MATERIA
Análise Económica dos Mercados Financeiros II

TITULACIÓN
Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros

unidade didáctica
4

Ciencias Sociais e Xurídicas

Valoración de opcións

Juan Carlos Reboredo Nogueira

Departamento: Fundamentos da Análise Económica
Facultade ou Escola: Facultade de CC Económicas e Empresariais

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

DESCATALOGADO

© Universidade de Santiago de Compostela, 2013

Esta obra atópase baixo unha licenza Creative Commons BY-NC-SA 3.0.
Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-SA 3.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón:
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/legalcode.gl

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

ISBN
978-84-15876-39-7

MATERIA: Análise Económica dos mercados financeiros II
TITULACIÓN: Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

ÍNDICE

INTRODUCIÓN

Esta unidade didáctica forma parte do curso de Análise Económica dos Mercados Financeiros II que se imparte no primeiro cuadrimestre do Máster en Economía: Organización Industrial e Mercados Financeiros.

O propósito da unidade é introducir diferentes formas ou modelos de valoración de contratos de opcións. Utilizando os suposto de non arbitraxe e a replicación, analízase a valoración binomial, a valoración de Black-Scholes e a valoración por simulación, modelos que utilizan diferentes perspectivas ou supostos pero que conducen a resultados semellantes. Así mesmo, estúdanse as propiedades dos prezos das opcións e a súa sensibilidade aos factores determinantes dos mesmos.

A comprensión desta unidade require da comprensión dos fundamentos de valoración de activos, da idea de non arbitraxe e replicación para a valoración de activos. A maior dificultade desta unidade está no manexo de conceptos de estatística e de cálculo estocástico. Para evitar que as dificultades técnicas dificulten a comprensión da valoración deste tipo de activos financeiros, ao longo da unidade utilízanse varios exemplos numéricos que tratan de ilustrar a aplicación práctica dos diferentes procedementos de valoración.

PALABRAS CLAVE

Opcións, call, put, Non arbitraxe, modelo binomial, Black-Scholes, simulación, letras gregas.

METODOLOXÍA

- A impartición do curso sempre adoptará como punto de partida as intuicións financeiras, que se tomarán como base, e a enmarcación destas intuicións no contexto do problema de valoración.
- Utilizarase preferentemente a linguaxe gráfica, máis intuitivo e máis fácil de asimilar polo estudante, pasando posteriormente á formulación dos problemas considerados en termos formais.
- Ilustraranse todos os conceptos con exemplos prácticos que estean próximos a realidade financeira do alumno coa finalidade de que o alumno aprenda a aplicar os instrumentos de valoración a activos financeiros con características semellantes.
- Propoñerase unha serie de exercicios prácticos que ilustren a aplicabilidade e utilidade dos coñecementos adquiridos.
- Fomentarase a participación do alumno, tanto no desenvolvemento dos contidos teóricos como na resolución dos casos prácticos.

AS OPCIÓNS

As opcións son contratos, de compra ou de venda, sobre un activo que dan o dereito a comprar ou vender ese activo a un prezo e data estipulados no contrato. Así, as opcións poden ser:

- opción de compra (*call option*): contrato que proporciona ao seu posuidor (o comprador) o dereito (non a obrigación) a comprar un número de accións (ou outro tipo de activo/ben) a un prezo establecido (prezo de exercicio) e nunha data determinada no contrato (data de vencemento) ou até unha data especificada no contrato.
- opción de venda (*put option*): contrato que proporciona ao seu posuidor (o comprador) o dereito (non a obrigación) a vender un número de accións (ou outro tipo de activo/ben), a un prezo establecido (prezo de exercicio) e nunha data determinada no contrato (data de vencemento) ou até unha data especificada no contrato.

Se a opción pode exercerse só na data de vencemento, denomínase europea, se pode exercerse en calquera momento do tempo até a data de vencemento, chámase americana.

Posicións nun contrato de opción (S denota o prezo do subxacente e K o prezo de exercicio):

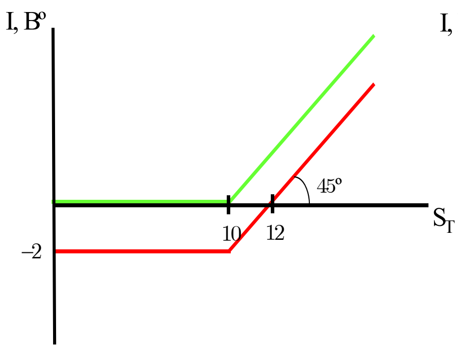
- Call europea:

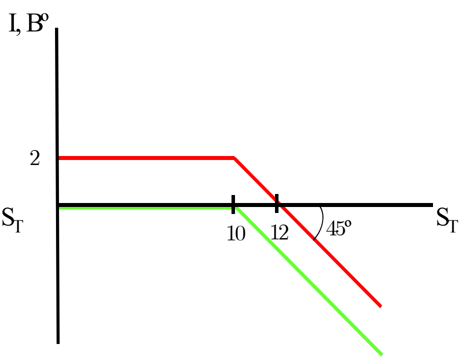
• Posición larga (compra): $\begin{cases} S_T - K & \text{si} \quad S_T > K \\ 0 & \text{si} \quad S_T \leq K \end{cases} \Rightarrow \text{Max}\,(S_T - K,\, 0)$

• Posición corta (venta): $\begin{cases} -(S_T - K) & \text{si} \quad S_T > K \\ 0 & \text{si} \quad S_T \leq K \end{cases} \Rightarrow -\text{Max}\,(S_T - K,\, 0)$

$\Rightarrow \min\,(K - S_T,\, 0)$

Por exemplo, para unha call con K=10, prezo da opción = 2, e vencemento de 1 mes, as posicións compradora e vendedora, respectivamente, podémolas representar do seguinte xeito:



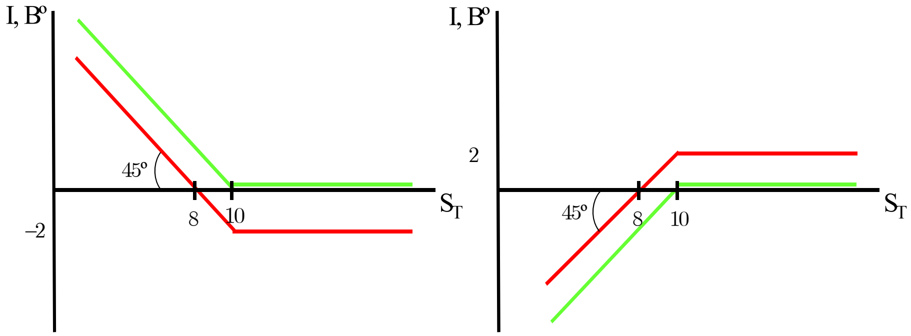


- Put europea:

• Posición larga (compra): $\begin{cases} K - S_T & \text{si } S_T < K \\ 0 & \text{si } S_T \geq K \end{cases} \Rightarrow \text{Max}\,(K - S_T, 0)$

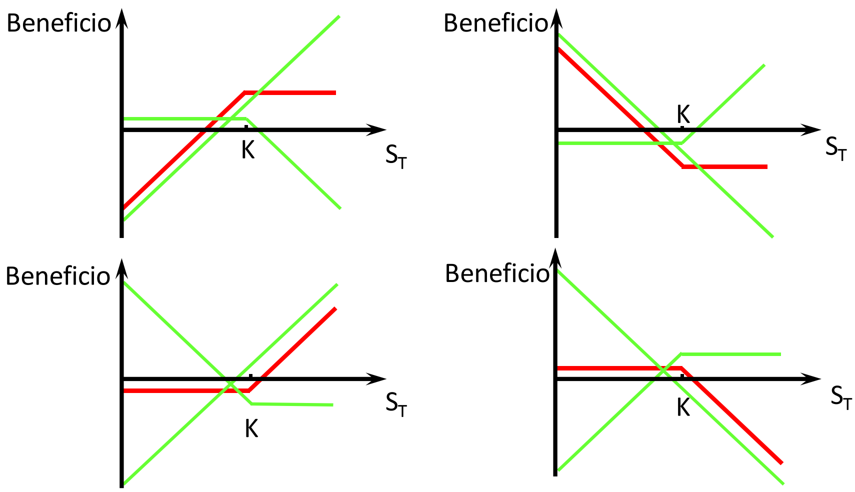
• Posición corta (venta): $\begin{cases} -(K - S_T) & \text{si } S_T < K \\ 0 & \text{si } S_T \geq K \end{cases} \Rightarrow -\text{Max}\,(K - S_T, 0)$
$\Rightarrow \min\,(S_T - K, 0)$

Por exemplo, para unha put con K=10, prezo da opción = 2, e vencemento de 1 mes, as posicións compradora e vendedora, respectivamente, podémolas representar do seguinte xeito:



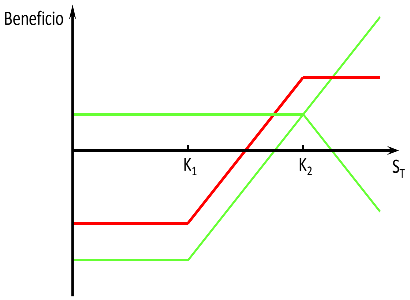
Combinando opcións, podemos elaborar unha serie de estratexias especulativas ou de cobertura que dan lugar a unha estrutura de pagos diferente á das opcións combinadas. A modo ilustrativo, podemos considerar as seguintes:

A. Tomar unha posición na opción e o subxacente.

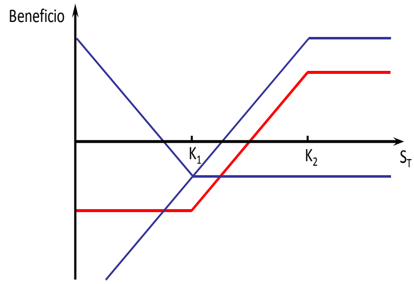


B. Tomar unha posición en dúas ou máis opcións do mesmo tipo (un diferencial de prezos ou *spread*):

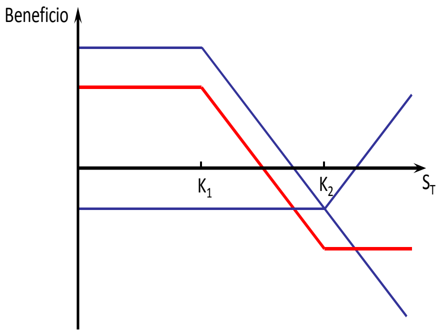
Diferencial alcista (Bull spread) con opcións de compra



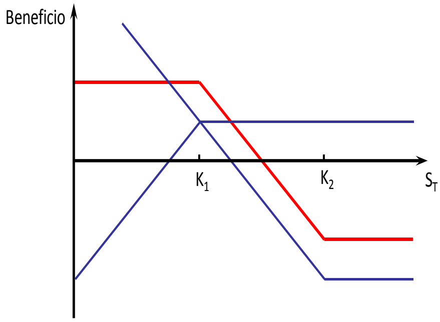
Diferencial alcista (Bull spread) con opcións de venta



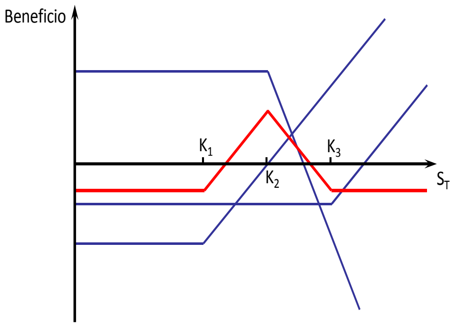
Diferencial baixista (Bear spread) con opcións de compra



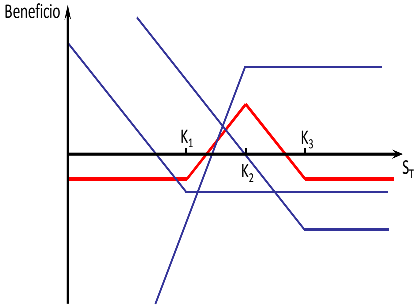
Diferencial baixista (Bear spread) con opcións de venta



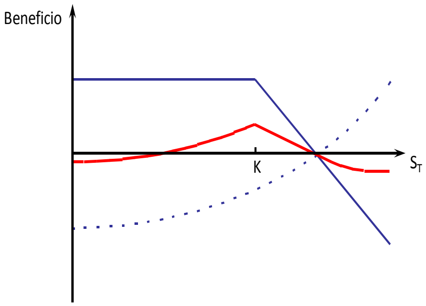
Diferencial bolboreta (Butterfly spread) con opcións de compra



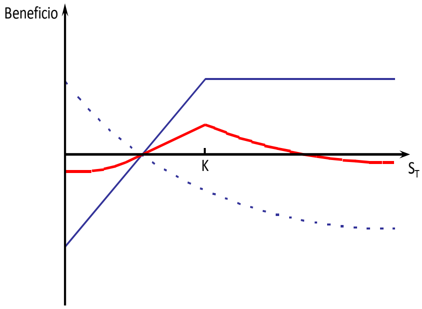
Diferencial bolboreta (Butterfly spread) con opcións de venta



Diferencial temporal (Calendar spread) con opcións de compra

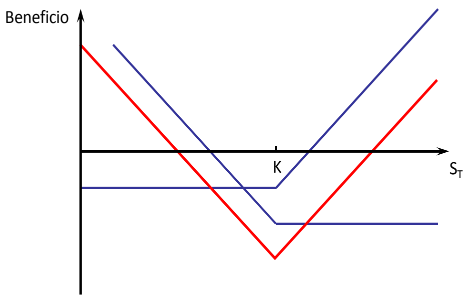


Diferencial temporal (Calendar spread) con opcións de venta

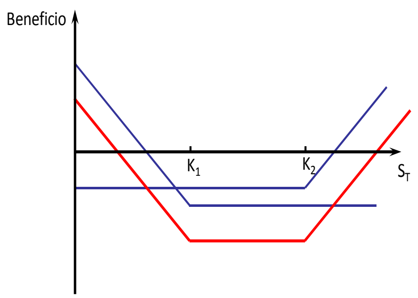


C. Tomar unha posición nunha mestura de opcións de compra e opcións de venda:

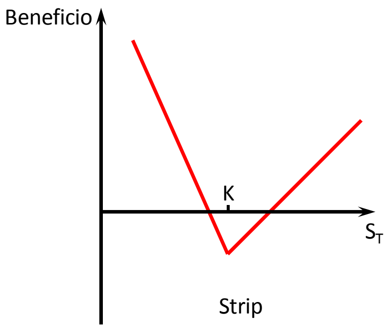
Combinación de cono



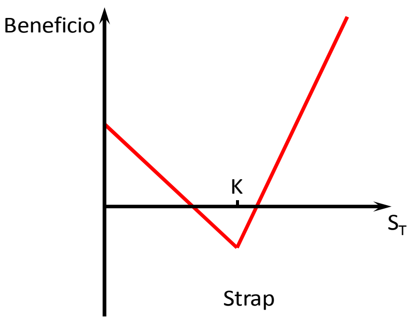
Combinación de berce (strangle)



Bando (strip)



Correa (strap)



Factores que determinan o prezo dunha opción:

- Prezo da acción, S: se $S\uparrow \Rightarrow C\uparrow\ P\downarrow$
- Prezo de exercicio, K: se $K\uparrow \Rightarrow C\downarrow\ P\uparrow$
- Volatilidade: $\sigma^2\uparrow \Rightarrow C\uparrow\ P\uparrow$
- Tipo de interese: $i\uparrow \Rightarrow C\uparrow\ P\downarrow$
- Dividendos: $D\uparrow \Rightarrow C\downarrow\ P\uparrow$
- Tempo ata a data de exercicio.

$$t\uparrow \Rightarrow \begin{cases} \sigma^2\uparrow \\ \text{VAN de } K\downarrow \quad C\uparrow\ P\downarrow \\ D\uparrow \end{cases}$$

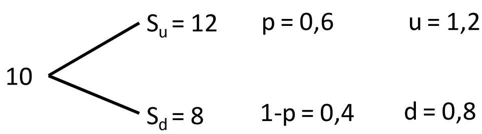
Para as opcións americanas: $t\uparrow \Rightarrow C\uparrow\ P\uparrow$

MODELO BINOMIAL

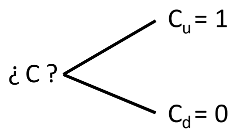
O modelo binomial asume que o prezo do activo subxacente segue un comportamento binomial, de modo que o valor do activo pode subir ou baixar nunha determinada proporción. Consideraremos a valoración dunha opción e varios períodos.

1. Valoración para un período

Para ilustrar o funcionamento do método binomial no caso no que temos un único período de tempo, consideramos a valoración dunha call (europea) onde o prezo do subxacente ten un comportamento binomial, tal que:



Dado este subxacente, se o tipo de xuro sen risco é i = 5% e consideramos unha call con k = 11:



Cal sería o valor da opción cal? Para dar unha resposta a esta pregunta podemos utilizar a replicación dos fluxos da opción: tomamos Δ = nº accións, b = nº bonos.

$$\left.\begin{aligned} 12\cdot\Delta+1{,}05\cdot b&=1\\ 8\cdot\Delta+1{,}05\cdot b&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta=0{,}25 \qquad b=-1{,}90$$

Para esta carteira:

NON arbitraxe

$$12\cdot 0{,}25-1{,}9\cdot 1{,}05=1$$

$$10\cdot 0{,}25-1{,}9=0{,}6 \qquad \Rightarrow \boxed{C=0{,}6}$$

$$8\cdot 0{,}25-1{,}9\cdot 1{,}05=0$$

En caso contrario, existirían posibilidades de arbitraxe.
Aplicando este procedemento de forma xeral, teremos que:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\, u\, S+b(1+i)&=C_u\\ \Delta\, d\, S+b(1+i)&=C_d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta=\frac{C_u-C_d}{(u-d)S} \qquad b=\frac{uC_u-dC_d}{(u-d)(1+i)}$$

$$C=\Delta S+b=\frac{1}{(1+i)}\left[\frac{(1+i)-d}{(u-d)}C_u+\frac{u-(1+i)}{(u-d)}C_d\right]$$

Se denotamos por:

$$\pi_u=\frac{(1+i)-d}{(u-d)}\,,\quad 1-\pi_u=\pi_d=\frac{u-(1+i)}{(u-d)}\,,$$

teremos que:

$$C=\frac{1}{(1+i)}\left[\pi_u C_u+\pi_d C_d\right]=\frac{1}{(1+i)}E^*(C)$$

Esta valoración é unha valoración neutral ao risco posto que:

$$\begin{cases} \pi_u+\pi_d=1\\ 0<\pi_u\le 1 \ \text{ dado que } \ d<(1+i)<u \end{cases}$$

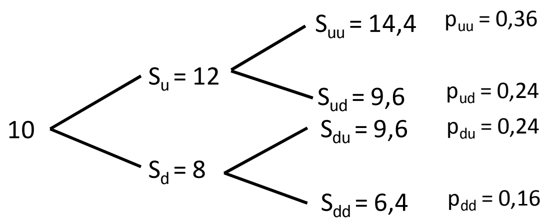
$$\begin{cases} \phi_u=\dfrac{1}{(1+i)}\pi_u \qquad \phi_d=\dfrac{1}{(1+i)}\pi_d \end{cases}$$

Os factores que interveñen no prezo da opción son: prezo actual da acción, S_0, $\partial C/\partial S_0>0$, prezo de exercicio, $\partial C/\partial K<0$, volatilidade da acción, $\sigma_S^2=(u\text{-}d)^2p(1\text{-}p)$, $\partial C/\partial\sigma^2>0$, tipo de xuro, $\partial C/\partial(1+i)>0$, dividendos (cero no exemplo) e tempo ata o exercicio (un período). Nesta valoración NON inflúen outras variables como: preferencias investidores, beta do subxacente, rendibilidade esperada subxacente, probabilidades, etc.
A valoración anterior tamén a podemos derivar de forma semellante utilizando a capitalización continua en lugar da composta.

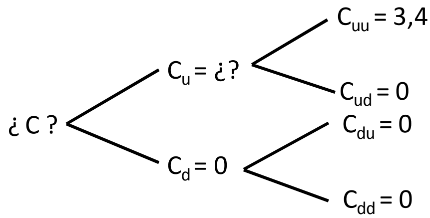
2. Valoración para varios períodos

Consideremos agora do períodos de tempo, ou dous movementos no prezo da acción, para mesma opción:

Activo:



Opción:



Temos que determinar o valor de C_u:

$$\left.\begin{array}{r} 14,4\cdot\Delta+1,05\cdot b=3,4 \\ 9,6\cdot\Delta+1,05\cdot b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta=0,71 \quad b=-6,48$$

NON arbitraxe $\Rightarrow C_u = 12\cdot 0,71-6,48=2,04$

De xeito semellante, teremos que: $C=10\cdot 0,51-3,89=1,21$.

En xeral, o valor da opción para 2 períodos será:

$$C=\frac{1}{(1+i)}\left[\pi_u\left\{\frac{1}{(1+i)}\left[\pi_u C_{uu}+\pi_d C_{ud}\right]\right\}+\pi_d\left\{\frac{1}{(1+i)}\left[\pi_u C_{du}+\pi_d C_{dd}\right]\right\}\right]$$

$$C=\frac{1}{(1+i)^2}\left[\pi_u^2 C_{uu}+2\pi_u(1-\pi_u)C_{ud}+(1-\pi_u)^2 C_{dd}\right]$$

Teremos que o valor da opción aumenta co tempo. A expresión anterior podemos reescribila do seguinte modo: dado c_j como o número de movementos ascendentes, teremos que:

$$\left.\begin{array}{l} j=0,\quad c_j=c_{dd} \\ j=1,\quad c_j=c_{du} \\ j=2,\quad c_j=c_{uu} \end{array}\right\}$$

Co cal podemos expresar o valor da opción como:

$$C=\frac{1}{(1+i)^2}\sum_{j=0}^{2}\frac{2!}{j!(2-j)!}(\pi_u)^j(1-\pi_u)^{2-j}C_j$$

Agora, se xeneralizamos esta expresión para T períodos, teremos que valor da opción será:

$$C = \frac{1}{(1+i)^T} \sum_{j=0}^{T} \frac{T!}{j!(T-j)!} (\pi_u)^j (1-\pi_u)^{T-j} C_j$$

Ademais, como $S_T = S_0 u^j d^{T-j}$, teremos que: $C_j = \max\left\{S_0 u^j d^{T-j} - K,\ 0\right\}$. O número, h, que fai que a opción tome un valor non nulo:

$$S_0 u^h d^{T-h} > K \Rightarrow h > \mathrm{Ln}\left(\frac{K}{S_0 d^T}\right) \Big/ \mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right)$$

Así, podemos reescribir o valor da opción como:

$$C = \frac{1}{(1+i)^T} \sum_{j=h}^{T} \frac{T!}{j!(T-j)!} (\pi_u)^j (1-\pi_u)^{T-j} \left[S_0 u^j d^{T-j} - K\right]$$

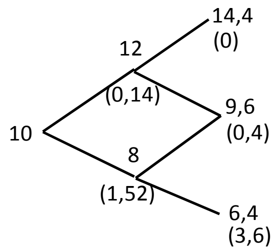
Dada a distribución binommial: $B(h;T,\pi_u) = \sum_{j=h}^{T} \frac{T!}{j!(T-j)!} (\pi_u)^j (1-\pi_u)^{T-j}$, o valor da opción (call) podémolo expresar como:

$$C = S_0 B(h;T,\pi') - K(1+i)^{-T} B(h;T,\pi_u)$$

Onde: $\pi' = \left(\frac{u}{1+i}\right)\pi_u$ e h é o número natural máis pequeno maior que $\mathrm{Ln}\left(\frac{K}{S_0 d^T}\right) \Big/ \mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right)$.

De forma semellante podemos valorar:

- unha put europea: activo/opción: k=10

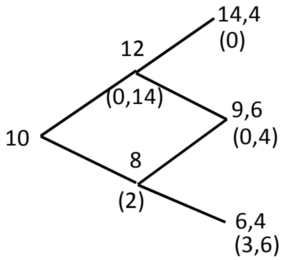


$$\pi_u = \frac{(1+i)-d}{u-d} = 0{,}625$$

$$\left.\begin{aligned} P_u &= (1.05)^{-1}\left[0{,}625\cdot 0 + 0{,}375\cdot 0{,}4\right] = 0{,}14 \\ P_d &= (1.05)^{-1}\left[0{,}625\cdot 0{,}4 + 0{,}375\cdot 3{,}6\right] = 1{,}52 \end{aligned}\right\} P = (1.05)^{-1}\left[0{,}625\cdot 0{,}14 + 0{,}375\cdot 1{,}52\right] = 0{,}63$$

A valoración xeral da put é idéntica á da call, pero adaptando j.

- unha put americana: activo/opción: k=10



$$\pi_u = \frac{(1+i)-d}{u-d} = 0,625$$

$$\left.\begin{aligned} P_u &= (1.05)^{-1}\left[0,625\cdot 0 + 0,375\cdot 0,4\right] = 0,14 \\ P_d &= 1,52 \Rightarrow P_d = 2 \end{aligned}\right\} P_d = (1,05)^{-1}\left[0,625\cdot 0,14 + 0,375\cdot 2\right] = 0,798$$

Beneficio exercicio anticipado

3. Outra aproximación ao modelo binomial

O valor da opción tamén o podemos expresar como:

$$C = \frac{1}{(1+i)^T} E_0^*\left[\max\left\{S_T - K, 0\right\}\right]$$

Como:

$$S_0 = \frac{1}{(1+i)^T} E_0^*\left[S_T\right] \;\Rightarrow\; \pi u + (1-\pi)d = (1+i) \;\Rightarrow\; \pi = \frac{(1+i)-d}{u-d}$$

Se hai h movementos cara arriba, (T-h) cara abaixo: $S_T = S_0 u^h d^{T-h}$. A probabilidade de n movementos cara arriba é baixo a probabilidade neutral ao risco é:

$$B(n;T;\pi) = \binom{T}{n}\pi^n (1-\pi)^{T-n}$$

$$C = \frac{1}{(1+i)^T}\sum_{n=0}^{T}\left\{\binom{T}{n}\pi^n(1-\pi)^{T-n}\left[\max\left\{S_0 u^n d^{T-n} - K, 0\right\}\right]\right\}$$

O número, h, que fai que a opción tome un valor non nulo podemos calculalo como:

$$S_0 u^h d^{T-h} > K \;\Rightarrow\; h > \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{K}{Sd^T}\right)}{\mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right)}$$

$$C = \frac{1}{(1+i)^T}\sum_{n=h}^{T}\left\{\binom{T}{n}\pi^n(1-\pi)^{T-n}\left[S_0 u^n d^{T-n} - K\right]\right\} =$$

$$= S_0\sum_{n=h}^{T}\left\{\binom{T}{n}\left(\frac{\pi u}{(1+i)}\right)^n\left(\frac{(1-\pi)d}{(1+i)}\right)^{T-n}\right\} - K(1+i)^{-T}\sum_{n=h}^{T}\left\{\binom{T}{n}\pi^n(1-\pi)^{T-n}\right\}$$

$$C = S_0 B(h;T,\pi') - K(1+r)^{-T} B(h;T,\pi_u)$$

4. Aplicación práctica do modelo binomial

Dado o intervalo de tempo do contrato de opción, temos que determinar o nº de pasos da árbore binomial para ese período de tempo: canto maior sexa, mellor é a aproximación ao prezo do subxacente (e da opción).
Considerando n pasos da árbore binomial:

$$S_n = S_0 u^j d^{n-j} \quad 0 \le j \le n \quad \Rightarrow \quad R_n = \mathrm{Ln}\left(\frac{S_n}{S_0}\right) = j\,\mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right) + n\,\mathrm{Ln}(d)$$

$$\begin{cases} E(R_n) = E(j)\,\mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right) + n\,\mathrm{Ln}(d) = \left[p\,\mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right) + \mathrm{Ln}(d)\right] n = \mu_n n \\ \mathrm{Var}(R_n) = \mathrm{Var}(j)\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2 = p(1-p)\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2 n = \sigma_n^2 n \end{cases}$$

Canto maior é n, para un período de tempo, máis realista é a descrición do prezo do subxacente dada polo método binomial:

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n n = \mu t = E\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right] \qquad \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 n = \sigma^2 t = \mathrm{Var}\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right]$$

Temos que determinar o valor de ou e d para calcular o prezo da acción: o valor de u e d que permiten que os límites anteriores se verifiquen para unha duración temporal de cada paso da árbore $\Delta t = \frac{t}{n}$:

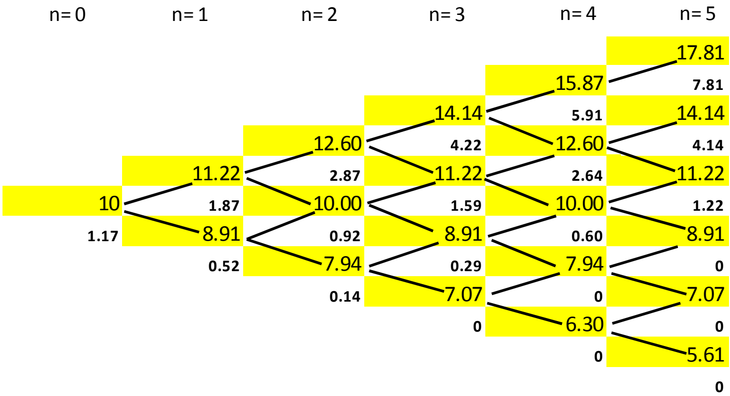
$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}$$

Ademais, para estes valores tamén temos a valoración neutral ao risco:

$e^{r\Delta t} = \pi_u u + (1-\pi_u)d$, para $\pi_u = \dfrac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$.

<u>Exemplo</u>:
Opción de compra (europea) a T=5 meses cun K = 10. O subxacente cotiza a 10?, ten unha volatilidade anual do 40% e o tipo de xuro sen risco é do 5% anual. Consideramos n = 5, $\Delta t = T/12/n = 1/12 = 0,0833$

$$u = e^{0{,}4\sqrt{0{,}083}} = 1{,}1224 \qquad d = e^{-0{,}4\sqrt{0{,}083}} = 0{,}8909 \qquad \pi_u = \frac{e^{0{,}05\Delta t} - d}{u - d} = 0{,}4892$$



Se utilizamos un maior valor para n, menor para Δt, o prezo da opción converxe.

MODELO DE BLACK-SCHOLES

1. Supostos básicos sobre o prezo

Asumimos que os rendementos de dous períodos diferentes son independentes:

$$\left.\begin{array}{l} \mu\Delta t = E\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right] \\ \sigma^2\Delta t = \mathrm{Var}\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right] \end{array}\right\} \Rightarrow R_t = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \approx N(0,1)$$

$$\Rightarrow R_t = \mathrm{Ln}\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \approx N\left(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t\right)$$

Co cal: $S_t = S_0 e^{R_t} = S_0 e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t}$ e $\mathrm{Ln}(S_t) \sim N\left(\mathrm{Ln}(S_0) + \mu\Delta t, \sigma^2\Delta t\right)$

Características do prezo do activo subxacente:

a) Segue unha distribución lognormal:

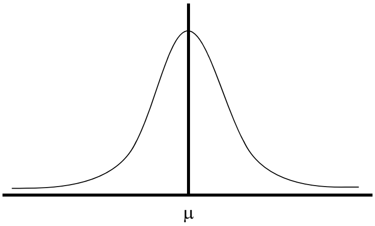
Se temos en conta que se $x \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow y = e^x \sim \text{lognormal}$ con:

$$f(y) = \left(\sqrt{2\pi}\sigma y\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Ln}(y) - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

para $E(y) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ e $\mathrm{Var}(y) = e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$, entón a distribución do prezo do subxacente segue unha distribución lognormal con:

$$\begin{cases} E(S_t) = S_0 e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \\ \mathrm{Var}(S_t) = S_0^2 e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \end{cases}$$

Graficamente:



b) <u>Cambio (infinitesimal) na rendibilidade</u>:

$$dR_t = R_{t+dt} - R_t = \mu\, dt + \sigma\sqrt{dt}\ \varepsilon_t$$

O proceso $\sqrt{dt}\ \varepsilon_t = dZ$ denomínase movemento browniano estándar ou proceso de Gauss-Weiner.

c) <u>Cambio (infinitesimal) no prezo: lema de Itô</u>

O prezo de acción no futuro é unha función da rendibilidade e do tempo transcorrido. Utilizando o desenvolvemento de Taylor para aproximar a variación en S:

$$\begin{aligned} dS_t &= S(R_t + dR_t, t + dt) - S(R_t, t) \\ &= S_R dR_t + S_T dt + \left(\frac{1}{2}\right)\left(S_{RR} dR_t^2 + 2S_{RT} dR_t dt + S_{TT} dt^2\right) + \cdots \end{aligned}$$

Como:

$$dR_t = \mu dt + \sigma dZ$$

$$dR_t^2 = \mu^2 (dt)^2 + \sigma^2 \varepsilon^2 dt + 2\mu\sigma\varepsilon (dt)^{3/2} \longrightarrow \sigma^2 dt \quad \text{(cando dt converxe a cero)}$$

$$dR_t dt = \mu (dt)^2 + \sigma\varepsilon (dt)^{3/2} \longrightarrow 0$$

$$dt^2 \longrightarrow 0$$

Teremos que $dS_t = S_R dR_t + S_T dt + \left(\frac{1}{2}\right) S_{RR} \sigma^2 dt$, que é unha expresión do lema de Itô. Ademais, como $S_t = Se^{R_t} = S_R = S_{RR}$ e $S_T = 0$, teremos que:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\mu + \left(\tfrac{1}{2}\right)\sigma^2\right) dt + \sigma dZ .$$

Resumindo, o comportamento do prezo do subxacente é tal que:

$$S_t = S_0 e^{R_t} = S_0 e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\ \varepsilon_t} \longrightarrow R_t = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\ \varepsilon_t$$

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \longrightarrow E(R_t) = \mu\Delta t$$

$$Var(S_t) = S_0^2 e^{2\mu + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \longrightarrow Var(R_t) = \sigma^2 \Delta t$$

$$dS_t = S_t\left(\mu + \left(\tfrac{1}{2}\right)\sigma^2\right) dt + S_t \sigma dZ \longrightarrow dR_t = \mu\, dt + \sigma\sqrt{dt}\ \varepsilon_t$$

2. Obtención da fórmula de Black-Scholes

Partimos do feito que:

- O prezo da acción ten unha distribución lognormal con media e varianza constantes.
- Non hai custos de transacción e as accións son perfectamente divisibles.
- Non hai pago de dividendos durante a vida da opción.
- Non arbitraxe.
- Negociación continua.
- tipo de xuro sen risco é constante e pódese pedir e dar prestado ao mesmo tipo de xuro.

Utilizando a idea de non arbitraxe podemos configurar unha carteira libre de risco consistente nunha posición na opción de compra e no subxacente, o cal é posible dado que o subxacente está correlacionado positivamente (negativamente) co prezo da call (put). Por exemplo, se $\Delta C = 0,5\Delta S$, entón se o prezo do subxacente increméntase en 1€, o prezo da opción call aumenta 0,5€, co cal a carteira libre de risco sería: $N_C \Delta C = -N_S \Delta S = -N_S \frac{1}{0,5}\Delta C \quad \Rightarrow \quad N_C = -\frac{N_S}{0,5}$.

No contexto de negociación continua, esta posición libre de risco só se mantén nun período de tempo moi corto dado que pode cambiar a relación entre o prezo do subxacente e a opción, polo que teremos que reaxustar a carteira, de modo continuo, para manter a carteira libre de risco.

Dada unha carteira (libre de risco) en t = 0, o seu valor será $X = SN_S + CN_C$. A variación no valor da carteira: $dX = S\,dN_S + dS\,N_S + C\,dN_C + dC\,N_C$. Xestionamos esta carteira, de modo que a reaxustamos para mantela libre de risco cunha estratexia de autofinanciación: se compramos un activo financiámolo coa venda doutro: $S\,dN_S = -C\,dN_C$, $dX = N_S\,dS + N_C\,dC$. O problema que temos é o de determinar o valor de dS e dC.

Aplicando a lema de Itô ao prezo da opción: $dC = C_S\,dS + C_T dt + \left(\frac{1}{2}\right) C_{SS}\,(dS)^2$

Como $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$, $dC = C_S\,dS + C_T dt + \left(\frac{1}{2}\right) C_{SS}\sigma^2 S^2 dt$. Substituíndo a expresión de dX:

$$dX = N_S\left(S_t\mu\,dt + \left(\tfrac{1}{2}\right)S_t\sigma^2 dt + S_t\sigma dZ\right)$$
$$+ N_C\left(C_S\left[S_t\mu\,dt + \left(\tfrac{1}{2}\right)S_t\sigma^2 dt + S_t\sigma dZ\right] + C_T dt + \left(\frac{1}{2}\right)C_{SS}\sigma^2 S^2 dt\right)$$

Reordenando:

$$dX = \left[N_S S_t \mu + \left(\tfrac{1}{2}\right)N_S S_t \sigma^2 + N_C C_S S_t \mu + \left(\tfrac{1}{2}\right)N_C C_S S_t \sigma^2 + C_T + \left(\frac{1}{2}\right)C_{SS}\sigma^2 S^2\right]dt$$
$$+ \left(N_S S_t \sigma + N_C C_S S_t \sigma\right)dZ$$

Os reaxustes de carteira requiren que: $N_S = -N_C C_S$ (termo aleatorio nulo)

Se normalizamos N_C=1, $N_S = -C_S$ .Teremos que: $dX = C_T\,dt + \left(\frac{1}{2}\right)C_{SS}\sigma^2 S^2\,dt$. Por non arbitraxe $\frac{dX}{X} = R_{ft}dt$ e como $X = SN_S + CN_C = SN_S + C = -SC_S + C$:

$$C_T\,dt + \left(\frac{1}{2}\right)C_{SS}\sigma^2 S^2\,dt = -SC_S R_{ft}dt + CR_{ft}dt \quad \Rightarrow \quad C_T + \left(\frac{1}{2}\right)C_{SS}\sigma^2 S^2 + SC_S R_{ft} - CR_{ft} = 0$$

Que é unha ecuación diferencial cuxa solución nos dará o valor da opción. A solución estará suxeita ás seguintes condicións:

$$\begin{cases} C(S, t = T, K) = \max\{S_t - K, 0\} \\ C(S = 0, t, K) = 0 \\ C(S, t, K) \to S \text{ cando } S \to \infty \end{cases}$$

A solución que obtemos é a fórmula de Black-Scholes:

$$C = S_0 N(x) - K(1+i)^{-\Delta t}\, N\left(x - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

onde: $x = \mathrm{Ln}\left(\frac{S_o}{K(1+i)^{-\Delta t}}\right) \Big/ \sigma\sqrt{\Delta t} + \tfrac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$. Ademais, teremos que: $\frac{\partial C}{\partial S} = N(x) > 0$, $(\partial C/C)/(\partial S/S) > 1$.

A fórmula de Black-Scholes para unha put europea pode obterse dunha forma similar como:

$$P = K(1+i)^{-\Delta t}\, N\left(\sigma\sqrt{\Delta t} - x\right) - S_0 N(-x)$$

3. Outra aproximación á fórmula de Black-Scholes

O valor da call europea podemos obtelo como o valor actual neto dos fluxos que xera a call:

$$\begin{aligned} C &= VAN\left[\max\{S_t - K, 0\}\right] \\ &= VAN\left[(S_t - K) \mid S_t > K\right]\mathrm{Prob}(S_t > K) + VAN[0]\,\mathrm{Prob}(S_t < K) \\ &= VAN[S_t \mid S_t > K]\,\mathrm{Prob}(S_t > K) - VAN[K \mid S_t > K]\,\mathrm{Prob}(S_t > K) \end{aligned}$$

a) Avaliamos $\mathrm{Prob}(S_t > K)$:

$$\mathrm{Prob}(S_t > K) = \mathrm{Prob}\left(S_o e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t} > K\right) = \mathrm{Prob}\left(\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t > \mathrm{Ln}\left(\frac{K}{S_o}\right)\right)$$

$$= \mathrm{Prob}\left(\varepsilon_t > \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{K}{S_o}\right) - \mu\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right) = \mathrm{Prob}\left(\varepsilon_t > -\frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{S_o}{K}\right) + \mu\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)$$

Necesitamos ter información sobre a rendibilidade esperada da acción. Pero, a valoración neutral ao risco require que:

$$E(S_t)=S_o e^{\mu\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t}=S_o(1+i)^{\Delta t}=S_o e^{r\Delta t}$$

$$\mu\Delta t+\tfrac{1}{2}\sigma^2\Delta t=\mathrm{Ln}(1+i)^{\Delta t}=r\Delta t$$

$$\mu\Delta t=\mathrm{Ln}(1+i)^{\Delta t}-\tfrac{1}{2}\sigma^2\Delta t=r\Delta t-\tfrac{1}{2}\sigma^2\Delta t$$

$$\mathrm{Prob}\left(\varepsilon_t>-\frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{S_o}{K}\right)+\mathrm{Ln}(1+i)^{\Delta t}-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)=\mathrm{Prob}\left[\varepsilon_t<\frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{S_o}{K(1+i)^{-\Delta t}}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right]$$

denominando: $x=\mathrm{Ln}\left(\frac{S_o}{K(1+i)^{-\Delta t}}\right)\Big/\sigma\sqrt{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$ teremos que:

$$\mathrm{Prob}(S_t>K)=\Phi\left(x-\sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

b) Calculamos o VAN de K:

$$\mathrm{VAN}[K\mid S_t>K]\,\mathrm{Prob}(S_t>K)=\frac{K}{(1+i)^{\Delta t}}\Phi\left(x-\sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

c) Calculamos o VAN de S:

$$\mathrm{VAN}[S_t\mid S_t>K]\,\mathrm{Prob}(S_t>K)=(1+i)^{-\Delta t}E(S_t\mid S_t>K)\,\mathrm{Prob}(S_t>K)$$

$$E(S_t\mid S_t>K)\,\mathrm{Prob}(S_t>K)=\int_{-x+\sigma\sqrt{\Delta t}}^{\infty}S_0e^{\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t}(2\pi)^{-1/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)d\varepsilon$$

$$=S_0e^{\mu\Delta t}\int_{-x+\sigma\sqrt{\Delta t}}^{\infty}e^{\sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t-\frac{\varepsilon^2}{2}}(2\pi)^{-1/2}d\varepsilon$$

$$=S_0e^{\mu\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t}\int_{-x+\sigma\sqrt{\Delta t}}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{\Delta t}-\varepsilon_t\right)^2}(2\pi)^{-1/2}d\varepsilon$$

cambeo de variable: $v=\sigma\sqrt{\Delta t}-\varepsilon,\quad dv=-d\varepsilon$ $\begin{cases}\text{Para } S_t=K: v=x\\ \text{Para } S_t=\infty: v=-\infty\end{cases}$

$$E(S_t\mid S_t>K)\,\mathrm{Prob}(S_t>K)=S_0e^{\mu\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{v^2}{2}}(2\pi)^{-1/2}dv=S_0e^{\mu\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t}N(x)$$

$$=S_0(1+i)^{\Delta t}N(x)$$

Desta maneira:

$$\mathrm{VAN}[S_t\mid S_t>K]\,\mathrm{Prob}(S_t>K)=(1+i)^{-\Delta t}E(S_t\mid S_t>K)\,\mathrm{Prob}(S_t>K)$$

$$=(1+i)^{-\Delta t}S_0(1+i)^{\Delta t}N(x)=S_0N(x)$$

En consecuencia, a fórmula de Black-Scholes para a call (europea) é:

$$C=\mathrm{VAN}\left[\max\{S_t-K,0\}\right]=S_0N(x)-K(1+i)^{-\Delta t}N\left(x-\sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

De forma similar, podemos obter a fórmula de Black-Scholes para a put europea.

CONVERXENCIA ENTRE O MODELO BINOMIAL E BLACK-SCHOLES

Da valoración binomial (call) temos que:

$$C = S_0 B(h;T,\pi') - K(1+i)^{-T} B(h;T,\pi_u)$$

$$B(h;T,\pi_u) = B(h;N,\pi_u) = 1 - B(h-1;N,\pi_u) = 1 - \mathrm{Prob}(n \le h-1)$$

$$= 1 - \mathrm{Prob}\left(\frac{n-np}{\sqrt{p(1-p)n}} \le \frac{(h-1)-np}{\sqrt{p(1-p)n}} \right)$$

Como:

$$\left.\begin{array}{l} R_t = \mathrm{Ln}\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left(\mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right) + \mathrm{Ln}(d)\right)n \\ E(R_t) = \left[p\,\mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right) + \mathrm{Ln}(d)\right]n \\ \mathrm{Var}(R_t) = p(1-p)\left[\mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right)\right]^2 n \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n = \frac{R_t - n\,\mathrm{Ln}(d)}{\mathrm{Ln}(u/d)} \\ np = \frac{E(R_t) - n\mathrm{Ln}(d)}{\mathrm{Ln}(u/d)} \\ \sqrt{p(1-p)n} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(R_t)}}{\mathrm{Ln}(u/d)} \end{array}\right.$$

Co que: $\dfrac{n-n\mu_t}{\sqrt{p(1-p)n}} = \dfrac{R_t - E(R_t)}{\sqrt{\mathrm{var}(R_t)}}$

Como $h > \mathrm{Ln}\left(\frac{K}{S_0 d^T}\right) \Big/ \mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right) \Rightarrow h-1 = \dfrac{\mathrm{Ln}\left(\frac{K}{S_0 d^T}\right) - n\mathrm{Ln}(d)}{\mathrm{Ln}\left(\frac{u}{d}\right)} - \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0,1)$

$$\frac{(h-1)-n\mu_t}{\sqrt{p(1-p)n}} = \frac{\mathrm{Ln}(K/S_0) - E(R_t) - \varepsilon\mathrm{Ln}(u/d)}{\sqrt{\mathrm{var}(R_t)}}$$

Cando $n \to \infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Ln}(u/d) \to 0 \\ \sqrt{\mathrm{var}(R_t)} \to \sigma\sqrt{\Delta t} \end{array}\right\} \Rightarrow B(h-1;N,\pi_u) \to N\left(\frac{\mathrm{Ln}(K/S_0) - E(R_t)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)$$

Teremos que:

$$\left.\begin{array}{l} R_t \approx N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t) \\ E\left(\frac{S_t}{S_o}\right) = e^{\mu\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t} = S_o(1+i)^{\Delta t} = S_o e^{r\Delta t} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mu\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t = \mathrm{Ln}(1+i)^{\Delta t} = r\Delta t \\ \Rightarrow E(R_t) = \mathrm{Ln}(1+i)^{\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t \end{array}$$

Isto que implica que:

$$B(h-1;N,\pi_u) \to N\left(\frac{\mathrm{Ln}(K/S_0) - \mathrm{Ln}(1+i)^{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)$$

$$B(h;N,\pi_u) = 1 - B(h-1;N,\pi_u) \rightarrow 1 - N\left(\frac{\mathrm{Ln}\left(K/S_0\right) - \mathrm{Ln}\left(1+i\right)^{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)$$

$$= N\left(\frac{\mathrm{Ln}\left(S_0/K\left(1+i\right)^{-\Delta t}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

Do mesmo xeito, podemos comprobar que: $B(h;T,\pi') \rightarrow N(x)$ onde $x = \mathrm{Ln}\left(S_o/K\left(1+i\right)^{-\Delta t}\right)/\sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\Delta t}$.

En consecuencia:

$$C = S_0 B(h;T,\pi') - K(1+i)^{-T} B(h;T,\pi_u) \rightarrow S_0 N(x) - K\left(1+i\right)^{-\Delta t} N\left(x - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

VALORACIÓN POR SIMULACIÓN

A valoración por simulación require simular o prezo da acción N veces e calcular o valor da opción para as N veces, de forma que o prezo da opción é o valor medio dos valores simulados descontado.

Simulamos a evolución do prezo en calquera data futura dado:

$$S_t = S_0 e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t}, \ \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

A valoración neutral ao risco require que a rendibilidade esperada da acción sexa:

$$E(S_t) = S_o e^{\mu\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t} = S_o\left(1+i\right)^{\Delta t} = S_o e^{r\Delta t}$$

$$\mu\Delta t = \mathrm{Ln}\left(1+i\right)^{\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t = r\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$$

Co que:

$$S_t = S_0 e^{\mathrm{Ln}(1+i)^{\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t}$$

No caso no que a acción reparte dividendos, estes réstanse do valor da acción, ben de forma discreta ou ben de forma continua.

<u>Exemplo</u>:

Opción de compra (europea) a T=5 meses cun K = 10. O subxacente cotiza a 10€, ten unha volatilidade anual do 40% e o tipo de xuro sen risco é do 5% anual.

$$S_t = 10\,e^{0{,}05\cdot 0{,}4166 - \frac{1}{2}(0{,}4)^2 0{,}4166 + 0{,}4\sqrt{0{,}4166}\,\varepsilon_t}$$

O prezo simulado para N = 5.000 é aproximadamente de 1,2540.

PROPIEDADES DO PREZO DAS OPCIÓNS

- Límites no prezo das call

(1) $0 \le C \le S$ tanto para europeas como americana

$$C \ge \max\left\{S_t - K(1+i)^{-t}, 0\right\} \qquad C_a \ge \max\{S_t - K, 0\}$$

(3) $C(K_1) \ge C(K_2) \quad \text{si } K_2 > K_1$ tanto para europeas como americanas

$$C(K_1) - C(K_2) \le (K_2 - K_1)(1+i)^{-t} \quad \text{si } K_2 \ge K_1$$

$$C_a(K_1) - C_a(K_2) \le (K_2 - K_1) \quad \text{si } K_2 \ge K_1$$

(5) $C(t_2) \ge C(t_1) \quad \text{si } t_2 > t_1$ tanto para europeas como americanas

(6) si $K_3 > K_2 > K_1 \;\Rightarrow\; C(K_2) \le \left[\dfrac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}\right] C(K_1) + \left[\dfrac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1}\right] C(K_3)$

- Límites no prezo das put

(1) $0 \le P \le K \qquad 0 \le P_a \le K(1+i)^{-t}$

(2) $P \ge \max\left\{K(1+i)^{-t} - S_t, 0\right\} \qquad P_a \ge \max\{K - S_t, 0\}$

(3) $P(K_1) \ge P(K_2) \quad \text{si } K_1 > K_2$ tanto para europeas como americanas

(4) $P(K_2) - P(K_1) \le (K_2 - K_1)(1+i)^{-t} \quad \text{si } K_2 > K_1$

$P_a(K_2) - P_a(K_1) \le (K_2 - K_1) \quad \text{si } K_2 > K_1$

(5) $P(t_2) \ge P(t_1) \quad \text{si } t_2 > t_1$ tanto para europeas como americanas

(6) si $K_3 > K_2 > K_1 \;\Rightarrow\; P(K_2) \le \left[\dfrac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}\right] P(K_1) + \left[\dfrac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1}\right] P(K_3)$

- Relación entre o prezo da call e a put: paridade put-call

		$S_t < K$	$S_t > K$
Comprar *call*	$-C$	0	$S_t - K$
Comprar bonos	$K(1+i)^{-t}$	K	K
		K	S_t
Comprar *put*	$-P$	$K - S_t$	0
Comprar acción	$-S_0$	S_t	S_t
		K	S_t

$$C + K(1+i)^{-t} = P + S \;\Rightarrow\; C = P + S - K(1+i)^{-t}$$

- Relación entre o prezo do forward e prezo da call e a put

		$S_t < K$	$S_t > K$
Comprar *call*	$-C$	0	$S_t - K$
Vender *put*	P	$S_t - K$	0
		$S_t - K$	$S_t - K$
Comprar *forward*	0	$S_t - F$	$S_t - F$

$$\text{Se } C = P \;\Rightarrow\; S_t - K = S_t - F \;\Rightarrow\; F = K$$

SENSIBILIDADE DO PREZO DAS OPCIÓNS: AS LETRAS GREGAS

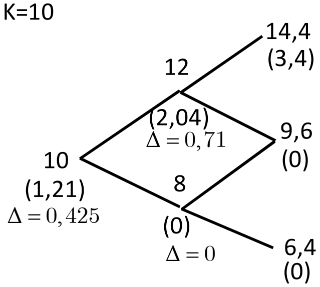
O prezo da opción cambia cando varía algún dos factores determinantes do mesmo. A sensibilidade do prezo da opción a cada un destes factores constitúe unha información crucial para determinar a cobertura do risco do prezo da opción a eses factores. A esas sensibilidades denomínaselles letras gregas.

- Delta, Δ : sensibilidade do prezo da opción ao prezo do subxacente

Call con K=10

u = 1,2

d = 0,8



$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}$$

significado?

Utilizando a carteira sen risco en Black-Scholes, por exemplo:

$$\Delta C = 0,5\Delta S$$

Delta da opción

Podemos obter a dela a partir da fórmula de valoración:

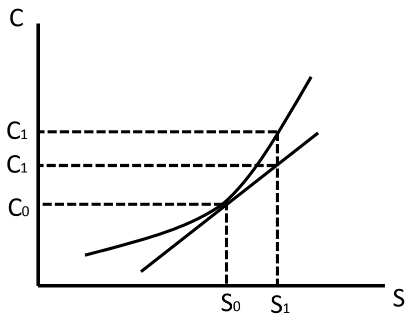
- <u>Call</u>: $C = S_0 N(x) - Ke^{-r\Delta t} N\left(x - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(x) \qquad x = \frac{Ln(S_o/K) + r\Delta t + \left(\sigma^2/2\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

- <u>Put</u>: $P = Ke^{-r\Delta t} N\left(\sigma\sqrt{\Delta t} - x\right) - S_0 N(-x)$

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S} = N(-x) = 1 - N(x)$$

- Gamma, Γ : taxa de cambio do delta con respecto ao prezo do subxacente



Se a acción non paga dividendos e a opción é europea (de compra ou venda), o gamma está dada por:

$$\Gamma = \frac{\bar{N}(x)}{S_0\sigma\sqrt{\Delta t}} \text{ onde } \bar{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

- Theta, Θ : taxa de cambio do valor da opción con respecto ao tempo
  - Call:

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial \Delta t} = -\frac{S_0\bar{N}(x)\sigma}{2\sqrt{\Delta t}} - rKe^{-r\Delta t} N\left(x - \sigma\sqrt{\Delta t}\right) \quad \text{onde} \quad \bar{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

  - Put:

$$\Theta = \frac{\partial P}{\partial \Delta t} = -\frac{S_0\bar{N}(x)\sigma}{2\sqrt{\Delta t}} + rKe^{-r\Delta t} N\left(\sigma\sqrt{\Delta t} - x\right)$$

- Vega, υ : cambio no valor da opción con respecto á volatilidade

Para a opción europea de compra ou de venda sobre un subxacente que non paga dividendos:

$$\upsilon = S_0\sqrt{\Delta t}\,\bar{N}(x)$$

- Rho: cambio no valor da opción con respecto ao tipo de xuro
  - Call: $rho = K\Delta t\, e^{-r\Delta t} N\left(x - \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$
  - Put: $rho = K\Delta t\, e^{-r\Delta t} N\left(\sigma\sqrt{\Delta t} - x\right)$

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. A día 27/02/2013 temos unha opción para un prazo de 6 meses sobre o índice Ibex-35 cun prezo de exercicio K = 8.250. O tipo de xuro libre de risco a un ano é do 3%. Calcular o prezo da opción tanto se é call como put, europea ou americana:
(a) Utilizando do método binomial con 2, 6, 10, 15 e 20 pasos.
(b) Utilizando a fórmula de Black-Scholes.
(c) Valorar a opción por simulación (só no caso da europea).
(d) Discutir a converxencia o método binomial e da simulación á valoración dada por Black-Scholes.
(e) Corroborar que se verifica a paridade call-put.
(f) Analizar o resultado das seguintes estratexias de investimento con estas dúas opcións (europeas): (i) comprar unha call e unha put, (ii) comprar unha call e vender unha put, (iii) vender unha call un comprar unha put.

BIBLIOGRAFÍA

HULL, JOHN C. (2009): INTRODUCCION A LOS MERCADOS DE FUTUROS Y OPCIONES. PEARSON EDUCATION.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA