MATERIA
Análise Económica dos Mercados Financeiros I

TITULACIÓN
Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros

unidade didáctica
4

Ciencias Sociais e Xurídicas

Activos de renda fixa

Juan Carlos Reboredo Nogueira

Departamento: Fundamentos da Análise Económica
Facultade ou Escola: Facultade de CC Económicas e Empresariais

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

DESCATALOGADO

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

ISBN
978-84-15876-32-8

MATERIA: Análise Económica dos mercados financeiros I
TITULACIÓN: Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Introdución: Economía Financeira e valoración
Problemas básicos da Economía Financeira
Valoración
Arbitraxe e equilibrio

Unidade II. Cálculo financeiro
Valor do diñeiro no tempo
Rendas
Préstamos
Empréstitos

Unidade III. Estrutura temporal dos tipos de xuro
A Curva Cupón Cero
Métodos de estimación da curva cupón cero
Teorías explicativas de estrutura temporal dos tipos de xuro

Unidade IV. Activos de renda fixa
Activos de renda fixa
Risco de activos de renda fixa
Inmunización

Unidade V. Valoración de activos continxentes
Activos continxentes
Activos Arrow-Debreu
Probabilidades neutrais ao risco
Martingalas
Mercados completos

Unidade VI. Decisións financeiras con incerteza
Preferencias e incerteza
Análise media-varianza
Dominio estocástico

Unidade VII. Modelo de valoración de activos CAPM
Alternativas de investimento no espazo media-varianza
Equilibrio de mercado: modelo CAPM

Unidade VIII. Modelo de valoración de activos APT
Modelo factorial e carteiras de activos
Valoración con ausencia de arbitraxe: modelo APT

ÍNDICE

Introdución

Palabras clave

Metodoloxía

Activos de renda fixa

1. Dinámica temporal do prezo
2. Relación prezo e tipo de xuro

Risco dos activos de renda fixa

1. Duración
   - 1.1. Concepto
   - 1.2. Interpretacións
   - 1.3. Propiedades
   - 1.4. Limitacións
   - 1.5. Outras medidas de duración
2. Convexidade

Inmunización

1. Carteira
2. Múltiple
3. Limitacións

Actividades propostas

Bibliografía

INTRODUCCION

Esta unidade didáctica forma parte do curso de Análise Económica dos Mercados Financeiros I que se imparte no primeiro cuadrimestre do Máster en Economía: Organización Industrial e Mercados Financeiros.
Esta unidade introduce a valoración dos activos de renda fixa e as variacións que experimenta esa valoración ao longo do tempo como consecuencia dos cambios no tipo de xuro. Así, introdúcese o concepto de ricos de activos de renda fixa e a problemática asociada á súa xestión por medio dos conceptos de duración e convexidade que son examinados desde o punto de vista da súa aplicabilidade práctica, tendo en contas as vantaxes e limitacións. Así mesmo, tamén se introduce ao alumno o concepto de inmunización e a súa utilización na xestión de risco de carteiras de activos de renda fixa.
A comprensión da temática desta unidade didáctica require dun grao de abstracción relativamente elevado e dunha comprensión do cálculo financeiro e da estrutura temporal dos tipos de xuro. Para facilitar a tarefa de aprendizaxe, ao longo da unidade utilízanse unha serie de exemplos numéricos sinxelos que teñen como obxectivo motivar e facilitar ao estudante o acceso á problemática da valoración con activos de renda fixa e a determinación e xestión de riscos asociada a este tipo de activos.

PALABRAS CLAVE

Activo de renda fixa, risco prezo, risco reinvestimento, duración, convexidade, inmunización

METODOLOXIA

- A impartición do curso sempre adoptará como punto de partida as intuicións financeiras, que se tomarán como base, e a enmarcación destas intuicións no contexto do problema de valoración.
- Utilizarase preferentemente a linguaxe gráfica, máis intuitivo e máis fácil de asimilar polo estudante, pasando posteriormente á formulación dos problemas considerados en termos formais.
- Ilustraranse todos os conceptos con exemplos prácticos que estean próximos a realidade financeira do alumno coa finalidade de que o alumno aprenda a aplicar os instrumentos de valoración a activos financeiros con características semellantes.
- Propoñerase unha serie de exercicios prácticos que ilustren a aplicabilidade e utilidade dos coñecementos adquiridos.
- Fomentarase a participación do alumno, tanto no desenvolvemento dos contidos teóricos como na resolución dos casos prácticos.

ACTIVOS DE RENDA FIXA

Os activos de renda fixa son activos que xeran uns fluxos cuxas contías son coñecidas no momento no que se valora o activo.
Como os fluxos son coñecidos, non aleatorios, a súa valoración consiste en calcular o valor descontado de todos eses fluxos. Así, o seu prezo (P) estará dado por:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+i_{0,t})^t} + \frac{VN}{(1+i_{0,T})^T}$$

Cupón e tipos constantes (ETTI plana)

$$= \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+i)^t} + \frac{VN}{(1+i)^T}$$

$$= C\frac{1-(1+i)^{-T}}{i} + VN(1+i)^{-T}$$

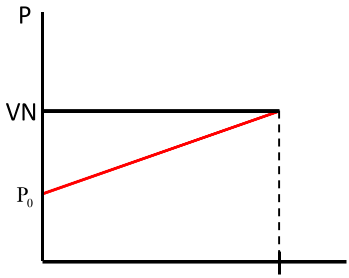
$$= VN\left[1+\frac{c-i}{i}\left(1-\frac{1}{(1+i)^T}\right)\right]$$

onde:
C é o cupón que paga o activo ou bono
VN é o valor nominal
i é a TIR do bono
c é o tipo do cupón, C = c·VN
No caso no que o cupón é nulo, o prezo sería $P_0 = VN(1+i)^{-T}$.
Teremos que se:

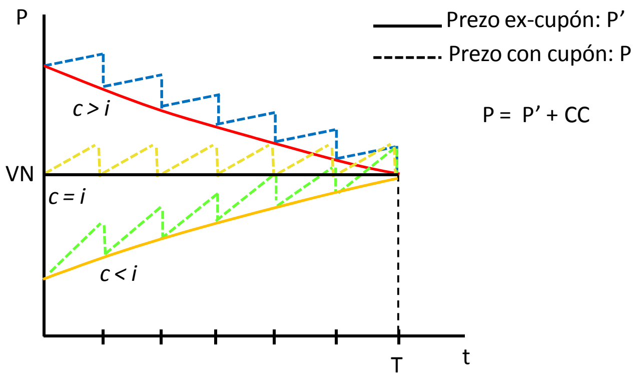
(a) c = i, entón $P_0 = VN$, o bno cotiza á par
(b) c > i, entón $P_0 > VN$, o bono cotiza por riba da par
(c) c < i, entón $P_0 < VN$, o bono cotiza por debaixo da par

1. Dinámica temporal do prezo

- Se o bono é cupón cero, o seu prezo variaría do seguinte xeito:



- Se o bono paga un cupón, a evolución do prezo dependería de se cotiza á par, por riba ou por debaixo da par. O evolución temporal do prezo sería:



O cupón corrido é o cupón devindicado pero non pagado por estar entre as datas de pago.
Teremos que o:

- prezo con cupón incrementase (exponencialmente) conforme achegámonos ao momento do pago do cupón. Por exemplo,para $0 \leq t < 1$

$$P_0 = \left[\sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+i)^t} + \frac{VN}{(1+i)^T} \right] (1+i)^t$$

  Esta relación deixa de verificarse para t = 1, cando se produce o pago do cupón.
- valor do cupón corrido calcúlase como:

$$CC = \text{Cupón x } \frac{\text{Nº días desde o pago do último cupón}}{\text{Nº días entre pagos de cupóns}}$$

Exemplo:

Bono con cupón	
VN	100
***i* (anual)**	0,05
***i* (trimestral)**	0,012
cupón	0,03
T (anos)	5

Período	Rendas bono	Prezo bono con cupón	Prezo ex-cupón
0		91,34	91,34
0,25		92,46	91,71
0,5		93,60	92,10
0,75		94,75	92,50
1	3	92,91	92,91
1,25		94,05	93,30
1,5		95,20	93,70
1,75		96,37	94,12
2	3	94,55	94,55
2,25		95,71	94,96
2,5		96,89	95,39
2,75		98,08	95,83
3	3	96,28	96,28
3,25		97,46	96,71
3,5		98,66	97,16
3,75		99,87	97,62
4	3	98,10	98,10
4,25		99,30	98,55
4,5		100,52	99,02
4,75		101,75	99,50
5	103	100,00	100,00

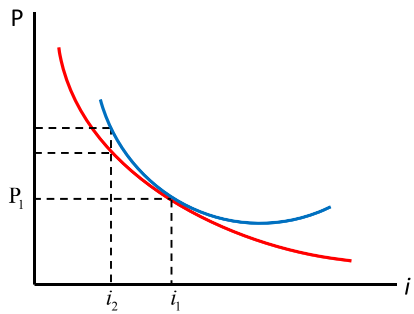
2. Relación prezo e tipo de xuro

O prezo do bono e o tipo de xuro están inversamente relacionados:

$$\frac{dP_0}{di} = -(1+i)^{-1}\left\{\sum_{t=1}^{T} Ct(1+i)^{-t} + T\,VN(1+i)^{-T}\right\} < 0$$

$$\frac{d^2P_0}{di^2} = (1+i)^{-2}\left\{\sum_{t=1}^{T} C\left(t^2+t\right)(1+i)^{-t} + VN\left(T^2+T\right)(1+i)^{-T}\right\} > 0$$

Graficamente:



Temos que a contía da variación do prezo cando varía o tipo de xuro depende da convexidade:

- Canto maior sexa T maior é a variación porcentual do prezo cando cambia *i*.
- Canto maior sexa o cupón maior é a variación porcentual do prezo cando cambia *i*.

RISCO DOS ACTIVOS DE RENDA FIXA

A pesar de ter uns fluxos fixos, os activos de renda fixa están expostos a outras fontes de risco, tales como:

- Risco de insolvencia do emisor do bono
- Risco de amortización anticipada por parte do emisor
- Risco de variacións nos fluxos do bono se están indiciados
- Risco de variacións nos tipos de xuro

Consideraremos o último tipo de risco dado que está presente ao longo de toda a vida dun bono. Podemos descompoñelo en:

$\Delta i \rightarrow \Delta P \Rightarrow$ **Risco prezo**

$\Delta i \rightarrow \Delta$valor cupóns $\Rightarrow$ **Risco reinversión**

É dicir, se o tipo de xuro cambia, o rendemento do investimento nun bono vese afectada por unha dobre vía e de maneira diferente dependendo do momento de tempo no que se atope o bono:

Para t < T,

$$\uparrow i \left\langle \begin{array}{l} \downarrow \mathrm{P} \\ \uparrow \text{valor reinversión} \end{array} \right.$$

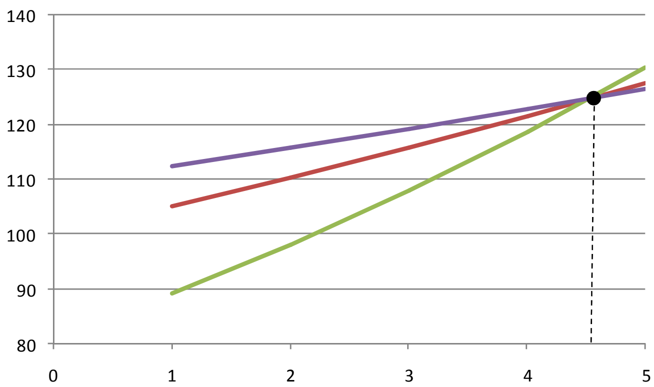
Para t = T,

$$\uparrow i \left\langle \begin{array}{l} \mathrm{P}\ \text{constante} \\ \uparrow \text{reinversión} \end{array} \right.$$

Exemplo:

c = 5% VN = 100

i = 5%	0	1	2	3	4	5
P	91.34	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
Valor cupón reinvertido		5	10.25	15.76	21.55	27.63
TOTAL		**105.00**	**110.25**	**115.76**	**121.55**	**127.63**
i = 10%						
P		84.15	87.57	91.32	95.45	100.00
Valor cupón reinvertido		5	10.5	16.55	23.205	30.5255
TOTAL		**89.15**	**98.07**	**107.87**	**118.66**	**130.53**
i = 3%						
P		107.43	105.66	103.83	101.94	100.00
Valor cupón reinvertido		5	10.15	15.45	20.92	26.55
TOTAL		**112.43**	**115.81**	**119.28**	**122.86**	**126.55**



1. Duración

1.1 Concepto

A duración mide a sensibilidade do prezo dun bono ás variacións no tipo de xuro (bruto):

$$\underbrace{\frac{dP}{d(1+i)}\frac{(1+i)}{P}}_{\text{elasticidade}} = \left\{\sum_{t=1}^{T} C(-t)(1+i)^{-(t+1)} + VN(-T)(1+i)^{-(T+1)}\right\}\frac{(1+i)}{P}$$

$$= -\underbrace{\sum_{t=1}^{T} t\frac{C(1+i)^{-t}}{P} - T\frac{VN(1+i)^{-T}}{P}}_{D}$$

$$= -D$$

Así, a duración (D) é unha media ponderada dos vencementos dos fluxos dun bono, onde as ponderacións están dadas pola proporción de cada fluxo con respecto ao valor total do bono. Esta media ponderada dános a "vida media ponderada" do bono. A D tamén se lle denomina duración de Macaulay.
Despexando da expresión anterior, temos que:

$$\mathrm{D}=-\frac{dP/P}{d(1+i)/(1+i)}=-\frac{d\ln \mathrm{P}}{d\ln(1+i)}$$

En termos de rendibilidade neta, D expresaríase como:

$$\underbrace{\frac{dP}{di}\frac{i}{P}}_{\text{elasticidad}}=\left\{\sum_{t=1}^{T}C(-t)(1+i)^{-(t+1)}+VN(-T)(1+i)^{-(T+1)}\right\}\frac{i}{P}$$

$$=\frac{i}{(1+i)}\left[-\sum_{t=1}^{T}t\frac{C(1+i)^{-t}}{P}-T\frac{VN(1+i)^{-T}}{P}\right]$$

$$=-\frac{i}{(1+i)}D$$

Co que podemos escribir D como:

$$\mathrm{D}=-\frac{(1+i)}{P}\frac{dP}{di}=-\frac{d\ln P}{d\ln(1+i)}$$

Outras dúas formas de escribir a duración, partindo da definición inicial son:

$$D=\sum_{t=1}^{T}t\left[\frac{C(1+i)^{-t}}{P}\right]+T\left[\frac{VN(1+i)^{-T}}{P}\right]$$

$$=\frac{1}{P}\left\{C\sum_{t=1}^{T}\left[\frac{t}{(1+i)^{t}}\right]+T\left[\frac{VN}{(1+i)^{T}}\right]\right\}$$

$$=\frac{C}{P}\frac{(1+i)^{T+1}-(1+i)-Ti}{i^{2}(1+i)^{T}}+\frac{T\,VN}{P(1+i)^{T}}$$

ou:

$$D=\frac{C}{P}\frac{(1+i)^{T+1}-(1+i)^{T}-Ti}{i^{2}(1+i)^{T}}+\frac{T\,VN}{P(1+i)^{T}}$$

$$=\frac{cVN}{VN(1+i)^{-T}\left\{ci^{-1}\left[(1+i)^{T}-1\right]+1\right\}}\frac{(1+i)^{T+1}-(1+i)^{T}-Ti}{i^{2}(1+i)^{T}}$$

$$+\frac{T\,VN}{VN(1+i)^{-T}\left\{ci^{-1}\left[(1+i)^{T}-1\right]+1\right\}(1+i)^{T}}$$

$$=\frac{(1+i)}{i}-\frac{T(c-i)+(1+i)}{c(1+i)^{T}-(c-i)}$$

Se en lugar de considerar un bono consideramos unha carteira de N bonos con diferentes cupóns, prazos e tipos, o valor da carteira e a duración da carteira podemos expresala, respectivamente, como:

$$VC = n_1 P_1 + n_2 P_2 + \cdots + n_N P_N = \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{N} \frac{n_j C_j}{(1+i)^t}$$

$$D = \sum_{t=1}^{T} t \frac{\sum_{j=1}^{N} \frac{n_j C_j}{(1+i)^t}}{VC}$$

$$= \frac{1}{VC}\left[n_1 P_1 \sum_{t=1}^{T} t \frac{\frac{C_1}{(1+i)^t}}{P_1} + \cdots + n_N P_N \sum_{t=1}^{T} t \frac{\frac{C_N}{(1+i)^t}}{P_N} \right]$$

$$= \frac{n_1 P_1}{VC} D_1 + \cdots + \frac{n_N P_N}{VC} D_N$$

$$= \sum_{j=1}^{N} D_j \omega_j$$

A duración da carteira é unha media ponderada das duracións dos bonos que forman parte da carteira, sendo as ponderacións as proporcións de renda investidas en cada bono.

1.2 Interpretacións

- Sensibilidade do prezo do bono a variacións nos tipos de xuro:

$$D = -\frac{(1+i)}{P}\frac{dP}{di} = -\frac{d \ln P}{d \ln (1+i)}$$

- Vida media ponderada dun bono:

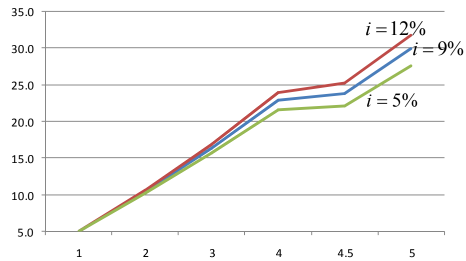
$$D = \sum_{t=1}^{T} t \left[\frac{C(1+i)^{-t}}{P} \right] + T \left[\frac{VN(1+i)^{-T}}{P} \right]$$

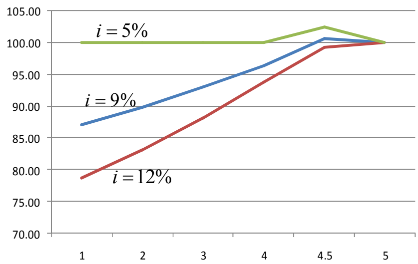
- Momento/período temporal no que se compensa o risco de tipo de xuro e o risco prezo.
  A duración dun bono é igual ao prazo de amortización dun bono cupón cero, polo que o risco do bono é o mesmo ca o do bono cupón cero.

Exemplo:

c = 5% VN = 100 $D \cong 4,5$

i = 9%	0	1	2	3	4	4.5	5
P	84.4	87.0	89.9	93.0	96.3	100.7	100.0
Valor cupón reinvestido		5.0	10.5	16.4	22.9	23.9	29.9
TOTAL		**92**	**100**	**109**	**119**	**125**	**130**
i = 12%							
P		78.7	83.2	88.2	93.8	99.3	100.0
Valor cupón reinvestido		5.0	10.6	16.9	23.9	25.3	31.8
TOTAL		**84**	**94**	**105**	**118**	**125**	**132**
i = 5%							
P		100.0	100.0	100.0	100.0	102.5	100.0
Valor cupón reinvestido		5.0	10.3	15.8	21.6	22.1	27.6
TOTAL		**105**	**110**	**116**	**122**	**125**	**128**





1.3 Propiedades

As propiedades da duración están relacionadas co prazo de amortización, o valor do cupón e o tipo de xuro.

(A) D cambia co prazo de amortización:

- $\mathrm{T} \rightarrow \infty$, $\mathrm{D} = \lim\limits_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{(1+i)}{i} - \frac{\mathrm{T}(\mathrm{c}-i)+(1+i)}{\mathrm{c}(1+i)^{\mathrm{T}} - (\mathrm{c}-i)} = \frac{(1+i)}{i}$
- $\mathrm{c} = i$, emisión á par, $\mathrm{D} = \lim\limits_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{(1+i)}{i} - \frac{1}{\mathrm{c}(1+i)^{\mathrm{T}-1}}$. D se aproxima a (1+i)/i cando T crece.
- $\mathrm{c} > i$, emisión con prima. D se aproxima a (1+i)/i cando T crece, pero máis lentamente que no caso anterior.
- $\mathrm{c} < i$, emisión con desconto:

$$\mathrm{D} = \frac{(1+i)}{i} - \frac{\overbrace{\mathrm{T}(\mathrm{c}-i)+(1+i)}^{\mathrm{x}}}{\underbrace{\mathrm{c}(1+i)^{\mathrm{T}} - (\mathrm{c}-i)}_{+}}$$

$$\mathrm{x} < 0 \Rightarrow \mathrm{T}(i-\mathrm{c}) > (1+i) \Rightarrow \mathrm{T} > \frac{(1+i)}{(i-\mathrm{c})} \Rightarrow \mathrm{T} < \frac{(1+i)}{(\mathrm{c}-i)},$$

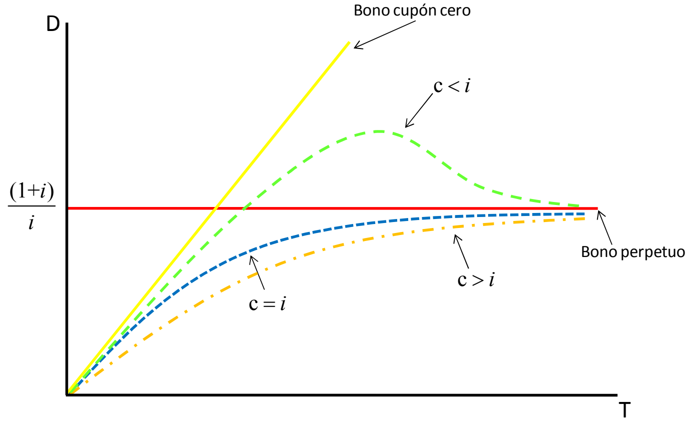
D decrece con T.

$$x > 0 \Rightarrow T(i - c) < (1+i) \Rightarrow T < \frac{(1+i)}{(i-c)} \Rightarrow T > \frac{(1+i)}{(c-i)}$$

D decrece cando T medra.

- $c = 0$. D e T varían no mesmo sentido. É o caso dun bono cupón cero.

Graficamente:



(B) D cambia co valor do cupón e a súa frecuencia:

- Canto maior é o cupón menor é D:

$$\frac{dD}{dc} = -\frac{T\left[c(1+i)^T - (c-i)\right] - \left[T(c-i) + (1+i)\right]\left[(1+i)^T - 1\right]}{\left[c(1+i)^T - (c-i)\right]^2}$$

$$= \frac{(1+i) - (1+i)^T}{\left[c(1+i)^T - (c-i)\right]^2} < 0$$

  Canto maior é o cupón, menor a importancia do valor actualizado dos fluxos finais e maior a dos intermedios, o que reduce D.

- Canto maior é a frecuencia de pago do cupón menor é D. É dicir, canto maior é o número de fluxos, a corrente actualizada de pagos aproxímase máis ao momento presente, co que D se reduce.

(C) D cambia co tipo de xuro: canto maior *i* menor D

$$D = -\frac{(1+i)}{P}\frac{dP}{di} \Rightarrow \frac{dD}{di} = -\left\{\frac{P - (1+i)\dfrac{dP}{di}}{P^2} + \frac{(1+i)}{P}\frac{d^2P}{di^2}\right\} < 0$$

A variación que experimenta D cando cambia *i* dependerá da convexidade.

(D) Variación temporal de D

D descende a medida que nos aproximamos a T. O ritmo de descenso depende de:

- c = 0: D cae ao mesmo ritmo que T

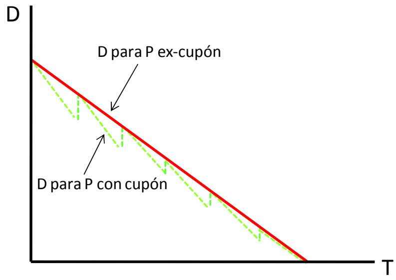
$$D = T\frac{VN}{P(1+i)^{T}} = T$$

- cupón periódicos: D cae a medida que nos acercamos a T, pero non de forma constante.

  D compórtase en forma de “chanzos” debido á caída no prezo do bono cando paga o cupón: o valor actualizado do cupón pagado é maior co dos restantes cupóns, cupóns que gañan peso relativo no cálculo da duración co pago do cupón.

  O salto na duración dependerá da TIR do bono (maior TIR maior salto): o peso relativo do primeiro cupón é maior canto maior sexa a TIR.

  Graficamente:



<u>Exemplo</u>:

c = 5%, i = 5%, VN = 100

Período	Rendas bono	Prezo bono con cupón	Prezo ex-cupón	Duración(cupón)	Duración(ex-cupón)
0		100.00	100.00	4.55	4.55
0.25		101.23	99.98	4.19	4.24
0.5		102.47	99.97	3.85	3.95
0.75		103.73	99.98	3.53	3.66
1	5	100.00	100.00	3.72	3.72
1.25		101.23	99.98	3.39	3.43
1.5		102.47	99.97	3.07	3.15
1.75		103.73	99.98	2.76	2.87
2	5	100.00	100.00	2.86	2.86
2.25		101.23	99.98	2.55	2.58
2.5		102.47	99.97	2.25	2.30
2.75		103.73	99.98	1.96	2.03
3	5	100.00	100.00	1.95	1.95
3.25		101.23	99.98	1.66	1.68
3.5		102.47	99.97	1.38	1.42
3.75		103.73	99.98	1.12	1.16
4	5	100.00	100.00	1.00	1.00
4.25		101.23	99.98		
4.5		102.47	99.97		
4.75		103.73	99.98		
5	105	100.00	100.00		

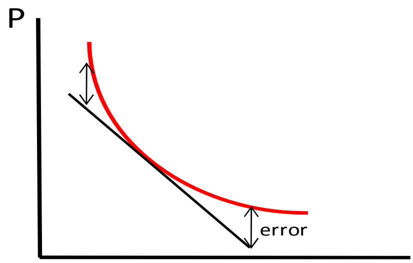
1.4 Limitacións

- cálculo de D como medida de sensibilidade do prezo a variacións nos tipos de xuro supón implicitamente que: (a) a ETTI é plana, (b) os desprazamentos da ETTI prodúcense de forma paralela.
- D mostra un rumbo derivado do cupón corrido
- D é unha aproximación de primeira orde á relación existente entre o prezo do bono e a súa TIR: cometemos un erro ao non considerar os termos de segunda orde (convexidade) na aproximación:

$$\mathrm{P}(i)=\mathrm{P}(i^*)+\frac{d\mathrm{P}}{di}(i-i^*)+\frac{1}{2!}\frac{d^2\mathrm{P}}{di^2}(i-i^*)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{d^n\mathrm{P}}{di^n}(i-i^*)^n$$

$$\Delta\mathrm{P}=\frac{d\mathrm{P}}{di}\Delta i+\frac{1}{2!}\frac{d^2\mathrm{P}}{di^2}\Delta i^2$$

O segundo termo será aproximadamente nulo se e só se a relación entre P e i é aproximadamente lineal:



$$\Delta\mathrm{P}=\frac{d\mathrm{P}}{di}\Delta i \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta\mathrm{P}}{\mathrm{P}}=\frac{d\mathrm{P}}{di}\frac{\Delta i}{\mathrm{P}}=-\frac{\mathrm{PD}}{(1+i)}\frac{\Delta i}{\mathrm{P}}=-\mathrm{D}\frac{\Delta i}{(1+i)}$$

Canto máis convexa sexa a relación entre P e i maior será o erro que cometemos utilizando D, en especial naqueles casos nos que as variacións de i son elevadas.

1.5 Outras medidas de duración

- Duración de Fisher e Weil: O desconto de fluxos ten en conta a ETTI, evitando o suposto de ETTI plana.

$$\mathrm{D_{FW}}=\frac{1}{\mathrm{P}}\left[1\frac{\mathrm{C}}{(1+i_{01})}+2\frac{\mathrm{C}}{(1+i_{01})(1+i_{12})}+\cdots+\mathrm{T}\frac{\mathrm{C}}{(1+i_{01})\cdots(1+i_{\mathrm{T-1,T}})}+\mathrm{T}\frac{\mathrm{VN}}{(1+i_{01})\cdots(1+i_{\mathrm{T-1,T}})}\right]$$

$$=\sum_{t=1}^{\mathrm{T}}t\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{P}\Pi_{j=1}^{t}(1+i_{j-1,j})}+\mathrm{T}\frac{\mathrm{VN}}{\mathrm{P}\Pi_{j=1}^{t}(1+i_{j-1,j})}$$

- Duración modificada ou volatilidade relativa: É a semielasticidade do prezo do bono con respecto á TIR. Mide o % de variación no prezo provocada por unha variación absoluta na TIR.

$$\mathrm{VR}=\frac{1}{1+i}\mathrm{D}=\frac{1}{1+i}\left(-\frac{\Delta\mathrm{P}}{\Delta i}\frac{(1+i)}{\mathrm{P}}\right)\Rightarrow\frac{\Delta\mathrm{P}}{\mathrm{P}}=-\mathrm{VR}\;\Delta i$$

Esta medida ten problemas similares á duración, aínda que o seu comportamento é diferente. Ten a vantaxe de que nos permite expresar en unidades monetarias o impacto no prezo do bono dun incremento de 1 punto básico (0,01%) nos tipos de xuro: valor do punto básico.

$$\Delta P = -P \ VR \ 0{,}0001$$

A esta relación en termos absolutos:

$$\Delta P = -P \ VR \ \Delta i$$

denomínaselle volatilidade absoluta.

A vantaxe da volatilidade como medida de sensibilidade é que a volatilidade non sofre saltos no momento do pago do cupón: O incremento na duración como consecuencia do pago do cupón é aproximadamente compensada pola baixada do prezo do bono.

2. Convexidade

A convexidade permite reducir o erro que cometemos ao utilizar D como medida de sensibilidade:

$$\Delta P = \frac{dP}{di}\Delta i + \frac{1}{2!}\frac{d^2P}{di^2}\Delta i^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{P} = -D\frac{\Delta i}{(1+i)} + \frac{1}{2!}\underbrace{\frac{1}{P}\frac{d^2P}{di^2}}_{CX}\Delta i^2$$

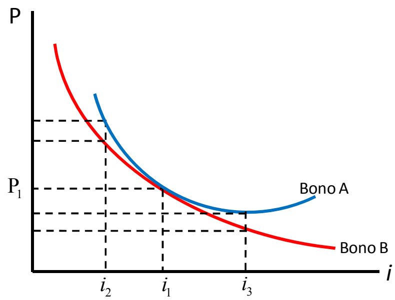
$$CX = \frac{1}{P}\frac{d^2P}{di^2} = \frac{1}{P}\frac{1}{(1+i)^2}\left\{\sum_{t=1}^{T} C\left(t^2+t\right)(1+i)^{-t} + VN\left(T^2+T\right)(1+i)^{-T}\right\}$$

Polo tanto, a convexidade mide a taxa á que cambia a sensibilidade do prezo dun bono cando cambia i. Esta medida tamén pode ser interpretada como unha medida de dispersión dos fluxos do bono ao redor da duración.

A convexidade é unha característica desexable para o comprador dun bono posto que:

- Se i sobe: P cae menos canto máis convexo sexa o bono, polo que reduce o efecto prezo, sendo o efecto reinvestimento do cupón independente da convexidade.
- Se i baixa: P sobe máis canto máis convexo sexa o bono, polo que aumenta o efecto prezo, sendo o efecto reinvestimento independente da convexidade.

Graficamente:



A convexidade ten as seguintes propiedades:

- Está inversamente relacionada co cupón.
- Variación temporal de CX:

  $$-\lim_{T\to\infty} CX = \frac{2(1+i)^2}{i^2}$$

  -c = 0, a convexidade aumenta exponencialmente
  -c < i, a convexidade diminúe aínda que inicialmente aumenta
  -c > i, a convexidade aumenta até a súa converxencia ao valor límite
- Cando hai cupón corrido, a CX compórtase de modo similar a D.
- A convexidade está inversamente relacionada con i.
- A convexidade redúcese cando o tempo de vida redúcese.

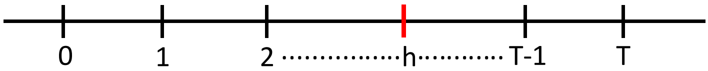
INMUNIZACIÓN

A inmunización consiste en deseñar unha carteira de activos de renda fixa que xeren un determinado valor certo, con independencia das flutuación dos tipos de xuro, nun horizonte temporal específico. É dicir, a inmunización é unha estratexia de investimento que consiste en axustar a duración dos activos dunha carteira a un determinado horizonte temporal

1. Carteira

Carteira inmunizada: o seu valor final para un horizonte temporal é como mínimo o mesmo que tería se non se producise unha variación nos tipos de xuro. Como a construímos?

- Con bonos cupón cero con vencemento igual ao horizonte temporal investidor.
- Cunha carteira de bonos que teña unha duración igual ao horizonte temporal investidor:



$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} C(1+i)^{-t} \qquad VC_h = \sum_{t=1}^{T} C(1+i)^{h-t}$$

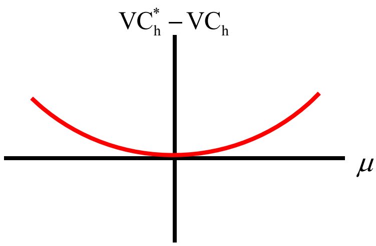
(Por simplicidade VN = 0)

Obxectivo é que se hai cambios en i, o valor do investimento, VC_h, non se vexa afectada. Isto só é posible se h coincide coa duración.

Dado o tipo inicial, i, consideremos un cambio no tipo de xuro antes do pago do primeiro cupón, de modo que: $(1+i)(1+\mu) \quad \mu \in R$.

$VC_h^* = \sum_{t=1}^{T} C\left[(1+i)(1+\mu)\right]^{h-t}$, queremos que: $VC_h^* - VC_h = 0$.

Graficamente:



En $\mu = 0$ VC_h^* ten un mínimo, $\frac{dVC_h^*}{d\mu} = 0$.

$$\frac{dVC_h^*}{d\mu} = \sum_{t=1}^{T} C(h-t)(1+i)^{h-t}(1+\mu)^{h-t-1} = 0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{T} C(h-t)(1+i)^{h-t} = 0$$

$$h\sum_{t=1}^{T} C(1+i)^{h-t} = \sum_{t=1}^{T} tC(1+i)^{h-t} \Rightarrow h = \frac{\sum_{t=1}^{T} tC(1+i)^{h-t}}{\sum_{t=1}^{T} C(1+i)^{h-t}} = D$$

Exemplo:

$h = 3,\ VN = 100,\ K = 115,\ i = 5\%$

Bonos	T	c	P_0	P_3	D	$P_3^*(2\%)$	$P_3^*(12\%)$
A	2	5%	100.00	115.76	1.95	112.30	123.87
B	4	5%	100.00	115.76	3.72	118.24	110.62
C	5	5%	100.00	115.76	4.55	121.13	105.04

Construción dunha carteira inmunizada:

$$D=\frac{n_1 P_1}{VC}D_1+\cdots+\frac{n_N P_N}{VC}D_N=\sum_{j=1}^{N}D_j\omega_j=h \text{ con } \sum_{j=1}^{N}\omega_j=1$$

Existen infinitas solucións:

$$\omega_1\cdot 1,95+\omega_2\cdot 3,72+\omega_3\cdot 4,55=3$$

$$\omega_3=0 \Rightarrow \omega_1\cong 0,4 \quad \omega_2\cong 0,6$$

Bonos	**T**	**c**	P_0	P_3	**D**	$P_3^*(2\%)$	$P_3^*(12\%)$
A	2	5%	40.00	46.31	1.95	44.92	49.55
B	4	5%	60.00	69.46	3.72	70.95	66.37
C	5	5%	0.00	0.00	4.55		
			100.00			115.87	115.92

2. Múltiple

Xeneraliza o concepto de inmunización á protección dun balance a variacións nos tipos de xuro, onde se consideran tantos os fluxos do activo como do pasivo.

$$\left.\begin{array}{l} A_0=\sum_{t=1}^{T}\frac{A_t}{(1+i)^t} \\ P_0=\sum_{t=1}^{T}\frac{P_t}{(1+i)^t}\end{array}\right\} \quad \frac{d(A_0-P_0)}{di}=0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{T}t\frac{A_t}{(1+i)^{t+1}}=\sum_{t=1}^{T}t\frac{P_t}{(1+i)^{t+1}}$$

$$\frac{d^2(A_0-P_0)}{di^2}>0 \Rightarrow \sum_{t=1}^{T}t(t+1)\frac{A_t}{(1+i)^{t+2}}=\sum_{t=1}^{T}t(t+1)\frac{P_t}{(1+i)^{t+2}}$$

A convexidade dos activos debe ser maior que a dos pasivos: os fluxos xerados polo lado do activo deben de ser máis dispersos que os fluxos do pasivo: gap de duracións-

3. Limitacións

- Só se consideran desprazamentos paralelos da ETTI: existe o risco de inmunización.
- A duración da carteira cambia ao longo do tempo mentres que o horizonte investidor mantense constante: reestruturación dinámica da carteira inmunizada

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. Nun mercado intercámbianse dous bonos: (i) un bono a 5 anos cun valor nominal de 100€ e un cupón anual do 5%, (ii) un bono a 10 anos cun valor nominal de 100€ e un cupón anual do 8%. Calcular:
(a) O prezo dos bonos a día de hoxe se o tipo de xuro anual é do 6%.
(b) O prezo que terían os bonos en cada trimestre até o momento da súa amortización.
(c) A duración e a convexidade dos dous bonos.
(d) A variación porcentual no prezo dos dous bonos se os tipos de xuro cambian ao 8% anual para períodos inferiores a 4 anos, 7% para períodos entre 4 e 8 anos e ao 10% para períodos superiores a 8 anos.
(e) Analizar as discrepancias nos cambios no prezo dos bonos do apartado coas variacións dadas polos resultados do apartado (b).
(f) Analizar a variación temporal da duración e a convexidade dos dous bonos considerando períodos cuadrimestrais e os prezos dos bonos con e sen cupón corrido.

2. Dado un bono a 10 anos con cupóns semianuais do 3% e un valor nominal de 1000€, (a) cal é a variación porcentual do seu prezo se os tipos de xuro soben hoxe do 6% ao 8% utilizando a expansión de Taylor de primeiro e de segunda orde? (b) Que ocorrería se o tipo de xuro caese 300 puntos básicos?, (c) cal é o valor do punto básico?

3. Dado un bono a 10 anos con cupóns semianuais do 3% e un valor nominal de 1000€, (a) cal é a variación porcentual do seu prezo se os tipos de xuro soben hoxe do 6% ao 8% utilizando a expansión de Taylor de primeiro e de segunda orde? (b) Que ocorrería se o tipo de xuro caese 300 puntos básicos?, (c) cal é o valor do punto básico?

4. No mercado de bonos intercámbiase un bono a 5 anos cun valor nominal de 100€ e un cupón anual do 5%. No mesmo mercado tamén se intercambia un bono a 6 anos cun cupón anual do 5% e un valor nominal de 1000€. Se os tipos de xuro anuais son do 5% e o prezo do primeiro bono é de 100€ e o do segundo bono é de 980?,
(a) existen posibilidades de arbitraxe neste mercado?
(b) cal sería a estratexia de arbitraxe adecuada para cubrirse completamente ante variacións nos tipos de xuro?

BIBLIOGRAFÍA

MARÍN, JOSÉ MARÍA E RUBIO, GONZALO (2001): ECONOMÍA FINANCIERA. ANTONI BOSCH. CAPÍTULO 3.

MARTINELLI, LIONE, PRIALULET, PHILIPPE E PRIAULET,STÉPHANE (2005): FIXED-INCOME SECURITIES. VALUATION, RISK MANGEMENT AND PORTFOLIO STRATEGIES. WILLEY FINANCE SERIES. CAPITULOS 5, 6.

NAVARRO, ELISEO E NAVE, JUAN M. (2001) FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS. BARCELONA. ANTONI BOSCH, D.L.

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA