MATERIA
Análise Económica dos Mercados Financeiros I

TITULACIÓN
Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros

unidade didáctica 3

Ciencias Sociais e Xurídicas

Estrutura temporal dos tipos de xuro

Juan Carlos Reboredo Nogueira

Departamento: Fundamentos da Análise Económica
Facultade ou Escola: Facultade de CC Económicas e Empresariais

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

DESCATALOGADO

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

ISBN
978-84-15876-31-1

MATERIA: Análise Económica dos mercados financeiros I
TITULACIÓN: Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Introdución: Economía Financeira e valoración
- Problemas básicos da Economía Financeira
- Valoración
- Arbitraxe e equilibrio

Unidade II. Cálculo financeiro
- Valor do diñeiro no tempo
- Rendas
- Préstamos
- Empréstitos

Unidade III. Estrutura temporal dos tipos de xuro
- A Curva Cupón Cero
- Métodos de estimación da curva cupón cero
- Teorías explicativas de estrutura temporal dos tipos de xuro

Unidade IV. Activos de renda fixa
- Activos de renda fixa
- Risco de activos de renda fixa
- Inmunización

Unidade V. Valoración de activos continxentes
- Activos continxentes
- Activos Arrow-Debreu
- Probabilidades neutrais ao risco
- Martingalas
- Mercados completos

Unidade VI. Decisións financeiras con incerteza
- Preferencias e incerteza
- Análise media-varianza
- Dominio estocástico

Unidade VII. Modelo de valoración de activos CAPM
- Alternativas de investimento no espazo media-varianza
- Equilibrio de mercado: modelo CAPM

Unidade VIII. Modelo de valoración de activos APT
- Modelo factorial e carteiras de activos
- Valoración con ausencia de arbitraxe: modelo APT

ÍNDICE

INTRODUCCION

Esta unidade didáctica forma parte do curso de Análise Económica dos Mercados Financeiros I que se imparte no primeiro cuadrimestre do Máster en Economía: Organización Industrial e Mercados Financeiros.

Esta unidade ten como obxectivo analizar a estrutura temporal dos tipos de xuro, é dicir a relación existente entre os tipos de xuro a diferentes prazos. En particular, estudarase a curva cupón cero, a súa utilidade no proceso de valoración dos activos financeiros e os diferentes métodos que se poden utilizar na práctica para a estimación da curva. Así mesmo, tamén se revisan as diferentes teorías que explican a forma da estrutura temporal dos tipos de xuro.

A comprensión da temática desta unidade didáctica non é difícil pero require do manexo do cálculo financeiro desenvolvido a unidade 2. Ao longo da unidade utilízanse unha serie de exemplos numéricos sinxelos que teñen como obxectivo motivar e facilitar ao estudante o acceso á problemática da estimación da curva cupón cero e a súa relevancia para a valoración de activos.

PALABRAS CLAVE

Estrutura temporal de tipos de xuro, a curva cupón cero, factor de desconto, bootstrapping, interpolación, Nelson-Siegel, Svensson, expectativas, liquidez, prima de risco, segmentación de mercado

METODOLOXIA

- A impartición do curso sempre adoptará como punto de partida as intuicións financeiras, que se tomarán como base, e a enmarcación destas intuicións no contexto do problema de valoración.
- Utilizarase preferentemente a linguaxe gráfica, máis intuitivo e máis fácil de asimilar polo estudante, pasando posteriormente á formulación dos problemas considerados en termos formais.
- Ilustraranse todos os conceptos con exemplos prácticos que estean próximos a realidade financeira do alumno coa finalidade de que o alumno aprenda a aplicar os instrumentos de valoración a activos financeiros con características semellantes.
- Propoñerase unha serie de exercicios prácticos que ilustren a aplicabilidade e utilidade dos coñecementos adquiridos.
- Fomentarase a participación do alumno, tanto no desenvolvemento dos contidos teóricos como na resolución dos casos prácticos.

ESTRUTURA TEMPORAL DOS TIPOS DE XURO

A estrutura temporal dos tipos de xuro (ETTI) ou curva de rendementos (*yield curve*) está dada pola relación entre tipos de xuro e o seu prazo nun momento específico de tempo.
A única diferenza entre os tipos de xuro que configuran a estrutura temporal é o prazo: o risco de insolvencia é o mesmo para todos os prazos. Por esta razón, na construción da mesma utilízanse bonos do estado que non teñen risco de insolvencia.
Por exemplo, curva swap, curva cupón cero, curva par yield, curva de tipos forward, curva de tipos forward instantáneos.
A construción destas curvas baséase en información directa ou indirecta das cotizacións de mercado.
A caracterización da estrutura temporal dos tipos de xuro é útil posto que proporciona información imprescindible para a valoración de activos o para extraer información acerca de variables macroeconómicas (por exemplo, inflación) ou das expectativas dos inversores.

A CURVA CUPÓN CERO

De acordo coa ecuación fundamental de valoración, o prezo dun activo depende dos factores de desconto (fd).
O valor do fd é igual ao prezo dun bono cupón cero sen risco (de insolvencia) para o prazo correspondente:

$$P(0,t) = fd_t$$

Se no mercado temos cotizados bonos cupón cero para un amplo rango de prazos T, a valoración de activos sen risco con criterios de mercado sería trivial,

$$P(0,T) = \sum_{t=1}^{T} P(0,t)CF_t = \sum_{t=1}^{T} fd_t CF_t = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+i_{0,t})^t} CF_t \ ,$$

e a dos activos con risco "máis fácil" de obter.
Polo tanto, a curva cupón cero está configurada polos prezos que se pagan hoxe por unha unidade monetaria sen risco a percibir en distintos momentos do futuro.

1. A curva cupón cero con factores de desconto

Temos que:

$$0 \le P(0,t) \le 1 \quad 0 \le t \le T$$

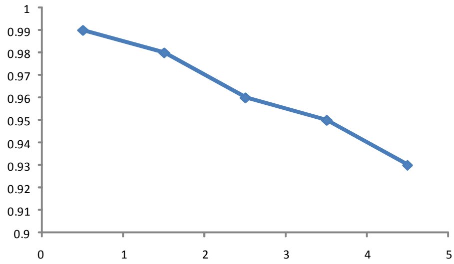
$$P(0,0) = 1$$

Por non arbitraxe, os fd son decrecentes en t

Exemplo:

$\mathrm{P(0,t)} = fd_t \cdot \mathrm{VN}$

t= anos	$\mathrm{P(0,t)fd_t}$
1	0,99
2	0,98
3	0,96
4	0,95
5	0,93



2. A curva cupón cero con tipos de xuro

Como o factor de desconto se relaciona co tipo de xuro, podemos expresar a curva cupón cero como tipos de xuro: estrutura temporal dos tipos de xuro.
Utilizaremos a convención de tomar como unidade de tempo estándar para denominar os tipos de xuro o ano. Así, aínda que os tipos que obtemos dos factores de desconto son únicos e teñen un período de tempo asociado, cando os expresamos en termos anuais o seu valor cambia dependendo do sistema de capitalización que utilicemos.
Consideraremos a curva cupón cero cos distintos sistemas de capitalización:

- Tipos de xuro simples

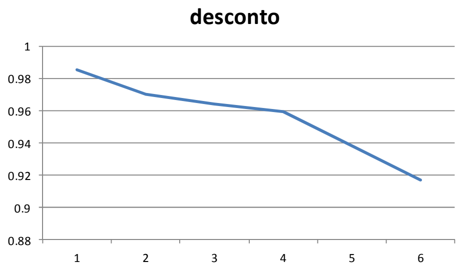
$$\mathrm{P(0,t)} = \frac{1}{1 + \mathrm{t} \cdot i^{\mathrm{s}}_{0,\mathrm{t}}} \quad \Rightarrow \quad i^{\mathrm{s}}_{0,\mathrm{t}} = \frac{1}{\mathrm{t}}\left[\frac{1}{\mathrm{P(0,t)}} - 1\right]$$

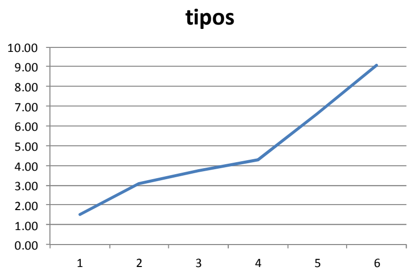
- $i^{\mathrm{s}}_{0,\mathrm{t}} \geq 0$ tipo (simple) anual para el período 0-t.

-A curva $\mathrm{t}i^{\mathrm{s}}_{0,\mathrm{t}}$ é crecente, aínda que os tipos (anuais) non teñen por que selo.

Exemplo:

t = anos	desconto	tipos	Simples
1	0,985	1,52	1,52
2	0,97	3,09	1,55
3	0,964	3,73	1,24
4	0,959	4,28	1,07
5	0,938	6,61	1,32
6	0,917	9,05	1,51





- Tipos de xuro compostos

$$P(0,t) = \frac{1}{\left(1 + i_{0,t}\right)^{t}} \quad \Rightarrow \quad i_{0,t} = \left(\frac{1}{P(0,t)}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$$

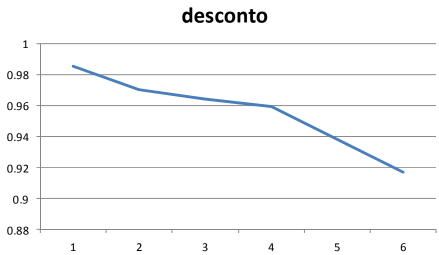
- $i_{0,t} \geq 0$ Tipo (composto) anual para o período 0-t.

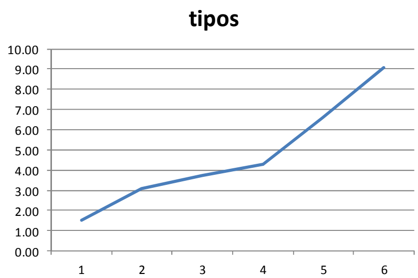
-A curva $\left(1 + i_{0,t}\right)^{t}$ é crecente, aínda que os tipos non teñen por que selo.

- $i_{0,t} \leq i^{s}_{0,t} \quad \forall t$

<u>Exemplo</u>:

t = anos	desconto	tipos	Simples	Compostos
1	0,985	1,52	1,52	1,52
2	0,97	3,09	1,55	1,53
3	0,964	3,73	1,24	1,23
4	0,959	4,28	1,07	1,05
5	0,938	6,61	1,32	1,29
6	0,917	9,05	1,51	1,45





- Tipos de xuro continuos

$$P(0,t) = e^{-t\, r_{0,t}} \quad \Rightarrow \quad r_{0,t} = -\frac{1}{t} \mathrm{Ln}\left[P(0,t)\right]$$

- $r_{0,t} \geq 0$ tipo (continuo) anual para o período 0-t.

-O tipo continuo anual obtense como unha media dos tipos de frecuencias inferiores. Ex. Tipo anual a 2 anos:

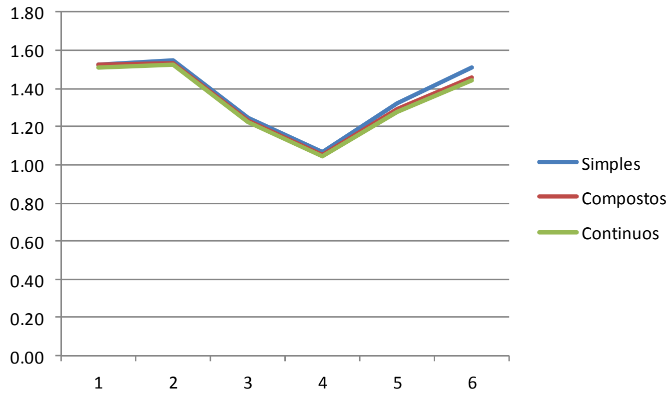
$$P(0,2)^{-1} = e^{r_{0,1}} e^{r_{1,2}} = e^{2r_{0,2}} \quad \Rightarrow \quad r_{0,2} = \frac{r_{0,1}+r_{1,2}}{2}$$

-A curva $tr_{0,t}$ é crecente, aínda que os tipos non teñen por que selo.

- $r_{0,t} \leq i_{0,t} \leq i^{s}_{0,t} \quad \forall t$

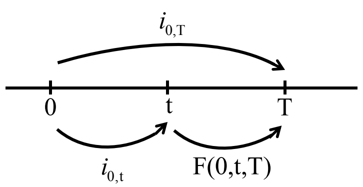
Exemplo:

t = anos	desconto	tipos	Simples	Compostos	Continuos
1	0,985	1,52	1,52	1,52	1,51
2	0,97	3,09	1,55	1,53	1,52
3	0,964	3,73	1,24	1,23	1,22
4	0,959	4,28	1,07	1,05	1,05
5	0,938	6,61	1,32	1,29	1,28
6	0,917	9,05	1,51	1,45	1,44



3. Tipos e descontos implícitos na curva cupón cero

Da información sobre descontos/tipos a diferentes prazos que proporciona a curva cupón cero podemos extraer información sobre o desconto/tipo que o mercado espera para períodos de tempo futuros: do factor de desconto implícito ou do tipo de xuro implícito.



$$fd_T = fd_t \cdot fd(0,t,T)$$

- $fd(0,t,T)$ factor de desconto implícito para o período *t-*T fixado implicitamente no instante 0.
- $F(0,t,T)$ tipo de xuro forward para o período t-T fixado implicitamente no instante 0.

O factor de desconto implícito e o tipo de xuro forward relaciónanse do seguinte modo:

$$\frac{1}{1+F(0,t,T)} = fd(0,t,T) = \frac{fd_T}{fd_t}$$

Aínda que os factores de desconto son independentes do sistema de capitalización que se utilice, os tipos forward expresados en termos anuais que se obteñen dos factores de desconto forward dependen da forma de capitalización.

- Tipos simples:

$$(1+T\,i_{0,T}^{s}) = (1+t\,i_{0,t}^{s}) + (T\text{-}t)F^{s}(0,t,T)$$

$$F^{s}(0,t,T) = \frac{T\,i_{0,T}^{s} - t\,i_{0,t}^{s}}{T-t} = \frac{1}{T-t}\left[\frac{1}{fd_T} - \frac{1}{fd_t}\right] \text{ (anualizado)}$$

O factor de desconto implícito será: $fd(0,t,T) = \left(1+\frac{1}{fd_T} - \frac{1}{fd_t}\right)^{-1}$

- Tipos simples con capitalización composta:

$$(1+T\,i_{0,T}^{s}) = (1+t\,i_{0,t}^{s})\left[1+(T\text{-}t)F^{s}(0,t,T)\right]$$

$$F^{s}(0,t,T) = \frac{1}{1+t\,i_{0,t}^{s}}\left[\frac{T\,i_{0,T}^{s} - t\,i_{0,t}^{s}}{T-t}\right]$$

$$fd(0,t,T) = \frac{fd_T}{fd_t}$$

- Tipos compostos:

$$(1+i_{0,T})^{T} = (1+i_{0,t})^{t}(1+F(0,t,T))^{T\text{-}t}$$

$$F(0,t,T) = \left[\frac{(1+i_{0,T})^{T}}{(1+i_{0,t})^{t}}\right]^{\frac{1}{T\text{-}t}} - 1$$

$$fd(0,t,T) = \frac{fd_T}{fd_t}$$

- Tipos continuos:

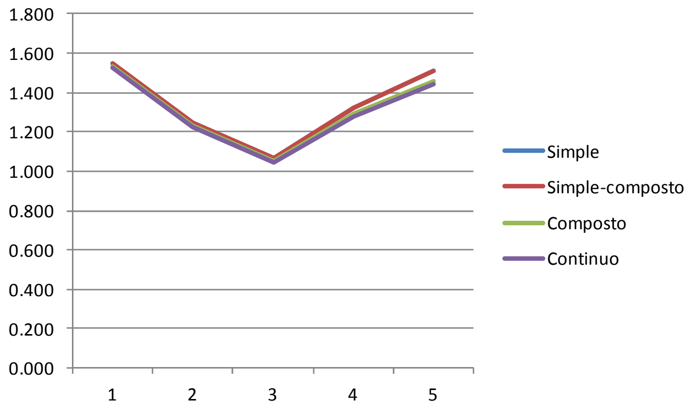
$$e^{T\,r_{0,T}} = e^{t\,r_{0,t}}e^{(T\text{-}t)r(0,t,T)}$$

$$r(0,t,T) = \frac{T\,r_{0,T} - t\,r_{0,t}}{T-t} = r_{0,T} + t\left[\frac{r_{0,T} - r_{0,t}}{T-t}\right]$$

$$fd(0,t,T) = \frac{fd_T}{fd_t}$$

Exemplo:

t = anos	desconto	tipos	Simples	Compostos	Continuo	Plazo forward	Simple	Simple-composto	Composto	Continuo
1	0,985	1,52	1,52	1,52	1,51	(0,1,2)	1,546	1,546	1,535	1,523
2	0,97	3,09	1,55	1,53	1,52	(0,1,3)	1,245	1,245	1,230	1,222
3	0,964	3,73	1,24	1,23	1,22	(0,1,4)	1,069	1,069	1,052	1,047
4	0,959	4,28	1,07	1,05	1,05	(0,1,5)	1,322	1,322	1,288	1,280
5	0,938	6,61	1,32	1,29	1,28	(0,1,6)	1,509	1,509	1,455	1,444
6	0,917	9,05	1,51	1,45	1,44	---				



METODOS DE ESTIMACION DA CURVA CUPÓN CERO

Desafortunadamente, nos mercados reais non existe unha ampla abundancia de bonos cupón cero cotizados, dado que a maioría son bonos con cupón.
É por iso que necesitamos unha metodoloxía que nos axude a obter o prezo dos bonos cupón cero para diferentes prazos a partir dos prezos de mercado que se observan para os bonos con cupón derivando os factores de desconto implícitos no prezo de mercado.
Deste xeito, a curva cupón cero é un instrumento "idealizado" cuxos factores de desconto valoran correctamente os instrumentos de débeda que están cotizando no mercado.
A cuestión é, como construímos a curva continua de descontos se non temos un conxunto amplo de bonos cupón cero?

1. Métodos directos

Obtense a información dos factores de desconto a partir dos bonos cotizados no mercado, con e sen cupón.
Os prezos de cada bono implican unha ecuación de valoración na que aparecen uns determinados factores de desconto. Dun conxunto de prezos, configuramos un sistema de ecuacións das que podemos obter o valor dunhas incógnitas: os factores de desconto.
Exemplo: Como determinados a curva cupón cero a partir dos seguintes activos?

	Prezo mercado	Cupón	Valor nominal	Anos
Bono1	102,90	5%	100	1
Bono2	103,67	6%	100	3
Bono3	115,92	3%	100	4
Bono4	108,28	4%	100	4

Teremos que:

$$\begin{pmatrix} 102,90 \\ 103,67 \\ 115,92 \\ 108,28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 103 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 106 \\ 4 & 4 & 4 & 104 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} fd_1 \\ fd_2 \\ fd_3 \\ fd_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} fd_1 \\ fd_2 \\ fd_3 \\ fd_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,98 \\ 0,96 \\ 0,95 \\ 0,93 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i_{0,1} \\ i_{0,2} \\ i_{0,3} \\ i_{0,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,04\% \\ 2,06\% \\ 1,72\% \\ 1,83\% \end{pmatrix}$$

O problema que atopamos e que na práctica é moi difícil atopar no mercado un conxunto de bonos amplo que sexan linealmente independentes e que teñan as mesmas datas de cupón.

2. Boostrapping

É un procedemento que permite estimar recursivamente a curva cupón cero a partir do prezo de mercado dos bonos que se negocian. Este procedemento consiste en obter os factores de desconto para os bonos cupón cero a prazos menores ou iguais a 1 ano e logo recursivamente obter os factores de desconto a prazos superiores a 1 ano.

Exemplo:

Vencimento (anos)	Cupón	Frecuencia cupón	Valor nominal	Prezo
1/12	0	0	100	99,8
1/4	0	0	100	99,4
1/2	0	0	100	98,7
1	3%	0	100	100,22
1,5	5%	Semianual	100	106,00
2	4%	Semianual	100	104,80
3	6%	Anual	100	104,26

Factores de desconto até 1 ano:

$$fd_{1/12}=0,998 \quad fd_{0,25}=0,994 \quad fd_{0,5}=0,987 \quad fd_{1}=0,973$$

Ao valorar o bono a ano e medio temos que:

$$106=5\,fd_{0,5}+5\,fd_{1}+105\,fd_{1,5} \quad \Rightarrow \quad fd_{1,5}=0,916$$

Ao valorar o bono a 2 anos temos que:

$$104,80=4\,fd_{0,5}+4\,fd_{1}+4\,fd_{1,5}+104\,fd_{2} \quad \Rightarrow \quad fd_{2}=0,897$$

Ao valorar o bono a 3 anos temos que:

$$104,26=6\,fd_{1}+6\,fd_{2}+106\,fd_{3} \quad \Rightarrow \quad fd_{3}=0,878$$

t = anos	desconto	tipos anualizados simples	tipos anualizados compostos	tipos anualizados continuos
1/12	0,998	2,40	2,43	2,40
1/4	0,994	2,41	2,44	2,41
1/2	0,987	2,63	2,65	2,62
1	0,973	2,77	2,77	2,74
1,5	0,959	6,10	6,01	5,84
2	0,934	5,74	5,58	5,43
3	0,914	4,64	4,44	4,35

O problema que atopamos e que na práctica é difícil atopar vencementos que encaixen uns con outros para permitir o cálculo recursivo dos descontos. Por exemplo, bono a 3 anos con cupón semianual no exemplo anterior.

3. Interpolación

Permite obter os tipos ou os factores de desconto nunha data a partir dos tipos ou factores de datas próximas.

- Lineal: consideremos os prazos $a<b<c$

  O tipo de xuro en b: $i_{0,b}=\dfrac{(c-b)i_{0,a}+(b-a)i_{0,c}}{c-a}$

  Se b é o punto medio temos unha media aritmética, de non ser así o tipo interpolado é unha media ponderado.

  Factores de desconto en b (capitalización continua):

  $$fd_{b}=\left(fd_{a}\right)^{\frac{c-b}{c-a}}\left(fd_{c}\right)^{\frac{b-a}{c-a}}$$

  O fd en b é unha media xeométrica dos fd en c e a se b está no punto medio.

- Cúbica: consideremos os prazos $a<b<c<d$

  Tipos de xuro en $e\in[a,\ d]$: $i_{0,e}=\alpha e^{3}+\beta e^{2}+\theta e+\delta$

  Onde os parámetros da ecuación se obteñen de resolver:

$$i_{0,\mathrm{a}} = \alpha \mathrm{a}^3 + \beta \mathrm{a}^2 + \theta \mathrm{a} + \delta$$
$$i_{0,\mathrm{b}} = \alpha \mathrm{b}^3 + \beta \mathrm{b}^2 + \theta \mathrm{b} + \delta$$
$$i_{0,\mathrm{c}} = \alpha \mathrm{c}^3 + \beta \mathrm{c}^2 + \theta \mathrm{c} + \delta$$
$$i_{0,\mathrm{d}} = \alpha \mathrm{d}^3 + \beta \mathrm{d}^2 + \theta \mathrm{d} + \delta$$

Dificultades: Coa interpolación lineal a curva que obtemos non é suave, coa cúbica a curva é convexa para prazos entre 3 e 4 anos.

4. Métodos indirectos

Consisten en axustar os datos de prezos cotizados para os bonos a unha forma funcional específica da curva cupón cero. Polo tanto, temos o risco de mala especificación que afectaría a precisión da estimación da curva.
Consideremos j = 1, 2,…,n bonos que teñen uns fluxos F en momentos do tempo t = 1, 2,…,T. O factor de desconto e o tipo de xuro podemos definilos como funcións do tempo e dun conxunto de parámetros:

$$fd_{\mathrm{t}} = f(\mathrm{t};\beta)$$
$$i_{0,\mathrm{t}} = g(\mathrm{t};\theta)$$

As funcións f e g poden ser, por exemplo, un polinomio exponencial. Por non arbitraxe, temos que:

$$\tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{j}} = \sum_{s} \mathrm{F}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{j}} f(\mathrm{t};\beta) = \sum_{s} \mathrm{F}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{j}} \exp(-t\, g(\mathrm{t};\beta))$$

Podemos escribir o prezo cotizado como o prezo teórico máis un erro:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{j}} = \tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{j}} + \varepsilon_{\mathrm{j}},$$

con: $E(\varepsilon_{\mathrm{j}}) = 0$, $Var(\varepsilon_{\mathrm{j}}) = \sigma^2 \omega_{\mathrm{j}}$, $Cov(\varepsilon_{\mathrm{j}}, \varepsilon_{\mathrm{k}}) = 0 \quad \mathrm{j} \neq \mathrm{k}$.
Así, estimamos os factores de desconto a partir de:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \sum_{j=1}^{n} \left(\mathrm{P}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{j}} - \tilde{\mathrm{P}}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{j}} \right)^2$$

Alternativamente, utilizando especificacións alternativas para a matriz de var-covar, obtenmos a estimación por MCG (usando notación matricial):

$$\hat{\beta} = \left(\mathrm{X'V^{-1}X} \right)^{-1} \left(\mathrm{X'V^{-1}P} \right)$$

Dependendo da forma da matriz de var-covar, podemos dar máis "peso" ao axuste para o cálculo dos factores de desconto para prazos máis curtos ou para os máis longos.

Exemplo: especificación dos factores de desconto en termos de splines polinómicos (McCulloch):

$$fd_t = \begin{cases} fd_0(t) = a_0 + b_0 t + c_0 t^2 + d_0 t^3 & \text{si } t \in [0,5] \\ fd_1(t) = a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3 & \text{si } t \in [5,10] \\ fd_2(t) = a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3 & \text{si } t \in [10,15] \end{cases}$$

onde: $\beta = (a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2)'$. O número de parámetros pódese reducir tendo en conta restricións de suavidade da función.

4.1 Nelson-Siegel

Non busca axustar a curva senón explicar a mesma. Esta proposta desenvólvese para os tipos de xuro continuos, onde a forma funcional a axustar obtense como solución a unha ecuación diferencial ordinaria que describe a dinámica dos tipos de xuro:

$$f(0,t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-t/\tau_1\right) + \beta_2 \left(t/\tau_1\right) \exp\left(-t/\tau_1\right)$$

onde f(0,t) tipo instantáneo a prazo de hoxe a prazo t e $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1$ son parámetros a estimar.

Como: $r_{0,t} = \frac{1}{t}\int_0^t f(0,t)\,dt$, teremos que:

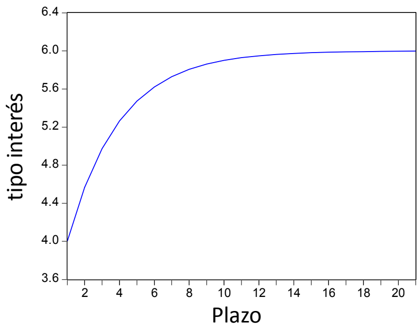
$$r_{0,t} = \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(-t/\tau_1\right)}{t/\tau_1} \right] + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-t/\tau_1\right)}{t/\tau_1} - \exp\left(-t/\tau_1\right) \right]$$

onde:

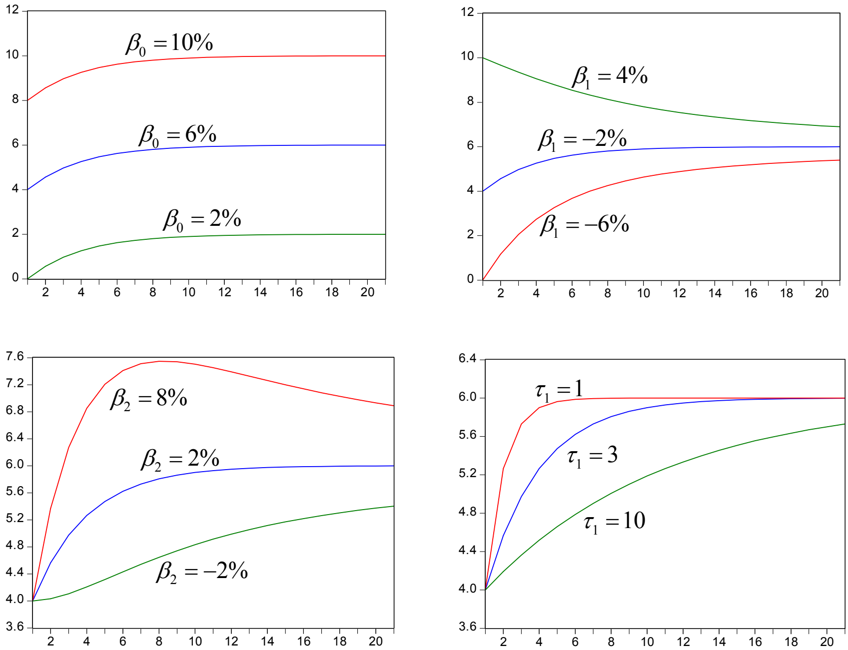
- $r_{0,t}$ é o tipo de xuro instantáneo de hoxe a prazo t
- β_0 é o límite do tipo instantáneo cando t vai a infinito: tipo de xuro a longo prazo
- β_1 é o límite de cando $r_{0,t} - \beta_0$ t vai a cero: spread entre tipos a longo e curto prazo
- β_2 é un parámetro de curvatura
- τ_1 é un parámetro de escala que mide a taxa á cal os compoñentes de curto e medio prazo converxen a cero

Exemplo:

$\beta_0 = 6\%$, $\beta_1 = -2\%$, $\beta_2 = 2\%$, $\tau_1 = 3$ anos



O seguinte gráfico mostra a sensibilidade da curva aos valores dos parámetros:



A estimación da curva realízase para un conxunto de bonos que cotizan no mercado no momento t, os parámetros do modelo obtéñense minimizando, con respecto aos parámetros de xuro, a diferenza ao cadrado entre o prezo de mercado e o prezo teórico que obteriamos dada a curva Nelson-Siegel. Tamén podemos ponderar o erro en cada instante por un "peso".

4.2 Svensson

Utiliza a mesma especificación funcional que Nelson-Siegel pero incorporando dous parámetros adicionais que permiten obter formas para a curva cupón cero de U ou con chepa.

$$r_{0,t} = \mathrm{NS} + \beta_3 \left[\frac{1 - \exp\left(- {}^{t}\!/_{\tau_2} \right)}{{}^{t}\!/_{\tau_2}} - \exp\left(- {}^{t}\!/_{\tau_2} \right) \right]$$

TEORÍAS EXPLICATIVAS DA ETTI

O estudo da forma da ETTI ou curva cupón cero deu lugar a diferentes teorías explicativas relacionadas coas preferencias dos investidores con respecto aos prazos. De feito, se os investidores fosen indiferentes con respecto aos prazos, a ETTI sería plana.

1. Expectativas

A ETTI nun momento do tempo reflicte as expectativas do mercado sobre os tipos de xuro anuncio futuros.
Por non arbitraxe temos que:

$$\left(1 + i_{0,2}\right)^2 = \left(1 + i_{0,1}\right)\left(1 + \mathrm{F}(0,1,2)\right)$$

co cal:

$$\mathrm{F}(0,1,2) = \frac{\left(1 + i_{0,2}\right)^2}{\left(1 + i_{0,1}\right)} - 1 = \mathrm{E}_0\left(i_{1,2}\right)$$

As ganancias esperadas dun investimento "recursiva" ou con reinvestimento ten que ser igual ás dun investimento a prazo para non existan oportunidades de arbitraxe.
Evidentemente, non se está considerando o risco de reinvestimento derivado dun cambio futuro nos tipos de xuro do período 1 a 2, por iso esta teoría require neutralidade ao risco dos investidores.

Exemplo:
Consideremos tipos a 1 e 2 anos: $i_{0,1} = 5,5\%$, $i_{0,2} = 6\%$, teremos que:

$$\left(1 + 0,06\right)^2 = \left(1 + 0,055\right)\left(1 + \mathrm{F}(0,1,2)\right) \Rightarrow \mathrm{F}(0,1,2) = \mathrm{E}_0(i_{1,2}) = 6,50\%$$

Que ocorrería sen o tipo esperado dos investidores fose do 7%?
A curva incrementa o seu pendente: compran bonos a un ano e reinvisten ao segundo, polo que o prezo dos bonos a un ano aumentan e os tipos caen, mentres que o prezo dos bonos a 2 anos redúcense e os tipos aumentan.
Este comportamento dos investidores permite que a curva se axuste de acordo coas expectativas de modo que aos investidores son indiferentes sobre os prazos ou forma de investimento para un determinado horizonte temporal.
Tamén podemos describir esta teoría de dúas formas alternativas:

- A rendibilidade do bono a 1 ano ten que ser igual á rendibilidade esperada do bono a 2 anos se este fose vendido no ano 1:

$$\frac{1}{fd_1}=\frac{E_0\left(fd_{12}\right)}{fd_2}$$

- A rendibilidade esperada de investir nun bono a 1 ano e reinvestilo a un ano máis ten que ser igual á rendibilidade do investimento nun bono a 2 anos:

$$\frac{1}{fd_1}E_0\left(\frac{1}{fd_{12}}\right)=\frac{1}{fd_2}$$

Desde o punto de vista financeiro, as dúas estratexias son idénticas. Porén, a rendibilidade (eseprada) é diferente posto que:

$$E_0\left(\frac{1}{fd_{12}}\right)>\frac{1}{E_0\left(fd_{12}\right)}\quad \text{(Desigualdade de Jensen)}$$

2. Liquidez

Os investidores prefiren os investimentos a curto prazo posto que son máis líquidos que os investimentos a longo prazo.
Polo tanto, se consideramos unha estratexia de investimento cun reinvestimento recursivo en sucesivos momentos até un prazo determinado, esta estratexia é preferida a unha estratexia de investimento para ese mesmo prazo non realizando reinvestimentos:

$$\left(1+i_{0,1}\right)\left(1+i_{1,2}\right)\text{ é máis preferida a }\left(1+i_{0,2}\right)^2$$

Polo tanto:

$$F(0,1,2)=E\left(i_{1,2}\right)+PL$$

Isto implica que os tipos forward con esta teoría serán maiores que os que obtemos coa teoría das expectativas, co que o prezo dos bonos será menor coa teoría da liquidez.

3. Prima de risco

Ten en conta que as expectativas dos investidores poden ser erróneas, polo que se estes non son neutrais ao risco deben de ter en conta o risco asociado ás súas predicións. Ademais os posibles erros de predición teñen efectos moi diferentes sobre o prezo dos bonos dependendo do prazo do bono.

<u>Exemplo</u>: temos 2 bonos: bono cupón a 1 ano e bono con cupón a 2 anos. Ambos teñen un valor nominal de 100€, $P_0^1=P_0^2=100$, e o tipo de xuro é do 6%. Que ocorre se o tipo de xuro sobe ao 8%?

$$P_0^1=98,15\quad P_0^2=96,43\quad\Rightarrow\quad \Delta P_0^2>\Delta P_0^1$$

Se os investidores son adversos ao risco esixirán unha prima pola maior volatilidade do prezo do bono:

$$F(0,1,2)=E\left(i_{1,2}\right)+PR$$

4. Segmentación de mercado

Os bonos con distintos prazos negócianse en segmentos de mercados diferentes e os tipos en cada segmente de mercado determínanse de acordo coas condicións de oferta e demanda do mercado respectivo.
Os investidores non se moven entre os diferentes segmentos de mercado.
Esta teoría pode ver como un caso particular da teoría da prima de risco, onde esta última toma un valor infinito.

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. Nun mercado intercámbianse os seguintes bonos con valor nominal de 100€: (1) un bono cun cupón semestral do 2% a 4 anos por un prezo de 106,12€, (2) un bono cupón cero a 1 ano por un prezo de 97€, (3) un bono con cupón anual do 5% a 4 anos por un prezo de 109,80€, (4) un bono con cupón semestral do 8% a un ano e medio por un prezo de 119,28€, (5) un bono con cupón anual do 4% a 3 anos por un prezo de 104,40€, (6) un bono con cupón semestral do 3% a 4 anos, pagándose o primeiro cupón a partir do segundo ano, por un prezo de 104,95€, (7) un bono con cupón semestral do 3% a 3 anos por un prezo de 115,92€ e (8) un bono con cupón anual do 2% a 2 anos por un prezo de 100,76€.
(a) Obter a estrutura temporal dos tipos de xuro utilizando diferentes formas de capitalización.
(b) Calcular o factor de desconto a 8 meses e a 2 anos e 7 meses utilizando a interpolación lineal.
(c) Calcular o tipo de xuro a 3 anos e 2 meses utilizando a interpolación lineal e cúbica.

BIBLIOGRAFÍA

MARÍN, JOSÉ MARÍA E RUBIO, GONZALO (2001): ECONOMÍA FINANCIERA. ANTONI BOSCH. CAPÍTULO 3.

MARTINELLI, LIONE, PRIALULET, PHILIPPE E PRIAULET,STÉPHANE (2005): FIXED-INCOME SECURITIES. VALUATION, RISK MANGEMENT AND PORTFOLIO STRATEGIES. WILLEY FINANCE SERIES. CAPITULOS 2, 3, 4.

NAVARRO, ELISEO E NAVE, JUAN M. (2001) FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS. BARCELONA. ANTONI BOSCH, D.L.

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA