos teóricos como na resolución dos casos prácticos.

A VALORACIÓN INTERTEMPORAL

En contraste cos modelos nos que as decisións de investimento adóptanse unicamente nun único período de tempo (modelos estáticos), consideraremos un horizonte de investimento intertemporal, de modo que os investidores teñen a posibilidade de cambiar a composición da súa carteira a medida que van dispondo de maior información (modelos dinámicos). Así, ao existir múltiples períodos nos que os mercados se abren, temos en realidade unha secuencia de mercados nos que é posible comprar unidades do ben de consumo usando os pagos continxentes asociados aos estados que proveñen do investimento en activos financeiros de períodos anteriores e tamén recompor a carteira de activos. Neste contexto, como se forman os prezos en equilibrio?

Consideremos unha economía coas seguintes características: s = t = 2



Nesta economía, cantos activos Arrow-Debreu (A-D) son necesarios para que o mercado sexa completo?

Sexa $\phi_{s_{t+1}=h/s_t=k}$ o prezo do activo A-D no momento t e o estado k que paga 1 unidade monetaria en t+1 no estado h e cero en caso contrario. Teremos que:

- No caso no que non podemos reestruturar a carteira de activos, a cantidade des estes activos A-D que precisamos (mercado completo) é:

$$\phi_{s_1=1/s_0}\ \phi_{s_1=2/s_0}\ \phi_{s_2=1/s_1=1}\ \phi_{s_2=2/s_1=1}\ \phi_{s_2=1/s_1=2}\ \phi_{s_2=2/s_1=2}$$

- Non obstante, se os mercados abren e é posible reestruturar a carteira de activos só necesitamos 2 activos A-D: $\phi_{s_{t+1}=1/s_t}\quad \phi_{s_{t+1}=2/s_t}$

En t = 1: si s_t=1: $\phi_{s_2=1/s_1=1}$ $\phi_{s_2=2/s_1=1}$

$\updownarrow$ $\updownarrow$

si s_t=2: $\phi_{s_2=1/s_1=2}$ $\phi_{s_2=2/s_1=2}$

En t = 0, o prezo dun activo A-D que paga en t+1 unha unidade ou cero:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ \phi_{s_2=1/s_0}=\phi_{s_1=1/s_0}\phi_{s_2=1/s_1=1}\qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ \phi_{s_2=3/s_0}=\phi_{s_1=2/s_0}\phi_{s_2=1/s_1=2}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \phi_{s_2=2/s_0} = \phi_{s_1=1/s_0}\phi_{s_2=2/s_1=1} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \phi_{s_2=4/s_0} = \phi_{s_1=2/s_0}\phi_{s_2=2/s_1=2}$$

<u>Exemplo</u>:

$\phi_{s_{t+1}=1/s_t} = 0,6 \quad \phi_{s_{t+1}=2/s_t} = 0,5$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\phi_{s_2=1/s_0} = 0,6\cdot 0,6 = 0,36$

Nº A-D: 0,36/0,60 = 0,6

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\phi_{s_2=3/s_0} = 0,5\cdot 0,6 = 0,30$

Nº A-D: 0,30/0,50 = 0,6

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\phi_{s_2=2/s_0} = 0,6\cdot 0,5 = 0,30$

Nº A-D: 0,30/0,60 = 0,5

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\phi_{s_2=4/s_0} = 0,5\cdot 0,5 = 0,25$

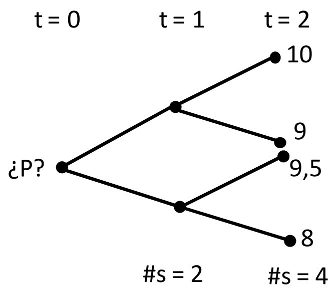
Nº A-D: 0,25/0,50 = 0,5

En conclusión, nun contexto intertemporal, o número de activos necesarios para que o mercado sexa completo é máis reducido que no contexto non dinámico.

MODELOS DINAMICAMENTE COMPLETOS

Se un mercado é dinamicamente completo, entón podemos valorar calquera activo.

<u>Exemplo</u>:



$$P_0 = \sum_{s_2=1}^{4} \phi_{s_2/s_0} X_{js_2} = \sum_{t=1}^{2}\sum_{s_t=1}^{4} \phi_{s_t/s_{t-1}} X_{js_t} = \sum_{s_1=1}^{2} \phi_{s_1/s_0} P_{js_1}$$

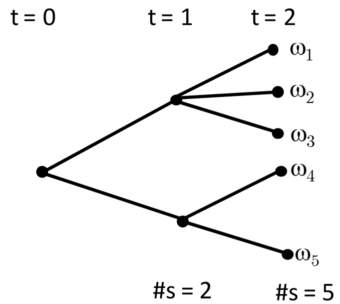
$$P_0 = 0,36\cdot 10 + 0,3\cdot 9 + 0,3\cdot 9,5 + 0,25\cdot 8 = 11,15$$

Ou ben:

$$\left.\begin{array}{ll} t=1 & P_{1s_1=1} = 0,6\cdot 10 + 0,5\cdot 9 = 10,5 \\ & P_{1s_1=2} = 0,6\cdot 9,5 + 0,5\cdot 8 = 9,7 \end{array}\right] \; t=0 \quad P_0 = 0,6\cdot 10,5 + 0,5\cdot 9,7 = 11,15$$

Nun mercado dinámico a información revélase parcialmente ao longo do tempo e completamente ao final do período; é dicir, a <u>estrutura informativa</u> do mercado cambia co tempo (o cal pode afectar á decisión de investimento).

<u>Exemplo</u>:



- en t = 0, a información dispoñible: $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$
- en t = 1, a información dispoñible: $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, $\{\omega_4,\omega_5\}$
- en t = 2, a información dispoñible: $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_4\},\{\omega_5\}$

Caracterización da estrutura informativa do mercado nun contexto intertemporal:

- Estados da natureza en T: ao conxunto de todos os posibles estados da natureza denomínaselle Ω.

$$\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$$

- Partición de Ω, $\boldsymbol{F_t}$: colección de sucesos disxuntos, tal que a unión dos mesmos é igual a Ω e as interseccións de cada dous sucesos calquera están baleiras.

$$\boldsymbol{F}_0 = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\} = \{\Omega\}$$

$$\boldsymbol{F}_1 = \{\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\},\{\omega_4,\omega_5\}\}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = \{\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_4\},\{\omega_5\}\}$$

- Unha partición $\boldsymbol{F_t}$ é máis fina ou precisa que outra partición $\boldsymbol{F_h}$ se t > h.
  Nese caso, os sucesos de $\boldsymbol{F_h}$ son a unión de sucesos de $\boldsymbol{F_t}$: $\boldsymbol{F_h}$ contén menos información que $\boldsymbol{F_t}$.
- Cada suceso dunha partición $\boldsymbol{F_t}$ denotarémolo por S_f
  Para $\boldsymbol{F_1}$: $s_1 = 1 = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, $s_1 = 2 = \{\omega_4,\omega_5\}$
- Cada partición xera unha σ-álxebra denominada filtración, $\hat{\boldsymbol{F}}_t$

$$\hat{\boldsymbol{F}}_0 \subseteq \hat{\boldsymbol{F}}_1 \subseteq \hat{\boldsymbol{F}}_2 \subseteq \cdots$$

  Unha filtración representa o conxunto de información dispoñible na data t, e cada nodo da árbore é un suceso que pertence á filtración familia de particións Ω.
  Deste xeito, a estrutura informativa da economía queda resumida por un conxunto de particións de Ω,

$$\{\boldsymbol{F}_t, \quad t = 0,1,\ldots,T\}$$

  onde

$$\pi_{s_h} = \begin{cases} \pi_{s_h/s_t}\,\pi_{s_t} & \text{si } s_h \subseteq \boldsymbol{F_t} \\ 0 & \text{si } s_h \not\subset \boldsymbol{F_t} \end{cases} \quad \text{(regra de Bayes)}$$

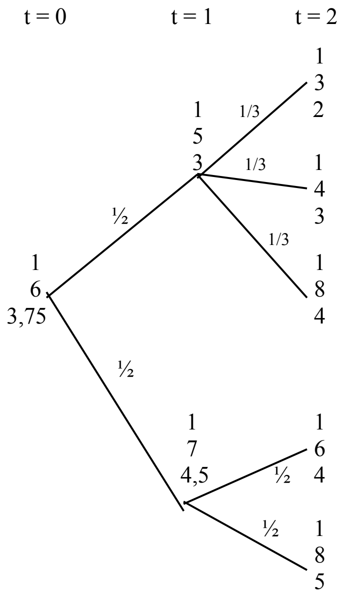
- Mercados completos: o número de activos A-D que precisamos é:

  -Economía estática con varios períodos: $\sum_{t=1}^{T} \#s_t$

  -Economía dinámica: $\max\{\#s_t,\ \ 1 \le t < T\}$

  Para completar o mercado o número de activos debe ser igual ou maior que o máximo número de ramas que saen de cada nodo na estrutura informativa.

<u>Exemplo</u>: (ver Huang e Litzenberger)



Este mercado, é dinamicamente completo?
(a) Os prezos non admiten posibilidades de arbitraxe

t = 1 Primeiro nodo: $\left.\begin{array}{l} \pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* = 1 \\ 3\pi_1^* + 4\pi_2^* + 8\pi_3^* = 5 \\ 2\pi_1^* + 3\pi_2^* + 4\pi_3^* = 3 \end{array}\right\} \ \{\pi_1^* = 1/3;\ \pi_2^* = 1/3;\ \pi_3^* = 1/3\}$

Segundo nodo: $\left.\begin{array}{l} 6\pi_1^* + 8\pi_2^* = 7 \\ 4\pi_1^* + 5\pi_2^* = 4{,}5 \end{array}\right\} \ \{\pi_1^* = 1/2;\ \pi_2^* = 1/2\}$

t = 0 $\left.\begin{array}{l} 5\pi_1^* + 7\pi_2^* = 6 \\ 3\pi_1^* + 4{,}5\pi_2^* = 3{,}75 \end{array}\right\} \ \{\pi_1^* = 1/2;\ \pi_2^* = 1/2\}$

As probabilidades neutrais ao risco existen e son únicas. Non existen posibilidades de arbitraxe. As probabilidades neutrais ao risco incondicionais son:

$$\left[\pi_1^* = 1/6;\pi_2^* = 1/6;\pi_3^* = 1/6;\pi_4^* = 1/4;\pi_5^* = 1/4\right]$$

(b) Podemos replicar calquera activo A-D mediante unha carteira dinámica
Ex. Activo A-D que paga 1 unidade en t = 2 no suceso 1 e 0 noutro caso.
t=1, primeiro nodo:

$$\left.\begin{array}{l} z_0 + 3z_1 + 2z_2 = 1 \\ z_0 + 4z_1 + 3z_2 = 0 \\ z_0 + 8z_1 + 4z_2 = 0 \end{array}\right\} \quad z_0 = 8/3; z_1 = 1/3; z_2 = -4/3$$

t=1, segundo nodo: non se constrúe ningunha carteira
t=0, Xeramos fondos suficientes para financiar a estratexia en t = 1; é dicir:

$\frac{1}{3} = \left(\frac{8}{3}1 + \frac{1}{3}5 - \frac{4}{3}3\right)$ no nodo superior e cero no inferior

$$\left.\begin{array}{l} z_0 + 5z_1 + 3z_2 = 1/3 \\ z_0 + 7z_1 + 4{,}5z_2 = 0 \end{array}\right\} \quad z_0 = 7/6; z_1 = -1/6; z_2 = 0$$

O custo desta carteira réplica, por non arbitraxe, é igual ao prezo do activo A-D que paga 1 no primeiro estado e 0 en caso contrario:

$$\phi_1 = \frac{7}{6} - 6\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

VALORACIÓN INTERTEMPORAL CON CONSUMO: ICCAPM

Consideremos o problema dun investidor i:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{\{c_0^i, c_{s_t}^i\}} u_{it}\left(c_0^i\right) + \sum\limits_{t=1}^{T} \sum\limits_{s_t \in \boldsymbol{F_t}} \pi_{s_t}^i u_{it}\left(c_{s_t}^i\right) \\ \text{t.q.} \quad c_0^i + \sum\limits_{t=1}^{T} \sum\limits_{s_t \in \boldsymbol{F_t}} \phi_{s_t/s_0} c_{s_t}^i \le e_0^i + \sum\limits_{t=1}^{T} \sum\limits_{s_t \in \boldsymbol{F_t}} \phi_{s_t/s_0} e_{s_t}^i, \quad c_0^i, c_{s_t}^i \ge 0 \end{array}\right\}$$

En equilibrio temos que: $\sum\limits_{i=1}^{I} c_{s_t}^i = \sum\limits_{i=1}^{I} e_{s_t}^i \quad \forall s_t \in \boldsymbol{F_t}$

As condicións de primeiro orde (C.P.O.) que resolven o problema son:

$$\frac{\pi_{s_t}^i u'_{it}\left(c_{s_t}^i\right)}{u'_{it}\left(c_0^i\right)} = \phi_{s_t/s_0} \Rightarrow u'_{it}\left(c_0^i\right)\phi_{s_t/s_0} = \pi_{s_t}^i u'_{it}\left(c_{s_t}^i\right) \quad \forall i, \forall s_t \in \boldsymbol{F_t}, t > 0$$

É dicir, en equilibrio, a perda de utilidade xerada pola compra dun activo A-D é igual á ganancia de utilidade asociada á disposición dese activo en t e o estado da natureza s.
Da condición de equilibrio temos que:

$$\frac{\pi^i_{s_h} u'_{ih}\left(c^i_{s_h}\right)}{\pi^i_{s_t} u'_{it}\left(c^i_{s_t}\right)} = \frac{\phi_{s_h/s_0}}{\phi_{s_t/s_0}} \quad \forall i, \forall s_t \in \boldsymbol{F_t}, \forall s_h \in \boldsymbol{F_h}, \forall t > 0, \forall h > 0$$

Como: $\pi^i_{s_h} = \pi^i_{s_h/s_t}\pi^i_{s_t} \quad \text{si} \;\; s_t \in \boldsymbol{F_t}$

$$\frac{\pi^i_{s_h/s_t} u'_{ih}\left(c^i_{s_h}\right)}{u'_{it}\left(c^i_{s_t}\right)} = \frac{\phi_{s_t/s_0}\phi_{s_h/s_t}}{\phi_{s_t/s_0}} = \phi_{s_h/s_t} \quad \forall i, \forall s_h \subseteq \boldsymbol{F_t}, \forall s_t \subseteq \boldsymbol{F}_t, s_h \subseteq s_t, \forall h > t$$

Así, podemos reescribir esta condición de equilibrio como:

$$u'_{it}\left(c^i_{s_t}\right)\phi_{s_h/s_t} = \pi^i_{s_h/s_t} u'_{ih}\left(c^i_{s_h}\right)$$

Dado un estado da natureza en t, a RMS entre consumos futuro no estado h e o consumo no estado en t é igual ao prezo do A-D en t que paga unha unidade monetaria nun estado futuro h.

Se nos situamos nun nodo concreto: s_t

$$\frac{\pi^i_{s_j/s_t} u'_{ij}\left(c^i_{s_j}\right)}{\pi^i_{s_h/s_t} u'_{ih}\left(c^i_{s_h}\right)} = \frac{\phi_{s_j/s_t}}{\phi_{s_h/s_t}} \; \forall i, \forall s_j \subseteq \boldsymbol{F}_j, \forall s_h \subseteq \boldsymbol{F}_h, s_h \subseteq s_t, s_j \subseteq s_t, \forall j, h > t$$

Prezo dun activo j:

$$P_{j0} = \sum_{s_T \in \boldsymbol{F}_T} \phi_{s_T/s_0} X_{js_T} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{s_t \in \boldsymbol{F_t}} \phi_{s_t/s_{t-1}} X_{js_t} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{s_t \in \boldsymbol{F_t}} \frac{\pi^i_{s_t/s_{t-1}} u'_{it}\left(c^i_{s_t}\right)}{u'_{it-1}\left(c^i_{s_{t-1}}\right)} X_{js_t}$$

$$P_{js_1} = \sum_{t=2}^{T}\sum_{s_t \in \boldsymbol{F_t}} \phi_{s_t/s_1} X_{js_t} = \sum_{t=2}^{T}\sum_{s_t \in \boldsymbol{F_t}} \frac{\pi^i_{s_t/s_{t-1}} u'_{it}\left(c^i_{s_t}\right)}{u'_{it-1}\left(c^i_{s_{t-1}}\right)} X_{js_t}$$

$$P_{j0} = \sum_{s_1 \in \boldsymbol{F_1}} \frac{\pi^i_{s_1} u'_{it}\left(c^i_{s_1}\right)}{u'_{it}\left(c^i_0\right)}\left(P_{js_1} + d_{js_1}\right)$$

En xeral, para calquera momento t:

$$P_{jt} = E_t\left[\frac{U'\left(C_{t+1}\right)}{U'\left(C_t\right)}\left(P_{jt+1} + D_{jt+1}\right)\Big/ s_t\right]$$

$$U'\left(C_t\right)P_{jt} = E\left[U'\left(C_{t+1}\right)\left(D_{jt+1} + P_{jt+1}\right)/s_t\right]$$

Que é a condición de optimalidade ou condición de Euler dun problema de optimización dinámica do proceso consumo-investimento dun axente representativo. Teremos que:

(a) lado esquerdo: custo en termos de consumo perdido ao comprar unha unidade adicional do activo financeiro.

(b) lado dereito: ganancia marxinal esperada da utilidade derivada do consumo que se obtén ao dispor dunha unidade adicional do activo financeiro.

A igualdade de (a) e (b) implica que, no óptimo, o individuo móstrase indiferente entre consumir o último euro ou investilo no activo.

A esta ecuación de equilibrio denomínaselle ecuación fundamental do ICCAPM:

Podemos expresar o valor do activo en termos de rendementos:

$$E\left[\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}(1+\tilde{r}_{j,t+1})\Big/ s_t\right]=1 \qquad j=1,2,\dots,N$$

Así, os rendementos esperados de todos os activos adecuadamente descontados e ponderados pola relación marxinal de substitución entre consumos de distintos períodos deben ser iguais en equilibrio.

Para un activo sen risco, o seu prezo sería:

$$E\left[\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)}(1+r_{f,t+1})\Big/ s_t\right]=1$$

De modo que podemos reescribir a relación de equilibrio como:

$$E\left[U'(C_{t+1})(\tilde{r}_{j,t+1}-r_{f,t+1})\big/ s_t\right]=0 \qquad j=1,2,\dots,N$$

Ademais, a prima de risco para un activo j podémola expresar utilizando a definición de covarianza como:

$$E\left[(\tilde{r}_{j,t+1}-r_{f,t+1})\big/ s_t\right]=-(1+r_{f,t+1})\operatorname{cov}_t\left[\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)},\tilde{r}_{j,t+1}\right] \qquad j=1,2,\dots,N$$

- Cov(·) $<$ 0 ➡ $\tilde{r}_j\uparrow$ $\quad \dfrac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)}\downarrow$ $\quad C\uparrow$ ➡ Activo pouco atractivo $\quad P\downarrow(\bar{r}_j-r_f)\uparrow$
- Cov(·) $>$ 0 ➡ $\tilde{r}_j\uparrow$ $\quad \dfrac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)}\uparrow$ $\quad C\downarrow$ ➡ Activo moi atractivo $\quad P\uparrow(\bar{r}_j-r_f)\downarrow$

O feito de que a prima de risco depende da UM do consumo que é non observable dificulta o cálculo do prezo do activo. No caso de que as preferencias sexan cuadráticas, a expresión para a valoración sería:

$$u(c_t)=ac_t-\left(\frac{b}{2}\right)c_t^2 \qquad a,b>0$$

$$\bar{r}_j-r_f=-(1+r_f)\operatorname{Cov}\left(\frac{a-b\tilde{c}_{t+1}}{a-bc_t},\tilde{r}_{j,t+1}\right)=\frac{b(1+r_f)}{a-bc_t}\operatorname{Cov}(\tilde{c}_{t+1},\tilde{r}_{j,t+1})$$

Consideremos a carteira c, a que maior correlación ten co consumo:

$$\bar{r}_c-r_f=\frac{\delta b(1+r_f)}{a-bc_t}\operatorname{Cov}(\tilde{r}_c,\tilde{c}_{t+1})$$

Para calquera activo j:

$$\frac{\bar{r}_j-r_f}{\bar{r}_c-r_f}=\frac{\operatorname{Cov}(\tilde{r}_j,\tilde{c}_{t+1})}{\operatorname{Cov}(\tilde{r}_c,\tilde{c}_{t+1})}=\frac{\dfrac{\operatorname{Cov}(\tilde{r}_j,\tilde{c}_{t+1})}{\operatorname{Var}(\tilde{c}_{t+1})}}{\dfrac{\operatorname{Cov}(\tilde{r}_c,\tilde{c}_{t+1})}{\operatorname{Var}(\tilde{c}_{t+1})}}$$

$$\bar{r}_j-r_f=\frac{\beta_{j,c_t}}{\beta_{c,c_t}}(\bar{r}_c-r_f)$$

Se é posible construír unha carteira que teña unha beta dun co consumo, entón obtemos a analoxía co CAPM:

$$\bar{r}_j - r_f = \beta_{j,c_t}\left(\bar{r}_c - r_f\right)$$

MODELO DE LUCAS

Este modelo considera consumidores idénticos de vida infinita que maximizan a utilidade esperada:

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u\left(c_t\right)\right] \quad u' > 0, \quad u'' < 0$$

Con T infinito evitamos que o investidor no último período da súa vida deixe de aforrar e liquide a súa carteira. Isto é equivalente a un marco de tempo finito no que os investidores obteñen utilidade dos seus herdeiros (Barro, 1974).
Axente representativo: a súa función de utilidade é unha media ponderada da de todos os individuos.
O output (Y) que se xera nesta economía está dado por un proceso estacionario esóxeno cunha evolución temporal dada pola matriz de probabilidades de transición:

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{pmatrix}, \ \pi_{ij} = \Pr ob\left(Y_{t+1} = Y^j / Y_t = Y^i\right) \quad \forall t$$

Os activos representan unha parte da propiedade do output. O prezo dos activos no momento t é P_t, e o dividendo que paga é igual ao output do momento t, Y_t . (Lucas fruit tree)
Consideramos expectativas racionais: as expectativas do axente representativo son en media acertadas posto que coñece a estrutura da economía e non comete erros sistemáticos.
O problema do axente representativopodémolo formular como:

$$\max_{\{z_t\}} E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t u\left(c_t\right)\right]$$

$$\text{t.q.} \quad c_t + P_t z_{t+1} \le z_t Y_t + P_t z_t \quad \forall t$$

$\forall t, \quad c_t = z_t Y_t + P_t z_t - P_t z_{t+1}$, z_{t+1} resolve:

$$u'\left(c_t\right)P_t = \delta E_t\left\{u'\left(\tilde{c}_{t+1}\right)\left[\tilde{P}_{t+1} + \tilde{Y}_{t+1}\right]\right\}$$

onde:

- $u'\left(c_t\right)P_t$ perda de utilidade en t debido á compra dunha unidade do activo
- $\delta E_t\left\{u'\left(\tilde{c}_{t+1}\right)\left[\tilde{P}_{t+1} + \tilde{Y}_{t+1}\right]\right\}$ Ganancia (descontada) de utilidade asociada á disposición dunha unidade adicional do activo

Da condición de equilibrio, obtemos a ecuación fundamental do ICCAPM:

$$P_t = \delta E_t\left\{\frac{u'\left(\tilde{c}_{t+1}\right)}{u'\left(c_t\right)}\left[\tilde{P}_{t+1} + \tilde{Y}_{t+1}\right]\right\}$$

$$P_t = E_t \sum_{h=0}^{\infty} \delta^h \left[\frac{u'(\tilde{c}_{t+h})}{u'(c_t)} \tilde{Y}_{t+h} \right]$$

O prezo dun activo é igual á suma de todos os dividendos futuros descontados, onde o desconto realízase utilizando a RMS intertemporal definida sobre unha serie de consumo.

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{l} u(c_t) = \ln(c_t) \\ \delta = 0,95 \\ s = 2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} s=1 & s=2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s=1 \\ s=2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} Y(s=1)=1 \\ Y(s=2)=1,5 \end{array}$$

$$u'(c_t)P_t = \delta E_t \left\{ u'(\tilde{c}_{t+1}) \left[\tilde{P}_{t+1} + \tilde{Y}_{t+1} \right] \right\}$$

$$s=1 \qquad P(1) = \delta\left\{0,5\left(P(1)+1\right) + 0,5\tfrac{1}{1,5}\left(P(2)+1,5\right)\right\}$$

$$s=2 \qquad \tfrac{1}{1,5}P(2) = \delta\left\{0,6\left(P(1)+1\right) + 0,4\tfrac{1}{1,5}\left(P(2)+1,5\right)\right\}$$

$$P(1) = 19$$

$$P(2) = 28,5$$

Para un activo sen risco (bono básico un período):

$$u'(c_t)P_t^f = \delta E_t \left\{ u'(\tilde{c}_{t+1}) \right\} \quad \Rightarrow \quad P_t^f = \frac{1}{(1+r_f)} = \delta E_t \left\{ \frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)} \right\}$$

Caso particular: neutralidade ao risco (u´() é constante)

$$P_t = E_t \sum_{h=1}^{\infty} \delta^h \tilde{Y}_{t+h} = E_t \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\tilde{Y}_{t+h}}{(1+r_f)^h}$$

Nun contexto de aversión ao risco o desconto do fluxo de dividendos realízase a unha taxa máis elevada que o tipo libre de risco, de forma que se inclúe unha prima de risco.

Prima de risco do activo:

$$u'(c_t)P_t = \delta E_t \left\{ u'(\tilde{c}_{t+1}) \left[\tilde{P}_{t+1} + \tilde{Y}_{t+1} \right] \right\} \quad \Rightarrow \quad 1 = \delta E_t \left\{ \frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)} (1+\tilde{r}_{j,t+1}) \right\}$$

$$1 = \delta E_t \left\{ \frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)} \right\} E_t (1+\tilde{r}_{j,t+1}) + \delta \mathrm{Cov}\left(\frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)}, \tilde{r}_{j,t+1} \right)$$

$$\bar{r}_j - r_f = -\delta(1+r_f)\mathrm{Cov}\left(\frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)}, \tilde{r}_{j,t+1} \right)$$

- Cov(·) < 0 ➡ $\tilde{r}_j \uparrow$ $\quad \frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)} \downarrow$ $\quad C \uparrow$ ➡ Activo pouco atractivo $\quad P \downarrow$ $\quad (\bar{r}_j - r_f) \uparrow$
- Cov(·) < 0 ➡ $\tilde{r}_j \downarrow$ $\quad \frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)} \uparrow$ $\quad C \downarrow$ ➡ Activo moi atractivo $\quad P \uparrow$ $\quad (\bar{r}_j - r_f) \downarrow$

O prezo dos activos A-D obtéñense da condición de equilibrio:

$$\phi_{s_{t+1}=i,s_t=j} = \delta \frac{u'\left(c_{s_{t+1}=i}\right)}{u'\left(c_{s_t=j}\right)} \pi_{ji} = \delta \frac{u'\left(c_{s_{t+1}=i}\right)}{u'\left(c_{s_t=j}\right)} f\left(s_{t+1}=i/s_t=j\right)$$

Continuo de estados

Considerando N períodos: $\phi_{s_{t+N}=i,s_t=j} = \delta^N \frac{u'\left(c_{s_{t+N}=i}\right)}{u'\left(c_{s_t=j}\right)} \pi_{s_t=j,s_{t+N}=i}$

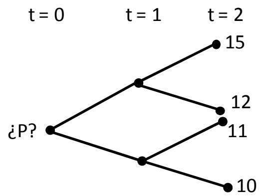
O prezo dun activo j en termos de activos A-D:

$$P_t = E_t \sum_{h=1}^{\infty} \delta^h \left[\frac{u'\left(\tilde{c}_{t+h}\right)}{u'\left(c_t\right)} \tilde{Y}_{t+h} \right] = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{S} \delta^h \left[\frac{u'\left(\tilde{c}_{t+h}\right)}{u'\left(c_t\right)} \tilde{Y}_{t+h}\left(s\right) \pi_{s_t=s,s_{t+h}=s'} \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{S} \phi_{s_{t+h}=i,s_t=j} \tilde{Y}_{t+h}\left(s\right)$$

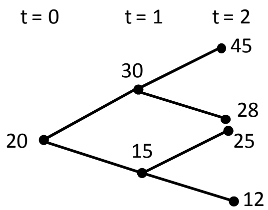
ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. Determinar o prezo do seguinte activo financeiro que xera uns pagos no instante t = 2 de:



sabendo que o prezo dos activos A-D se os prezos aumentan é de 0,5 e se baixan é de 0,48.

2. Os beneficios que xera unha empresa nos diferentes estados da natureza e períodos de tempo están dados por:

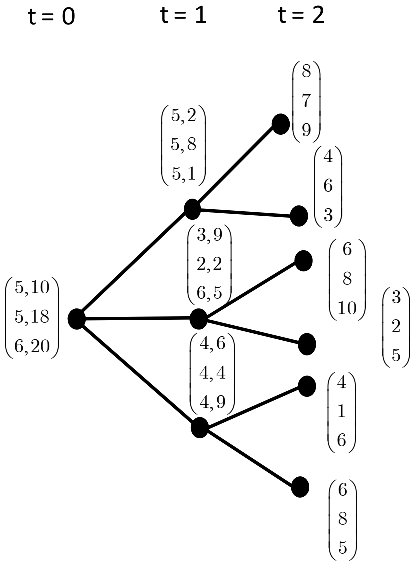


Se nesta economía só hai esta única empresa e dous individuos con funcións de utilidade logarítmicas que teñen o 70% e o 30% das accións da empresa e a probabilidade condicionada para cada un dos estados é idéntica, determinar:

(a) o consumo óptimo de cada un dos individuos.

(b) prezo dos activos A-D e o equilibrio no mercado financeiro.

3. Nun mercado no que se intercambian 3 activos financeiros os seus prezos cambian durante dous períodos do seguinte modo:



(a) Existen posibilidades de arbitraxe neste mercado?
(b) Calcular o prezo dos activos A-D para cada un dos estados da natureza

BIBLIOGRAFÍA

DANTHINE, JEAN-PIERRE E DONALDSON, JOHN B. (2005): INTERMEDIATE FINANCIAL THERORY. ACADEMIC PRESS ADVANCED FINANCE SERIES.

HENS, THORSTEN E RIEGER, MARC O. (2010): FINANCIAL ECONOMICS. A CONCISE INTRODUCTION TO CLASSICAL AND BEHAVIORAL FINANCE. SPRINGER. CAPITULO 5.

MARÍN, JOSÉ MARÍA E RUBIO, GONZALO (2001): ECONOMÍA FINANCIERA. ANTONI BOSCH. CAPÍTULO 20.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA