

PABLO GONZÁLEZ SEQUEIROS

A DINÁMICA

DOS

MOSAICOS EUCLIDIANOS

111

2007

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

PABLO GONZÁLEZ SEQUEIROS

A DINÁMICA
DOS
MOSAICOS EUCLIDIANOS

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección do profesor Fernando Alcalde Cuesta da USC e da profesora Marta Macho Stadler da UPV-EHU, para obter o Diploma de Estudos Avanzados en Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levouse a cabo a súa defensa o 6 de setembro de 2007 na Facultade de Matemáticas de dita universidade, obténdose a cualificación de Sobresaliente (10).

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 84-89390-28-7

Dep. Leg.: C 3420-2007

Á familia.

Agradecementos

Quixera mostrar o meu agradecemento aos meus titores Fernando Alcalde e Marta Macho, pola súa inestimable adicación comigo, traducida en *clases* de mestría, e por ter feito das miñas *rotas* un asunto deles.

Por esta mesma *boa maneira*, a Álvaro Lozano, a quen debo tamén moitas das ideas que se reflexan nesta memoria. As discusións matemáticas e non matemáticas con cada un dos tres pertencen á mellor parte do que ten sido a miña actividade neste tempo.

O día a día cos compañeiros inclúese na mesma. Grazas polo modelo e a sempre boa disposición a Silvia, Miguel, María, Carlitos, Esteban, Ana...

Grazas por último aos restantes membros do Departamento de Xeometría e Topoloxía.

Índice

Introdución	1
1 Mosaicos	5
1.1 Definicións e propiedades básicas	5
1.2 Conxuntos de Delone e mosaicos de Voronoi	9
2 Espazo foliado de Gromov-Hausdorff	13
2.1 Topoloxía de Gromov-Hausdorff	13
2.2 Estructura foliada	15
2.3 Estructura transversa	17
2.4 Envoltura dun mosaico aperiódico e repetitivo	22
3 Dinámica medible	29
3.1 Relacións de equivalencia hiperfinitas e afables	29
3.2 Diagramas de Bratteli	32
3.3 O proceso de inflación	33
3.4 Dinámica medible dos mosaicos do plano	38
3.5 Dinámica medible dos mosaicos de \mathbb{R}^n	42
4 Exemplos	51
4.1 Os mosaicos de Robinson	51
4.2 Os mosaicos de Penrose por dardos e papaventos	55
4.3 Os mosaicos de Penrose por poliomínos	58

Introdución

Un *mosaico euclidiano* é unha descomposición de \mathbb{R}^n en subconxuntos chamados *teselas*, xeralmente poliedros dispostos lado con lado, obtidos por translación (ou mediante un subgrupo de isometrías que conteña ás translacións) a partir dun conxunto de teselas modelo ou *prototeselas*.

Os mosaicos que non son conservados por ningunha translación denomínanse *aperiódicos*. O interese por este tipo de mosaicos nace nos anos 60 dos traballos do lóxico H. Wang sobre as máquinas de Turing. Wang tentaba atopar un algoritmo que decidise se un conxunto de cadrados coas aristas coloreadas pode teselar o plano de xeito coherente. Probou que tal algoritmo existe se e só se calquera conxunto de prototeselas dun mosaico aperiódico tamén o é dalgún periódico, conxeturando a inexistencia de prototeselas aperiódicas, isto é, que teselan o plano só de xeito aperiódico. Non obstante, en 1966, o seu alumno R. Berger construíu un contraexemplo con 20.426 prototeselas. R. Robinson reduciu este número a seis en 1971 e algo máis tarde R. Ammann atopou outras seis teselas coa mesma propiedade de maneira independente. En 1974, R. Penrose presenta o seu célebre exemplo con dúas teselas aperiódicas, o dardo e o papaventos.

Por outra banda, en 1982 o equipo do profesor D. Shechtman do Departamento de Enxeñería de Materiais do Israel Institute of Technology-Technion, descubriu unha aleación de aluminio e manganeso coas características físicas propias dun cristal, pero cun patrón de difracción imposible segundo o teorema de clasificación dos grupos cristalográficos de Bieberbach. Xurdiu así o primeiro exemplo de *sólido case cristalino*. Resultou que a discretización dun mosaico de Penrose por dardos e papaventos era o modelo do seu patrón de difracción. Isto ten favorecido dende entón o estudo teórico dos mosaicos aperiódicos.

O conxunto $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ de todos os mosaicos construídos a partir dun conxunto finito de prototeselas \mathcal{P} pode dotarse dunha topoloxía natural, chamada *topoloxía de Gromov-Hausdorff*, supoñendo que dous mosaicos son próximos cando coinciden nunha gran bóla centrada na orixe, agás pequenas translacións (véxanse [2] e [9]).

Destá maneira, $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ é un espazo metrizable compacto, dotado dunha estrutura foliada natural definida pola acción de \mathbb{R}^n . Para cada mosaico $\mathcal{T} \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$, a clausura da súa órbita é un conxunto saturado de singular interese, chamado *envoltura de \mathcal{T}* . Se \mathcal{T} é *repetitivo* (i.e. calquera motivo do mosaico aparece por translación no mosaico de maneira uniforme), entón a súa envoltura é un conxunto minimal. Se ademais \mathcal{T} é aperiódico, temos un espazo foliado minimal, transversalmente Cantor e sen holonomía. O noso obxectivo é describir a dinámica medible destes espazos foliados respecto de calquera medida transversa invariante por translación.

Neste contexto, a *dinámica transversa medible* da envoltura de calquera mosaico euclidiano aperiódico e repetitivo identifícase coa *clase de equivalencia orbital estable* da relación de equivalencia \mathcal{R} inducida pola acción de \mathbb{R}^n sobre unha transversal completa Σ (definida pola elección dun conxunto de puntos base en \mathcal{P}). Dise que dúas relacións de equivalencia medibles discretas \mathcal{R} e \mathcal{R}' definidas sobre dous espazos borelianos estándar X e X' dotados de medidas finitas μ e μ' son *establemente orbitalmente equivalentes*, se existen subconxuntos borelianos Y e Y' tales que os seus saturados son de medida total, e un isomorfismo boreliano $\varphi : Y \rightarrow Y'$ tal que $\varphi_*\mu \sim \mu'$ e $\varphi(\mathcal{R}|_Y) = \mathcal{R}'|_{Y'}$.

Por outra banda, unha relación de equivalencia sobre un espazo totalmente disconexo dise *afable* se é unión dunha familia numerable e crecente de relacións de equivalencia compactas. A relación cofinal sobre o espazo de camiños infinitos dun determinado tipo de grafos, chamados *diagramas de Bratteli*, é un exemplo de relación de equivalencia afable. De feito, segundo un resultado probado por T. Giordano, I. Putnam e C. Skau en [11], estes son os únicos exemplos de relacións de equivalencia afables. É máis, a clase de equivalencia orbital de calquera relación de equivalencia afable está representada por un *sistema dinámico de Bratteli-Vershik*. Noutros termos, a súa dinámica medible está representada por unha acción de \mathbb{Z} . Agora podemos precisar o obxectivo concreto do noso traballo, que consiste en probar o seguinte resultado:

Teorema. *A dinámica medible da envoltura de calquera mosaico euclidiano aperiódico e repetitivo está representada por un sistema dinámico de Bratteli-Vershik.*

En virtude do anterior, o noso propósito vaise reducir a probar que a relación de equivalencia \mathcal{R} contén unha subrelación de equivalencia afable \mathcal{R}_∞ definida sobre un conxunto de medida total (respecto de calquera medida transversa invariante). En primeiro lugar, abordaremos o caso máis simple $n = 2$ empregando o proceso de inflación descrito por J. Bellissard, R. Benedetti e J. M. Gambaudo en [2]. A continuación, seguindo un esquema similar ao empregado por C. Series en [33] para probar que calquera foliación con *crecemento polinomial* é *hiperfinita*, poderemos

concluír no caso xeral. En realidade, o resultado obtido é válido para calquera espazo foliado transversalmente Cantor, minimal e sen holonomía.

Estes resultados ilústranse por medio de coñecidos exemplos de mosaicos construídos a partir de distintas familias de prototeselas aperiódicas: os mosaicos de Robinson, os mosaicos de Penrose por dardos e papaventos e os mosaicos de Penrose por poliominós.

1. Mosaicos

Neste primeiro capítulo lembramos brevemente a definición de mosaico de \mathbb{R}^n e algunhas propiedades básicas (véxanse [2], [12], [34]).

1.1 Definicións e propiedades básicas

Chamemos *prototesela* a calquera subconxunto de \mathbb{R}^n homeomorfo ao disco pechado D^n . Definimos un mosaico de \mathbb{R}^n do seguinte xeito:

Definición 1.1.1. Un *mosaico* \mathcal{T} é unha familia numerable de subconxuntos de \mathbb{R}^n , chamados *teselas*, que verifican as seguintes condicións:

- i) cada tesela $T \in \mathcal{T}$ é isométrica a unha prototesela dunha subfamilia $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$,
- ii) a familia \mathcal{T} é unha cobertura de \mathbb{R}^n ,
- iii) dúas teselas distintas teñen interiores disxuntos.

Neste caso, dise que \mathcal{T} é un *mosaico de tipo* \mathcal{P} e escríbese $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$. As prototeselas de \mathcal{P} chámanse tamén *teselas modelo*.

Cada prototesela $T \in \mathcal{P}$ define un *tipo de isometría* e un *tipo de translación*. De maneira explícita, dúas teselas T e T' teñen o mesmo tipo de isometría, e denotamos $T \sim T'$, se existe unha isometría de \mathbb{R}^n que envía unha na outra. Analogamente, o tipo de translación dunha tesela T está formado polas teselas T' tales que $T \sim_t T' \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n : T' = T + v$. Tense así o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}/\sim \\
 \downarrow & & \nearrow \\
 \mathcal{P}/\sim_t & &
 \end{array}$$

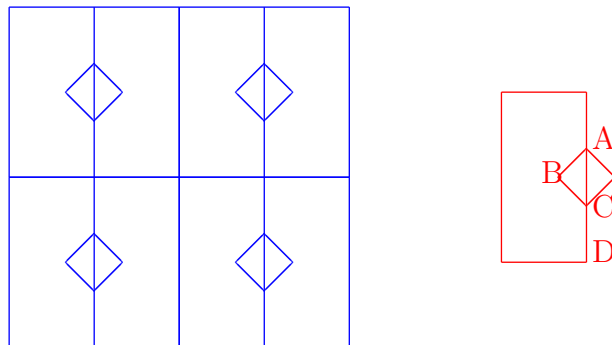
Sen perda de xeneralidade, podemos supoñer que prototeselas distintas representan tipos de translación distintos, o que permite identificar \mathcal{P} e \mathcal{P}/\sim_t (cf. [2]).

Chamaremos *motivo* dun mosaico \mathcal{T} a calquera subfamilia finita de \mathcal{T} , que identificaremos acotío coa súa unión, e *patrón* ao seu tipo de translación. Aínda que un motivo non ten por que ser necesariamente conexo, será suficiente para os nosos propósitos considerar simplemente motivos conexos. Ademais, engadimos dúas restricións á definición de mosaico:

Definición 1.1.2. Un mosaico \mathcal{T} de \mathbb{R}^n é *poliédrico* se as prototeselas son poliedros en \mathbb{R}^n . Os seus bordes descompóñense logo en poliedros convexos de dimensión $n - 1$, chamados *lados*. Denomínase *arista* á intersección de dúas teselas e dise que \mathcal{T} é *lado a lado* se verifica as dúas condicións seguintes:

- i) calquera lado está contido nunha arista e calquera arista é unión de lados,
- ii) a intersección de dúas teselas é un conxunto conexo.

En [12], defínense mosaicos do plano *arista a arista* impondo unha condición algo máis forte cá condición (i): calquera lado dunha tesela é arista do mosaico e viceversa. A condición (ii) adoita esixirse na definición de mosaico *normal* [12]. O seguinte mosaico é poliédrico e verifica (i), pero non (ii):



Este exemplo permite aclarar a diferenza entre *lado* e *arista*. Obsérvese que AB e BC son lados de dúas teselas diferentes, pero non son aristas do mosaico, e ABC é unha arista do mosaico, pero non é lado de ningunha tesela.

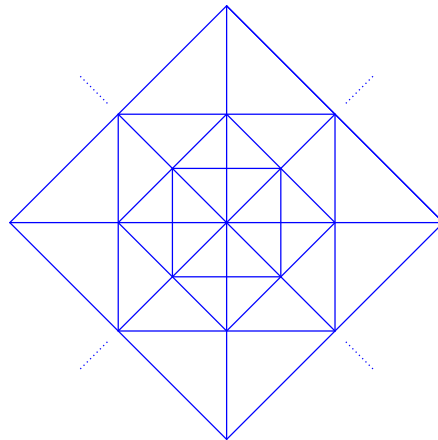
Definición 1.1.3 ([2], [12]). Un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é de *tipo finito* se só ten un número finito de prototeselas agás translación, o que significa que \mathcal{P} é finito, pois supuxemos que \mathcal{P} se identifica con \mathcal{P}/\sim_t .

Definición 1.1.4 ([2]). Un mosaico \mathcal{T} ten un *número finito de patróns locais* se para cada $r > 0$ só hai un número finito de motivos de diámetro $< r$ agás translación, é dicir, un número finito de patróns de diámetro $< r$.

De maneira equivalente, \mathcal{T} ten un número finito de patróns locais se para cada $r > 0$ só hai un número finito de prototeselas de diámetro $< r$, xa que as teselas son motivos e calquera motivo de diámetro $< r$ é unha unión finita de teselas de diámetro $< r$. É evidente logo a xerarquía entre as dúas definicións:

Proposición 1.1.5. *Un mosaico de tipo finito ten un número finito de patróns locais.* \square

Nun mosaico cun número finito de patróns locais o diámetro das teselas está limitado inferiormente. Non obstante, pode non estarlo superiormente e polo tanto non ser de tipo finito, coma no seguinte exemplo:

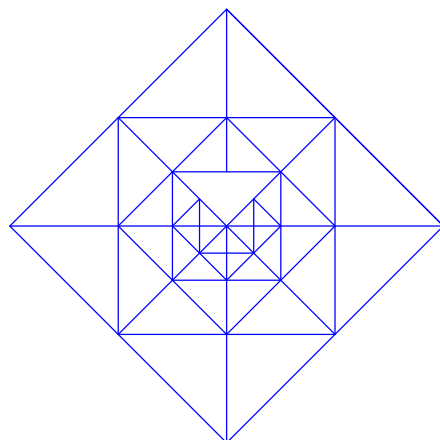


Agora ben, se añadimos esa condición, temos o recíproco:

Proposición 1.1.6. *Se un mosaico ten un número finito de patróns locais e o diámetro das teselas está limitado superiormente, entón é de tipo finito.* \square

Definición 1.1.7 ([12]). Un mosaico \mathcal{T} de \mathbb{R}^n dise *localmente finito en x* se existe $\varepsilon > 0$ tal que a bóla $B(x, \varepsilon)$ só corta a un número finito de teselas de \mathcal{T} . En tal caso, dise que x é un *punto regular* de \mathcal{T} e chámase *puntos singulares* aos que non son regulares. Dise que \mathcal{T} é *localmente finito* se todos os puntos $x \in \mathbb{R}^n$ son regulares.

O seguinte mosaico (descrito en [12]), ten un único punto singular na orixe. Calquera bóla centrada na orixe corta a infinitas teselas:

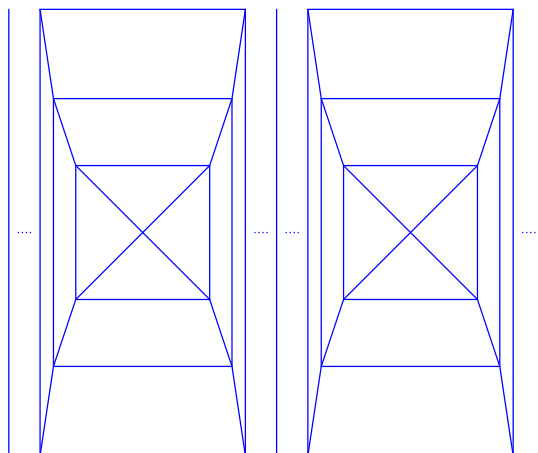


As teselas en torno á orixe vanse facendo cada vez máis pequenas, agás unha que a contén

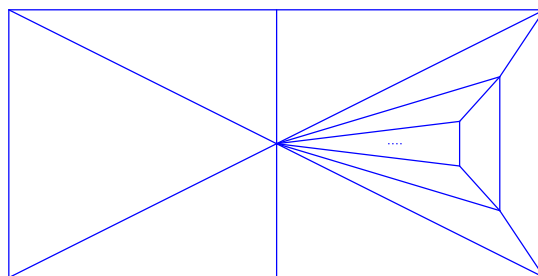
En xeral, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, cada número real $\varepsilon > 0$ e cada prototesela $T \in \mathcal{P}$, o número de teselas co tipo de translación de T que cortan á bóla $B(x, \varepsilon)$ é finito. As seguintes condicións garanten que o número de tipos de translación dun mosaico é finito [18]:

Proposición 1.1.8. *Un mosaico cun número finito de patróns locais e diámetro das teselas limitado superiormente é localmente finito.* \square

Se suprimimos a segunda condición, é dicir, se o diámetro das teselas non está limitado superiormente, a proposición non é certa. En efecto, o seguinte exemplo ten un número finito de patróns locais pero non é localmente finito:



A pesares de que ningún dos exemplos anteriores é lado a lado, non cabe pensar que esta sexa unha condición suficiente para que un mosaico sexa localmente finito. A razón está no seguinte exemplo:



1.2 Conxuntos de Delone e mosaicos de Voronoi

Interesámonos agora polas versións discretas das propiedades anteriores:

Definición 1.2.1. Sexa $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$. A elección dun punto base en cada prototesela de \mathcal{P} determina unha familia $D_{\mathcal{T}}$ de puntos base x_T das teselas $T \in \mathcal{T}$. Diremos que $D_{\mathcal{T}}$ é un *conxunto de puntos base de \mathcal{T}* ou *conxunto base de \mathcal{T}* .

Proposición 1.2.2. *Un mosaico \mathcal{T} é localmente finito se e só se calquera conxunto de puntos base $D_{\mathcal{T}}$ é discreto e pechado.*

Proba. Se \mathcal{T} é localmente finito, calquera conxunto de puntos base $D_{\mathcal{T}}$ é discreto, xa que $\# B(x, \varepsilon) \cap D_{\mathcal{T}} \leq \# \{T \in \mathcal{T} \mid T \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\} < +\infty$, para cada $x \in D_{\mathcal{T}}$ e cada $\varepsilon > 0$. Para comprobar que $D_{\mathcal{T}}$ é pechado, consideramos unha sucesión $\{x_n\} \subset D_{\mathcal{T}}$ converxente a un punto $x \in \mathbb{R}^n$. Se o número de elementos distintos de $\{x_n\}$ é infinito, entón $\{x_n\}$ posúe unha subsucesión de termos distintos converxente a x , o que implica que calquera bóla $B(x, \varepsilon)$ corta a unha infinidade de teselas, en contra do suposto. Polo tanto este número é finito, e $\{x_n\}$ posúe unha subsucesión estacionaria converxente a x , de maneira que $x \in D_{\mathcal{T}}$.

Para probar o recíproco supoñamos, por redución ao absurdo, que existen un punto $x \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$ tales que a bóla $B(x, \varepsilon)$ corta a unha infinidade de teselas. Segundo comentamos, podemos supoñer que estas teselas representan unha infinidade de tipos de translación distintos. En consecuencia, podemos tomar un

conxunto base $D_{\mathcal{T}}$ no que os puntos base dunha infinidade de teselas pertencen a $B(x, \varepsilon)$. Deste xeito a intersección de $D_{\mathcal{T}}$ con $B(x, \varepsilon)$ é infinita, mais $D_{\mathcal{T}}$ é discreto e pechado, polo que esa intersección debe ser finita. \square

Definición 1.2.3 ([21]). Un *conxunto de Delone* é un subconxunto $D \subset \mathbb{R}^n$ que verifica as dúas condicións seguintes:

- i) D é *uniformemente discreto*, i.e. existe $r > 0$ tal que calquera bóla $B(x, r)$ contén ao sumo un punto de D ;
- ii) D é *relativamente denso*, i.e. existe $R > 0$ tal que calquera bóla $B(x, R)$ contén alomenos un punto de D .

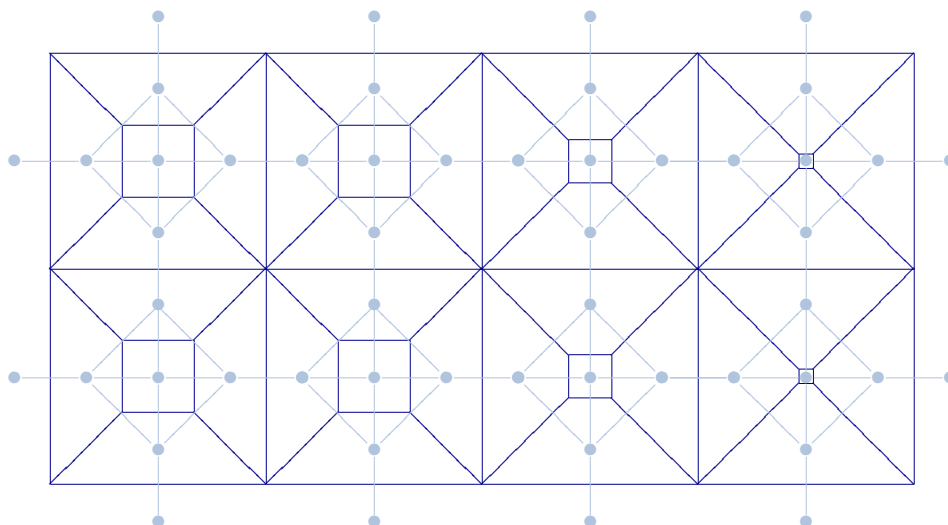
Proposición 1.2.4. *Calquera mosaico de tipo finito posúe un conxunto de Delone, isto é, un conxunto base uniformemente discreto e relativamente denso.*

Proba. Se \mathcal{T} é un mosaico de tipo finito, existen constantes $r, R > 0$ tales que calquera prototesela T verifica

$$B(x_T, r) \subset T \subset B(y_T, R) \quad (2.1)$$

para algún par de puntos $x_T, y_T \in T$. Os puntos x_T correspondentes definen como comentamos un conxunto base $D_{\mathcal{T}}$. Como consecuencia de (2.1), o conxunto $D_{\mathcal{T}}$ é uniformemente discreto e relativamente denso. \square

Nótese que o recíproco non é certo. Un mosaico pode admitir un conxunto de Delone aínda que non sexa de tipo finito:



De feito, neste exemplo o conxunto dos vectores de \mathbb{R}^2 entre puntos de D ,

$$D - D = \{x_T - x_{T'} \in \mathbb{R}^2 \mid T, T' \in \mathcal{T}\},$$

é un conxunto discreto e pechado, xa que calquera bóla só contén a un número finito de elementos de $D - D$. Aínda máis, é uniformemente discreto e relativamente denso, é dicir, un conxunto de Delone. Precisamos estes aspectos coas seguintes definicións:

Definición 1.2.5 ([21]). Sexan D un conxunto de Delone, $D - D$ o conxunto dos vectores interpuntuais de D e $\langle D - D \rangle$ o grupo aditivo xerado polos elementos de $D - D$. Dise que:

- i) D é *finitamente xerado* se $\langle D - D \rangle$ é finitamente xerado;
- ii) D é *de tipo finito* se $D - D$ é localmente finito (i.e. a intersección de $D - D$ con calquera bóla é finita) ou de maneira equivalente pechado e discreto;
- iii) D é un *conxunto de Meyer* se $D - D$ é conxunto de Delone.

Séguese unha xerarquía entre os tres conceptos: todo conxunto de Meyer é de tipo finito e todo conxunto de tipo finito é finitamente xerado.

Proposición 1.2.6. *Todo mosaico de tipo finito posúe un conxunto base de Meyer.*

Proba. Pola proposición 1.2.4, o mosaico posúe un conxunto base de Delone D obtido fixando un punto x_T en cada prototesela $T \in \mathcal{P}$. Calquera vector de $D - D$ é suma de vectores da forma $x_T - x_{T'}$ onde T e T' teñen un lado común. Podemos supoñer que T é unha prototesela e T' a translación dalgunha prototesela. Como \mathcal{T} é de tipo finito, o número de prototeselas $\#\mathcal{P}$ é finito. Polo tanto, se limitamos a lonxitude dos vectores en $D - D$ só atoparemos un número finito, é dicir, $D - D$ é localmente finito. En outros termos, D é un conxunto de Delone de tipo finito. Tomando o mínimo das lonxitudes dos xeradores probamos que D é uniformemente discreto. E tomando dúas veces o máximo dos diámetros das prototeselas que é relativamente denso. \square

Para rematar cos preliminares, introducimos a noción de mosaico de Voronoi:

Definición 1.2.7. Sexa D un conxunto de Delone de \mathbb{R}^n . Para cada punto $x \in D$ defínese a *celda de Voronoi de x* como

$$V_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) \leq d(y, x'), \forall x' \in D \setminus \{x\}\}.$$

É evidente que V_x é un poliedro convexo, pois é intersección de semiespazos que conteñen a x limitados por hiperplanos que equidistan de x e doutro punto de D . É claro tamén que dúas celdas de Voronoi de dous puntos distintos do conxunto de Delone se intersecan ao sumo nun dos seus lados. Pode definirse entón o *mosaico de Voronoi* \mathcal{V} dun conxunto de Delone D como o mosaico que ten por teselas as celdas de Voronoi V_x dos puntos $x \in D$.

Das definicións anteriores séguese:

Proposición 1.2.8 ([2]). *Se D é un conxunto de Delone de tipo finito, o mosaico de Voronoi correspondente segue sendo de tipo finito.* \square

2. Espazo foliado de Gromov-Hausdorff

Dado un conxunto finito de prototeselas \mathcal{P} , imos considerar o conxunto $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ dos mosaicos de tipo \mathcal{P} . Antes de nada, insistamos no feito de que dous mosaicos de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ que se diferencian nunha translación son diferentes a priori, xa que dous mosaicos só son iguais se posúen exactamente as mesmas teselas. Para ilustrar o que estamos dicindo, consideremos o caso trivial no plano no que o conxunto de prototeselas \mathcal{P} consta unicamente dun cadrado unidade. Dados un mosaico regular por cadrados $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ e un vector $v \in \mathbb{R}^2$, entón $\mathcal{T} + v$ é distinto de \mathcal{T} agás no caso $v \in \mathbb{Z}^2$. Neste caso, $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é o conxunto cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{T}^2$.

2.1 Topoloxía de Gromov-Hausdorff

Propoñémonos describir a *topoloxía de Gromov-Hausdorff* sobre $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$, que fai próximos a dous mosaicos se coinciden nunha bóla grande centrada na orixe, agás pequenas translacións (véxanse [2] e [9]).

Definición 2.1.1. Dados dous mosaicos $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, consideramos o conxunto $A = \{ R > 0 : B_{\mathcal{T}}(0, R) = B_{\mathcal{T}'}(0, R) \}$, onde $B_{\mathcal{T}}(0, R)$ é a traza do mosaico \mathcal{T} na bóla $B(0, R)$ en \mathbb{R}^n , e definimos

$$R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \begin{cases} \sup A & \text{se } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } A = \emptyset. \end{cases}$$

Obsérvese que $R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = +\infty$ se e só se $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Agora, para cada $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, cada par $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$ e cada $R \geq 0$, podemos definir o seguinte conxunto:

$$U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) = \{ \mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P}) \mid \exists v, v' \in \mathbb{R}^n : \|v\| < \varepsilon, \|v'\| < \varepsilon', R(\mathcal{T}+v, \mathcal{T}'+v') > R \}.$$

Estes conxuntos forman unha base de topoloxía e a topoloxía que xeran chámase *topoloxía de Gromov-Hausdorff*. En efecto, a topoloxía de Gromov-Hausdorff pode definirse a partir dunha métrica (véxase [2]):

Definición 2.1.2. Para cada par de mosaicos $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, sexa

$$B = \left\{ \varepsilon \in (0, 1) \mid \exists v, v' \in B(0, \varepsilon) : B_{\mathcal{T}+v}(0, \frac{1}{\varepsilon}) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, \frac{1}{\varepsilon}) \right\}.$$

Definimos a distancia

$$d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \begin{cases} \inf B & \text{se } B \neq \emptyset, \\ 1 & \text{se } B = \emptyset. \end{cases}$$

Por exemplo, o mosaico periódico \mathcal{T} e o seu trasladado $\mathcal{T}' = \mathcal{T} + (\frac{1}{2}, 0)$ (na figura os puntos distinguidos sinalan a orixe do plano) verifican que $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \frac{1}{4}$.



En efecto, para cada $\frac{1}{4} < \varepsilon < 1$, os vectores $v = (\frac{1}{4}, 0)$ e $v' = (-\frac{1}{4}, 0)$ cumpren que $B_{\mathcal{T}+v}(0, \frac{1}{\varepsilon}) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, \frac{1}{\varepsilon})$. Pero se w, w' son dous vectores con $\|w\|, \|w'\| < \varepsilon < \frac{1}{4}$, entón $B_{\mathcal{T}+w}(0, \frac{1}{\varepsilon}) \neq B_{\mathcal{T}'+w'}(0, \frac{1}{\varepsilon})$.

Proposición 2.1.3. Para cada $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, cada par $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$ e cada $R > 1$, o conxunto $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$ é un aberto da topoloxía definida pola métrica d . Ademais, calquera bóla $B_d(\mathcal{T}, \varepsilon)$ é igual ao conxunto $U_{\varepsilon, \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}}(\mathcal{T})$.

Proba. A segunda afirmación é evidente, logo basta probar que para calquera mosaico $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$, hai unha bóla centrada en \mathcal{T}' contida en $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$. Por definición, existen v, v' con $\|v\| < \varepsilon, \|v'\| < \varepsilon'$ tales que $B_{\mathcal{T}+v}(0, R) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, R)$. Se $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon' - \|v'\|}{2}$ e $R' = R + \varepsilon'' + \|v'\|$, entón $U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}') \subset U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$. En efecto, se $\mathcal{T}'' \in U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}')$, existen vectores w', w'' con $\|w'\|, \|w''\| < \varepsilon''$ tales que $B_{\mathcal{T}'+w'}(0, R') = B_{\mathcal{T}''+w''}(0, R')$. Isto implica que

$$B_{\mathcal{T}+v}(0, R) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, R) = B_{\mathcal{T}''+w''-w'+v'}(0, R)$$

onde $\|w'' - w' + v'\| < 2\varepsilon'' + \|v'\| = \varepsilon'$. Por fin, tomando $r = \min\{\varepsilon'', \frac{1}{R'}\}$, temos que $B_d(\mathcal{T}', r) \subset U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}') \subset U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$. \square

Máis notoria é a seguinte propiedade:

Teorema 2.1.4. *Se o conxunto de prototeselas \mathcal{P} é finito, entón $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é compacto.*

Proba. Comprobaremos que $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é secuencialmente compacto empregando un argumento diagonal clásico. Sexa $\{\mathcal{T}_n\}$ unha sucesión en $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Fixemos un número $\delta > \max\{\delta(T) : T \in \mathcal{P}\}$ e observemos que a bóla $B(0, \delta)$ só contén un número finito de patróns, isto é, de motivos agás translación. Logo $\{\mathcal{T}_n\}$ contén unha subsucesión $\{\mathcal{T}_{n,1}\}$ tal que as bólas $B_{\mathcal{T}_{n,1}}(0, \delta)$ conteñen algún trasladado dun mesmo motivo M_1 . É dicir, para cada $\mathcal{T}_{n,1}$ hai un vector v_n con $\|v_n\| < \delta$ tal que a bóla $B_{\mathcal{T}_{n,1}}(0, \delta)$ contén ao motivo $M_1 + v_n$ e polo tanto a imaxe pola translación v_n dunha mesma bóla $B_{M_1}(0, \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. Ademais, por compacidade da bóla $B(0, \delta)$, a sucesión dos v_n converge a un vector v . Por recorrencia, obtemos unha subsucesión $\{\mathcal{T}_{n,m}\}$ de $\{\mathcal{T}_{n,1}\}$ tal que as bólas $B_{\mathcal{T}_{n,m}}(0, m\delta)$ conteñen aos trasladados $M_m + v_n$ dun mesmo motivo M_m e polo tanto as imaxes polas translacións v_n dunha mesma bóla $B_{M_m}(0, \varepsilon_m)$, onde $\lim_{m \rightarrow +\infty} \varepsilon_m = +\infty$. Construimos así unha sucesión exhaustiva de motivos

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{m-1} \subset M_m \subset \cdots \subset \bigcup_{m \geq 1} M_m = \mathbb{R}^n$$

que define un mosaico \mathcal{T} de \mathbb{R}^n . Agora a subsucesión $\{\mathcal{T}_{m,m}\}$ de $\{\mathcal{T}_n\}$ converge a $\mathcal{T} + v$, xa que por construción $R(\mathcal{T}_{m,m} + v - v_m, \mathcal{T} + v) \geq \varepsilon_m$ e $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|v - v_m\| = 0$, para todo $m \geq 1$. \square

Na literatura sobre mosaicos, adoita afirmarse que a envoltura dun mosaico cun número finito de patróns locais é compacta. Agora ben, un mosaico con esa propiedade non ten por que ser localmente finito, segundo probamos en § 1.1.

2.2 Estructura foliada

O grupo de translacións \mathbb{R}^n actúa de forma natural como grupo de transformacións de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. En efecto, pode comprobarse sinxelamente que a acción natural

$$(v, \mathcal{T}) \in \mathbb{R}^n \times \mathfrak{T}(\mathcal{P}) \longmapsto \mathcal{T} + v \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$$

é continua. Ademais, cando o conxunto de prototeselas \mathcal{P} é finito, a acción é *localmente libre*, é dicir, calquera grupo de isotropía $Iso(\mathcal{T}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{T} + v = \mathcal{T}\}$

é discreto. Isto implica que a acción define unha foliación de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$, o que significa que as follas son as órbitas da acción. As mesmas consideracións aplícanse en situacións máis xerais, por exemplo, no caso da acción do grupo afín $Aff(1)$ sobre un espazo de mosaicos do plano hiperbólico.

Polo seu interese, imos probar directamente a existencia dunha estrutura foliada sobre $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ no caso de mosaicos de \mathbb{R}^n . Para iso, comezamos construíndo o que será unha transversal completa, isto é, un subespazo que corta a todas as follas. Como xa dixemos, un conxunto de puntos base D das prototeselas de \mathcal{P} determina un conxunto de puntos base $D_{\mathcal{T}} = \{x_T \mid T \in \mathcal{T}\}$ para calquera mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$.

Definición 2.2.1. Fixado un conxunto D de puntos base das prototeselas de \mathcal{P} , chamamos *transversal canónica* ao conxunto $\Sigma = \Sigma(D)$ formado por todos os mosaicos $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ tales que $0 \in D_{\mathcal{T}}$.

Proposición 2.2.2. *Se \mathcal{P} é finito, $\Sigma = \Sigma(D)$ é un subespazo compacto e totalmente disconexo de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$.*

Proba. Para probar que Σ é un subespazo compacto, procédese coma no caso de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Para probar que Σ é totalmente disconexo, basta comprobar que a topoloxía inducida está definida por unha ultramétrica. Ante todo, é sinxelo mostrar que a expresión:

$$d_{\Sigma}(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = e^{-R(\mathcal{T}, \mathcal{T}')}$$

define unha ultramétrica sobre Σ . O seguinte é verificar que a topoloxía inducida sobre Σ pola topoloxía de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ está xerada polas bólas métricas

$$B_{d_{\Sigma}}(\mathcal{T}, e^{-R}) = \{\mathcal{T}' \in \Sigma \mid d_{\Sigma}(\mathcal{T}, \mathcal{T}') < e^{-R}\} = \{\mathcal{T}' \in \Sigma \mid R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') > R\}.$$

Para probar que calquera aberto básico $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) \cap \Sigma$ é un aberto da topoloxía definida por d_{Σ} , consideramos $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) \cap \Sigma$ e tomamos ε'' y R' como na proposición 2.1.3. Deste xeito:

$$\mathcal{T}' \in B_{d_{\Sigma}}(\mathcal{T}', e^{-R'}) \subset U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}') \subset U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}).$$

Reciprocamente, $B_{d_{\Sigma}}(\mathcal{T}, e^{-R}) = U_{\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, R}(\mathcal{T}) \cap \Sigma$, sendo $r > 0$ unha constante tal que calquera bóla con ese radio contén ao sumo un punto do conxunto de Delone $D_{\mathcal{T}}$. \square

Teorema 2.2.3. *A acción do grupo de translacións \mathbb{R}^n induce unha estrutura de espazo foliado sobre $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$.*

Proba. A idea é simple, xa que a topoloxía de Gromov-Hausdorff fai precisamente que os interiores das teselas se apilen en abertos foliados en produto. De maneira explícita, comecemos observando que a topoloxía de Σ está xerada polos conxuntos abertos e pechados \mathfrak{B}_M formados polos mosaicos \mathcal{T} que conteñen ao motivo M . Para cada prototesela $T \in \mathcal{P}$, a aplicación

$$\varphi_T : (v, \mathcal{T}') \in T \times \mathfrak{B}_T \longmapsto \mathcal{T}' + v \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$$

é unha identificación sobre a súa imaxe. Agora ben, a súa restrición a $\overset{\circ}{T} \times \mathfrak{B}_T$ é inxectiva e define un homeomorfismo

$$\varphi_T : \overset{\circ}{T} \times \mathfrak{B}_T \longrightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{P})$$

sobre a súa imaxe, un aberto distinguido de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Do mesmo xeito, para un punto que pertenza á intersección de dúas ou máis teselas, se chamamos M ao motivo obtido unindo todas estas teselas, a aplicación

$$\varphi_M : (v, \mathcal{T}') \in M \times \mathfrak{B}_M \longmapsto \mathcal{T}' + v \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$$

é unha identificación sobre a súa imaxe. Neste caso, non basta con substituír M polo seu interior para facela inxectiva. Non obstante, sabemos que a isotropía $Iso(\mathcal{T})$ de calquera mosaico \mathcal{T} é discreta de maneira uniforme, é dicir, existe $r > 0$ tal que calquera mosaico \mathcal{T} verifica $\mathcal{T} + v \neq \mathcal{T}$ se $0 < \|v\| < r$. Agora, se x pertence á intersección de dúas ou máis teselas, podemos substituír Σ por unha nova transversal Σ_x para que x pertenza ao conxunto de Delone dalgún elemento de Σ_x . Denotemos \mathfrak{B}_M^x ao subconxunto aberto e pechado de Σ_x determinado por M . Se ademais substituímos M por $B(0, r)$, entón a aplicación

$$\varphi_x : (v, \mathcal{T}') \in B(0, r) \times \mathfrak{B}_M^x \longmapsto \mathcal{T}' + v \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$$

é un homeomorfismo sobre un aberto distinguido de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Por último, cada cambio de carta está dado por unha translación. \square

2.3 Estructura transversa

É o momento de precisar a noción de *dinámica transversa* (*medible* ou *topolóxica*), ao tempo de ilustrar a dinámica transversa do espazo foliado de Gromov-Hausdorff. No caso particular de foliacións sen holonomía, a dinámica transversa está representada por unha relación de equivalencia, a inducida pola foliación sobre unha transversal completa.

1) Relacións de equivalencia medibles discretas:

Definición 2.3.1. Sexa X un espazo boreliano estándar (isto é, dotado dunha σ -álgebra isomorfa á σ -álgebra dos borelianos dun espazo polaco). Unha relación de equivalencia \mathcal{R} sobre X dise *medible discreta* se as clases de equivalencia son numerables e o grafo de \mathcal{R} é un subconxunto boreliano de $X \times X$.

A relación de equivalencia \mathcal{R} inducida sobre Σ pola acción natural de \mathbb{R}^n é medible discreta. Como adoita ser habitual, a relación de equivalencia identifícase co seu grafo $\mathcal{R} = \{(\mathcal{T}, \mathcal{T} - v) \in \Sigma \times \Sigma \mid v \in D_{\mathcal{T}}\}$. Así, en primeiro lugar, como cada conxunto de Delone $D_{\mathcal{T}}$ é numerable, as clases de equivalencia $\mathcal{R}[\mathcal{T}]$ son numerables. Por outra banda, Σ é a unión dun número finito de abertos-pechados $B_{d_{\Sigma}}(\mathcal{T}, e^{-R})$ para calquera $R > 0$. Para R maior que dúas veces o máximo dos diámetros das prototeselas, cada $v \in B_{\mathcal{T}}(0, R) \cap D_{\mathcal{T}}$ define un homeomorfismo local

$$\mathcal{T}' \in B_{d_{\Sigma}}(\mathcal{T}, e^{-R}) \mapsto \mathcal{T}' - v \in \Sigma$$

de maneira que o grafo é un subconxunto pechado de $\Sigma \times \Sigma$ contido en \mathcal{R} . Polo tanto, \mathcal{R} é un boreliano de $\Sigma \times \Sigma$ como unión de grafos destas transformacións parciais e das súas composicións.

Definición 2.3.2. Sexa \mathcal{R} unha relación de equivalencia medible discreta definida sobre un espazo boreliano estándar X . Chamamos *transformación parcial* de \mathcal{R} a calquera isomorfismo boreliano $\varphi : A \rightarrow B$ entre subconxuntos borelianos tal que o grafo $G(\varphi) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \varphi(x)\} \subset \mathcal{R}$. Unha medida boreliana μ sobre X dise *invariante por \mathcal{R}* se é invariante por calquera transformación parcial de \mathcal{R} , é dicir, se $\varphi_*\mu(B') = \mu(\varphi^{-1}(B')) = \mu(B')$ para cada boreliano $B' \subset B$. Dise *case-invariante* se calquera transformación parcial de \mathcal{R} conserva alomenos os conxuntos de medida nula. Unha medida case-invariante μ dise *ergódica* se calquera conxunto boreliano saturado por \mathcal{R} ten medida nula ou total.

Neste contexto, a noción de *dinámica medible* pode precisarse por medio das nocións de *equivalencia orbital* e *equivalencia orbital estable* [8]:

Definición 2.3.3. Sexan \mathcal{R} e \mathcal{R}' dúas relacións de equivalencia medibles discretas definidas sobre dous espazos borelianos estándar X e X' . Sexan μ e μ' dúas medidas finitas sobre X e X' invariantes por \mathcal{R} e \mathcal{R}' . As relacións de equivalencia \mathcal{R} e \mathcal{R}' dinse:

i) *orbitalmente equivalentes* se X e X' conteñen subconxuntos borelianos Y e Y' , saturados por \mathcal{R} e \mathcal{R}' e de medida total, para os que existe un isomorfismo boreliano $\varphi : Y \rightarrow Y'$ tal que $\varphi(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}'[\varphi(x)]$ para μ -casi todo $x \in Y$ e $\varphi_*\mu \sim \mu'$ (hai unha

constante c tal que $\varphi_*\mu(A') = \mu(\varphi^{-1}(A')) = c\mu'(A')$ para cada boreliano $A' \subset Y'$;

ii) *establemente orbitalmente equivalentes* se X e X' conteñen subconxuntos borelianos Y e Y' tales que as súas saturacións por \mathcal{R} e \mathcal{R}' son de medida total e de xeito que as relacións de equivalencia inducidas $\mathcal{R}|_Y$ e $\mathcal{R}'|_{Y'}$ son orbitalmente equivalentes.

En particular, se X' é un boreliano de X que corta a μ -case toda clase de equivalencia $\mathcal{R}[x]$, a inclusión natural de X' en X define unha equivalencia orbital estable entre a relación de equivalencia inducida $\mathcal{R}' = \mathcal{R}|_{X'}$ e \mathcal{R} . Diremos que \mathcal{R} e \mathcal{R}' representan a mesma *dinámica medible* cando son establemente orbitalmente equivalentes.

Se as relacións de equivalencia medibles discretas consideradas están definidas sobre dous espazos polacos, pode darse unha versión puramente boreliana, cf.[5]:

Definición 2.3.4. Sexan \mathcal{R} e \mathcal{R}' dúas relacións de equivalencia medibles discretas definidas sobre dous espazos topolóxicos polacos X e X' . Dise que \mathcal{R} e \mathcal{R}' son:

i) *orbitalmente equivalentes* se X e X' conteñen subconxuntos G_δ densos Y e Y' , saturados por \mathcal{R} e \mathcal{R}' , e tales que existe un isomorfismo boreliano $\varphi : Y \rightarrow Y'$ compatible con \mathcal{R} e \mathcal{R}' ;

ii) *establemente orbitalmente equivalentes* se X e X' conteñen subconxuntos borelianos Y e Y' tales que as súas saturacións por \mathcal{R} e \mathcal{R}' son conxuntos G_δ densos e as relacións de equivalencia inducidas $\mathcal{R}|_Y$ e $\mathcal{R}'|_{Y'}$ son orbitalmente equivalentes. Neste caso, diremos que \mathcal{R} e \mathcal{R}' representan a mesma *dinámica boreliana*.

2) Relacións de equivalencia topolóxicas β -discretas: Toda relación de equivalencia \mathcal{R} definida sobre un espazo boreliano ou topolóxico X está dotada dunha estrutura natural de grupoide, caracterizada por:

i) a inclusión $\varepsilon : x \in X \mapsto (x, x) \in \mathcal{R}$ do conxunto das unidades X en \mathcal{R} ;

ii) as proxeccións $\beta : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto x \in X$ e $\alpha : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto y \in X$;

iii) o conxunto das parellas *compoñibles*

$$\mathcal{R} * \mathcal{R} = \{ ((x, y), (x', y')) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \mid \alpha(x, y) = y = x' = \beta(x', y') \}$$

e a multiplicación parcial $\mu : ((x, y), (x', y')) \in \mathcal{R} * \mathcal{R} \mapsto (x, y') \in \mathcal{R}$;

iv) a inversión $\iota : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto (y, x) \in \mathcal{R}$;

que verifican os axiomas análogos aos de grupo, isto é asociatividade, existencia de unidades e existencia de inversos.

Definición 2.3.5. Unha relación de equivalencia \mathcal{R} sobre un espazo topolóxico X é *topolóxica* se o é como grupoide, isto é, se o grafo de \mathcal{R} está dotado dunha topoloxía coa que as proxeccións $\alpha, \beta : \mathcal{R} \mapsto X$ e a multiplicación parcial $\mu : \mathcal{R} * \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$ son continuas e a inversión $\iota : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$ é un homeomorfismo. Como é habitual, X e \mathcal{R} supóñense sempre localmente compactos e Hausdorff. Unha relación de equivalencia topolóxica \mathcal{R} dise *β -discreta* se o espazo de unidades X é aberto en \mathcal{R} . Se \mathcal{R} é Hausdorff, tamén é pechado. Para unha relación de equivalencia *discreta* (i.e. con clases de equivalencia numerables), isto equivale a supoñer que \mathcal{R} é *étale*, é dicir, a proxección $\beta : \mathcal{R} \mapsto X$ é un homeomorfismo local [29].

A noción de *dinámica topolóxica* introdúcese agora de xeito evidente:

Definición 2.3.6. Dúas relacións de equivalencia β -discretas \mathcal{R} e \mathcal{R}' definidas sobre X e X' dinse *establemente orbitalmente equivalentes*, se X e X' conteñen abertos Y e Y' que cortan a todas as clases de equivalencia de \mathcal{R} e \mathcal{R}' e tales que as relacións de equivalencia inducidas $\mathcal{R}|_Y$ e $\mathcal{R}'|_{Y'}$ son isomorfas. Diremos que \mathcal{R} e \mathcal{R}' representan a mesma *dinámica topolóxica*.

A relación de equivalencia \mathcal{R} inducida sobre a transversal completa Σ está dotada dunha topoloxía que a converte nunha relación de equivalencia topolóxica β -discreta. Cada elemento v pertencente a un conxunto de Delone $D_{\mathcal{T}}$ dun mosaico \mathcal{T} define unha translación $\tau_v : \mathcal{T} \in \Sigma \mapsto \mathcal{T} - v \in \Sigma$. De feito, τ_v está definida sobre o aberto-pechado $D_v = \{\mathcal{T} \in \Sigma : v \in D_{\mathcal{T}}\}$ de Σ . A cada par (U, v) composto dun aberto U de Σ e un elemento v dun conxunto de Delone $D_{\mathcal{T}}$, asociámoslle o grafo

$$O(U, v) = \{ (\mathcal{T}, \mathcal{T} - v) \in \mathcal{R} \mid \mathcal{T} \in U \cap D_v \}$$

da translación τ_v restrinxida a U . Os conxuntos $O(U, v)$ xeran unha topoloxía sobre \mathcal{R} , máis fina que a inducida pola topoloxía produto sobre $\Sigma \times \Sigma$, que fai de \mathcal{R} un espazo polaco localmente compacto.

Proposición 2.3.7. \mathcal{R} é unha relación de equivalencia topolóxica β -discreta.

Proba. Probemos primeiro que \mathcal{R} é topolóxica. Para todo aberto U de Σ , o conxunto $\beta^{-1}(U) = \{ (\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in \mathcal{R} \mid \mathcal{T} \in U \}$ é a unión dos abertos $O(U, v)$ onde $v \in D_{\mathcal{T}}$ con $\mathcal{T} \in U$. Polo tanto, $\beta^{-1}(U)$ é aberto en \mathcal{R} e a proxección β é continua. Por outra banda, a inversión ι é un homeomorfismo, pois

$$\iota^{-1}(O(U, v)) = \{ (\mathcal{T} - v, \mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \in U \} = O(U - v, -v)$$

para todo aberto U de Σ e todo elemento v dun conxunto de Delone de $D_{\mathcal{T}}$. A proxección $\alpha = \iota \circ \beta$ é entón continua. A continuidade de $\mu : \mathcal{R} * \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ séguese

da continuidade da aplicación $(\beta, \alpha) : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{T} \times \mathcal{T}$. Por último, mostremos que a proxección β é un homeomorfismo local para probar que \mathcal{R} é étale. Para toda parella $(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in \mathcal{R}$, existe $v \in D_{\mathcal{T}}$ tal que $\mathcal{T}' = \mathcal{T} - v$, de maneira que $(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in O(U, v)$ se $\mathcal{T} \in U$ e a proxección β envía homeomorficamente o aberto básico $O(U, v)$ sobre o aberto U .

3) Pseudogrupos: Por analogía cunha relación de equivalencia medible discreta [7], toda relación de equivalencia β -discreta sobre o conxunto de Cantor está definida pola acción dun grupo numerable de homeomorfismos. Non obstante, imos interesarnos pola descrición do pseudogrupo de holonomía da foliación \mathcal{F} . As translacións τ_v asociadas aos xeradores v dos conxuntos de Delone $D_{\mathcal{T}}$ xeran un pseudogrupo de transformacións Γ de Σ . En efecto, Γ é o *pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F} reducido a Σ* e a relación de equivalencia \mathcal{F} está definida pola acción de Γ sobre Σ .

Chámase *dinámica transversa* da foliación \mathcal{F} á clase de equivalencia do pseudogrupo Γ . A *equivalencia de pseudogrupos*, introducida por A. Haefliger en [14, 15], está modelada polo exemplo seguinte: se Γ é un pseudogrupo de transformacións dun espazo topolóxico X e Y un aberto de X que corta a todas as órbitas de Γ , o pseudogrupo $\Gamma|_Y$ reducido a Y é equivalente a Γ . En efecto, todo punto $x \in X$ pertence ao dominio dun elemento $\gamma \in \Gamma$ con imaxe contida en Y . Denotando $S_{x,Y}$ ao conxunto de todos estes elementos de Γ e $S_{X,Y} = \bigcup_{x \in X} S_{x,Y}$, o conxunto $\Phi = S_{X,Y} \cup S_{X,Y}^{-1}$ define unha equivalencia de pseudogrupos entre Γ e $\Gamma|_Y$. En xeral, dous pseudogrupos reducidos $\Gamma|_Y$ e $\Gamma|_{Y'}$ dun mesmo pseudogrupo $\Gamma|_Y$ son equivalentes (véxase [23]).

4) Grupoides: Chamamos *grupoide de holonomía de \mathcal{F} reducido a Σ* ao conxunto

$$\mathcal{H} = \{ (\mathcal{T}, v, \mathcal{T}') \mid \mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \Sigma, v \in D_{\mathcal{T}} \text{ e } \mathcal{T}' = \mathcal{T} - v \}$$

dotado da estrutura de grupoide seguinte:

- i) a inclusión $\varepsilon : \Sigma \rightarrow \mathcal{H}$ dada por $\varepsilon(\mathcal{T}) = (\mathcal{T}, 0, \mathcal{T})$;
- ii) as proxeccións $\alpha, \beta : \mathcal{H} \rightarrow \Sigma$ dadas por $\alpha(\mathcal{T}, v, \mathcal{T}') = \mathcal{T}'$ e $\beta(\mathcal{T}, v, \mathcal{T}') = \mathcal{T}$;
- iii) o conxunto das parellas *compoñibles*

$$\mathcal{H} * \mathcal{H} = \{ ((\mathcal{T}_1, v_1, \mathcal{T}'_1), (\mathcal{T}_2, v_2, \mathcal{T}'_2)) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : \mathcal{T}'_1 = \mathcal{T}_2 \}$$

e a multiplicación parcial $\mu : \mathcal{H} * \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, dada por:

$$\mu((\mathcal{T}_1, v_1, \mathcal{T}'_1), (\mathcal{T}_2, v_2, \mathcal{T}'_2)) = (\mathcal{T}_1, v_1 + v_2, \mathcal{T}'_2);$$

- iv) a inversión $\iota : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dada por $\iota(\mathcal{T}, v, \mathcal{T}') = (\mathcal{T}', -v, \mathcal{T})$.

O grupoide de holonomía \mathcal{H} convírtese nun grupoide topolóxico β -discreto ao dotalo da topoloxía xerada polos abertos básicos

$$O(U, v, U') = \{ (\mathcal{T}, v, \mathcal{T}') \in \mathcal{H} \mid (\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in U \times U' \text{ e } \mathcal{T}' = \mathcal{T} - v \}$$

onde U e V son abertos de Σ e v pertence en cada caso ao conxunto base $D_{\mathcal{T}}$ de \mathcal{T} . Cada un destes abertos é o grafo da translación τ_v na que o dominio e o rango son restricións de U e V respectivamente. Obtense así un isomorfismo entre o grupoide de holonomía \mathcal{H} e o grupoide dos xermes de Γ . Por outra banda, a aplicación $p : (\mathcal{T}, v, \mathcal{T}') \in \mathcal{H} \mapsto (\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in \mathcal{R}$ é un homomorfismo de grupoides topolóxicos. O conxunto $\mathcal{I} = \{(\mathcal{T}, v, \mathcal{T}) \mid (\mathcal{T} = \mathcal{T} - v)\}$ é un fibrado de grupos no que a fibra de \mathcal{T} é o grupo de isotropía $Iso(\mathcal{T})$. É dicir, temos unha sucesión exacta curta de grupoides

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \xrightarrow{p} & \mathcal{R} \\ & \searrow & \downarrow \alpha & \swarrow \beta & \\ & & \Sigma & & \end{array} \quad (3.1)$$

A *equivalencia de grupoides* (introducida de maneira independente por A. Haefliger [13] e por P.S. Muhly, J.N. Renault e D.P. Williams [25]) permite definir a noción de dinámica transversa no contexto dos grupoides.

2.4 Envoltura dun mosaico aperiódico e repetitivo

O espazo foliado de Gromov-Hausdorff $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$, en particular a transversal completa Σ , poden ser extremadamente grandes. O propósito desta sección é caracterizar os seus subconxuntos minimais.

Definición 2.4.1. Dado un mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, chámase *envoltura de \mathcal{T}* á clausura $\Omega_{\mathcal{T}}$ da súa folla $L_{\mathcal{T}} = \{\mathcal{T} - v \mid v \in \mathbb{R}^n\}$. Lembremos que $\Omega_{\mathcal{T}}$ é un conxunto minimal se e só se todas as follas que contén son densas.

Definición 2.4.2. Un mosaico \mathcal{T} dise:

i) *repetitivo* [2] (ou posúe a *propiedade de isomorfismo local* [31]) se para cada motivo M , existe unha constante $R = R(M) > 0$ tal que calquera bóla no mosaico de radio R contén unha copia por translación de M , i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists v \in \mathbb{R}^n : M + v \subset B(x, R);$$

ii) *uniformemente repetitivo* se dado $r > 0$, existe unha constante $R = R(r) > 0$ tal que calquera bóla de radio R contén unha copia por translación de calquera motivo M de diámetro $< r$.

Teorema 2.4.3. *Para calquera mosaico $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$, as seguintes condicións son equivalentes:*

- i) \mathcal{T} é repetitivo;
- ii) \mathcal{T} é uniformemente repetitivo;
- iii) $\Omega_{\mathcal{T}}$ é minimal.

Proba. Basta probar $(i) \Leftrightarrow (iii)$ e $(iii) \Rightarrow (ii)$:

$(i) \Rightarrow (iii)$ Debemos probar que a órbita de cada mosaico $\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}}$ é densa en $\Omega_{\mathcal{T}}$, é dicir, $\Omega'_{\mathcal{T}} = \Omega_{\mathcal{T}}$. Como $\Omega_{\mathcal{T}'} \subset \Omega_{\mathcal{T}}$, chega con probar $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{T}'}$ e polo tanto $\Omega_{\mathcal{T}} \subset \Omega_{\mathcal{T}'}$. Fixemos $r > 0$ e tomemos un motivo M que conteña á bóla $B_{\mathcal{T}}(0, r)$. Por hipótese, existe $R = R(M) \geq r > 0$ tal que para cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}}(v, r) \subset M + v \subset B_{\mathcal{T}}(x, R).$$

Por outra banda, como $\mathcal{T}' \subset \Omega_{\mathcal{T}}$, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$B_{\mathcal{T}'}(0, R) = B_{\mathcal{T}-x}(0, R) = B_{\mathcal{T}}(x, R) - x.$$

En particular:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v - x = B_{\mathcal{T}}(v, r) - x \subset B_{\mathcal{T}}(x, R) - x = B_{\mathcal{T}-x}(0, R) = B_{\mathcal{T}'}(0, R),$$

de onde se deduce:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v - x = B_{\mathcal{T}}(v, r) - x = B_{\mathcal{T}-x}(v - x, r) = B_{\mathcal{T}'}(v - x, r).$$

Denotando $w = v - x$, podemos escribir:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) = B_{\mathcal{T}'}(w, r) - w = B_{\mathcal{T}'-w}(0, r).$$

Atopamos logo un mosaico $\mathcal{T}' - w \in L_{\mathcal{T}'}$ tal que $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}' - w) \leq e^{-r}$. Isto proba que $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{T}'} = \overline{L_{\mathcal{T}'}}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Fixado $r > 0$, definimos o conxunto

$$U_S = \{\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}} \mid \exists v \in \mathbb{R}^n : B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}'}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S)\}$$

para cada $S \geq r$. Estes conxuntos forman un recubrimento aberto de $\Omega_{\mathcal{T}}$. Antes de probar que os U_S son abertos, observemos que os conxuntos

$$U_{\varepsilon, R}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{T}' \in \mathfrak{T}(\mathcal{P}) \mid \exists v \in \mathbb{R}^n : \|v'\| < \varepsilon, R(\mathcal{T}, \mathcal{T}' + v) > R\}$$

forman unha base de veciñanzas de \mathcal{T} . Basta aplicar argumentos similares aos empregados en §2.1. Agora, se $\mathcal{T}' \in U_S$, existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}'}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, r + \|v\|) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S).$$

Tomando $S' = r + \|v\|$ e $\varepsilon \leq S - S'$, temos que $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, S'}(\mathcal{T}')$ $\subset U_S$. En efecto, se $\mathcal{T}'' \in U_{\varepsilon, S'}(\mathcal{T}')$, existe $v'' \in \mathbb{R}^n$ con $\|v''\| < \varepsilon$ tal que

$$B_{\mathcal{T}'}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S') = B_{\mathcal{T}''+v''}(0, S').$$

Logo:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}'}(v, r) = B_{\mathcal{T}''+v''}(v, r) = B_{\mathcal{T}''}(v - v'', r) + v'' \subset B_{\mathcal{T}''+v''}(0, S')$$

e

$$B_{\mathcal{T}''}(v - v'', r) \subset B_{\mathcal{T}''+v''}(0, S') - v'' = B_{\mathcal{T}''}(-v'', S').$$

Así, se $w = v - v''$, temos que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + w = B_{\mathcal{T}''}(w, r) \subset B_{\mathcal{T}''}(-v'', S') \subset B_{\mathcal{T}''}(0, S'),$$

e deste xeito $\mathcal{T}'' \in U_S$. Por outra banda, calquera mosaico \mathcal{T}' de $\Omega_{\mathcal{T}}$ pertence a algún aberto U_S . Por hipótese, $\Omega_{\mathcal{T}}$ é minimal, logo $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{T}'}$. Polo tanto, para cada $r > 0$, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + x = B_{\mathcal{T}'}(x, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S),$$

para $S = r + \|x\|$, e temos que $\mathcal{T}' \in U_S$.

Observemos que o recubrimento $\{U_S\}_{S \geq r}$ é monótono crecente, así pois, por compacidade, existe $R \geq r$ tal que $U_R = \Omega_{\mathcal{T}}$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe entón $v \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}-x}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}-x}(0, R).$$

Mediante a translación por x deducimos:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v + x = B_{\mathcal{T}-x}(v, r) + x \subset B_{\mathcal{T}-x}(0, R) + x = B_{\mathcal{T}}(x, R).$$

O vector $w = v + x \in \mathbb{R}^n$ verifica logo:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + w \subset B_{\mathcal{T}}(x, R).$$

Como calquera motivo M está contido nunha bóla centrada na orixe de radio $r > 0$ suficientemente grande, probamos que \mathcal{T} é repetitivo.

(iii) \Rightarrow (ii) Na proba de (iii) \Rightarrow (i) atopamos unha constante $R = R(M) > 0$ que depende de cada motivo M . Intésanos agora unha constante válida para calquera motivo M de diámetro $< r$. Dados $r > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$, para cada $S \geq \frac{r}{2}$ definimos o conxunto

$$U_{S,x} = \{\mathcal{T}' \in \Omega_{\mathcal{T}} \mid \exists v \in \mathbb{R}^n : B_{\mathcal{T}}(x, \frac{r}{2}) + v = B_{\mathcal{T}'}(x+v, \frac{r}{2}) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S)\}.$$

Coma antes, deducimos que existe $R = R(x)$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}^n$, existe $v \in \mathbb{R}^n$ verificando:

$$B_{\mathcal{T}}(x, \frac{r}{2}) + v \subset B_{\mathcal{T}}(y, R).$$

O mesmo ocorre para cada motivo M contido en $B_{\mathcal{T}}(x, \frac{r}{2})$. Agora ben, como \mathcal{T} é de tipo finito, sabemos que só hai un número finito de motivos de diámetro $< r$ agás translación. Fixemos representantes de tales clases por translación M_1, \dots, M_n contidos en bólas de radio $\frac{r}{2}$ centradas en puntos x_1, \dots, x_n . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ e cada punto $y \in \mathbb{R}^n$, existe $v_i \in \mathbb{R}^n$ tal que $M_i + v_i \subset B_{\mathcal{T}}(y, R(x_i))$. Como calquera motivo M de diámetro $< r$ pode obterse por translación a partir dalgún motivo M_i , tomando $R = \max\{R(x_1), \dots, R(x_n)\}$, temos:

$$M + v_i - v = M_i + v_i \subset B_{\mathcal{T}}(y, R(x_i)) \subset B_{\mathcal{T}}(y, R)$$

onde $v \in \mathbb{R}^n$ é o vector tal que $M = M_i + v$. □

O enunciado da equivalencia (i) \Leftrightarrow (iii) pode verse en [2] e [31]. Un resultado similar pode verse en [1] [3] e [22] nun contexto algo diferente.

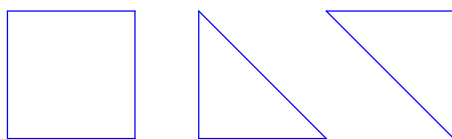
Para rematar a sección, imos interesarnos pola caracterización dos conxuntos minimais sen holonomía.

Definición 2.4.4. Un mosaico \mathcal{T} dise:

- i) *periódico* se existen dous vectores linealmente independentes $v, w \in \mathbb{R}^n$ tales que $\mathcal{T} + v = \mathcal{T} = \mathcal{T} + w$;
- ii) *aperiódico* se $\mathcal{T} + v \neq \mathcal{T}$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ non nulo.

Evidentemente hai mosaicos que non son nin periódicos nin aperiódicos. Dende o punto de vista do tipo de follas que definen, resulta obvio que a órbita dun mosaico periódico é compacta, mentres que a dun aperiódico ten holonomía trivial. Os mosaicos que non son nin periódicos nin aperiódicos dan lugar a follas non compactas con holonomía non trivial. Segundo un resultado de G. Hector (véxase

[16]), obtido independentemente por D.B.A. Epstein, K.C. Millet e D. Tischler en [6], estes mosaicos forman un F_δ de interior baleiro. Como consecuencia desta observación, o grupoide de holonomía \mathcal{H} descrito en § 2.3 é esencialmente principal, pois o morfismo $p : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}$ en (3.1) é un isomorfismo en restrición a un G_δ denso. Por outra banda, convén observar que as follas compactas poden ser illadas ou non. Consideremos o conxunto \mathcal{P} formado polas tres prototeselas seguintes:



Sexa \mathcal{T} o mosaico periódico por cadrados e \mathcal{T}_n o mosaico obtido substituíndo cada cadrado pola unión dos dous triángulos fóra dun bloque de lado n . É evidente que a sucesión de mosaicos \mathcal{T}_n converge ao mosaico \mathcal{T} , e polo tanto \mathcal{T} é un punto de acumulación de calquera transversal Σ determinada pola elección dun punto base en cada prototesela. Mais se modificamos os tres lados dun dos triángulos con lingüetas e os do outro coas rañuras complementarias, obtemos un novo conxunto de tres prototeselas \mathcal{P}' , e agora \mathcal{T} é illado en calquera transversal Σ' (pois neste caso $B_{d_{\Sigma'}}(\mathcal{T}, e^{-R}) = \mathcal{T}, \forall R \geq 1$).

Grazas á proposición 2.2.2 e ós seguintes lemas, se o conxunto de prototeselas \mathcal{P} non permite teselar o plano de maneira periódica, calquera transversal do espazo foliado de Gromov-Hausdorff $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é homeomorfa ao conxunto de Cantor. Diremos que a foliación é *transversalmente Cantor*.

Lema 2.4.5. *Calquera mosaico illado en Σ é periódico.*

Proba. Se \mathcal{T} é illado en Σ , entón $L_{\mathcal{T}} \cap \Sigma$ é unión de mosaicos illados, polo que coincide coa súa clausura. Deste xeito $L_{\mathcal{T}}$ ten que ser compacta, e para isto \mathcal{T} debe ser periódico. \square

Proposición 2.4.6. *A envoltura dun mosaico aperiódico e repetitivo só contén mosaicos aperiódicos.*

Proba. Razoemos por redución ao absurdo supoñendo que a envoltura $\Omega_{\mathcal{T}}$ dun mosaico aperiódico e repetitivo $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ contén un mosaico \mathcal{T}' tal que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}' + v$ para algún $v \in \mathbb{R}^n$ non nulo. Como $\Omega_{\mathcal{T}}$ é minimal, entón $\mathcal{T} \in \Omega_{\mathcal{T}'}$. Logo, para cada $R > \|v\| > 0$, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, R) = B_{\mathcal{T}'-x}(0, R) = B_{(\mathcal{T}'+v)-x}(0, R).$$

Mais entón:

$$B_{\mathcal{T}+v}(0, R - \|v\|) = B_{(\mathcal{T}+v)-x}(0, R - \|v\|) = B_{\mathcal{T}}(0, R - \|v\|).$$

Polo tanto, en contra do suposto, \mathcal{T} non sería aperiódico. \square

Combinando isto co teorema 2.4.3, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.4.7. *A envoltura de calquera mosaico aperiódico e repetitivo $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ é un conxunto minimal, transversalmente Cantor e sen holonomía.* \square

3. Dinámica medible

Consideremos un mosaico \mathcal{T} de \mathbb{R}^n de tipo finito, aperiódico e repetitivo. A súa envoltura $X = \Omega_{\mathcal{T}}$ é daquela un conxunto saturado minimal e sen holonomía. O propósito do noso traballo é mostrar que a dinámica medible de X está representada por un sistema dinámico de Bratteli-Vershik.

3.1 Relacións de equivalencia hiperfinitas e afables

Imos comezar este capítulo introducindo a noción de relación de equivalencia afable. Trátase da versión topolóxica da noción clásica de hiperfinitude (véxanse [11, 30]):

1) **Relacións de equivalencia hiperfinitas:** Sexa X un espazo boreliano estándar.

Definición 3.1.1. Unha relación de equivalencia medible discreta \mathcal{R} definida sobre X é *finita* se as clases de equivalencia $\mathcal{R}[x]$ son finitas.

Neste caso, \mathcal{R} posúe un *dominio fundamental* D , é dicir, un subconxunto boreliano de X que corta a todas as clases de equivalencia e tal que a relación de equivalencia inducida $\mathcal{R}|_D$ é trivial. Noutros termos, \mathcal{R} é establemente orbitalmente equivalente á relación de equivalencia trivial sobre D .

Definición 3.1.2. Unha relación de equivalencia medible discreta \mathcal{R} sobre X dise *hiperfinita* respecto dunha medida de probabilidade case-invariante μ se existe unha sucesión de relacións de equivalencia finitas

$$\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{R}_n \subset \cdots \subset \mathcal{R}$$

tal que $\mathcal{R}[x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n[x]$ para μ -case todo punto $x \in X$.

En virtude dun resultado de A. Connes, J. Feldmann e B. Weiss, a hiperfinitude é equivalente á seguinte noción.

Definición 3.1.3 ([4]). Un *sistema de medias locais* para unha relación de equivalencia medible discreta \mathcal{R} é un sistema $m = \{m_x\}_{x \in X}$ de medias m_x sobre as clases de equivalencia $\mathcal{R}[x]$ (i.e. cada media m_x é un funcional lineal positivo e unitario en $l^\infty(\mathcal{R}[x])^*$) tal que:

- i) m é invariante: se $(x, y) \in \mathcal{R}$, entón $m_x = m_y$;
- ii) m é medible: se $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha función medible, entón tamén o é a función $m(f) : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $m(f)(x) = m_x(f(x, -))$.

A relación de equivalencia \mathcal{R} dise *promediabile* cando posúe un sistema de medias locais.

Teorema 3.1.4 ([4]). *Unha relación de equivalencia medible discreta \mathcal{R} é promediabile se e só se é hiperfinita.*

2) Relacións de equivalencia afables: Sexa X un espazo localmente compacto e Hausdorff, e \mathcal{R} unha relación de equivalencia β -discreta sobre X . Supoñamos, como é habitual, que \mathcal{R} tamén é localmente compacto e Hausdorff. A diagonal $\Delta \subset X \times X$ é entón un subconxunto aberto-pechado de \mathcal{R} .

Definición 3.1.5. A relación de equivalencia \mathcal{R} dise *compacta* se é compacto o conxunto $\mathcal{R} \setminus \Delta \subset X \times X$. Se X é compacto, a relación \mathcal{R} é compacta se e só se o seu grafo $\mathcal{R} \subset X \times X$ é compacto.

Lema 3.1.6 ([11]). *Se \mathcal{R} é unha relación de equivalencia compacta sobre X , entón*

- i) \mathcal{R} é un subespazo topolóxico de $X \times X$;
- ii) \mathcal{R} é un pechado de $X \times X$ e X/\mathcal{R} é Hausdorff;
- iii) \mathcal{R} é uniformemente finita, i.e. existe $N \geq 1$ tal que $\#\mathcal{R}[x] \leq N$ para todo $x \in X$.

Proba. (i) Por compacidade, a inclusión $\iota = \beta \times \alpha : \mathcal{R} \setminus \Delta \rightarrow X \times X$ é unha identificación pechada. Logo (i) séguese de que as topoloxías inducidas por \mathcal{R} e $X \times X$ sobre Δ son a mesma.

(ii) Como consecuencia de (i), \mathcal{R} é pechado en $X \times X$. Por outra banda, a proxección canónica $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ é aberta. En efecto, para cada aberto U de X , o saturado $\pi^{-1}(\pi(U)) = \alpha(\beta^{-1}(U))$ é aberto en X/\mathcal{R} , xa que as proxeccións α e β son abertas. O espazo cociente X/\mathcal{R} é entón Hausdorff por ser \mathcal{R} pechado.

(iii) Para todo par $(x, y) \in \mathcal{R}$, a proxección $\beta : \mathcal{R} \rightarrow X$ restrínxese nun homeomorfismo dunha veciñanza de (x, y) en \mathcal{R} nunha veciñanza de x en X . Por compacidade, o conxunto $\mathcal{R} \setminus \Delta$ pode recubrirse por un número finito N' de tales veciñanzas. Para todo $x \in X$, tense daquela que $\#\mathcal{R}[x] \leq N' + 1 = N$. \square

Proposición 3.1.7 ([1]). *Toda relación de equivalencia compacta \mathcal{R} sobre X é propia no senso de [30], i.e. X/\mathcal{R} é Hausdorff e a proxección $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ é un homeomorfismo local, e trivial fóra dun compacto K . Reciprocamente toda relación de equivalencia propia e trivial fóra dun compacto K é compacta, dotada da topoloxía inducida por $X \times X$.*

Proba. A idea para probar que toda relación de equivalencia compacta \mathcal{R} é propia é simple, pois coma no caso de grupos discretos, a acción natural de \mathcal{R} sobre X será propia. En primeiro lugar, polo lema precedente X/\mathcal{R} é Hausdorff. Consideremos $K = \alpha(\mathcal{R} \setminus \Delta) = \beta(\mathcal{R} \setminus \Delta)$ o compacto obtido como a unión das clases de equivalencia que non se reducen a un punto. Evidentemente, a proxección $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ envía homeomorficamente $X \setminus K$ sobre a súa imaxe. Podémonos reducir logo o caso no que X é compacto. Como os grafos das transformacións parciais de \mathcal{R} son abertos de \mathcal{R} en restrición aos cales as proxeccións α e β se convirten en homeomorfismos, por compacidade o grafo de \mathcal{R} está recuberto por un número finito de tales biseccións. Todo punto de X pertence entón a un aberto U tal que $\pi^{-1}(\pi(U))$ é unión das imaxes $\varphi(U)$ de U por un número finito de transformacións parciais φ . Por analogía coas accións de grupos finitos, substituindo U por unha veciñanza máis pequena, podemos supoñer que as imaxes $\varphi(U)$ son disxuntas. A proxección π é pois un homeomorfismo en restrición a U .

Para probar o recíproco, notemos que $\mathcal{R} \setminus \Delta \subset \mathcal{R}_K^K = \alpha^{-1}(K) \cap \beta^{-1}(K)$ se \mathcal{R} é trivial fóra dun compacto K , polo que podemos restrinxirnos de novo ao caso no que X é compacto. Agora, se X/\mathcal{R} é Hausdorff, \mathcal{R} é pechado en $X \times X$, logo compacto. \square

Definición 3.1.8 ([11],[30]). Unha relación de equivalencia \mathcal{R} definida sobre un espazo totalmente disconexo X dise *afable* se existe unha sucesión crecente de relacións de equivalencia compactas \mathcal{R}_n tales que $\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$. Se dotamos a \mathcal{R} da topoloxía límite inductivo (de maneira que U é aberto en \mathcal{R} se e só se $U \cap \mathcal{R}_n$ é aberto en \mathcal{R}_n), entón $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}_n$ é unha relación de equivalencia β -discreta e dise *aproximadamente finita* (AF en abreviatura).

Evidentemente, unha relación de equivalencia afable é hiperfinita respecto de calquera medida case-invariante.

Definición 3.1.9 ([24]). Sexa (M, \mathcal{F}) un espazo foliado transversalmente Cantor. Diremos que (M, \mathcal{F}) é *afable* se posúe unha transversal completa Σ tal que a relación de equivalencia inducida por \mathcal{F} é afable.

En [24] próbase que a definición de espazo foliado afable non depende da elección da transversal. Isto é, se a relación de equivalencia inducida sobre algunha transversal completa é afable, entón tamén o é a relación de equivalencia inducida sobre calquera outra transversal completa.

3.2 Diagramas de Bratteli

Toda relación de equivalencia afable pode describirse mediante o espazo de camiños dun determinado tipo de grafos, os diagramas de Bratteli. Un *diagrama de Bratteli* [10, 11] é un grafo orientado $\mathcal{B} = (V, E)$ no que os conxuntos de vértices V e aristas E admiten descomposicións $V = \bigsqcup_{n \geq 0} V_n$ e $E = \bigsqcup_{n \geq 0} E_n$ como unións numerables de subconxuntos finitos V_n e E_n non baleiros, disxuntos dous a dous e tales que, para toda arista $e \in E_n$, a orixe $\alpha(e) \in V_n$ e o extremo $\beta(e) \in V_{n+1}$. Esíxese ademais que non existan vértices v tales que $\alpha^{-1}(v) = \emptyset$. Por outra banda, chámase *vértice de partida* de \mathcal{B} a un vértice v tal que $\beta^{-1}(v) = \emptyset$. Se o diagrama de Bratteli non posúe máis ca un vértice de partida $v_0 \in V_0$ dise *estándar*. Un diagrama de Bratteli estándar é *simple* se para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que se contraemos telescopicamente o diagrama entre os niveis m e n , cada vértice $v \in V_n$ está conectado a un vértice $w \in V_m$.

Sexa $v \in V_n$ un vértice de partida de \mathcal{B} e

$$X_v = \{ (e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots) \mid \alpha(e_n) = v, \alpha(e_{i+1}) = \beta(e_i), \forall i \geq n \}$$

o conxunto de camiños infinitos de \mathcal{B} que nacen en v . Dotado coa topoloxía inducida pola topoloxía produto de $E = \bigsqcup_{i \geq n} E_i$ (xerada polos *cilindros* aberto-pechados da forma

$$C_{e_n, \dots, e_{n+m}} = \{ (e'_n, e'_{n+1}, \dots) \in X_v \mid e'_n = e_n, \dots, e'_{n+m} = e_{n+m} \}$$

nos que $\alpha(e_n) = v$) o espazo X_v é compacto e totalmente disconexo. O *espazo de camiños infinitos de \mathcal{B}* é a suma topolóxica $X_{\mathcal{B}} = \bigsqcup X_v$ dos espazos de camiños infinitos de \mathcal{B} que nacen en vértices de partida de \mathcal{B} . Está dotado da relación de equivalencia cofinal $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ que identifica dous camiños (e_n, e_{n+1}, \dots) e (e'_m, e'_{m+1}, \dots) se existe un enteiro $N \geq m, n$ tal que $e_i = e'_i$ para todo $i \geq N$. A relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ é afable, pois é a unión das relacións de equivalencia compactas

$$\mathcal{R}_{\mathcal{B}}^N = \{ ((e_n, e_{n+1}, \dots), (e'_m, e'_{m+1}, \dots)) \mid m, n \leq N \text{ e } e_i = e'_i \text{ para todo } i \geq N \}.$$

O seguinte resultado mostra que toda relación de equivalencia afable é deste tipo:

Teorema 3.2.1 ([11, 30]). *Sexa \mathcal{R} unha relación de equivalencia AF sobre un espazo totalmente disconexo X . Existen un diagrama de Bratteli \mathcal{B} e un homeomorfismo $\Psi : X \rightarrow X_{\mathcal{B}}$ que define un isomorfismo entre \mathcal{R} e $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Se X é compacto, \mathcal{B} pode supoñerse estándar.*

Un *diagrama de Bratteli ordeado* [10] é un diagrama de Bratteli xunto cunha relación de orde parcial en E tal que dúas aristas e, e' son comparables cando $\beta(e) = \beta(e')$. Noutras palabras, temos unha orde total para cada conxunto $\beta^{-1}(v)$ dos camiños infinitos que pasan por un mesmo vértice $v \in V \setminus V_0$. Un *diagrama de Bratteli ordeado simple* é un diagrama de Bratteli simple, ordeado de maneira que existen un único camiño infinito $\gamma_{max} \in X_{\mathcal{B}}$ no que todas as aristas son máximas para a relación de orde e un único camiño infinito $\gamma_{min} \in X_{\mathcal{B}}$ con todas as aristas mínimas.

Se $X_{\mathcal{B}}$ é o espazo de camiños infinitos dun diagrama de Bratteli ordeado simple, defínese un homeomorfismo $\lambda_{\mathcal{B}} : X_{\mathcal{B}} \rightarrow X_{\mathcal{B}}$, denominado *aplicación de Vershik*, do seguinte xeito. Para γ_{max} , defínese $\lambda_{\mathcal{B}}(\gamma_{max}) = \gamma_{min}$. Para $\gamma = (e_1, e_2, \dots) \neq \gamma_{max}$, considérase k o menor natural tal que e_k non é unha arista máxima de E , e f_k a arista inmediatamente maior que e_k . Tómase (f_0, f_1, \dots, f_k) o único elemento en $E_0 \circ \dots \circ E_{k-1}$ que conecta v_0 con $\alpha(f_k) \in V_k$ e no que todas as aristas son mínimas, e defínese entón

$$\lambda_{\mathcal{B}}(\gamma) = \lambda_{\mathcal{B}}((e_1, e_2, \dots)) = (f_0, f_1, \dots, f_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots).$$

A aplicación de Vershik define deste xeito un sistema dinámico minimal sobre $X_{\mathcal{B}}$, denominado *sistema dinámico de Bratteli-Vershik*.

As órbitas do sistema dinámico de Bratteli-Vershik $(X_{\mathcal{B}}, \lambda_{\mathcal{B}})$ están determinadas polas clases de equivalencia da relación cofinal, agás no caso das clases de cofinalidade de γ_{max} e γ_{min} , que se “pegan” pola acción de $\lambda_{\mathcal{B}}$. Un exemplo clásico desta situación é unha *máquina de sumar binaria*, isto é, o sistema dinámico clásico sobre o espazo de sucesións binarias $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ xerado pola *aplicación suma de 1* (definida como a conxugada da suma de 1 no anel dos enteiros 2-ádicos), no que as órbitas coinciden coas clases de cofinalidade, agás para as sucesións $000\dots$ e $111\dots$, que pertencen a unha mesma órbita pero representan distintas clases de cofinalidade.

Proposición 3.2.2 ([11]). *Sexa $X_{\mathcal{B}}$ o espazo de camiños infinitos dun diagrama de Bratteli simple \mathcal{B} . Sexan γ e γ' dous camiños infinitos non cofinais. Existe unha relación de orde parcial en E que fai de \mathcal{B} un diagrama de Bratteli ordeado simple, de maneira que $\gamma = \gamma_{max}$ e $\gamma' = \gamma_{min}$. Deste xeito, a correspondente aplicación de Vershik preserva as clases de cofinalidade, agás $\lambda_{\mathcal{B}}(\gamma) = \gamma'$.*

3.3 O proceso de inflación

Sexa $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P})$ un mosaico aperiódico e repetitivo do espazo euclidiano \mathbb{R}^n de tipo \mathcal{P} finito. Como dixemos ao comezo do capítulo, pretendemos describir a dinámica

medible da envoltura $X = \Omega_{\mathcal{T}}$. Lembremos que X posúe unha estrutura foliada \mathcal{F} e consideremos a relación de equivalencia \mathcal{R} inducida nunha transversal canónica Σ (definida pola elección dun punto base en cada prototesela de \mathcal{P}). Imos empregar o *proceso de inflación* descrito en [2].

Definición 3.3.1. Sexa (M, \mathcal{F}) un espazo foliado compacto. Unha *descomposición por caixas* de M é una familia finita $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in m}$ de compactos foliados en produto $\varphi_i : B_i \rightarrow P_i \times C_i$ tal que $M = \bigcup_{i=1}^m B_i$ e $\overset{\circ}{B}_i \cap \overset{\circ}{B}_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Nesta situación, chámase *borde transverso* ou *vertical* da caixa B_i ao conxunto $\partial_v B_i = \varphi_i^{-1}(\partial_v P_i \times C_i)$. No caso do espazo foliado de Gromov-Hausdorff $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$, unha descomposición por caixas $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1}^m$ dise *adaptada a \mathcal{P}* se cumpre que:

- i) as *transversais* C son aberto-pechados na transversal canónica Σ ,
- ii) as *placas* P son motivos compostos a partir das prototeselas de \mathcal{P} .

A existencia de descomposicións por caixas adaptadas a \mathcal{P} ven garantida pola definición mesma do espazo foliado de Gromov-Hausdorff $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$, pois os mosaicos que posúen un mesmo motivo arredor da orixe apílanse en caixas compactas foliadas no produto do motivo por un aberto-pechado (teorema 2.2.3). Cando nos refiramos a este feito, faremoslo nomeando ao *principio de Gromov-Hausdorff*.

Definición 3.3.2 ([2]). Sexan \mathcal{B} e \mathcal{B}' dúas descomposición por caixas adaptadas a \mathcal{P} . Diremos que \mathcal{B}' se obtén por *inflación* de \mathcal{B} se:

- i) para cada punto \mathcal{T} na intersección dunha caixa B de \mathcal{B} e unha caixa B' de \mathcal{B}' a transversal de B' que pasa por \mathcal{T} está contida na transversal de B correspondente;
- ii) o borde vertical $\partial_v B'$ de cada caixa B' de \mathcal{B}' está contido no borde vertical de \mathcal{B} , é dicir, na unión $\partial_v \mathcal{B} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \partial_v B$ dos bordes verticais das caixas de \mathcal{B} ;
- iii) para cada caixa B' de \mathcal{B}' , existe unha caixa B de \mathcal{B} tal que $B \cap B' \neq \emptyset$ e $B \cap \partial_v B' = \emptyset$.

Teorema 3.3.3 ([2]). *Sexa X a envoltura dun mosaico aperiódico e repetitivo de $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$. Para toda descomposición por caixas \mathcal{B} de X adaptada a \mathcal{P} , existe outra descomposición \mathcal{B}' que se obtén por inflación de \mathcal{B} .*

Proba. Imos proceder en tres etapas:

1) Elección dunha transversal completa: Lembremos que a traza $L_{\mathcal{T}} \cap \Sigma$ da folla $L_{\mathcal{T}}$ que pasa por \mathcal{T} sobre a transversal canónica Σ identifícase co conxunto de Delone $D_{\mathcal{T}}$ inducido polos puntos base das prototeselas de \mathcal{P} . Se $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$

é unha descomposición en caixas de X adaptada a \mathcal{P} , imos substituír Σ polo *eixo da descomposición* $\mathcal{C} = \bigsqcup_{i=1}^n C_i$. Como antes, a traza $L_{\mathcal{T}} \cap \mathcal{C}$ identifícase cun conxunto de Delone, que aínda denotaremos $D_{\mathcal{T}}$.

2) Redución da transversal e descomposición de Voronoi: Sexa $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ un aberto-pechado contido nalgún aberto-pechado C_i do eixo \mathcal{C} . Como X é minimal, a traza $L_{\mathcal{T}} \cap \mathcal{C}'$ de calquera folla identifícase de novo cun conxunto de Delone $D'_{\mathcal{T}}$. Ademais, podemos supoñer \mathcal{C}' suficientemente pequeno para que calquera conxunto de Delone $D'_{\mathcal{T}}$ sexa N -discreto, e iso para calquera $N \in \mathbb{N}$ que poida resultar oportuno. O mosaico de Voronoi \mathcal{V} de calquera destes conxuntos de Delone $D'_{\mathcal{T}}$ segue sendo de tipo finito. A transversal completa \mathcal{C}' pode descompoñerse entón nunha unión disxunta $C'_1 \sqcup \dots \sqcup C'_p$ de abertos-pechados C'_i formados polos mosaicos que posúen a mesma celda de Voronoi arredor da orixe. De novo pola minimalidade de X e a propia definición da súa estrutura foliada, baseada no principio de Gromov-Hausdorff, existe unha descomposición $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{B_{V_1}, \dots, B_{V_m}\}$ onde as caixas compactas $B_{V_i} \cong V_i \times C'_i$ están determinadas polos distintos tipos de translación das celdas de Voronoi do mosaico \mathcal{V} .

3) Inflación: Partindo de $B_{\mathcal{V}}$, imos definir a descomposición por caixas \mathcal{B}' adaptada a \mathcal{P} que buscamos. Para cada mosaico \mathcal{T} de \mathcal{C}' , consideremos o motivo

$$P'_{\mathcal{T}} = \bigcup_{\mathcal{T}' \in V_i \cap \mathcal{C}} P_{\mathcal{T}'}$$

onde V_i é a placa da caixa B_{V_i} que contén ao mosaico \mathcal{T} . Pode darse o caso que dous motivos $P'_{\mathcal{T}}$ e $P'_{\mathcal{T}'}$ teñan por intersección unha tesela $P_{\mathcal{T}''}$ co tipo de translación dalgunha placa P_i de \mathcal{B} . O problema queda solucionado eliminando $P_{\mathcal{T}''}$ de xeito coherente dalgún dos dous motivos, é dicir, eliminándoa entón de calquera outro motivo co mesmo tipo de translación. Obtemos así unha nova descomposición por caixas $\mathcal{B}' = \{B'_1, \dots, B'_l\}$ adaptada a \mathcal{P} composta de caixas $B'_i \cong P'_i \times C'_i$. Por construción, \mathcal{B}' obtense por inflación de \mathcal{B} sen máis precaucións que tomar o aberto-pechado \mathcal{C}' suficientemente pequeno para que se cumpra a condición (iii) da definición 3.3.2. \square

Corolario 3.3.4. *Para cada descomposición por caixas \mathcal{B} de X adaptada a \mathcal{P} , existe unha sucesión $\{\mathcal{B}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de descomposicións por caixas de X adaptadas a \mathcal{P} tal que:*

i) $\mathcal{B}^{(0)} = \mathcal{B}$;

ii) $\mathcal{B}^{(n+1)}$ obtense por inflación a partir de $\mathcal{B}^{(n)}$;

iii) $\mathcal{B}^{(n+1)}$ determina un conxunto finito de prototeselas $\mathcal{P}^{(n+1)}$, motivos compostos a partir das prototeselas de $\mathcal{P}^{(n)}$, e un mosaico $\mathcal{T}^{(n+1)} \in \mathfrak{T}(\mathcal{P}^{(n+1)})$ de cada folla $L_{\mathcal{T}} \cong \mathbb{R}^n$ de X ;

iv) cada tesela de $\mathcal{P}^{(n+1)}$ contén no seu interior algunha tesela de $\mathcal{P}^{(n)}$.

Ademais, a sucesión de descomposicións $\{\mathcal{B}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ leva asociadas:

1) unha sucesión decrecente de eixos $\mathcal{C}^{(n)}$, xunto cunha sucesión estrictamente crecente de números naturais N_n de maneira que o conxunto de Delone $D_{\mathcal{T}}^{(n)} = L_{\mathcal{T}} \cap \mathcal{C}^{(n)}$ é N_n -discreto;

2) unha sucesión de mosaicos de Voronoi $\mathcal{V}^{(n)}$ de maneira que cada celda de Voronoi $V \in \mathcal{V}^{(n)}$ contén no seu interior algunha tesela de $\mathcal{T}^{(n-1)}$.

Observación 3.3.5. Lembremos que, no caso de \mathbb{R}^n , podemos substituír a condición de aperiodicidade pola condición de non periodicidade, pois na envoltura dun mosaico repetitivo non periódico ten que haber algún mosaico aperiódico e daquela todos os mosaicos da envoltura son aperiódicos. Noutros termos, estes espazos foliados son sempre minimais e sen holonomía. Agora ben, se substituímos o plano euclidiano \mathbb{R}^2 e o seu grupo de translacións polo plano hiperbólico \mathbb{H}^2 e o grupo afín $Aff(1)$, temos exemplos minimais con follas cilíndricas que teñen holonomía non trivial (véxase [28]). En xeral, pódese demostrar que o corolario 3.3.4 segue sendo certo para calquera laminación *teselable*, isto é, transversalmente Cantor, minimal e sen holonomía. Se supoñemos que a laminación é minimal, pero hai follas con holonomía non trivial, entón a conclusión do corolario aplícase só a un conxunto residual de follas. Convén salientar os dous puntos esenciais da proba:

- i) a intersección de calquera folla $L_{\mathcal{T}}$ co eixo $\mathcal{C}^{(n)}$ é un conxunto de Delone;
- ii) todas as teselas do mosaico de Voronoi $\mathcal{V}^{(n)}$ teñen holonomía trivial.

Voltando a situación do inicio, definimos agora unha sucesión de relacións de equivalencia finitas

$$\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{R}_n \subset \cdots \subset \mathcal{R}$$

definidas na transversal canónica Σ como segue:

Definición 3.3.6. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defínese a \mathcal{R}_n -clase de equivalencia dun mosaico \mathcal{T} coma o conxunto

$$\mathcal{R}_n[\mathcal{T}] = \{ \mathcal{T}' \in \mathcal{R}[\mathcal{T}] \mid \mathcal{T}' \in P^n \} = P^n \cap \Sigma$$

onde P^n é a placa de $\mathcal{B}^{(n)}$ que pasa por \mathcal{T} .

Noutros termos, para cada $n \in \mathbb{N}$, as clases de equivalencia de \mathcal{R}_n coinciden coas *placas discretas* $\check{P}^n = P^n \cap \Sigma$ da descomposición inducida por $\mathcal{B}^{(n)}$ sobre Σ .

Lema 3.3.7. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, a relación de equivalencia \mathcal{R}_n é β -discreta, aberta en \mathcal{R} e compacta.*

Proba. Se dotamos á relación \mathcal{R}_n da topoloxía inducida por \mathcal{R} , entón o espazo de unidades Σ é un aberto de \mathcal{R}_n e polo tanto \mathcal{R}_n é β -discreta. Para comprobar que \mathcal{R}_n é aberta en \mathcal{R} , consideremos un par $(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in \mathcal{R}_n$. Sabemos que \mathcal{T} contén un motivo P^n arredor da orixe 0 con patrón de translación representado por unha prototesela de $\mathcal{P}^{(n)}$ e o conxunto $\check{P}^n = D_{\mathcal{T}} \cap P^n$ contén un vector v tal que $\mathcal{T}' = \mathcal{T} - v$. Consideremos entón o aberto-pechado X_{P^n} de $X \cap \Sigma$ formado por todos o mosaicos de $X \cap \Sigma$ que conteñen ao motivo P^n e o aberto $O(X_{P^n}, v) = \{ (\mathcal{T}'', \mathcal{T}'' - v) \mid \mathcal{T}'' \in X_{P^n} \}$ de \mathcal{R} . Agora temos que $(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in O(X_{P^n}, v) \subset \mathcal{R}_n$. Por último, observemos que \mathcal{R}_n é a unión finita dos abertos $O(X_{P^n}, v)$ asociados aos pares (P^n, v) con $P^n \in \mathcal{P}^{(n)}$ e $v \in \check{P}^n$. Cada un destes abertos é tamén pechado, pois coincide co grafo da translación $\mathcal{T}'' \mapsto \mathcal{T}'' - v$ definida sobre X_{P^n} . Polo tanto, \mathcal{R}_n é compacta. \square

Deste xeito, a subrelación de equivalencia $\mathcal{R}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ é afable. Ademais, segundo o lema anterior, a topoloxía límite inductivo sobre \mathcal{R}_∞ coincide coa topoloxía inducida por \mathcal{R} . Interézanos ou ben atopar medidas sobre Σ invariantes por \mathcal{R} tales que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\infty$ nun conxunto de medida total, ou ben impoñer condicións aos mosaicos para que calquera medida invariante satisfaga esa mesma propiedade. Con ese propósito, imos introducir a seguinte terminoloxía:

Definición 3.3.8. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos o *borde da relación de equivalencia* \mathcal{R}_n como a unión dos bordes das placas discretas inducidas pola descomposición $\mathcal{B}^{(n)}$, isto é,

$$\partial \mathcal{R}_n = \bigcup_{B^n \in \mathcal{B}^{(n)}} \partial_v \check{B}^n = \bigcup_{B^n \in \mathcal{B}^{(n)}} \left(\bigcup_{P^n \subset B^n} \partial \check{P}^n \right) = \bigcup_{\mathcal{T} \in \Sigma} \partial \mathcal{R}_n[\mathcal{T}].$$

Para cada caixa $B^n \in \mathcal{B}^{(n)}$, o borde vertical $\partial_v \check{B}^n$ da *caixa discreta* $\check{B}^n = B^n \cap \Sigma$ é a unión dos bordes das placas discretas

$$\partial \check{P}^n = \{ \mathcal{T}' \in \check{P}^n \mid \exists \tau_v \in S : \tau_v(\mathcal{T}') = \mathcal{T}' - v \notin \check{P}^n \},$$

que coinciden cos bordes das \mathcal{R}_n -clases

$$\partial \mathcal{R}_n[\mathcal{T}] = \{ \mathcal{T}' \in \mathcal{R}_n[\mathcal{T}] \mid \exists \tau_v \in S : \tau_v(\mathcal{T}') = \mathcal{T}' - v \notin \mathcal{R}_n[\mathcal{T}] \},$$

sendo S un sistema simétrico de xeradores do pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F} reducido a Σ . Definimos o *borde da relación de equivalencia* \mathcal{R}_∞ como

$$\partial \mathcal{R}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \partial \mathcal{R}_n.$$

Lema 3.3.9. *Para calquera medida \mathcal{R} -invariante μ sobre Σ , temos que:*

$$0 \leq \mu(\{ \mathcal{T} \in \Sigma \mid \mathcal{R}[\mathcal{T}] \neq \mathcal{R}_\infty[\mathcal{T}] \}) \leq \mu(\text{sat}(\partial\mathcal{R}_\infty)).$$

Proba. En efecto, observemos que se $\mathcal{R}[\mathcal{T}] \neq \mathcal{R}_\infty[\mathcal{T}]$, existe entón un mosaico $\mathcal{T}' \in \mathcal{R}_\infty[\mathcal{T}]$ e unha translación $\tau_v \in S$ tales que $\mathcal{T}'' = \tau_v(\mathcal{T}') = \mathcal{T}' - v \notin \mathcal{R}_\infty[\mathcal{T}]$, é dicir, $\mathcal{T}' \in \partial\mathcal{R}_\infty$. \square

A nosa cuestión redúcese pois a demostrar que $\mu(\partial\mathcal{R}_\infty) = 0$. Un método habitual de construción de medidas invariantes é mediante sucesións de Følner (véxase [17]). Lembremos que unha *sucesión de Følner* é unha sucesión de conxuntos finitos $A_n \subset \Sigma$ tal que $\frac{\#\partial A_n}{\#A_n} \rightarrow 0$ cando $n \rightarrow \infty$.

3.4 Dinámica medible dos mosaicos do plano

Imos abordar primeiro o caso particular $n = 2$, é dicir, consideramos un mosaico aperiódico e repetitivo \mathcal{T} do plano \mathbb{R}^2 de tipo \mathcal{P} . Comezamos lembrando tres propiedades elementais da xeometría plana:

i) Se P é un polígono convexo que contén unha bóla $B(x, r)$, entón a súa área

$$a(P) \geq r\delta(P). \quad (4.1)$$

ii) O perímetro dun polígono convexo P é menor que o perímetro de calquera bóla que o conteña. En particular, o perímetro

$$p(P) < 2\pi\delta(P). \quad (4.2)$$

iii) Sexa $\{P_l\}_{l \geq 0}$ unha sucesión de polígonos convexos tal que $B(x_l, N_l) \subset P_l$ para algún punto $x_l \in \mathbb{R}^2$ e algún $N_l \in \mathbb{N}$, con $N_l \rightarrow \infty$ cando $l \rightarrow \infty$. Entón a razón isoperimétrica da sucesión de polígonos P_l tende a cero, é dicir

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{p(P_l)}{a(P_l)} = 0.$$

En virtude destas propiedades e do corolario 3.3.4, temos o seguinte resultado:

Lema 3.4.1. *A razón isoperimétrica de calquera sucesión exhaustiva de celdas de Voronoi $V^n \in \mathcal{V}^n$ tende a cero, é dicir*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p(V^n)}{a(V^n)} = 0. \quad \square$$

Lema 3.4.2. *Mediante un proceso de inflación axeitado, pódese asegurar que a razón isoperimétrica de calquera sucesión de placas $P^n \in \mathcal{P}^{(n)}$ tende a cero de maneira uniforme, i.e.*

$$\frac{p(P^n)}{a(P^n)} < \frac{1}{n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada placa $P^n \in \mathcal{P}^{(n)}$.

Proba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sexan

$$a_n = \max_{P^n \in \mathcal{P}^{(n)}} a(P^n), \quad p_n = \max_{P^n \in \mathcal{P}^{(n)}} p(P^n).$$

Agora, tendo en conta como se definen as placas de $\mathcal{P}^{(n)}$ a partir das celdas de Voronoi de \mathcal{V}^n en cada etapa da inflación, e mailas desigualdades (4.1) e (4.2), obtemos:

$$\begin{aligned} p(P^n) &< 2\pi p_{n-1} \delta(P^n) \\ a(P^n) &\geq N_n \delta(P^n) - 2\pi a_{n-1} \delta(P^n) \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada placa $P^n \in \mathcal{P}^{(n)}$. Aplicando a desigualdade isoperimétrica $4\pi a_n \leq p_n^2$ á segunda inecuación:

$$a(P^n) \geq N_n \delta(P^n) - p_{n-1}^2 \delta(P^n).$$

Logo,

$$\frac{p(P^n)}{a(P^n)} < \frac{2\pi p_{n-1} \delta(P^n)}{(N_n - p_{n-1}^2) \delta(P^n)} = 2\pi \frac{p_{n-1}}{(N_n - p_{n-1}^2)}.$$

Polo tanto, tomando \mathcal{C}^n en cada etapa da inflación de maneira que

$$N_n > p_{n-1}^2 + 2\pi n p_{n-1}, \quad (4.3)$$

asegurámonos que:

$$\frac{p(P^n)}{a(P^n)} < \frac{1}{n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada placa $P^n \in \mathcal{P}^{(n)}$. □

Observación 3.4.3. Por un razonamento análogo, tomando a transversal C^n para que $N_n > p_{n-1}^2 + 2\pi n a_{n-1} p_{n-1}$ en lugar de (4.3), podemos garantir tamén que

$$a_{n-1} \frac{p(P^n)}{a(P^n)} < \frac{1}{n}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada placa $P^n \in \mathcal{P}^{(n)}$.

Lema 3.4.4. *Calquera sucesión de placas discretas $\check{P}^n = P^n \cap \Sigma$ é unha sucesión de Følner, pois a razón isoperimétrica de \check{P}^n converge a cero de maneira uniforme.*

Proba. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ de maneira que calquera lado de calquera prototesela de $\mathcal{P}^{(n)}$ teña lonxitude ≥ 1 se $n \geq N$. Neste caso, calquera prototesela $P^n \in \mathcal{P}^{(n)}$ cumpre

$$\#\partial\check{P}^n = \#\partial_d P^n \leq p(P^n), \quad a_{n-1} \#\check{P}^n \geq a(P^n),$$

e así

$$\frac{\#\partial\check{P}^n}{\#\check{P}^n} \leq a_{n-1} \frac{p(P^n)}{a(P^n)} < \frac{1}{n}. \quad \square$$

Lema 3.4.5. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada caixa $B^n \in \mathcal{B}^{(n)}$, existe un número real $\varepsilon(B^n) \rightarrow 0$ cando $n \rightarrow \infty$ tal que*

$$\mu(\partial_d B^n) < \varepsilon(B^n) \mu(B^n \cap \Sigma)$$

para calquera medida \mathcal{R} -invariante μ sobre Σ .

Proba. Como a medida μ é invariante por \mathcal{R} , para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $B^n \in \mathcal{B}^{(n)}$, temos que:

$$\begin{aligned} \mu(\partial_d B^n) &= \int \#\partial(\check{P}^n \times \{\mathcal{T}\}) \chi_{C^n}(\mathcal{T}) d\mu(\mathcal{T}) = \#\partial\check{P}^n \mu(C^n), \\ \mu(B^n \cap \Sigma) &= \int \#\check{P}^n \times \{\mathcal{T}\} \chi_{C^n}(\mathcal{T}) d\mu(\mathcal{T}) = \#\check{P}^n \mu(C^n). \end{aligned}$$

Tomando o número real

$$\varepsilon(B^n) = \frac{\#\partial\check{P}^n}{\#\check{P}^n},$$

obtemos a desigualdade

$$\mu(\partial_d B^n) = \#\partial\check{P}^n \mu(C^n) \leq \varepsilon(B^n) \#\check{P}^n \mu(C^n) = \varepsilon(B^n) \mu(B^n \cap \Sigma).$$

E polo lema 3.4.4, $\varepsilon(B^n) \rightarrow 0$ cando $n \rightarrow \infty$. □

Proposición 3.4.6. *Para calquera medida \mathcal{R} -invariante μ sobre Σ , o borde $\partial\mathcal{R}_\infty$ da relación de equivalencia \mathcal{R}_∞ ten medida nula.*

Proba. Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(\partial\mathcal{R}_n) = \mu\left(\bigcup_{B^n \in \mathcal{B}^{(n)}} \partial_d B^n\right) \leq \sum_{B^n \in \mathcal{B}^{(n)}} \mu(\partial_d B^n).$$

Polo lema anterior, temos deste xeito que:

$$\mu(\partial\mathcal{R}_n) \leq \sum_{B^n \in \mathcal{B}^{(n)}} \varepsilon(B^n) \mu(B^n \cap \Sigma).$$

Desta maneira, tendo en conta a proba do lema 3.4.4, para $n \geq N$:

$$\mu(\partial\mathcal{R}_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{B^n \in \mathcal{B}^{(n)}} \mu(B^n \cap \Sigma) = \frac{1}{n}.$$

Logo

$$\mu(\partial\mathcal{R}_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\partial\mathcal{R}_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \quad \square$$

Como xa comentamos, isto implica o seguinte resultado:

Teorema 3.4.7. *A relación de equivalencia natural \mathcal{R} definida sobre a envoltura de calquera mosaico aperiódico e repetitivo do plano euclidiano coincide coa relación de equivalencia afable \mathcal{R}_∞ sobre un conxunto de medida total.* \square

Corolario 3.4.8. *A relación de equivalencia natural \mathcal{R} definida sobre a envoltura de calquera mosaico aperiódico e repetitivo do plano euclidiano é hiperfinita.* \square

Polo tanto, en virtude do teorema 3.2.1 e da proposición 3.2.2, concluimos:

Corolario 3.4.9. *A dinámica medible da envoltura dun mosaico aperiódico e repetitivo do plano euclidiano está representada por un sistema dinámico de Bratteli-Vershik.* \square

Este resultado é ilustrado pola descripción da dinámica da envoltura de calquera mosaico de Robinson repetitivo (véxase [18]). En §4 lembramos tal resultado, outro similar obtido por R. M. Robinson sobre os mosaicos de Penrose por dardos e papaventos, e engadimos unha nova descripción da dinámica da envoltura do mosaico por poliominós descrito por R. Penrose en [27].

3.5 Dinámica medible dos mosaicos de \mathbb{R}^n

En [33], C. Series proba que calquera foliación con *tipo de crecemento polinomial* é hiperfinita respecto de calquera medida invariante. Un esquema similar vaios permitir controlar a medida do borde das relacións \mathcal{R}_n co propósito de estender o teorema 3.4.7 aos mosaicos de \mathbb{R}^n . Comezamos lembrando algunhas nocións xerais relativas ao *tipo de crecemento* das follas dun espazo foliado.

Definición 3.5.1. Sexan $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dúas funcións monótonas crecentes. Dise que g *está dominada por* f , e denótase $g \prec f$, se existen constantes $\lambda, \rho \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$ tales que $g(m) \leq \lambda f(\rho m)$ para cada $m \geq n$. Dúas funcións f e g están relacionadas se están mutuamente dominadas, isto é, $g \prec f$ e $f \prec g$. Esta relación define un preorde no conxunto das funcións monótonas crecentes con rango e imaxe en \mathbb{N} . Á clase de cada función f , chámasele *tipo de crecemento* de f .

Definición 3.5.2. Sexa (M, \mathcal{F}) un espazo foliado compacto. Consideremos Σ unha transversal completa, Γ o pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F} reducido a Σ , e S un sistema simétrico de xeradores finito. Defínese a *lonxitude* dun elemento $\gamma \in \Gamma$ coma o número mínimo $\text{lonx}_S(\gamma)$ de xeradores de S necesarios para escribir γ . Defínese entón unha *distancia nas follas* por

$$d_S(x, x') = \min\{\text{lonx}_S(\gamma) \mid \gamma(x') = x\}.$$

Denomínase neste caso función de volume da órbita de Γ nun punto $x \in \Sigma$ á función $v_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$v_x(n) = \#\bar{B}_{d_S}(x, n).$$

Chámase *función de volume* de Γ á función $v : \Sigma \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $v(x, n) = v_x(n)$. Lembremos que o tipo de crecemento de v_x é o mesmo para cada punto x dunha mesma folla. En efecto, para cada par de puntos x e y dunha mesma folla, $d_S(x, y) = d < \infty$. Polo tanto, $\bar{B}_{d_S}(y, n) \subset \bar{B}_{d_S}(x, n + d) \subset \bar{B}_{d_S}(y, n + 2d)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, o que implica que v_x e v_y están mutuamente dominadas.

O noso propósito é pois estender o teorema 3.4.7 aos mosaicos aperiódicos e repetitivos de \mathbb{R}^n empregando o crecemento polinomial dos espazos euclidianos. Nun primeiro momento, como consecuencia do corolario 2.40 de [2], imos substituír o conxunto finito de prototeselas \mathcal{P} por outro no que as prototeselas son cubos unitarios en \mathbb{R}^m . Estes cubos teñen decoracións nos seus lados que determinan cando dúas teselas poden ser adxacentes. Máis adiante comprobaremos que esta simplificación é de feito inútil. Agora ben, asumindo a substitución a función de volume do pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F} está dada por $v(n) = (2n - 1)^m$. A proba do seguinte lema é neste caso evidente:

Lema 3.5.3. *A función de volume do pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F} reducido a Σ satisfai as dúas condicións seguintes:*

$$\exists K > 0 : \frac{v(2n)}{v(n)} < K \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \quad (5.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(n-k)}{v(n)} = 1 \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N} \quad (5.2)$$

□

Ao longo do que resta de sección, todas as caixas $B \cong P \times C$ consideradas e as placas P correspondentes estarán discretizadas, é dicir, substituiranse polas súas trazas $\check{B} = B \cap \Sigma$ e $\check{P} = P \cap \Sigma$ cunha transversal completa Σ . Para simplificar a notación suprimiremos as tildes $\check{}$ e denotaremos simplemente B e P as discretizacións. De maneira explícita, temos a seguinte definición:

Definición 3.5.4. *Unha caixa de anchura $2n$ en Σ é unha caixa $B \cong P \times C$ con placas $P \times \{\mathcal{T}\} = \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, n)$. Para cada $k \leq n$, o borde vertical k -ésimo de B é o conxunto*

$$\partial^k B = \bigcup_{\mathcal{T} \in C} \partial^k \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, n)$$

onde

$$\partial^k \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, n) = \{ \mathcal{T}' \in \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, n) \mid \exists \tau_v \in \Gamma, \text{lon}_S(\tau_v) \leq k : \tau_v(\mathcal{T}') \notin \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, n) \}.$$

Lema 3.5.5. *Sexa A un subconxunto aberto-pechado de Σ e μ unha medida sobre Σ invariante por \mathcal{R} . Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $\varepsilon > 0$, existe unha caixa $B = P \times C$ de anchura $2n$ tal que*

$$\mu(B) > \frac{1}{K} \mu(A) - \varepsilon.$$

Proba. Para cada mosaico $\mathcal{T} \in A$, existe unha veciñanza aberta-pechada C de \mathcal{T} en A tal que dous elementos $\tau_v, \tau_{v'} \in \Gamma$ verifican:

$$\text{se } \tau_v(\mathcal{T}), \tau_{v'}(\mathcal{T}) \in \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, n), \text{ con } v \neq v' \Rightarrow \tau_v(C) \cap \tau_{v'}(C) = \emptyset \quad (5.3)$$

En efecto, como só hai un número finito de trasladados $\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T} - v$ para $\tau_v \in \Gamma$ con $\text{lon}_S(\tau_v) \leq 2n$, podemos elixir C suficientemente pequeno para asegurarmos (5.3). Podemos definir logo $B = P \times C$ caixa de anchura $2n$ en Σ .

Para obter unha cota inferior de $\mu(B)$, sexa C o aberto maximal que satisfai (5.3). Desta maneira, A está contido na unión dos trasladados $\tau_v(C)$ por elementos

$\tau_v \in \Gamma$ con $\text{lon}x_S(\tau_v) \leq 2n$. De existir $\mathcal{T}' \in A$ con $d_S(\mathcal{T}', C) > 2n$, tomando C' entorno aberto-pechado de \mathcal{T}' en A satisfaciendo (5.3) e restrinxindo a un entorno máis pequeno se fose necesario, poderíamos asegurar $\tau_v(C) \cap \tau_{v'}(C') = \emptyset$ para $\tau_v, \tau_{v'}$ tales que $\tau_v(\mathcal{T}) \in \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, n)$ e $\tau_{v'}(\mathcal{T}') \in \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}', n)$. Logo $C'' = C \cup C'$ sería un aberto-pechado de A que verifica (5.3) e C non sería maximal.

Tomando agora un aberto-pechado C' cumprindo (5.3) tal que $\mu(C') = \mu(C) - \varepsilon'$ con $\varepsilon' = \frac{K}{v(2n)}\varepsilon$, pola invarianza da medida e pola condición (5.1) da función de volume, $B' = P \times C'$ é unha caixa de anchura $2n$ tal que:

$$\mu(B') = v(n)\mu(C') > \frac{v(2n)}{K}(\mu(C) - \varepsilon') = \frac{1}{K}v(2n)\mu(C) - \varepsilon \geq \frac{1}{K}\mu(A) - \varepsilon.$$

□

Lema 3.5.6. *Sexa $B = P \times C$ unha caixa de anchura $2n$. Para cada $k \leq n$, existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\mu(\partial^k B) < \varepsilon\mu(B).$$

Proba. Sexa $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{v(n)}{v(n-k)} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < v(n) - v(n-k) < \varepsilon v(n-k) < \varepsilon v(n).$$

Tendo en conta que

$$\partial^k B = \bigcup_{\mathcal{T} \in C} \partial^k \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, n) \subset \bigcup_{\mathcal{T} \in C} (\bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, n) - \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, n-k))$$

e que μ é unha medida \mathcal{R} -invariante, temos que:

$$\begin{aligned} \mu(\partial^k B) &= \int \#\partial^k \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, n) \chi_C(\mathcal{T}) d\mu(\mathcal{T}) \leq (v(n) - v(n-k))\mu(C) \\ &< \varepsilon v(n)\mu(C) = \varepsilon\mu(B). \end{aligned}$$

□

Proposición 3.5.7. *Sexa A un subconxunto aberto-pechado de Σ . Para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $\varepsilon > 0$, existe $n = n(k, \varepsilon)$ de maneira que existe unha caixa de anchura $2n$ tal que:*

$$\mu(B) > \frac{1}{K}\mu(A) - \varepsilon \tag{5.4}$$

$$\mu(\partial^k B) < \varepsilon\mu(B) \tag{5.5}$$

Proba. Pola condición (5.2) da función de volume, podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{v(n)}{v(n-k)} < 1 + \varepsilon$. Polo lema 3.5.5, existe B caixa de anchura $2n$ satisfacendo a primeira desigualdade. Tendo en conta a proba do lema 3.5.6, B satisfai tamén a segunda. \square

Proposición 3.5.8. *Para cada $k \in \mathbb{N}$ e cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de maneira que existe unha familia $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ de caixas de anchura $\leq 2N$ tal que:*

- i) $\mathring{B}_i \cap \mathring{B}_j = \emptyset$, para $i \neq j$;
- ii) $\mu(\mathcal{B}) > 1 - \varepsilon$;
- iii) $\mu(\partial^k \mathcal{B}) = \mu(\bigcup_{i=1}^m \partial^k B_i) < \varepsilon \mu(\mathcal{B})$.

Proba. Sexan $\delta > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ cumprindo as seguintes desigualdades:

$$\left(1 - \frac{1}{K}\right)^m + \frac{\delta}{m} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{K}\right)^i\right) < \delta,$$

$$\frac{\delta}{m - \delta} < \varepsilon, \quad (1 - \delta)\left(1 - \frac{\delta}{m}\right) > 1 - \varepsilon.$$

Definimos N_1, \dots, N_m de xeito inductivo empregando a proposición 3.5.7:

$$N_1 = n\left(k, \frac{\delta}{m}\right), \quad N_1 \geq k$$

e

$$N_i = n\left(N_{i-1}, \frac{\delta}{m}\right), \quad N_i \geq N_{i-1}$$

para $i = 2, \dots, m$. Sexa $B_m = P_m \times C_m$ caixa de anchura $2N_m$ con $C_m \subset \Sigma$ tal que

$$\mu(B_m) > \frac{1}{K} \mu(\Sigma) - \frac{\delta}{m} = \frac{1}{K} - \frac{\delta}{m},$$

$$\mu(\partial^{N_m-1} B_m) < \frac{\delta}{m} \mu(B_m).$$

Agora, para $i = 2, \dots, n$, tomemos por indución caixas $B_i = P_i \times C_i$ de anchura $2N_i$ con $C_i \subset \Sigma - \bigcup_{j>i} B_j$ tales que

$$\mu(B_i) > \frac{1}{K} \mu\left(\Sigma - \bigcup_{j>i} B_j\right) - \frac{\delta}{m},$$

$$\mu(\partial^{N_i-1} B_i) < \frac{\delta}{m} \mu(B_i).$$

Así construídas, as caixas B_1, \dots, B_m satisfán $B_i \cap B_j \subset \partial^{N_j-1} B_j$ se $j > i$, pois do contrario B_j cortaría a C_i . Definimos entón unha nova familia \mathcal{B}' de caixas $B'_i = B_i - \partial^{N_i-1} B_i$, que identificamos coa súa unión, tal que:

i) $\mathring{B}'_i \cap \mathring{B}'_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

ii) Por construción, temos que:

$$\mu(B'_i) > (1 - \frac{\delta}{m}) \mu(B_i),$$

$$\mu(\Sigma - \bigcup_{i=j}^m B_i) < (1 - \frac{1}{K}) \mu(\Sigma - \bigcup_{i=j+1}^m B_i) + \frac{\delta}{m} \Rightarrow$$

$$\mu(\Sigma - \bigcup_{i=1}^m B_i) < (1 - \frac{1}{K})^m + \frac{\delta}{m} (\sum_{i=0}^{m-1} (1 - \frac{1}{K})^i) < \delta \Rightarrow$$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^m B_i) > 1 - \delta.$$

Polo tanto:

$$\mu(\mathcal{B}') = \sum_{i=1}^m \mu(B'_i) > (1 - \frac{\delta}{m}) \sum_{i=1}^m \mu(B_i) \geq (1 - \frac{\delta}{m}) \mu(\bigcup_{i=1}^m B_i) > (1 - \frac{\delta}{m})(1 - \delta) > 1 - \varepsilon.$$

iii) Por último, temos que:

$$\mu(\partial^k \mathcal{B}') = \sum_{i=1}^m \mu(\partial^k B'_i) < \frac{\delta}{m} \sum_{i=1}^m \mu(B_i) < \frac{\frac{\delta}{m}}{1 - \frac{\delta}{m}} \sum_{i=1}^m \mu(B_i) < \varepsilon \sum_{i=1}^m \mu(B_i) = \varepsilon \mu(\mathcal{B}').$$

Concluimos tomando $N \geq N_1, N_2 - N_1, \dots, N_m - N_{m-1}$. □

Agora, a partir deste resultado, definimos coma no caso do plano unha sucesión de subrelacións de equivalencia finitas:

Proposición 3.5.9. *Existe unha sucesión $\{\mathcal{R}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de relacións de equivalencia finitas, e unha sucesión monótona crecente de naturais $\{N_n\}$, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$:*

i) $\mathcal{R}_n[\mathcal{T}] \subset \mathcal{R}_{n+1}[\mathcal{T}] \subset \mathcal{R}[\mathcal{T}]$ para cada $\mathcal{T} \in \Sigma$;

ii) $\mathcal{T}\mathcal{R}_n\mathcal{T}' \Rightarrow \mathcal{T}' \in \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, N_n)$;

ii) $\mu(\{\mathcal{T} \in \Sigma \mid \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, N_{n-1}) \not\subseteq \mathcal{R}_n[\mathcal{T}]\}) < \frac{1}{2^n}$.

Proba. Supoñamos definidas tales relacións de equivalencia para $i \leq n$. Pola proposición 3.5.8, existen $N \in \mathbb{N}$ e unha familia $\hat{\mathcal{B}}$ de caixas de interiores disxuntos e anchura $\leq 2N$, identificada coa súa unión, tal que:

$$\mu(\hat{\mathcal{B}}) > 1 - \frac{1}{2^{n+2}},$$

$$\mu(\partial^{2N_n} \hat{\mathcal{B}}) < \frac{1}{2^{n+2}} \mu(\hat{\mathcal{B}}) < \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Sexa $\mathcal{B} = \hat{\mathcal{B}} - \partial^{N_n} \hat{\mathcal{B}} = \hat{\mathcal{B}} - \bigcup_{\hat{B} \in \hat{\mathcal{B}}} \partial^{N_n} \hat{B}$. Deste xeito,

$$\mu(\mathcal{B}) - \mu(\partial^{N_n} \mathcal{B}) > 1 - \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

e podemos definir \mathcal{R}_{n+1} por

$$\mathcal{T}\mathcal{R}_{n+1}\mathcal{T}' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{T}\mathcal{R}_n\mathcal{T}' \\ \mathcal{T}\mathcal{R}_n\mathcal{T}'', \mathcal{T}'\mathcal{R}_n\mathcal{T}''' \end{cases} \text{ e } \mathcal{T}'', \mathcal{T}''' \text{ pertencen á mesma placa } P \text{ de } \mathcal{B}$$

Tomando $N_{n+1} \geq 2N$, a relación de equivalencia \mathcal{R}_{n+1} satisfai (i), (ii) e (iii). \square

Coma no caso do plano, as relacións de equivalencia \mathcal{R}_n son β -discretas, aberturas e compactas, e polo tanto a relación de equivalencia $\mathcal{R}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ é afable. Obtemos así a versión do teorema 3.4.7 para o caso de \mathbb{R}^n :

Teorema 3.5.10. *A relación de equivalencia natural \mathcal{R} definida sobre a envoltura de calquera mosaico aperiódico e repetitivo de \mathbb{R}^n coincide coa relación de equivalencia afable \mathcal{R}_∞ sobre un conxunto de medida total.* \square

Proba. En efecto, $\mu(\{\mathcal{T} \in \Sigma \mid \mathcal{R}_\infty[\mathcal{T}] \neq \mathcal{R}[\mathcal{T}]\})$

$$= \mu(\{\mathcal{T} \in \Sigma \mid \exists \mathcal{T}' \in \mathcal{R}[\mathcal{T}] : \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{T}' \notin \mathcal{R}_n[\mathcal{T}]\})$$

$$\leq \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\mathcal{T} \in \Sigma \mid \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, N_{n-1}) \not\subseteq \mathcal{R}_n[\mathcal{T}]\})$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{\mathcal{T} \in \Sigma \mid \bar{B}_{d_S}(\mathcal{T}, N_{n-1}) \not\subseteq \mathcal{R}_n[\mathcal{T}]\}) = 0. \quad \square$$

Polos mesmos razoamentos, obtemos a correspondente versión do corolario 3.4.9:

Corolario 3.5.11. *A dinámica medible da envoltura dun mosaico aperiódico e repetitivo de \mathbb{R}^n está representada por un sistema dinámico de Bratteli-Vershik.* \square

Para rematar, observemos que no caso non minimal podemos concluír tamén, sen necesidade de supoñer que as prototeselas son cubos unitarios en \mathbb{R}^n . Coma na proba de Series, o primeiro resultado a considerar é o seguinte:

Lema 3.5.12 ([19]). *Se a función de volume v_x ten tipo de crecemento polinomial, existe unha sucesión $\{n_q(x)\}_{q \in \mathbb{N}}$ que satisfai:*

i) existe unha constante $K(x) > 0$ tal que

$$\frac{v_x(2n_q(x))}{v_x(n_q(x))} \leq K(x); \quad (5.6)$$

ii) para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_x(n_q(x) - k)}{v_x(n_q(x))} = 1.$$

Tense ademais:

Lema 3.5.13. *A constante $K(x)$ é independente do punto x elixido nunha folla.*

Proba. Se x e y son dous puntos dunha mesma folla e $d = d_S(x, y)$, entón

$$v_x(n) \leq v_y(n + d) \leq v_x(n + 2d).$$

Polo tanto se $n \geq d$, temos que $v_x(n) \leq v_y(2n) \leq v_x(3n)$ e desta maneira:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{v_y(2n)}{v_y(n)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{v_y(4n)}{v_y(2n)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{v_x(8n)}{v_x(n)} \leq K_1 K_2 K_3,$$

sendo K_1, K_2 e K_3 as contantes de (5.6) para as funcións $v_x(n), v_x(2n), v_x(4n)$. Logo podemos tomar $K = K_1 K_2 K_3$ para todos os puntos dunha mesma órbita. \square

Proposición 3.5.14. *Se (M, \mathcal{F}) é minimal, entón ou todas as follas teñen o mesmo tipo de crecemento de maneira uniforme, ou ben hai unha infinidade non numerable de follas con tipos distintos.*

Proba. Consideremos o conxunto

$$\mathcal{C}_0 = \{ (x, y) \in M \times M \mid \mathcal{L}_x \text{ e } \mathcal{L}_y \text{ teñen o mesmo tipo de crecemento} \}.$$

Posto que a condición anterior significa que $v_x \prec v_y$ e $v_y \prec v_x$, o conxunto

$$\mathcal{C} = \{ (x, y) \in M \times M \mid v_x \prec v_y \}$$

satisfai $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap \iota(\mathcal{C})$, onde ι é a inversión

$$(x, y) \in M \times M \mapsto (y, x) \in M \times M.$$

Este conxunto é un F_δ , pois trátase da unión dos conxuntos pechados

$$\mathcal{C}(\lambda, \rho, n) = \{ (x, y) \in M \times M \mid v_x(m) \leq \lambda v_y(\rho m), \text{ se } m \geq n \}$$

con $\lambda, \rho \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Hai así dous casos posibles:

1) Existen $\lambda, \rho \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$ tales que $\widehat{\mathcal{C}(\lambda, \rho, n)} \neq \emptyset$. En tal caso, para cada par de follas \mathcal{L} e \mathcal{L}' de \mathcal{F} , tense que:

$$(\mathcal{L} \times \mathcal{L}') \cap \widehat{\mathcal{C}(\lambda, \rho, n)} \neq \emptyset \neq (\mathcal{L}' \times \mathcal{L}) \cap \widehat{\mathcal{C}(\lambda, \rho, n)}.$$

Logo existen pares $(x, y) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}'$ e $(y', x') \in \mathcal{L}' \times \mathcal{L}$ que satisfán $v_x(m) \leq \lambda v_y(\rho m)$ e $v_{y'}(m) \leq \lambda v_{x'}(\rho m)$, se $m \geq n$. Polo tanto, \mathcal{L} e \mathcal{L}' teñen o mesmo tipo de crecemento e ademais de maneira uniforme, é dicir, as constantes λ, ρ e n son fixas.

2) Todos os pechados $\mathcal{C}(\lambda, \rho, n)$ teñen interior baleiro e polo tanto \mathcal{C} é un F_δ de interior baleiro. Deste xeito \mathcal{C}_0 é magro. Logo se consideramos a proxección

$$\beta : \mathcal{C}_0 \subset M \times M \longrightarrow M,$$

existe un conxunto residual $A \subset M$ tal que cada fibra

$$\beta^{-1}(x) = \{ (x, y) \in \mathcal{C}_0 \mid \mathcal{L}_y \text{ ten o mesmo tipo de crecemento que } \mathcal{L} = \mathcal{L}_x \}$$

con $x \in A$ é un conxunto magro (véxase o lema (8.42) de [20]). Neste caso, o saturado de A é non numerable e temos o resultado. \square

No caso da envoltura dun mosaico aperiódico de \mathbb{R}^n todas as follas son homeomorfas a \mathbb{R}^n , polo tanto todas teñen tipo de crecemento polinomial, logo estamos na primeira situación. Tendo en conta isto e máis o lema 3.5.13, dedúcese a existencia dunha constante K que satisfai (5.6) para cada mosaico $\mathcal{T} \in \Sigma$.

Neste caso, a función de volume $v : \Sigma \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é continua e podemos enunciarse deste xeito a seguinte versión global do lema de Jenkins:

Lema 3.5.15. *Existe unha sucesión de funcións $n_q : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ localmente constantes e unha constante $K > 0$, verificando:*

i) para cada $\mathcal{T} \in \Sigma$,

$$\frac{v_{\mathcal{T}}(2n_q(\mathcal{T}))}{v_{\mathcal{T}}(n_q(\mathcal{T}))} \leq K;$$

ii) para cada $\mathcal{T} \in \Sigma$ e cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{\mathcal{T}}(n_q(\mathcal{T}) - k)}{v_{\mathcal{T}}(n_q(\mathcal{T}))} = 1.$$

Temos pois o análogo do lema 3.5.3 sen necesidade de supoñer que as prototese-las son cubos, e podemos proceder de maneira similar para probar o teorema 3.5.10. A proba aplícase agora a calquera laminación teselable con crecemento polinomial e podemos enunciar o seguinte resultado:

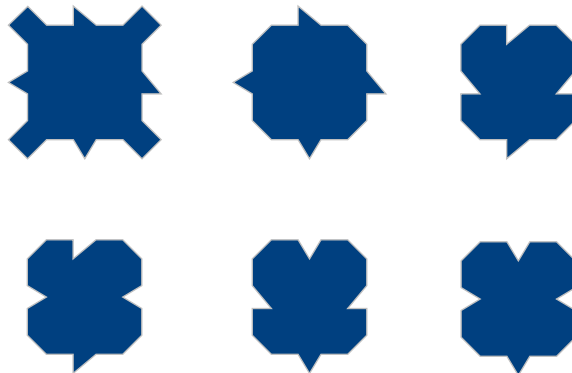
Teorema 3.5.16. *A dinámica transversa medible de calquera laminación teselable con crecemento polinomial está representada por un sistema dinámico de Bratteli-Vershik.*

4. Exemplos

Como acabamos de ver, a dinámica medible da envoltura dun mosaico aperiódico e repetitivo pode representarse por un sistema dinámico de Bratteli-Vershik. Mais o diagrama de Bratteli asociado, que mostra como se van incluíndo as teselas dunha etapa nas da etapa seguinte no proceso de inflación que o determina, pode ser en xeral moi complicado. Nalgúns exemplos relevantes, hai unha inflación inherente ao procedemento de construción dos mosaicos en cuestión que permite codificar de maneira directa a dinámica medible.

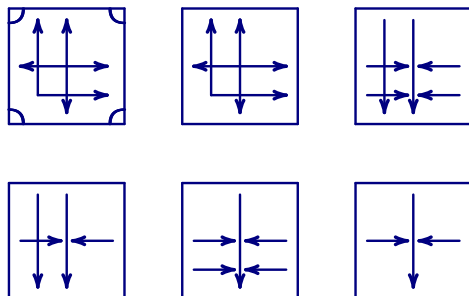
4.1 Os mosaicos de Robinson

Un conxunto de 6 teselas que forza a aperiodicidade foi descrito por R. M. Robinson en [32]. As dúas primeiras denomínanse *cruces*, respectivamente *con esquinas* e *sen esquinas*, e as restantes *brazos*.



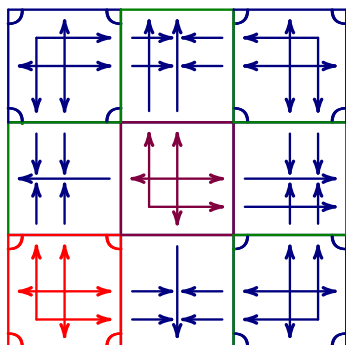
As seis teselas de Robinson

Para describir os *mosaicos de Robinson*, isto é, os que se constrúen a partir deste conxunto de teselas, hai outra representación máis cómoda por cadrados decorados ([12], [32]):



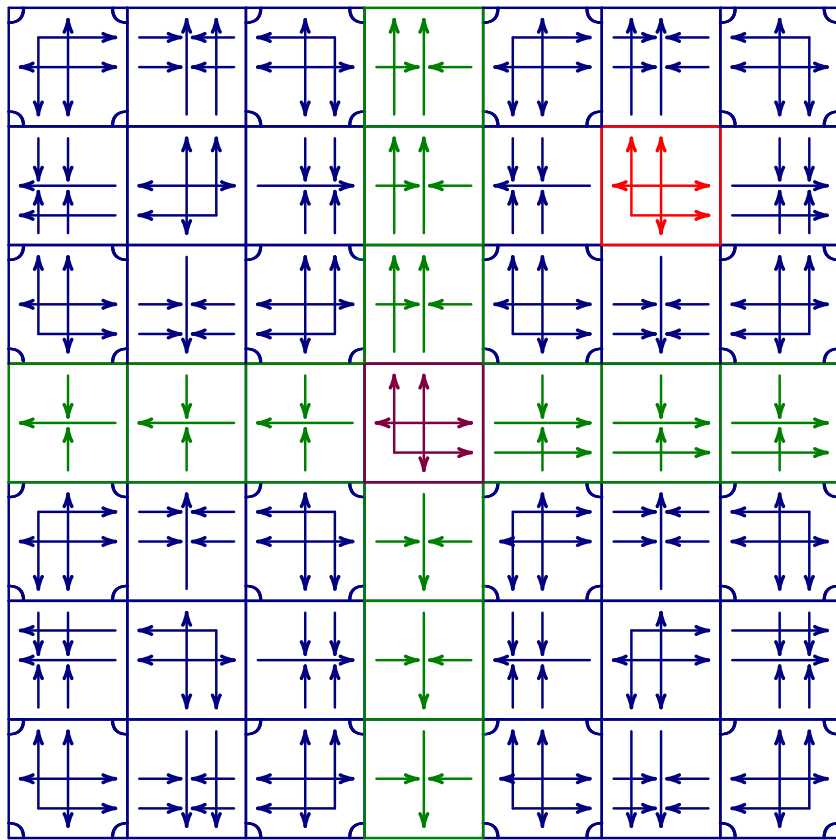
As teselas dos mosaicos de Robinson poden obterse a partir destas 6 prototeselas por translación, pero tamén mediante xiros de 90° , 180° e 270° ou por reflexión respecto do eixo de ordenadas. É dicir, estamos falando dun conxunto \mathcal{P} con 32 tipos de prototeselas por translación. Por outra banda, a maioría dos mosaicos de Robinson son repetitivos, pois poden construírse por medio do seguinte proceso (véxase [18]):

- Pártese dun cruce con esquinas, o que aparece na anterior figura ou algunha das súas imaxes polos xiros de 90° , 180° e 270° .
- Réplícase a peza inicial mediante xiros de 90° , 180° e 270° .
- Engádesse un motivo formado por 5 teselas en forma de cruz. Elíxese para isto a peza central, que debe ser un cruce sen esquinas, e as restantes, que son necesariamente brazos, quedan entón determinadas.



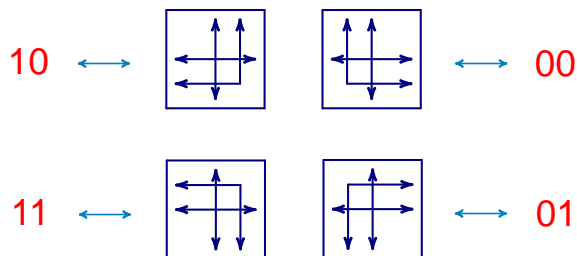
- Obtense así un bloque de 3×3 teselas. De xeito análogo, constrúense bloques de lado $2^{n+1} - 1$ a partir de bloques de lado $2^n - 1$.

A elección dos cruces sen esquinas determina a rexión do plano que se tesela: un cuadrante, un semiplano ou o plano completo. Nos dous primeiros casos tamén é posible teselar todo o plano “pegando” axeitadamente os cuadrantes e semiplanos obtidos cos seus replicados.

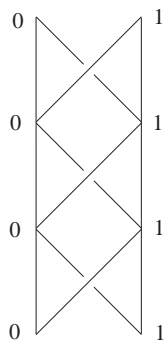


Mosaico de Robinson obtido a partir dun cuadrante replicando e pegando

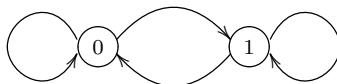
Os mosaicos de Robinson repetitivos construídos “sen pegar” quedan totalmente determinados polas sucesivas eleccións dos cruces sen esquinas. Podemos codificalos entón identificando cada cruce sen esquinas cunha parella de elementos do conxunto $\{0, 1\}$.



Se substituímos nunha sucesión os primeiros termos, estamos trasladando a orixe dunha tesela a outra no mosaico. Por outra banda, estes mosaicos forman un conxunto residual de medida total. Polo tanto, a dinámica medible do espazo foliado dos mosaicos de Robinson repetitivos está representada pola relación cofinal sobre o espazo $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ das sucesión binarias, ou o que é o mesmo, sobre o espazo dos camiños infinitos do seguinte diagrama de Bratteli.



De maneira equivalente, a dinámica medible está representada por unha máquina de sumar binaria [18], pois todas as clases de cofinalidade (excepto as das sucesións $000\dots$ e $111\dots$) coinciden coas órbitas da aplicación suma de 1.



Autómata que representa á máquina de sumar binaria

4.2 Os mosaicos de Penrose por dardos e papaventos

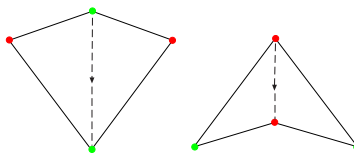
Sen dúbida algunha, o máis célebre conxunto aperiódico de prototeselas é o composto polo dardo e o papaventos de R. Penrose [26].



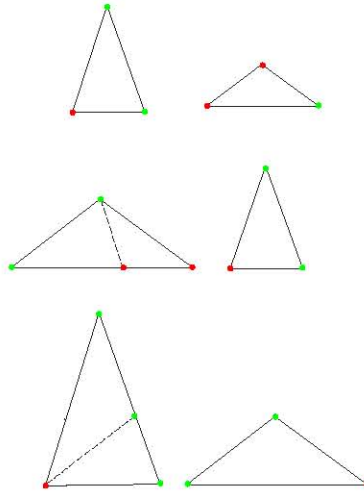
As teselas dardo e papaventos de Penrose

Aínda que a literatura sobre os mosaicos de Penrose é abundante, é precisamante unha idea de R. M. Robinson a que permite construír estes mosaicos de maneira explícita e describir a súa dinámica global [12].

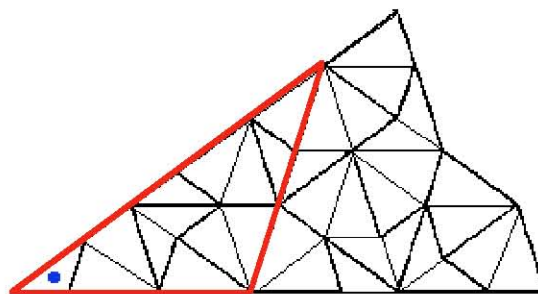
Todo mosaico de Penrose por dardos e papaventos correspóndese cun mosaico construído a partir de dúas teselas triangulares (obtidas cortando o dardo e o papavento polos seus eixos de simetría) con certas regras de pegado.



Pegando os dous triángulos como se mostra na seguinte figura, obtense un triángulo semellante ao pequeno. Cada mosaico correspóndese así cun mosaico inflado que se constrúe a partir do novo triángulo e do grande (obtido eliminando no mosaico as aristas correspondentes a este pegado). Facendo agora que a nova tesela xogue o papel do triángulo grande, podemos repetir o proceso para obter un novo par de triángulos que definen un novo mosaico inflado, obtido eliminando as aristas correspondentes no mosaico inflado anterior.



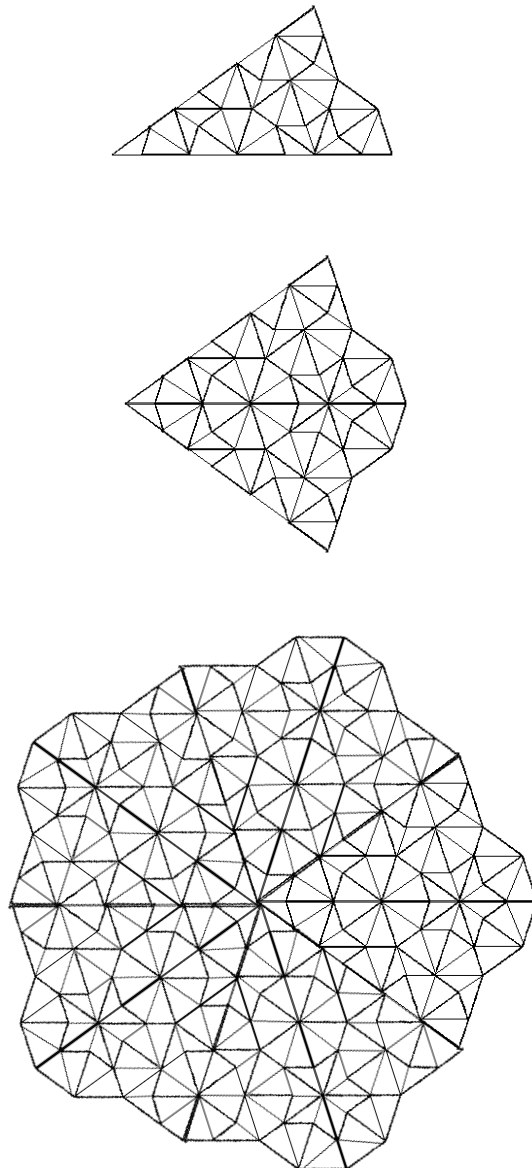
Iterando este proceso, describimos un procedemento natural de inflación no que se obtén para cada mosaico \mathcal{T} unha sucesión $\{\mathcal{T}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de mosaicos inflados por triángulos grandes e pequenos. Podemos asociar a cada mosaico unha sucesión binaria $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n = 0$ se o triángulo que contén á orixe no mosaico \mathcal{T}_n é o triángulo grande ou $x_n = 1$ se é o pequeno. É dicir, o termo n -ésimo da sucesión indica como está incluída a tesela de \mathcal{T}_n que contén á orixe na tesela de \mathcal{T}_{n+1} na que está contida. Como neste proceso recorrente un triángulo pequeno sempre forma parte dun triángulo grande na etapa seguinte, estas sucesións non pode conter dous termos consecutivos iguais a 1.



10001

Primeiros pasos da codificación nun exemplo

Pode ser que algunha destas sucesións non determine un mosaico de todo o plano, senón simplemente dun sector, pero podemos obter un mosaico do plano reflexando e replicando por medio de xiros.



Coma no caso dos mosaicos de Robinson, os mosaicos construídos replicando forman un conxunto magro de medida nula. Polo tanto, a dinámica medible do espazo foliado dos mosaicos de Penrose por dardos e papaventos está representada

pola relación cofinal sobre o espazo de sucesións binarias $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfán $x_n = 1 \Rightarrow x_{n+1} = 0$.

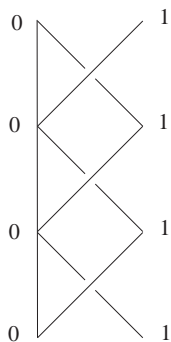
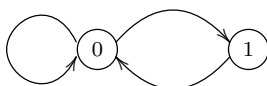


Diagrama de Bratteli asociado

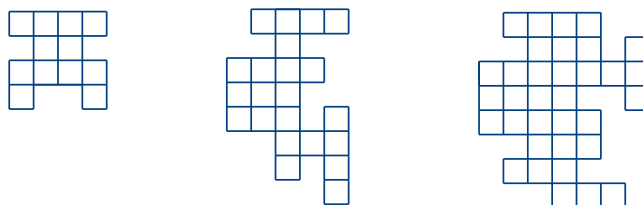
Equivalentemente, a dinámica medible da envoltura de calquera mosaico de Penrose está representada polo seguinte autómatas:



Autómata de Fibonacci

4.3 Os mosaicos de Penrose por poliominós

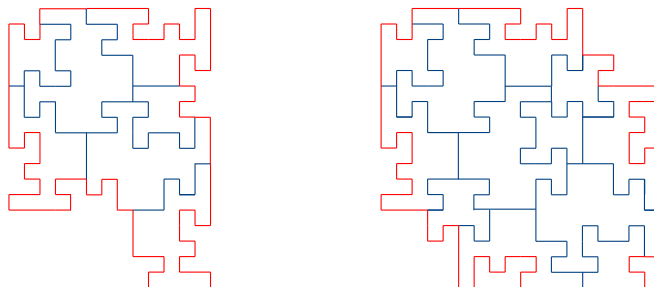
En [27], R. Penrose describe un conxunto de tres poliominós (pezas compostas por cadrados unidade pegados lado a lado) ideados a partir dun conxunto aperiódico de teselas descrito por R. Ammann (véxase [12], páxina 555), e que constitúen de igual maneira un conxunto aperiódico. O seu propósito é mostrar que “*existen modelos de universo completamente deterministas, con regras precisas de evolución, que son imposibles de simular computacionalmente*”.



Os tres poliomínos de Penrose, nomeadamente A , B e C

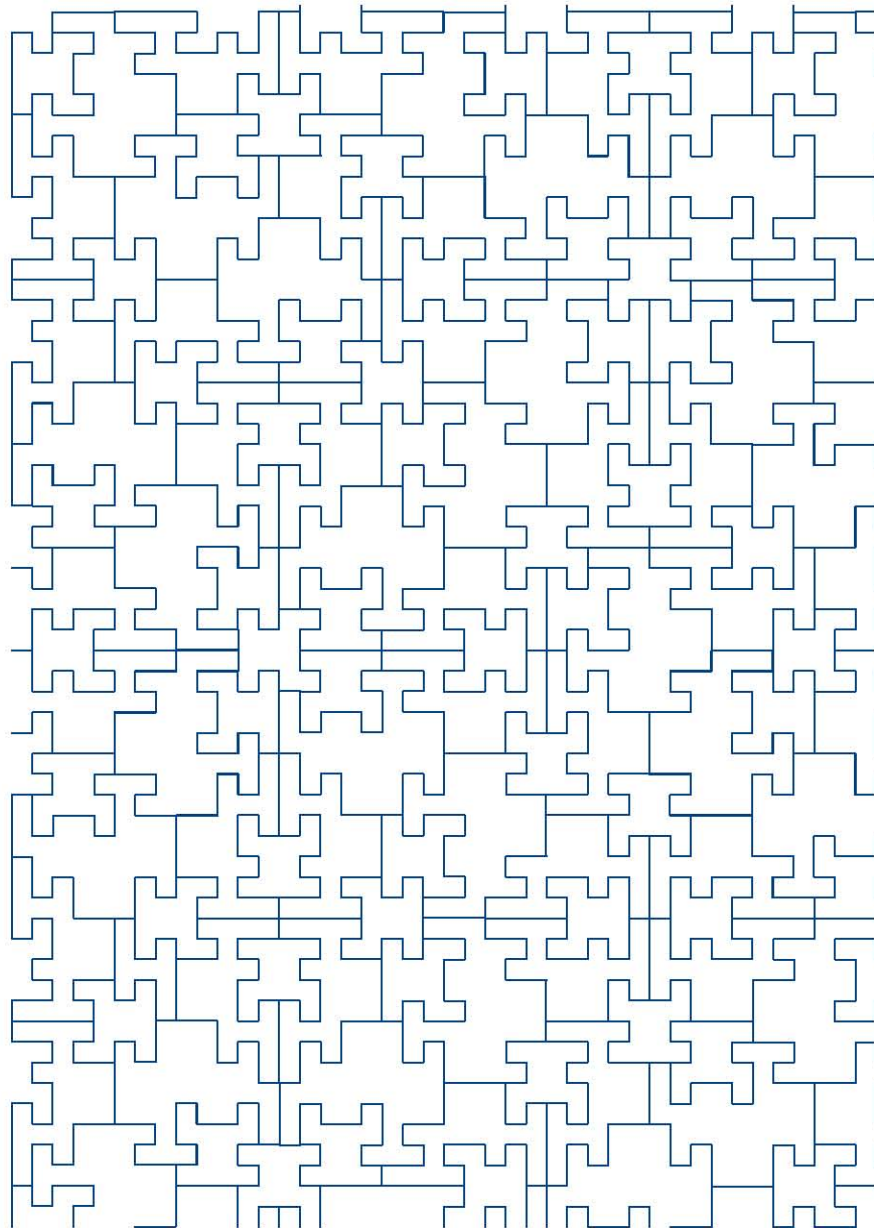
Se falamos de tipos de translación, o conxunto aperiódico está composto por 22 prototeselas: as da figura, máis as súas imaxes por unha reflexión e as imaxes polos xiros de 90° , 180° e 270° de todas elas. Por outra banda, as teselas de tipo A actúan unicamente a modo de “*grampa*”, é dicir, calquera mosaico construído con estas teselas queda determinado pola disposición das teselas de tipo B e C . Podemos dicir en certo modo que o conxunto de teselas se reduce ás de tipo B e C .

A forma de combinar os poliomínos de tipo B e C para teselar o plano dá lugar a un conxunto de teselas infladas, que forman xunto coas de tipo A un conxunto de prototeselas equivalente ao de partida.



Poliomínos inflados de tipo B e C

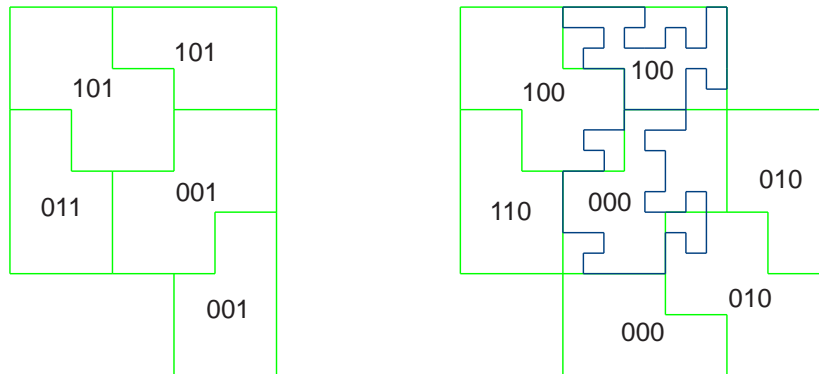
Os poliomínos inflados de tipo B e C combínanse de xeito recorrente, obténdose novas teselas infladas de tipo B e C que conteñen ás anteriores e que constitúen novamente coas de tipo A un conxunto de prototeselas equivalente.



Mosaico de Penrose por poliominós

Iterando este proceso, podemos codificar cada mosaico de Penrose por poliominós da seguinte maneira:

- En primeiro lugar, asociámoslle un 0 se a tesela que contén á orixe é de tipo C , e un 1 se é de tipo B .
- Indicamos como está incluída esta tesela na tesela inflada que a contén, segundo o seguinte esquema:



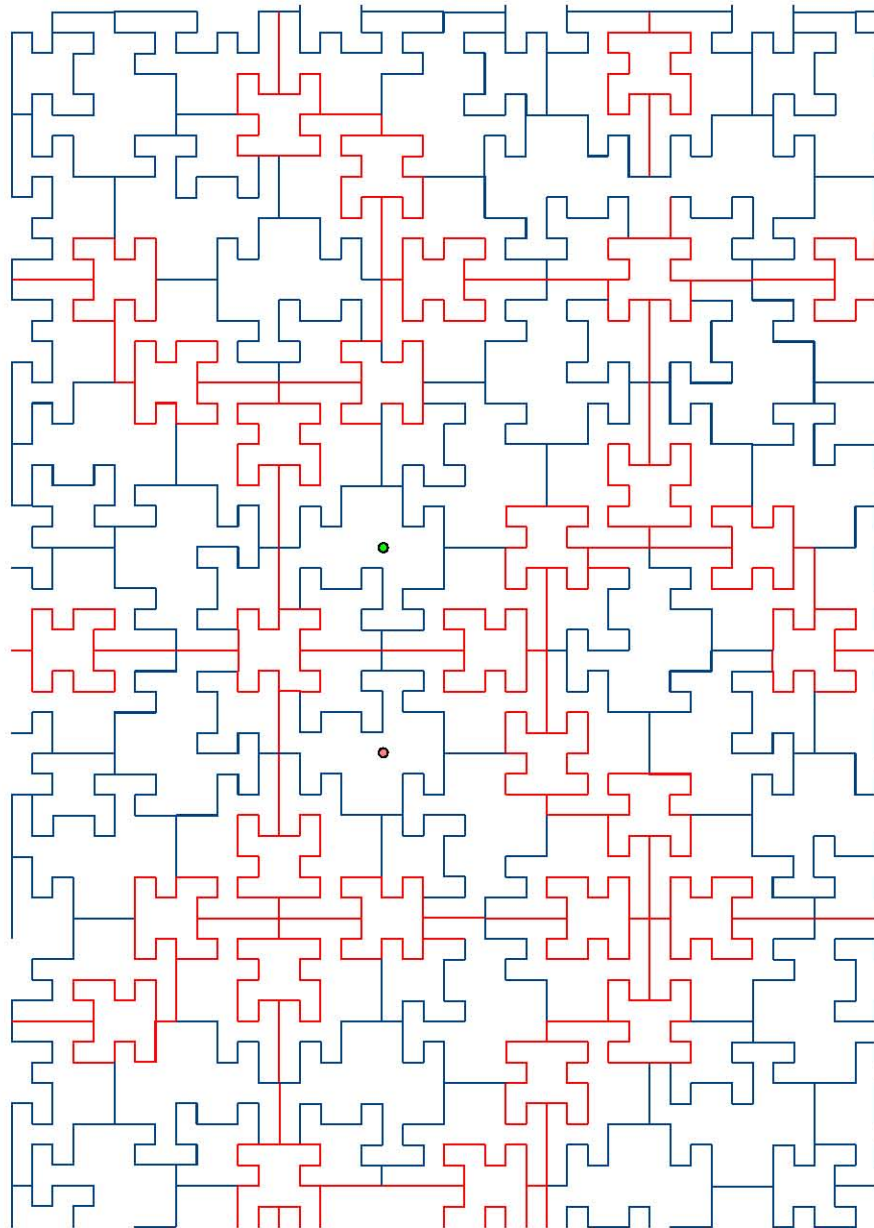
Obsérvese que no caso do esquema de tipo C , non hai ambigüidade posible se tomamos como referencia a orientación da peza central, pois nin os poliominós inflados nin os de partida presentan simetrías. Por outra banda, a terceira das tres entradas de cada un destes códigos indica se a seguinte tesela é de tipo B ou C .

- Dado que o proceso é recorrente, o mesmo esquema permite indicar como se inclúe a n -ésima tesela inflada na $(n + 1)$ -ésima tesela inflada que a contén.

Coma no caso dos exemplos anteriores, se modificamos un número finito de termos da sucesión, estamos movendo o punto base no mosaico. A dinámica medible está así representada pola relación cofinal no espazo das sucesión binarias coas seguintes restricións:

$$x_{3n} = 1 \Rightarrow x_{3n+1}x_{3n+2}x_{3n+3} \neq 111$$

$$x_{3n} = 0 \Rightarrow x_{3n+1}x_{3n+2}x_{3n+3} \neq \begin{cases} 111 \\ 011 \\ 110 \end{cases}$$



Primeiros termos para os mosaicos con orixe nos puntos verde e rosa: 0001000, 0101000

Neste caso, a diferenza dos exemplos anteriores, non obtemos directamente ningún sistema de Bratteli-Vershik que represente a dinámica medible da envoltura de calquera destes mosaicos. Agora ben, sabemos que esta dinámica coincide coa descrita pola relación cofinal nun conxunto (homeomorfo ao conxunto de Cantor) de sucesións binarias. Aplicando o teorema 3.2.1 de [11] e [30], podemos finalmente representar a dinámica mediante o espazo de camiños infinitos dun diagrama de Bratteli máis complicado que os dos casos anteriores.

Bibliografía

- [1] F. Alcalde Cuesta, A. Lozano Rojo et M. Macho Stadler, Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon. Por aparecer en *Bull. Braz. Math. Soc.*
- [2] J. Bellissard, R. Benedetti and J.M. Gambaudo, Spaces of Tilings, Finite Telescopic Approximations and Gap-Labeling, *Comm. Math. Phys.*, **261** (2006), 1-41.
- [3] E. Blanc, *Propriétés génériques des Laminations*. Thèse UCB-Lyon 1, 2001.
- [4] A. Connes, J. Feldman and B. Weiss, An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **1** (1981), 431-450.
- [5] R. Dougherty, S. Jackson and A. S. Kechris, The structure of hyperfinite Borel equivalence relations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **341** (1994), 193-225.
- [6] D. B. A. Epstein, K. C. Millett and D. Tischler, Leaves without holonomy, *J. London Math. Soc.* **16** (1977), 548-552.
- [7] J. Feldman and C. C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **234** (1977), 289-324.
- [8] D. Gaboriau, Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math.*, **139** (2000), 41-89.
- [9] E. Ghys, Laminations par surfaces de Riemann. *Panor. Syntheses*, **8** (1999), 49-95.
- [10] T. Giordano, I. Putnam and C. Skau, Topological orbit equivalence and C^* -crossed products. *J. reine angew. Math.* **469** (1995), 51-111.

-
- [11] T. Giordano, I. Putnam and C. Skau, Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor minimal systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **24** (2004), 441-475.
- [12] B. Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman & Co., New York, 1987.
- [13] A. Haefliger, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, in *Transversal structure of foliations (Toulouse, 1982)*. *Astérisque*, **116** (1984), 70-97.
- [14] A. Haefliger, Pseudogroups of local isometries, in *Differential Geometry (Santiago de Compostela, 1984)*, Research Notes in Math. 131, Pitman, Boston, 1985, 174-197.
- [15] A. Haefliger, Foliations and compactly generated pseudogroups, in *Foliations: geometry and dynamics (Warsaw, 2000)*, World Sci. Publishing, River Edge, 2002, 275-295.
- [16] G. Hector, Feuilletages en cylindres, Springer Lecture Notes in Math., **597** (1977), 252-270.
- [17] S. E. Goodman and J. F. Plante, Holonomy and averaging in foliated sets. *J. Differential Geom.*, **14** (1979), 401-407.
- [18] P. González Sequeiros, *A dinámica dos mosaicos de Robinson*. Publicacións do Departamento de Xeometría e Topoloxía da USC, **107** (2006).
- [19] J. Jenkins, Growth of connected locally compact groups. *J. Functional Anal.*, **12** (1973), 113-127.
- [20] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Math. **156**, Springer-Verlag, 1995.
- [21] J. C. Lagarias and P. A. B. Pleasants, Repetitive Delone sets and quasicrystals. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23** (2003), 831-867.
- [22] A. Lozano Rojo, *The dynamics of the Ghys-Kenyon lamination*, in *Foliations 2005*, Lodz, 2005.
- [23] A. Lozano Rojo, The Cayley foliated space of a graphed pseudogroup. *Publ. de la RSME*, **10** (2006), 267-272.
- [24] A. Lozano Rojo, *Dinámica topológica, teoría ergódica y geometría no conmutativa de grafos repetitivos*. Tesis UPV-EHU.

-
- [25] P. S. Muhly, J. N. Renault, D. P. Williams, Equivalence and isomorphism for groupoid C^* -algebras. *J. Operator Theory*, **17** (1987), 3-22.
- [26] R. Penrose, Pentaplexity. *Math. Intelligencer*, **2** (1979), 32-37.
- [27] R. Penrose, *Las sombras de la mente*. Editorial Crítica, Barcelona, 1996.
- [28] S. Petite, *Pavages du demi-plan hyperbolique et laminations*. Thèse Université de Bourgogne, 2005.
- [29] J. Renault, *A Groupoid Approach to C^* -Algebras*, Springer Lecture Notes in Math. 793, 1980.
- [30] J. Renault, AF-equivalence relations and their cocycles, en *Operator algebras and mathematical physics (Constanța, 2001)*. Theta, Bucharest, 2003, 365-377.
- [31] C. Radin and M. Wolff, Space tilings and local isomorphism. *Geom. Dedicata*, **42** (1992), 355-360.
- [32] R. M. Robinson, Undecidability and Nonperiodicity of Tilings of the Plane. *Inventiones Math.*, **12** (1971), 177-209.
- [33] C. Series, Foliations of polynomial growth are hyperfinite. *Israel Journal Math.*, **34** 3 (1979), 245-258.
- [34] B. Solomyak, Dynamics of self-similar tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **17** (1997), 695-738.