

ÁLVARO LOZANO ROJO

DINÁMICA TRANSVERSA DE
LAMINACIONES DEFINIDAS
POR GRAFOS REPETITIVOS

112

2008

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

ÁLVARO LOZANO ROJO

DINÁMICA TRANSVERSA DE
LAMINACIONES DEFINIDAS
POR GRAFOS REPETITIVOS

Esta memoria ha sido realizada bajo la dirección del Dr. Fernando ALCALDE CUESTA de la Universidade de Santiago de Compostela, y de la Dra. Marta MACHO STADLER de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la UPV/EHU.

Su defensa se llevó a cabo el 6 de junio de 2008 en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la UPV/EHU, obteniendo la calificación Sobresaliente *cum laude*, por unanimidad.

IMPRIME: Imprenta universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 978-84-89390-29-4

Dep. Leg.: C 2943-2008

A mi ama, por todo

Agradecimientos

Sois muchos a los que os debo el haber realizado esta tesis, por uno u otro motivo. Se que no estáis todos citados aquí, pero eso no hace que mi gratitud sea menor.

Debo comenzar dando las gracias a la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea por su apoyo económico, mediante una beca de investigación predoctoral UPV/EHU.

Quiero agradecer también a los miembros del tribunal, el aceptar la tarea de leer y valorar esta memoria, así como al Prof. G. Hector su hospitalidad y su dedicación durante mi estancia en Lyon.

Gracias a los miembros del Departamento de Xeometría e Topoloxia de la Universidade de Santiago de Compostela, en especial a Elena Vázquez Abal y los *bolseiros*, que han hecho de mis estancias allí un placer. Por supuesto, no puedo dejar de agradecer a Pablo su amistad, y que hayamos compartido esas «*matemáticas interesantes*».

Gracias a mis compañeros, JotaI, Raúl... que me habéis ayudado y os habéis preocupado por mí durante este tiempo.

Gracias a mi familia y amigos, su apoyo y ánimo a lo largo de estos años ha sido indispensable. Sin ellos esto no hubiese sido posible.

Gracias a ti también, Silvia, por compartir este largo camino y soportar esas largas peroratas sobre el minimal de Ghys–Kenyon. Gracias por compartir esto, y todo lo demás.

Gracias, Fernando, por haberme ofrecido este tema de tesis que guarda tantas sorpresas, y que tanto me ha hecho disfrutar. Gracias por tu trabajo, y tu hospitalidad.

Por último, gracias por todo, Marta. Gracias, por aquellos principios en topología de espacios métricos, por tu apoyo, tu tiempo... No podré agradecértelo lo suficiente.

Índice general

Introducción	v
1. Laminaciones y espacios foliados por grafos	1
1.1. Laminaciones	1
1.2. Radio de inyectividad y convexidad de una laminación	5
1.3. Holonomía	7
1.4. Espacios foliados por grafos	9
2. Pseudogrupos grafados	11
2.1. Grafo de Cayley de un grupo	11
2.2. Pseudogrupos grafados	13
2.3. Geometría a gran escala	14
2.4. Reducción de pseudogrupos	16
2.5. Pseudogrupos compactamente generados	19
2.6. Teoremas de realización	22
2.7. Pseudogrupos de transformaciones del conjunto de Cantor	27
3. Espacio foliado de Gromov–Hausdorff	31
3.1. Espacio de Gromov–Hausdorff de los subgrafos	31
3.2. Espacio foliado de Gromov–Hausdorff	35
3.3. Estructura transversa	37
3.3.1. Relaciones de equivalencia medibles discretas	37
3.3.2. Relaciones de equivalencia topológicas	39
3.3.3. Pseudogrupo y grupoide de holonomía	41
3.4. Grafos repetitivos y conjuntos minimales	42
4. Envoltura de un grafo aperiódico y repetitivo	45
4.1. El ejemplo de Ghys–Kenyon	46
4.1.1. El árbol de Kenyon y la laminación de Ghys–Kenyon	46
4.1.2. Codificación de los árboles	47
4.1.3. La relación cofinal	51
4.1.4. Motivos	54
4.1.5. Propiedades de la aplicación de codificación	55
4.1.6. Propiedades ergódicas del minimal de Ghys–Kenyon	57

Índice general

4.1.7. Hojas genéricas	59
4.2. Árboles con un número arbitrario de finales	61
4.2.1. Un árbol aperiódico y repetitivo con 3 finales	61
4.2.2. Árboles con un número arbitrario par de finales	62
4.2.3. Árboles con un número arbitrario impar de finales	65
4.3. Un ejemplo no únicamente ergódico	66
4.3.1. Construcción	67
4.3.2. \mathcal{R} no es únicamente ergódica	69
4.3.3. Construcción de dos medidas que distinguen hojas	71
5. Dinámica en el espacio de Gromov–Hausdorff	73
5.1. Relaciones de equivalencia AF y diagramas de Bratteli	74
5.2. Diagramas de Bratteli ordenados y el sistema de Bratteli–Vershik	78
5.3. Descomposiciones por cajas y relaciones compactas	79
5.4. Proceso de inflación	82
5.5. Dinámica medible en el espacio de Gromov–Hausdorff	85
5.6. El ejemplo de Ghys–Kenyon	93
5.6.1. Motivos <i>finos</i>	93
5.6.2. La relación AF \mathcal{R}_∞	94
5.6.3. Afabilidad del minimal de Ghys–Kenyon	97
5.7. Dinámica topológica en el espacio de Gromov–Hausdorff	98
6. Límites inversos	101
6.1. Descomposiciones simpliciales	102
6.1.1. Existencia de un atlas adaptado	104
6.1.2. Nervio foliado de un atlas foliado	106
6.1.3. Del nervio foliado a la laminación	108
6.1.4. Descomposición simplicial	109
6.2. Inflación y límites inversos	112
6.2.1. Inflación	112
6.2.2. Variedades ramificadas y aplicaciones celulares	113
6.2.3. Límites inversos	114
Bibliografía	117

Introducción

Una *foliación* es una descomposición de una variedad en subvariedades conexas, llamadas *hojas*, que están dispuestas localmente como las hojas de un libro, pero cuyo topología y comportamiento global puede ser mucho más complejo.

Desde el punto de vista de la dinámica topológica, el estudio de foliaciones puede reducirse al caso de los conjuntos *minimales*, es decir, subconjuntos cerrados y saturados por las hojas de la foliación, que son minimales con respecto a la inclusión. Al ser saturados, estos conjuntos poseen una estructura foliada natural, pero, en general, carecen de la regularidad transversa de las variedades foliadas al ser el espacio ambiente no ya una variedad, sino un espacio métrico compacto. De este modo, aparece de manera natural el concepto de *laminación*.

Los grafos proporcionan algunos ejemplos sorprendentes de laminaciones: consideremos el grafo de Cayley de un grupo finitamente generado G , dotado de la métrica de las palabras respecto de un sistema finito de generadores. La acción por isometrías del grupo de su grafo de Cayley proporciona, canónicamente, un pseudogrupo de transformaciones sobre conjunto de los subgrafos *enraizados en la unidad* del grafo de Cayley dotado de la topología de Gromov–Hausdorff, donde dos grafos son cercanos si coinciden en una gran bola centrada en la unidad ([Ghy2]). La estructura de grafo de cada elemento del espacio de Gromov–Hausdorff define por paso al cociente una estructura similar sobre su órbita. Estas estructuras de grafos sobre las órbitas dan lugar a un objeto global, al que llamaremos *espacio foliado por grafos*.

Este espacio contiene muchas hojas compactas (provenientes de los grafos invariantes por la acción de subgrupos cocompactos de G), pero la clausura de la hoja por un grafo *aperiódico* (i.e. distinto de todos sus trasladados) y *repetitivo* (i.e. igual a sí mismo en todo vértice [RW]) constituye un subconjunto minimal del espacio de Gromov–Hausdorff. En [Ghy2], É. Ghys construye una laminación minimal cuyas hojas presentan diferentes tipos conformes a partir de un subárbol del grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 al que llamaremos *árbol de Kenyon* [Ken1]. Como hemos dicho, las hojas del espacio inicial son grafos, pero mediante un proceso de *engorde*, que sustituye aristas por cilindros y vértices por esferas con agujeros, es posible construir una verdadera laminación por superficies de Riemann con las mismas propiedades. Como veremos, la laminación así obtenida, el *ejemplo de Ghys–Kenyon* en adelante, es únicamente ergódica, tiene una familia residual y de medida total de hojas con un final, una familia magra y de medida nula de hojas con dos finales y una única

hoja con cuatro finales.

La construcción de Ghys tiene su origen en otra interesante familia de laminaciones construidas a partir de *mosaicos* del plano. Un *mosaico* es una descomposición del plano en polígonos, llamados *teselas*, obtenidos por traslación a partir de un número finito de teselas modelo. Como en el caso de los grafos, se dota al conjunto de todos los mosaicos de la topología de Gromov–Hausdorff, de manera que dos mosaicos son cercanos si coinciden en una gran bola centrada en el origen salvo pequeñas traslaciones. El grupo \mathbb{R}^2 actúa por traslación sobre el espacio de los mosaicos, obteniendo así una estructura de laminación. Los mosaicos periódicos dan lugar a hojas compactas. Pero los mosaicos aperiódicos y repetitivos definen laminaciones minimales por planos euclidianos.

La estructura de los espacios foliados definidos por mosaicos es más rígida que la correspondiente a los grafos, por ejemplo, L. Sadun y R.F. Williams prueban que los espacios de mosaicos son fibrados localmente triviales [SW]. De hecho, J. Bellissard, R. Benedetti y J.-M. Gambaudo han probado en [BBG] que los espacios de mosaicos son límites inversos de variedades ramificadas (véase [Wil]), un resultado de naturaleza no sólo topológica, sino dinámica. La idea básica de este resultado radica en la noción de *inflación* de un mosaico del plano.

El objetivo inicial de esta memoria era el estudio de los subárboles aperiódicos y repetitivos del grafo de Cayley \mathcal{Z}^2 del grupo abeliano libre con dos generadores \mathbb{Z}^2 . Por un lado, se pretendía describir las propiedades dinámicas y ergódicas del ejemplo de Ghys, entendiendo el papel que jugaban las propiedades originales del árbol de Kenyon. Por otro lado, se trataba de dilucidar si la naturaleza del grupo limitaba la naturaleza de los minimales o si por el contrario era posible construir otros ejemplos con diferentes propiedades. La idea del *injerto de árboles* en subárboles del grafo de Cayley del grupo libre con tres generadores $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ debida a E. Blanc y E. Lesueur había permitido a E. Blanc [Bla1] construir ejemplos de laminaciones minimales cuyas hojas genéricas respecto de dos medidas invariantes distintas eran diferentes. En nuestro caso, se planteaban dos cuestiones concretas:

- construcción de subárboles aperiódicos y repetitivos de \mathcal{Z}^2 con un número arbitrario de finales,
- construcción de dos subárboles aperiódicos y repetitivos de \mathcal{Z}^2 a partir de dos motivos diferentes con diferentes tasas de aparición.

A diferencia del ejemplo de Blanc, construido a partir de un árbol con 2 finales y crecimiento lineal y de un árbol con un conjunto de Cantor de finales y crecimiento exponencial, nuestros árboles tienen a lo sumo crecimiento cuadrático y no disponemos de ninguna dirección complementaria (definida por el tercer generador) para efectuar el injerto. Es esta “falta de espacio” la que confiere mayor dificultad a la construcción de tales ejemplos. Por lo que se refiere a la primera cuestión, el capítulo central de la memoria contiene ejemplos de laminaciones minimales, obtenidas a partir de subárboles aperiódicos y repetitivos de \mathcal{Z}^2 , que poseen hojas especiales

(análogas a la hoja hiperbólica con 4 finales del ejemplo de Ghys) con un número finito cualquiera de finales. No hay una respuesta clara en el caso infinito, aunque todo hace pensar que no es posible. En cuanto a la segunda cuestión, en el mismo capítulo, se describe una laminación minimal dotada de dos medidas de probabilidad invariantes de manera que las hojas genéricas respecto de la primera medida tienen 2 finales y crecimiento lineal, mientras que las hojas genéricas respecto de la segunda tienen el mismo tipo de crecimiento que la función $f(x) = x^{\ln 5 / \ln 3}$.

Fruto del estudio de la laminación de Ghys-Kenyon y de estos nuevos ejemplos son los tres objetivos añadidos y que conforman la totalidad de la memoria:

- estudiar la estructura métrica de las órbitas de los pseudogrupos de generación compacta [Hae1, Hae3] y de los pseudogrupos de transformaciones del conjunto de Cantor;
- investigar la dinámica transversa medible y topológica de las laminaciones minimales obtenidas a partir de subgrafos aperiódicos y repetitivos del grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 o de cualquier grupo abeliano;
- extender el resultado de [BBG] a las laminaciones transversalmente Cantor, minimales y sin holonomía describiéndolas como límite inverso de variedades ramificadas.

Pseudogrupos grafados. Sea Γ un pseudogrupo de transformaciones de un espacio metrizable, localmente compacto y separable X . Si Γ es de tipo finito, la elección de un sistema finito de generadores define una estructura de grafo conexo localmente finito sobre las órbitas de manera similar a como ocurre para los grafos de Cayley de los grupos de tipo finito. Estas estructuras de grafo proporcionan una estructura métrica sobre las órbitas y una *función de valencia* sobre el espacio X que asigna a cada punto x su valencia en $\Gamma(x)$, es decir, el número de aristas de $\Gamma(x)$ incidentes con x . La noción de pseudogrupo de transformaciones surge naturalmente en el estudio de las foliaciones, ya que los homeomorfismos obtenidos al deslizar una transversal local (correspondiente a un abierto distinguido de un buen atlas) a lo largo de las hojas (de las placas de un abierto distinguido que contenga a dos elementos del atlas que se corten) generan un pseudogrupo de transformaciones Γ de una transversal completa X , llamado *pseudogrupo de holonomía*. La restricción de Γ a cualquier abierto Y de X que corte a todas las órbitas constituye el ejemplo básico de *equivalencia de pseudogrupos* en el sentido de Haefliger [Hae1, Hae2, Hae3], que permite formalizar la noción de *estructura transversa* de una foliación como la clase de equivalencia de su pseudogrupo de holonomía. Es interesante estudiar el comportamiento de la estructura métrica frente a este proceso de *reducción o inducción*, determinando en qué condiciones se obtienen equivalencias de Kakutani, es decir, cuándo la estructura métrica a gran escala no cambia. En el caso de pseudogrupos compactamente generados, introducidos por A. Haefliger [Hae2, Hae3] a imagen y semejanza de los pseudogrupos de holonomía de los espacios foliados compactos, podemos probar:

Teorema 2.28 (teorema 2.26, [Loz]). *Sean Γ y Γ' dos pseudogrupos compactamente generados de transformaciones de dos espacios localmente compactos, metrizable y separables X y X' . Sean Y e Y' abiertos relativamente compactos de X y X' que cortan a todas las órbitas de Γ y Γ' , y Σ_Y y $\Sigma_{Y'}$ dos buenos sistemas de generación compacta para Y e Y' respectivamente. Si los pseudogrupos Γ y Γ' son equivalentes en el sentido de Haefliger, entonces los pseudogrupos grafados $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$ y $(\Gamma|_{Y'}, \Sigma_{Y'})$ son equivalentes en el sentido de Kakutani.*

Una de las primeras observaciones que uno puede hacer sobre el espacio foliado de Gromov-Hausdorff es que posee una transversal completa 0-dimensional y la función de valencia es continua. Esto que en un primer momento puede parecer propio del ejemplo, no lo es:

Teorema 2.34. *Sea Γ un pseudogrupo compactamente generado de transformaciones sobre un espacio metrizable, localmente compacto, separable y 0-dimensional X . Si Y es un abierto compacto que corta a todas las órbitas de Γ , entonces cualquier sistema de generación compacta para Y define una estructura de grafo cuya función de valencia es continua.*

Este resultado permite, razonando de forma similar a J. Feldman y C.C. Moore en [FM], probar lo siguiente:

Teorema 2.36. *Un pseudogrupo grafado cuya función de valencia es continua es equivalente en el sentido de Haefliger y de Kakutani a una acción de un grupo finitamente generado.*

Puesto que cualquier homeomorfismo del conjunto de Cantor sobre sí mismo se puede extender a la esfera bidimensional (véase [Moi, Cap. 13]), tendremos:

Corolario 2.38. *Cualquier pseudogrupo grafado sobre el conjunto de Cantor cuya función de valencia sea continua está inducido por un pseudogrupo de transformaciones de la esfera bidimensional.*

De hecho, la continuidad de la valencia permite definir el espacio foliado de Cayley de un pseudogrupo como la realización geométrica de todas las órbitas a la vez:

Teorema 2.29 (de realización geométrica [Loz]). *Si la función valencia es continua, el espacio foliado de Cayley $\text{Cay}(\Gamma)$ es un espacio metrizable, localmente compacto y separable foliado por grafos. Además X es una transversal completa canónica (formada por los vértices de las hojas) y el pseudogrupo de holonomía reducido a X coincide con Γ . Además, si X es compacto, $\text{Cay}(\Gamma)$ también lo es.*

La imagen se completa con un teorema que nos permite “engordar” las aristas de espacio foliado de Cayley y obtener una verdadera laminación:

Teorema 2.31 (de engorde). *Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ el espacio foliado de Cayley de un pseudogrupo grafado (Γ, Σ) de valencia continua. Entonces existe una laminación (M, \mathcal{L}) tal que el conjunto de vértices de \mathfrak{X} es una transversal completa y cerrada de (M, \mathcal{L}) y los pseudogrupos de holonomía de \mathcal{F} y de \mathcal{L} coinciden al reducirlos a dicha transversal. Además las hojas de \mathcal{F} son casi-isométricas a las hojas de \mathcal{L} .*

De esta manera vemos los que pseudogrupos grafados operando sobre el conjunto de Cantor, los espacios foliados por grafos transversalmente Cantor y las laminaciones transversalmente Cantor son nociones esencialmente equivalentes.

Laminaciones definidas por grafos. Como hemos mencionado la *envoltura* de un grafo repetitivo (i.e. la clausura de su órbita) es un subconjunto minimal del espacio de Gromov–Hausdorff.

En este contexto, la dinámica transversa medible (o boreliana) de los espacios foliados y de las laminaciones correspondientes se identifica con la *clase de equivalencia orbital estable* de la relación de equivalencia sobre el conjunto minimal X .

En el caso del minimal de Ghys–Kenyon, podemos definir una aplicación boreliana, que asocia a cada sucesión infinita de cuatro símbolos $\alpha \in \mathcal{S}_4 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ un árbol perteneciente a la envoltura X del árbol de Kenyon T_∞ . De hecho, todas las órbitas se pueden codificar de esta manera, salvo la correspondiente a T_∞ . Esto permite probar el siguiente resultado:

Teorema 4.21. *La aplicación Φ define una equivalencia orbital estable en sentido boreliano entre la relación cofinal sobre \mathcal{S}_4 y la relación de equivalencia definida sobre el conjunto de Ghys–Kenyon X .*

Corolario 4.22. *La dinámica boreliana de la relación de equivalencia definida sobre el conjunto de Ghys–Kenyon está representada por la de una máquina de sumar binaria.*

Por otra parte, gracias al siguiente teorema, se puede obtener una formulación medible de los anteriores resultados:

Teorema 4.23. *La relación de equivalencia definida sobre el minimal de Ghys–Kenyon X es de tipo II_1 , es decir, no es transitiva y admite una medida de probabilidad invariante.*

En efecto, procediendo como antes, se tiene que:

Teorema 4.25. *La aplicación de codificación Φ define una equivalencia orbital estable en sentido medible entre la relación cofinal sobre \mathcal{S}_4 y la relación de equivalencia definida en X .*

Corolario 4.26. *La dinámica transversa medible de la laminación de Ghys–Kenyon está representada por una máquina de sumar binaria.*

Corolario 4.27. *La laminación de Ghys–Kenyon es únicamente ergódica.*

Según se ha indicado, el estudio del espacio foliado de Gromov–Hausdorff $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ comportaba dos cuestiones concretas relacionadas con la construcción de cierto tipo de subárboles aperiódicos y repetitivos del grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 . Con la ayuda de la idea de injerto, usada con éxito por E. Blanc [Bla1], hemos probado los siguientes resultados:

Teorema 4.29. *Para cada natural $n \geq 1$, existe un árbol repetitivo y aperiódico en $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ con n finales.*

Teorema 4.31–4.32. *El espacio foliado de Gromov-Hausdorff $\mathfrak{T}(\mathbb{Z}^2)$ contiene dos árboles aperiódicos y repetitivos P_∞ y G_∞ , cuya envoltura común $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ es un espacio foliado minimal no únicamente ergódico. De hecho, hay dos medidas de probabilidad invariantes ergódicas ν_P y ν_G tales que*

1. ν_P -casi toda hoja tiene crecimiento lineal y dos finales;
2. ν_G -casi toda hoja tiene el mismo tipo de crecimiento que G_∞ y un final.

Dinámica topológica de grafos repetitivos. Una relación de equivalencia topológica \mathcal{R} definida sobre un espacio 0-dimensional X se dice que es *afable*, si es la unión de una sucesión creciente de relaciones compactas (i.e. propias, que son triviales fuera de un compacto). Si la topología de \mathcal{R} coincide con la topología límite directo (es decir, un conjunto U de \mathcal{R} es abierto si y sólo si $U \cap \mathcal{R}_n$ es abierto en \mathcal{R}_n para cada $n \in \mathbb{N}$), entonces la relación $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}_n$ se dice *aproximativamente finita* (AF de manera abreviada). La relación cofinal sobre el espacio de los caminos infinitos de un *diagrama de Bratteli* es un ejemplo de relación AF. De hecho, T. Giordano, I.F. Putnam y C.F. Skau [GPS2], e independientemente J. Renault [Ren2], han probado que éstas son las únicas relaciones de equivalencia AF posibles. Además, la clase de equivalencia orbital de cualquier relación de equivalencia AF está representada por un *sistema dinámico de Bratteli–Vershik*. Por consiguiente, la dinámica medible de cualquier relación de equivalencia afable está representada por una acción de \mathbb{Z} .

En nuestro caso, tendremos que:

Teorema 5.38. *La relación de equivalencia definida sobre el minimal de Ghys–Kenyon es afable.*

La idea de la prueba es la siguiente: la aplicación de codificación Φ permite construir una subrelación de equivalencia AF \mathcal{R}_∞ de \mathcal{R} , cuyas clases coinciden con las de \mathcal{R} , salvo la \mathcal{R} -clase de T_∞ que se descompone en la unión de la clase trivial y de otras cuatro \mathcal{R}_∞ -clases. Ahora bien, según un resultado de T. Giordano, I.F. Putnam y C.F. Skau [GPS2], estas clases pueden volverse a pegar sin alterar el carácter afable. Nuestro siguiente propósito es extender este resultado a cualquier otra envoltura X . El primer paso consiste en la construcción de una subrelación de equivalencia abierta y AF \mathcal{R}_∞ de \mathcal{R} , de manera que ambas coincidan sobre un conjunto residual de medida total respecto de cualquier medida invariante. Para ello, adaptaremos el proceso de inflación descrito por J. Bellissard, R. Benedetti y J.-M. Gambaudo en [BBG], lo que nos permitirá dar una versión topológica del resultado de C. Series sobre la hiperfinitud de las foliaciones con crecimiento polinomial [Ser], simplificando a un tiempo sus argumentos. De manera precisa, probaremos el siguiente resultado:

Teorema 5.24. *Sea X la envoltura de un grafo aperiódico y repetitivo en el espacio de Gromov–Hausdorff $\mathcal{G}(G, S)$ asociado a un grupo de tipo finito G de crecimiento polinomial respecto a un sistema finito de generadores S . La relación de equivalencia \mathcal{R} sobre X coincide*

con una subrelación abierta $AF \mathcal{R}_\infty$ de \mathcal{R} en restricción a un G_δ denso de medida total para cualquier medida invariante.

Corolario 5.31. *Sea G un grupo de tipo finito con crecimiento polinomial, dotado de un sistema finito de generadores. La dinámica medible de la envoltura de cualquier grafo aperiódico y repetitivo en $\mathcal{G}(G)$ está representada por un sistema dinámico de Bratteli–Vershik.*

Si antes podíamos pegar un número finito de \mathcal{R}_∞ -clases sin perder la afabilidad gracias a un resultado de T. Giordano, I.F. Putnam y C.F. Skau en [GPS2], otro resultado de ese mismo trabajo (mejorado posteriormente en [GMPS1] y [GMPS2]) muestra que una relación de equivalencia minimal y afable \mathcal{R} sigue siendo afable si se le añade una transformación parcial entre conjuntos \mathcal{R} -finos (i.e. de medida nula para cualquier medida \mathcal{R} -invariante) y \mathcal{R} -discretos (i.e. tales que la relación de equivalencia inducida sigue siendo β -discreta) que identifica puntos que no están \mathcal{R} -relacionados. Se obtiene así un resultado similar al obtenido en [GMPS2] para las acciones de \mathbb{Z}^2 sobre el conjunto de Cantor y en [AGL] para los mosaicos euclidianos:

Teorema 5.41. *Sea (X, \mathcal{R}) la envoltura de un árbol repetitivo y aperiódico en el espacio de Gromov-Hausdorff $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$. Si todas las órbitas tienen un número finito de finales, entonces la relación de equivalencia \mathcal{R} es afable.*

Laminaciones transversalmente Cantor y límites inversos. Como ya hemos dicho, J. Bellissard, R. Benedetti y J.-M. Gambaudo prueban en [BBG] que la envoltura de cualquier mosaico aperiódico y repetitivo del plano es un límite inverso de superficies ramificadas. Ya hemos observado también que la idea de inflación se traslada sin problemas a las laminaciones definidas a partir de grafos aperiódicos y repetitivos. Para trasladar esa idea a las laminaciones transversalmente Cantor (que supondremos minimales y sin holonomía para simplificar) es necesario “teselar” las hojas, de la misma manera que lo están en las envolturas de los mosaicos. Para ello, introduciremos la noción de *descomposición simplicial*, análoga a la noción de triangulación introducida por M.A. Bermúdez y G. Hector [BH] en el contexto boreliano. Partiendo de una idea de A. Phillips y D. Sullivan [PS] y siguiendo el mismo esquema que permite probar que cualquier variedad diferenciable es triangulable, probamos la existencia de este tipo de descomposiciones para cualquier laminación transversalmente Cantor.

Teorema 6.3 (de existencia de descomposiciones simpliciales). *Existen descomposiciones simpliciales de cualquier laminación modelada transversalmente por un espacio 0-dimensional.*

Este resultado nos da la clave para probar la siguiente extensión del teorema citado de [BBG]:

Teorema 6.20. *Cualquier laminación transversalmente Cantor minimal, sin holonomía y de clase C^1 es un límite inverso de variedades ramificadas e inmersiones celulares.*

La memoria está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 1 recordamos la noción de laminación, sus propiedades básicas y algunos ejemplos elementales. También recordamos la noción de *holonomía*, mediante la construcción del *pseudogrupo de holonomía*. Por último, introducimos los *espacios foliados por grafos*, que no son otra cosa que laminaciones en las que las hojas no son variedades sino grafos. Como veremos, esta generalización no es vacía y de hecho será central a lo largo de la memoria.

El capítulo 2 comienza recordando la definición del *grafo de Cayley* de un grupo finitamente generado, noción que adaptamos a *pseudogrupos grafados*, es decir, dotados de un sistema de generadores que define una estructura de grafo sobre las órbitas.

Después estudiamos la estructura métrica a gran escala de los pseudogrupos grafados y su comportamiento en el caso de los pseudogrupos compactamente generados. Para finalizar el capítulo analizamos los pseudogrupos definidos sobre el conjunto de Cantor y probamos una serie de teoremas de realización.

En el capítulo 3 presentamos la construcción general de los espacios foliados de Gromov–Hausdorff, así como las nociones básicas que permiten hablar de dinámica adaptadas a este caso. Probamos un criterio de minimalidad, que nos asegura que los grafos repetitivos se corresponden exactamente con los subconjuntos minimales.

En el capítulo 4 reconstruimos la laminación de Ghys–Kenyon, no a partir del árbol de Kenyon, sino mediante una familia de árboles aperiódicos y repetitivos parametrizada por sucesiones de cuatro símbolos. Estudiamos las propiedades de esta aplicación de codificación, llegando a concluir que la dinámica transversa del ejemplo se reduce a la de una máquina de sumar binaria.

Además mostramos otros ejemplos relevantes de minimales en el espacio de Gromov–Hausdorff $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^2)$.

El capítulo 5 está dedicado a estudiar la dinámica transversa medible y topológica de los minimales en el espacio de Gromov–Hausdorff $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^2)$. Recordamos las definiciones de las relaciones de equivalencia afables y los diagramas de Bratteli, adaptando el concepto de *descomposición por cajas* de [BBG] al caso de grafos. Además presentamos un *lema de inflación*, que proporciona una sucesión de relaciones compactas abiertas que constituyen la base del teorema 5.24. Por último, usando los argumentos ya descritos probamos el teorema 5.41.

El capítulo 6 está destinado a probar que las laminaciones transversalmente Cantor, minimales y sin holonomía son límites inversos de variedades ramificadas.

En primer lugar introducimos las nociones de *descomposición por cajas* y *descomposición por cajas simpliciales* para laminaciones, y probamos que toda laminación transversalmente Cantor posee una descomposición por cajas. Por último demostramos el teorema 6.20.

Laminaciones y espacios foliados por grafos

Una *foliación* es una descomposición de una n -variedad en subvariedades conexas de dimensión p , llamadas *hojas*, que localmente están dispuestas como los subconjuntos de horizontales $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ con segunda coordenada constante.

Una *laminación* es una generalización del concepto de foliación válida para espacios metrizables, localmente compactos y separables, donde cada transversal \mathbb{R}^{n-p} se sustituye por un subespacio del mismo tipo.

Presentaremos aquí las nociones básicas para el estudio dinámico de laminaciones e introduciremos otra generalización, los *espacios foliados por grafos*, en los que las hojas son grafos localmente finitos en vez de variedades. Como veremos en los capítulos siguientes, esta generalización no está vacía de contenido.

1.1. Laminaciones

Definición 1.1. Consideremos M y Z dos espacios métricos, localmente compactos y separables. Una *laminación* \mathcal{L} de dimensión p sobre M modelada transversalmente por Z es una partición de M por subconjuntos conexos, denominados *hojas*, de forma que existe un atlas, $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_i \rightarrow \mathbb{R}^p \times T_i \mid T_i \text{ es abierto de } Z\}_{i \in I'}$, en el que el cambio de coordenadas se escribe como

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x_i, y_i) = (\alpha_{ij}(x_i, y_i), \sigma_{ij}(y_i)), \quad (1.1)$$

y cada *placa* $\varphi^{-1}(P_i \times \{*\})$ que corta a una hoja L de \mathcal{L} está contenida en L . Cada conjunto $\varphi_i^{-1}(\{*\} \times T_i)$ se denomina *transversal local*. El atlas \mathcal{A} es un *atlas foliado* y cada carta es una *carta foliada*. Diremos que la laminación es de clase C^k , $0 \leq k \leq \omega$, cuando las aplicaciones $\alpha_{ij}(\cdot, y_j)$ sean de clase C^k para cada $i, j \in I$ y cada $y_j \in T_j$.

Observación 1.2. La condición (1.1) implica que cada hoja de la laminación posee una estructura natural de variedad de clase C^k y dimensión p . En efecto, si P denota una placa una hoja L , la familia de cartas $\varphi_{i|P} : P \rightarrow \mathbb{R}^p$ forman un atlas para L .

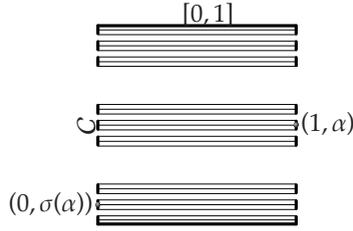


Figura 1.1.
El espacio $M = \mathbb{R} \times C / \sim$.

Definición 1.3. Sea $f : M \rightarrow N$ una función continua entre dos espacios dotados de sendas laminaciones \mathcal{L}_M y \mathcal{L}_N . Diremos que f es una *aplicación foliada* si para cada hoja $L \in \mathcal{L}_M$ existe una hoja $L' \in \mathcal{L}_N$ tal que $f(L) \subset L'$. Una aplicación foliada es de *clase C^l a lo largo de las hojas* si $f|_L : L \rightarrow L'$ es de clase C^l en el sentido usual para cada hoja $L \in \mathcal{L}_M$ y las derivadas parciales de orden inferior a l dependen continuamente de la hoja.

Ejemplo 1.4. El ejemplo más simple de laminación es la *laminación horizontal*. Consideremos una p -variedad N de clase C^k y un espacio métrico localmente compacto y separable X . Es obvio que la partición $\mathcal{H} = \{N \times \{x\}\}_{x \in X}$ es una laminación modelada transversalmente por X del espacio $M = N \times X$ de dimensión p y clase C^k .

Ejemplo 1.5 (El *shift* de Bernoulli). Sea $C = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ el conjunto de todas las sucesiones infinitas (en ambas direcciones) de ceros y unos. Si se dota a $\{0, 1\}$ de la topología discreta, la topología producto sobre C lo convierte en un conjunto de Cantor.

El *shift de Bernoulli* es la aplicación $\sigma : C \rightarrow C$ dada por $\sigma(\alpha)_i = \alpha_{i-1}$, con $\alpha = (\alpha_i) \in C$. Puede verse como un desplazamiento de las sucesiones hacia la derecha:

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha = & \cdots & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ & & & & \downarrow \sigma & & & \\ \sigma(\alpha) = & \cdots & \alpha_{-3} & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \end{array}$$

Es fácil comprobar que σ es un homeomorfismo. Definimos entonces el espacio cociente $M = \mathbb{R} \times C / (x, \alpha) \sim (x - 1, \sigma(\alpha))$. La laminación horizontal \mathcal{H} sobre $\mathbb{R} \times C$ induce una laminación \mathcal{L}_σ sobre el cociente M , que obviamente está modelada transversalmente por el conjunto de Cantor C (véase la figura 1.1).

Ejemplo 1.6 (Suspensión de un homeomorfismo). El ejemplo anterior se puede generalizar para cualquier homeomorfismo de un espacio en sí mismo. En efecto, sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo de X , un espacio métrico localmente compacto y separable. Consideremos el espacio producto $\mathbb{R} \times X$ junto con la laminación horizontal \mathcal{H} . El grupo de los enteros \mathbb{Z} actúa sobre $\mathbb{R} \times X$ mediante la acción diagonal $n \cdot (t, x) = (t - n, f^n(x))$, que resulta ser libre y propiamente discontinua. En consecuencia la proyección π sobre el espacio cociente $M = \mathbb{Z} \backslash (\mathbb{R} \times X)$ es un

revestimiento. De hecho se tiene el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times X & \xrightarrow{p_1} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ M & \xrightarrow{p_1^*} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

donde p_1^* es la aplicación inducida por la primera proyección coordenada p_1 y exp la aplicación exponencial. La terna (M, p_1^*, \mathbb{S}^1) es un fibrado de fibra X sobre \mathbb{S}^1 , cuyo grupo estructural se reduce al grupo de homeomorfismos generado por f . Dado que la acción de \mathbb{Z} preserva la laminación horizontal \mathcal{H} , ésta induce una laminación \mathcal{L}_f de M de dimensión 1 y modelada transversalmente por X .

Ejemplo 1.7 (Suspensión de una representación). La suspensión de un homeomorfismo es un caso particular de lo que se conoce por *suspensión de una representación*: sean B una variedad conexa y X un espacio métrico, localmente compacto y separable. Consideremos una representación $\rho : \pi_1(B) \rightarrow \text{Homeo}(X)$ del grupo fundamental de B en el grupo de los homeomorfismos de X sobre X . Si $r : \widetilde{B} \rightarrow B$ es la cubierta universal de B , tenemos una acción diagonal de $\pi_1(B)$ sobre $\widetilde{B} \times X$ dada por $[\sigma] \cdot (\tilde{b}, x) = ([\sigma] \cdot \tilde{b}, \rho([\sigma])(x))$, con $[\sigma] \cdot \tilde{b}$ la acción natural de $\pi_1(B)$ sobre \widetilde{B} . La acción diagonal es libre y propiamente discontinua, en consecuencia la aplicación cociente $\pi : \widetilde{B} \times X \rightarrow M = \pi_1(B) \backslash (\widetilde{B} \times X)$ es una cubierta. Además, se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B} \times X & \xrightarrow{p_1} & \widetilde{B} \\ \pi \downarrow & & \downarrow r \\ M & \xrightarrow{p_1^*} & B \end{array}$$

donde, como antes, p_1^* está inducida por p_1 , la primera proyección coordenada. Como en el ejemplo anterior, la terna (M, p_1^*, B) es un fibrado localmente trivial con fibra X y cuyo grupo estructural se reduce a la imagen de ρ .

Por otro lado, la acción diagonal actúa por homeomorfismos foliados, por lo que la laminación horizontal sobre $\widetilde{B} \times X$ induce una laminación \mathcal{L}_ρ sobre el M como en el ejemplo 1.6. La laminación inducida \mathcal{L}_ρ es de dimensión $\dim B$ y está modelada transversalmente por X .

En todos estos ejemplos no se ha dado explícitamente ningún atlas para la laminación, ya que es sencillo construir un atlas foliado compatible. Basta considerar un atlas de trivialidad del fibrado localmente trivial subyacente.

Dos atlas que producen la misma laminación se dice que son *equivalentes*. De hecho, dos atlas foliados son equivalentes si y sólo si la unión de ambos sigue siendo un atlas foliado. De esta manera, una laminación puede pensarse también como una clase de equivalencia de atlas foliados.

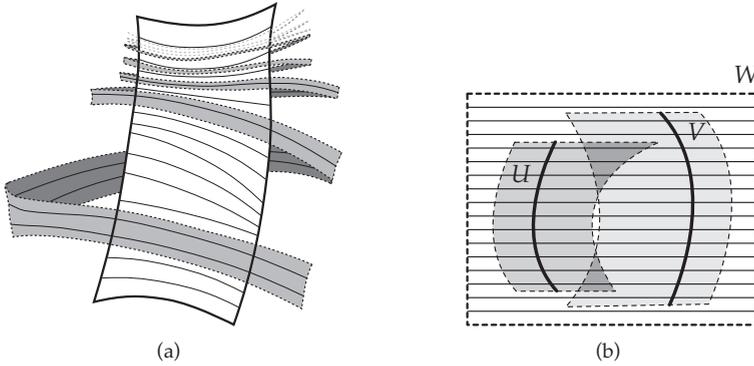


Figura 1.2.

(a) Una placa puede cortar a un número infinito de placas, (b) en un buen atlas foliado esto no puede ocurrir.

Una pregunta natural es si es posible construir atlas foliados equivalentes a uno dado con buenas propiedades de finitud local (véase la figura 1.2(a)). El objetivo del resto de esta sección es recordar la construcción de este tipo de atlas (véase [HH]).

Definición 1.8. Un atlas foliado \mathcal{A} se dice que es *bueno* si

1. es localmente finito,
2. las cartas son relativamente compactas y
3. si U y $V \in \mathcal{A}$ tienen intersección no vacía, entonces existe un abierto foliado en producto W tal que $\overline{U \cap V} \subseteq W$ (véase la figura 1.2(b)).

La propiedad 3 implica que una placa de U corta, a lo sumo, a una placa de V .

Proposición 1.9. Dado un atlas foliado, existe un buen atlas foliado equivalente a éste.

Demostración. Sea \mathcal{A} un atlas foliado sobre un espacio métrico, localmente compacto y separable M . La estrella de $x \in M$, denotada por $\text{Star}(x, \mathcal{A})$, es la unión de los abiertos de \mathcal{A} que contienen a x . Dado que espacio M es paracompacto (por ser métrico), un resultado clásico de topología general dice que existe \mathcal{A}' , un refinamiento de \mathcal{A} , tal que $\text{Star}(x, \mathcal{A}') \subset V \in \mathcal{A}$ para cada $x \in M$.

Si M es compacto, podemos considerar ϵ un número de Lebesgue para \mathcal{A}' . Para cada $x \in M$ se escoge $V \in \mathcal{A}$ tal que $x \in V$ y denotemos por $\psi : V \rightarrow P \times X$ la carta correspondiente. Podemos tomar un entorno producto alrededor de $\psi(x)$, de forma que se tenga la carta $\psi_x : V_x \subset V \rightarrow P_x \times X_x$ y que el diámetro de V_x sea menor que ϵ . De esta forma dado V_x , existe $U_x \in \mathcal{A}'$ que lo contiene. Quizá haciendo P_x y X_x menores aún, podemos suponer que V_x es relativamente compacto y que $\overline{V_x} \subset U_x$. Por la compacidad de M otra vez, podemos tomar \mathcal{B} un subatlas finito del

atlas foliado $\{\psi_x : V_x \rightarrow P_x \times X_x \mid x \in M\}$. El atlas \mathcal{B} cumple las condiciones de la proposición. En efecto, las propiedades 1 y 2 son directas. Comprobemos 3: Dados V_x y $V_{x'} \in \mathcal{B}$ de intersección no vacía, tomemos $y \in V_x \cap V_{x'}$. Entonces se tiene que

$$y \in \overline{V_x \cup V_{x'}} \subset \overline{V_x} \cup \overline{V_{x'}} \subset U_x \cup U_{x'} \subset \text{Star}(y, \mathcal{A}') \subset V,$$

para cierto entorno coordenado $V \in \mathcal{A}$.

Si M no es compacto, al ser segundo numerable y localmente compacto, podemos escribirlo como la unión creciente de una familia de compactos, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, de forma que K_i esté contenido en el interior de K_{i+1} . Para cada i tomamos ϵ_i un número de Lebesgue para \mathcal{A}' considerándolo como un cubrimiento de $K_i - \text{int } K_{i-1}$. Fijado i , se toma \mathcal{B}_i un cubrimiento finito de $K_i - \text{int } K_{i-1}$ por entornos producto relativamente compactos, construidos como en el caso compacto, de diámetro menor que

$$\delta_i = \min\left\{\epsilon_i, \frac{1}{2}d(\partial K_{i+1}, K_i), \frac{1}{2}d(\partial K_i, K_{i-1})\right\}.$$

El conjunto $\mathcal{B} = \bigcup_i \mathcal{B}_i$ es un atlas foliado localmente finito, ya que $V_i \cap V_{i+2} = \emptyset$ para cualesquiera $V_i \in \mathcal{B}_i$ y $V_{i+2} \in \mathcal{B}_{i+2}$. Así se tienen 1 y 2. Razonando como en el caso compacto, se tiene 3. \square

1.2. Radio de inyectividad y convexidad de una laminación

A pesar de las propiedades de los buenos atlas, éstas no fuerzan ninguna restricción sobre la geometría de las placas. En esta sección veremos que, fijada una métrica de Riemann sobre las hojas, es posible tomar estas placas geodésicamente convexas. Para ello es necesario introducir métricas de Riemann sobre laminaciones.

Sea (M, \mathcal{L}) una laminación de clase, al menos, C^1 . Cada hoja de \mathcal{L} es una variedad de clase C^1 , y por lo tanto tiene sentido considerar su fibrado tangente. La unión $T\mathcal{L} = \bigsqcup_{L \in \mathcal{L}} TL$ de todos estos fibrados con la topología natural, constituye el fibrado tangente a la laminación \mathcal{L} . Una aplicación continua $g : T\mathcal{L} \times T\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}(M)$ es una *métrica de Riemann (foliada)* si la aplicación restringida $g|_{TL}$ lo es en el sentido clásico. En otras palabras, es posible definir localmente los coeficientes de la métrica como aplicaciones continuas diferenciables a lo largo de las hojas.

Tenemos así que cada hoja es una variedad de Riemann, luego es posible definir la aplicación exponencial $\exp_x : T_x L = T_x \mathcal{L} \rightarrow L$, siendo L la hoja por $x \in M$. Es conocido que \exp_x es un difeomorfismo si nos restringimos a una bola suficientemente pequeña alrededor de $\mathbf{0} \in T_x L$. El *radio de inyectividad* en el punto x es la cantidad

$$\text{inj}(x) = \sup\{\epsilon > 0 \mid \exp_x : B_{T_x L}(\mathbf{0}, \epsilon) \rightarrow B_L(x, \epsilon) \text{ es un difeomorfismo}\}.$$

Obviamente $\text{inj}(x)$ es positivo y puede tomar el valor $+\infty$.

Otro resultado básico de geometría de Riemann asegura que las bolas en L suficientemente pequeñas serán *convexas geodésicas*, i.e. dos puntos de dicha bola

se pueden unir por un único segmento geodésico (una geodésica que minimiza la distancia) contenido en dicha bola. De forma similar al radio de inyectividad se define el *radio de convexidad* en x como

$$\text{conv}(x) = \sup\{\epsilon > 0 \mid B_L(x, \epsilon) \text{ es un convexo geodésico}\}.$$

Las aplicaciones $\text{inj} : L \rightarrow \mathbb{R}$ y $\text{conv} : L \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas para cada $L \in \mathcal{L}$, pero consideradas sobre M no lo son. Como contraejemplo basta considerar un toro foliado por una hoja \mathbb{S}^1 y rectas acumulándose sobre dicho \mathbb{S}^1 . Sobre las rectas el radio de inyectividad es infinito para cada punto, sobre \mathbb{S}^1 es una cantidad finita.

En el caso clásico, se define el radio de inyectividad de una variedad de Riemann como el ínfimo de los radios de inyectividad en cada uno de sus puntos, y de forma análoga para el radio de convexidad. Es natural definir los *radios de inyectividad y convexidad para una laminación* como

$$\begin{aligned} \text{inj}(\mathcal{L}) &= \inf\{\text{inj}(L) \mid L \in \mathcal{L}\} = \inf\{\text{inj}(x) \mid x \in M\} \quad \text{y} \\ \text{conv}(\mathcal{L}) &= \inf\{\text{conv}(L) \mid L \in \mathcal{L}\} = \inf\{\text{conv}(x) \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

A pesar de que $\text{inj} : M \rightarrow (0, +\infty]$ y $\text{conv} : M \rightarrow (0, +\infty]$ no son continuas, es posible acotar inferiormente estas funciones siempre y cuando M sea compacto.

Teorema 1.10. *Si M es compacto, $\text{inj}(\mathcal{L})$ y $\text{conv}(\mathcal{L})$ son positivos.*

Demostración. Si N es una variedad de Riemann se conocen las desigualdades

$$\begin{aligned} \text{inj}(N) &\geq \min\left\{\frac{\pi}{\sqrt{K}}, \frac{1}{2}(\text{longitud del lazo geodésico más corto})\right\}, \\ \text{conv}(N) &\geq \min\left\{\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{1}{2}\text{inj}(N)\right\}, \end{aligned}$$

siendo $K > 0$ una cota superior para la curvatura seccional de N . Por lo tanto, basta probar que en las hojas de (M, \mathcal{L}) no podemos encontrar lazos arbitrariamente cortos y que su curvatura seccional está acotada superiormente por una constante.

Comencemos por acotar la curvatura seccional sec . Recordemos que $\text{sec}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ sólo depende del plano generado por los vectores \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 . Así pues podemos considerar sec definida sobre el fibrado unitario de la laminación

$$U\mathcal{L} = \{\mathbf{w} \in T\mathcal{L} \mid \|\mathbf{w}\| = 1\}.$$

La aplicación $\text{sec} : U\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ es obviamente continua. La fibra de $U\mathcal{L}$ es la esfera $\mathbb{S}^{\dim \mathcal{L}}$. Dado que M es compacto, $U\mathcal{L}$ también lo es. Luego existe $K > 0$ tal que $\text{sec}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) < K$.

Para terminar veamos que la longitud de las geodésicas cerradas está también acotada inferiormente. Supongamos lo contrario, es decir, tenemos una familia de

geodésicas $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de forma que $\inf \text{long}(\gamma_n) = 0$. Definimos $x_n = \gamma_n(0)$ y $\mathbf{v}_n = \gamma_n'(0)$. Supondremos que las geodésicas están parametrizadas por la longitud de arco, por lo tanto $\|\mathbf{v}_n\| = 1$. Como $U\mathcal{L}$ es compacto, podemos suponer que $\{(x_n, \mathbf{v}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente. Dado que la métrica es continua, y las geodésicas son soluciones de una ecuación diferencial que depende continuamente de la métrica, se obtiene que la geodésica por x en la dirección de \mathbf{v} es $\gamma(t) = x$, que es absurdo. Por lo tanto la longitud de las geodésicas cerradas está acotada por una constante positiva. \square

Obsérvese que, de hecho, la compacidad local implica que tanto el radio de inyectividad como el de convexidad están acotados inferiormente, de manera local, por una cantidad positiva. Así, este hecho nos permite asegurar que existen atlas foliados con placas geodésicamente convexas.

Proposición 1.11. *Sea una laminación \mathcal{L} sobre un espacio topológico M . Existen un buen atlas foliado para \mathcal{L} de forma que las placas son bolas geodésicas geodésicamente convexas. Más aún, podemos exigir que el abierto W del punto 3 de la definición 1.8 tenga placas geodésicamente convexas.*

Demostración. La prueba de este resultado consiste, básicamente, en repetir el argumento de la demostración de la existencia de buenos atlas (proposición 1.9) partiendo de un atlas particular.

En efecto, dado un punto $x \in M$ existe una pequeña transversal X_x que pasa por x y $0 < \epsilon < \inf\{\text{conv}(y) \mid y \in X_x\}$ de forma que el abierto $U_x = \bigcup_{y \in X_x} B_{L_y}(y, \epsilon)$ sea un abierto foliado en producto, siendo L_y la hoja por y . Así tenemos un atlas $\mathcal{A} = \{\phi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^p \times X_x\}$, cuyas placas son convexas geodésicas. Ahora basta aplicar el argumento de la proposición 1.9 al atlas \mathcal{A} con una pequeña modificación: siguiendo la notación de aquella prueba, basta exigir que los abiertos foliados V_x en producto tengan también placas geodésicamente convexas. \square

Observación 1.12. En este caso, la intersección de dos placas es un abierto geodésicamente convexo en la hoja, y por lo tanto, es contráctil. Por otro lado, si modificamos el argumento de la prueba anterior, y exigimos que $\epsilon < \frac{1}{8} \inf\{\text{conv}(y) \mid y \in X_x\}$, obtenemos un buen atlas foliado \mathcal{A} con placas geodésicamente convexas, donde además la estrella de cualquier punto,

$$\text{Star}(x, \mathcal{A}) = \bigcup \{P \mid P \text{ es una placa de } \mathcal{A} \text{ y } x \in P\},$$

está contenido en un abierto geodésicamente convexo de la hoja que pasa por el punto $x \in M$.

1.3. Holonomía

Intuitivamente hablando, la holonomía da información de *como se enrollan las hojas con otras*, de forma similar a la aplicación de primera vuelta para flujos. Formalmente, esta información nos la ofrece el pseudogrupo de holonomía.

Fijemos un buen atlas foliado $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^p \times X_i\}_{i \in I}$ para una laminación (M, \mathcal{L}) . La unión disjunta $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$, es una *transversal completa*, llamada *eje de \mathcal{A}* . Obsérvese que X modela transversalmente la laminación \mathcal{L} . Cada transversal local X_i se identifica naturalmente con el subespacio $\varphi_i^{-1}(\{x_i\} \times X_i)$ de M , fijado un punto $x_i \in \mathbb{R}^p$. Luego, es posible identificar X con el subespacio $\bigcup_i \varphi_i^{-1}(\{x_i\} \times X_i)$ de M , una vez escogida una familia de puntos $x_i \in \mathbb{R}^p$.

Definición 1.13. Sean U_i y U_j dos entornos coordenados de un buen atlas foliado \mathcal{A} con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, cuya unión está contenida en un abierto distinguido U_{ij} . Se define la *transformación de holonomía* $\sigma_{ij} : D_{ij} \subset X_i \rightarrow D_{ji} \subset X_j$ como la aplicación definida de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij}(y_i) = y_j \iff \begin{array}{l} \text{las placas que pasan por } y_i \text{ e } y_j \\ \text{están contenidas en una placa de } U_{ij}. \end{array}$$

Es obvio que los conjuntos D_{ij} y D_{ji} son abiertos de X_i y X_j respectivamente y σ_{ij} es un homeomorfismo entre ellos.

Recordemos que un *pseudogrupo de transformaciones* Γ sobre un espacio topológico X es una familia de homeomorfismos de abiertos de X sobre abiertos de X cerrada para la composición, la restricción y la inversión, que contiene a la identidad y a cualquier homeomorfismo que pertenezca localmente a Γ .

Definición 1.14. El menor pseudogrupo que contiene a la familia de homeomorfismos $\{\sigma_{ij} \mid i, j \in I\}$, denotado por Γ , se denomina *pseudogrupo de holonomía de \mathcal{L}* reducido a la transversal X .

El pseudogrupo de holonomía describe la dinámica transversa de la laminación en restricción a la transversal X .

Definición 1.15. Dos pseudogrupos Γ y Γ' sobre X y X' respectivamente son *equivalentes en el sentido de Haefliger* si Γ y Γ' son la restricción a X y X' de un pseudogrupo Γ'' que opera sobre $X \sqcup X'$ de manera que X y X' cortan a todas las órbitas de Γ'' .

Proposición 1.16 ([Hae1]). *Si Γ y Γ' son dos pseudogrupos de holonomía de dos buenos atlas foliados \mathcal{A} y \mathcal{A}' de una laminación (M, \mathcal{L}) , entonces Γ y Γ' son equivalentes.*

De hecho, se llama *estructura transversa* de una laminación (M, \mathcal{L}) a la clase de equivalencia de su pseudogrupo de holonomía.

Sea L un hoja de \mathcal{L} y $x \in L \cap X$. Consideremos el subgrupo de isotropía

$$\Gamma_x = \{h \in \Gamma \mid h(x) = x\}$$

y el grupo de gérmenes correspondientes \mathcal{H}_x . Consideremos otro punto y en $X \cap L$. Dado que ambos puntos están en la misma hoja, existe un homeomorfismo en Γ tal que $f(x) = y$. Este elemento define un isomorfismo entre los grupos \mathcal{H}_x y \mathcal{H}_y por conjugación. Por lo tanto está justificado denotar al grupo \mathcal{H}_x por \mathcal{H}_L y definir:

Definición 1.17. El grupo \mathcal{H}_L es el *grupo de holonomía de la hoja $L \in \mathcal{L}$* . Si \mathcal{H}_L es nulo diremos que *la hoja L no tiene holonomía*.

1.4. Espacios foliados por grafos

Recordemos que un *grafo* es un par $G = (V, E)$ de conjuntos de *vértices* y *aristas* respectivamente, junto con un aplicación $\Omega : E \rightarrow \{\{v, v'\} \mid v, v' \in V\}$. Si $\Omega(e) = \{v, v'\}$, los vértices v y v' son los *extremos* de e . Si $v = v'$ que e es un bucle. La *valencia* de un vértice v es el número aristas que lo tienen como extremo, contando los bucles como dobles. Si la valencia de todos los vértices es finita decimos que el grafo es localmente finito. La realización geométrica de un grafo G es el CW-complejo que se obtiene de la siguiente manera: tomamos el espacio $V \sqcup [0, 1] \times E$, con V y E la topología discreta e identificamos los extremos de v con los puntos finales del segmento $(0, v)$ y $(1, v)$. Observemos que un grafo es localmente finito si y solamente si su realización geométrica es localmente compacta.

Dado un grafo, existe una función distancia natural sobre él, en la que dos vértices distan tanto como el número mínimo de aristas por las que hay que pasar para ir de uno a otro, haciendo a las aristas isométricas al intervalo unidad $[0, 1]$ (salvo si $\Omega(e) = \{v\}$).

Un *morfismo* entre grafos $f : G \rightarrow G'$ es un par de aplicaciones $f_V : V \rightarrow V'$ y $f_E : E \rightarrow E'$ tales que $\Omega'(f_E(e)) = \{\{f_V(v), f_V(w)\} \mid v, w \in \Omega(e)\}$. Si f posee una inversa g (i.e. $f_V \circ g_V = \mathbb{1}_V$ y $f_E \circ g_E = \mathbb{1}_E$) f es un *isomorfismo*. Un morfismo entre grafos produce una aplicación continua entre sus realizaciones. Un isomorfismo induce un homeomorfismo en las realizaciones geométricas. De hecho, se trata de una isometría con la métrica natural.

Es posible considerar las aristas como orientadas de forma que “apunten” en dirección de un vértice: un *grafo dirigido* es un grafo $G = (V, E)$ en el que se sustituye Ω por dos aplicaciones s y $r : E \rightarrow V$, que asignan a cada arista e su *vértice origen* $s(e)$ y su *vértice final* $r(e)$. La arista e está *orientada* de $s(e)$ a $r(e)$. En este caso valencia de un vértice $v \in V$ se escribe explícitamente como

$$\text{val}_G(v) = \#\{\varepsilon \in E \mid s(\varepsilon) = v\} + \#\{\varepsilon \in E \mid r(\varepsilon) = v\}. \quad (1.2)$$

De la misma manera, la realización geométrica se puede escribir como el CW-complejo unidimensional que se obtiene al identificar en el espacio $V \sqcup [0, 1] \times E$ los puntos $s(\varepsilon)$ y $r(\varepsilon) \in V$ con $(0, \varepsilon)$ y $(1, \varepsilon) \in [0, 1] \times E$ respectivamente.

Si en un grafo dirigido “olvidamos” la dirección de las aristas, las realizaciones geométricas del grafo dirigido y del grafo subyacente son iguales.

Los espacios foliados por grafos no son otra cosa que laminaciones en las que las hojas no son variedades, sino grafos.

Definición 1.18. Sea Z un espacio localmente compacto metrizable y separable. Llamamos *atlas foliado* de un espacio localmente compacto metrizable y separable X a una familia \mathcal{A} de cartas locales $\varphi_i : U_i \rightarrow P_i \times X_i$ que satisfacen:

1. P_i es un grafo finito;
2. X_i es un abierto de Z y;

3. si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas se escribe como

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x_i, y_i) = (\alpha_{ij}(x_i, y_i), \sigma_{ij}(y_i)),$$

siendo $\alpha_{ij}(\cdot, y_i)$ un isomorfismo entre subgrafos de P_i y P_j .

Las placas $\varphi_i^{-1}(P_i \times \{*\})$ definen una descomposición \mathcal{F} de \mathfrak{X} en grafos conexos de la manera habitual: las hojas son los menores conjuntos que contienen a cualquier placa que intersecan. Dicha descomposición es una *foliación por grafos*. La compacidad local de \mathfrak{X} implica que la estructura de grafo de las hojas es localmente finita.

Observación 1.19. El conjunto X de los vértices de las hojas de $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ es una transversal completa y cerrada del espacio foliado $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$.

Sobre X está definida la *función de valencia* $\text{val} : X \rightarrow \mathbb{N}$, simplemente como la valencia del vértice en la hoja correspondiente, que siempre es finita. Dicha función es obviamente continua. El carácter continuo de esta función es una característica fundamental de estos espacios.

Como en el caso de laminaciones, tiene sentido hablar de buenos atlas foliados, y la construcción de estos es exactamente la que aparece en la prueba de la proposición 1.9. De forma similar, la construcción del pseudogrupo de holonomía transversal y el grupoide de holonomía transversal así como los resultados relacionados son todos ciertos sin ninguna modificación en el argumento.

Por otro lado, en este caso es posible construir de manera sencilla un atlas análogo al construido en la proposición 1.11:

Proposición 1.20. *Dado un espacio foliado por grafos $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$, existe un buen atlas foliado \mathcal{A} tal que las placas son geodésicamente convexas y la intersección de dos placas es homeomorfa al intervalo $(0, 1)$.*

Demostración. Basta observar que $\mathfrak{X} - X$, el abierto de los puntos interiores de las aristas de \mathfrak{X} , es un fibrado localmente trivial de fibra $(0, 1)$ y base E , donde E es el conjunto de los puntos medios de las aristas. La trivialidad local junto con los abiertos $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ y $(\frac{1}{2}, 1)$ de $(0, 1)$ producen abiertos foliados en producto que cubren $\mathfrak{X} - X$.

Consideremos ahora X , el cerrado que falta por cubrir con cartas. Dado que la función de valencia es continua podemos dividir X en un número contable de abiertos cerrados disjuntos $X = \bigsqcup_{n \geq 0} \text{val}^{-1}(n)$. Cada conjunto $\text{val}^{-1}(n)$ puede cubrirse con el abierto $X^n = \bigcup_{x \in \text{val}^{-1}(n)} B(x, \frac{1}{4})$, denotando $B(x, \frac{1}{4})$ la bola en la hoja por x centrada en ese punto y de radio $\frac{1}{4}$. Es sencillo comprobar que X^n es un fibrado localmente trivial de fibra $B(x, \frac{1}{4})$ y base $\text{val}^{-1}(n)$. Los abiertos de trivialidad proporcionan cartas foliadas que junto con las construidas antes, forman un buen atlas localmente finito con las propiedades deseadas. \square

Pseudogrupos grafados

La noción de *grafo de Cayley* de un grupo finitamente generado es fundamental en el estudio geométrico de los grupos.

El objetivo de este capítulo es extender esta noción a pseudogrupos. La elección de un sistema finito de generadores para un pseudogrupo proporciona una estructura de grafo conexo sobre las órbitas, de manera similar a lo que ocurre con los grafos de Cayley. Esta construcción define una métrica sobre las órbitas del pseudogrupo. Estudiaremos la estructura métrica a gran escala de las órbitas y como se comporta ésta con respecto a la reducción de pseudogrupos.

La estructura de grafo define una función de valencia. Si ésta es continua, podremos realizar geoméricamente todas las órbitas a la vez y definir un espacio foliado por grafos, al que llamaremos *espacio foliado de Cayley del pseudogrupo*. Las hojas de este espacio son las realizaciones de las órbitas y el pseudogrupo de holonomía restringido a la transversal de los vértices no es otro que el pseudogrupo de partida.

Los espacios foliados de Cayley nos permitirán obtener resultados sobre los pseudogrupos de transformaciones del conjunto de Cantor.

2.1. Grafo de Cayley de un grupo

Sea G un grupo de tipo finito, dotado de un sistema finito de generadores S . El *grafo de Cayley de G respecto del sistema de generadores S* es el grafo dirigido $\text{Cay}(G, S) = (G, E_S)$ donde el conjunto de aristas es E está formado por los pares (g, gs) con $s \in S$ (donde la primera y segunda proyección como aplicaciones r y s respectivamente). Obviamente no existen bucles en $\text{Cay}(G, S)$, salvo si $1 \in S$. Como con el resto de los grafos, no se distinguirá entre $\text{Cay}(G, S)$ y su *realización geométrica*, el espacio topológico resultante de identificar $s(e)$ con $(e, 0)$ y $r(e)$ con $(e, 1)$ en $G \sqcup A_S \times [0, 1]$.

Ejemplo 2.1. Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico. Si el orden de G es finito, entonces $\text{Cay}(G, \{g\})$ es un grafo en forma de círculo con $\#G$ vértices. Si $G = \mathbb{Z}$, $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{g\})$ es una recta. Obviamente al sustituir el sistema de generadores obtenemos un grafo distinto. En las figuras 2.1(a) y 2.1(b) se pueden ver dos grafos de Cayley de \mathbb{Z} .

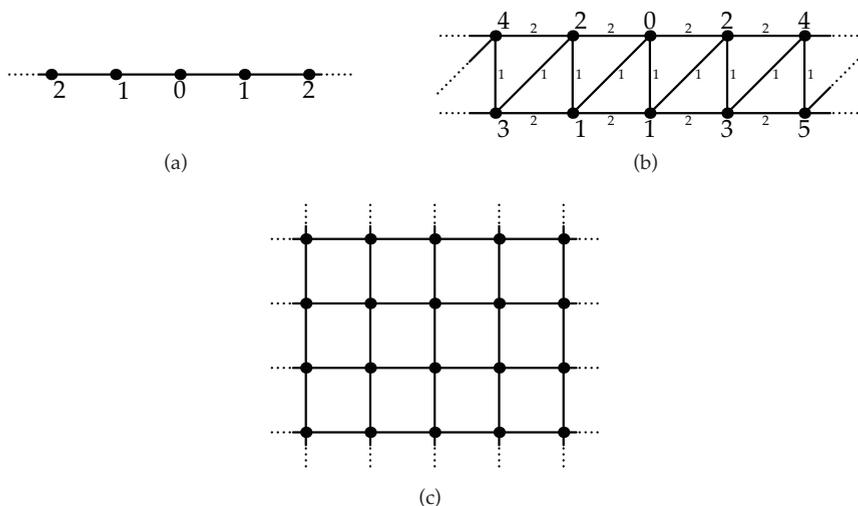


Figura 2.1.

Los grafos de Cayley de (a) \mathbb{Z} respecto de $\{1\}$ ó $\{-1\}$ y (b) respecto de $\{1, 2\}$ y, (c) de \mathbb{Z}^2 para $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Ejemplo 2.2. Consideremos el grupo $G = \mathbb{Z}^2$ y el sistema de generadores $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$. El grafo de Cayley $\mathbb{Z}^2 = \text{Cay}(\mathbb{Z}^2, S)$ tiene por vértices los puntos de \mathbb{Z}^2 uniendo por aristas aquellos vértices que distan 1. Véase la figura 2.1(c).

El grupo G actúa a la izquierda por isomorfismos sobre sí mismo. Esta acción se puede extender naturalmente a las aristas mediante la fórmula $g \cdot (g', g's) = (gg', gg's)$. Dado que la acción de G sobre sí mismo es transitiva, el grafo $\text{Cay}(G, S)$ es *uniforme*, es decir, para cualquier par de vértices existe un automorfismo del grafo que envía un vértice sobre otro. En particular la valencia es constante e igual a $2\#S$. El grafo de Cayley está dotado de una métrica natural definida mediante la *longitud de las palabras*: la longitud de $g \in G$ es el número mínimo de elementos de S (o sus inversos) necesarios para escribir g , es decir

$$\text{long}_S(g) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \mid g = s_1 \cdots s_n \text{ con } s_i \in S \cup S^{-1}\}.$$

La *distancia de las S -palabras* queda entonces definida como

$$d_S(g_1, g_2) = \text{long}_S(g_1^{-1}g_2).$$

Esta distancia es invariante para las traslaciones a izquierda. En efecto, para cada $g \in G$ tenemos que $d_S(gg_1, gg_2) = \text{long}_S(g_1^{-1}g^{-1}gg_2) = d_S(g_1, g_2)$. Es posible extender la distancia d_S de G a todo el grafo $\text{Cay}(G, S)$ haciendo las aristas isométricas al intervalo unidad. Llamaremos a esta distancia d_S la *distancia de las S -palabras sobre $\text{Cay}(G, S)$* . Esta distancia coincide con la distancia natural sobre grafos.

2.2. Pseudogrupos grafados

Consideremos Γ un pseudogrupo de transformaciones sobre un espacio metrizable localmente compacto y separable X . Diremos que Γ es *finitamente generado* si existe una familia finita $\Sigma \subset \Gamma$ de forma que cada $\gamma \in \Gamma$ se puede escribir localmente como una Σ -palabra. Más precisamente, para cada punto $x \in \text{dom } \gamma$ existe un entorno U tal que

$$\gamma|_U = \sigma_n^{\varepsilon_n} \circ \cdots \circ \sigma_1^{\varepsilon_1}|_U, \quad (2.1)$$

donde $\varepsilon_i = 1$ o -1 y $\sigma_i \in \Sigma$ para cada $1 \leq i \leq n$. Por simplicidad supondremos que γ se escribe globalmente como una Σ palabra. Además, podemos suponer que la Σ -palabra que aparece en (2.1) es *reducida*, es decir, que ninguna letra va seguida de su inversa: $\sigma_i^{\varepsilon_i} \neq \sigma_{i+1}^{-\varepsilon_{i+1}}$ para cada $1 \leq i < n$.

La elección del sistema finito de generadores Σ permite realizar cada Γ -órbita, $\Gamma(x) = \{\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma \text{ y } x \in \text{dom } \gamma\}$ como el conjunto de vértices de un grafo localmente finito y conexo por caminos $\bar{\Gamma}(x)$. En efecto, de forma similar a la construcción de los grafos de Cayley, el conjunto de vértices de $\bar{\Gamma}(x)$ será la propia órbita $\Gamma(x)$. Dos vértices $y, z \in \Gamma(x)$ estarán unidos por una arista orientada si existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $z = \sigma(y)$. La métrica natural sobre el grafo $\bar{\Gamma}(x)$ coincide con la distancia de las Σ -palabras: con la convención de que la palabra vacía sea 1_X , definimos la Σ -longitud $\text{long}_\Sigma(\gamma)$ de $\gamma \in \Gamma$ como el número mínimo de generadores necesarios para escribir γ y la *distancia de las Σ -palabras* $d_\Sigma(y, z)$ entre dos puntos $y, z \in \Gamma(x)$ como la Σ -longitud mínima de los elementos $\gamma \in \Gamma$ tales que $z = \gamma(y)$.

Usaremos la notación (Γ, Σ) para indicar que las Γ -órbitas están dotadas de esta estructura métrica, y llamaremos a este par *pseudogrupo grafado*.

Ejemplo 2.3. Cualquier grupo de transformaciones G de un espacio X define un pseudogrupo de transformaciones de X formado por las restricciones de los elementos de G . Un sistema finito de generadores de G , convierte al pseudogrupo en grafado.

Ejemplo 2.4. Si \mathcal{L} es una laminación de un espacio compacto M y A es un buen atlas foliado finito, el pseudogrupo de holonomía del eje X de A es un pseudogrupo grafado si se dota de las σ_{ij} descritas en la definición 1.13.

Sea (Γ, Σ) un pseudogrupo grafado de transformaciones de un espacio metrizable, localmente compacto y separable X . Dado que cada punto de X es un vértice de un grafo, es natural considerar la *aplicación de valencia*, val_Σ , que asocia a cada vértice el número de aristas incidentes en él. Reescribiendo (1.2) para este caso concreto tenemos que $\text{val}_\Sigma(x) = \#\{\sigma \in \Sigma \mid x \in \text{dom } \sigma\} + \#\{\sigma \in \Sigma \mid x \in \text{im } \sigma\}$. Si denotamos por χ_B la aplicación característica del conjunto B , es posible escribir val_Σ en una expresión más útil:

$$\text{val}_\Sigma(x) = \sum_{\sigma \in \Sigma} (\chi_{\text{dom } \sigma}(x) + \chi_{\text{im } \sigma}(x)). \quad (2.2)$$

Como el dominio y la imagen de cada homeomorfismo σ son abiertos en X , las aplicaciones características correspondientes son semicontinuas inferiormente. Por

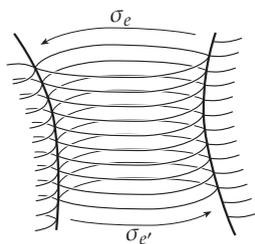


Figura 2.2.

En el ejemplo 2.5 aristas múltiples producen homeomorfismos idénticos

consiguiente val_Σ es semicontinua inferiormente. Obviamente val_Σ será continua si y solamente si los dominios y las imágenes de los homeomorfismos pertenecientes a Σ son abiertos cerrados de X .

Ejemplo 2.5. Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ un espacio foliado por grafos y denotemos por X la transversal completa de los vértices. Veamos que es posible encontrar un sistema de generadores para el pseudogrupo de holonomía reducido X que permite recuperar la estructura de grafo de las órbitas. Cada abierto cerrado $\text{val}^{-1}(n) \subset X$ (con $n \in \mathbb{N}$) es el dominio de n transformaciones asociadas a cada una de las aristas que parten de cada vértice. En efecto, con la métrica natural sobre $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$, en la que cada arista es isométrica a $(0, 1)$, el conjunto $\bigcup_{x \in \text{val}^{-1}(n)} B(x, \frac{1}{2})$ es un abierto foliado en producto homeomorfo a $\text{val}^{-1}(n) \times B(x_0, \frac{1}{2})$, para un $x_0 \in \text{val}^{-1}(n)$ cualquiera fijado. Fijada e una de las (medias) aristas de $B(x_0, \frac{1}{2})$, se obtiene una transformación σ_e definida sobre $\text{val}^{-1}(n)$ de la siguiente manera: dado $x \in \text{val}^{-1}(n)$, $\sigma_e(x) \in X$ es el extremo de la arista correspondiente con e que parte de x .

Estas transformaciones pueden coincidir en un abierto o incluso ser la misma, si por ejemplo se tiene una paquete de aristas múltiples entre dos vértices como en la figura 2.2. Si permitimos estas repeticiones, tenemos una familia Σ de transformaciones que genera Γ y cuyos dominios e imágenes son un cubrimiento localmente finito. Además es obvio que la estructura de grafo generada por Σ es la misma que la original. Así la función de valencia para el pseudogrupo grafado coincide con la de $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$, y por lo tanto es continua.

2.3. Geometría a gran escala

La noción de *casi-isometría "coarse"* o simplemente *casi-isometría* ha sido introducida por M. Gromov en [Gro1]) (véase también [Gro2] y [Gro3]) para el estudio geométrico de los grupos finitamente generados.

Ante todo, recordemos que una *red* en un espacio métrico (M, d) es un subespacio A de M tal que $d(x, A) < C$ para cada punto $x \in M$, para cierta constante $C > 0$

fija. Cuando la constante C sea relevante y deseemos mantenerla en la notación hablaremos de una C -red.

Definición 2.6 ([Gro1]). Dos espacios métricos (M, d) y (M', d') son *casi-isométricos* si existe una aplicación $f : M \rightarrow M'$ tal que existen constantes positivas λ y C verificando $\frac{1}{\lambda}d(x, y) - C \leq d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + C$, para cada par de puntos $x, y \in M$, y además $f(M)$ es una red de M' . De hecho, es posible suponer que $f(M)$ es una C -red. Por otro lado, si $\lambda = 1$, diremos que f es una *isometría a gran distancia*.

Dada una casi-isometría $f : M \rightarrow M'$, existe otra casi-isometría $f' : M' \rightarrow M$ tal que $f' \circ f(M)$ y $f \circ f'(M')$ son redes en M y M' respectivamente. Diremos que f y f' son *inversas a gran distancia*. Como resultado de la existencia de inversas a gran distancia, se tiene que la *relación de casi-isometría* es un relación de equivalencia.

Ejemplo 2.7. i) Una red de un espacio métrico es, obviamente, isométrica a gran distancia al espacio métrico. Así por ejemplo \mathbb{Z} y \mathbb{R} con las distancias usuales son isométricos a gran distancia.

ii) Sea G es un grafo y d la métrica natural sobre él. El conjunto de vértices V de G es una $\frac{1}{2}$ -red de G .

iii) Un espacio métrico compacto M es casi-isométrico a un punto. De hecho, cualquier espacio métrico de diámetro acotado es casi-isométrico a un punto.

iv) El conjunto de los enteros \mathbb{Z} y de los naturales \mathbb{N} con las distancias usuales no son casi-isométricos.

En general, dos espacios métricos M y M' son casi-isométricos (resp. isométricos a gran distancia) si y sólo si existe una biyección bilipschitziana (resp. isometría) entre dos redes de M y M' respectivamente.

En esta misma dirección, también se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.8 (principio de la goma elástica, véase [Gro3]). Sean A un conjunto, (M_1, d_1) y (M_2, d_2) dos espacios métricos geodésicos y $f_i : A \rightarrow M_i$ aplicaciones biyectivas tales que $f_i(A)$ es una red de M_i (con $i = 1, 2$). Si las métricas inducidas por f_i en A son uniformemente equivalentes, entonces M_1 y M_2 son casi-isométricos.

Recordemos que dos métricas d_1 y d_2 sobre un mismo conjunto M son *uniformemente equivalentes* si $\mathbb{1}_M$ es un homeomorfismo uniforme, i.e. existen dos aplicaciones μ_1 y $\mu_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crecientes tales que $d_2(x, y) \leq \mu_1(d_1(x, y))$ y $d_1(x, y) \leq \mu_2(d_2(x, y))$ para cualesquiera $x, y \in M$ (véase [Gro3]). Las aplicaciones μ_1 y μ_2 pueden sustituirse por una sola aplicación: si definimos la función $\mu(r) = \max\{\mu_1(r), \mu_2(r)\}$ es fácil comprobar que cumple las condiciones requeridas.

Demostración del proposición 2.8. Es obvio que (N, d_i) es casi-isométrico a (M_i, d_i) por lo que basta comprobar que (N, d_1) y (N, d_2) son casi-isométricos. De hecho veremos $\mathbb{1}_N$ es una casi-isometría.

Denotemos por d_i la distancia inducida sobre N por f_i , y sea $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función que existe en virtud de la equivalencia uniforme entre estas distancias. Tomemos x e

$y \in N$, y un arco geodésico g de M_1 conectando $f_1(x)$ con $f_1(y)$. Fijemos $n \leq d_1(x, y) + 1$ y dividimos g en n sub-arcos $\{g_i\}_{i=1}^n$ de forma que cada uno tenga longitud inferior a 1. Denotemos por x_i los nuevos puntos que aparecen como extremos de la familia $\{g_i\}$ ($x_0 = x$ y $x_n = y$). Si N es una C_1 -red en M_1 , existe un punto $f(y_i) \in M_1$ a distancia de x_i inferior a C_1 . Entonces aplicando reiteradamente la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} d_2(y_i, y_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^n \mu(d_1(y_i, y_{i+1})) \\ &\leq \sum_{i=0}^n \mu(d_1(f_1(y_i), x_i) + d_1(x_i, x_{i+1}) + d_1(x_{i+1}, f_1(y_{i+1}))) \\ &\leq n\mu(2C_1 + 1) \leq \mu(2C_1 + 1)(d_1(x, y) + 1). \end{aligned}$$

Cambiando los roles de d_1 y d_2 obtenemos $d_1(x, y) \leq \mu(2C_2 + 1)(d_1(x, y) + 1)$, siendo $f_2(N)$ una C_2 -red. En consecuencia de estas dos desigualdades se tiene que $\mathbb{1}_N$ es una casi-isometría. \square

2.4. Reducción de pseudogrupos

Consideremos un abierto $Y \subset X$ que corte a todas las órbitas de Γ . Como se indicaba en el capítulo anterior, el pseudogrupo $\Gamma|_Y$ reducido a Y es equivalente a Γ . De hecho, este ejemplo modela la definición de equivalencia de Haefliger. Nos interesa describir como afecta el proceso de *reducción* o *inducción* (véase [Gab2]) a la estructura métrica de las órbitas de un pseudogrupo grafado (Γ, Σ) .

Como se ha visto al comienzo del capítulo, la elección de Σ un sistema finito de generadores, define una estructura de grafo conexo localmente finito sobre cada Γ -órbita. Las órbitas del pseudogrupo reducido $\Gamma|_Y$ no son otra cosa que la traza de las Γ -órbitas sobre Y . Por lo tanto, cada $\Gamma|_Y$ -órbita hereda una estructura de grafo y una métrica de la Γ -órbita correspondiente. Ahora bien, al eliminar los vértices que pertenecen a $X - Y$ y las aristas incidentes en estos vértices, el grafo que se obtiene en general no es conexo.

Ejemplo 2.9. Consideremos el pseudogrupo Γ sobre \mathbb{S}^1 generado por un sólo homeomorfismo, $g_\alpha(e^{it}) = e^{i(t+\alpha)}$ con $0 < \alpha < 1$ irracional. En este caso, de un punto $e^{it} \in \mathbb{S}^1$ parte una arista a $e^{i(t+\alpha)}$ y llega otra de $e^{i(t-\alpha)}$. Si tomamos $\alpha_0 = \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$, podemos definir el abierto $Y = \{e^{it} \in \mathbb{S}^1 \mid t \in (0, \alpha_0)\}$, que corta a todas las Γ -órbitas porque éstas son densas. Ahora bien, la estructura de grafo de las $\Gamma|_Y$ -órbitas no tiene ninguna arista, ya que dado $y \in Y$, $g_\alpha(y) \notin Y$ para cualquier $y \in Y$.

Como se puede ver en este ejemplo, el problema radica en que la estructura de grafo no proviene, en general, de un sistema de generadores: al restringir los dominios e imágenes de los elementos de Σ a Y obtenemos una familia $\Sigma|_Y$ de elementos de $\Gamma|_Y$, pero esta familia no genera el pseudogrupo $\Gamma|_Y$. De hecho, las órbitas del

pseudogrupo generado por $\Sigma|_Y$ son los conjuntos de vértices de las componentes conexas de sus realizaciones geométricas como grafos. Aún así, usaremos la notación $(\Gamma|_Y, \Sigma|_Y)$ para indicar que las $\Gamma|_Y$ -órbitas están dotadas de la métrica inducida por d_Σ , así como de la estructura de grafo ya mencionada. Nos interesa comparar las estructuras métricas de los pseudogrupos grafados (Γ, Σ) y $(\Gamma|_Y, \Sigma|_Y)$. Más concretamente, determinar condiciones bajo las cuales Γ -órbitas y sus $\Gamma|_Y$ -órbitas sean casi-isométricas.

Puesto que Y corta a todas las Γ -órbitas, cualquier $x \in X$ pertenece al dominio de un elemento $\gamma \in \Gamma$ de forma que su imagen esta contenida en Y . Denotemos por $\Sigma_{x,Y}$ el conjunto de tales elementos de Γ , y la reunión de todos estos conjunto por $\Sigma_{X,Y}$. El sistema de generadores Σ determina la distancia d_Σ sobre cada Γ -órbita. Es natural definir entonces la distancia $d_\Sigma(x, Y)$ como la Σ -distancia entre x y la $\Gamma|_Y$ -órbita $\Gamma(x) \cap Y$, que es la Σ -longitud mínima de los todos los elementos $\Sigma_{x,Y}$.

Definición 2.10. Un abierto Y de X que corta a todas las Γ -órbitas es una Σ -base de X , si existe una constante $C > 0$ tal que $d_\Sigma(x, Y) \leq C$ para cada $x \in X$.

Esta noción constituye el análogo para pseudogrupos grafados de una red en un espacio métrico. De forma similar al caso de espacios métricos, la definición nos garantiza que las órbitas de Γ y $\Gamma|_Y$, dotadas de la distancia de las Σ -palabras, son isométricas a gran distancia.

Definición 2.11. Sean (Γ, Σ) y (Γ', Σ') dos pseudogrupos grafados definidos sobre X y X' respectivamente. El pseudogrupo (Γ', Σ') es un *factor de Kakutani* de (Γ, Σ) si existe una aplicación boreliana $r : X \rightarrow X'$ que envía Γ -órbitas en Γ' -órbitas de manera casi-isométrica. Dos pseudogrupos grafados son *equivalentes en el sentido de Kakutani* si ambos tienen un factor común.

Esta definición es análoga a la dada en [Ghy1], aunque en nuestro caso es puramente boreliana.

Lema 2.12. Si Y es una Σ -base de X , entonces los pseudogrupos grafados (Γ, Σ) y $(\Gamma|_Y, \Sigma|_Y)$ son equivalentes en el sentido de Kakutani.

Demostración. En primer lugar, observemos que los dominios de los elementos de $\Sigma_{X,Y}$ forman un recubrimiento abierto de X , del que es posible obtener un subrecubrimiento numerable. Así obtenemos una familia numerable $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\Sigma_{X,Y}$ cuyos dominios siguen cubriendo X . Consideremos la aplicación boreliana $r : X \rightarrow Y$ definida por $r(x) = \gamma_n(x)$, con n el menor entero tal que $x \in \text{dom } \gamma_n$. Tenemos entonces que para cada punto $x \in X$ y cada par de puntos $y, z \in \Gamma(x)$, $r(\Gamma(x)) \subset \Gamma|_Y(r(x))$ y $d_\Sigma(y, z) - 2C \leq d_\Sigma(r(y), r(z)) \leq d_\Sigma(y, z) + 2C$, siendo C la constante que aparece al ser Y una Σ -base de X . Luego $\Gamma|_Y$ es un factor de Kakutani de Γ , y por lo tanto Γ y $\Gamma|_Y$ son equivalentes en el sentido de Kakutani. \square

Observación 2.13. Si suponemos que el abierto Y de X es relativamente compacto, entonces podemos recubrir su clausura por los dominios de una subfamilia finita

$\Sigma_{\bar{Y}, Y}$ de $\Sigma_{X, Y}$. Además podemos suponer que se trata de abiertos relativamente compactos de X . Luego $Y' = \bigcup_{\bar{y} \in \Sigma_{\bar{Y}, Y}} \text{dom } \bar{y}$ es un abierto relativamente compacto de X tal que $\bar{Y} \subset Y'$. Para cualquier sistema de generadores $\Sigma_{Y'}$ del pseudogrupo reducido $\Gamma|_{Y'}$, se tiene que Y es una $\Sigma_{Y'}$ -base de Y' , ya que las $\Sigma_{Y'}$ -longitudes de los elementos de conjunto finito $\Sigma_{\bar{Y}, Y}$ están acotadas. Así $(\Gamma|_{Y'}, \Sigma_{Y'})$ y $(\Gamma|_Y, \Sigma_{Y'}|_Y)$ son Kakutani equivalentes.

Observación 2.14. Si Y es una Σ -base relativamente compacta de X , entonces cualquier otro abierto relativamente compacto Z que corte a todas las órbitas de Γ es una Σ -base de X . Procediendo como en el caso anterior, podemos considerar una subfamilia finita $\Sigma_{\bar{Y}, Z}$ de Γ tal que los dominios de los elementos de $\Sigma_{\bar{Y}, Z}$ recubren \bar{Y} y sus imágenes están contenidas en Z . Como antes, las Σ -longitudes de los elementos de $\Sigma_{\bar{Y}, Z}$ están acotadas. Luego si la distancia $d_\Sigma(x, Y)$ esta uniformemente acotada, la distancia $d_\Sigma(x, Z)$ lo estará también.

El siguiente resultado es una condición suficiente sencilla para la equivalencia en el sentido de Kakutani.

Proposición 2.15. Sean (Γ, Σ) y (Γ', Σ') dos pseudogrupos grafados. Si existen Y una Σ -base, Y' una Σ' -base, una aplicación biyectiva $f : Y \rightarrow Y'$ y una constante K tales que $\frac{1}{K}d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$, para todo $x, y \in Y$, entonces (Γ, Σ) y (Γ', Σ') son equivalentes en el sentido de Kakutani.

Es posible también probar un principio de la goma elástica para el caso de pseudogrupos similar al dado en el lema 2.8. Este es un criterio de utilidad para comprobar si dos pseudogrupos grafados son Kakutani equivalentes:

Lema 2.16 (principio de la goma elástica para pseudogrupos). Sea A un conjunto y (Γ_1, Σ_1) y (Γ_2, Σ_2) dos pseudogrupos grafados definidos sobre X_1 y X_2 respectivamente. Sean también las aplicaciones biyectivas $f_i : A \rightarrow X_i$ tales que $f_i(A)$ es una Σ_i -base de X_i (para $i = 1, 2$) y los pseudogrupos de transformaciones de A inducidos por f_i son el mismo. Si existen dos funciones crecientes μ_1 y $\mu_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $d_{\Sigma_2}(f_2(x), f_2(y)) \leq \mu_1(d_{\Sigma_1}(f_1(x), f_1(y)))$ y $d_{\Sigma_1}(f_1(x), f_1(y)) \leq \mu_2(d_{\Sigma_2}(f_2(x), f_2(y)))$ para cualesquiera x e $y \in A$, entonces (Γ_1, Σ_1) y (Γ_2, Σ_2) son Kakutani equivalentes.

Demostración. Dado que $f_i(A)$ es una Σ_i -base, sólo es necesario probar que A con las distancias inducidas por las aplicaciones f_i son Kakutani equivalentes. Para ello basta ver que la identidad $\mathbb{1}_A$ es una casi-isometría sobre cada órbita del pseudogrupo inducido. Pero esto se deduce inmediatamente del principio de la goma elástica usual. \square

Observación 2.17. Como en el caso de del principio de la goma elástica usual, es posible reemplazar las aplicaciones μ_1 y μ_2 por una sola. Como en ese caso basta tomar $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2\}$. Además podemos suponer que μ está definida sobre los enteros no negativos, ya que las distancias en los pseudogrupos grafados siempre son enteras.

Ejemplo 2.18. Consideremos Γ como en el ejemplo 2.4. Si Y es un abierto de T que corta a todas las Γ -órbitas (i.e. a todas las hojas de \mathcal{L}). La compacidad de M permite probar que Y es una Σ -base de T , siendo Σ la familia de transformaciones σ_{ij} .

2.5. Pseudogrupos compactamente generados

En el ejemplo 2.18, la compacidad de M garantiza que Γ posee la propiedad de *generación compacta* introducida por A. Haefliger en [Hae2]. Esta propiedad permite definir un mejor sistema de generadores.

Definición 2.19 ([Hae2, Hae3]). Un pseudogrupo Γ de transformaciones de un espacio localmente compacto y Hausdorff X es *compactamente generado* si

1. existe un abierto relativamente compacto Y contenido en X que corta a todas las Γ -órbitas y;
2. existe Σ un sistema de generadores finito para $\Gamma|_Y$ tal que cada $\sigma \in \Sigma$ es la restricción de un elemento $\tilde{\sigma} \in \Gamma$ tal que $\overline{\text{dom } \sigma} \subset \text{dom } \tilde{\sigma}$.

Al sistema de generadores Σ lo llamaremos *sistema de generación compacta para Y* .

Ejemplo 2.20. i) Como se ha dicho anteriormente, el pseudogrupo de holonomía reducido al eje de un atlas foliado de un espacio foliado compacto es compactamente generado. Basta observar que podemos refinar dicho atlas por otro con cartas relativamente compactas, de forma similar a lo hecho para la proposición 1.9.

ii) El pseudogrupo de transformaciones de \mathbb{R} generado por $f(x) = \frac{x}{2}$ es compactamente generado. Basta considerar $Y = (-1, 1)$ y el generador $f|_Y$.

iii) El pseudogrupo de transformaciones de \mathbb{R} generado por $f(x) = -x$ no es compactamente generado, ya que no existen abiertos relativamente compactos que corten a todas las órbitas.

Lema 2.21. Sea Γ un pseudogrupo compactamente generado de transformaciones de X . Sea Y' un abierto relativamente compacto que corta a todas las Γ -órbitas. Entonces existe un sistema de generación compacta para Y' .

Demostración. Sean Y el abierto relativamente compacto cuya existencia nos asegura la hipótesis y Σ un sistema de generación compacta para Y . Dado que Y y Y' son relativamente compactos podemos obtener una familia finita $\Phi \subset \Gamma$ que define una equivalencia entre $\Gamma|_Y$ y $\Gamma|_{Y'}$. Podemos suponer además que cada elemento $\varphi \in \Phi$ es la restricción de un elemento $\tilde{\varphi} \in \Gamma$ definido sobre un entorno de $\overline{\text{dom } \varphi}$. Entonces la familia de homeomorfismos $\Sigma' = \{\varphi \circ \sigma \circ \varphi'^{-1} \mid \varphi, \varphi' \in \Phi \text{ y } \sigma \in \Sigma\}$ es un sistema de generación compacta para Y' . \square

Modificando ligeramente el argumento anterior, es fácil comprobar el siguiente resultado:

Lema 2.22 ([Hae2, Hae3]). *La propiedad ser compactamente generado es invariante por equivalencias de Haefliger.*

Los sistemas de generación compacta permiten eliminar alguna de las dificultades que encontrábamos al restringir pseudogrupos arbitrarios a abiertos cualesquiera. En particular, un sistema de generación compacta sobre Y define una buena estructura de grafo sobre las órbitas como muestra este resultado:

Lema 2.23. *Sea Γ un pseudogrupo compactamente generado de transformaciones de X , un espacio localmente compacto, metrizable y separable, dotado de un sistema numerable de generadores Σ . Sean Y un abierto relativamente compacto que corta a todas las Γ -órbitas y Σ_Y un sistema de generación compacta de Γ sobre Y . Si Y es una Σ -base de X , entonces (Γ, Σ) y $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$ con equivalentes en el sentido de Kakutani.*

Demostración. Según el lema 2.12 es suficiente comprobar que $(\Gamma|_Y, \Sigma|_Y)$ y $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$ son equivalentes en el sentido de Kakutani. Bastará con aplicar el lema de la goma elástica para pseudogrupos. Sean x e $y \in Y$ dos puntos que pertenezcan a la misma $\Gamma|_Y$ -órbita y $K = \max\{\text{long}_\Sigma(\tilde{\sigma}) \mid \sigma \in \Sigma_Y\}$, donde $\tilde{\sigma} \in \Gamma$ es tal que su restricción a Y es σ . Si $y = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_1(x)$ con $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma_Y$, entonces

$$d_\Sigma(x, y) \leq \text{long}_\Sigma(\tilde{\sigma}_n \circ \dots \circ \tilde{\sigma}_1) \leq \sum_{i=1}^n \text{long}_\Sigma(\tilde{\sigma}_i) \leq Kn = Kd_{\Sigma_Y}(x, y).$$

Definimos $\mu_1(n) = Kn$. Por otro lado, observemos que hay un número finito de Σ -palabras de longitud menor o igual a n , entonces está definido el número natural

$$\mu_2(n) = \max\{n, \text{long}_{\Sigma_Y}(w) \mid w \text{ es una } \Sigma\text{-palabra de } \Sigma\text{-longitud } \leq n\}$$

Supongamos que $d_\Sigma(x, y) = n$, entonces $y = w(x)$ donde w tiene Σ -longitud n . Luego es obvio que w se escribirá como una Σ_Y -palabra de Σ_Y -longitud inferior a $\mu_2(n)$. \square

El hecho de que el espacio Y sea una Σ -base es fundamental para obtener el resultado anterior. Consideremos una foliación con una única hoja homeomorfa a \mathbb{R}^2 . Si tomamos $x \in \mathbb{R}^2$, el pseudogrupo de holonomía reducido a la transversal completa $Z = \{x\}$ es compactamente generado. En consecuencia, el pseudogrupo de holonomía reducido a cualquier transversal también lo será, ya que la generación compacta es una propiedad invariante por equivalencias de Haefliger.

Ahora bien, los pseudogrupos reducidos no serán, en general, equivalentes en el sentido de Kakutani. Si dotamos al plano \mathbb{R}^2 de la métrica euclídea y consideramos una red casi-isométrica X (como por ejemplo el retículo entero), los pseudogrupos de holonomía reducidos a Z y X no son Kakutani equivalentes, ya que X no es casi-isométrico a un punto. No obstante, los pseudogrupos de holonomía reducidos a dos conjuntos finitos serán equivalentes en el sentido de Kakutani. En particular, si Y es un conjunto finito (de la red casi-isométrica X) y $y \in Y$, los pseudogrupos obtenidos al restringir Γ a $Z = \{y\}$ e Y serán equivalentes en el sentido de Kakutani, para cualquier sistema de generación compacta.

Nos interesamos por los sistemas de generación compacta para los que existe una base:

Definición 2.24. Sea Σ_Y un sistema de generación compacta sobre Y para un pseudogrupo compactamente generado Γ de transformaciones sobre un espacio localmente compacto, metrizable, separable X . Si existe un abierto relativamente compacto Z tal que $\bar{Z} \subset Y$ y si Z es una Σ_Y -base de Y , entonces Σ_Y es un *buen sistema de generación compacta*.

La existencia de buenos sistemas de generación es algo que cabe esperar para cualquier abierto relativamente compacto. El siguiente lema asegura que esto es así:

Lema 2.25. *Sea Γ un pseudogrupo compactamente generado de transformaciones de un espacio localmente compacto, metrizable y separable X . Para cualquier abierto relativamente compacto $Y \subset X$, existe un buen sistema de generación compacta.*

Demostración. En la observación 2.13 se ha definido la familia finita $\Sigma_{\bar{Y}, Y}$ cuyos dominios son abiertos relativamente compactos que recubren a \bar{Y} . Cada elemento $\bar{\sigma} \in \Sigma_{\bar{Y}, Y}$ es la restricción de un elemento de la familia $\Sigma_{X, Y}$ cuyo dominio contiene a $\overline{\text{dom } \bar{\sigma}}$. Lo que garantiza que el abierto $Z = \bigcup_{\bar{\sigma} \in \Sigma_{\bar{Y}, Y}} \text{im } \bar{\sigma}$ es un abierto relativamente compacto de X de forma que $\bar{Z} \subset Y$. Denotemos por Φ_Y a la restricción de la familia $\Sigma_{\bar{Y}, Y}$ a Y . Si añadimos esta familia finita a cualquier sistema de generación compacta sobre Y obtenemos un nuevo sistema de generación compacta Σ_Y de Γ sobre Y . Ahora bien, Z es una Σ_Y -base, ya que cualquier elemento $y \in Y$ se encuentra en el dominio de algún elemento $\bar{\sigma} \in \Phi_Y$. \square

Observación 2.26. Además, por analogía con la observación 2.14 y con la misma notación que en la prueba, se obtiene un abierto relativamente compacto $Y' = \bigcup_{\bar{\sigma} \in \Sigma_{\bar{Y}, Y}} \text{dom } \bar{\sigma}$ de X que contiene la clausura de Y . Si $\bar{\Sigma}_Y = \{\bar{\sigma} \in \Gamma \mid \sigma \in \Sigma_Y\}$, entonces Y es una $\bar{\Sigma}_Y$ -base y $\bar{\Sigma}_Y$ es un sistema de generación compacta.

Si volvemos al ejemplo, vemos que la equivalencia de Haefliger natural entre $\Gamma|_Z$ y $\Gamma|_Y$ puede ser convertida en una equivalencia de Kakutani, y podemos esperar lo mismo de cualquier equivalencia de pseudogrupos. Precisamente esto se prueba en el teorema 2.28 para lo que necesitamos el siguiente lema:

Lema 2.27. *Sea Γ un pseudogrupo compactamente generado de transformaciones de un espacio metrizable, localmente compacto y separable X . Sean Y e Y' dos abiertos relativamente compactos tales que $Y \cap Y'$ corta a todas las Γ -órbitas. Si Σ_Y y $\Sigma_{Y'}$ son dos buenos sistemas de generación compacta sobre Y e Y' respectivamente, los pseudogrupos grafados $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$ y $(\Gamma|_{Y'}, \Sigma_{Y'})$ son equivalentes en el sentido de Kakutani.*

Demostración. Si la intersección de Y e Y' corta a todas las Γ -órbitas, según el lema 2.25 podemos encontrar un abierto relativamente compacto Z tal que $\bar{Z} \subset Y \cap Y'$ y corte a todas las Γ -órbitas. Según la observación 2.14, y teniendo en cuenta que Σ_Y y $\Sigma_{Y'}$ son buenos sistemas de generación compacta, Z es una Σ_Y -base de Y y lo mismo para Y' . El lema 2.23 nos asegura que $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$ y $(\Gamma|_Z, \Sigma_Y|_Z)$ son equivalentes en el sentido de Kakutani. De la misma forma $(\Gamma|_{Y'}, \Sigma_{Y'})$ y $(\Gamma|_Z, \Sigma_{Y'}|_Z)$ lo son.

Basta aplicar el principio de la goma elástica, para lo que razonaremos de forma similar a la del lema 2.23. Así pues basta comprobar que las métricas de $(\Gamma|_Z, \Sigma_Y|_Z)$ y $(\Gamma|_Z, \Sigma_{Y'}|_Z)$ son uniformemente equivalentes.

Sea $W_{\Sigma_Y}^n$ la familia de las Σ_Y -palabras de Σ_Y -longitud menor o igual a n . Obviamente $W_{\Sigma_Y}^n$ es finita, y por lo tanto si nos restringimos a Z obtenemos una familia de homeomorfismos $W_{\Sigma_Y|_Z}^n$ finita, y que podrá ser vacía. Entonces esta bien definida la aplicación $\mu_Y(n) = \max\{n, \text{long}_{\Sigma_{Y'}}(w) \mid w \in W_{\Sigma_Y|_Z}^n\}$. Es obvio entonces que $d_{\Sigma_{Y'}}(z, z') \leq \mu_Y(d_{\Sigma_Y}(z, z'))$, para cualesquiera z y $z' \in Z$. De forma similar se puede definir $\mu_{Y'}$. \square

Teorema 2.28. *Sean Γ y Γ' dos pseudogrupos compactamente generados de transformaciones de dos espacios localmente compactos, metrizablees y separables X y X' . Sean Y e Y' abiertos relativamente compactos de X y X' que cortan a todas las órbitas de Γ y Γ' , y Σ_Y y $\Sigma_{Y'}$ dos buenos sistemas de generación compacta para Y e Y' respectivamente. Si los pseudogrupos Γ y Γ' son equivalentes en el sentido de Haefliger, entonces los pseudogrupos grafados $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$ y $(\Gamma|_{Y'}, \Sigma_{Y'})$ son equivalentes en el sentido de Kakutani.*

Demostración. Como Γ y Γ' son equivalentes, por definición existe un pseudogrupo Γ'' de transformaciones de la suma topológica $X \sqcup X'$ que se reduce a Γ y Γ' sobre X y X' respectivamente. Los conjuntos Y , Y' y $Y'' = Y \sqcup Y'$ son abiertos relativamente compactos que cortan a todas las Γ'' -órbitas. Por hipótesis Σ_Y y $\Sigma_{Y'}$ son buenos sistemas de generación compacta para $\Gamma|_Y$ y $\Gamma|_{Y'}$ respectivamente. Además del lema 2.25 deducimos que $\Gamma|_{Y''}$ posee un buen sistema de generación compacta, que denotaremos por $\Sigma_{Y''}$. El lema 2.27 asegura que tanto $(\Gamma|_Y, \Sigma_Y)$ y $(\Gamma|_{Y''}, \Sigma_{Y''})$, como $(\Gamma|_{Y'}, \Sigma_{Y'})$ y $(\Gamma|_{Y''}, \Sigma_{Y''})$ son equivalentes en el sentido de Kakutani, de donde se deduce el resultado. \square

2.6. Teoremas de realización

Consideremos un grafo $G = (V, E)$. Recordemos que su realización geométrica es el CW-complejo que se obtiene al considerar V como un conjunto discreto y unir dos de estos vértices mediante una celda de dimensión 1 si los vértices son los puntos extremos de la misma arista de E . Más precisamente la realización geométrica es el espacio cociente $V \sqcup E \times [0, 1] / s(e) \sim (e, 0) \wedge r(e) \sim (e, 1)$.

Por otro lado, en un pseudogrupo grafado (Γ, Σ) , cada órbita $\Gamma(x)$ es grafo conexo, que admite una realización geométrica $\bar{\Gamma}(x)$. Veamos como podemos globalizar este proceso y considerar todos las realizaciones como un único espacio. Para ello, consideremos el espacio topológico X y los paquetes de aristas dadas por las transformaciones de Σ :

$$\tilde{M} = X \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} \text{dom } \sigma \times \{\sigma\} \times [0, 1].$$

Definimos sobre \tilde{M} la relación de equivalencia \sim con $x \sim (x, \sigma, 0)$ y $\sigma(x) \sim (x, \sigma, 1)$ cuando $x \in \text{dom } \sigma$. Sea $\text{Cay}(\Gamma, \Sigma)$ el cociente de \tilde{M} por la relación de equivalencia \sim

y $\pi : \widetilde{M} \rightarrow \text{Cay}(\Gamma, \Sigma)$ la aplicación cociente. Llamaremos \mathcal{F} a la descomposición de $\text{Cay}(\Gamma, \Sigma)$ en los grafos $\sqcup \overline{\Gamma}(x)$.

Teorema 2.29 (de realización geométrica). *Si la función valencia es continua, entonces $\text{Cay}(\Gamma, \Sigma)$ es un espacio localmente compacto, metrizable y separable, dotado de una foliación por grafos \mathcal{F} , al que se llamará el espacio foliado de Cayley de (Γ, Σ) . Además X es la transversal canónica formada por los vértices de las hojas y el pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F} reducido a X coincide con Γ . Si X es compacto entonces $\text{Cay}(\Gamma, \Sigma)$ también lo es.*

Demostración. Veamos cómo construir un atlas foliado adaptado a \mathcal{F} . Para ello, en primer lugar, observemos que X es un cerrado de $\text{Cay}(\Gamma, \Sigma)$, ya que es naturalmente homeomorfo al cociente del cerrado saturado $\sqcup_{\sigma \in \Sigma} \text{dom } \sigma \times \{\sigma\} \times \{0, 1\}$.

De la continuidad de la valencia se desprende que, para cada $x \in X$, la función valencia es constante sobre un abierto y cerrado maximal $X_x = \text{val}_\Sigma^{-1}(\text{val}_\Sigma(x))$ que contiene a x . Para cada $y \in X_x$, definimos el conjunto $\Sigma_y^+ = \{\sigma \in \Sigma \mid y \in \text{dom}(\sigma)\}$ y $\Sigma_y^- = \{\sigma \in \Sigma \mid y \in \text{im}(\sigma)\}$. La unión de ambos $\Sigma_y = \Sigma_y^+ \cup \Sigma_y^-$ tiene el mismo número de elementos que Σ_x . Más aún, el conjunto $U_x = X_x \cap \left(\bigcap_{\sigma \in \Sigma_x^+} \text{dom}(\sigma) \right) \cap \left(\bigcap_{\sigma \in \Sigma_x^-} \text{im}(\sigma) \right)$ cumple que

$$\Sigma_y^+ = \Sigma_x^+ \text{ y } \Sigma_y^- = \Sigma_x^- \quad (2.3)$$

para cada $y \in U_x$, ya que Σ_y^+ (resp. Σ_y^-) es un subconjunto de Σ_x^+ (resp. Σ_x^-) con el mismo número de elementos. Por consiguiente

$$U_x = U_y \text{ para cada } y \in U_x. \quad (2.4)$$

Como la función de valencia esta acotada por $2\#\Sigma$, los conjuntos U_x forman un recubrimiento abierto y finito de X . En el caso de que X sea compacto cada uno de esos abiertos es relativamente compacto.

Para cada $x \in X$, definimos el abierto V_x como el cociente del abierto saturado

$$\widetilde{V}_x = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_x^+} U_x \times \{\sigma\} \times [0, \frac{1}{2}] \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_x^-} U_x \times \{\sigma\} \times (\frac{1}{2}, 1].$$

Sea $E(x)$ el espacio cociente obtenido de $\bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_x^+} \{\sigma\} \times [0, \frac{1}{2}] \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_x^-} \{\sigma\} \times (\frac{1}{2}, 1]$ al identificar los puntos $(\sigma, 0)$ y $(\sigma, 1)$. Podemos interpretar este espacio como la bola centrada en x de radio $\frac{1}{2}$ dentro del grafo $\overline{\Gamma}(x)$. Las condiciones (2.3) nos indican de hecho que $E(x) = E(y)$ para cada $y \in U_x$.

El homeomorfismo canónico entre \widetilde{V}_x y $U_x \times (\bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_x} \{\sigma\} \times [0, \frac{1}{2}])$ induce un homeomorfismo entre los cocientes $\varphi_x : V_x \rightarrow U_x \times E(x)$. Por otro lado, para cada $x \in X$ y cada $\sigma \in \Sigma_x^+$, definimos el abierto V_x^σ como el cociente del abierto saturado $\widetilde{V}_x^\sigma = U_x \times \{\sigma\} \times (0, 1)$. En este caso $\pi : \widetilde{V}_x^\sigma \rightarrow V_x^\sigma$ es un homeomorfismo y el homeomorfismo canónico entre \widetilde{V}_x^σ y $U_x \times (0, 1)$ induce otro homeomorfismo $\varphi_x^\sigma : V_x^\sigma \rightarrow U_x \times (0, 1)$. Veamos que estas cartas (V_x, φ_x) y $(V_x^\sigma, \varphi_x^\sigma)$ forman un atlas foliado de \mathcal{F} . A tal efecto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los dominios de los elementos σ de Σ son abiertos y cerrados de X de tal manera que

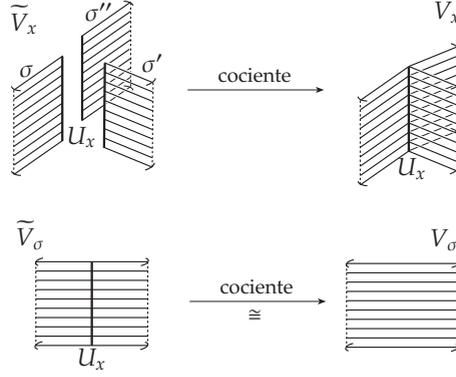


Figura 2.3.

La construcción de los abertos coordenados para el grafo de Cayley de un pseudogrupo

las condiciones (2.4) y (2.3) nos dicen que, tanto los abertos V_x , como los abertos V_x^σ son disjuntos o iguales.

En el primer caso, deducimos que las cartas V_x sólo intersecan a cartas V_y^σ . Si $V_x \cap V_y^\sigma \neq \emptyset$, entonces distinguimos dos casos: $x \in U_y$ o $x \notin U_y$. Si $x \in U_y$, entonces $U_x = U_y$ y podemos suponer que $x = y$. Luego la intersección $V_x \cap V_x^\sigma$ se corresponde con el conjunto

$$\{(z, [(\sigma, t)]) \in U_x \times E(x) \mid (z, t) \in U_x \times (0, \frac{1}{2}) \vee (z, t) \in \sigma(U_x) \cap U_x \times (\frac{1}{2}, 1)\}$$

en función de las coordenadas de V_x . Observemos que $\sigma(U_x) \cap U_x = \emptyset$ salvo si σ pertenece a $\Sigma_x^+ \cap \Sigma_x^-$. Ahora, el cambio de coordenadas se escribe como

$$(z, [(\sigma, t)]) \mapsto \begin{cases} (z, t) & \text{si } (z, t) \in U_x \times (0, \frac{1}{2}), \\ (\sigma(z), 1 - t) & \text{si } (z, t) \in \sigma(U_x) \cap U_x \times (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

siendo obvio que respeta la estructura producto de $U_x \times E(x)$ y $U_x \times (0, 1)$.

Por otra parte, si $x \notin U_y$, entonces $\sigma(x') = x$ para algún $x' \in U_y$. Como es posible reemplazar y por cualquier punto de U_y , podemos suponer que $\sigma(y) = x$. Ahora, la intersección $V_y^\sigma \cap V_{\sigma(x)}$ se corresponde con el conjunto

$$\{(z, t) \in U_y \times (0, 1) \mid (\sigma(z), t) \in U_{\sigma(y)} \times (\frac{1}{2}, 1) \vee (z, t) \in U_y \cap \sigma^{-1}(U_{\sigma(y)}) \times (0, \frac{1}{2})\}$$

respecto de las coordenadas de V_y^σ . Como en el caso anterior, el cambio de coordenadas está dado por

$$(z, t) \mapsto \begin{cases} (z, t) & \text{si } (z, t) \in U_x \times (0, \frac{1}{2}), \\ (\sigma(z), 1 - t) & \text{si } (z, t) \in \sigma(U_x) \cap U_x \times (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

En resumen, la familia

$$\mathcal{A} = \left\{ (V_x, \varphi_x), (V_x^\sigma, \varphi_x^\sigma) \mid x \in X, \sigma \in \Sigma_x^+ \right\}$$

es un atlas foliado finito que define una foliación por grafos sobre $\text{Cay}(\Gamma, \Sigma)$. Obviamente se trata de \mathcal{F} .

Si X es compacto, los elementos de \mathcal{A} son relativamente compactos y por tanto $\text{Cay}(\Gamma, \Sigma)$ es compacto. \square

Observación 2.30. 1) El teorema anterior sigue siendo válido para pseudogrupos Γ dotados de un sistema de generadores Σ tal que los conjuntos Σ_x sean finitos. En otras palabras, los grafos $\bar{\Gamma}(x)$ son localmente finitos. En este caso, la continuidad de la valencia proporciona un atlas foliado numerable de $\text{Cay}(\Gamma, \Sigma)$.

2) Si la función val_Σ es constante e igual a 2, la laminación por grafos \mathcal{F} es un flujo. Además, si X es una variedad $\text{Cay}(\Gamma, \Sigma)$ es una variedad. Es bien sabido que cualquier pseudogrupo de transformaciones de una variedad es realizable por un flujo sobre una variedad no compacta, pero esta realización modifica la estructura métrica de las órbitas. En nuestro caso, al menos en el caso compacto, las métricas de las órbitas y de las hojas coinciden salvo casi-isometría en el sentido de Gromov.

El teorema anterior realiza un pseudogrupo grafado con la valencia continua como el pseudogrupo de holonomía de un espacio foliado por grafos. El siguiente teorema nos dice que podemos reemplazar estos espacios foliados por verdaderas laminaciones.

Teorema 2.31 (de engorde, [Ghy2, Loz]). *Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ el espacio foliado de Cayley de un pseudogrupo grafado (Γ, Σ) de valencia continua. Entonces existe una laminación (M, \mathcal{L}) tal que el conjunto de vértices de \mathfrak{X} es una transversal completa y cerrada de (M, \mathcal{L}) y los pseudogrupos de holonomía de \mathcal{F} y de \mathcal{L} coinciden al reducirlos a dicha transversal. Además las hojas de \mathcal{F} son casi-isométricas a las hojas de \mathcal{L} .*

Demostración. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y sea $0 < \varepsilon \ll 1$. Consideremos la esfera $\mathbb{S}^n(\varepsilon)$ de dimensión n y radio ε . Eliminemos k puntos $\{s_1, \dots, s_k\}$ y fijemos $r_k^\varepsilon > 0$ de forma que las bolas geodésicas cerradas $\bar{B}(s_i, 2r_k^\varepsilon)$ ($i = 1, \dots, k$) sean disjuntas dos a dos. Por otro lado, consideremos el cilindro $C = \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon) \times (0, \frac{3}{4})$ con la métrica producto. Mediante la aplicación exponencial, cada punto $\bar{B}(s_1, 2r_k^\varepsilon) - \{s_1\}$ se identifica con un par (u, r) donde $u \in \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)$ y $0 < r \leq 2r_k^\varepsilon$ y $r \in (0, 2r_k^\varepsilon)$. Esto nos permite definir un difeomorfismo entre $\bar{B}(s_1, 2r_k^\varepsilon) - B(s_1, r_k^\varepsilon)$ y $\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon) \times [0, r_k^\varepsilon]$, que envía las esferas geodésicas centradas en s_1 de radios r_k^ε y $2r_k^\varepsilon$ sobre las esferas $\mathbb{S}^n(\varepsilon) \times \{r_k^\varepsilon\}$ y $\mathbb{S}^n(\varepsilon) \times \{0\}$ respectivamente. Mediante este difeomorfismo podemos pegar el cilindro C con la variedad que se obtiene al eliminar la bola geodésica $B(s_1, r_k^\varepsilon)$ de la esfera $\mathbb{S}^n(\varepsilon)$. También es posible extender las métricas de Riemann mediante una partición de la unidad de manera que las métricas no cambien en un entorno collar del pegado. Podemos repetir este proceso con el resto de los puntos s_2, \dots, s_{k-1} y s_k . A la variedad resultante, en forma de “pulpo” con k tentáculos, la denotaremos por

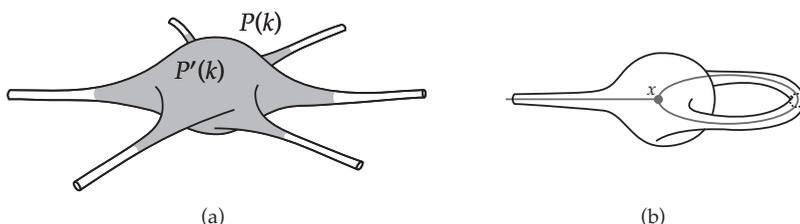


Figura 2.4.

(a) La variedad en forma de pulpo $P(k)$ y su subvariedad difeomorfa $P'(k)$. (b) El conjunto $\pi(\{x\} \times P(\text{val}(x)))$ no es difeomorfo a $P(k)$ si hay un bucle.

$P(k)$. Esta variedad contiene una subvariedad difeomorfa $P'(k)$ obtenida al acortar los tentáculos, sustituyendo el intervalo $(0, \frac{2}{3})$ por $(0, \frac{1}{2})$ (figura 2.4(a)).

Comencemos ahora con la construcción del espacio (M, \mathcal{L}) . Llamemos X al conjunto de vértices de \mathfrak{X} . Como ya hemos dicho, la aplicación $\text{val} : X \rightarrow \mathbb{N}$ es continua y por lo tanto $X^{=k} = \text{val}^{-1}(k)$ es un abierto y cerrado de X . Si $\tilde{M}_k = X^{=k} \times P(k)$, consideremos entonces la suma topológica

$$\tilde{M} = \bigsqcup_{k \in \text{val}(X)} \tilde{M}_k = \bigsqcup_{k \in \text{val}(X)} X^{=k} \times P(k).$$

Cada paquete de tentáculos de \tilde{M}_k se puede asociar unívocamente con uno de los paquetes de aristas que parten de X , de forma similar a lo hecho en el ejemplo 2.5. Además cada arista que parte de un punto dado $x \in X^{=k}$ corresponde al germen de la transformación de holonomía definida en el ejemplo 2.5 ya mencionado, correspondiente a levantar la arista a un entorno de x que podemos suponer contenido en $X^{=k}$. Así, denotaremos por $\{x\} \times \{\sigma\} \times \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon) \times (0, 1)$ al tentáculo de $\{x\} \times P(k)$ correspondiente a la transformación σ (con $x \in \text{dom } \sigma$).

Ahora sobre \tilde{M} definimos la relación de equivalencia que identifica cada punto (x, σ, u, r) del tentáculo $\{x\} \times \{\sigma\} \times \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon) \times (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ con el punto $(\sigma(x), \sigma^{-1}, A(u), 1 - t)$ del tentáculo $\{\sigma(x)\} \times \{\sigma^{-1}\} \times \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon) \times (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, siendo $A : \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon)$ una reflexión respecto a un eje coordenado. Sea M el cociente de \tilde{M} por esta relación de equivalencia que acabamos de definir, y denotemos por π la aplicación cociente.

Es posible construir un atlas foliado de forma similar al del teorema 2.29: observemos que $\pi(\{x\} \times P(\text{val}(x)))$ no tiene por que ser difeomorfo al pulpo $P(\text{val}(x))$, ya que alguna de las aristas podrán ser bucles (figura 2.4(b)). Pero si sustituimos $P(\text{val}(y))$ por $P'(\text{val}(y))$, $\pi(\{x\} \times P'(\text{val}(x)))$ si es difeomorfo a $P'(\text{val}(x))$. Así la aplicación π es un difeomorfismo restringido a $X^{=k} \times P'(k)$ y a $\text{dom } \sigma \times \{\sigma\} \times \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon) \times (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. Es fácil comprobar entonces que los conjuntos abiertos de \tilde{M}

$$\left\{ \pi(X^{=k} \times P'(k)), \pi(\text{dom } \sigma \times \{\sigma\} \times \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon) \times (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})) \right\}$$

forman un atlas foliado. Tenemos entonces una laminación (M, \mathcal{L}) de dimensión n .

El pegado de los tentáculos entre los distintos pulpos $\{x\} \times P(\text{val}(x))$ esta dado por difeomorfismos que preservan tanto la métrica como la orientación, por lo que las hojas de (M, \mathcal{L}) son variedades de Riemann orientables. Es obvio que M es metrizable localmente compacto y separable y que la laminación cumple las condiciones del enunciado. \square

Observación 2.32. Si las hojas de $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ tienen valencia acotada, las hojas de (M, \mathcal{L}) tienen geometría acotada (véase [Gro3]), es decir, existe una cota inferior uniforme $c > 0$ del radio de inyectividad y la curvatura seccional esta uniformemente acotada. Si por el contrario la valencia de una hoja de \mathcal{F} no está acotada, entonces el radio de inyectividad de la hoja de \mathcal{L} correspondiente es 0, ya que los radios r_k^e tienden a 0 cuando k tiende a $+\infty$. Si la función de valencia sobre X esta acotada, las hojas de \mathcal{L} tendrán geometría acotada uniforme, i.e. las cotas inferiores de los radios de inyectividad y cotas inferiores y superiores de las curvaturas seccionales no dependen de la hoja considerada.

2.7. Pseudogrupos de transformaciones del conjunto de Cantor

Sea (M, \mathcal{L}) una laminación compacta modelada transversalmente por el conjunto de Cantor. El eje de un atlas foliado es una unión numerable disjunta de conjuntos abiertos del Cantor, por lo tanto es un espacio metrizable, localmente compacto, separable y 0-dimensional (i.e. cada punto posee una base de conjuntos abiertos y cerrados). Estudiar pseudogrupos sobre este tipo de espacios es el objetivo de esta sección.

Lema 2.33. *Sea Γ un pseudogrupo de transformaciones sobre un espacio localmente compacto, metrizable, separable y 0-dimensional. Si existe un abierto relativamente compacto que corta a todas las Γ -órbitas, entonces existe un abierto compacto que corta a todas las Γ -órbitas.*

Demostración. Dado que X es localmente compacto y 0-dimensional, existen entornos abiertos y compactos alrededor de cualquier punto de X . Así pues es posible recubrir la clausura de Y por una familia finita de abiertos compactos. La unión de esta familia finita será un abierto y , como la familia es finita, compacto, que contiene a Y , y por lo tanto corta a todas las Γ -órbitas. \square

Observemos que este resultado implica que los espacios foliados compactos modelados transversalmente por el conjunto de Cantor poseen siempre una transversal completa cerrada. Cabe preguntarse si será posible dotar al pseudogrupo de holonomía reducido a dicha transversal de un buen sistema de generadores. El siguiente teorema nos dice que es posible escoger un sistema de generadores tal que la función de valencia sobre X sea continua.

Teorema 2.34. *Sea Γ un pseudogrupo compactamente generado de transformaciones sobre un espacio localmente compacto, metrizable, separable y 0-dimensional X . Si Y es un abierto compacto que corta a todas las Γ -órbitas, entonces cualquier sistema de generación compacta para él define una estructura de grafo con función de valencia continua.*

Demostración. Denotemos por Γ el pseudogrupo de transformaciones de X del enunciado. Sea Y un abierto compacto que corta a todas las Γ -órbitas, que existe en virtud del lema anterior. Sea Σ_Y un sistema de generación compacta para Y . Por definición, para cada elemento $\sigma \in \Sigma_Y$, existe otro homeomorfismo $\tilde{\sigma} \in \Gamma$ de forma que $\text{dom } \sigma \subset \text{dom } \tilde{\sigma}$ y $\tilde{\sigma}|_{\text{dom } \sigma} = \sigma$. Ahora bien, $\text{dom } \sigma \subset Y$ es relativamente compacto, por lo que es posible cubrirlo por una cantidad finita de abiertos compactos contenidos en $\text{dom } \tilde{\sigma}$. La unión de dicha familia finita será un abierto compacto de X que denotaremos por X_σ . Tenemos entonces que $\text{dom } \sigma \subset X_\sigma \subset \text{dom } \tilde{\sigma}$, luego

$$\text{dom } \sigma = Y \cap \text{dom } \tilde{\sigma} = Y \cap X_\sigma.$$

Se ha escrito $\text{dom } \sigma$ como una intersección de dos abiertos compactos de X , con lo que $\text{dom } \sigma$ es un abierto compacto, y en particular cerrado.

Ahora bien, (2.2) nos dice exactamente que

$$\text{val}_{\Sigma_Y}(x) = \sum_{\sigma \in \Sigma_Y} (\chi_{\text{dom } \sigma}(x) + \chi_{\text{im } \sigma}(x)).$$

Como $\text{dom } \sigma$ e $\text{im } \sigma$ son conjuntos abiertos y cerrados, las aplicaciones características correspondientes son continuas. Luego val_{Σ_Y} es la suma de un número finito de aplicaciones continuas, y por lo tanto es continua. \square

Combinando este resultado con los teoremas de realización geométrica 2.29 y engorde 2.31, obtenemos la siguiente solución parcial a la conjetura de Haefliger:

Corolario 2.35. *Si Γ es un pseudogrupo compactamente generado de transformaciones de un espacio localmente compacto, metrizable, separable y 0-dimensional, entonces existe una laminación compacta por superficies de Riemann $(\mathfrak{M}, \mathcal{L})$ cuyo pseudogrupo de holonomía es equivalente en el sentido de Haefliger y Kakutani a Γ .*

El hecho de que la función de valencia sea continua es una condición muy restrictiva. Tanto es así que implica que la dinámica de dicho pseudogrupo es la de una acción de un grupo:

Teorema 2.36. *Un pseudogrupo grafado cuya función de valencia es continua es equivalente en el sentido de Haefliger y Kakutani a una acción de un grupo finitamente generado.*

Demostración. La prueba de este resultado es similar a lo hecho para relaciones medibles por J. Feldman y C.C. Moore en [FM]. Denotemos por (Γ, Σ) el pseudogrupo grafado definido sobre X . Para cada $\sigma \in \Sigma$, tomamos una copia $D_\sigma = \text{dom } \sigma \times \{\sigma\}$ del dominio de σ . Definimos entonces el espacio

$$X' = X \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} D_\sigma.$$

Sea p_1 la primera proyección coordenada de D_σ en X para cualquier $\sigma \in \Sigma$. Definimos las aplicaciones de X' sobre sí mismo

$$f_\sigma(x) = \begin{cases} (x, \sigma) \in D_\sigma & \text{si } x \in \text{dom } \sigma, \\ p_1(x) \in \text{dom } \sigma & \text{si } x \in D_\sigma \text{ y,} \\ x \in X' & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$g_\sigma(x) = \begin{cases} (\sigma^{-1}(x), \sigma) \in D_\sigma & \text{si } x \in \text{im } \sigma, \\ \sigma(p_1(x)) \in \text{im } \sigma & \text{si } x \in D_\sigma \text{ y,} \\ x \in X' & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado que la función de valencia val_Σ es continua, los conjuntos $\text{dom } \sigma$ e $\text{im } \sigma$ son abiertos y cerrados. En consecuencia f_σ y g_σ son homeomorfismos de X' en sí mismo. Es obvio que $f_\sigma \circ f_\sigma = g_\sigma \circ g_\sigma = \mathbb{1}_{X'}$. Sea G el grupo de homeomorfismos de X' generado por f_σ y g_σ . Denotemos por Γ' el pseudogruppo de transformaciones locales de X' obtenidas por restricción de los elementos de G , que también está generado por $\Sigma' = \{f_\sigma, g_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$. La estructura de grafo sobre cada Γ' -órbita es la misma que la inducida por la estructura de grafo de G respecto del sistema de generadores Σ' . Ahora bien, $g_\sigma \circ f_\sigma|_{\text{dom } \sigma} = \sigma$ de donde deducimos que $\Gamma = \Gamma'|_X$ y además $d_{\Sigma'}(x, y) = 2d_\Sigma(x, y)$. Por lo tanto (Γ, Σ) y (Γ', Σ') son equivalentes en el sentido de Kakutani. \square

Corolario 2.37. *Un pseudogruppo compactamente generado de transformaciones de un espacio localmente compacto, metrizable, separable y 0-dimensional es equivalente en el sentido de Haefliger y Kakutani a una acción de un grupo finitamente generado.*

Este resultado permite realizar estos pseudogruppos como restricciones a un Cantor de pseudogruppos de transformaciones sobre la esfera de dimensión 2. Para ello basta recordar un teorema (véase el capítulo 13 de [Moi]) que nos asegura que cualquier homeomorfismo del Cantor en sí mismo se puede extender a la esfera bidimensional.

Corolario 2.38. *Un pseudogruppo compactamente generado de transformaciones de un espacio localmente compacto, metrizable, separable y 0-dimensional está inducido (salvo equivalencia de Haefliger y Kakutani) por un pseudogruppo de transformaciones sobre la esfera bidimensional.*

Demostración. Según el corolario anterior, el pseudogruppo considerado es realizable por una acción de un grupo G de homeomorfismos de Cantor. Cada homeomorfismo $f \in G$ se extiende a un homeomorfismo $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Obtenemos así una acción sobre la esfera que extiende a la anterior. \square

Volvamos al caso de una laminación modelada transversalmente por el conjunto de Cantor y hagamos una lectura de estos resultados. Sea (M, \mathcal{L}) una laminación (o espacio foliado) modelado transversalmente por el Cantor. Según el teorema 2.34,

existe una transversal completa homeomorfa al conjunto de Cantor X tal que el pseudogrupo de holonomía Γ se puede dotar de un sistema finito de generadores Σ de forma que $\text{val}_\Sigma : X \rightarrow \mathbb{N}$ sea continua. Observemos que los dominios e imágenes de los elementos de Σ serán también homeomorfos al Cantor. Luego si aplicamos el teorema 2.36, el pseudogrupo grafado (Γ, Σ) será equivalente (en el sentido de Haefliger y Kakutani) a una acción de un grupo finitamente generado sobre otro conjunto de Cantor, que podremos extender en una acción sobre la esfera bidimensional. En resumen, tendremos el siguiente resultado:

Corolario 2.39. *La dinámica de una laminación compacta modelada transversalmente por un conjunto de Cantor es realizable por un sistema dinámico clásico (i.e. existe una equivalencia de Haefliger entre el pseudogrupo de holonomía y una acción de un grupo finitamente generado sobre un conjunto de Cantor, que además respecta el tipo de casi-isometría de las órbitas) inducido por una acción sobre la esfera S^2 .*

El diagrama de la figura 2.5 resume esta información.

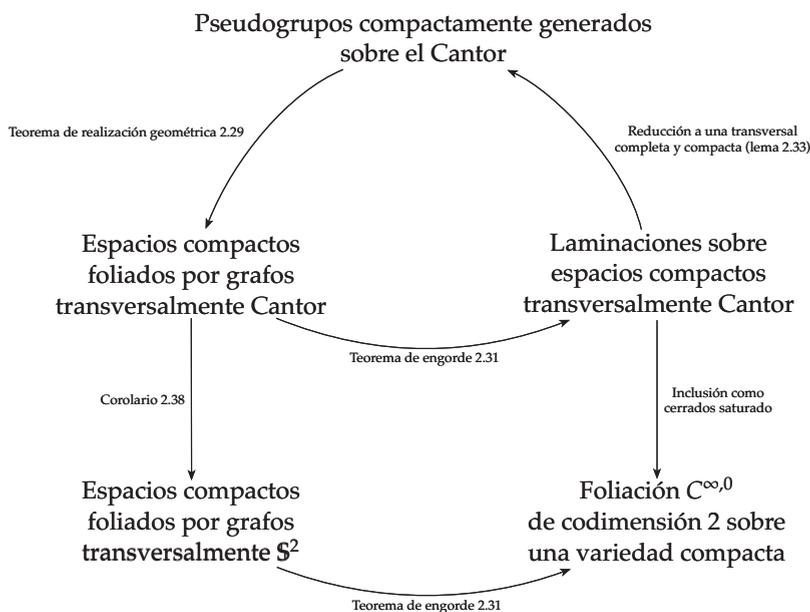


Figura 2.5.

Relaciones entre las distintas nociones estudiadas en esta sección. Todas la flechas mantienen el tipo de casi-isometría.

Espacio foliado de Gromov–Hausdorff

En [Ghy2], Étienne Ghys describe un ejemplo de laminación por superficies de Riemann modelada transversalmente por un conjunto de Cantor, minimal y en el que existe una mezcla de tipos conformes en las hojas. De hecho, todas las hojas son parabólicas excepto una única hoja que es hiperbólica.

La idea consiste en tomar un árbol concreto, el árbol de Kenyon (véase [Ken1]), y realizarlo como hoja de un espacio minimal foliado por grafos con las propiedades deseadas.

Para ello sigue el siguiente proceso: en primer lugar toma el conjunto de los árboles infinitos del grafo de Cayley del grupo \mathbb{Z}^2 . A este conjunto de los árboles infinitos se le dota de la topología de Gromov–Hausdorff, que lo convierte en un espacio métrico compacto y separable.

Por otro lado, este espacio está dotado de una estructura natural de espacio foliado por grafos. Seleccionando en dicho espacio un árbol *repetitivo* y *aperiódico* se obtiene un espacio foliado minimal. Siguiendo un proceso similar al del teorema de engorde (teorema 2.31) se sustituyen los árboles por superficies de Riemann mediante un proceso de engorde. Este proceso nos provee de ejemplos interesantes de espacios foliados minimales, exploraremos algunos ellos en el capítulo 4.

Obviamente se puede sustituir el grupo \mathbb{Z}^2 por cualquier otro grupo finitamente generado, y considerar no sólo árboles si no también grafos conexos. Presentar las propiedades de este espacio es el objetivo de este capítulo.

3.1. Espacio de Gromov–Hausdorff de los subgrafos

Se define $\mathcal{G}(G, S)$ como el conjunto de todos los subgrafos conexos del grafo de Cayley $\text{Cay}(G, S)$ enraizados en la unidad de G , es decir:

$$\mathcal{G}(G, S) = \{H \subseteq \text{Cay}(G, S) \mid H \text{ es un grafo conexo y } 1_G \in H\}.$$

Sobre el conjunto $\mathcal{G}(G, S)$ es posible definir la *métrica de Gromov–Hausdorff* que, intuitivamente, dice que

«dos grafos son cercanos si coinciden en una gran bola centrada en 1_G .»



Figura 3.1.
Los árboles L' y L'' respectivamente.

Siendo más precisos, dados dos árboles H y $H' \in \mathcal{G}(G, S)$, la distancia de Gromov–Hausdorff entre ellos será

$$d(H, H') = e^{-R(H, H')},$$

donde

$$R(H, H') = \sup\{N \geq 1 \mid B_H(1_G, N) = B_{H'}(1_G, N)\}$$

o $R(H, H') = 0$ si no existe dicho supremo, siendo $B_H(1_G, N)$ la bola abierta en el árbol H de centro 1_G y radio N con respecto a la métrica natural sobre los grafos. Nótese que $R(H, H') = 0$ si y sólo si $\text{val}_H(1_G) \neq \text{val}_{H'}(1_G)$ y que la distancia está acotada por 1.

Ejemplo 3.1. Denotemos por L el grafo de Cayley de $\mathbb{Z} \oplus \{0\}$ respecto a $\{(1, 0)\}$, cuyos vértices son los puntos del retículo entero cuya ordenada es 0 y las aristas unen los vértices consecutivos. El grafo L es un subárbol de \mathbb{Z}^2 , el grafo de Cayley de \mathbb{Z}^2 (figura 2.1(c)). Sean L' y L'' los árboles que se obtienen al añadir a L una arista vertical en los vértices $(0, 0)$ y $(1, 0)$ respectivamente, como se muestra en la figura 3.1. Es obvio que $B_L(0, 1) \neq B_{L'}(0, 1)$ y que $B_L(0, 1) = B_{L''}(0, 1)$, y por lo tanto $d(L, L') = 1$ y que $d(L, L'') = e^{-1}$.

Esta función distancia cumple la *desigualdad ultramétrica*, una desigualdad más fuerte que la triangular: dados H, H' y $H'' \in \mathcal{G}(G, S)$,

$$d(H, H'') \leq \max\{d(H, H'), d(H', H'')\}. \quad (3.1)$$

En efecto, si $N \geq 1$ es tal que

$$B_H(1_G, N) = B_{H'}(1_G, N) \quad \text{y} \quad B_{H'}(1_G, N) = B_{H''}(1_G, N),$$

entonces $B_H(1_G, N) = B_{H''}(1_G, N)$. Así $R(H, H'') \geq \min\{R(H, H'), R(H, H'')\}$, de donde se deduce (3.1).

La desigualdad ultramétrica tiene importantes consecuencias: las bolas abiertas, cerradas y las esferas son conjuntos abiertos y cerrados, además, cualquier punto de una bola es su centro. Se deduce entonces que la topología generada por una *ultramétrica* es totalmente desconexa (cf. [Gou]). En particular:

Corolario 3.2. *El espacio $\mathcal{G}(G, S)$ es un espacio totalmente desconexo.*

Antes de continuar, resultará conveniente hacer explícita la convergencia de sucesiones en el espacio $\mathcal{G}(G, S)$: una sucesión $\{H_n\}$ converge a H si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(H_n, H) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{n \in \mathbb{N} \mid B_{H_n}(1_G, n) = B_H(1_G, n)\} = \infty. \quad (3.2)$$

Sea $\mathcal{T}(G, S)$ el conjunto formado por los elementos de $\mathcal{G}(G, S)$ que son árboles. La ecuación (3.2) implica que $\mathcal{T}(G, S)$ es un cerrado de $\mathcal{G}(G, S)$. En efecto, sea $\{H_n\}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{G}(G, S)$ convergente a un grafo $H \in \mathcal{G}(G, S)$. Sea σ un lazo no trivial en el grafo H , entonces existe N_σ tal que $\sigma \subset B_H(1_G, N_\sigma)$. Teniendo en cuenta (3.2), existe N_0 tal que para cada entero $n \geq N_0$ se tiene que $B_{H_n}(1_G, N_\sigma) = B_H(1_G, N_\sigma)$. Por lo tanto, a partir de N_0 todos los elementos de la sucesión no son árboles.

Por otro lado, teniendo en cuenta que el número de árboles contenidos en una bola cualquiera de $\mathcal{G}(G, S)$ está acotado, un argumento diagonal clásico prueba el siguiente resultado:

Proposición 3.3. $\mathcal{G}(G, S)$ es un espacio métrico compacto.

Demostración. Basta probar que $\mathcal{G}(G, S)$ es secuencialmente compacto. Considérese una sucesión $\{H_n\}_n$ en $\mathcal{G}(G, S)$. Obsérvese que sólo existe un número finito de grafos de $\mathcal{G}(G, S)$ de diámetro igual a 2. Se puede escoger por tanto $\{H_{1,n}\}_n$, una subsucesión de $\{H_n\}_n$, tal que $\bar{B}_{H_{1,n}}(1_G, 1) = A_1$ para cada n , con $A_1 \in \mathcal{G}(G, S)$ de diámetro 2.

Supónganse construidas sucesiones $\{H_{k,n}\}_n$, $1 \leq k \leq M-1$ cada una subsucesión de la anterior, de forma que fijado k , las bolas cerradas $\bar{B}_{H_{k,n}}(1_G, k)$ son todas iguales a un árbol $A_k \in \mathcal{G}(G, S)$ de diámetro $2k$. Tenemos entonces una sucesión creciente de grafos finitos $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{M-1}$. De nuevo, existe un número finito de grafos de $\mathcal{G}(G, S)$ de diámetro igual a $2M$. Por lo cual es posible escoger $\{H_{M,n}\}_n$ una subsucesión de $\{H_{M-1,n}\}_n$, de forma que $\bar{B}_{H_{M,n}}(1_G, M) = A_M$, para cualquier n y cierto grafo $A_M \in \mathcal{G}(G, S)$ de diámetro no superior a $2M$.

Por inducción para cada $m \geq 1$ obtenemos una sucesión $\{H_{m,n}\}_n$ verificando la condición anterior. La unión creciente de los árboles A_m define un grafo $H \in \mathcal{G}(G, S)$, tal que la sucesión diagonal $\{H_{m,m}\}_m$ lo tiene por límite: por construcción $B_{H_{m,m}}(1_G, m) = B_H(1_G, m) = A_m$, luego $R(H_{m,m}, H) \geq m$, es decir, $d(H_{m,m}, H) \rightarrow 0$. \square

La prueba anterior muestra que cualquier grafo infinito es límite de sucesiones de árboles finitos, las bolas cerradas centradas en 1_G . Por otra parte si H es un grafo finito, la bola en $\mathcal{G}(G, S)$ de centro H y radio $\max\{d_H(1_G, x) + 1 \mid x \in H\}$ se reduce al grafo H , con lo que el derivado de $\mathcal{G}(G, S)$ está formado por los árboles infinitos. Por lo tanto, para un grupo finito G , $\mathcal{G}(G, S)$ es un conjunto finito discreto. Si consideramos $G = \mathbb{Z}$ y el sistema de generadores $S = \{1\}$ o $\{-1\}$, el espacio $\mathcal{G}(\mathbb{Z}, S)$ es obviamente infinito contable. En cualquier otro caso, el conjunto es infinito no numerable.

Proposición 3.4. Si G es infinito, el derivado de $\mathcal{G}(G, S)$ es un conjunto de Cantor salvo si $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{1\}$ o $\{-1\}$.

Demostración. Dado que $\mathcal{G}(G, S)$ es compacto y totalmente desconexo, sólo es necesario probar que su derivado es perfecto. Según la observación anterior, cualquier grafo H es el límite de los grafos finitos $\bar{B}_H(1_G, n)$. Si “se alargan estas bolas en alguna dirección” se obtiene una sucesión de grafos infinitos que converge a H . Más precisamente, fijado $n \in \mathbb{N}$, se escoge un camino infinito $\varepsilon_n \subset \text{Cay}(G, S)$ que interseque a $\bar{B}_H(1_G, n)$ en un único punto a distancia n de 1_G . Dado que G es infinito, dichos caminos siempre existen. Se ha construido por tanto una sucesión de grafos $H_n^{\varepsilon_n} = \bar{B}_H(1_G, n) \cup \varepsilon_n$ que, obviamente, converge a H .

Además, los caminos ε_n se pueden escoger de forma que los grafos $H_n^{\varepsilon_n}$ sean todos distintos a H , salvo en el caso de $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{\pm 1\}$. En efecto, supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que dado cualquier camino ε con las propiedades exigidas se tenga $H_n^\varepsilon = H$. En estas condiciones, todos los caminos serán el mismo. Por lo tanto la valencia en $\text{Cay}(G, S)$ de cualquier vértice de ε ha de ser 2. Como G actúa por automorfismos sobre $\text{Cay}(G, S)$, la valencia de cualquier vértice de $\text{Cay}(G, S)$ es 2, luego $\text{Cay}(G, S)$ es una recta. En consecuencia $G = \mathbb{Z}$ y $S = \{1\}$ o $\{-1\}$. \square

Obviamente el argumento anterior prueba también que el derivado de $\mathcal{T}(G, S)$ está formado por los árboles infinitos y es homeomorfo a un conjunto de Cantor salvo en las excepciones ya indicadas. Observemos además que en el caso de \mathbb{Z} con alguno de los sistemas de generadores mencionados en el resultado $\mathcal{G}(\mathbb{Z}) = \mathcal{T}(\mathbb{Z})$. Esta es una particularidad de los grupos libres:

Proposición 3.5. *El interior de $\mathcal{T}(G, S)$ está formado por los árboles infinitos, excepto cuando G es un grupo libre y S es un sistema de generadores sin relaciones, en cuyo caso $\mathcal{T}(G, S)$ coincide con $\mathcal{G}(G, S)$.*

Demostración. Dado que los grafos finitos son puntos aislados, es obvio que la unión de los árboles finitos es un abierto. Basta comprobar que, salvo el caso de los grupos libres, podemos encontrar un grafo tan cerca como se quiera de un árbol.

Sabemos por hipótesis que el sistema de generadores S presenta relaciones, por lo que aparece un lazo no trivial basado en 1_G en el grafo $\text{Cay}(G, S)$. Llamemos a dicho lazo σ . Ahora bien, sea $T \in \mathcal{T}(G, S)$ un árbol infinito y fijemos $n \in \mathbb{N}$. Sea $g \in T$ tal que $d(1_G, g) = n$, entonces el grafo $G = T \cup g\sigma$ está a distancia ε^{-n} de T .

Por otro lado, si G es un grupo libre y S un sistema de generadores sin relaciones para G , $\text{Cay}(G, S)$ es un árbol, y por lo tanto sus subgrafos son árboles. \square

Observación 3.6. Salvo en el caso de los grupos finitos y los grupos libres, se tiene que el conjunto derivado $\mathcal{T}(G, S)'$ es un conjunto de Cantor sin interior dentro del Cantor que es el derivado $\mathcal{G}(G, S)'$.

De la misma forma que para un grafo de Cayley de un grupo G tenemos el mismo conjunto de vértices pero distinta estructuras de grafo, los espacios $\mathcal{G}(G, S)$ y $\mathcal{T}(G, S)$ son, en general, homeomorfos. En la siguiente sección definiremos una estructura sobre este conjunto de forma similar a lo hecho para el grafo de Cayley o el espacio foliado de Cayley (capítulo 2).

A partir de este momento, cuando no exista ambigüedad, se denotará $\mathcal{G}(G, S)$, $\mathcal{T}(G, S)$ y $\text{Cay}(G, S)$ simplemente por \mathcal{G} , \mathcal{T} y Cay respectivamente.

3.2. Espacio foliado de Gromov–Hausdorff

Dados $H \in \mathcal{G}$ y $g \in G$, el grafo trasladado gH está definido de manera obvia. En general gH no pertenece a \mathcal{G} , ya que 1_G no tiene por qué pertenecer al grafo gH . De hecho $gH \in \mathcal{G}$ si y sólo si $g^{-1} \in H$.

Sobre \mathcal{G} existe una relación de equivalencia natural \mathcal{R} definida por

$$H \mathcal{R} H' \iff g^{-1}H = H',$$

para algún $g \in H$. El grafo $g^{-1}H$ puede verse como H pero con la “raíz” no en 1_G sino en el vértice g . De esta forma, la clase de equivalencia de un grafo puede pensarse formada por los grafos que se obtienen al cambiar el punto base a todos los vértices de H :

$$\mathcal{R}[H] = \{g^{-1}H \mid g \in \text{vértices}(H)\}.$$

Esta descripción de las clases de equivalencia de \mathcal{R} permite definir una estructura de grafo simplicial de la cual \mathcal{G} será conjunto de vértices y cada componente conexa de dicha estructura simplicial nos dará una \mathcal{R} -clase. Dicho de otro modo, se realizará cada clase $\mathcal{R}[H]$ como el conjunto de vértices de un grafo conexo $\overline{\mathcal{R}}[H]$. Considérese $\mathcal{R}[H]$ como un conjunto de vértices: diremos que H' y $H'' \in \mathcal{R}[H]$ están unidos por una arista si $H' = s^{-1}H''$, para cierto $s \in S$.

Observación 3.7. El conjunto \mathcal{T} es un cerrado saturado para \mathcal{R} .

Obsérvese que un grafo perteneciente a $\mathcal{R}[H]$ está determinado por un vértice de H . Ahora bien, dos vértices v y $v' \in H$ determinan el mismo grafo si y sólo si $H = v'v^{-1}H$. Con lo que el grafo $\overline{\mathcal{R}}[H]$ es naturalmente isomorfo al grafo $H/\text{Iso}(H)$, donde $\text{Iso}(H)$ denota el grupo de isotropía de H , formado por los elementos de G que lo dejan invariante. En particular, el grafo H es una cubierta del grafo $\overline{\mathcal{R}}[H]$ y el grupo $\text{Iso}(H)$ es el grupo de transformaciones de la cubierta. Si H es un árbol, es decir no tiene caminos cerrados, H es de hecho la cubierta universal de $\overline{\mathcal{R}}[H]$.

Ejemplo 3.8. Sea L el árbol definido en el ejemplo 3.1. Puesto que $L = L + (1, 0)$, la clase $\mathcal{R}[L]$ se reduce a $\{L\}$ y existe una sola arista en forma de bucle en $\overline{\mathcal{R}}[L]$. Por otro lado $\text{Iso}(L) = \mathbb{Z}$. El cociente $L/\text{Iso}(L)$ es isomorfo al grafo $\overline{\mathcal{R}}[L]$ (véase la figura 3.2). Por el contrario, si consideramos el subárbol L^+ de L cuyos vértices son los enteros no negativos, el grafo $\overline{\mathcal{R}}[L^+]$ es isomorfo a L^+ , ya que $\text{Iso}(L^+) = \{0\}$.

Estos ejemplos sugieren la siguiente definición:

Definición 3.9. Diremos que un grafo $T \in \mathcal{G}$ es *periódico* (resp. *aperiódico*) si el grafo $\overline{\mathcal{R}} = T/\text{Iso}(T)$ es finito (res. $\overline{\mathcal{R}}[T] = T$), es decir, el grupo de isotropía es cocompacto (resp. trivial).

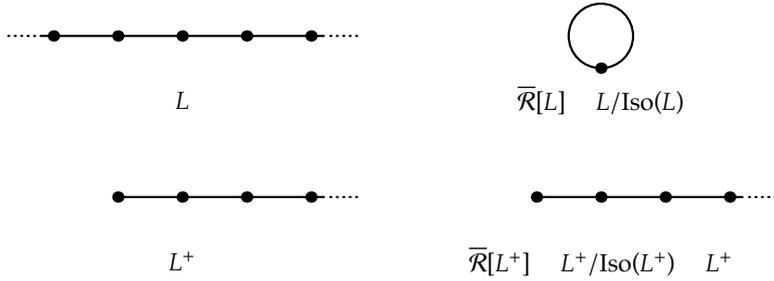


Figura 3.2.

Los árboles L y L^+ junto con sus respectivas clases.

Obviamente se da una situación intermedia, es decir, existen grafos cuyo cociente $T/\text{Iso}(T)$ es no compacto, pero no coincide con T . Por ejemplo, consideremos el árbol $L'' = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} L' - (0, z)$, siendo L' el árbol definido en el ejemplo 3.1. Obviamente $\text{Iso}(L'') = \mathbb{Z}$ y por lo tanto no es aperiódico. Además su cociente no es compacto.

Por otro lado, cada grafo $H \in \mathcal{G}$ es vértice del grafo $\overline{\mathcal{R}}[H]$, con lo que tiene sentido considerar su valencia. Ahora bien, H es una cubierta de $\overline{\mathcal{R}}[H]$ luego es obvio que

$$\text{val}(H) = \text{val}_{\overline{\mathcal{R}}[H]}(H) = \text{val}_H(1_G).$$

De la misma forma es evidente que $\text{val}(g^{-1}H) = \text{val}_H(g)$.

Lema 3.10. *La función valencia $\text{val} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{N}$ es continua.*

Demostración. Sean H y $H' \in \mathcal{G}$ tales que $d(H, H') < 1$. Luego $B_H(1_G, 1) = B_{H'}(1_G, 1)$ y en consecuencia $\text{val}(H) = \text{val}_H(1_G) = \text{val}_{H'}(1_G) = \text{val}(H')$. Así pues la función val es localmente constante, y por lo tanto continua. \square

La relación de equivalencia \mathcal{R} puede describirse mediante un pseudogrupo, y la estructura de grafo de las \mathcal{R} -clases mediante un sistema finito de generadores de dicho pseudogrupo. Es decir, la estructura de grafo de las \mathcal{R} -clases coincide con la de un pseudogrupo grafado. En efecto, cada elemento $g \in G$ define una *traslación*

$$\tau_g : H \mapsto g^{-1}H$$

cuyo dominio es el conjunto abierto y cerrado $\text{dom } \tau_g = \{H \in \mathcal{G} \mid g^{-1} \in H\}$. Cada una de estas aplicaciones es un homeomorfismo entre $\text{dom } \tau_g$ y $\text{im } \tau_g = \text{dom } \tau_{g^{-1}}$. La familia de traslaciones $\{\tau_g \mid g \in G\}$ genera un pseudogrupo de transformaciones Γ sobre \mathcal{G} . Es obvio que la relación inducida por la acción de Γ sobre \mathcal{G} es \mathcal{R} .

Ahora bien, si tomamos el sistema de generadores S de G , podemos definir la familia $\Sigma = \{\tau_s \in \Gamma \mid s \in S\}$. Esta familia es un sistema de generadores finito para el pseudogrupo Γ que además define la misma estructura de grafo que la dada en la sección anterior. El lema 3.10 nos indica que la función valencia asociada a

dicha estructura de grafo es continua. Por lo tanto posible es aplicar el teorema de realización geométrica (teorema 2.29) al pseudogrupo grafado (Γ, Σ) :

Definición 3.11. El espacio foliado de Cayley de (Γ, Σ) , denotado por $(\mathfrak{G}, \mathcal{F})$, se denomina *espacio foliado por grafos de Gromov–Hausdorff*.

Por construcción, dicho espacio presenta las siguientes propiedades:

- el espacio topológico \mathfrak{G} es compacto;
- la foliación por grafos \mathcal{F} está transversalmente modelada por \mathcal{G} ;
- \mathcal{G} es una transversal completa y cerrada, y el pseudogrupo de holonomía transverso para la transversal \mathcal{G} es Γ , en particular $\mathcal{F}|_{\mathcal{G}} = \mathcal{R}$;
- la valencia está acotada por $2 \#S$ y;
- la hoja $L_H \in \mathcal{F}$ a través de $H \in \mathcal{G}$ es naturalmente isomorfa a $\overline{\mathcal{R}}[H]$, la realización geométrica del grafo simplicial $\mathcal{R}[H]$.

3.3. Estructura transversa

Introduciremos ahora los conceptos necesarios para estudiar la *dinámica transversa*, ya sea medible o topológica, de los espacios foliados. Ilustraremos las nociones introducidas a través del espacio de Gromov–Hausdorff.

3.3.1. Relaciones de equivalencia medibles discretas

Sea X un espacio topológico polaco y \mathcal{B} la σ -álgebra de sus borelianos, es decir, la σ -álgebra generada por los conjuntos abiertos de X . Según el teorema de Kuratowski, (X, \mathcal{B}) es isomorfo a \mathbb{R} , \mathbb{Z} o un conjunto finito, dependiendo del cardinal de X . Un *espacio boreliano estándar* es un espacio de Borel isomorfo a uno de éstos.

Definición 3.12. Una relación de equivalencia \mathcal{R} sobre un espacio boreliano estándar X es *medible discreta* si las clases de equivalencia $\mathcal{R}[x]$ son contables y \mathcal{R} es un boreliano de $X \times X$.

La relación de equivalencia \mathcal{R} definida sobre \mathcal{G} es medible discreta. En primer lugar, dado que G es contable y las \mathcal{R} -clases contienen a lo sumo tantos puntos como G , la relación es discreta. Por otro lado, como ya se ha dicho en la sección anterior, las traslaciones τ_g (con $g \in G$) generan la relación de equivalencia \mathcal{R} . De hecho, \mathcal{R} es la unión de los grafos de dichas traslaciones

$$\mathcal{R} = \bigcup_{g \in G} \text{grafo}(\tau_g) = \bigcup_{g \in G} \{(H, g^{-1}H) \mid H \in \text{dom } \tau_g\}.$$

Obviamente $\text{grafo}(\tau_g)$ es un boreliano de $X \times X$ (de hecho es un conjunto cerrado) y por lo tanto \mathcal{R} es medible y discreta.

Definición 3.13. Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia medible discreta sobre un espacio boreliano estándar X . Llamamos *transformación parcial de \mathcal{R}* a cualquier isomorfismo boreliano $\varphi : \text{dom } \varphi \rightarrow \text{im } \varphi$ entre dos borelianos de X tal que

$$\text{grafo}(\varphi) = \{(x, y) \in X \times X \mid y = \varphi(x)\} \subset \mathcal{R}.$$

Una medida boreliana μ sobre X es *invariante por \mathcal{R}* si lo es para cada transformación parcial de \mathcal{R} , es decir, $\varphi_*\mu(B') = \mu(\varphi^{-1}(B')) = \mu(B')$ para cada boreliano $B' \subset \text{im } \varphi$ y cada transformación parcial φ .

La noción de dinámica medible se introduce mediante los conceptos de equivalencia orbital y equivalencia orbital estable (véase [Gab2]):

Definición 3.14. Sean \mathcal{R} y \mathcal{R}' dos relaciones borelianas sobre sendos espacios borelianos estándar X y X' . Consideremos también dos medidas de probabilidad μ y μ' sobre X y X' invariantes por \mathcal{R} y \mathcal{R}' respectivamente. Las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{R}' se dice que son

1. *orbitalmente equivalentes* si X y X' contienen dos borelianos Y e Y' respectivamente, saturados y de medida total, y existe un isomorfismo boreliano $\varphi : Y \rightarrow Y'$ tal que $\varphi(\mathcal{R}[y]) = \mathcal{R}'[\varphi(y)]$ para casi todo $y \in Y$ y $\varphi_*\mu = \mu'$.
2. *establemente orbitalmente equivalente* si X y X' contienen dos borelianos Y e Y' , cuyos saturados son de medida total y tales que las relaciones de equivalencia inducidas $\mathcal{R}|_Y$ y $\mathcal{R}'|_{Y'}$ son orbitalmente equivalentes. Así, si $Y \subset X$ es un boreliano que corta a casi toda \mathcal{R} -clase, la inclusión de Y en X define una equivalencia orbital estable entre $\mathcal{R}|_Y$ y \mathcal{R} .

Dos relaciones de equivalencia medibles y discretas que son establemente orbitalmente equivalentes *representan la misma dinámica medible*.

Si las relaciones medibles discretas que se consideran están definidas sobre espacios polacos es posible definir estos conceptos de forma puramente boreliana (véase [DJK]):

Definición 3.15. Sean \mathcal{R} y \mathcal{R}' dos relaciones de equivalencia medibles y discretas definidas sobre dos espacios polacos X y X' . Diremos que \mathcal{R} y \mathcal{R}' son

1. *orbitalmente equivalentes* si X y X' contienen dos G_δ densos y saturados Y e Y' respectivamente, y existe un isomorfismo boreliano entre ellos $\varphi : Y \rightarrow Y'$ tal que $\varphi(\mathcal{R}|_Y[y]) = \mathcal{R}'|_{Y'}[\varphi(y)]$ para cada $y \in Y$.
2. *establemente orbitalmente equivalentes* si X y X' contienen dos borelianos Y e Y' tales que sus saturados son G_δ densos y las relaciones de equivalencia inducidas $\mathcal{R}|_Y$ y $\mathcal{R}'|_{Y'}$ son *orbitalmente equivalentes*.

Como en el caso anterior, dos relaciones medibles y discretas definidas sobre espacios polacos *representan la misma dinámica boreliana* si son establemente orbitalmente equivalentes.

3.3.2. Relaciones de equivalencia topológicas

Dada una relación de equivalencia \mathcal{R} sobre un cierto conjunto X , es siempre posible dotarla de una estructura de grupoide de la siguiente manera:

1. el conjunto de unidades es $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ que se identifica naturalmente con X ;
2. el conjunto de pares componibles \mathcal{R}^2 está formado por los pares $((x, y), (y, z))$;
3. las aplicaciones s y r son la primera y la segunda proyección coordinada respectivamente, la multiplicación parcial $\mu : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ viene dada por

$$\mu((x, y), (y, z)) = (x, z)$$

y la inversión por $\iota(x, y) = (y, x)$.

Definición 3.16. Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Una relación de equivalencia \mathcal{R} sobre X es una *relación de equivalencia topológica* si está dotada de una topología de forma que es un grupoide topológico, es decir, $\mu : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ es continua (dotando a \mathcal{R}^2 de la topología inducida por la del producto $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$) e $\iota : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ un homeomorfismo.

Una relación de equivalencia topológica \mathcal{R} sobre X es *r-discreta* si el espacio de unidades X es abierto en \mathcal{R} . Si \mathcal{R} es Hausdorff, X es de hecho un abierto cerrado de \mathcal{R} . Como viene siendo habitual supondremos que el espacio topológico \mathcal{R} es localmente compacto. Por otro lado, si \mathcal{R} es una relación *discreta*, es decir, las \mathcal{R} -clases son contables, ser *r-discreta* equivale a ser *étale*, i.e. que la proyección $r : \mathcal{R} \rightarrow X$ es un homeomorfismo local. Para probar este hecho basta observar que es posible dotar a cada *r*-fibra de la medida de contar y aplicar la proposición 2.8 de [Ren1].

Por otro lado, es obvio que los papeles de s y r pueden ser intercambiados, ya que $s = r \circ \iota$ y la inversión ι es un homeomorfismo. Además, hay que observar que la topología del grupoide \mathcal{R} no es, en general, la heredada de la topología producto sobre $X \times X$.

Sean \mathcal{R} y \mathcal{R}' dos relaciones de equivalencia topológicas *r-discretas* definidas sobre X y X' respectivamente. Si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X'$ de forma que $x \mathcal{R} y$ si y solamente si $h(x) \mathcal{R}' h(y)$, decimos que \mathcal{R} y \mathcal{R}' son *isomorfas*. Desde el punto de vista topológico estas relaciones son indistinguibles, pero no es el único tipo de equivalencia que resulta útil en esta situación. Consideremos X una transversal completa de una laminación y denotemos por \mathcal{R} la relación inducida por la misma. Si $Y \subset X$ es un abierto que corta a todas las órbitas, la relación inducida $\mathcal{R}|_Y$ y la relación total \mathcal{R} contienen la "misma información dinámica", pero no son en general isomorfas. Esta situación modela la siguiente definición:

Definición 3.17. Dos relaciones de equivalencia *r-discretas* \mathcal{R} y \mathcal{R}' sobre X y X' respectivamente, son *establemente orbitalmente equivalentes* si existen dos abiertos Y

e Y' de X y X' respectivamente que cortan a todas las clases de \mathcal{R} y \mathcal{R}' y tales que $\mathcal{R}|_Y$ y $\mathcal{R}'|_{Y'}$ son isomorfas. En este caso diremos que \mathcal{R} y \mathcal{R}' representan la misma *dinámica topológica*.

Nos proponemos ahora dotar a la relación \mathcal{R} definida sobre \mathcal{G} de una topología natural que lo convierte en un grupoide topológico r -discreto y localmente compacto. Para ello describiremos una base de dicha topología. A cada abierto U de \mathcal{G} y cada elemento $g \in G$ les asociamos el abierto básico

$$O(U, g) = \{(H, g^{-1}H) \in \mathcal{R} \mid H \in \mathcal{G}\}.$$

Observemos que $O(U, g)$ podría ser vacío, ya que la traslación $\tau_g : H \mapsto g^{-1}H$ sólo está definida en aquellos árboles que contienen al elemento g como vértice. En otras palabras, podría ocurrir que $\text{dom } \tau_g$ no interseque a U .

La topología de \mathcal{R} no es la topología inducida por la topología producto de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, sino una topología más fina. Por otra parte, como consecuencia de la prueba de la siguiente proposición, tendremos que \mathcal{R} es un espacio localmente compacto, Hausdorff y segundo numerable, luego metrizable separable y σ -compacto, o de manera equivalente, un espacio polaco localmente compacto.

Proposición 3.18. *La relación de equivalencia discreta \mathcal{R} es una relación de equivalencia topológica r -discreta.*

Demostración. En primer lugar, comprobemos que \mathcal{R} es una relación de equivalencia topológica. Si U es un abierto en \mathcal{G} , entonces

$$r^{-1}(U) = \{(H, H') \in \mathcal{R} \mid H \in U\} = \bigcup_{g \in G} O(U, g)$$

y por lo tanto la proyección r es continua. La aplicación involutiva ι es un homeomorfismo, ya que

$$\iota^{-1}(O(U, g)) = \{(g^{-1}H, H) \in \mathcal{R} \mid H \in U\} = O(g^{-1}U, g^{-1}),$$

donde $g^{-1}U = \{g^{-1}H \mid H \in U\}$ es un abierto de \mathcal{G} . Luego $s = r \circ \iota$ también es continua. Ahora la continuidad de la multiplicación parcial $\mu : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ se deduce de la de la aplicación $(s, r) : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{G} \times \mathcal{G}$.

Veamos que la relación \mathcal{R} es r -discreta. Ya sabemos que r es continua. También es abierta, ya que

$$r(O(U, g)) = U \cap \text{dom } \tau_g$$

para cada abierto U de \mathcal{G} y cada elemento $g \in G$. Por otro lado si $(H, H') \in \mathcal{R}$, existe $g \in G$ tal que $H' = g^{-1}H$. Obviamente $(H, H') \in O(\mathcal{G}, g)$ y la restricción de r al abierto básico $O(\mathcal{G}, g)$ es inyectiva y por tanto un homeomorfismo. \square

3.3.3. Pseudogrupo y grupoide de holonomía

Como ya se ha dicho en la definición 3.11, el pseudogrupo de holonomía del espacio foliado de Gromov–Hausdorff $(\mathbb{G}, \mathcal{F})$ reducido a la transversal completa \mathcal{G} es Γ , el pseudogrupo generado por las transformaciones $\tau_g : \text{dom } \tau_g \rightarrow \text{im } \tau_g$ con $g \in G$. Si tomamos otra transversal completa, el pseudogrupo de holonomía reducido a ésta es equivalente a Γ . Así, podemos decir que dos pseudogrupos representan la misma dinámica transversa si son equivalentes.

Por otro lado, recordemos que el grupoide de holonomía \mathcal{H} es el conjunto

$$\mathcal{H} = \{(H, g, H') \in \mathcal{G} \times G \times \mathcal{G} \mid H' = g^{-1}H\},$$

dotado de la multiplicación parcial dada por $(H, g, H')(H', g', H'') = (H, gg', H'')$, la inversión $\iota(H, g, H') = (H', g^{-1}, H)$ y las proyecciones primera y tercera como las aplicaciones s y r , identificando naturalmente \mathcal{G} con el espacio de unidades $\mathcal{H}^0 = \{(H, 1_G, H) \mid H \in \mathcal{G}\}$.

Proposición 3.19. *Al grupoide \mathcal{H} se le puede dotar de una topología que lo convierte en un grupoide topológico, es decir, la multiplicación parcial, la inversión y las aplicaciones s y r son continuas. De hecho, s y r son homeomorfismos locales, en otras palabras, \mathcal{H} es un grupoide étale.*

Demostración. Dado $g \in G$ y dos abiertos $U \subseteq \text{dom } \tau_g$ y $V \subseteq \text{im } \tau_g$, definimos el conjunto

$$O(U, g, V) = \{(H, g, g^{-1}H) \mid (H, g^{-1}H) \in U \times V\}.$$

La familia $\{O(U, g, V) \mid U \subseteq \text{dom } \tau_g \text{ y } V \subseteq \text{im } \tau_g \text{ con } g \in G\}$ es una base para una topología Hausdorff y localmente compacta sobre \mathcal{H} .

Es sencillo probar que las aplicaciones involucradas en la definición de \mathcal{H} son continuas. Además, las aplicaciones s y r son abiertas: $r(O(U, g, V)) = g^{-1}U \cap V$, y de forma similar para s . En consecuencia, son homeomorfismos locales. \square

Esta topología nos permite identificar el grupoide \mathcal{H} con $G(\Gamma)$, el grupoide de los gérmenes de Γ . En efecto, si a cada elemento $(H, g, H') \in \mathcal{H}$ se le asocia el germen de la traslación $\tau_g : U \rightarrow V$, con U y V entornos abiertos de H y H' respectivamente, se obtiene un isomorfismo entre ambos grupoides.

Observación 3.20. Por definición, el grupo de holonomía de la hoja que pasa por el grafo H es $\Gamma_H \subseteq G(\Gamma)$, el grupo de los gérmenes de las aplicaciones Γ que dejan invariante a H . Es decir, el grupo $\text{Iso}(H)$ de las traslaciones que dejan el grafo H invariante.

Por otro lado \mathcal{R} está dotada de una estructura de grupoide r -discreto, cuyos abiertos básicos son los grafos de las traslaciones τ_g , $O(U, g) = \{(H, g^{-1}H) \mid H \in U\}$ con $g \in G$ y U un abierto de $\text{dom } \tau_g$. Es posible definir la aplicación

$$p : (H, g, H') \in \mathcal{H} \mapsto (H, H') \in \mathcal{R},$$

que resulta ser un homomorfismo sobreyectivo de grupoides r -discretos. Su núcleo,

$$\text{Iso} = \ker p = \{(H, g, H) \mid g \in \text{Iso}(H)\},$$

es un subgrupoide r -discreto de \mathcal{H} . De hecho, puesto que las restricciones de las proyecciones s y r coinciden, se trata de un fibrado en grupos (discretos numerables). La fibra sobre H es precisamente el grupo de isotropía $\text{Iso}(H)$. En resumen, tenemos la siguiente sucesión exacta corta de grupoides

$$\begin{array}{ccccc} \text{Iso} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \xrightarrow{p} & \mathcal{R} \\ & \searrow & \downarrow s & \downarrow r & \swarrow s \\ & & \mathcal{G} & & \end{array} \quad (3.3)$$

Según un resultado obtenido de forma independiente por G. Hector (véase [Hec]) y por D.B.A. Epstein, K.C. Millett y D. Tischler (véase [EMT]), el conjunto de las hojas sin holonomía de una laminación \mathcal{L} es *residual*, es decir, contiene una intersección numerable de abiertos densos. En nuestro caso, esto significa que los grafos aperiódicos forman un conjunto residual \mathcal{G}_{ap} . Puesto que \mathcal{G} es un espacio de Baire (por ser un espacio polaco), cualquier conjunto residual es denso. Como consecuencia, la sucesión exacta corta de grupoides (3.3) se reduce a un isomorfismo de grupoides en restricción al conjunto residual denso \mathcal{G}_{ap} .

Obviamente estos mismos resultados se tienen en general, sustituyendo en el grupoide de holonomía los elementos g del grupo G por gérmenes de transformaciones de holonomía (véase el capítulo 1). De la misma forma que para el espacio foliado de Gromov–Hausdorff, dado un espacio foliado (M, \mathcal{F}) y una transversal completa X para él, se tiene un sucesión exacta de grupoides r -discretos

$$\text{Iso}_X \longrightarrow \mathcal{H}_X \longrightarrow \mathcal{R},$$

de donde deducimos el conocido resultado:

Proposición 3.21. *Si (M, \mathcal{F}) es un espacio foliado sin holonomía, su dinámica transversal está representada por la relación inducida sobre cualquier transversal completa.*

3.4. Grafos repetitivos y conjuntos minimales

Para caracterizar los conjuntos minimales en el espacio foliado de Gromov–Hausdorff, o de cualquier laminación asociada por el teorema de engorde, recurriremos a la noción de *grafo repetitivo* que es una adaptación de la propiedad análoga de los mosaicos [BBG, RW, Sol], y que aparece implícita en la tesis de E. Blanc [Bla2].

De manera intuitiva, un grafo es repetitivo (o tiene la *propiedad de isomorfismo local*) si no podemos distinguir en qué punto nos encontramos observando únicamente los alrededores.

Definición 3.22. Fijemos H y $H' \in \mathcal{G}$. Diremos que la bola $B_H(x, r)$ se *embebe fielmente* en H' y escribiremos $B_H(x, r) \hookrightarrow H'$ si existe $g \in G$ tal que $gB_H(x, r) = B_{H'}(gx, r) \subset H'$. Si la bola $B_{H'}(gx, r)$ está contenida en otra bola $B_{H'}(x', r')$, diremos que $B_H(x, r)$ se embebe fielmente en $B_{H'}(x', r')$ y lo denotaremos como antes $B_H(x, r) \hookrightarrow B_{H'}(x', r')$.

Definición 3.23. Un grafo $H \in \mathcal{G}$ es *repetitivo* si para cada $r > 0$ existe $R > 0$ tal que $B_H(1_G, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$, para cada $y \in H$.

En cambio, si fijado $r > 0$ existe $R > 0$ tal que $B_H(x, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$, para cada par de puntos x e $y \in H$, el grafo H se dirá *uniformemente repetitivo*.

El siguiente resultado proporciona un criterio de minimalidad para la *envoltura de un grafo* H , i.e. la clausura de la hoja por H , que resultará muy útil. Para simplificar la notación, denotaremos por $\Omega(H)$ la envoltura de H .

Teorema 3.24. Fijado $H \in \mathcal{G}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. H es uniformemente repetitivo;
2. H es repetitivo;
3. $\Omega(H)$ es minimal.

Demostración. [1 \Rightarrow 2] Esta implicación es obvia.

[2 \Rightarrow 3] Para demostrar que $\Omega(H)$ es minimal, hemos de comprobar que la clase de equivalencia de cualquier elemento $H' \in \Omega(H)$ es densa en $\Omega(H)$. Por una parte, sabemos que $\Omega(H') \subset \Omega(H)$. Luego nos basta probar que $H \in \Omega(H')$, en cuyo caso $\Omega(H) \subset \Omega(H')$. Para ello, fijemos $r > 0$. Por hipótesis, existe $R \geq r$ tal que $B_H(1_G, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$ para todo $y \in H$. Puesto que $H' \in \Omega(H)$, existe $x \in H$ tal que:

$$B_{H'}(1_G, R) = B_{x^{-1}H}(1_G, R) = x^{-1}B_H(x, R).$$

Si suponemos $y = x$, la bola $B_H(1_G, r)$ se embebe fielmente en la bola $B_H(x, R)$, es decir, $gB_H(1_G, r) = B_H(g, r) \subset B_H(x, R)$, para algún $g \in G$. Luego

$$x^{-1}gB_H(1_G, r) = x^{-1}B_H(g, r) \subset x^{-1}B_H(x, R) = B_{H'}(1_G, R).$$

Observemos que $x^{-1}gB_H(1_G, r) = x^{-1}B_H(g, r) = B_{x^{-1}H}(x^{-1}g, r) = B_{H'}(x^{-1}g, r)$. En consecuencia, si denotamos $h = x^{-1}g$, tenemos

$$B_H(1_G, r) = h^{-1}B_{H'}(h, r) = B_{h^{-1}H'}(1_G, r).$$

En resumen, se ha encontrado un árbol $h^{-1}H' \in \mathcal{A}[H']$ cuya distancia a H es menor que e^{-r} . Como esto sucede para todo $r > 0$, acabamos de concluir que $H \in \Omega(H')$.

[3 \Rightarrow 2] Fijado $r > 0$, a cada entero $S > 0$, le asociamos el conjunto

$$U_S = \left\{ H' \in \Omega(H) \mid B_H(1_G, r) \hookrightarrow B_{H'}(1_G, S) \right\}.$$

Veamos que estos conjuntos forman un recubrimiento abierto de $\Omega(H)$.

En primer lugar, cada conjunto U_S es abierto. En efecto, dado un elemento H' de U_S , cualquier elemento H'' de la bola $B_{\Omega(H)}(H', e^{-S})$ verifica:

$$B_H(1_G, r) \hookrightarrow B_{H''}(1_G, S) = B_{H'}(1_G, S),$$

y en consecuencia la bola abierta $B_{\Omega(H)}(H', e^{-S})$ está contenida en U_S . Por otra parte, cualquier elemento H' de $\Omega(H)$ pertenece a algún abierto U_S . Por ser $\Omega(H)$ minimal, como antes, $H \in \Omega(H')$. Por consiguiente, dado $r > 0$, existe $x' \in H'$ tal que

$$B_H(1_G, r) = x'^{-1}B_{H'}(x', r).$$

Luego

$$x'B_H(1_G, r) = B_{H'}(x', r) \subset B_{H'}(1_G, S)$$

siendo $S = r + d(1_G, x')$. Así pues, H' pertenece al conjunto U_S . Además resulta obvio que el recubrimiento $\{U_S\}_{S>0}$ es monótono creciente con respecto a la inclusión. Por ser $\Omega(H)$ compacto, deducimos que existe $R > 0$ tal que $\Omega(H) = U_R$. Para cada $y \in H$, el árbol trasladado $y^{-1}H$ pertenece a U_R , luego $B_H(1_G, r) \hookrightarrow B_{y^{-1}H}(1_G, R)$, es decir,

$$B_H(g, r) = B_{g^{-1}H}(g, r) \subset B_{y^{-1}H}(1_G, R)$$

para algún $g \in G$. Trasladando por y , tenemos que

$$yB_H(1_G, r) = yB_{y^{-1}H}(g, r) = B_H(h, r) \subset yB_{y^{-1}H}(1_G, R) = B_H(y, R)$$

siendo $h = gy$. Acabamos de probar que $B_H(1_G, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$.

[3 \Rightarrow 1] Fijemos $r > 0$ y consideremos un punto arbitrario $x \in H$. Como antes, para cada entero $S > 0$, definimos el conjunto

$$U_S^x = \{H' \in \Omega(H) \mid B_H(x, r) \hookrightarrow B_{H'}(1_G, S)\}.$$

Procediendo de manera análoga al caso anterior, deducimos que existe un radio $R(r, x)$ tal que $B_H(x, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$ para todo $y \in H$.

No obstante, para poder afirmar que H tiene la propiedad de isomorfismo local, necesitamos que R no dependa del punto x . Para ello, conviene hacer una observación previa. Notemos que $B_{Cay}(1_G, r) = g^{-1}B_{Cay}(g, r)$ para cualquier vértice g del grafo Cay . La compacidad de \mathcal{G} proviene del hecho de que la bola $B_{Cay}(1_G, r)$ sólo contiene un número finito de subárboles enraizados en 1_G . Así pues, sólo hay un número finito de clases de traslación de bolas $B_H(x, r)$ de radio $r > 0$. Denotemos por x_1, x_2, \dots, x_n una familia finita de puntos de H tales que las bolas $B_H(x_i, r)$ representan todas las posibles clases de traslación.

Como consecuencia de la observación inicial, para cada $1 \leq i \leq n$, sabemos que $B_H(x_i, r) \hookrightarrow B_H(y, R(r, x_i))$. Ahora, si tomamos $R = \max\{R(r, x_1), \dots, R(r, x_n)\}$, entonces $B_H(x, r) \hookrightarrow B_H(y, R)$ para cada par $x, y \in H$, ya que $B_H(x, r)$ es la imagen por una traslación de alguna bola $B_H(x_i, r)$ con esa misma propiedad. \square

Observemos que esto prueba que cualquier minimal del espacio foliado de Gromov–Hausdorff es de esta forma. En efecto, si X es un minimal de este espacio, y si $H \in X$ es un grafo, entonces $\Omega(H) \subset X$. De la minimalidad se deduce que $\Omega(H) = X$.

Envoltura de un grafo aperiódico y repetitivo

En el capítulo 3 hemos construido $\mathcal{G}(G, S)$, el espacio foliado de Gromov–Hausdorff, cuyos minimales se corresponden con grafos repetitivos. También hemos comprobado que $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ (con $S = \{1\}$) consiste en dos semirectas que se acumulan sobre un círculo.

Si sustituimos \mathbb{Z} por \mathbb{Z}^2 , la situación cambia radicalmente y la diversidad de ejemplos de interés que podemos encontrar en $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^2)$ es enorme. Por ejemplo, el shift de Bernoulli (ejemplo 1.5) puede realizarse dentro de $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$. En efecto, sean T_0 y T_1 los árboles en forma de L que se muestran aquí



A cada sucesión $\alpha = (\alpha_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, le asociamos el árbol $\Psi(\alpha)$ obtenido como la unión de los árboles $T_{\alpha_n} + (n, 0)$ que resultan al trasladar T_{α_n} por el vector $(n, 0)$. Es trivial comprobar que $\Psi : \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ define una equivalencia orbital estable entre el shift y la saturación de $\text{im } \Psi$, y que la casi-isometría de las órbitas. De forma similar podemos embeber el shift *bidimensional* en $\mathcal{G}(\mathbb{Z}^2)$ obteniendo también una equivalencia orbital estable que respeta el tipo de casi-isometría.

Pero éstos no son los únicos ejemplos interesantes de espacios que esconde $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$. É. Ghys define en [Ghy2] un ejemplo de laminación minimal con hojas de diferentes tipos conformes a partir de un árbol aperiódico y repetitivo concreto. Este será el primer ejemplo que estudiaremos en este capítulo. En concreto, describiremos su dinámica transversa medible, reduciéndola a la de una maquina de sumar binaria. Las técnicas que emplearemos para ello serán de utilidad en capítulos venideros.

Después mostraremos como es posible construir árboles repetitivos y aperiódicos con cualquier número de finales en $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$. Luego construiremos minimales que contienen hojas con un número de finales cualquiera prefijado.

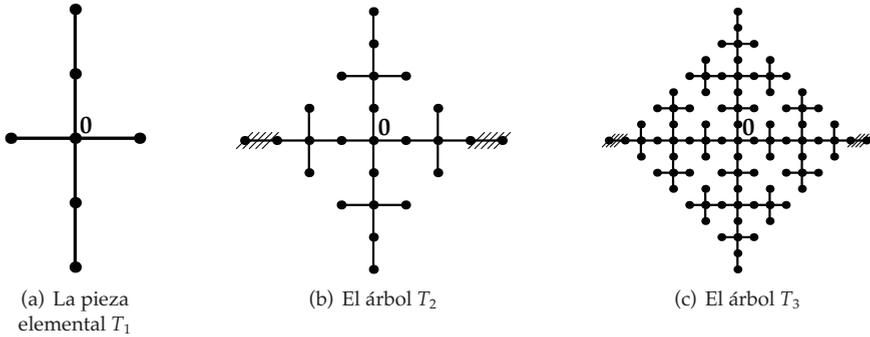


Figura 4.1.

Los primeros pasos en la construcción de T_∞ .

Por último describiremos una pareja de árboles en este espacio, que pertenecen a un mismo minimal, pero poseen motivos con diferentes tasas de aparición. De esta manera obtendremos un minimal no únicamente ergódico.

4.1. El ejemplo de Ghys–Kenyon

Vamos a construir de manera inductiva un subárbol repetitivo y aperiódico de $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2)$ al que llamaremos *árbol de Kenyon*. Este árbol apareció descrito por primera vez en el trabajo de R. Kenyon [Ken2]. No obstante, la idea de usarlo para construir un subconjunto minimal de \mathcal{G} es de É. Ghys véase [Ghy2].

4.1.1. El árbol de Kenyon y la laminación de Ghys–Kenyon

Para construir el árbol de Kenyon, comenzamos con la pieza elemental T_1 que puede verse en la figura 4.1(a). A continuación, la trasladamos verticalmente por medio del vector $(0, 2)$ y seguidamente le aplicamos tres rotaciones de centro 0 y ángulo $\frac{\pi}{2}$, π y $-\frac{\pi}{2}$ respectivamente. Si eliminamos las aristas terminales situadas a izquierda y derecha del segmento horizontal de longitud 2^3 contenido en el árbol resultante, tenemos el árbol T_2 (véase la figura 4.1(b)). De nuevo, si trasladamos T_2 mediante el vector $(0, 4)$, aplicamos las mismas rotaciones y eliminamos las aristas terminales del segmento horizontal de longitud 2^4 , obtenemos un árbol T_3 representado en la figura 4.1(c).

Por recurrencia, en la etapa n -ésima, obtenemos un árbol finito T_n que corta a los ejes vertical y horizontal en los intervalos $\{0\} \times [-2^n, 2^n]$ y $[-2^n + 1, 2^n - 1] \times \{0\}$ respectivamente.

Definición 4.1. Llamaremos *árbol de Kenyon* al subárbol de $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2)$

$$T_\infty = \bigcup_{n \geq 1} T_n.$$

Dado un grafo infinito H , denominamos *rayo* a un subgrafo de H , $R = (V, E)$ con

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\} \quad \text{y} \quad E = \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, x_{n+1}), \dots\},$$

con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Los subgrafos conexos e infinitos de un rayo se denominan *colas* del rayo. Obsérvese que las colas, que son rayos a su vez, se obtienen al eliminar los primeros vértices del rayo. Diremos que dos rayos de H son *equivalentes* si, para cada conjunto finito de vértices S , existen sendas colas contenidas en la misma componente conexa de $H - S$. Así, una *final* del grafo H es una clase de equivalencia de rayos. Si H es un árbol, calcular los finales resulta especialmente sencillo: dos rayos en un árbol son equivalentes si tienen una cola común. Así pues, fijado un vértice en el árbol, existe un único rayo para cada final partiendo de dicho vértice.

Esta definición de finales de un grafo infinito fue introducida por R. Halin en [Hal]. Si el grafo es localmente finito, esta noción coincide con la clásica para espacios topológicos dada por H. Freudenthal (cf. [Fre]). En general existe una inyección de los últimos en los primeros, como se prueba en [DK].

Proposición 4.2. *El árbol de Kenyon T_∞ es un árbol aperiódico y repetitivo con cuatro finales.*

Demostración. Observemos que T_∞ contiene dos rectas que pasan por el origen y que por ningún otro vértice pasan otras dos rectas (ya que se formaría un bucle). Luego T_∞ tiene 4 finales. Por otro lado notemos que la bola $B_{T_\infty}(0, 2^n)$ se embebe fielmente en cualquier bola $B_{T_\infty}(y, 2^{n+1} + 1)$. Del criterio de minimalidad (lema 3.24), deducimos que T_∞ es repetitivo. \square

Definición 4.3. Llamaremos *minimal de Ghys–Kenyon* al subconjunto cerrado y saturado $X = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$ de T , dotado de la relación de equivalencia inducida por \mathcal{R} . Como consecuencia del teorema de realización geométrica 2.29, existe un espacio compacto, metrizable y separable \mathfrak{X} foliado por grafos tal que X es una transversal completa y \mathcal{R} es la relación de equivalencia inducida sobre X . Lo llamaremos *espacio foliado de Ghys–Kenyon*. De hecho, según el teorema de engorde 2.31, podemos sustituir \mathfrak{X} por un espacio M con las mismas propiedades, pero dotado de una laminación por superficies de Riemann \mathcal{F} . Diremos que (M, \mathcal{L}) es la *laminación de Ghys–Kenyon*.

4.1.2. Codificación de los árboles

En esta sección pretendemos dar una codificación de las hojas de \mathcal{L} mediante sucesiones infinitas de cuatro símbolos. Tomamos el conjunto $\mathcal{S}_4 = (\mathbb{Z}/4)^\mathbb{N}$ y lo dotamos de la topología generada por los cilindros

$$C_{\alpha_0 \dots \alpha_n}^{i_0 \dots i_n} = \left\{ \beta_0 \dots \beta_{i_0-1} \alpha_0 \beta_{i_0+1} \dots \beta_{i_n-1} \alpha_n \beta_{i_n+1} \dots \mid \beta_i \in \mathbb{Z}/4 \right\}.$$

Esta es la base de la topología producto en \mathcal{S}_4 , dotando a cada factor la topología discreta. Luego \mathcal{S}_4 es un espacio de Cantor.

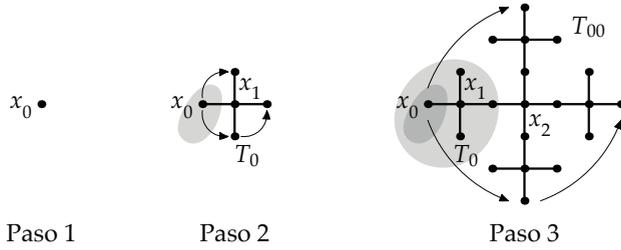


Figura 4.2.

Los primeros pasos de la construcción de T_α para $\alpha = 000\dots$

Observemos también que la topología de S_4 se puede generar tan sólo con los cilindros del tipo $C_{\alpha_0\dots\alpha_n}^{0\dots n}$, ya que cualquier cilindro es unión finita de los de este tipo. Denotaremos a estos cilindros simplemente por $C_{\alpha_0\dots\alpha_n}$.

Construiremos ahora la aplicación de codificación $\Phi : S_4 \rightarrow X$, y daremos algunas de sus propiedades básicas. Definimos la aplicación $\mathbf{r} : \mathbb{Z}/4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$\mathbf{r}(x) = e^{\frac{\pi}{2}ix},$$

identificando \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 de la manera usual. Con ayuda de esta aplicación construiremos Φ . Supongamos que tenemos un código $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$, definiremos $\Phi(\alpha)$ de manera inductiva. Partimos del punto $x_0^\alpha = \mathbf{0}$ y definimos $x_1^\alpha = \mathbf{r}(\alpha_0)$ y unimos x_0^α con x_1^α con ayuda de una arista. Replicamos este conjunto alrededor de x_1^α mediante los ángulos $\frac{\pi}{2}$, π y $-\frac{\pi}{2}$. Definimos T_{α_0} precisamente como este conjunto.

Ahora alargamos T_{α_0} en la dirección de $\mathbf{r}(\alpha_1)$ mediante una arista de longitud 1, que une uno de los extremos de T_{α_0} con un nuevo punto x_2^α a distancia 2 de x_1^α . Repetimos el proceso de réplica alrededor de x_2^α obteniendo así un árbol finito al que llamaremos $T_{\alpha_0\alpha_1}$. Véase la figura 4.2.

Reiterando este proceso obtenemos una sucesión de puntos $\{x_n^\alpha\}$ y un conjunto de árboles encajados $\{T_{\alpha_0\dots\alpha_n}\}$. Definimos entonces

$$\Phi(\alpha) = T_\alpha = \bigcup_{n \geq 0} T_{\alpha_0\dots\alpha_n}.$$

Por otro lado, a la sucesión de vértices $E_\alpha = \{x_n^\alpha\}$ la llamaremos el *esqueleto del árbol* T_α . Dicho esqueleto se puede calcular explícitamente mediante la siguiente expresión:

$$x_{n+1}^\alpha = x_n^\alpha + 2^n \mathbf{r}(\alpha_n) = \sum_{i=0}^n 2^i \mathbf{r}(\alpha_i). \quad (4.1)$$

El esqueleto $E_\alpha = \{x_n^\alpha\}$ de una árbol T_α es un camino que une cada punto x_n con los finales de T_α .

Proposición 4.4. *Cada sucesión $\alpha \in S_4$ define un árbol de X , y por lo tanto la hoja que pasa por él.*

Observación 4.5. Si tomamos dos códigos finitos cualesquiera $\alpha_0 \cdots \alpha_n$ y $\tilde{\alpha}_0 \cdots \tilde{\alpha}_n$, tenemos que los árboles finitos $T_{\tilde{\alpha}_0 \cdots \tilde{\alpha}_n} = T_{\alpha_0 \cdots \alpha_n} - v_0$, donde

$$v_0 = \sum_{i=0}^n 2^i \mathbf{r}(\alpha_i) - \sum_{i=0}^n 2^i \mathbf{r}(\tilde{\alpha}_i) = \sum_{i=0}^n 2^i (\mathbf{r}(\alpha_i) - \mathbf{r}(\tilde{\alpha}_i)). \quad (4.2)$$

Proposición 4.6. *La aplicación de codificación Φ es inyectiva.*

Demostración. Si α y β son códigos distintos, existe n_0 de forma que $\alpha_{n_0} \neq \beta_{n_0}$. Por (4.2), resulta que v_0 es no nulo para códigos finitos del tipo $\alpha_0 \cdots \alpha_n$ y $\beta_0 \cdots \beta_n$ para $n \geq n_0$. Es decir, existe un punto en el que las bolas alrededor del origen de T_α y T_β difieren. \square

Por otro lado el origen del árbol T_α no puede tener valencia 4, es decir, que $\text{val}(T_\alpha) \leq 2$, sea quien sea $\alpha \in \mathcal{S}_4$. Para que la valencia del origen fuese 4 necesariamente un punto del esqueleto, distinto del primero, debería ser el origen, cosa que es imposible por (4.1). Tenemos por tanto:

Lema 4.7. *El origen de un árbol codificado es siempre de valencia 1 ó 2.*

Precisamente esto evita también que el árbol T_∞ (o alguno de sus trasladados) se codifique. En efecto, para se codificase un trasladado de T_∞ debería formarse la *cruz* que aparece en T_∞ en algún lugar. Por construcción, necesariamente esto sólo es posible si infinitos puntos del esqueleto “cayesen” en el mismo punto, es decir, $x_n^\alpha = x_{n+k}^\alpha$ para una infinidad de $k \in \mathbb{N}$. Pero de hecho, ni siquiera dos pueden ser iguales, según (4.1). Si denotamos por $X^{\leq 2}$ al conjunto de los puntos de X de valencia menor o igual a 2 tenemos que $\Phi : \mathcal{S}_4 \hookrightarrow X^{\leq 2}$. Si definimos $Y = X - \mathcal{H}[T_\infty]$, tenemos la inyección $\Phi : \mathcal{S}_4 \hookrightarrow Y^{\leq 2}$, con las notaciones obvias. Veamos que otras propiedades cumple esta aplicación.

Lema 4.8. *Sea T_α un árbol codificado. Para todo vértice \tilde{x}_0 de valencia 1 ó 2 de T_α existe un código $\tilde{\alpha}$ tal que $T_{\tilde{\alpha}} + \tilde{x}_0 = T_\alpha$.*

Demostración. Denotemos por E al esqueleto de T_α , formado por los vértices $\{x_n\}$. Sea n_0 el menor número natural que minimiza la distancia $d_{T_\alpha}(\tilde{x}_0, x_{n_0})$. La demostración se realiza en $n_0 + 1$ pasos. Consideremos la bola $\overline{B}_{T_\alpha}(x_{n_0-1}, 2^{n_0})$, entre los cuatro puntos

$$x_{n_0} + \mathbf{r}(i)2^{n_0}, \quad \text{con } i \in \mathbb{Z}/4,$$

existe un único punto $x_{n_0-1}^1$ tal que $d_{T_\alpha}(\tilde{x}_0, x_{n_0-1}^1) < 2^{n_0}$. En efecto, es el único que cumple que $\tilde{x}_0 \in \overline{B}_{T_\alpha}(x_{n_0-1} + \mathbf{r}(i)2^{n_0}, 2^{n_0} - 1)$.

Sean $x_0^1, \dots, x_{n_0-2}^1$ las imágenes de los puntos x_0, \dots, x_{n_0-2} en la bola cerrada $\overline{B}_{T_\alpha}(x_{n_0-1}^1, 2^{n_0})$, respecto del único giro (eventualmente, la identidad) que fija x_{n_0} y lleva $\overline{B}_{T_\alpha}(x_{n_0-1}, 2^{n_0} - 1)$ en $\overline{B}_{T_\alpha}(x_{n_0-1}^1, 2^{n_0} - 1)$.

Sea ahora $x_{n_0-2}^2$ el único punto tal que $\tilde{x}_0 \in \overline{B}_{T_\alpha}(x_{n_0-1}^1 + \mathbf{r}(i)2^{n_0-1}, 2^{n_0-1} - 1)$, y $x_0^2, \dots, x_{n_0-3}^2$ los girados de los puntos $x_0^1, \dots, x_{n_0-3}^1$ en la bola cerrada $\overline{B}_{T_\alpha}(x_{n_0-2}^2, 2^{n_0-1})$,

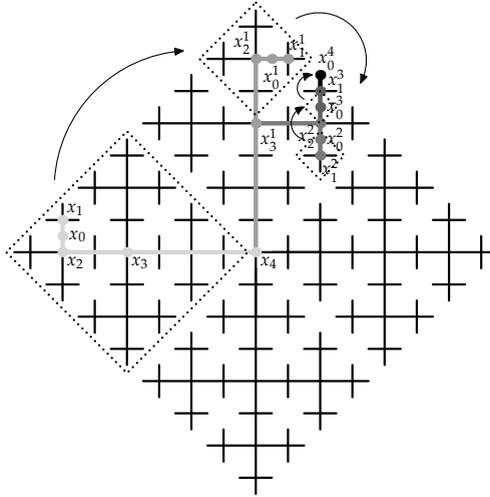


Figura 4.3.

Proceso de cambio de punto base en un árbol codificado.

respecto del único giro (eventualmente la identidad) que fija $x_{n_0-1}^1$ y lleva la bola cerrada $\bar{B}_{T_\alpha}(x_{n_0-2}^1, 2^{n_0-1} - 1)$ en $\bar{B}_{T_\alpha}(x_{n_0-2}^2, 2^{n_0-1} - 1)$. Este proceso se ilustra en la figura 4.3.

Se sigue iterando este proceso, y se llega finalmente a un nuevo esqueleto definido por las aristas

$$\tilde{E} = \{\tilde{x}_0 = x_0^{n_0}, x_1^{n_0-1}, x_2^{n_0-2}, \dots, x_{n_0-1}^1, x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+3}, \dots\}$$

A partir de dicho esqueleto se obtiene un código $\tilde{\alpha}$ sin más que tomar como el n -ésimo elemento de $\tilde{\alpha}$ al símbolo

$$\tilde{\alpha}_n = \mathbf{r}^{-1}((e_{n+1} - e_n) / \|e_{n+1} - e_n\|).$$

Observemos que sólo se modifican un número finito de símbolos del código α . \square

Proposición 4.9. *Cualquier árbol de $Y^{\leq 2} = X^{\leq 2} - \mathcal{R}[T_\infty]$ se puede codificar. En otras palabras $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow Y^{\leq 2}$ es una biyección.*

Demostración. Sea $T \in Y$ tal que $\mathbf{0} \in T$ sea un vértice de valencia 1. Si vemos que es posible codificarlo, aplicando el lema 4.8, tendremos que cualquier árbol de $Y^{\leq 2}$ se puede codificar.

Dado que $\text{val}_T(\mathbf{0}) = 1$, la esfera $\mathcal{S}_T(\mathbf{0}, 1)$ se reduce a un punto que denotaremos por x_1 . El primer código viene dado por la posición de este punto, esto es

$$\alpha_0 = \mathbf{r}^{-1}(x_1).$$

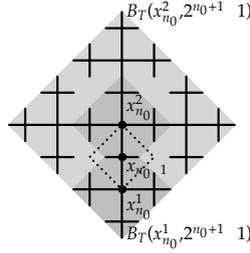


Figura 4.4.

La bola $B_T(x_{n_0}^1, 2^{n_0} - 1)$ es isométrica a $B_{T_\infty}(\mathbf{0}, 2^{n_0} - 1)$.

Supongamos que conocemos el código hasta el índice $n_0 - 1$, es decir, los dígitos $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_0-1}$ y, por lo tanto, los puntos del esqueleto $x_0 = \mathbf{0}, x_1, \dots, x_{n_0-1}$.

Para la esfera $S_T(x_{n_0-1}, 2^{n_0})$ hay dos posibilidades:

1. que se reduzca a un punto $S_T(x_{n_0-1}, 2^{n_0}) = \{x_{n_0}\}$, donde

$$x_{n_0} = x_{n_0-1} + 2^{n_0}v,$$

con $v \in S$. Entonces, tomamos $\alpha_{n_0} = \mathbf{r}^{-1}(v)$;

2. que contenga dos puntos $S_T(x_{n_0-1}, 2^{n_0}) = \{x_{n_0}^1, x_{n_0}^2\}$. En tal caso, existe un único $i \in \{1, 2\}$ tal que la bola $B_T(x_{n_0}^i, 2^{n_0+2} - 1)$ es isométrica por traslación a la bola $B_{T_\infty}(\mathbf{0}, 2^{n_0+2} - 1)$ (véase la figura 4.4).

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = 1$, entonces tomamos

$$x_{n_0} = x_{n_0}^1 = x_{n_0-1} + 2^{n_0}v,$$

con $v \in S$ y el siguiente dígito del código es entonces $\alpha_{n_0} = \mathbf{r}^{-1}(v)$. □

Así se tiene como corolario el siguiente resultado:

Proposición 4.10. *El conjunto minimal de Ghys–Kenyon admite una descomposición como unión disjunta*

$$X = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]} = \mathcal{R}[T_\infty] \sqcup \bigcup_{\alpha \in S_4} \mathcal{R}[T_\alpha].$$

4.1.3. La relación cofinal

Según hemos probado, la aplicación de codificación Φ es biyectiva. El objetivo ahora es comprobar que Φ transforma \mathcal{R} en una relación “sencilla” sobre S_4 de la que podremos obtener resultados para la dinámica del espacio foliado de Ghys–Kenyon. Recordemos que el *desplazamiento* o *shift de Bernoulli* $\sigma : S_4 \rightarrow S_4$ es la aplicación continua definida por

$$\sigma(\alpha)_n = \alpha_{n+1},$$

para cada $\alpha \in S_4$ y $n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.11. Diremos que α y $\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_4$ son *cofinales*, y lo denotaremos por $\alpha \mathcal{R}_{\text{cof}} \tilde{\alpha}$, si existe n_0 de forma que $\sigma^{n_0}(\alpha) = \sigma^{n_0}(\tilde{\alpha})$.

Observemos que la relación \mathcal{R}_{cof} puede escribirse como

$$\mathcal{R}_{\text{cof}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} (p_m \times p_m)^{-1}(\Delta),$$

siendo p_m la m -ésima proyección coordinada y Δ la diagonal de $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4$. Como p_m es continua y Δ es un abierto cerrado de $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/4$, es inmediato que:

Proposición 4.12. *La relación \mathcal{R}_{cof} es una relación boreliana discreta.*

Más aún, es posible dotarla de una topología que la convierte en una relación r -discreta, sin más que repetir en proceso descrito para la relación \mathcal{R} del espacio de Gromov–Hausdorff (cf. §3.3).

La relación cofinal puede describirse mediante una acción sencilla de \mathbb{Z} sobre el conjunto de Cantor. Consideremos el anillo de los enteros 2-ádicos $\mathbb{Z}_2 = \{\sum p_n 2^n \mid p_n \in \{0, 1\} \text{ y } n \geq 0\}$. El anillo \mathbb{Z}_2 es un anillo topológico homeomorfo naturalmente al conjunto de Cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Definimos la *maquina de sumar binaria* como el sistema dinámico clásico consistente en la acción continua de \mathbb{Z}

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ (n, p) &\longmapsto n + p \end{aligned}$$

Veamos como actúa 1 sobre \mathbb{Z}_2 . Podemos describir $\sum p'_n 2^n = 1 + \sum p_n 2^n$ como sigue: sea n_0 el menor entero tal que $p_{n_0} = 0$, entonces

$$p'_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0, \\ 1 & \text{si } n = n_0, \\ p_n & \text{si } n > n_0. \end{cases}$$

Si n_0 no existe, estamos en el caso $1 + \sum 2^n$. En tal caso la llevada de la suma pasa por todos los términos y $1 + \sum 2^n = 0$ (de hecho $\sum 2^n$ es -1 en la notación 2-ádica). Por lo tanto la relación cofinal sobre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ y la de las órbitas de esta acción son orbitalmente equivalentes en sentido boreliano, ya que difieren en una única orbita. Mediante un “cambio de base” en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ probamos que:

Proposición 4.13. *La relación \mathcal{R}_{cof} es orbitalmente equivalente, en sentido boreliano, a la maquina de sumar binaria.*

Vamos a comprobar ahora que a relación de equivalencia inducida sobre \mathcal{S}_4 es precisamente la relación cofinal. Antes de comenzar la demostración es conveniente observar lo siguiente: dados dos árboles codificados T_α y $T_{\tilde{\alpha}}$, y un vértice $v_0 \in T_\alpha$ tal que $T_\alpha = T_{\tilde{\alpha}} + v_0$, tenemos que, si $n \neq m$, $x_n^\alpha \neq x_m^{\tilde{\alpha}} + v_0$, ya que el tamaño de las ramas que “parten” de los vértices del esqueleto depende del índice n . Véase la figura 4.5.

Proposición 4.14. *Dos códigos α y $\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_4$ generan la misma hoja si y sólo si son cofinales.*

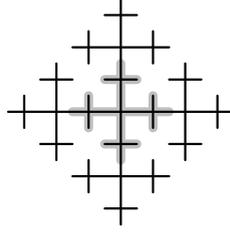


Figura 4.5.

El tamaño de las ramas depende del vértice del esqueleto.

Demostración. Supongamos que α y $\tilde{\alpha}$ son cofinales, i.e. existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ si $n \geq n_0$. Por la observación 4.5, existe v_0 tal que lleva el árbol finito asociado a $\tilde{\alpha}_0 \tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_{n_0}$ sobre el asociado a $\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n_0}$, es decir,

$$T_{\tilde{\alpha}_0 \tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_{n_0}} + v_0 = T_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n_0}},$$

con v_0 definido como en (4.2).

Por otro lado, para construir el árbol finito $T_{\alpha_0 \dots \alpha_{n_0} \alpha_{n_0+1}}$ se añade una arista hasta el vértice $(n_0 + 1)$ -ésimo del esqueleto de T_α , que según (4.1) es $x_{n_0+1}^\alpha = \sum_{i=0}^{n_0+1} 2^i \mathbf{r}(\alpha_i)$. Tenemos un punto análogo $x_{n_0+1}^{\tilde{\alpha}}$ para $\tilde{\alpha}$. Ahora bien, teniendo en cuenta (4.2) y que $\alpha_{n_0+1} = \tilde{\alpha}_{n_0+1}$

$$x_{n_0+1}^\alpha - x_{n_0+1}^{\tilde{\alpha}} - v_0 = \sum_{i=0}^{n_0} 2^i (\mathbf{r}(\alpha_i) - \mathbf{r}(\tilde{\alpha}_i)) - v_0 + 2^i \mathbf{r}(\alpha_i) - 2^i \mathbf{r}(\tilde{\alpha}_i) = 0.$$

Es obvio entonces que $T_{\tilde{\alpha}_0 \tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_{n_0+1}} + v_0 = T_{\tilde{\alpha}_0 \tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_{n_0+1}}$. Dado que para cada $n \geq n_0$ tenemos que $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$, es posible repetir este argumento, así $T_{\tilde{\alpha}_0 \tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n} + v_0 = T_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n}$, para cada $n \geq n_0$. Por consiguiente $T_{\tilde{\alpha}} + v_0 = T_\alpha$.

Veamos el recíproco. Supongamos que ambos códigos representan la misma hoja, es decir, existe $v_0 \in T_\alpha$ tal que $T_\alpha = T_{\tilde{\alpha}} + v_0$. Tenemos los esqueletos $E_\alpha = \{x_n^\alpha\}$ y $E_{\tilde{\alpha}} = \{x_n^{\tilde{\alpha}}\}$. Definimos ahora $\tilde{x}_n = x_n^{\tilde{\alpha}} + v_0$. El conjunto $\tilde{E} = \{\tilde{x}_n\}$ es la copia trasladada por v_0 de $E_{\tilde{\alpha}}$ en T_α . Sea

$$c = \min \{d(x_n^\alpha, \tilde{x}_m) \mid n, m \geq 0\}.$$

Elegimos n_0 y $m_0 \geq 0$ de forma que $d(x_{n_0}^\alpha, \tilde{x}_{m_0}) = c$. El segmento (dentro del árbol) que une $x_{n_0}^\alpha$ con \tilde{x}_{m_0} no contiene otros puntos ni de E_α ni de \tilde{E} , por lo que

$$c \leq \min\{2^{n_0}, 2^{m_0}\} - 1 = R.$$

Entonces $x_{n_0}^\alpha \in B_{T_\alpha}(\tilde{x}_{m_0}, R)$ y $\tilde{x}_{m_0} \in B_{T_{\tilde{\alpha}}}(x_{n_0}^\alpha, R)$, con lo que, por la construcción, ambos centros son iguales, i.e. $c = 0$ (véase la figura 4.6(a)). Con esto sabemos que

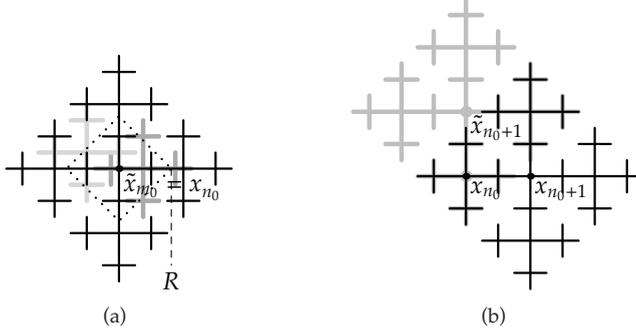


Figura 4.6.

(a) La constante c es necesariamente nula. (b) Vértices con bolas iguales a su alrededor no pueden ser cercanos.

existen $n_0, m_0 \geq 0$ de forma $x_{n_0}^\alpha = \tilde{x}_{m_0}$. Como el tamaño de las ramas que parten de un vértice el esqueleto depende de en que posición se encuentra en el mismo (figura 4.5), necesariamente $n_0 = m_0$.

Veamos que el código coincide de n_0 en adelante. En efecto, si $x_{n_0+1}^\alpha \neq \tilde{x}_{n_0+1}$, necesariamente

$$\tilde{x}_{n_0+1} = x_{n_0}^\alpha - \mathbf{r}(\alpha_{n_0})2^{n_0},$$

ya que en otro caso, por construcción, se formaría un ciclo en el árbol (como se muestra en la figura 4.6(b)) que es imposible.

Luego $\tilde{\alpha}_{n_0} = -\alpha_{n_0}$. En el siguiente paso, $\alpha_{n_0} = \alpha_{n_0+1}$ (resp. $\tilde{\alpha}_{n_0} = \tilde{\alpha}_{n_0+1}$), sin más que tener en cuenta el razonamiento anterior y el hecho de que el tamaño de las ramas depende del punto del esqueleto. Reiterando el razonamiento resulta que

$$\alpha_{n_0+i} = \alpha_{n_0} = -\tilde{\alpha}_{n_0+i},$$

para cada $i \geq 0$ (se volverían a producir ciclos). En consecuencia los árboles T_α y $T_{\tilde{\alpha}}$ tienen ambos un final pero en direcciones distintas, lo que no puede ocurrir. Por lo tanto $x_{n_0+1}^\alpha = \tilde{x}_{n_0+1}$, con lo que $\alpha_{n_0} = \tilde{\alpha}_{n_0}$. Razonando de la misma manera obtenemos la igualdad de los códigos a partir del término n_0 -ésimo. \square

4.1.4. Motivos

La noción de motivo, que tomamos prestada de la teoría de mosaicos, va a ser una herramienta útil para describir la σ -álgebra de los borelianos de cualquier subespacio X del espacio de Gromov–Hausdorff.

Definición 4.15. Llamaremos *motivo* a cualquier grafo finito $P \in \mathcal{G}$. Diremos que un grafo $H \in \mathcal{G}$ contiene el motivo P alrededor de un vértice $v \in H$ si $v^{-1}P \subset H$. Dado un subconjunto $X \subset \mathcal{G}$ definimos

$$X_{P,v} = \{H \in X \mid v^{-1}P \subset H\}. \quad (4.3)$$

El siguiente lema describe propiedades elementales de fácil demostración:

Lema 4.16. *Dados dos motivos P y P' , se verifica que:*

1. si $P \subset P'$, entonces $X_{P,v} \supseteq X_{P',v}$;
2. $X_{P,v} \cap X_{P',v} = X_{P \cup P',v}$ y;
3. si $T \in X_{P,v}$ entonces $v^{-1}T \in X_{P,1_G}$.

La última de las condiciones anteriores nos permitirá reducirnos en lo sucesivo al estudio de los conjuntos $X_{P,1_G}$.

Lema 4.17. *Para cualquier motivo P , el conjunto $X_{P,1_G}$ es un abierto cerrado de X .*

Demostración. Veamos primero que $X_{P,1_G}$ es un abierto de X . En efecto, si $H \in X_{P,1_G}$ y si $r > \max\{\text{long}_S(x) \mid x \in P\}$, entonces $P \subset B_H(1_G, r)$ y por tanto $B_X(H, e^{-r}) \subset X_{P,1_G}$. Para comprobar que $X_{P,1_G}$ es un cerrado de X , consideremos una sucesión de árboles $X_n \in X_{P,1_G}$ convergentes a un árbol H . Por definición, dado $r > 0$ como antes, existe $n \geq 0$ tal que $B_{H_n}(1_G, r) = B_H(1_G, r)$. Luego $P \subset H$, es decir, $H \in X_{P,1_G}$. \square

Conviene señalar que los motivos no bastan para definir una base de la topología de X . Consideremos el árbol $\Phi(00\dots)$ perteneciente al minimal de Ghys–Kenyon X y la bola cerrada $B = \bar{B}_X(\Phi(00\dots), e^{-1})$ formada por los árboles $T \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ tales que $\bar{B}_T(0, 1) = \bar{B}_{\Phi(00\dots)}(0, 1) = {}^0\bullet\rightarrow$. No hay ningún motivo P tal que $X_{P,0} \subset B$. En tal caso, P tendría que coincidir con ${}^0\bullet\rightarrow$, pero $T_\infty \in X_{P,0} - B$. Hay una diferencia clara entre el conjunto de elementos de X que contienen una bola como motivo y la bola correspondiente en X , ya que la bola no sólo describe el conjunto de aristas y vértices del motivo, sino también las aristas ausentes del motivo. En el ejemplo, no basta con que los árboles contengan el motivo ${}^0\bullet\rightarrow$ alrededor de 0 , sino que además hay que exigir que no contenga las aristas $\downarrow_{0'}$, $\bullet\rightarrow^0$ y \uparrow_0^0 . En otros términos, no podemos describir la bola mediante intersecciones de abiertos-cerrados asociados a motivos, sino que tenemos que recurrir a complementarios:

$$\bar{B}_X(\Phi(00\dots), e^{-1}) = X_{{}^0\bullet\rightarrow} - (X_{\downarrow_{0'}} \cup X_{\bullet\rightarrow^0} \cup X_{\uparrow_0^0}).$$

Aún así, cualquier bola puede escribirse como combinación finita de conjuntos $X_{P,0}$ mediante uniones y diferencias. Como consecuencia tenemos el siguiente resultado:

Lema 4.18. *Los abiertos-cerrados $X_{P,1_G}$ generan la σ -álgebra de los borelianos de X .*

4.1.5. Propiedades de la aplicación de codificación

Vamos a probar que Φ es un isomorfismo boreliano entre S_4 e $Y^{\leq 2} = X^{\leq 2} - \mathcal{R}[T_\infty]$. Como Φ respeta las relaciones de equivalencia correspondientes, deduciremos que la dinámica boreliana de la laminación de Ghys–Kenyon está representada por una máquina de sumar binaria.

Notemos en primer lugar que Φ no es continua, ya que el dominio de Φ es compacto, y en cambio su rango $Y^{\leq 2}$ no lo es. Otra forma de verlo es, por ejemplo, tomando la sucesión

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 3200000 \cdots \\ \alpha_2 &= 3220000 \cdots \\ \alpha_3 &= 3222000 \cdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

que converge a $\alpha = 3222 \cdots$, pero la sucesión de árboles $\Phi(\alpha_n)$ no converge a $\Phi(\alpha)$, sino al árbol $T_\infty + (2, -1)$. No obstante, la aplicación Φ tiene las siguientes propiedades:

Proposición 4.19. *La aplicación $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow Y^{\leq 2}$ es abierta.*

Demostración. Basta comprobar que la imagen de un abierto básico $C_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n}$ es abierto. De hecho comprobaremos que

$$\Phi(C_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n}) = Y^{\leq 2} \cap X_{\Phi(\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n), 0} = Y_{\Phi(\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n), 0}^{\leq 2}.$$

En efecto, tomamos una sucesión $\tilde{\alpha} \in C_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n}$, es decir, $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i$ para $0 \leq i \leq n$. De esta igualdad se desprende que los árboles finitos correspondientes son iguales:

$$\Phi(\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n) = \Phi(\tilde{\alpha}_0 \tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_n) \subset \Phi(\tilde{\alpha}).$$

Entonces $\Phi(\tilde{\alpha}) \in X_{\Phi(\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n), 0}$. □

Proposición 4.20. *La aplicación Φ es medible.*

Demostración. Como la σ -álgebra de los borelianos de X está generada por los abiertos cerrados $X_{P,0}$ según el lema 4.18, nos basta probar que $\Phi^{-1}(X_{P,0})$ es un boreliano de \mathcal{S}_4 para cualquier motivo P .

Denotemos por \mathcal{P} el conjunto de las sucesiones finitas $\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n$ de elementos de $\mathbb{Z}/4$ tales que $P \subset \Phi(\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n)$. Veamos que

$$\Phi^{-1}(X_{P,0}) = \bigcup_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n \in \mathcal{P}} C_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n}.$$

En efecto, $\alpha \in \Phi^{-1}(X_{P,0})$ si y sólo si $P \subset \Phi(\alpha)$. Pero si $P \subset \Phi(\alpha)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P \subset \Phi(\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n)$. Luego $\alpha \in C_{\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n}$ con $\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n \in \mathcal{P}$. □

Las dos últimas proposiciones nos aseguran que $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow Y^{\leq 2}$ es un isomorfismo boreliano. De hecho, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.21. *La aplicación Φ define una equivalencia orbital estable en sentido boreliano entre \mathcal{R}_{cof} definida sobre \mathcal{S}_4 y \mathcal{R} definida sobre el conjunto de Ghys–Kenyon X .*

Corolario 4.22. *La dinámica boreliana de la relación de equivalencia \mathcal{R} definida sobre el conjunto de Ghys–Kenyon está representada por la de una máquina de sumar binaria.*

4.1.6. Propiedades ergódicas del minimal de Ghys–Kenyon

Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia medible y discreta sobre un espacio boreliano y μ un medida casi-invariante. Análogamente a la clasificación de factores de F. J. Murray y J. von Neumann, existen tres tipos de relaciones de equivalencia (véase [FM]), a saber:

1. Tipo I_n (con $n = 1, 2, \dots, \infty$): Si la relación es transitiva sobre un espacio de cardinal n ;
2. Tipo II_n (con $n = 1$ o ∞): Si la relación no es transitiva y existe una medida (finita o infinita resp.) invariante equivalente a μ y;
3. Tipo III: Si no existen medidas invariantes equivalentes a μ .

Usando la codificación, comprobaremos que la relación \mathcal{R} sobre el espacio de Ghys–Kenyon posee una medida de probabilidad invariante. Para ello, seguiremos el procedimiento descrito por S.E. Goodman y J. F. Plante en [GP] de manera similar a la empleada por C. Series en [Ser].

Teorema 4.23. *La relación de equivalencia \mathcal{R} definida sobre conjunto de Ghys–Kenyon X es de tipo II_1 .*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por B_n la bola de centro T_∞ y radio n contenida dentro de la clase de equivalencia $\mathcal{R}[T_\infty]$, que podemos identificar naturalmente con la bola $B_{T_\infty}(\mathbf{0}, n)$, y por μ_n la medida de contar normalizada sobre B_n . Gracias al lema 4.18 para definir μ_n basta conocer $\mu_n(X_{P,0})$, para cada motivo P :

$$\mu_n(X_{P,0}) = \frac{\#(B_n \cap X_{P,0})}{\#B_n} = \frac{\#\{v \in B_n \mid P + v \subset T_\infty\}}{\#B_n} = \frac{A(P, n)}{V(n)}.$$

Según el teorema de representación de Riesz, es posible identificar el espacio de funcionales lineales positivos sobre $C(X)$ con $\mathfrak{M}^+(X)$ el espacio de medidas positivas, regulares y finitas sobre X . Por lo tanto, el conjunto de las medidas de probabilidad (que corresponde que la esfera unidad en $\mathfrak{M}^+(X)$) es compacto con la topología *-débil. Luego existe una subsucesión de μ_n que converge a una medida de probabilidad μ . El hecho de que $X_{P,0}$ sea abierto cerrado nos garantiza que $\mu(X_{P,0}) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(X_{P,0})$ y $\mu(X_{P,0}) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(X_{P,0})$, de manera que $\mu(X_{P,0})$ coincide con al *tasa de aparición* de P en T_∞ :

$$\mu(X_{P,0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(X_{P,0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(P, n)}{V(n)}.$$

Veamos por último que μ es \mathcal{R} -invariante: Para cada motivo P y cada vértice $v \in P$ consideremos la traslación $\tau_v : T \in X_{P,0} \mapsto T - v \in X$ cuya imagen es

$$\text{im } \tau_v = X_{P,0} - v = \{T - v \mid P \subset T\} = \{T - v \mid P - v \subset T - v\} = X_{P-v,0}.$$

Ahora bien, si T_∞ contiene al motivo P alrededor del punto $p \in B_{T_\infty}(\mathbf{0}, n-r)$, entonces contiene a $P-v$ alrededor del punto $p+v \in B_{T_\infty}(\mathbf{0}, n)$, siendo $r \geq \text{long}_S(v)$. Luego

$$|\mu_n(X_{P,0-v}) - \mu_n(X_{P,0})| = \frac{|A(P-v, n) - A(P, n)|}{V(n)} \leq \frac{V(n) - V(n-r)}{V(n)}.$$

Puesto que $V(n)$ tiene crecimiento, a lo sumo, cuadrático deducimos que

$$0 \leq |\mu(X_{P-v,0}) - \mu(X_{P,0})| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n(X_{P-v,0}) - \mu_n(X_{P,0})| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(n) - V(n-r)}{V(n)} = 0,$$

con lo que queda probado el teorema. \square

Por otro lado, sobre el espacio \mathcal{S}_4 es posible definir la medida de probabilidad μ_4 que hace los símbolos equiprobables, es decir, que cilindros de la misma longitud tengan la misma medida:

$$\mu_4(C_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_n}) = \frac{1}{4^n}.$$

A cada par de sucesiones α y $\tilde{\alpha} \in \mathcal{S}_4$ cofinales y cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_m = \tilde{\alpha}_m$ para cada $m \geq n$, les podemos asociar la transformación $\tau : \mathcal{S}_4 \rightarrow \mathcal{S}_4$ dada por

$$\tau(\beta)_i = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i & \text{si } i < n, \\ \beta_i & \text{si } i \geq n. \end{cases} \quad (4.4)$$

que verifica que $\tau(\alpha) = \tilde{\alpha}$, más aún,

$$\tau(C_{\alpha_0 \dots \alpha_n}) = C_{\tilde{\alpha}_0 \dots \tilde{\alpha}_n}. \quad (4.5)$$

Como en el caso de la relación \mathcal{R} del espacio de Gromov–Hausdorff (sección 3.3), estos homeomorfismos generan un pseudogrupo de transformaciones parciales de \mathcal{R}_{cof} . Dado que se cumple (4.5), es obvio que μ_4 es \mathcal{R}_{cof} -invariante. Más aún, μ_4 es la única medida de probabilidad \mathcal{R}_{cof} -invariante, es decir:

Proposición 4.24. *La relación \mathcal{R}_{cof} es únicamente ergódica.*

Demostración. Sea μ es una medida de probabilidad \mathcal{R}_{cof} -invariante. Dados dos cilindros $C_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ y $C_{\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n}$, existe una transformación T definida como en (4.4). Por lo tanto la μ -medida de ambos cilindros es la misma. Por otro lado, tenemos la descomposición de \mathcal{S}_4 como unión disjunta

$$\mathcal{S}_4 = \bigsqcup_{\alpha_1 \dots \alpha_n \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^n} C_{\alpha_1 \dots \alpha_n}.$$

Entonces $\mu(C_{\alpha_1 \dots \alpha_n}) = \frac{1}{4^n}$ para cualquier cilindro. Lo que implica que $\mu = \mu_4$. \square

Usaremos este hecho para probar que \mathcal{R} también es únicamente ergódica. Para ello, probaremos en primer lugar que tenemos una versión medible del teorema 4.21:

Teorema 4.25. *La aplicación de codificación Φ define una equivalencia orbital estable en sentido medible entre la relación cofinal sobre S_4 y la relación de equivalencia \mathcal{R} sobre X .*

Demostración. Observemos que $\mathcal{R}[T_\infty]$ es de medida nula para cualquier medida \mathcal{R} -invariante, ya que todos los puntos de $\mathcal{R}[T_\infty]$ deberían tener la misma medida y $\#\mathcal{R}[T_\infty] = \infty$. Así pues, el saturado $Y = X - \mathcal{R}[T_\infty]$ de $Y^{\leq 2}$ es de medida total. Atendiendo al teorema 4.21 sólo resta comprobar que $\Phi_*\mu_4$ es la medida normalizada de $\mu|_{Y^{\leq 2}}$. Ahora bien, \mathcal{R}_{cof} es únicamente ergódica, por lo que $\mathcal{R}|_{Y^{\leq 2}}$ lo es también y en consecuencia $\Phi_*\mu_4 = \mu|_{Y^{\leq 2}}$, donde esta última medida es la normalización de $\mu|_{Y^{\leq 2}}$. Esta normalización es posible ya que $Y^{\leq 2}$ es de medida positiva. En efecto, se tiene la escritura $Y = \bigcup_{s \in S} \tau_s(Y^{\leq 2} \cap \text{dom } \tau_s)$ con S es finito. \square

Las propiedades de \mathcal{R} se trasladan al espacio foliado por grafos de Ghys–Kenyon $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ o a la laminación por superficies de Riemann de Ghys–Kenyon (M, \mathcal{L}) .

Corolario 4.26. *La dinámica transversa medible de la laminación de Ghys–Kenyon está representada por una máquina de sumar binaria.*

Corolario 4.27. *La laminación de Ghys–Kenyon es únicamente ergódica.*

Para probar este último resultado observemos que $X^{\leq 2}$ es una transversal completa de la laminación de Ghys–Kenyon. Como $\mathcal{R}|_{Y^{\leq 2}}$ es únicamente ergódica y $\mathcal{R}[T_\infty]$ ha de ser de medida nula para cualquier medida invariante, tenemos que $\mathcal{R}|_{X^{\leq 2}}$ es únicamente ergódica, y en consecuencia la laminación de Ghys–Kenyon también lo es. También es posible probar que \mathcal{R} es únicamente ergódica, sin más que observar que existe una única medida de probabilidad \mathcal{R} -invariante sobre X que es una extensión de una medida $\mathcal{R}|_{X^{\leq 2}}$ -invariante sobre $X^{\leq 2}$ y apelar a la unicidad ergódica de $\mathcal{R}|_{X^{\leq 2}}$.

4.1.7. Hojas genéricas

Sea (M, \mathcal{L}) una laminación orientable por superficies de Riemann de un espacio compacto, dotado de una medida transversa invariante μ . Según un resultado de É. Ghys, las hojas genéricas respecto de μ de la laminación tienen el mismo tipo topológico (véase [Ghy1]). Así pues, si \mathcal{L} no posee hojas compactas, existe un conjunto saturado de medida total por hojas difeomorfas a una de las siguientes superficies: al plano, al cilindro, al árbol de Cantor (es decir, una esfera a la que se le han eliminado un Cantor de puntos) o una de las tres superficies obtenidas al pegar una infinidad de asas aproximando todos los finales.

Por su parte, J. Cantwell y L. Conlon prueban un resultado análogo para laminaciones minimales en las que sustituyen la genericidad respecto de una medida por genericidad topológica (véase [CtC]). En nuestra situación, este resultado afirma que hay un conjunto residual de hojas difeomorfas a una de las seis superficies antes descritas. En [Bla2] puede verse el caso en el que se sustituye la minimalidad por la existencia de una hoja recurrente.

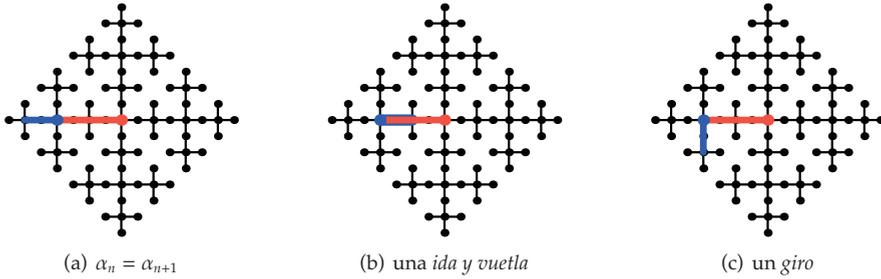


Figura 4.7.

Los posibles efectos de dos símbolos consecutivos en el esqueleto.

Vamos a determinar el tipo topológico de las hojas de la laminación de Ghys–Kenyon. En principio el número de finales está completamente determinado por el número de finales de los grafos $\overline{\mathcal{R}}[T]$. Ahora bien, estos grafos son árboles, por lo que las hojas son de género nulo y su tipo topológico también estará determinado por el número de finales.

Proposición 4.28. *La laminación de Ghys–Kenyon verifica que:*

1. hay un conjunto residual y de medida total formado por hojas de un final;
2. hay una infinidad no numerable de hojas con dos finales, que forman un conjunto magro y de medida nula y;
3. hay una única hoja con cuatro finales.

Demostración. Según la proposición 4.10 sabemos que X se descompone en la unión disjunta de la clase $\mathcal{R}[T_\infty]$ y de las clases codificadas por Φ . Así, para probar este resultado analizaremos como se transforman los códigos en los árboles. Para ello introduciremos la siguiente terminología: dos símbolos distintos consecutivos α_n y α_{n+1} de un código $\alpha \in \mathcal{S}_4$ se denominan *ida y vuelta* si son de la misma paridad, en caso contrario, los llamaremos un *giro*. Esta denominación está justificada por el comportamiento del esqueleto del árbol $\Phi(\alpha)$, con idas y vueltas o giros de 90° según el caso, como se ve en la figura 4.7.

Comencemos probando que un árbol codificado posee a lo sumo dos finales. Si tuviese más de dos finales, entonces el esqueleto sería recurrente, es decir, existiría una subsucesión estacionaria del esqueleto. Pero esto es imposible por su definición (4.1), que implica que $d(x_n, x_{n+m}) \geq 2^{m-1}$. Por lo tanto la laminación de Ghys–Kenyon tiene una única hoja de 4 finales. Además, existen hojas de un solo final, como por ejemplo $\Phi(00 \cdots)$. Aplicando la proposición 2.7 de [Bla2] las hojas con un final forman un conjunto residual, y las de dos finales un conjunto magro.

Ahora, como dos elementos de esqueleto no pueden coincidir, para que en el esqueleto (y por consiguiente en el árbol) se formen dos finales el esqueleto ha de

crecer alternativamente en dos direcciones, i.e.: un árbol tiene dos finales si y sólo si su código tiene un número finito de giros y una cantidad infinita de idas y vueltas. Observemos que este conjunto de códigos es la saturación por \mathcal{R}_{cof} del conjunto A formado por las sucesiones con todos los símbolos de la misma paridad y una cantidad infinita de idas y vueltas. Ahora bien:

$$A \subset \bigcup_{\alpha_0 \in \mathbb{Z}/4} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha_0 \dots \alpha_n \in \mathcal{S}_{\alpha_0}^n} C_{\alpha_0 \dots \alpha_n},$$

donde $\mathcal{S}_{\alpha_0}^n$ es el conjunto de las sucesiones de $n + 1$ elementos de $\mathbb{Z}/4$ con la misma paridad que el primer elemento α_0 . De lo anterior, deducimos que:

$$0 \leq \mu(A) \leq 4\mu_4 \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha_0 \dots \alpha_n \in \mathcal{S}_{\alpha_0}^n} C_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

Así pues, la saturación de A y el conjunto de hojas con 2 finales tienen medida nula. \square

4.2. Árboles con un número arbitrario de finales

El objetivo ahora es construir árboles pertenecientes a $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ con un número de finales cualquiera. Así probaremos el siguiente resultado:

Teorema 4.29. *Para cada entero $n \geq 1$ existe un árbol repetitivo y aperiódico en $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ con n finales.*

Observemos que el ejemplo de Ghys–Kenyon nos proporciona árboles repetitivos y aperiódicos con uno, dos y cuatro finales. Para construir el resto distinguiremos tres casos:

En §4.2.1: En primer lugar se construye un árbol repetitivo y aperiódico con tres finales.

En §4.2.2: Después, definimos una familia de árboles con cualquier número par mayor que 4 de finales.

En §4.2.3: Por último, modificamos la familia anterior eliminando uno de sus finales. Obteniéndose así otra familia de árboles repetitivos y aperiódicos con cualquier número impar, mayor que tres, de finales.

4.2.1. Un árbol aperiódico y repetitivo con 3 finales

Para la construcción de este árbol procederemos por inducción como en el caso de Ghys–Kenyon. Partiremos de T_1 un árbol finito en forma de ‘T’ invertida que

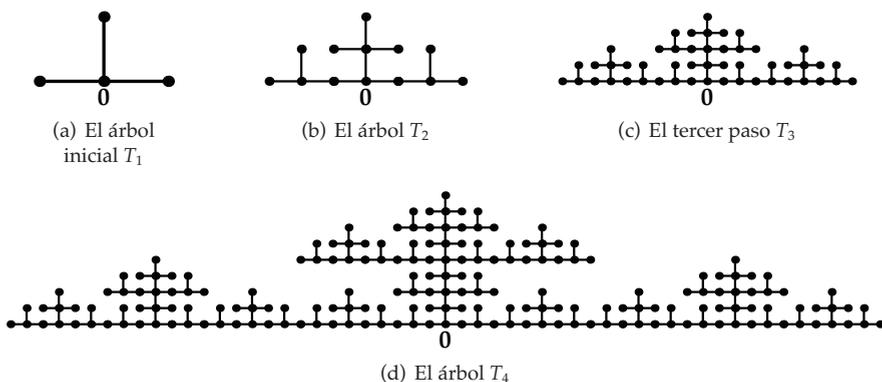


Figura 4.8.

Los primeros pasos de la construcción de T_∞ .

interseca al eje horizontal en $[-1, 1] \times \{0\}$ y al vertical en $\{0\} \times [0, 1]$. Este árbol está representado en la figura 4.8(a). Definimos entonces el árbol T_2 como

$$T_2 = T_1 \cup (T_1 + (2, 0)) \cup (T_1 - (2, 0)) \cup (T_1 + (1, 0)).$$

El árbol T_2 , que se muestra en la figura 4.8(b), interseca al eje horizontal en el intervalo $[-3, 3] \times \{0\}$ y al vertical en $\{0\} \times [0, 2]$. En general, tenemos de forma recursiva el árbol T_n dado por

$$T_n = T_{n-1} \cup (T_{n-1} + (3^{n-1}2, 0)) \cup (T_{n-1} - (3^{n-1}2, 0)) \cup (T_{n-1} + (2^{n-1}, 0)).$$

Este árbol interseca al eje horizontal en $[-3^{n-1}, 3^{n-1}] \times \{0\}$ y al vertical en $\{0\} \times [0, 2^{n-1}]$.

Recursivamente obtenemos una familia de árboles finitos encajados. Razonando de la misma manera que en la proposición 4.2 probamos que:

Proposición 4.30. *El árbol $T_\infty = \bigcup_n T_n$ de $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ es aperiódico, repetitivo y tiene tres finales.*

4.2.2. Árboles con un número arbitrario par de finales

Se construirán ahora árboles aperiódicos y repetitivos con un número par mayor que 4 de finales. Fijado k un entero positivo, se construirán dos árboles, uno con $4k+2$ finales y otro con $4k+4$ finales, que pertenecen al mismo minimal de $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$. La idea de esta construcción es la misma que la del ejemplo anterior, añadir “piezas” en dirección a los finales deseados.

Realizaremos la construcción inductivamente definiendo una familia árboles

§4.2 Árboles con un número arbitrario de finales

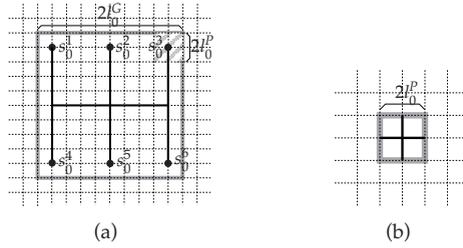


Figura 4.9.
(a) G_0 para $k = 1$. El orden de la familia $\{s_i^0\}$ es irrelevante. (b) P_0 .

finitos encajados

$$G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_n \subseteq \dots$$

$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots \subseteq P_n \subseteq \dots$$

de forma que las piezas P_n se empleen para unir copias disjuntas G_n formando un árbol finito G_{n+1} . Los árboles $G_\infty = \bigcup_{n \geq 0} G_n$ y $P_\infty = \bigcup_{n \geq 0} P_n$ tendrán $4k + 2$ y $4k + 4$ finales respectivamente. Para simplificar la notación, escribimos $K = 4k + 2$.

Se comienza con el árbol finito G_0 con K puntos de valencia 1, contenido en el cuadrado de lado $2l_0^G = 2K - 2$ y donde dos puntos de valencia 1 consecutivos están separados por la distancia $4l_0^P = 4$, explícitamente se tiene que:

$$G_0 = \left([1 - l_0^G, l_0^G - 1] \times \{0\} \right) \cup \bigcup_{i=-k}^k \{4l_0^P i\} \times [1 - l_0^G, l_0^G - 1].$$

Los puntos de valencia 1 de G_0 , que se denotarán $\{s_i^0\}_{i=1}^K$, serán las *salidas* de G_0 . Véase la figura 4.9(a). Además, se define el árbol finito contenido en el cuadrado de lado $2l_0^P$:

$$P_0 = \{0\} \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times \{0\}.$$

Véase la figura 4.9(b).

Para construir el árbol G_1 , disponemos K copias de G_0 trasladadas por los vectores $\{(K - 1)s_i^0\}$. Tendremos así una copia de G_0 por cada s_i^0 , colocada en la *misma posición relativa* como se muestra en la figura 4.10(a).

Por otro lado tenemos definidos los vértices

$$s_i^1 = (K - 1)s_i^0 + (K - 2)y(s_i^0), \quad \text{con } 1 \leq i \leq K,$$

siendo $y(x, y) = \left(0, \frac{y}{|y|}\right)$. Estos vértices, de valencia 1, serán las *salidas* de G_1 , es decir, los vértices que se unirán en el siguiente paso a otras copias de G_1 . Para cada copia de G_0 se tiene además un vértice $e_i^1 = s_i^1 - (0, 2l_0^G + 1)$ ($1 \leq i \leq K$), una *entrada*, por donde se unirá cada copia trasladada de G_0 con la copia central de G_0 .

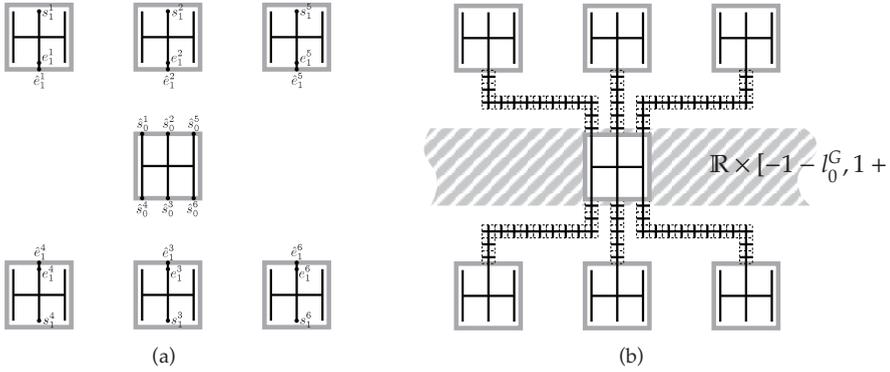


Figura 4.10.

Construcción de G_1 ($k = 1$): (a) paso intermedio de la construcción de G_1 , (b) el árbol G_1 .

Por último, se une este bosque para obtener un árbol. Para ello se conectan las copias de G_0 mediante ramas formadas por piezas P_0 . En primer lugar se añaden aristas verticales partiendo de los vértices $\{e_i^1, s_i^0\}_{i=1}^K$ en las direcciones obvias, lo que genera otro conjunto de vértices, los vértices terminales de las aristas añadidas, que denotaremos por $\{\hat{e}_i^1, \hat{s}_i^0\}_{i=1}^K$, con las notaciones obvias. Se unen ahora el vértice \hat{s}_i^0 con \hat{e}_i^1 mediante un camino de copias de P_0 evitando la formación de ciclos y de forma que no corten a la banda $\mathbb{R} \times [-1 - l_0^G, l_0^G + 1]$. Obteniendo así G_1 (véase la figura 4.10(b)). Para construir P_1 se toma G_0 y se le añaden 4 aristas (véase la figura 4.11(a)).

$$\begin{aligned}
 P_1 &= G_0 \cup \left(\left([-l_0^G, 1 - l_0^G] \cup [l_0^G - 1, l_0^G] \right) \times \{0\} \right) \\
 &\quad \cup \left(\{0\} \times \left([-l_0^G, 1 - l_0^G] \cup [l_0^G - 1, l_0^G] \right) \right) \\
 &= \left([-l_0^G, l_0^G] \times \{0\} \right) \cup \left(\{0\} \times [-l_0^G, l_0^G] \right) \cup \bigcup_{i=-k}^k \{4l_0^G i\} \times [1 - l_0^G, l_0^G - 1].
 \end{aligned}$$

Definidos P_1 y G_1 , se obtiene G_2 continuando de la misma forma que para el primer caso. Por otro lado, para construir P_n a partir de P_{n-1} , se procede de forma similar a la construcción de G_n a partir de G_{n-1} . Se disponen copias de G_{n-1} alrededor de la copia existente de P_{n-1} como en el caso de G_n , salvo que dos de ellas, las que se encuentran exactamente sobre P_{n-1} , se sustituyen por copias de P_{n-1} . Además, se añaden dos copias más de P_{n-1} a los lados de P_{n-1} , trasladadas por los vectores $\left\{ \pm(K-1)^n \left(1 - \frac{l_0^G}{2}, 0 \right) \right\}$. Se alargan las piezas como en el caso de G_n y se unen por los mismos caminos que G_n . Además, las piezas P_{n-1} laterales se unen a la pieza central por caminos rectos.

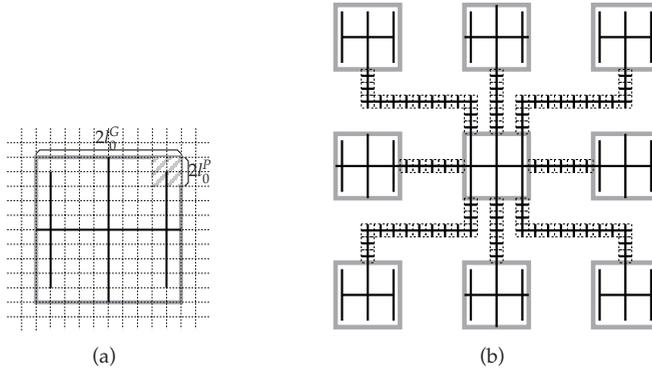


Figura 4.11.
 (a) El árbol P_1 y (b) el árbol P_2 , ambos para $k = 1$.

Obtenemos de esta manera dos sucesiones $\{G_n\}$ y $\{P_n\}$ de árboles finitos, que convergen a dos árboles infinitos G_∞ y P_∞ de $4k + 2$ y $4k + 4$ finales respectivamente. Es sencillo comprobar que ambos árboles son aperiódicos y repetitivos. Además ambos árboles pertenecen al mismo minimal $\overline{\mathcal{R}[P_\infty]}$, ya que existen copias de G_n en P_∞ para cada n y viceversa.

4.2.3. Árboles con un número arbitrario impar de finales

Completaremos la prueba del teorema 4.29 construyendo árboles aperiódicos y repetitivos con un número de finales impar y mayor que tres. La idea es sencillamente eliminar una de las ramas de los árboles G_n y P_n que hemos construido antes. Fijamos k un entero positivo, construiremos dos árboles, uno de ellos con $K = 4k + 1$ finales y el otro con $4k + 3$ finales, que pertenecerán al mismo minimal de $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$.

Como es costumbre, definiremos los árboles por inducción. Tomamos la pieza elemental $P'_0 = P_0$, la cruz que se puede ver en la figura 4.12(b). Por otro lado, consideramos los árboles G_0 y P_1 definidos en §4.2.2, y eliminamos de ellos la rama inferior que se encuentra más a la izquierda. Específicamente, si $l_0^G = 4k + 1$ y $l_0^P = 1$,

$$G'_0 = G_0 - (\{4l_0^P k\} \times (0, 1 - l_0^G]).$$

De forma similar definimos P_1 :

$$P'_1 = P_1 - (\{4l_0^P k\} \times (0, 1 - l_0^G])$$

(véanse las figuras 4.12(a) y (c)).

Ahora, actuaremos de la misma forma que en la construcción de G'_1 y P'_2 , denotemos por $\{s_i^0\}_{i=1}^K$ las salidas de G'_0 , es decir, el conjunto de los vértices de valencia 1 de G'_0 . Disponemos K copias de G'_0 alrededor del propio G'_0 trasladadas por los

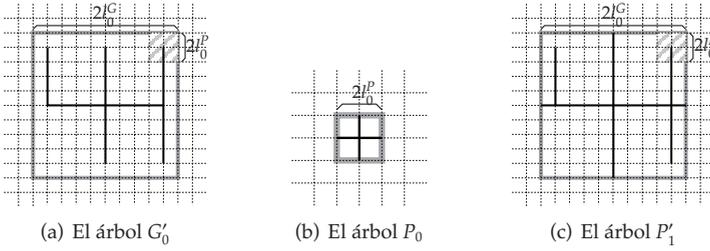


Figura 4.12.

Los árboles finitos elementales para $k = 1$.

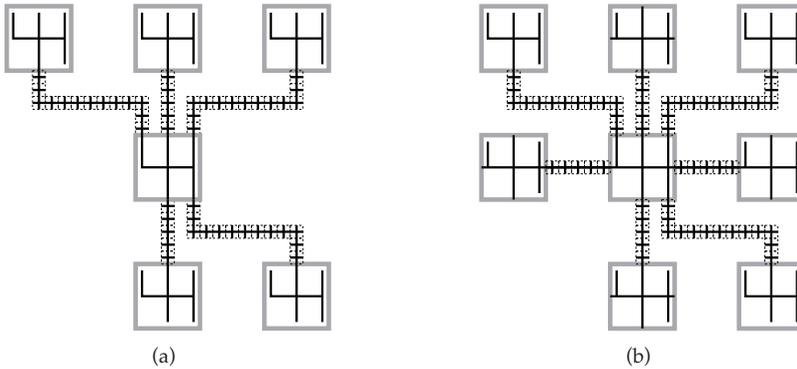


Figura 4.13.

Los árboles G'_1 (a) y P'_2 (b) son como G_1 y P_2 pero con una rama menos ($k = 1$).

K vectores $\{(4k + 1)s_i^0\}_{i=1}^K$, que unimos a la pieza original G'_0 de la misma manera que para G_1 , pero en este caso desechando uno de los caminos. Observemos que la ausencia de una de las ramas no repercute en la construcción, ya que no se une ninguna pieza por el vértice eliminado de G_0 (véase la figura 4.13). Para construir P'_1 basta con repetir la construcción de P_1 , pero con una rama menos. Como en el caso de G'_1 , la ausencia de dicha rama es irrelevante. Por recurrencia obtenemos dos familias de árboles encajados $\{G'_n\}$ y $\{P'_n\}$, cuyas respectivas uniones $G'_\infty = \bigcup_n G'_n$ y $P'_\infty = \bigcup_n P'_n$. Por construcción G'_∞ tiene $4k + 1$ finales y P'_∞ tiene $4k + 3$. Como en el caso anterior, estos árboles son aperiódicos y repetitivos. Además, pertenecen al mismo minimal, es decir, $X' = \overline{\mathcal{R}[G'_\infty]} = \overline{\mathcal{R}[P'_\infty]}$.

4.3. Un ejemplo no únicamente ergódico

El objetivo ahora es construir un ejemplo de árbol repetitivo y aperiódico cuya envoltura tenga más de una medida transversa invariante. Para ello se recurrirá otra

vez a la construcción clásica de S.E. Goodman y J. F. Plante mediante sucesiones de Følner. Como ya se ha dicho, en el caso del ejemplo de Ghys–Kenyon, las medidas obtenidas mediante este proceso pueden interpretarse como tasas de aparición. Por lo tanto, para fabricar un espacio no únicamente ergódico debemos construir un árbol que presente dos sucesiones de motivos con distintas tasas de aparición.

Así, debemos definir una pareja de sucesiones de árboles finitos $P_n, G_n \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ de manera que intuitivamente tengamos:

«Las copias de G_n dentro de P_{n+1} sean pocas en comparación con el volumen de P_{n+1} ».

Con esta propiedad aseguraremos que existen, al menos, dos medidas invariantes distintas dadas por las tasas de aparición para cada una de las dos sucesiones.

El ejemplo que vamos a construir es similar a uno construido por E. Blanc [Bla1], aunque no usaremos el grafo de Cayley del grupo libre con tres generadores, sino el de \mathbb{Z}^2 .

4.3.1. Construcción

Sea G_1 el grafo en forma de cruz de lado 2 que se muestra en la siguiente figura.

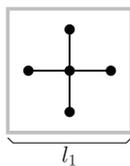


Figura 4.14.
El árbol inicial G_1 .

Por otro lado, sea $T_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ es la recta horizontal infinita que pasa por el origen. Se define $P_1 = \bar{B}_{T_1}(\mathbf{0}, \frac{l_1-1}{2}) = \bar{B}_{T_1}(\mathbf{0}, 1)$ la bola en T_1 centrada en el origen y de radio $(l_1 - 1)/2$ con $l_1 = 3$.

Con las piezas P_1 y G_1 se construirá G_2 : para ello, disponemos cuatro copias de G_1 alrededor del propio G_1 y añadimos cuatro aristas, obteniendo un árbol mayor en forma de cruz. A cada lado de cada brazo vertical se añade una copia de P_1 , obteniendo G_2 (véase la figura 4.15(a)).

Para definir T_2 , tomamos un entero par r_1 tal que

$$\frac{\#G_1}{r_1} \leq \frac{1}{l_1}$$

e insertamos copias de G_1 en T_1 a distancia r_1 entre ellos para obtener T_2 , como se muestra en la figura 4.15(b).

Definimos entonces $P_2 = \bar{B}_{T_2}(\mathbf{0}, (l_2 - 1)/2)$ con $l_2 = 3l_1 = 3^2$.

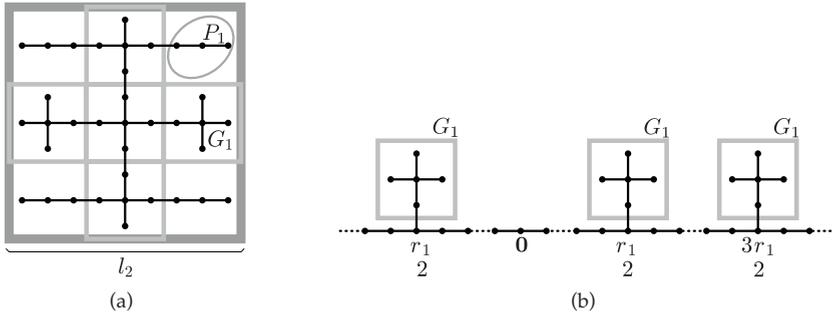


Figura 4.15.

Segundo paso: (a) el árbol G_2 y (b) el árbol P_2 .

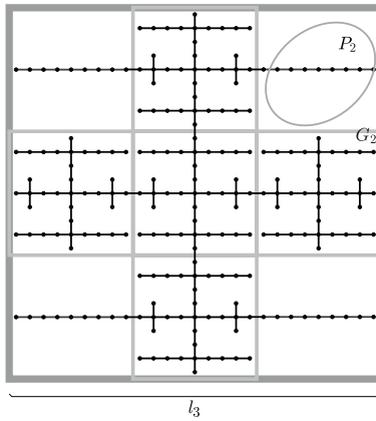


Figura 4.16.

El árbol G_3 .

Con P_2 y G_2 construimos G_3 . De nuevo, disponemos cinco copias de G_2 en forma de cruz y añadimos 4 copias de P_2 en los brazos verticales de la misma (véase la figura 4.16).

Por otro lado, escogemos un múltiplo r_2 de r_1 tal que cumpla

$$\frac{\#G_2}{r_2} \leq \frac{1}{l_2}.$$

Se define T_3 como antes. Ahora insertamos copias de G_2 en T_2 separadas en intervalos de longitud r_2 , de forma que éstas sustituyan algunas de las copias de G_1 como en la figura 4.17. Como en los casos anteriores se define $P_3 = \overline{B}_{T_3}(0, \frac{l_3-1}{2})$ para $l_3 = 3l_2 = 3^3$.

Razonando por inducción, obtenemos dos sucesiones de árboles finitos P_n y G_n ,

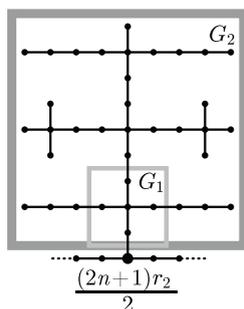


Figura 4.17.
Sustitución de copias de G_1 por copias de G_2 .

que convergen a $P_\infty = \bigcup_n P_n = \bigcup_n T_n$ y a $G_\infty = \bigcup_n G_n$ respectivamente. Es fácil ver que tanto P_∞ como G_∞ son aperiódicos. De forma similar al ejemplo anterior, es posible probar que tanto P_∞ como G_∞ son repetitivos. Es obvio que la clausura de la hoja por P_∞ contiene a la hoja por G_∞ y viceversa. Denotaremos por X a la clausura $\overline{\mathcal{R}[P_\infty]}$. Como siempre, los teoremas de realización geométrica 2.29 y engorde 2.31 proporcionan un espacio foliado por grafos y una laminación por superficies respectivamente con las mismas propiedades dinámicas y métricas a gran distancia que (X, \mathcal{R}) . Denotaremos a estos espacios $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ y (M, \mathcal{L}) respectivamente.

4.3.2. \mathcal{R} no es únicamente ergódica

Dado que G_∞ y P_∞ son aperiódicos se identifican naturalmente con las órbitas a través de ellos, $\overline{\mathcal{R}[G_\infty]}$ y $\overline{\mathcal{R}[P_\infty]}$. De la misma manera, los motivos G_n y P_n se identifican con sendos conjuntos compactos en esas órbitas. Así, las sucesiones $\{G_n\}$ y $\{P_n\}$ son dos sucesiones de Følner, ya que $\#\partial G_n = 4$ y las bolas P_n de P_∞ tienen de crecimiento polinomial. Así pues, estas dos sucesiones generan dos medidas de probabilidad invariantes, que denotaremos por μ_G y μ_P respectivamente, según el clásico teorema de S.E. Goodman y J.F. Plante.

Como ya hemos dicho al comienzo de esta sección el hecho de que el número de copias de G_n en P_n sea mucho menor que el volumen de este nos va a permitir probar que existe un conjunto boreliano sobre el que ambas medidas tienen un valor distinto. La condición sobre el número de copias de G_n y el volumen de P_n se impone mediante la cantidad r_n dada por la condición

$$\frac{\#G_n}{r_n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Con esta desigualdad en mente y teniendo en cuenta la construcción, es posible obtener cotas para las cantidades $\#G_n$ y $\#P_n$. La línea horizontal de longitud 3^{n-1} contiene $3^{n-1} + 1$ puntos, y por lo tanto $3^{n-1} + 1 \leq \#P_n$. Por otro lado sobre dicha

línea en P_∞ existe, a lo sumo, $\frac{3^{n-1}}{r_1}$ copias de G_1 , $\frac{3^{n-1}}{r_2}$ copias de G_2 , etcétera. Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} 3^{n-1} \leq \#P_n \leq 3^{n-1} + 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{r_i} \#G_i &= 3^{n-1} + 1 + 3^{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\#G_i}{r_i} \\ &\leq 3^{n-1} + 1 + 3^{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{3}{2} 3^{n-1} + 1 \leq 2 \cdot 3^{n-1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Deducimos de estas cotas que el crecimiento de P_∞ es lineal.

Veamos que ocurre con $\#G_n$. Por construcción G_n está formado por 5 copias de G_{n-1} y 4 de P_n . Con lo que $\#G_n = 5\#G_{n-1} + 4\#P_n$. Sustituyendo en esta igualdad el valor de $\#G_{n-1}$ y continuando de esta manera obtenemos que

$$\begin{aligned} \#G_n &= 5\#G_{n-1} + 4\#P_n = 5^2\#G_{n-2} + 5 \cdot 4\#P_{n-1} + 4\#P_n = \dots \\ &= 5^{n-1}\#G_1 + 4 \sum_{i=0}^{n-2} 5^i \#P_{n-i}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si eliminamos de la igualdad (4.7) las referencias a las copias de P_n , obtenemos

$$\#G_n \geq 5\#G_{n-1} \geq 5^2\#G_{n-2} \geq \dots \geq 5^{n-1}\#G_1 = 5^n. \quad (4.8)$$

Si en (4.7) utilizamos la cota superior para $\#P_n$ que aparece en (4.6) resulta que

$$\begin{aligned} \#G_n &= 5^n + 4 \sum_{i=0}^{n-2} 5^i \#P_{n-i} \leq 5^n + 8 \sum_{i=0}^{n-2} 5^i 3^{n-i-1} \\ &= 5^n \left(1 + 8 \sum_{i=0}^{n-2} \frac{3^{n-i-1}}{5^{n-i}} \right) \leq 5^n \left(1 + \frac{8}{5} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i}{5^i} \right) = 5^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

De donde se deduce que G_∞ tiene el mismo tipo de crecimiento que $f(x) = x^{\frac{\ln 5}{\ln 3}}$.

Teorema 4.31. *El espacio foliado $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ es minimal y no únicamente ergódico.*

Demostración. Veamos que las medidas invariantes μ_G y μ_P son distintas. Razonando como en la prueba del teorema 4.23, podemos probar que μ_G es el límite de las medidas de probabilidad μ_G^n , es decir, las medidas de contar normalizadas sobre G_n . De la misma forma, $\mu_P = \lim \mu_P^n$ donde μ_P^n es la medida de contar normalizada sobre P_n . Como ya hemos adelantado, construiremos un boreliano sobre el que las medidas difieran: en efecto, para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto

$$A_i = \left\{ T \in X \mid \begin{array}{l} G_i - p \subset T \text{ donde } p \text{ está en una de las} \\ \text{copias de } G_1 \text{ contenida en } G_i \end{array} \right\}. \quad (4.10)$$

Obviamente $A_i \supset A_{i+1}$ y $\nu(A_i) = 5^i \nu(X_{G_i})$ para cualquier medida invariante ν . Veamos que $A = \bigcap_i A_i$ tiene diferente medida para μ_G y μ_P .

§4.3 Un ejemplo no únicamente ergódico

En primer lugar, si suponemos que $n \geq i$ y teniendo en cuenta la cota (4.9) y (4.7)

$$\mu_G^n(X_{G_i}) = \frac{\#(X_{G_i} \cap G_n)}{\#G_n} \geq \frac{5^{n-i}}{5^{n+1}} = \frac{1}{5^{i+1}}.$$

Y por lo tanto $\mu_G(X_{G_i}) \geq \frac{1}{5^{i+1}}$, de donde obtenemos que $\mu(A_i) \geq \frac{1}{5}$. En consecuencia

$$\mu_G(A) \geq \frac{1}{5} > 0. \quad (4.11)$$

Por otro lado, usando la cota (4.6) y las cotas obtenidas para el número de copias de G_i en P_n

$$\mu_P^n(X_{G_i}) = \frac{\#(X_{G_i} \cap P_n)}{\#P_n} \leq \frac{3^{n-1}}{r_i} \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} \leq \frac{1}{2r_i}.$$

Así pues tenemos $\mu_P(G_i) \leq \frac{1}{2r_i}$, luego $\mu_P(A_i) = \frac{5^i}{2r_i}$. Ahora bien, 5^i es menor que $\#G_i$ y $\#G_i/r_i \leq \frac{1}{3^i}$ así que

$$0 \leq \mu_P(A) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{5^i}{2r_i} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot 3^i} = 0. \quad (4.12)$$

Esta desigualdad, junto con (4.11), indica que las medidas consideradas son distintas. \square

4.3.3. Construcción de dos medidas que distinguen hojas

Para terminar, construiremos a partir de μ_G y μ_P otras dos medidas de probabilidad invariantes de forma que las hojas genéricas con respecto a una y otra sean distintas. Una vez construidas éstas, se pueden considerar medidas ergódicas con las mismas propiedades, sin más que elegir alguna de sus componentes ergódicas.

Teorema 4.32. *Existen dos medidas de probabilidad invariantes ν_G y ν_P tales que*

1. ν_P -casi toda hoja tiene crecimiento lineal y dos finales;
2. ν_G -casi toda hoja tiene el mismo tipo de crecimiento que G_∞ y un final.

Supongamos que μ es una medida invariante construida mediante una sucesión de Følner $\{F_n\}$. Recordemos que la característica de Euler de un grafo F_n , denotada por $\chi(F_n)$, es el número de vértices menos el de aristas. Por otro lado, asociada a la medida existe un número real $\chi(\mu)$ denominado *característica de Euler media de μ* , que intuitivamente es la media (con respecto a μ) de las características de Euler de las hojas. Los detalles pueden verse en la sección 5 de capítulo 1 de [Con]. Según una versión combinatoria del teorema del índice (véase [Con] y [Ele]), deducimos los siguientes resultados:

Teorema 4.33. *Si la sucesión $\chi(F_n)/\#F_n$ es convergente, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\chi(F_n)}{\#F_n} = \chi(\mu).$$

Teorema 4.34. Si el conjunto límite de F_n no contiene hojas compactas, entonces $\chi(\mu) = 0$ si y sólo si μ -casi todas las hojas son euclídeas.

Demostración del teorema 4.32. Sea μ_p la medida definida mediante la sucesión de Følner $\{P_n\}$. Como P_n es un árbol, su característica de Euler es $\chi(P_n) = 1$, luego

$$\frac{\chi(P_n)}{\#P_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Aplicando los teoremas 4.33 y 4.34, deducimos que μ_p -casi todas las hojas son euclídeas, luego tienen 1 ó 2 finales (véase §6.4 de [Ghy2]). Vamos a probar ahora que el conjunto de hojas con dos finales tiene ν_p medida positiva y para ello recurriremos a la *poda de Rips* ([Bla1, Gab1]): para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $E_n \subset X$ de la n -ésima poda como

$$E_n = \{T \in X \mid \exists c : \mathbb{R} \rightarrow T \text{ rayo tal que } c(n) = \mathbf{0} \in T\}.$$

Intuitivamente, estamos tomando de los árboles $\mathcal{R}[T]$, las ramas de tamaño inferior a n . Obviamente, la familia de estos conjuntos es creciente.

Por construcción, es obvio también que el conjunto X_1 de hojas con un final es un subconjunto de $\bigcup_n E_n$. Entonces

$$\mu_p^v(X - E_n) = \frac{\#(P_p \cap X - E_n)}{\#P_p} \geq \frac{3^p + 1}{\#P_p} \geq \frac{3^p + 1}{2 \cdot 3^p + 1} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2},$$

ya que la línea horizontal infinita de P_∞ no desaparece en la poda. Por consiguiente, teniendo en cuenta que $X - E_n \supset X - E_{n+1}$, deducimos que $\mu_p(X - \bigcup E_n) \geq \frac{1}{2}$.

Si llamamos X_2 al conjunto formado por las hojas con dos finales, la condición $\mu_p(X_1 \cup X_2) = 1$ nos garantiza que $\mu_p(X_2) \geq \frac{1}{2}$. Entonces definimos la medida ν_p por:

$$\nu_p(B) = \frac{\mu_p(B \cap X_2)}{\mu_p(X_2)},$$

para cada boreliano B de X . Por construcción, ν_p -casi toda tiene dos finales. Ahora bien, según un resultado de G. Levitt (véase [Lev]) podemos asegurar de hecho, tales hojas tienen crecimiento lineal de manera genérica.

Razonando como en el caso anterior podemos probar que μ_G -casi toda hoja posee también uno o dos finales. Por otro lado, el crecimiento de cualquier hoja que interseque al conjunto A definido por (4.10) tiene el mismo tipo crecimiento que G_∞ . En particular, el saturado de A está contenido en el conjunto X_{NL} de las hojas de crecimiento no lineal. Según (4.11) tenemos que $\mu_G(X_{NL}) \geq \mu_G(A) > 0$. Como antes, definimos la medida invariante ν_G por:

$$\nu_G(B) = \frac{\mu_G(B \cap X_{NL})}{\mu_G(X_{NL})},$$

para cada boreliano B de X . Según el resultado de G. Levitt mencionado antes las hojas ν_G -genéricas tienen dos finales y crecimiento no lineal. \square

Dinámica en el espacio de Gromov–Hausdorff

Una relación de equivalencia medible discreta es *finita* si todas sus clases son finitas. Estas relaciones poseen siempre un *dominio fundamental*, es decir, un boreliano que corta a todas las órbitas en un único punto. Por lo tanto, las relaciones finitas son siempre establemente orbitalmente equivalentes a la relación de igualdad sobre dicho boreliano.

Recordemos que una relación de equivalencia medible discreta \mathcal{R} sobre X es *hiperfinita* (respecto de una medida casi-invariante μ) si existe una sucesión creciente de relaciones finitas $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}$ tales que $\mathcal{R}[x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n[x]$ μ -casi todo $x \in X$.

H.A. Dye ha probado en [Dye] que la relación de equivalencia dada por una acción medible de \mathbb{Z} es hiperfinita con respecto a una medida invariante sin átomos. En [SS], T. Slaman y J. Steel demostraron que de hecho

\mathcal{R} es hiperfinita si y sólo si \mathcal{R} proviene de una acción de \mathbb{Z} .

Según un importante resultado de A. Connes, J. Feldmann y B. Weiss (cf. [CFW]), la hiperfinitud equivale también a que \mathcal{R} sea *promediable*, es decir, si existe un sistema $\{m_x\}_{x \in X}$ de medias m_x definidas sobre la clase $\mathcal{R}[x]$ tales que 1) $m_y = m_x$ para cada $y \in \mathcal{R}[x]$ y, 2) para cada función medible $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m(f)(x) = m_x(f(x, \cdot))$ también lo es.

En [Ser], C. Series prueba que la relación de equivalencia inducida por una foliación de hojas con crecimiento polinomial sobre una transversal completa es hiperfinita con respecto a una medida invariante. M. Samuelides en [Sam] prueba que de hecho la relación de equivalencia inducida es hiperfinita con respecto a una medida transversa casi-invariante. Estos resultados indican que la dinámica transversa medible de una foliación de crecimiento polinomial está representada por una acción medible de \mathbb{Z} .

Siguiendo un esquema similar, veremos que los minimales sin holonomía del espacio de Gromov-Hausdorff $\mathfrak{G}(\mathbb{Z}^2)$ se comportan, salvo un conjunto de medida nula, como sistemas dinámicos clásicos. Como en el caso de los mosaicos euclidianos [AGL], ésta es una etapa clave para demostrar que la dinámica transversa

de tales minimales está representada por una relación de equivalencia afable. Otro ingrediente clave es el teorema 4.18 de [GPS2] (véase también [GMPS1]). Tanto en el contexto medible, como en el contexto topológico, la idea de inflación descrita en [BBG] nos permitirá aclarar y simplificar los procesos seguidos por C. Series para describir la dinámica transversa medible de las foliaciones con crecimiento polinomial, y por T. Giordano, H. Matui, I.F. Putnam y C.F. Skau [GMPS2] para estudiar la dinámica topológica de las acciones de \mathbb{Z}^2 sobre el conjunto de Cantor.

5.1. Relaciones de equivalencia AF y diagramas de Bratteli

Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia r -discreta sobre un espacio localmente compacto, Hausdorff y separable X . Supondremos además que \mathcal{R} es también un espacio localmente compacto, Hausdorff y separable. En estas condiciones, la diagonal $\Delta \subset X \times X$ es un abierto cerrado de \mathcal{R} .

Definición 5.1 ([GPS2]). La relación de equivalencia \mathcal{R} se dice que es *compacta* si el conjunto $\mathcal{R} - \Delta$ es compacto. De hecho, si X es compacto, la compacidad de la relación \mathcal{R} equivale a la compacidad del espacio \mathcal{R} .

Lema 5.2 ([GPS2]). Una relación de equivalencia r -discreta y compacta \mathcal{R} sobre el espacio X verifica que:

1. la topología de \mathcal{R} coincide con la topología inducida por $X \times X$;
2. \mathcal{R} es un cerrado de $X \times X$ y por lo tanto X/\mathcal{R} es Hausdorff y;
3. el cardinal de las \mathcal{R} -clases es uniformemente finito, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que $\#\mathcal{R}[x] \leq N$ para cada $x \in X$.

Demostración. 1. Dado que $\mathcal{R} - \Delta$ es compacto, la inclusión $\iota : \mathcal{R} - \Delta \rightarrow X \times X$ es un embestimiento. Como la inclusión sobre Δ también lo es.

2. Por otro lado, Δ es cerrado porque X es Hausdorff y $\mathcal{R} - \Delta$ también lo es, ya que es un compacto en un Hausdorff. En consecuencia, \mathcal{R} es un cerrado de $X \times X$. Además, dado un abierto $U \subset X$, su saturación es el abierto $s \circ r^{-1}(U)$, y por consiguiente la aplicación cociente $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ es abierta. Ahora, sean $\pi(x)$ y $\pi(y)$ dos puntos distintos del cociente X/\mathcal{R} . Como son distintos, el punto (x, y) pertenece al abierto $X \times X \setminus \mathcal{R}$, así que podemos encontrar dos abiertos que separan x de y . Las imágenes por π de dichos abiertos separan $\pi(x)$ de $\pi(y)$.

3. Para cada par $(x, y) \in \mathcal{R}$, la proyección $r : \mathcal{R} \rightarrow X$ es un homeomorfismo de un entorno de $(x, y) \in \mathcal{R}$ en un entorno de $y \in X$. Por la compacidad de $\mathcal{R} - \Delta$, podemos recubrirlo con un número finito de estos abiertos. Si $N - 1$ es el número de los abiertos del cubrimiento finito de $\mathcal{R} - \Delta$, es obvio que $\#\mathcal{R}[x] \leq N$ para cada $x \in X$. □

Proposición 5.3. *Toda relación de equivalencia compacta \mathcal{R} sobre X es propia en el sentido de [Ren2], es decir, el espacio cociente X/\mathcal{R} es Hausdorff y la proyección $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ es un homeomorfismo local. Recíprocamente, si una relación propia cumple que $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ es uno a uno fuera de un compacto saturado, entonces es compacta dotada de la topología inducida por $X \times X$.*

Demostración. Por el lema anterior, sabemos que X/\mathcal{R} es Hausdorff, basta comprobar que la aplicación cociente es un homeomorfismo. Sea $K = s(\mathcal{R} - \Delta) = r(\mathcal{R} - \Delta)$ el compacto formado por la reunión de todas las clases no triviales. Evidentemente $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ envía $X - K$ sobre su imagen homeomórficamente, ya que, esencialmente, sobre ese conjunto es la identidad. Podemos entonces reducirnos al caso compacto. Recordemos que cada punto $(x, y) \in \mathcal{R}$ admite un entorno abierto, de forma que tanto s como r sean homeomorfismos de dicho entorno en su imagen. Por la compacidad de \mathcal{R} , podemos recubrirla por una familia finita \mathcal{U} de estos abiertos. Dado un punto $x \in X$ definimos el abierto

$$V = \bigcap \{f(U) \mid x \in f(U) \text{ con } f = s \text{ ó } r \text{ y } U \in \mathcal{U}\}.$$

De la misma forma que en el caso de las acciones de grupos finitos, podemos reemplazar V por un entorno más pequeño tal que $\mathcal{R}[y] \cap V = \{y\}$ para cada $y \in V$. En estas circunstancias, π es un homeomorfismo restringido a V .

Veamos el recíproco. Observemos que $\mathcal{R} - \Delta \subset \mathcal{R}_K^K = s^{-1}(K) \cap r^{-1}(K)$, donde K es un compacto tal que \mathcal{R} es trivial sobre $X - K$. Así que, como antes, podemos reducirnos al caso compacto. Ahora bien, como X/\mathcal{R} es Hausdorff, \mathcal{R} es cerrada en $X \times X$ y por lo tanto compacta. \square

Definición 5.4 ([GPS2, Ren2]). Una relación de equivalencia topológica \mathcal{R} definida sobre un espacio totalmente desconexo X se dice que es *afable* si existe una sucesión creciente de relaciones de equivalencia compactas \mathcal{R}_n tales que

$$\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n.$$

Si la topología de \mathcal{R} coincide con la topología límite directo (es decir, un conjunto U de \mathcal{R} es abierto si y sólo si $U \cap \mathcal{R}_n$ es abierto en \mathcal{R}_n para cada $n \in \mathbb{N}$), entonces la relación $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}_n$ se dice *aproximativamente finita* (AF de ahora en adelante). Obsérvese que una relación AF es siempre r -discreta.

Ejemplo 5.5. El ejemplo básico de relación AF es la relación cofinal ya descrita anteriormente. Si $\mathcal{S}_k = (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, la relación cofinal \mathcal{R}_{cof} dice que α y $\beta \in \mathcal{S}_k$ son cofinales si

$$\alpha \mathcal{R}_{\text{cof}} \beta \iff \exists N \in \mathbb{N} \mid \alpha_n = \beta_n, \forall n \geq N.$$

Esta relación es afable, ya que podemos escribir \mathcal{R}_{cof} como la unión creciente de las relaciones $\mathcal{R}_{\text{cof}}^N$ dadas por

$$\alpha \mathcal{R}_{\text{cof}}^N \beta \iff \alpha_n = \beta_n, \forall n \geq N. \tag{5.1}$$

Las relaciones de equivalencia afables están íntimamente relacionadas con los diagramas de Bratteli, como se ve en los trabajos [GPS2] y [Ren2]. Recordemos esta noción:

Definición 5.6. Llamamos *diagrama de Bratteli* a un grafo orientado $\mathcal{B} = (V, E)$, donde los conjuntos de vértices y aristas admiten sendas descomposiciones $V = \bigsqcup_{n \geq 0} V_n$ y $E = \bigsqcup_{n \geq 0} E_n$ como uniones numerables disjuntas de conjuntos finitos no vacíos tales que

- para cada arista $e \in E_n$, su origen $s(e)$ pertenece a V_n y su rango $r(e)$ a V_{n+1} ;
- dado un vértice $v \in V_n$ siempre existe una arista $e \in E_n$ tal que $s(e) = v$.

Llamamos *origen* de \mathcal{B} a cada vértice v tal que $r^{-1}(v) = \emptyset$. El diagrama es *estándar* si posee un solo origen (véanse [GPS2] y [Ren2]).

Consideremos \mathcal{B} un diagrama de Bratteli, para cada origen $v \in V_N$ definimos el conjunto

$$X_v = \left\{ (e_N, e_{N+1}, \dots) \mid s(e_N) = v \text{ y } r(e_n) = s(e_{n+1}) \text{ para cada } n \geq N \right\}$$

de los caminos infinitos basados en v . Si lo dotamos de la topología inducida por la topología producto de $\prod_{n \geq N} E_n$, X_v se convierte en un espacio compacto y totalmente desconexo.

Definición 5.7. El *espacio de los caminos infinitos de \mathcal{B}* es la suma topológica

$$X_{\mathcal{B}} = \bigsqcup_{v \text{ origen de } \mathcal{B}} X_v.$$

Sobre este espacio es posible definir la relación cofinal \mathcal{R}_{cof} que identifica dos caminos (e_N, e_{N+1}, \dots) y $(e'_{N'}, e'_{N'+1}, \dots) \in X_{\mathcal{B}}$ si y sólo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $e_i = e'_i$ para cada $i \geq m$. Esta relación de equivalencia también es afable ya que $\mathcal{R}_{\text{cof}} = \varinjlim \mathcal{R}_{\text{cof}}^m$ con

$$\mathcal{R}_{\text{cof}}^m = \left\{ \left((e_N, e_{N+1}, \dots), (e'_{N'}, e'_{N'+1}, \dots) \right) \mid m \geq N, N', e_n = e'_n \forall n \geq m \right\}.$$

Este ejemplo es el único posible de relación afable que muestra el siguiente resultado:

Teorema 5.8 ([GPS2, Ren2]). *Si \mathcal{R} es una relación de equivalencia AF sobre un espacio totalmente desconexo X , existe un diagrama de Bratteli \mathcal{B} y un homeomorfismo $\Psi : X \rightarrow X_{\mathcal{B}}$ que define un isomorfismo entre \mathcal{R} y \mathcal{R}_{cof} . Si X es compacto \mathcal{B} puede tomarse estándar.*

Sea \mathcal{B} un diagrama de Bratteli y $m_0 = 0 < m_1 < \dots < m_n < \dots$ una sucesión de enteros positivos. Definimos la *contracción telescópica de \mathcal{B}* como el diagrama de Bratteli $\mathcal{B}' = (V', E')$ donde $V'_n = V_{m_n}$ y

$$E'_n = \left\{ (e_{m_{n-1}+1}, e_{m_{n-1}+2}, \dots, e_{m_n}) \mid e_i \in E_i, r(e_i) = s(e_{i+1}) \text{ con } i = m_{n-1} + 1, \dots, m_n - 1 \right\},$$

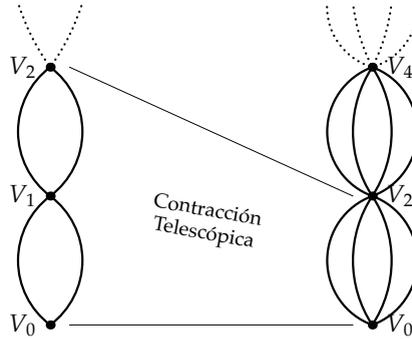


Figura 5.1.

La contracción telescópica. En este caso $m_i = 2i$.

siendo las aplicaciones r y s las obvias. Intuitivamente \mathcal{B}' es un diagrama con menos detalles que \mathcal{B} , ya que se han eliminado los pisos intermedios entre V_{m_n} y $V_{m_{n+1}}$ y sustituido esa parte del grafo por los posibles caminos (véase figura 5.1). Es obvio el siguiente resultado:

Proposición 5.9. *Sea \mathcal{B} un diagrama de Bratteli y \mathcal{B}' una contracción telescópica de \mathcal{B} . Entonces $X_{\mathcal{B}}$ y $X_{\mathcal{B}'}$ son naturalmente homeomorfos y dicho homeomorfismo implementa un homeomorfismo entre las relaciones cofinales en dichos conjuntos.*

Por otro lado, cada diagrama de Bratteli define unívocamente una C^* -álgebra AF, es decir una C^* -álgebra que es límite de C^* -álgebras de dimensión finita [Bra]. Se construye de la siguiente manera: supongamos por simplicidad que $\mathcal{B} = (V, E)$ es estándar, para cada vértice $v \in V$ tomamos $M_{k(v)}(\mathbb{C})$ donde $k(v)$ es el número de caminos (finitos) entre el origen $v_0 \in V_0$ y v . Definimos el álgebra

$$A_n = \bigoplus_{v \in V_n} M_{k(v)}(\mathbb{C}), \quad (5.2)$$

en la que existe una única norma con la que es una C^* -álgebra. Por definición tomamos $A_0 = \mathbb{C}$. Si $\{v_1, \dots, v_l\} = s(r^{-1}(v))$ es obvio que $k(v_1) + \dots + k(v_l) = k(v)$, podemos definir la inclusión en diagonal de $\bigoplus_{i=1}^l M_{k(v_i)}(\mathbb{C})$ en $M_{k(v)}(\mathbb{C})$. Lo que define un homomorfismo inyectivo $i_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$. Definimos el álgebra asociada a \mathcal{B} como

$$AF(\mathcal{B}) = \varinjlim (A_n, i_n).$$

También es posible hacer una construcción a la inversa, es decir, asociada a una relación AF tenemos un diagrama de Bratteli que nos presenta la información las inclusiones del sistema inyectivo ([Bra]).

Un resultado de O. Bratteli (véase [Bra]) relaciona las equivalencias naturales de álgebras y de diagramas de Bratteli:

$$AF(\mathcal{B}) \text{ es isomorfa a } AF(\mathcal{B}') \iff \mathcal{B} \text{ es equivalente a } \mathcal{B}'. \quad (5.3)$$

Si a cada par de relaciones AF \mathcal{R} y \mathcal{R}' , les asociamos sus diagramas de Bratteli \mathcal{B} y \mathcal{B}' , entonces la proposición 5.9 y (5.3) nos aseguran que

$$\mathcal{R} \text{ es isomorfa } \mathcal{R}' \iff \mathcal{B} \text{ es equivalente a } \mathcal{B}'.$$

En resumen, cada relación AF \mathcal{R} define una C^* -álgebra AF salvo isomorfismo. Según prueba A. Connes en [Con], esta C^* -álgebra coincide con la C^* -álgebra asociada al grupoide \mathcal{R} .

G.A. Elliot ha probado en [Ell] que el primer grupo K-teoría ordenada es un invariante completo para las álgebras AF:

Teorema 5.10 ([Ell]). *Dos C^* -álgebras AF son isomorfas si y sólo si sus grupos de K-teoría ordenada son isomorfos.*

En nuestro caso es sencillo calcular dicho grupo ([Con]), ya que, si $A = AF(\mathcal{B})$ para un diagrama de Bratteli \mathcal{B} , entonces $K_0(A)$ es el límite directo del sistema inductivo

$$\mathbb{Z}^{\#V_0} \xrightarrow{I_0} \mathbb{Z}^{\#V_1} \xrightarrow{I_1} \mathbb{Z}^{\#V_2} \xrightarrow{I_2} \dots, \quad (5.4)$$

donde las aplicaciones I_i están dadas por las matrices de incidencia entre los conjuntos de vértices V_i y V_{i+1} .

5.2. Diagramas de Bratteli ordenados y el sistema de Bratteli–Vershik

Un diagrama de Bratteli estándar \mathcal{B} es *simple* si existe una contracción telescópica $\mathcal{B}' = (V', E')$ de forma que $s(r^{-1}(v)) = V'_{i-1}$ para cada $v \in V'_i$, con $i \geq 0$. En otras palabras, las matrices de incidencia entre los pisos V'_i y V'_{i+1} no contienen ceros. Esta condición fuerza que en $X_{\mathcal{B}}$ no existan puntos aislados, y por lo tanto $X_{\mathcal{B}}$ es un conjunto de Cantor. Además, implica que las clases de la relación cofinal sobre $X_{\mathcal{B}}$ son densas. El recíproco también es cierto. Por otra parte, un diagrama \mathcal{B} es simple si y sólo si el álgebra $AF(\mathcal{B})$ es simple, lo que a su vez equivale a que lo sea $K_0(\mathcal{B})$.

Un *diagrama de Bratteli ordenado* $\mathcal{B} = (V, E, \leq)$ es un diagrama de Bratteli $\mathcal{B} = (V, E)$ junto con un orden parcial \leq sobre el conjunto de aristas de forma que dos aristas son comparables si y sólo si sus rangos son iguales. En particular \leq es un orden total sobre las aristas que tienen como rango un vértice fijo. Sean E^{\min} y E^{\max} los conjuntos de mínimos y máximos respectivamente del conjunto parcialmente ordenado (E, \leq) .

Definición 5.11. Un diagrama de Bratteli ordenado simple $\mathcal{B} = (V, E, \leq)$ es un diagrama de Bratteli ordenado tal que:

- $\mathcal{B} = (V, E)$ es un diagrama de Bratteli simple;
- existe un único camino $x_{\min} = (e_1, e_2, \dots) \in X_{\mathcal{B}}$ tal que $e_i \in E^{\min}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. De la misma manera, existe un único camino $x_{\max} = (a_1, a_2, \dots) \in X_{\mathcal{B}}$ tal que $a_i \in E^{\max}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.12 ([GPS1, Ska]). Si $\mathcal{B} = (V, E)$ es un diagrama de Bratteli simple, existe un orden parcial \leq sobre E tal que $\mathcal{B} = (V, E, \leq)$ es un diagrama ordenado simple. Más aún, fijados x e $x' \in X_{\mathcal{B}}$ tales que las aristas de x no pertenezcan a x' , y viceversa, podemos encontrar un orden parcial \leq sobre E tal que $x = x_{\min}$ e $y = x_{\max}$.

Vamos a definir un homeomorfismo $\lambda_{\mathcal{B}} : X_{\mathcal{B}} \rightarrow X_{\mathcal{B}}$ de manera que la órbita de x coincida con la clase $\mathcal{R}[x]$, salvo si $x = x_{\max}$ ó $x = x_{\min}$. Por definición $\lambda_{\mathcal{B}}(x_{\max}) = x_{\min}$. Por otro lado, tomemos $(e_1, e_2, \dots) \in X_{\mathcal{B}}$ distinto de x_{\max} . Como $x \neq x_{\max}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $e_n \notin E^{\max}$; denotemos por n_0 el mínimo natural para el que ocurre esto y por f_{n_0} la arista inmediatamente superior de e_{n_0} , es decir, f_{n_0} es la menor arista del conjunto totalmente ordenado $r^{-1}(r(e_{n_0})) \subseteq E_{n_0}$ tal que $e_{n_0} < f_{n_0}$. Tomamos ahora las aristas $f_i \in E_i$ con $1 \leq i < n_0$ tales que $r(f_i) = s(f_{i+1})$ y que f_i es el único mínimo en $r^{-1}(r(f_i))$, i.e. $f_1 f_2 \dots f_{n_0-1}$ es el único camino mínimo (con el orden lexicográfico) que termina en $s(f_{n_0})$. Tomamos entonces $\lambda_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots) = (f_1, f_2, \dots, f_{n_0}, e_{n_0+1}, \dots)$. Es sencillo comprobar que λ es un homeomorfismo sin puntos periódicos.

Definición 5.13. La aplicación $\lambda_{\mathcal{B}} : X_{\mathcal{B}} \rightarrow X_{\mathcal{B}}$ es la aplicación de Vershik y el par $(X_{\mathcal{B}}, \lambda_{\mathcal{B}})$ es el sistema dinámico de Bratteli Vershik.

Ejemplo 5.14. Consideremos el diagrama de Bratteli $\mathcal{B} = (V, E)$ con $V_i = \{*\}$ y E_n con dos aristas que, obviamente, unen el único punto de V_{n-1} con el único de V_n . Podemos entonces pensar en E_n como en el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$ y dotarlo de orden usual \leq . Así, $\mathcal{B} = (V, E, \leq)$ es un diagrama de Bratteli ordenado. Para este orden $(1, 1, 1, \dots)$ es el camino maximal y $(0, 0, 0, \dots)$ es el camino minimal, además, la aplicación de Vershik asociada no es otra que la suma de 1 en los enteros 2-ádicos, identificando el espacio $X_{\mathcal{B}} = \mathcal{S}_2$ de las sucesiones infinitas de ceros y unos con los enteros 2-ádicos \mathbb{Z}_2 .

5.3. Descomposiciones por cajas y relaciones compactas

Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ un espacio compacto foliado por grafos. En lo sucesivo llamaremos X al conjunto de todos los vértices de las hojas de \mathcal{F} , y \mathcal{R} a la relación de equivalencia inducida sobre X .

Dado un compacto B foliado en producto, es decir, dotado de una carta local $\varphi : B \rightarrow P \times C$, definimos su *borde transverso* o *vertical* como

$$\partial_{\mathfrak{h}} B = \varphi^{-1}(\partial P \times C).$$

Definición 5.15. Una familia finita de cartas locales $\mathcal{B} = \{\varphi_i : B_i \rightarrow P_i \times C_i\}_{i=1}^m$ es una *descomposición por cajas* de X si

D1. $X = \bigcup_{i=1}^m B_i$,

D2. $B_i \cap B_j = \partial_{\mathfrak{h}} B_i \cap \partial_{\mathfrak{h}} B_j$ siempre que $i \neq j$.

Las propiedades de los espacios foliados por grafos nos garantizan además:

- D3. cada placa de B_i corta a lo suma a una placa de B_j para cada $1 \leq i, j \leq m$,
 D4. las transversales de B_i y B_j se intersecan en abiertos cerrados, es decir, dado un punto $x \in \partial B_j$, el conjunto

$$p_2 \circ \varphi_i(\varphi_j^{-1}(\{x\} \times C_j) \cap B_i)$$

es abierto en T , siendo p_2 la segunda proyección coordenada $P_i \times C_i$.

Cada compacto B_i se denominará *caja*. Diremos que B_i es una *caja adaptada* si P_i contiene algún vértice y ∂P_i está formado por puntos medios de aristas. En adelante identificaremos \mathcal{B} con la familia de compactos $\{B_i\}$.

En el caso de mosaicos, las descomposiciones por cajas adaptadas eran aquellas cuyas placas son motivos del mosaico (cf. [BBG]). La traducción directa de esta idea a grafos consiste en exigir que las placas sean grafos finitos. Ahora bien, la propiedad esencial de las descomposiciones por cajas es que la transversal canónica (obtenida al escoger puntos base para las loetas) no interseca al borde transverso. Esta propiedad es la que permite definir una relación de equivalencia sobre X . Precisamente el hecho de que B_i sea adaptada nos dice que $\partial_{\text{h}} B \cap X = \emptyset$. Esto nos permitirá, al final de esta sección, construir una relación compacta análoga al caso de mosaicos (cf. [Gon]).

Observación 5.16. Dada una caja B de una descomposición por cajas \mathcal{B} , el interior de B se puede escribir como $\overset{\circ}{B} = \varphi^{-1}(\overset{\circ}{P} \times C) = B - \partial_{\text{h}} B$, lo que nos indica que cualquier transversal $\varphi^{-1}(\{*\} \times C)$ es un compacto abierto de cualquier otra transversal que la contenga. Un eje de \mathcal{B} es una transversal completa cerrada para $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$.

Observación 5.17. Una descomposición por cajas adaptada a un espacio foliado por grafos puede transformarse en una descomposición por cajas adaptadas con placas contráctiles sin más que dividir las placas de las cajas en bolas centradas en los vértices y de radio $\frac{1}{2}$, siempre y cuando no haya bucles en las hojas.

En general no existen descomposiciones adaptadas para cualquier espacio foliado por grafos. Por ejemplo, sea \mathcal{F}_θ la foliación lineal de \mathbb{T}^2 definida por la suspensión de la rotación $R_\theta : e^{2\pi i t} \rightarrow e^{2\pi i(t+\theta)}$. Podemos pensar esta foliación como un espacio foliado por grafos, al considerar el producto de la arista $[0, 1]$ por la circunferencia \mathbb{S}^1 e identificar los extremos de las aristas mediante el giro R_θ :

$$(\mathbb{T}^2, \mathcal{F}_\theta) = [0, 1] \times \mathbb{S}^1 / (1, t) \sim (0, t + \theta).$$

En este caso, una descomposición por cajas ha de reducirse a un compacto foliado en producto y esto sólo es posible si $\theta \in \mathbb{Q}$. El problema en este ejemplo radica en que la transversal completa no tiene suficientes abiertos cerrados.

Ahora bien, si la transversal es totalmente disconexa, el problema anterior desaparece. Consideremos el espacio foliado dado en el ejemplo 3.8: tomamos el árbol $L^+ \in \mathcal{T}(\mathbb{Z})$ (cuyos vértices son los enteros no negativos y las aristas obvias) y la

clausura del grafo $\overline{\mathcal{R}[L^+]}$. Este espacio foliado está formado por dos hojas: la propia semirecta $\overline{\mathcal{R}[L^+]}$ y una hoja circular con un único vértice y una única arista $\overline{\mathcal{R}[Cay(\mathbb{Z})]}$, sobre la que se acumula $\overline{\mathcal{R}[L^+]}$. En una descomposición por cajas adaptada la hoja $\overline{\mathcal{R}[Cay(\mathbb{Z})]}$ debería pertenecer completamente a una caja, pero debido a que es portadora de holonomía, esto es imposible.

Si eliminamos la holonomía y exigimos que las transversales sean totalmente disconexas, siempre es posible encontrar una descomposición adaptada:

Teorema 5.18. *Existen descomposiciones por cajas adaptadas para cualquier espacio compacto foliado por grafos transversalmente 0-dimensional y sin holonomía.*

Demostración. Sea (X, \mathcal{F}) un espacio foliado por grafos. Dado un vértice $x \in X$ podemos considerar $P_x = \overline{B}(x, \frac{1}{2})$ la bola cerrada centrada en x de radio $\frac{1}{2}$. Dado que no existe holonomía, podemos encontrar un entorno abierto $C_x \subset X$ de x de forma que

$$B_x = \bigcup_{x' \in V_x} \overline{B}(x, \frac{1}{2}) \xrightarrow{\varphi_x} P_x \times C_x$$

es un compacto foliado en producto. Como X es totalmente disconexo, podemos suponer que, de hecho, C_x es abierto cerrado.

Ahora X es compacto y podemos extraer una subfamilia finita de $\{C_x\}$ que cubra X . La denotaremos por $\{C_i\}_{i=1}^n$. Podemos suponer que los abiertos cerrados C_i son disjuntos con la técnica ya usada substituyendo C_i por $C_i - \bigcup_{j < i} C_j$. Tomamos entonces la familia de cajas adaptadas $\{B_i = \varphi_i^{-1}(P_i \times C_i)\}$, que es de hecho una descomposición:

D1. Tenemos que $\bigcup B_i$ contiene todos los vértices y todas las bolas cerradas centradas en ellos de radio $\frac{1}{2}$.

D2. Es obvio que dos abiertos B_i y B_j distintos se intersecan sólo en el borde (transverso), ya que no tienen vértices comunes. \square

Asociada a una descomposición por cajas adaptadas \mathcal{B} , existe una relación de equivalencia $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ sobre X cuyas clases son las versiones discretas de las placas: dados dos vértices x y $x' \in X$

$$x \mathcal{R}_{\mathcal{B}} x' \iff x \text{ y } x' \text{ pertenecen a la misma placa de una caja de } \mathcal{B}.$$

Dicha relación está bien definida precisamente por que la intersección de dos cajas B y $B' \in \mathcal{B}$ no contiene vértices.

Lema 5.19. *La relación $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ es compacta, r -discreta y abierta en \mathcal{R} .*

Demostración. Supongamos que \mathcal{R} está dotada de la topología *étale* (similar a la construida en la proposición 3.18), en la que los grafos de las transformaciones de holonomía

$$\text{grafo}(h) = O(\text{dom } h, h) = \{(x, h(x)) \mid x \in \text{dom } h\}$$

forman una base de abiertos. Con esta topología \mathcal{R} es r -discreta. Luego, $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ dotada de la topología inducida por \mathcal{R} es r -discreta.

Tomemos una caja $B \xrightarrow{\varphi} P \times C$. Para cada par de vértices v y $v' \in P$ tenemos definida una transformación de holonomía entre los abiertos cerrados $\varphi^{-1}(\{v\} \times C)$ y $\varphi^{-1}(\{v'\} \times T)$ de X dada por $h_{v,v'} \circ \varphi^{-1}(v, x) = \varphi^{-1}(v', x)$. Este conjunto finito de transformaciones lo denotaremos por Σ_B . Podemos escribir entonces

$$\mathcal{R}_{\mathcal{B}} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \bigcup_{h \in \Sigma_B} \text{grafo}(h)$$

y deducir que $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ es abierta en \mathcal{R} . Además, los dominios de estas transformaciones de Σ_B son compactos. Como \mathcal{B} y Σ_B son siempre finitos, $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ es unión finita de compactos, y por lo tanto compacta. \square

Por definición, cada $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ -clase es la intersección de una placa de una caja de B con la transversal X . Vamos a “discretizar” también la noción de borde definiendo el borde de una clase

$$\partial_{\mathfrak{h}} \mathcal{R}_{\mathcal{B}}[x] = \{x' \in \mathcal{R}[x] \mid d(x', \partial P_x) < 1\},$$

siendo P_x la placa por x . Podemos describir este conjunto en términos de elementos de holonomía. En efecto, cada arista de $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ produce una transformación de holonomía de Γ , que diremos de longitud 1, y tendremos que:

$$\partial_{\mathfrak{h}} \mathcal{R}_{\mathcal{B}}[x] = \{x' \in \mathcal{R}[x] \mid h(x') \notin \mathcal{R}_{\mathcal{B}}[x] \text{ para alguna } h \in \Gamma \text{ de longitud } 1\}$$

Definición 5.20. El borde de $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ es el conjunto

$$\partial_{\mathfrak{h}} \mathcal{R}_{\mathcal{B}} = \bigcup_{x \in X} \partial_{\mathfrak{h}} \mathcal{R}_{\mathcal{B}}[x].$$

5.4. Proceso de inflación

Nos proponemos adaptar aquí el proceso de inflación descrito por J. Bellisard, R. Benedetti y J.-M. Gambaudo en [BBG] al caso de espacios foliados por grafos.

Definición 5.21. Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ un espacio foliado. Diremos que una descomposición por cajas \mathcal{B}' se obtiene por inflación de otra descomposición \mathcal{B} si

- I1. para cada punto x de la intersección de una caja $B \in \mathcal{B}$ y una caja $B' \in \mathcal{B}'$, la transversal local de B' que pasa por x está contenida en la transversal local de B que pasa por x ;
- I2. el borde transverso de una caja $B' \in \mathcal{B}'$ está contenido en el borde vertical de \mathcal{B} , es decir, $\partial_{\mathfrak{h}} B' \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \partial_{\mathfrak{h}} B$;

- I3. para cada caja $B' \in \mathcal{B}'$, existe una caja $B \in \mathcal{B}$ que interseca a B' de forma que $\partial_{\text{in}} B' \cap \partial_{\text{in}} B = \emptyset$.

Teorema 5.22. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ un espacio compacto foliado por grafos transversalmente 0-dimensional, minimal y sin holonomía. Supongamos que \mathcal{B} es una descomposición por cajas adaptada de $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, entonces existe \mathcal{B}' una descomposición por cajas adaptada que se obtiene por inflación de \mathcal{B} .*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ la descomposición por cajas. Cada caja B_i está foliada en producto mediante el homeomorfismo $\varphi_i : B_i \rightarrow P_i \times C_i$. Si B_i y B_j se intersecan, podemos definir una (única) transformación de holonomía γ_{ij} entre dos subconjuntos abiertos y cerrados de C_i y C_j . Observemos que entonces el sistema de generadores $\Sigma = \{\gamma_{ij}\}$ del pseudogrupo de holonomía Γ reducido al eje $C = \bigcup_i C_i$ de \mathcal{B} , define una función de valencia continua (véase la ecuación 2.2 del capítulo 2). Consideraremos el pseudogrupo grafado (Γ, Σ) y la función distancia $d_\Sigma = d$ sobre las Γ -órbitas. Sea D la traza sobre C de una hoja L . Tomemos un abierto compacto $C' \subset C_1$ tal que para cada punto y de $D' = C' \cap L$ tengamos que

$$d(y, D' - \{y\}) \geq 5. \quad (5.5)$$

Definimos entonces las *celdas de Voronoi* para cada punto $y \in D'$ como los conjuntos

$$V_y = \{x \in D \mid d(x, y) = d(x, D')\}.$$

Como D es casi-isométrico a L , V_y es necesariamente finito. Por otro lado, la condición (5.5) implica que $\overline{B}_D(y, 2) \subset V_y$ y $\overline{B}_D(y, 2) \cap V_{y'} = \emptyset$ para cada $y' \in D' - \{y\}$. Sea Σ_y el conjunto de las Σ -palabras tal que para cada $\sigma \in \Sigma_y$ tengamos que $\sigma(y) \in V_x$, con lo que podemos ver V_x como el conjunto $V_x = \{\sigma(y) \mid \sigma \in \Sigma_y\}$.

Por otro lado, podemos definir el siguiente conjunto compacto (y conexo) de L

$$P'_y = \bigcup_{x \in V_y} P_x = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_y} P_{\sigma(y)}, \quad (5.6)$$

donde P_x es la placa de \mathcal{B} que pasa por x . Como \mathcal{L} es sin holonomía, para cada $y \in C'$, existe un entorno abierto y compacto $C'_y \subset C'$ tal que cada conjunto $\sigma(C'_y)$ está contenido en el eje de una caja $B_{i_\sigma} \in \mathcal{B}$. Ahora

$$B'_y = \bigcup_{y' \in C'_y} P'_{y'} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_y} \varphi_{i_\sigma}^{-1}(P_{\sigma(y)} \times \sigma(C'_y)),$$

es un compacto foliado en producto (dotado de la carta $\varphi_y : B'_y \rightarrow P'_y \times C'_y$ inducida por φ_{i_σ}): La condición D4 de la definición 5.15 nos dice que φ_y está bien definida y es continua. Por otro lado es sencillo ver que φ_y es biyectiva, y en consecuencia un homeomorfismo (como biyección continua entre compactos Hausdorff). Intuitivamente, B'_y se obtiene al levantar P'_y a las hojas vecinas.

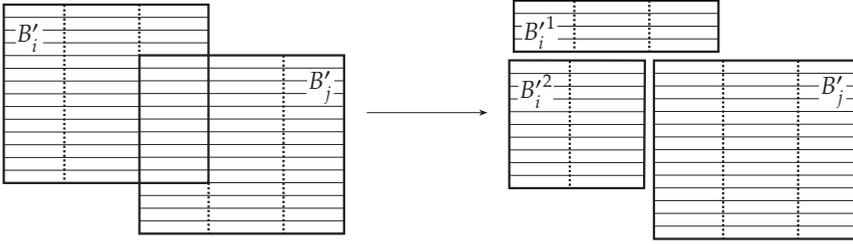


Figura 5.2.

Cuando dos cajas de intersecan lo hacen en otra caja. Así es posible recortarlas y construir cajas que se intersequen en el borde.

Como C' es compacto, podemos cubrirlo con un número finito de conjuntos C'_y , que además podemos suponer disjuntos ya que $C'_y - C'_y$ sigue siendo abierto y cerrado. Denotemos entonces por $\{C'_1, C'_2, \dots, C'_k\}$ la familia de estos abiertos compactos y $\mathcal{B}' = \{\varphi'_i : B'_i \rightarrow P'_i \times C'_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ las cartas foliadas construidas anteriormente.

Es obvio que por construcción \mathcal{B}' cumple todos los requisitos impuestos salvo el de ser una descomposición por cajas, ya que en principio no cumple D2 de la definición 5.15. Veamos que si dos cajas se intersecan en un abierto podemos tomar cajas más pequeñas para reparar los errores cometidos. En efecto, supongamos que B'_i y B'_j se intersecan en el interior, i.e. $B'_i \cap B'_j \neq \partial_{\text{in}} B'_i \cap \partial_{\text{in}} B'_j$. Entonces, tenemos una transformación de holonomía γ entre los ejes C'_i y C'_j de los abiertos foliados \tilde{B}'_i y \tilde{B}'_j . El domino

$$\text{dom } \gamma = p_2 \circ \varphi'_i(\varphi'_j^{-1}(\{*\} \times C'_j) \cap B'_i),$$

es un abierto cerrado de C'_i . Ahora nos basta reemplazar B'_i por otro par de cajas. Para ello dividimos C'_i dos abiertos y cerrados $C_1 = C'_i - \text{dom } \gamma$ y $C_2 = \text{dom } \gamma$ que serán los ejes de las nuevas cajas. En primer lugar, definimos la caja B_i^1 como $B_i^1 = \varphi_i^{-1}(P'_i \times C_1)$, que no interseca en el interior a B_j . Para definir B_i^2 , hacemos lo mismo tomando $B_i^2 = \varphi_i^{-1}(P'_i \times C_2) - \tilde{B}'_j$. Esto corresponde a eliminar de P'_i las placas de las cajas de \mathcal{B} que pertenecen a B'_j ; en otras palabras, $B_i^2 = \varphi_i^{-1}(P_2 \times C_2)$ donde P_2 es el subgrafo de P'_i dado por

$$P_2 = \bigcup \{P_x \mid x \in V_y \text{ y } x \notin V_{y'}\} = \bigcup \{P_{\sigma(y)} \mid \sigma \in \Sigma_y \text{ y } \sigma(y) \notin B'_j\}$$

siguiendo las notaciones de (5.6). Observemos que $B'_i \cup B'_j = B_i^1 \cup B_i^2 \cup B'_j$ (véase la figura 5.2).

Como hay un número finito de cajas en \mathcal{B}' podemos eliminar las intersecciones en el interior entre ellas en un número finito de pasos, obteniendo así una verdadera descomposición por cajas adaptada \mathcal{B}'' con las propiedades pedidas:

D1. Tenemos que $L \subset \bigcup_{B' \in \mathcal{B}'} B' = \bigcup_{B'' \in \mathcal{B}''} B''$, ya que las celdas de Voronoi forman una partición de L . Como B'' es cerrado en X , entonces $X = \bar{L} \subset \bigcup_{B'' \in \mathcal{B}''} B''$;

D2. Por construcción, las cajas de \mathcal{B}'' sólo se intersecan en el borde;

D4 e I1. Observemos que el eje de una caja de \mathcal{B}'' es un abierto en el eje de una caja de \mathcal{B} . Como la intersección de los ejes de dos cajas de \mathcal{B} es un abierto (en cada una de ellos) lo mismo ocurre para los ejes de cajas de \mathcal{B}'' ;

I2. Como las placas P' de una caja de \mathcal{B}' son unión de placas de cajas de \mathcal{B} , el borde de la placa P' está contenido en la unión de los bordes de placas de \mathcal{B} . Por lo tanto, el borde transversal de \mathcal{B} está contenido en el borde transversal de \mathcal{B}' y;

I3. Recordemos que cada placa P' de \mathcal{B}' es la unión de las placas de \mathcal{B} de los puntos de la celda de Voronoi V_y . Las placas P'' de \mathcal{B}'' son las mismas que las de \mathcal{B}' salvo cuando una celda de Voronoi vecina interseca a V_y . Si ése fuese el caso, todos los puntos de la intersección se hallarán a distancia mayor o igual a 2. Por lo que placa de \mathcal{B} por y se encuentra en el interior de la placa de \mathcal{B}'' por y . Luego los bordes transversos de las cajas correspondientes no se intersecan. \square

Corolario 5.23. *Sea $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ un espacio compacto foliado por grafos transversalmente 0-dimensional, minimal y sin holonomía. Entonces existe una sucesión de descomposiciones por cajas $\{\mathcal{B}^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que si $i < j$, $\mathcal{B}^{(j)}$ se obtiene por inflación de $\mathcal{B}^{(i)}$.*

A la luz del lema 5.19, asociada a la sucesión de descomposiciones adaptadas $\{\mathcal{B}^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tenemos una sucesión de relaciones de equivalencia étales y compactas \mathcal{R}_i . Dado que las placas de cajas de $\mathcal{B}^{(i)}$ son unión de placas de cajas de $\mathcal{B}^{(i-1)}$, resulta que la sucesión $\{\mathcal{R}_i\}$ es encajada. Por lo tanto, asociada a la sucesión $\{\mathcal{B}^{(i)}\}$ tenemos una relación $\mathcal{R}_\infty = \varinjlim \mathcal{R}_i$ AF y abierta en \mathcal{R} . Además, si \mathcal{R} es minimal, \mathcal{R}_∞ también lo será. Ahora definimos el borde de \mathcal{R}_∞ como

$$\partial_{\mathfrak{H}} \mathcal{R}_\infty = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \partial_{\mathfrak{H}} \mathcal{R}_i.$$

La relación \mathcal{R}_∞ difiere, en general, de la relación \mathcal{R} inducida por la foliación sobre X . Si definimos

$$\Delta_{\mathcal{R}_\infty}^{\mathcal{R}} = \{x \in X \mid \mathcal{R}_\infty[x] \neq \mathcal{R}[x]\},$$

es obvio que:

$$\Delta_{\mathcal{R}_\infty}^{\mathcal{R}} \subset \text{saturado}(\partial_{\mathfrak{H}} \mathcal{R}_\infty). \quad (5.7)$$

5.5. Dinámica medible en el espacio de Gromov–Hausdorff

En [Ser], C. Series prueba que cualquier foliación de crecimiento polinomial es hiperfinita con respecto a cualquier medida invariante. Usaremos un esquema similar para probar que es posible construir una relación afile \mathcal{R}_∞ cuyo borde en el sentido anterior es de medida nula, para cualquier medida invariante. De esta forma probaremos que:

Teorema 5.24. *Sea X la envoltura de un grafo aperiódico y repetitivo en el espacio de Gromov–Hausdorff $\mathcal{G}(G, S)$ asociado a un grupo de tipo finito G de crecimiento polinomial*

respecto a un sistema finito de generadores S . La relación de equivalencia \mathcal{R} sobre X coincide con una subrelación abierta AF \mathcal{R}_∞ de \mathcal{R} en restricción a un G_δ denso de medida total para cualquier medida invariante.

Dividiremos la prueba de este resultado en una serie de lemas. Antes de comenzar, recordemos que dadas dos funciones f y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ monótonas y crecientes, decimos que g está dominada por f , y escribimos $g < f$, si existen constantes $\lambda, \rho > 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $g(n) \leq \lambda f(\rho n)$ para cada $n \geq n_0$. Si $f < g$ y $g < f$ decimos que f y g están mutuamente dominadas. Esto define una relación de equivalencia y la clase de una función es por definición su tipo de crecimiento.

En el caso que nos ocupa, el crecimiento de cada órbita está acotado por el crecimiento del grupo G , ya que éstas son subgrafos de $\text{Cay}(G)$. Es decir, si definimos $v_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como el número de elementos $v_x(n) = \#\bar{B}(x, n)$ de la bola $\bar{B}(x, n)$, entonces $v_x < n^d$ para cierto grado d . Este hecho nos permite deducir el siguiente resultado:

Lema 5.25. *Existe una sucesión de funciones continuas $n_q : X \rightarrow \mathbb{N}$ tales que:*

$$\frac{v_x(2n_q(x))}{v_x(n_q(x))} \leq M \quad (5.8)$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{v_x(n_q(x) - r)}{v_x(n_q(x))} = 1 \quad (5.9)$$

para cada $x \in X$ y cada $r \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como ya hemos dicho, existe $d \geq 1$ tal que $v_x < n^d$, i.e. existen constantes $\lambda, \rho > 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $v_x(n) \leq \lambda(\rho n)^d = g(n)$, para cada $n \geq n_0$. Por un lado tenemos la razón

$$\frac{g(2n)}{g(n)} = \frac{\lambda \rho^d 2^d n^d}{\lambda \rho^d n^d} = 2^d = M.$$

Ahora bien, para cada factor $a > 1$, tenemos que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{v_x(2n)}{v_x(n)} < aM$, lo que implica:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{v_x(2n)}{v_x(n)} \leq M.$$

En efecto, en caso contrario, existiría $N \geq n_0$ tal que $v_x(2n) > aMv_x(n)$ para cada $n \geq N$. Luego $v_x(2^k n) > a^k M^k v_x(n)$ para cada $k > 1$, pero en tal caso

$$a^k 4^k v_x(n) < v_x(2^k n) \leq g(2^k n) = M^k g(n)$$

que implicaría que $g(n) \geq a^k v_x(n) \geq a^k$, que es absurdo. Por consiguiente, para cada $x \in X$, existe una creciente de naturales $n_q(x)$ tales que

$$\frac{v_x(2n_q(x))}{v_x(n_q(x))} \leq M.$$

Dado que todas las hojas son de crecimiento subexponencial, cualquier sucesión de bolas centradas en un punto x contiene una subsucesión de Følner (respecto de cualquier anchura de borde), es decir,

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{v_x(n_q(x) - r)}{v_x(n_q(x))} = 1$$

para cada $x \in X$. Por último, la función de volumen $v : X \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $v(x, n) = \#B(x, n)$ es continua. Luego es posible tomar funciones $n_q : X \rightarrow \mathbb{N}$ localmente constantes. \square

Diremos que una caja $B \cong P \times C$ es de anchura $2n$ si las placas $P \times \{y\}$ coinciden con las bolas $B(y, n)$. Para $k \leq n$ definimos el borde (transverso) k -ésimo de B como

$$\partial_{\mathbb{H}}^k B = \bigcup_{y \in C} \partial^k \bar{B}(y, n)$$

donde ∂^k denota el borde k -ésimo natural

$$\begin{aligned} \partial^k \bar{B}(y, n) &= \{x \in \bar{B}(y, n) \mid \exists g \in G \text{ con } \text{long}_S(g) \leq k \text{ tal que } \tau_g(x) \notin \bar{B}(y, n)\} \\ &= \bar{B}(y, n) - \bar{B}(y, n - k), \end{aligned}$$

siendo τ_g la traslación por g .

Lema 5.26. *Sea A un abierto cerrado de X tal que*

$$\frac{v_x(2n)}{v_x(n)} \leq M$$

para cada $x \in A$. Para cada $\delta > 0$, existe una caja B de anchura $2n$ tal que su eje $C \subset A$ y

$$\mu(B) > \frac{1}{M} \mu(A) - \delta,$$

para cualquier medida invariante μ . Si además $v_x(n - r) < (1 - \varepsilon)v_x(n)$ para cada $x \in C$, entonces

$$\mu(\partial_{\mathbb{H}}^r B) < \varepsilon \mu(B).$$

Demostración. La demostración de este resultado es similar a la de los lemas 2.5 y 2.6 de [Ser]. Para cada grafo $v \in A$, existe un entorno abierto cerrado $C \subset \mathcal{G}$ contenido en A tal que, para cada par de traslaciones distintas τ_g y $\tau_{g'} \in \Gamma$, se verifica que

$$\tau_g(v) \text{ y } \tau_{g'}(v) \in \bar{B}(v, n) \implies \tau_g(C) \cap \tau_{g'}(C) = \emptyset \quad (5.10)$$

En efecto, dado que sólo existe un número finito de trasladados $\tau_g(v) = v - g$ si $g \in G$ tiene S -longitud menor o igual que $2n$, podemos tomar C suficientemente pequeño

para asegurar (5.10). Por lo que es obvio que podemos definir una caja $B \cong P \times C$ de anchura $2n$.

Para obtener una cota inferior de $\mu(B)$, llamamos \tilde{C} al abierto cerrado maximal que cumple (5.10). Así, A está contenido en la unión de los trasladados $\tau_g(\tilde{C})$ por elementos g de S -longitud menor o igual a $2n$. En efecto, de existir $v' \in A$ tal que $d(v', C) > 2n$, podríamos tomar un entorno C' de v' en A cumpliendo (5.10). Podríamos reducirlo hasta asegurar que $\tau_g(\tilde{C}) \cap \tau_{g'}(C') = \emptyset$, si g y g' tienen longitud menor o igual a n . Así $\tilde{C} \cup C'$ cumpliría (5.10), pero \tilde{C} es el maximal con esta propiedad.

Tomemos un abierto cerrado C cumpliendo (5.10) y tal que $\mu(C) > \mu(\tilde{C}) - \frac{M}{v_x(2n)}\delta$ para cada medida invariante μ . Tenemos la caja $B = P \times \tilde{C}$ de anchura $2n$ que, por la invariancia de la medida y (5.8), cumple

$$\mu(B) = v_x(n)\mu(\tilde{C}) \geq \frac{v_x(2n)}{M}\mu(\tilde{C}) \geq \frac{1}{M}\mu(A) > \frac{1}{M}\mu(A) - \delta. \quad (5.11)$$

Supongamos ahora $v_x(n-r) < (1-\varepsilon)v_x(n)$, equivalentemente $0 < v_x(n) - v_x(n-k) < \varepsilon v_x(n)$. Teniendo en cuenta que

$$\partial_{\partial}^k B = \bigcup_{y \in C} \partial^k \bar{B}(y, n) = \bigcup_{y \in C} (\bar{B}(y, n) - \bar{B}(y, n-k))$$

y que μ es invariante por la acción del pseudogrupo de holonomía Γ tenemos que

$$\mu(\partial_{\partial}^k B) = \int \# \partial^k \bar{B}(y, n) \chi_C(y) d\mu(y) \leq (v_x(n) - v_x(n-k))\mu(C) < \varepsilon v_x(n)\mu(C) = \varepsilon \mu(B).$$

donde χ_C denota la función característica de C . □

Lema 5.27. *Para cada abierto cerrado $A \subset X$, cada par $\varepsilon, \delta > 0$ y cada $r \geq 1$ existe $N \geq 0$ y una unión disjunta B de cajas de anchura a lo sumo N tales que su eje está contenido en A y*

$$\mu(B) > \frac{1}{M}\mu(A) - \delta \quad \text{y} \quad \mu(\partial_{\partial}^r B) < \varepsilon \mu(B).$$

para cada medida invariante.

Demostración. Para cada $x \in X$, existe una sucesión de $n_q(x) \rightarrow \infty$ tal que

$$\frac{v_x(2n_q(x))}{v_x(n_q(x))} \leq M \quad \text{y} \quad \frac{v_x(n_q(x) - r)}{v_x(n_q(x))} < \varepsilon, \quad (5.12)$$

si $q \geq q_0$. Denotemos $N(x) = n_q(x)$ al menor de los términos de la sucesión que satisfacen las condiciones (5.12). Puesto que las funciones n_q y la función de volumen son localmente constantes, existe una descomposición de X en un número finito

de abiertos cerrados X_1, X_2, \dots, X_p junto con unas constantes $N_1, N_2, \dots, N_p \geq 0$ verificando (5.12) para cada $x \in X_i$ y cada $n_i \geq N_i$. Podemos suponer que $N_p \geq N_{p-1} \geq \dots \geq N_1$. Por el lema 5.26, para cualesquiera ε y $\delta > 0$, y cada $r \geq 1$, existe B_p una caja de anchura $2N_p$ cuyo eje C_p está contenido en $A_p = X_p \cap A$, cumpliendo

$$\mu(B_p) > \frac{1}{M} \mu(A_p) - \frac{\delta}{p} \quad \text{y} \quad \mu(\partial_{\text{h}}^r B_p) < \varepsilon \mu(B_p).$$

Siguiendo la notación de la demostración del lema 5.26, consideremos los abiertos cerrados C_p y $\widetilde{C}_p \subset A_p$. Si denotamos $V_{2N_p}(C) = \bigcup_{y \in C} B(y, 2N_p)$, tenemos

$$M\mu(B_p) \geq \mu(V_{2N_p}(C_p)) \geq \mu(V_{2N_p}(C_p)) - \frac{\delta}{p} \geq \mu(A_p) - \frac{\delta}{p},$$

esto se desprende de (5.11).

Consideremos ahora el abierto cerrado $A_{p-1} - V_{2N_p}(C_p)$. Observemos que la medida de $A_{p-1} \cap V_{2N_p}(C_p) \subset V_{2N_p}(C_p)$ está acotada por $M\mu(B_p)$. Aplicando el lema 5.26 otra vez, existe una caja B_{p-1} de anchura N_{p-1} cuyo eje $C_{p-1} \subset A_{p-1} - V_{2N_p}(C_p)$ tal que

$$M\mu(B_{p-1}) \geq \mu(V_{2N_{p-1}}(C_{p-1})) \geq \mu(A_{p-1} - V_{2N_p}(C_p)) - \frac{\delta}{p}.$$

Por recurrencia obtenemos cajas B_i de anchura N_i y eje $C_i \subset A_i - \bigcup_{j>i} V_{2N_j}(C_j)$ tales que

$$M\mu(B_i) \geq \mu(V_{2N_i}(C_i)) \geq \mu\left(A_i - \bigcup_{j>i} V_{2N_j}(C_j)\right) - \frac{\delta}{p}.$$

Observemos que

$$C_i \cap \left(\bigcup_{j>i} V_{2N_j}(C_j)\right) = \emptyset.$$

Luego $V_{N_i}(C_i) \cap V_{N_j}(C_j) = \emptyset$ si $i < j$. Pero $V_{N_i}(C_i)$ no es otra cosa que la caja B_i , en otras palabras $B_i \cap B_j = \emptyset$, para $i < j$. Ahora, $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_p$, cuyo eje es $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_p \subset A$, verifica

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A_p) + \mu(A_{p-1} \cap V_{2N_p}(C_p)) + \mu(A_{p-1} - V_{2N_p}(C_p)) + \dots \\ &\quad + \mu\left(A_i \cap \bigcup_{j>i} V_{2N_j}(C_j)\right) + \mu\left(A_i - \bigcup_{j>i} V_{2N_j}(C_j)\right) + \dots \\ &\quad + \mu\left(A_1 \cap \bigcup_{j=2}^p V_{2N_j}(C_j)\right) + \mu\left(A_1 - \bigcup_{j=2}^p V_{2N_j}(C_j)\right) \\ &< M\mu(B_p) + \frac{\delta}{p} + \dots + M\mu(B_1) + \frac{\delta}{p} = M\mu(B) + \delta, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $A_i \cap A_{i-1} = \emptyset$. Por otra parte

$$\mu(\partial_{\hbar}^r B) = \sum_{i=1}^p \mu(\partial_{\hbar}^r B_i) < \varepsilon \sum_{i=1}^p \mu(B_i) = \varepsilon \mu(B),$$

con lo que hemos probado el resultado. \square

Lema 5.28. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $r \geq 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ y una unión disjunta B de cajas de anchura a lo sumo $2N$ tales que

$$\mu(B) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{y} \quad \mu(\partial_{\hbar}^r B) < \varepsilon \mu(B).$$

Demostración. Fijemos $\delta > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ de forma que cumplan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{M}\right)^m + \frac{\delta}{m} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{M}\right)^i\right) &= \left(1 - \frac{1}{M}\right)^m + M \frac{\delta}{m} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^m\right) < \delta, \\ \frac{\delta/m}{1 - \delta/m} &< \varepsilon, \\ (1 - \delta) \left(1 - \frac{\delta}{m}\right) &> 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Aplicando varias veces el lema 5.27, existen enteros positivos

$$\begin{aligned} N_1 &= N(r, \delta/m, \delta/m) \geq r, \\ &\vdots \\ N_i &= N(N_{i-1} + r, \delta/m, \delta/m) \geq N_{i-1} + 1 \geq N_{i-1}, \\ &\vdots \\ N_m &= N(N_{m-1} + r, \delta/m, \delta/m) \geq N_{m-1} + r, \end{aligned}$$

y uniones disjuntas B_i de cajas de anchura a lo sumo N_i , tales que su eje C_i está contenido en $X - \bigcup_{j>i} B_j$,

$$\mu(B_i) > \frac{1}{M} \mu\left(X - \bigcup_{j>i} B_j\right) - \frac{\delta}{m} \quad \text{y} \quad \mu(\partial_{\hbar}^r B_i) < \frac{\delta}{m} \mu(B_i).$$

Los conjuntos B_i cumplen que $B_i \cap B_j \subset \partial_{\hbar}^{N_j-1} B_j$ si $j > i$ (véase la figura 5.3). Definimos $B'_i = B_i - \partial_{\hbar}^{N_{i-1}} B_i$, que obviamente sigue siendo una unión disjunta de cajas. Además cumple que $B'_i \cap B'_j = \emptyset$. Por construcción

$$\begin{aligned} \mu(B'_i) &> \mu(B_i) - \mu(\partial_{\hbar}^{N_{i-1}} B_i) > \mu(B_i) - \mu(\partial_{\hbar}^{N_{i-1}+r} B_i) > \mu(B_i) - \mu(\partial_{\hbar}^{N_i} B_i) \\ &> \mu(B_i) - \frac{\delta}{m} \mu(B_i) = \left(1 - \frac{\delta}{m}\right) \mu(B_i). \end{aligned}$$

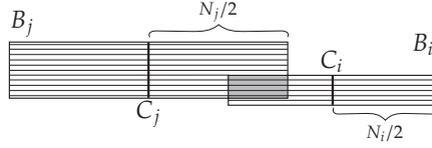


Figura 5.3.
La intersección $B_i \cap B_j$ no puede ser “muy profunda”.

Entonces,

$$\mu\left(X - \bigcup_{j>i} B_j\right) = \mu\left(\left(X - \bigcup_{j>i+1} B_j\right) - B_{i+1}\right) < \left(1 - \frac{1}{M}\right)\mu\left(X - \bigcup_{j>i+1} B_j\right) + \frac{\delta}{m},$$

que implica

$$\mu\left(X - \bigcup_{j=1}^m B_j\right) < \left(1 - \frac{1}{M}\right)^m + \frac{\delta}{m} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{M}\right)^j\right) = \left(1 - \frac{1}{M}\right)^m + M \frac{\delta}{m} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^m\right) < \delta,$$

de donde se deduce que $\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^m B_j\right) > 1 - \delta$. En consecuencia

$$\mu(B') = \sum_{j=1}^m \mu(B'_j) > \left(1 - \frac{\delta}{m}\right) \sum_{j=1}^m \mu(B_i) \geq \left(1 - \frac{\delta}{m}\right) \mu(M) > \left(1 - \frac{\delta}{m}\right)(1 - \delta) > 1 - \varepsilon.$$

Por último

$$\begin{aligned} \mu(\partial_{\hbar}^r B') &= \sum_{j=1}^m \mu(\partial_{\hbar}^r B'_j) \leq \sum_{j=1}^m \mu(\partial_{\hbar}^{N_{j-1}+r} B_j) \leq \sum_{j=1}^m \mu(\partial_{\hbar}^{N_j} B_j) \leq \frac{\delta}{m} \sum_{j=1}^m \mu(B_j) \\ &< \frac{\delta/m}{1 - \delta/m} \sum_{j=1}^m \mu(B'_j) = \frac{\delta/m}{1 - \delta/m} \mu(B') < \varepsilon \mu(M'). \end{aligned}$$

Tomamos $N = N_m$. □

Proposición 5.29. Existe una sucesión $\{\mathcal{R}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de relaciones de equivalencia r -discretas compactas y abiertas en \mathcal{X} y una sucesión monótona de naturales $\{N_n\}_{n \geq 0}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$:

1. $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_{n-1} \subset \mathcal{R}$;
2. si $x \mathcal{R}_n x'$, entonces $x' \in \overline{B}(x, N_n)$ y;
3. $\mu\left(x \in X \mid \overline{B}(x, N_{n-1}) \not\subset \mathcal{R}_n[x]\right) < \frac{1}{2^n}$.

Demostración. Aplicando el lema 5.27 para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $r = N_0 = 1$ existe una unión finita disjunta de cajas $B_1 = B_1^1 \sqcup \cdots \sqcup B_1^{k_1}$ de anchura máxima N_1 , tales que

$$\mu(B_1) > 1 - \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \mu(\partial^{N_0} B_1) < \frac{1}{2} \mu(B_1) < \frac{1}{2}.$$

Definimos \mathcal{R}_1 de la misma manera que en el lema 5.19, usando la familia de cajas B_1^i . Razonemos ahora por inducción y supongamos que hemos construido las relaciones \mathcal{R}_i y las constantes N_i para $i \leq n$. Aplicando de nuevo el lema 5.27 para $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+2}}$ y $r = 2N_n$, existe una unión disjunta de cajas $\hat{B}_{n+1} = \hat{B}_{n+1}^1 \sqcup \cdots \sqcup \hat{B}_{n+1}^{k_{n+1}}$ de anchura, a lo sumo, N tal que

$$\mu(\hat{B}_{n+1}) = 1 - \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{y} \quad \mu(\partial_{\hat{\mathfrak{H}}}^{2N_n} \hat{B}_{n+1}) < \frac{1}{2^{n+2}} \mu(\hat{B}_{n+1}) < \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Definimos entonces $B_{n+1} = \hat{B}_{n+1} - \partial_{\hat{\mathfrak{H}}}^{N_n} \hat{B}_{n+1} = \hat{B}_{n+1} - \bigcup_{i=1}^{k_{n+1}} \partial_{\hat{\mathfrak{H}}}^{N_n} \hat{B}_{n+1}^i$. De esta manera tenemos la desigualdad

$$\mu(B_{n+1} - \partial_{\hat{\mathfrak{H}}}^{N_n} B_{n+1}) = \mu(B_{n+1}) - \mu(\partial_{\hat{\mathfrak{H}}}^{N_n} B_{n+1}) > 1 - \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Basta definir la relación \mathcal{R}_{n+1} como

$$x \mathcal{R}_{n+1} y \iff \begin{cases} x \mathcal{R}_n y \\ \text{ó} \\ x \mathcal{R}_n z \text{ e } y \mathcal{R}_n w \text{ con } z \text{ y } w \text{ en la misma placa de } B_{n+1} \end{cases}$$

y definir $N_{n+1} = 2N$. De la misma manera que en el lema 5.19, \mathcal{R}_n es r -discreta, compacta y abierta en \mathcal{R} , la relación inducida por la foliación. \square

Observación 5.30. Las clases de \mathcal{R}_n son subgrafos conexos.

Demostración del teorema 5.24. Sea $\mathcal{R}_\infty = \varinjlim \mathcal{R}_n$ obtenida en la proposición 5.29. Por las propiedades de la sucesión \mathcal{R}_n , la relación \mathcal{R}_∞ es AF y abierta en \mathcal{R} . Observemos que el conjunto

$$\Delta_{\mathcal{R}_\infty}^{\mathcal{R}} = \{x \in X \mid \mathcal{R}_\infty[x] \neq \mathcal{R}[x]\} = \{x \in X \mid \exists y \in \mathcal{R}[x] : \forall n \in \mathbb{N}, y \notin \mathcal{R}_n[x]\}$$

está contenido en

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X \mid \bar{B}(x, N_{n-1}) \subset \mathcal{R}_n[T]\}$$

Tomando las μ -medidas de estos conjuntos tenemos que

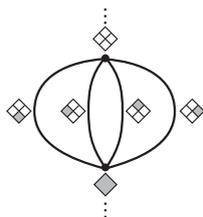
$$\mu(\Delta_{\mathcal{R}_\infty}^{\mathcal{R}}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(x \in X \mid \bar{B}(x, N_{n-1}) \subset \mathcal{R}_n[x]) = 0$$

por las propiedades de \mathcal{R}_n . \square

Corolario 5.31. *Sea G un grupo de tipo finito con crecimiento polinomial, dotado de un sistema finito de generadores. La dinámica medible de la envoltura de cualquier grafo aperiódico y repetitivo en $\mathcal{G}(G)$ está representada por un sistema dinámico de Bratteli–Vershik.*

5.6. El ejemplo de Ghys–Kenyon

Sean $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ el espacio de Gromov–Hausdorff asociado al grupo libre abeliano \mathbb{Z}^2 y $(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ el minimal de Ghys–Kenyon en \mathcal{T} obtenido como envoltura de árbol de Kenyon. En §4.1 hemos probado que la aplicación de codificación $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow Y^{\leq 2}$ es un isomorfismo boreliano que definía un isomorfismo entre las relaciones \mathcal{R}_{cof} y \mathcal{R} . Recordemos que $\Phi(\alpha)$ era la unión creciente de una serie de árboles finitos $T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ donde $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$. El símbolo α_n indica en qué posición relativa de $T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ se incluía el árbol anterior $T_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}}$. Esto puede representarse mediante el siguiente diagrama de Bratteli



No es casual que este diagrama corresponda con el que describe la filtración de \mathcal{R}_{cof} por las relaciones compactas \mathcal{R}_n definidas como

$$\alpha \mathcal{R}_n \beta \iff \alpha_i = \beta_i, \text{ para cada } i \geq n.$$

Con este nuevo punto de vista, veremos que la relación inducida por \mathcal{R} sobre $Y^{\leq 2}$ es isomorfa a una relación abierta y AF \mathcal{R}_∞ de \mathcal{R} , con $\mu(\partial_{\mathfrak{H}} \mathcal{R}_\infty) = 0$. De esta forma, de acuerdo con (5.7), tendremos que $\mu(\Delta_{\mathcal{R}_\infty}^{\mathcal{R}}) = 0$.

5.6.1. Motivos finos

Para poder describir la dinámica topológica de la laminación de Ghys–Kenyon, necesitaremos afinar la noción de motivo introducida en §4.1.4.

Definición 5.32. Un *motivo fino* es un par $\mathcal{P} = (P, E)$ donde P es un motivo y E es un conjunto finito de aristas. Decimos que un árbol $T \in \mathcal{T}$ tiene al motivo fino \mathcal{P} alrededor del vértice $v \in T$ si $v^{-1}P \subset T$ y $v^{-1}e \not\subset T$ para cada arista $e \in E$, y escribimos $v^{-1}\mathcal{P} \subset T$. Dado $Y \subset \mathcal{T}$, definimos el conjunto

$$Y_{\mathcal{P},v} = \{T \in Y \mid v^{-1}\mathcal{P} \subset T\}.$$

La *caja sobre \mathcal{P}* en Y es el conjunto

$$Y_{\mathcal{P}} = \{T \in Y \mid v^{-1}\mathcal{P} \subset H \text{ para cierto vértice } v \in P\}.$$

Obviamente $Y_{\mathcal{P}} = \bigcup_{v \in P} Y_{\mathcal{P},v}$

Es fácil comprobar que se tienen análogos a los lemas 4.16, 4.17. Además, tenemos una versión fuerte del lema 4.18:

Lema 5.33. *Los abiertos cerrados $Y_{\mathcal{P},1_G}$ forman una base para la topología de Y .*

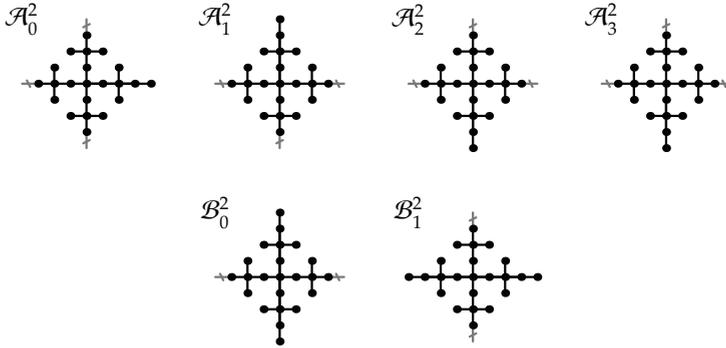


Figura 5.4.
Los motivos básicos (de talla $k = 2$).

5.6.2. La relación AF \mathcal{R}_∞

Fijemos un natural k que denominaremos *talla*. Tomamos como la *familia de motivos básicos de talla k* a la familia de árboles finitos:

$$B_l^k = \bar{B}_{T_\infty}(2^k \mathbf{r}(l), 2^k) - 2^k \mathbf{r}(l),$$

$$A_{l+m}^k = \bar{B}_{T_\infty}(2^{k+1} \mathbf{r}(l) + 2^k \mathbf{r}(m), 2^k) - 2^{k+1} \mathbf{r}(l) + 2^k \mathbf{r}(m),$$

con $l = 0, 1$ y $m = m(l) = l + 1, l + 3 \pmod{4}$. Denotaremos por C^k a la bola $\bar{B}_{T_\infty}(0, 2^k)$. La *familia de motivos finos básicos de talla k* es

$$\mathcal{B}_l^k = (B_l^k, E(B_l^k)), \quad \mathcal{A}_q^k = (A_q^k, E(A_q^k)),$$

con $l \in \{0, 1\}$ y $q \in \{0, 1, 2, 3\}$, y donde $E(C)$ es el conjunto de aristas presentes en C^k que no están presentes en el motivo básico C de talla k . Pueden verse estos motivos en la figura 5.4.

Veamos que a partir de las cajas sobre los motivos anteriores podemos obtener una relación \mathcal{R}_k que proviene de una descomposición por cajas (lema 5.19). Observemos en primer lugar que dados dos motivos finos básicos de talla k distintos \mathcal{P} y $\mathcal{P}' \in \{\mathcal{A}_l^k, \mathcal{B}_l^k\}$ tenemos que las cajas sobre ellos cumplen que $X_{\mathcal{P}} \cap X_{\mathcal{P}'} \subset X_{C^k, 0}$.

Definición 5.34. Decimos que dos árboles T y $T' \in X$ están \mathcal{R}_k relacionados si y sólo si existe \mathcal{P} un motivo fino básico de talla k tal que

$$T - v = T' - v' \in X_{\mathcal{P}, 0}$$

donde $v, v' \in P - \partial P$ y P es el motivo asociado al motivo fino \mathcal{P} .

Observemos que T y T' pertenecen a $X_{\mathcal{P}} - X_{C^k, 0}$. Es decir, $\mathcal{R}_k[T] \subset X_{\mathcal{P}} - X_{C^k, 0}$ si $T \in X_{\mathcal{P}} - X_{C^k, 0}$. Si $T \in C^k$, $\mathcal{R}_k[T] = \{T\}$. Además es evidente que $\mathcal{R}_k|_{Y^{\leq 2}}$ coincide con la relación inducida $\Phi^* \mathcal{R}_n$ definida sobre $Y^{\leq 2}$. Veamos que esta relación de equivalencia proviene de una descomposición por cajas adaptadas:

Lema 5.35. *Existe una descomposición en cajas adaptadas*

$$\mathcal{B}^k = \{\hat{B}_0^k, \hat{B}_1^k, \hat{A}_0^k, \hat{A}_1^k, \hat{A}_2^k, \hat{A}_3^k, \hat{C}^k\}$$

tales que

$$\hat{B}_1^k \cap X = X_{\mathcal{B}_1^k} - X_{C^k, 0}, \quad \hat{A}_1^k \cap X = X_{\mathcal{A}_1^k} - X_{C^k, 0}, \quad \hat{C}^k \cap X = X_{C^k, 0} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{\mathcal{B}^k} = \mathcal{R}_k.$$

Demostración. Sea $\mathcal{P} = (P, E)$ un motivo fino básico cualquiera. Es obvio que el conjunto

$$\hat{B}[\mathcal{P}] = \bigsqcup_{T \in X_{\mathcal{P}} - X_{C^k, 0}} \bar{B}(T, \frac{1}{2})$$

es una cajas naturalmente homeomorfa a $\bar{B}_P(\mathbf{0}, 2^k - \frac{1}{2}) \times X_{\mathcal{P}, 0}$. Además tenemos que $\hat{B}[\mathcal{P}] \cap X = X_{\mathcal{P}} - X_{C^k}$. Además, las cajas $\hat{B}[\mathcal{P}]$ son dos a dos disjuntas. La clausura del complementario de la unión de ellas también una caja:

$$\hat{B}[C_k] = \bigsqcup_{T \in X_{C^k, 0}} \bar{B}(T, \frac{1}{2}) \longrightarrow \bar{B}_{T_\infty}(\mathbf{0}, \frac{1}{2}) \times X_{C^k, 0}.$$

También es trivial que $\hat{B}[C^k] \cap X = X_{C^k, 0}$. Sea \mathcal{B}^k la descomposición por cajas adaptadas resultante. Dos árboles T y T' están $\mathcal{R}_{\mathcal{B}^k}$ -relacionados si pertenecen a la misma placa de una caja $\hat{B}[\mathcal{P}]$. Pero entonces existe un tercer árbol $T'' \in X_{\mathcal{P}, 0}$ y dos elementos v y $v' \in T''$ tales que $T - v = T' - v' = T''$. Pero es que además, v y $v' \in P - \partial P$, ya que podemos identificar $\mathcal{R}[T'']$ con T'' , y en consecuencia $\mathcal{R}_k[T'']$ con $P - \partial P$. \square

Los motivos básicos presentan las reglas de inflación que se muestran en la figura 5.5 (en términos de las descomposiciones, resulta que \mathcal{B}^{k+1} cumple los axiomas I1 y I2 de la definición 5.21 con respecto de \mathcal{B}^k). Esto es suficiente para concluir que

$$\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_3 \subset \cdots \subset \mathcal{R}_k \subset \cdots \subset \mathcal{R}$$

es una sucesión creciente de relaciones compactas, r -discretas y abiertas en \mathcal{R} (lema 5.19). Por lo tanto hemos construido una subrelación abierta y AF \mathcal{R}_∞ de \mathcal{R} . El diagrama de Bratteli asociado a la filtración $\{\mathcal{R}_k\}$ se muestra en la figura 5.6.

Observemos que si $T \notin \mathcal{R}[T_\infty]$, entonces $\mathcal{R}[T] = \mathcal{R}_\infty[T]$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[T_\infty] &= \mathcal{R}_\infty[T_\infty + (1, 0)] \sqcup \mathcal{R}_\infty[T_\infty - (1, 0)] \\ &\quad \sqcup \mathcal{R}_\infty[T_\infty + (0, 1)] \sqcup \mathcal{R}_\infty[T_\infty - (0, 1)] \sqcup \mathcal{R}_\infty[T_\infty], \end{aligned}$$

es decir, la clase $\mathcal{R}[T_\infty] \cong T_\infty$ se divide en los cuatro sectores que aparecen al eliminar el origen de T_∞ . Por lo tanto, el conjunto $\partial_{\mathfrak{h}} \mathcal{R}_\infty$ es finito. De hecho,

$$\partial_{\mathfrak{h}} \mathcal{R}_\infty = \{T_\infty, T_\infty + (1, 0), T_\infty - (1, 0), T_\infty + (0, 1), T_\infty - (0, 1)\}.$$

Proposición 5.36. *El conjunto $\Delta_{\mathcal{R}_\infty}^{\mathcal{R}} = \mathcal{R}[T_\infty]$ es magro y de medida nula para la única medida \mathcal{R} -invariante sobre X .*

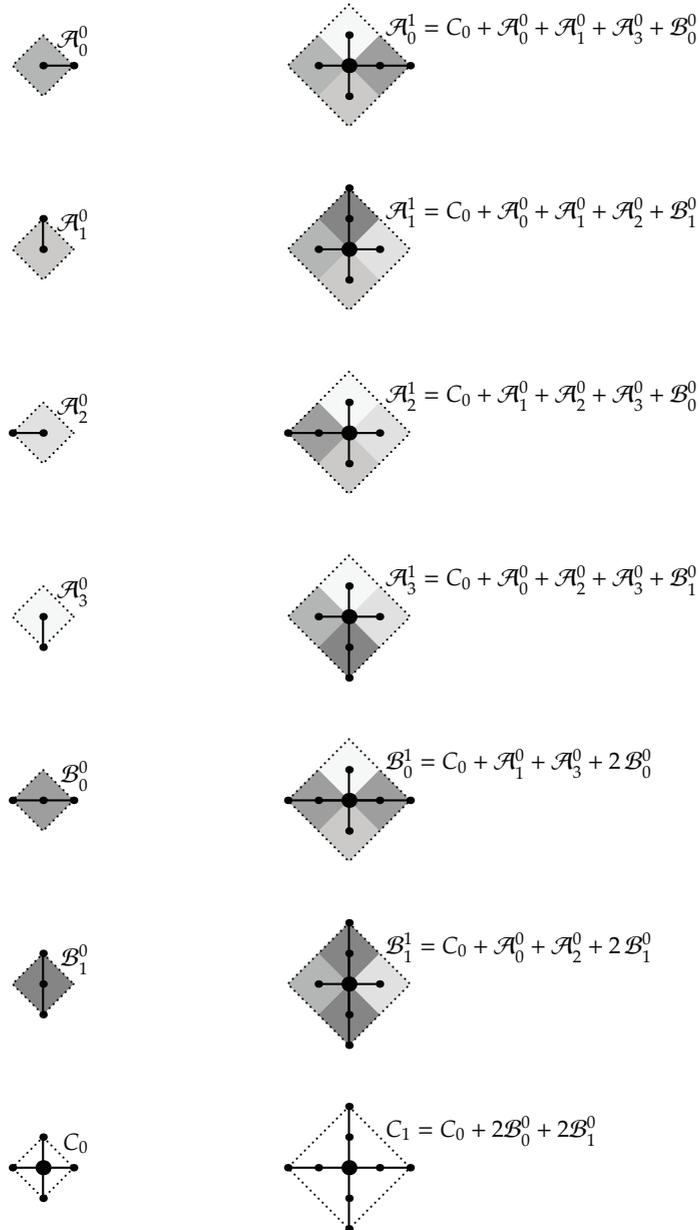


Figura 5.5.
Las reglas de inflación para los motivos básicos.

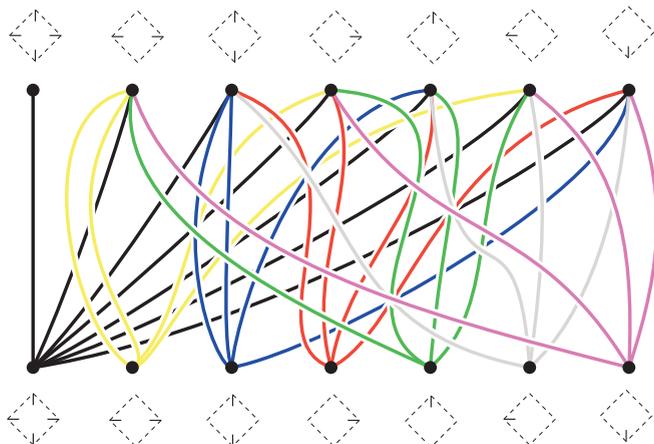


Figura 5.6.

Uno de los pisos en el diagrama de Bratteli asociado a la filtración $\{\mathcal{R}_k\}$. De V_i (piso de abajo) a V_{i+1} (piso de arriba).

5.6.3. Afabilidad del minimal de Ghys–Kenyon

Según el teorema 4.16 de [GPS2], la relación de equivalencia dada por las órbitas de una acción minimal de \mathbb{Z} sobre el Cantor es afable. Esto permite probar este resultado:

Lema 5.37 (corolario 4.7, [GPS2]). Sean \mathcal{R} una relación minimal AF sobre un espacio compacto X y $\{x_i\} \subset X$ una familia finita de puntos. La relación \mathcal{R}' engendrada por \mathcal{R} y $x_i \sim x_j$ es afable.

Demostración. Basta probar el caso en que la familia se reduzca a dos puntos x e y . Sea \mathcal{B} el diagrama de Bratteli asociado a \mathcal{R} , que sabemos ha de ser simple. Si $x \mathcal{R} y$, $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ y no hay nada que probar. Así que supongamos que x e y no están \mathcal{R} -relacionados. Es decir, que sus caminos correspondientes $x, y \in X_{\mathcal{B}}$ no son cofinales. Basta ordenar las aristas de forma que x e y sean el máximo y el mínimo respectivamente. El sistema de Bratteli–Vershik correspondiente $(X_{\mathcal{B}}, \lambda_{\mathcal{B}})$ genera precisamente la relación \mathcal{R}' con sus órbitas. Según el resultado antes mencionado [GPS2], \mathcal{R}' es afable. \square

Aplicando este resultado a una versión modificada de \mathcal{R}_{∞} probaremos:

Teorema 5.38. La relación \mathcal{R} del minimal de Ghys–Kenyon es afable.

Demostración. Como decíamos será necesario modificar la relación \mathcal{R}_{∞} , ya que no es minimal. Para ello incluiremos el punto T_{∞} , cuya \mathcal{R}_{∞} -clase se reduce a sí mismo, dentro de la \mathcal{R}_{∞} -clase de $T_{\infty} - (1, 0)$. Para ello modificaremos las relaciones \mathcal{R}_k de manera coherente. Así, añadiremos a las \mathcal{R}_k -clases correspondientes a las cajas \hat{B}_0^k



Figura 5.7.

Las nuevas clases modelo. Los puntos gruesos son los elementos de la clase.

y \hat{A}_0^k el punto de $X_{C^k,0}$ de su izquierda. Es decir, añadiremos a las cajas \hat{B}_0^k y \hat{A}_0^k los abiertos cerrados $X_{\mathcal{B}_0^k, (2^k,0)}$ y $X_{\mathcal{A}_0^k, (2^k,0)}$ y se los eliminaremos a C^k . Hemos reemplazado las clases tipo anteriores por las que se muestran en la figura 5.7.

La nueva relación de equivalencia \mathcal{R}' es AF, abierta en \mathcal{R} y verifica que

$$\partial_{\uparrow} \mathcal{R}' = \{T_\infty, T_\infty + (1, 0), T_\infty + (0, 1), T_\infty + (0, 1)\}.$$

Además es minimal. Aplicando el lema 5.37, obtenemos que

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}' \vee (T_\infty \sim T_\infty + (1, 0) \sim T_\infty + (0, 1) \sim T_\infty + (0, 1))$$

es afable, donde $\mathcal{R}' \vee \mathcal{R}''$ es la relación de equivalencia generada por \mathcal{R}' y \mathcal{R}'' . \square

5.7. Dinámica topológica en el espacio de Gromov–Hausdorff

Según acabamos de probar, la laminación de Ghys–Kenyon es afable en el sentido de que la relación de equivalencia inducida sobre una transversal completa lo es. La clave de la prueba está en el hecho de que es posible construir una subrelación abierta AF de \mathcal{R} cuyo borde transverso es finito, pudiendo aplicar así el lema 5.37. La relación de equivalencia \mathcal{R}_∞ proporcionada por el teorema 5.24 no posee, en general, un borde transverso finito. Ahora bien, este borde es \mathcal{R}_∞ -fino (i.e. de medida nula para cada medida \mathcal{R}_∞ -invariante), y \mathcal{R}_∞ -étale (i.e. $\mathcal{R}_\infty|_{\partial_{\uparrow} \mathcal{R}_\infty}$ es étale con la topología inducida). Esto permite aplicar el teorema 4.18 de [GPS2] que extiende el lema 5.39 usado en el caso del minimal de Ghys–Kenyon. De hecho, vamos a aplicar una versión mejorada de este resultado demostrada en [GMPS1].

Antes de enunciar este resultado necesitamos recordar un concepto introducido en [GMPS1]. Dadas dos relaciones \mathcal{R} y \mathcal{R}' topológicas r -discretas sobre un espacio X , definimos $\mathcal{R} * \mathcal{R}'$ como el conjunto formado por pares $(x, y) \in \mathcal{R}$ e $(y, z) \in \mathcal{R}'$, dotado de la topología inducida por $\mathcal{R} \times \mathcal{R}'$. Definimos las aplicaciones $s, r : \mathcal{R} * \mathcal{R}' \rightarrow X$ como

$$s((x, y), (y, z)) = x \quad \text{y} \quad r((x, y), (y, z)) = z.$$

Definición 5.39. Decimos que \mathcal{R} y \mathcal{R}' son (mutuamente) *transversas* si $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \Delta_X$ y existe un homeomorfismo $h : \mathcal{R} * \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}' * \mathcal{R}$ de forma que $r \circ h = r$ y $s \circ h = s$.

Teorema 5.40 (teorema 4.6, [GMPS1]). Sean \mathcal{R} una relación de equivalencia minimal AF sobre un conjunto de Cantor X . Sea Y un cerrado \mathcal{R} -étale y \mathcal{R} -fino de X y \mathcal{R}' una

relación compacta étale sobre Y . Si \mathcal{R}' es transversa a \mathcal{R} , entonces existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ tal que

1. $h \times h(\mathcal{R} \vee \mathcal{R}') = \mathcal{R}$;
2. $h(Y)$ es \mathcal{R} -étale y \mathcal{R} -fino;
3. $h|_Y \times h|_Y : (\mathcal{R}|_Y) \vee \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}|_{h(Y)}$ es un homeomorfismo.

En particular, $\mathcal{R} \vee \mathcal{R}'$ es afable.

Este resultado nos permite seguir un esquema similar a la prueba de la afabilidad del minimal de Ghys–Kenyon, y concluir que la envoltura de cualquier árbol repetitivo y aperiódico de $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2)$ con un número finito de finales es afable:

Teorema 5.41. *Sea (X, \mathcal{R}) la envoltura de un árbol repetitivo y aperiódico en el espacio de Gromov–Hausdorff $\mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$. Si todas las órbitas tienen un número finito de finales la relación \mathcal{R} es afable.*

Demostración. Según el teorema 5.24, existe \mathcal{R}_∞ una subrelación abierta AF de \mathcal{R} tal que $\partial_{\mathfrak{H}} \mathcal{R}_\infty$ es de medida nula para cualquier medida invariante. Observemos que si $x \in \partial_{\mathfrak{H}} \mathcal{R}_\infty$ entonces existe $s \in S = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ tal que $\tau_s(x) \notin \mathcal{R}_\infty[x]$. Por lo tanto $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\infty \vee \mathcal{R}'$, siendo \mathcal{R}' la relación generada por las aplicaciones $\tau_s|_{\partial_{\mathfrak{H}} \mathcal{R}_\infty}$. Para probar el resultado “dividiremos” \mathcal{R}' en un número finito de relaciones \mathcal{R}'_s sobre las que aplicaremos el teorema 5.40.

\mathcal{R}_∞ es minimal. En principio, las \mathcal{R}_∞ -clases son subárboles conexos e infinitos de los árboles $\mathcal{R}[x]$. Por hipótesis estos árboles tienen siempre un número finito de finales, luego $\mathcal{R}_\infty[x]$ contiene, al menos, a uno de los finales de $\mathcal{R}[x]$. Más aún,

$$\mathcal{R}[x] = \mathcal{R}_\infty[x_1] \sqcup \mathcal{R}_\infty[x_2] \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{R}_\infty[x_k]$$

donde $x_i \in \mathcal{R}[x]$ y k está acotado por el número de finales de $\mathcal{R}[x]$. Como cada final de $\mathcal{R}[x]$ es denso, \mathcal{R}_∞ es minimal.

Las relaciones \mathcal{R}'_s . Cada elemento $s \in S$ determina una transformación parcial de $\mathcal{R}|_{\partial_{\mathfrak{H}} \mathcal{R}_\infty}$

$$\varphi_s = \tau_s|_{D_s} : D_s \longrightarrow R_s,$$

donde D_s es el abierto cerrado de $\partial_{\mathfrak{H}} \mathcal{R}_\infty$

$$D_s = \text{dom } \tau_s \cap \partial_{\mathfrak{H}} \mathcal{R}_\infty \cap \tau_s^{-1}(\text{im } \tau_s \cap \partial_{\mathfrak{H}} \mathcal{R}_\infty).$$

Los conjuntos D_s y R_s pueden escribirse como unión disjunta finita de abiertos cerrados: $D_s = \sqcup_i A_s^i$ y $R_s = \sqcup_i B_s^i$ tales que $\varphi_s^i = \varphi_s|_{A_s^i} : A_s^i \rightarrow B_s^i$ es un homeomorfismo y $A_s^i \cap B_s^i = \emptyset$. Denotemos por $G_s^i = \text{grafo}(\varphi_s^i)$ a la bisección abierta cerrada asociada. Como \mathcal{R}_∞ es un abierto en \mathcal{R} , $\widehat{G}_s^i = G_s^i - \mathcal{R}_\infty$ es un cerrado, grafo de una transformación parcial $\widehat{\varphi}_s^i = \varphi_s^i|_{\widehat{A}_s^i} : \widehat{A}_s^i \rightarrow \widehat{B}_s^i$ entre dos cerrados disjuntos \widehat{A}_s^i y \widehat{B}_s^i de

A_s^i y B_s^i respectivamente. Definimos las relaciones \mathcal{R}_s^i sobre $\partial_{\text{fl}}\mathcal{R}_\infty$ como la relación generada por la transformación φ_s^i . Obviamente existen un número finito de estas relaciones.

\mathcal{R}_∞ y \mathcal{R}_s^i son transversas. Cualquier relación de equivalencia es transversa a la relación de la identidad. Veamos que $\mathcal{R}_\infty|_{\widehat{A_s^i \cup B_s^i}} = \Delta_{\widehat{A_s^i \cup B_s^i}}$. Es suficiente ver que $\mathcal{R}_\infty|_{\widehat{A_s^i}} = \Delta_{\widehat{A_s^i}}$.

En efecto, supongamos por reducción al absurdo que existen x y $x' \in \widehat{A_s^i}$ que están \mathcal{R}_∞ -relacionados, i.e. ambas pertenecen al subgrafo conexo $\mathcal{R}_\infty[x]$. Observemos que $\mathcal{R}[x]$ es un árbol, y por lo tanto $\mathcal{R}_\infty[x]$ es convexo, es decir, el único camino que une x con x' está contenido en $\mathcal{R}_\infty[x]$. Supongamos que $\tau_g(x) = x'$ para cierto $g \in \mathbb{Z}^2$. Entonces

$$\tau_s(x') = \tau_s(\tau_g(x)) = \tau_g(\tau_s(x)), \quad (5.13)$$

debido a la conmutatividad de \mathbb{Z}^2 . Luego

$$d(\tau_s(x), \tau_s(x')) \leq \text{long}_s(g).$$

Dado que $\mathcal{R}[x]$ es un árbol, implica que $\tau_s(x)$ y $\tau_s(x')$ pertenecen también al convexo $\mathcal{R}_\infty[x]$, cosa que es absurda. En consecuencia $\mathcal{R}|_{\widehat{A_s^i \cup B_s^i}} = \Delta_{\widehat{A_s^i \cup B_s^i}}$, con lo que es evidente que \mathcal{R}_∞ es transversa a \mathcal{R}_s^i .

\mathcal{R} es afable. Reindiquemos la familia finita $\{\mathcal{R}_s^i\}$ como $\{\mathcal{R}_i\}_{i=1}^n$. Aplicando el teorema 5.40 deducimos que $\mathcal{R}_\infty \vee \mathcal{R}_1$ es afable. Además, las clases de $\mathcal{R}_\infty \vee \mathcal{R}_1$ siguen siendo conexas, por lo que podemos aplicar los razonamientos anteriores y concluir que \mathcal{R}_2 es transversa a $\mathcal{R}_\infty \vee \mathcal{R}_1$ y volver a aplicar el teorema. En un número finito de pasos probamos que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\infty \vee \mathcal{R}_1 \vee \mathcal{R}_2 \vee \dots \vee \mathcal{R}_n$ es afable. \square

De hecho la demostración anterior prueba algo más: tenemos un homeomorfismo $h_i : X \rightarrow X$ tal que $h_i \times h_i(\mathcal{R}_\infty \vee \mathcal{R}_1 \vee \dots \vee \mathcal{R}_{i-1}) = \mathcal{R}_\infty \vee \mathcal{R}_1 \vee \dots \vee \mathcal{R}_i$. Por lo tanto la composición de todos estos homeomorfismos $h = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_n$ cumple que $h(\mathcal{R}_\infty) = \mathcal{R}$, es decir:

Teorema 5.42. *La relación \mathcal{R}_∞ es orbitalmente equivalente a la relación \mathcal{R} .*

La prueba del teorema 5.41 funciona sin modificación para grupos abelianos, ya que éstos son de crecimiento polinomial y (5.13) sigue siendo válida para ellos.

Límites inversos

Dada la circunferencia $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ y la aplicación $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $f(z) = z^2$, consideremos el sistema proyectivo $\mathbb{S}^1 \xleftarrow{f} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{f} \mathbb{S}^1 \dots$ y su límite inverso

$$X = \varprojlim(\mathbb{S}^1, f) = \{(z_k) \in \prod_{k \geq 0} \mathbb{S}^1 \mid z_k^2 = z_{k-1}\}.$$

Se trata de un fibrado localmente trivial de base \mathbb{S}^1 , cuya fibra es homeomorfa al conjunto de Cantor, dotado de una laminación minimal transversa a las fibras definida por una acción libre de \mathbb{R} . Este procedimiento se puede generalizar sustituyendo \mathbb{S}^1 por variedades compactas de dimensión p y f por submersiones entre ellas. En todos estos casos, se sigue obteniendo un fibrado foliado cuya fibra es homeomorfa al conjunto de Cantor (véase §11.3.A de [CnC]).

En [Wil], R.F. Williams utiliza los límites inversos para modelar los atractores expansivos de difeomorfismos de variedades. En este contexto, se obtiene una inmersión expansiva $f : M \rightarrow M$ de una variedad ramificada M de manera que $X = \varprojlim(M, f)$ posee una estructura natural de espacio foliado. Además f induce una aplicación sobre X que conserva la foliación. Por su parte, J. Bellisard, R. Benedetti y J.-M. Gambaudo prueban en [BBG] que las envolturas de los mosaicos aperiódicos y repetitivos del plano son límites inversos de superficies ramificadas planas. Usando el proceso de inflación, que ya hemos comentado antes, R. Benedetti y J.-M. Gambaudo extienden este resultado a G -solenoides (i.e. laminaciones transversalmente Cantor minimales y sin holonomía definidas por una acción libre de un grupo de Lie G) en [BG].

La existencia de descomposiciones simpliciales muestra la similitud del caso general con el caso de los mosaicos, lo que nos permitirá dotar fácilmente de una estructura de límite inverso a cualquier laminación de clase C^1 transversalmente Cantor, minimal y sin holonomía (M, \mathcal{L}) . De hecho, si dotamos al espacio ambiente M de la topología de las hojas, entonces M se convierte en una variedad de dimensión $p = \dim \mathcal{L}$, cuyas componentes conexas son las hojas de \mathcal{L} , y podremos dotarla de una triangulación por el procedimiento habitual. Fijada una métrica de Riemann g a lo largo de las hojas, la continuidad transversa de g nos permitirá asegurar que los simples principales se agrupan en cajas simpliciales, es decir,

subconjuntos compactos foliados en producto cuyas placas son símlices principales de la triangulación. De esta manera, obtenemos una descomposición \mathcal{B} de M en cajas simpliciales que define simultáneamente triangulaciones sobre todas las hojas. Se trata de la primera etapa de la prueba del teorema principal de este capítulo:

Teorema 6.20. *Cualquier laminación compacta de clase C^1 y dimensión p , transversalmente 0-dimensional, minimal y sin holonomía es límite inverso de variedades ramificadas de dimensión p .*

El carácter minimal y la trivialidad de la holonomía de \mathcal{F} harán posible abordar la segunda etapa de la prueba que consistirá simplemente en extender el proceso de inflación descrito en el caso de grafos (como adaptación del proceso clásico para mosaicos, véanse [BBG] y [BG]). Obtendremos entonces una sucesión de descomposiciones en cajas simpliciales $\mathcal{B}^{(n)}$ tal que $\mathcal{B}^{(n)}$ se obtiene por inflación a partir de $\mathcal{B}^{(n-1)}$ y $\mathcal{B}^{(1)} = \mathcal{B}$. Para terminar, el colapso de cada caja de $\mathcal{B}^{(n)}$ a una placa proporcionará una variedad ramificada S_n de dimensión p . Además, el proceso de inflación definirá una inmersión celular $f_n : S_n \rightarrow S_{n-1}$. En esta situación, resultará fácil probar que $M = \varprojlim (S_n, f_n)$.

6.1. Descomposiciones simpliciales

Vamos a empezar afinando la definición 5.15 antes de enunciar el resultado fundamental de la primera etapa de la prueba.

Definición 6.1. Sea (M, \mathcal{L}) una laminación de dimensión p modelada transversalmente por un espacio localmente compacto, metrizable y separable 0-dimensional Z . Una familia de cartas locales $\mathcal{B} = \{\varphi_i : B_i \rightarrow P_i \times C_i\}_{i \in I}$ es una *descomposición por cajas* de M si

- D0. B_i es un compacto y C_i es un abierto cerrado de Z .
- D1. $M = \bigcup_{i \in I} B_i$.
- D2. $B_i \cap B_j = \partial_{\text{h}} B_i \cap \partial_{\text{h}} B_j$ siempre que $i \neq j$.
- D3. Cada B_i -placa corta a lo sumo a una B_j -placa para cada $i, j \in I$.
- D4. El cambio de coordenadas se escribe como

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{B_i \cap B_j}(x_j, y_j) = (\alpha_{ij}(x_j), \sigma_{ij}(y_j)). \quad (6.1)$$

Es decir, B_i y $B_j \in \mathcal{B}$ se intersecan a lo largo de abiertos y cerrados en las respectivas transversales: para cada $x \in \partial P_j$, $p_2 \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_j^{-1}(\{x\} \times C_j) \cap B_i)$ es abierto y cerrado en C_i , siendo $p_2 : P_i \times C_i \rightarrow C_i$ la segunda proyección coordenada.

Si las placas de \mathcal{B} son p -símlices, la intersección de dos se reduce a una cara común y las aplicaciones α_{ij} son biyecciones afines. En tal caso diremos que \mathcal{B} es una *descomposición por cajas simpliciales* (o una *descomposición simplicial*) de (M, \mathcal{L}) .

Ejemplo 6.2. Sea $\rho : \pi_1(B) \rightarrow \text{Homeo}(Z)$ una representación del grupo fundamental de una variedad B como grupo de transformaciones de Z . La laminación que se obtiene mediante la suspensión de ρ admite una descomposición simplicial. En efecto, sea \mathcal{T} una triangulación de B . Denotemos por $\widetilde{\mathcal{T}}$ la triangulación inducida sobre la cubierta universal \widetilde{B} de B . La descomposición simplicial de la laminación horizontal $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\Delta \times Z \mid \Delta \in \widetilde{\mathcal{T}}\}$ es invariante por la acción diagonal, luego pasa al cociente en una descomposición simplicial \mathcal{B} de la suspensión.

Como ya hemos comentado, nuestro propósito es demostrar el siguiente resultado, que extiende a las laminaciones transversalmente 0-dimensionales de clase C^1 el teorema de existencia de triangulaciones sobre las variedades diferenciables de clase C^1 :

Teorema 6.3 (de existencia de descomposiciones simpliciales). *Cualquier laminación de clase C^1 modelada transversalmente por un espacio 0-dimensional posee una descomposición simplicial.*

Supongamos que la laminación (M, \mathcal{L}) está dotada de un buen atlas foliado \mathcal{A} de clase C^1 formado por cartas locales $\varphi_i : U_i \rightarrow P_i \times X_i$. Aplicando la proposición 1.11, podemos suponer que las placas de \mathcal{A} son bolas geodésicas de radio fijo $r < \frac{1}{8} \text{conv}(\mathcal{L})$ respecto de una métrica de Riemann completa g a lo largo de las hojas, lo que nos garantiza que son conjuntos geodésicamente convexos. De hecho, si llamamos *estrella de un punto $x \in M$ relativa a \mathcal{A}* a la unión $\text{Star}(x, \mathcal{A})$ de las placas de \mathcal{A} que contienen a x , entonces $\text{Star}(x, \mathcal{A})$ está contenido en un conjunto convexo para cada $x \in M$, según la observación 1.12. Sea \mathcal{U} el recubrimiento subyacente formado por los abiertos distinguidos U_i donde $1 \leq i \leq n$.

Si dotamos a M de la topología de las hojas, más fina que la topología de partida, M se convierte en una variedad \mathcal{M} de dimensión $p = \dim \mathcal{L}$ y clase C^1 cuyas componentes conexas son las hojas de \mathcal{L} . Esta variedad \mathcal{M} está dotada de la métrica de Riemann g fijada antes. Podemos triangularla siguiendo el procedimiento clásico:

1. *Construcción del nervio del atlas:* Sea \mathcal{V} el recubrimiento abierto de \mathcal{M} formado por las placas de \mathcal{A} , indicado por J , que constituye un refinamiento de \mathcal{U} . El nervio $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ del recubrimiento \mathcal{V} es un complejo simplicial que contiene información combinatoria de dicho recubrimiento. Dada una sucesión finita de índices $j_0 < j_1 < \dots < j_k$, el k -símplice abstracto $[j_0, j_1, \dots, j_k]$ pertenece a $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ si y sólo si las placas correspondientes verifican $P_{j_1} \cap \dots \cap P_{j_k} \neq \emptyset$. Este complejo $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ está bien definido, ya que la l -ésima cara $[j_0, j_1, \dots, \widehat{j_l}, \dots, j_k]$ de $[j_0, j_1, \dots, j_k]$ pertenece a $\mathcal{N}(\mathcal{V})$.

2. *Construcción de una proyección de $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ sobre \mathcal{M} :* La métrica de Riemann g define una aplicación $\Pi : \mathcal{N}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{M}$ que permitirá transportar la triangulación. En efecto, a cada placa $P_j \in \mathcal{V}$ contenida en un abierto distinguido $U_i \in \mathcal{U}$, le asociamos su centro $\Pi([j]) = p_j = \varphi_i(0, y)$ siendo y la coordenada transversa de la placa. Para cada 1-símplice $[j_1, j_2]$, sabemos que $\Pi([j_1]) = p_{j_1}$ y $\Pi([j_2]) = p_{j_2}$ están unidos por una única geodésica minimizante $\gamma_{j_1 j_2} : [0, 1] \rightarrow X$ parametrizada proporcionalmente

a la longitud de arco. Para cada $t \in [j_1, j_2]$ se define $\Pi(t) = \gamma_{j_1 j_2}(x)$. Se continúa inductivamente, suponiendo que tenemos definida Π para los $(k-1)$ -símplices. Sea x un punto de coordenadas baricéntricas (t_0, \dots, t_k) de un n -símplice $\Delta = [j_0, j_1, \dots, j_k]$. Si x pertenece a alguna cara de Δ , su imagen $\Pi(x)$ ya está definida. Si no es así, hay una única recta que une $j_0 = (0, 0, \dots, 0)$ con x . Dicha recta cortará a la cara $[j_1, j_2, \dots, j_k]$ en $y = (0, t_1/(1-t_0), t_2/(1-t_0), \dots, t_n/(1-t_0))$. El punto $\Pi(y)$ pertenece al conjunto $\text{Star}(\Pi(j_0), \mathcal{A})$, por lo que existe una única geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = \Pi(j_0)$ y $\gamma(1) = \Pi(y)$. En esta situación, definimos $\Pi(x) = \gamma(1-t_0)$. Luego $\Pi : \mathcal{N}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{M}$ es una aplicación sobreyectiva y continua.

3. *Construcción de una triangulación de \mathcal{M}* : La imagen de los p -símplices de $\mathcal{N}(V)$ produce una familia de símplices de \mathcal{M} , pero en general estos símplices no se intersecan cara a cara, sino que lo hacen a lo largo de polítopos geodésicamente convexos. En cualquier caso, obtenemos una descomposición de (cada componente conexa de) \mathcal{M} en polítopos geodésicamente convexos. Por un procedimiento similar a la subdivisión baricéntrica (véase [BH]), es posible triangular de manera coherente estos polítopos. Luego tenemos una triangulación \mathcal{K} de la variedad \mathcal{M} .

En el caso boreliano descrito en [BH], las triangulaciones \mathcal{K}_L inducidas por la triangulación \mathcal{K} sobre las hojas $L \in \mathcal{L}$ varían de manera boreliana (en el sentido de que los centros de gravedad de los p -símplices de \mathcal{K} forman una transversal boreliana con la que \mathcal{K} se identifica). Ahora es fácil construir una descomposición en cajas simpliciales, llamadas *pilas simpliciales* en [BH], que generan la triangulación \mathcal{K} de (M, \mathcal{L}) . En nuestro caso, la continuidad transversa de g mostrará también que las triangulaciones \mathcal{K}_L varían de manera continua, aunque tendremos que refinar algunos aspectos de esta construcción para garantizar que los símplices principales de \mathcal{K} se apilan en cajas simpliciales.

6.1.1. Existencia de un atlas adaptado

Si queremos que las triangulaciones \mathcal{K}_L varíen de manera continua, hemos de evitar que placas disjuntas contenidas en dos abiertos distinguidos puedan cortarse de repente al desplazarlas transversalmente. Con ese propósito refinamos los buenos atlas proporcionados por la proposición 1.11 y la observación 1.12).

Lema 6.4. *Dada una laminación \mathcal{L} de un espacio compacto M dotado de una métrica de Riemann g completa sobre las hojas, existe un buen atlas foliado \mathcal{A} tal que*

- A1. *para cada punto $x \in M$, la estrella $\text{Star}(x, \mathcal{A})$ está contenida en un convexo geodésico;*
- A2. *las placas se intersecan dos a dos de manera transversa.*

Demostración. Para probar este resultado, partiendo de un buen atlas foliado $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow P_i \times X_{i=1}^n\}$ cuyas placas sean bolas geodésicas de radio $r < \frac{1}{8} \text{conv}(\mathcal{L})$ (véase la proposición 1.11 junto con la observación 1.12), usaremos el método descrito por A. Phillips y D. Sullivan en la demostración de la proposición 4.1 de [PS]. La idea consiste simplemente en eliminar los puntos de tangencia sustituyendo

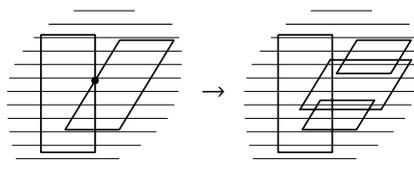


Figura 6.1.

Se reemplaza un paquete de placas por otro de placas de mayores, eliminando la tangencia.

las placas por otras mayores (véase la figura 6.1). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que \mathcal{A} es un refinamiento de un atlas del mismo tipo, es decir, para cada $1 \leq i \leq n$, existe una carta foliada $\varphi'_i : U'_i \rightarrow P'_i \times X'_i$ tal que $\overline{U}_i \subset U'_i$, $\varphi'_i|_{U_i} = \varphi_i$, $\overline{X}_i \subset X'_i$, y P'_i es un disco concéntrico a P_i de radio $2r$. Puesto que el atlas \mathcal{A} satisface la condición (A1), deberemos modificar por recurrencia los abiertos distinguidos U_i hasta lograr que cumplan la condición (A2). Evidentemente el atlas parcial $\mathcal{A}_1 = \{U_1\}$ satisface ambas condiciones. Supongamos pues que hay un atlas foliado $\mathcal{A}_{k-1} = \{A_1, \dots, A_l\}$ con las propiedades del enunciado y que cubre el conjunto $\bigcup_{i=1}^{k-1} U_i$. Veamos que existe un atlas que cumple esos mismos requisitos anteriores y que cubre al conjunto $\bigcup_{i=1}^k U_i$.

Para cada $y \in X_k$, se tienen dos posibilidades:

- i) el borde de la placa de U_k que pasa por y interseca de forma transversa a los bordes de las restantes placas de \mathcal{A}_{k-1} ,
- ii) hay una placa de \mathcal{A}_{k-1} cuyo borde interseca de manera tangente al de la placa que pasa por y .

En el primer caso definimos $P^y = P_k$. En el segundo podemos encontrar un número real $r < r' < 2r$ tal que el borde del disco de radio r' (contenido en $P'_k \times \{y\}$) interseque de manera transversa a los bordes de las placas de \mathcal{A}_{k-1} . Definimos entonces como P^y dicho disco.

En cualquier caso, para cada $y \in X_k$, tenemos un disco $P^y \times \{y\}$ cuyo borde interseca transversalmente al de las placas de \mathcal{A}_{k-1} . Ahora fijemos un entorno $C_y \subset \overline{C}_y \subset X'_k$ de y tal que los bordes de los discos $P^y \times \{z\}$ intersecan transversalmente a los bordes de las placas de \mathcal{A}_k para cada $z \in C_y$. Como \overline{X}_k es compacto, podemos recubrirlo con un número finito de abiertos C_y . Los denotaremos por $C_{y_1}, C_{y_2}, \dots, C_{y_m}$. Tenemos entonces la familia de abiertos foliados en producto $A_{l+i} = \varphi'^{-1}_k(P^{y_i} \times C_{y_i})$, con $i = 1, 2, \dots, m$. Observemos que los bordes de las placas de estos abiertos se pueden intersecar tangencialmente entre ellas. Si esto ocurriese es porque $P^{y_i} = P^{y_j}$ y $C_{y_i} \cap C_{y_j} \neq \emptyset$ para $i \neq j$. Pero en este caso podríamos sustituir A_i y A_j por $A_i \cup A_j$. Por lo tanto, el atlas foliado $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_{k-1} \cup \{A_{l+1}, A_{l+2}, \dots, A_{l+m}\}$ cubre $\bigcup_{i=0}^k U_i$ y la intersección de los bordes de sus placas es siempre transversa. Como las placas están contenidas en bolas geodésicas de radio $2r$, entonces cualquier estrella $\text{Star}(x, \mathcal{A}_k)$

está contenido en una bola geodésica de radio $\leq 8r < \text{conv}(\mathcal{L})$. Luego en un número finito de pasos obtenemos el atlas buscado. \square

Si en la prueba anterior tomamos bolas de radio $r < \frac{1}{16} \text{conv}(\mathcal{L})$, entonces podemos reemplazar la condición (A1) por

A1'. para cada punto $x \in M$, el conjunto $\text{Star}(\text{Star}(x, \mathcal{A}), \mathcal{A})$ está contenido en un convexo geodésico.

Si (M, \mathcal{L}) es transversalmente 0-dimensional, entonces las transversales X_i pueden aproximarse por abiertos compactos disjuntos. Si dividimos los abiertos distinguidos de \mathcal{A} mediante la descomposición de sus transversales, obtendremos un nuevo atlas foliado, al que seguiremos denotando \mathcal{A} y que además de las propiedades (A1) y (A2) posee transversales compactas. Si U_i y U_j son dos abiertos distinguidos con intersección no vacía, entonces el dominio y el rango de la transformación de holonomía σ_{ij} que les corresponde es un abierto compacto. En resumen, hemos probado:

Lema 6.5. *Dada una laminación \mathcal{L} modelada transversalmente por un espacio 0-dimensional sobre un espacio compacto M , dotada de una métrica de Riemann g completa sobre las hojas, existe un buen atlas foliado \mathcal{A} para \mathcal{L} tal que*

A1'. *para cada punto $x \in M$, el conjunto $\text{Star}(\text{Star}(x, \mathcal{A}), \mathcal{A})$ está contenido en un convexo geodésico;*

A2'. *las transversales locales son espacios compactos y;*

A3'. *los dominios de las transformaciones de holonomía entre dos abiertos de \mathcal{A} son abiertos y compactos en las transversales locales.*

En las condiciones de cualquiera de los dos lemas anteriores, diremos que \mathcal{A} es un atlas foliado de (M, \mathcal{L}) adaptado a g .

6.1.2. Nervio foliado de un atlas foliado

Intuitivamente el nervio foliado de un atlas foliado \mathcal{A} es la reunión de los nervios de los recubrimientos por placas de las hojas, o si se quiere de las distintas componentes conexas del nervio $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ del recubrimiento \mathcal{V} de M . En el caso de laminaciones modeladas transversalmente por espacios 0-dimensionales y de atlas adaptados, esta descomposición proviene de un espacio foliado por conjuntos simpliciales $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$, en el que las hojas corresponden a los nervios de las hojas del espacio foliado. En este caso la aplicación $\Pi : \mathcal{N}(\mathcal{V}) \rightarrow M$ corresponde en realidad a una aplicación foliada $\Pi_{\mathcal{L}} : \mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \rightarrow M$. Para definir los espacios foliados por complejos simpliciales basta adaptar la definición 1.18 sustituyendo cada grafo por un complejo simplicial:

Definición 6.6. Sea X un espacio localmente compacto, metrizable y separable. Llamamos *atlas foliado* de un espacio localmente compacto, metrizable y separable X a una familia \mathcal{A} de cartas locales $\varphi_i : U_i \rightarrow P_i \times X_i$ que satisfacen:

1. P_i es un complejo simplicial finito;
2. X_i es un abierto de X ;
3. si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, el cambio de coordenadas se escribe como

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x_i, y_i) = (\alpha_{ij}(x_i, y_i), \sigma_{ij}(y_i)),$$

siendo $\alpha_{ij}(\cdot, y_i)$ un isomorfismo simplicial entre subcomplejos de P_i y P_j .

Las placas $\varphi_i^{-1}(P_i \times \{*\})$ definen una descomposición de \mathfrak{X} en complejos simpliciales conexos, denominada *foliación por complejos simpliciales*.

Como en el caso de espacios foliados por grafos, la estructura simplicial se mantiene localmente. En ese caso, esto significa que la función de valencia es continua. Ahora, si X denota el conjunto de vértices, entonces \mathfrak{X} admite un atlas foliado formado por estrellas $\text{Star}(X_i)$ de abiertos X_i de X . Además es fácil probar un resultado análogo a la proposición 1.20 o construir su pseudogrupo o su grupoide de holonomía como en §1.3.

Definición 6.7. Sea $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow P_i \times X_i\}_{i=1}^n$ un atlas de (M, \mathcal{L}) adaptado a g . Denotemos por σ_{ij} la transformación de holonomía asociada a los abiertos distinguidos U_i y U_j . Definimos el *nervio foliado de \mathcal{A}* , que denotaremos por $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$, describiendo sus subconjuntos foliados en producto:

$$[i_0, i_1, \dots, i_k] \times X \subset \mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \iff \bigcap_{l=0}^k U_{i_l} \neq \emptyset \text{ y } X \subset \bigcap_{l=0}^k \text{dom } \sigma_{i_0 i_l}, \quad (6.2)$$

con $i_0 < i_1 < \dots < i_k$. En particular, $[i_0, i_1, \dots, i_k]$ pertenece al nervio $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ del recubrimiento subyacente \mathcal{U} en sentido clásico. De manera equivalente, para cada punto $y \in X$, $[i_0, i_1, \dots, i_k] \times \{y\}$ pertenece al nervio $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ del recubrimiento por placas \mathcal{V} de M . Dotaremos a $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ de la topología débil de manera que $A \subset \mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ es abierto si y sólo si $A \cap ([i_0, i_1, \dots, i_k] \times X)$ es un abierto para cada sucesión finita $i_0 < i_1 < \dots < i_k$ y cada abierto X de $\bigcap_{l=0}^k \text{dom } \sigma_{i_0 i_l}$.

Lema 6.8. Si las transversales locales X_i y los dominios de las transformaciones de holonomía σ_{ij} son compactos, entonces $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ es un espacio foliado por complejos simpliciales.

Demostración. Para cada símlice $\Delta = [i_0, i_1, \dots, i_k] \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$, consideremos el conjunto $\Delta \times X_{\Delta} \subset \mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ asociado al abierto $X_{\Delta} = \bigcap_{j=0}^k \text{dom } \sigma_{i_0 i_j}$ de X_{i_0} . Por hipótesis, X_{Δ} es también compacto. Para comprobar que las cajas $\Delta \times X_{\Delta}$ forman una descomposición en cajas simpliciales basta ver que la estructura simplicial se mantiene en un entorno de los vértices. Fijemos pues un vértice x perteneciente al conjunto $[i] \times X_i$ y a la caja $\Delta \times X_{\Delta}$. En lo que sigue identificaremos cada conjunto de vértices $[i] \times X_i$ con X_i . Ahora X_i interseca a la caja $\Delta \times X_{\Delta}$ en el conjunto

$$X_{\Delta}^x = X_i \cap (\Delta \times X_{\Delta}) = \sigma_{i_0 i}(X_{\Delta} \cap \text{dom } \sigma_{i_0 i})$$

Para cada punto $y \in X_{\Delta}^x$, el símplex $\Delta \times \{y\}$ pertenece a la estrella $\text{Star}(y, \mathcal{A})$. Por lo tanto, si tomamos la intersección $\bigcap_{\Delta \in \text{Star}(x, \mathcal{A})} X_{\Delta}^x$, aseguramos que

$$\text{Star}(x, \mathcal{A}) \times \{y\} \subset \text{Star}(y, \mathcal{A})$$

para cada punto $y \in \bigcap_{\Delta \in \text{Star}(x, \mathcal{A})} X_{\Delta}^x$. Ahora bien, no podemos asegurar que estas estrellas no contengan nuevos símplexes. Para solucionar este problema bastará con reducir el entorno de x tomando

$$X_x = \bigcap_{\Delta \in \text{Star}(x, \mathcal{A})} X_{\Delta}^x - \bigcup_{\Delta \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) - \text{Star}(x, \mathcal{A})} X_{\Delta}^x.$$

Como el recubrimiento \mathcal{U} es finito, el número de símplexes de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es finito y en consecuencia X_x es un conjunto compacto y abierto en X_i . Ahora, para cada punto $y \in X_x$ tenemos que $\text{Star}(y, \mathcal{A}) = \text{Star}(x, \mathcal{A}) \times \{y\}$, con lo que queda probado el lema. \square

Observación 6.9. Si dotamos a $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ de la topología de las hojas, recuperamos el nervio $\mathcal{N}(\mathcal{V})$.

6.1.3. Del nervio foliado a la laminación

Según hemos recordado, la métrica de Riemann g permite definir una aplicación sobreyectiva y continua $\Pi : \mathcal{N}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{M}$. Nuestro propósito es mostrar que aquella aplicación proviene realmente de una aplicación sobreyectiva y continua $\Pi_{\mathcal{L}} : \mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \rightarrow M$ cuando se sustituye las topologías de ambos espacios foliados por las topologías más finas de las hojas. Aunque la definición de ambas aplicaciones es por consiguiente la misma, puede resultar conveniente explicitar la construcción y fijar la notación:

0-símplexes: Para cada vértice $[i] \times \{y\} \in [i] \times X_i$, se define $\Pi_{\mathcal{L}}([i] \times \{y\}) = x$, donde el centro $x = \varphi_i^{-1}(0, y) \in M$ de la placa $\varphi^{-1}(P_i \times \{y\})$ puede identificarse con el punto $y \in X_i$ realizando X_i como subespacio cerrado de M . Obviamente $\Pi_{\mathcal{L}}$ es continua en restricción al 0-esqueleto de $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$.

1-símplexes: Consideremos un punto (s, y) del símplex $[i, j] \times \{y\} \subset [i, j] \times \text{dom } \sigma_{ij}$ con $i < j$. Las propiedades de \mathcal{A} nos dicen que las imágenes por $\Pi_{\mathcal{L}}$ de $[i] \times \{y\}$ y $[j] \times \{\sigma_{ij}(y)\}$ están contenidas en un convexo geodésico, ya que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Luego existe una única geodésica minimizante parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco $\gamma_{ij}^y : [0, 1] \rightarrow M$ que une el punto $\Pi_{\mathcal{L}}([i] \times \{y\})$ con $\Pi_{\mathcal{L}}([j] \times \{\sigma_{ij}(y)\})$. Definimos entonces $\Pi_{\mathcal{L}}(s, x) = \gamma_{ij}^y(1 - t_0(s)) = \gamma_{ij}^x(t_1(s))$, siendo $t_i(s)$ es la i -ésima coordenada baricéntrica de s . Obviamente $\Pi_{\mathcal{L}}$ está bien definida y es continua sobre el 1-esqueleto de $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$.

k-símplexes: Supongamos que $\Pi_{\mathcal{L}}$ está definida sobre los $(k-1)$ -símplexes de manera continua. Consideremos un k -símplex $\Delta \times \{y\} = [i_0, i_1, \dots, i_k] \times \{y\} \subset \Delta \times X_{\Delta}$ con $i_0 < i_1 < \dots < i_k$ y un punto $(s, y) \neq [i_0] \times \{y\}$. Fijemos la única recta que une el origen

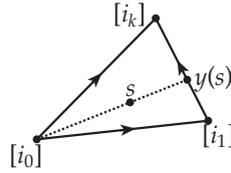


Figura 6.2.
El punto $y(s)$.

$[i_0]$ con s en Δ . Esta recta corta a la 0-ésima cara $\partial_0\Delta = [i_1, i_2, \dots, i_k]$ de Δ en un único punto $y(s)$. En coordenadas baricéntricas tendremos que

$$y(s) = \left(0, \frac{t_1(s)}{1 - t_0(s)}, \frac{t_2(s)}{1 - t_0(s)}, \dots, \frac{t_k(s)}{1 - t_0(s)}\right),$$

siendo $t_i(s)$ la i -ésima coordenada baricéntrica de s . Puesto $y(s) \times \{\sigma_{i_0 i_1}(x)\}$ pertenece al $(k-1)$ -símplice $\partial_0\Delta \times \{\sigma_{i_0 i_1}(x)\} \subset \partial_0\Delta \times \bigcap_{l=1}^k \text{dom } \sigma_{i_0 i_l}$, conocemos $\Pi_{\mathcal{L}}(y(s) \times \{\sigma_{i_0 i_1}(y)\})$. Como las placas de los abiertos coordenados U_0, U_1, \dots, U_k se intersecan en la hoja que pasa por y (véase (6.2)), están contenidas en un convexo geodésico. Luego existe una única geodésica minimizante $\gamma_{i_0, \dots, i_k}^y : [0, 1] \rightarrow M$ que une $\Pi_{\mathcal{L}}([i_0] \times \{y\})$ con $\Pi_{\mathcal{L}}(y(s) \times \{\sigma_{i_0 i_1}(y)\})$. Definimos $\Pi_{\mathcal{L}}(s, y) = \gamma_{i_0, \dots, i_k}^x(1 - t_0(s))$. De nuevo, por construcción, la aplicación $\Pi_{\mathcal{L}}$ está bien definida y es continua sobre sobre el k -esqueleto de $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$.

Por recurrencia, en un número finito de pasos, obtendremos una aplicación continua $\Pi_{\mathcal{L}} : \mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \rightarrow M$. Resulta obvio que si dotamos a $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ y M de la topologías de las hojas, la aplicación $\Pi_{\mathcal{L}}$ coincide con la aplicación continua $\Pi : \mathcal{N}(\mathcal{V}) \rightarrow M$. Esto nos garantiza que la aplicación $\Pi_{\mathcal{L}}$ es sobreyectiva (por serlo Π) y foliada (en el sentido de que lleva hojas en hojas). De hecho, el espacio M está recubierto por las imágenes de los símlices de dimensión $p = \dim \mathcal{L}$, es decir, la aplicación $\Pi_{\mathcal{L}}$ sigue siendo sobreyectiva en restricción restringida al p -esqueleto, ya que la imagen de un símplex de dimensión $p+1$ es igual a la unión de las imágenes de sus caras propias.

6.1.4. Descomposición simplicial

El propósito de esta sección es demostrar el teorema 6.3 de existencia de descomposiciones en cajas simpliciales. La prueba se hará en tres etapas:

i) En la primera etapa, observaremos que las imágenes de algunos símlices de $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ pueden ser degeneradas, aunque una pequeña modificación en la elección de los centros de las placas nos permitirá demostrar el siguiente lema:

Lema 6.10. *La aplicación $\Pi : \mathcal{N}(\mathcal{V}) \rightarrow M$ es inyectiva en restricción a cada p -símplex y por consiguiente la imagen por $\Pi_{\mathcal{L}}$ de cada caja simplicial $\Delta \times X_{\Delta}$ de $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ es una caja simplicial de M .*

ii) Como consecuencia del lema anterior, el espacio M es recubierto por una familia de cajas simpliciales. Lamentablemente no se trata de una descomposición simplicial, ya que las imágenes de dos símlices pueden intersectarse en algo más que las caras. No obstante, tal y como indicamos al inicio, obtendremos descomposiciones de las hojas en politopos geodésicamente convexos. De hecho, tendremos el siguiente resultado:

Teorema 6.11. *Cualquier laminación de clase C^1 modelada transversalmente por un espacio 0-dimensional posee una descomposición en cajas con placas geodésicamente convexas.*

iii) La última etapa consiste justamente en la prueba del teorema 6.3 de existencia de descomposiciones simpliciales. Dada una descomposición por cajas cuyas placas sean politopos geodésicamente convexos, basta considerar sus centros de gravedad, que forman una transversal completa, y unirlos con las caras de cada uno de los politopos para descomponer cada caja en una unión finita de cajas simpliciales.

Demostración del lema 6.10. Consideremos una caja $\Delta \times X_\Delta \subset \mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ siendo $\Delta = [i_0, i_1, \dots, i_p]$ un p -símplice de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$. La proyección $\Pi_{\mathcal{L}} : \Delta \times X_\Delta \rightarrow M$ se levanta en una aplicación afín $\Upsilon : \Delta \times X_\Delta \rightarrow T(\mathcal{L})$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Delta \times T_\Delta & \xrightarrow{\Upsilon} & T(\mathcal{L}) \\ & \searrow \Pi_{\mathcal{L}} & \downarrow \text{exp} \\ & & M \end{array}$$

En efecto, puesto el conjunto $\text{Star}(x, \mathcal{A})$ está contenido en una bola geodésica de radio suficientemente pequeño, podemos definir

$$\Upsilon([i_l] \times \{x\}) = \exp^{-1}(\Pi_{\mathcal{L}}([i_l] \times \{x\})) \in T_x(L_x)$$

para cada $l = 0, 1, \dots, p$. En particular, $\Upsilon([i_0] \times \{x\}) = \mathbf{0}$ y las rectas que lo unen con los vectores $\Upsilon([i_l] \times \{x\})$ son enviadas por \exp sobre las geodésicas correspondientes. El conjunto $\Upsilon(\Delta \times \{x\})$ es el cierre convexo de las imágenes por Υ de los vértices de $\Delta \times \{x\}$. En general, no se trata de un p -símplice, ya que esto sólo ocurre si las aplicaciones Υ y $\Pi_{\mathcal{L}}$ son inyectivas. Llamemos B_Δ como el conjunto de los punto $x \in X_\Delta$ tales que Υ (o de manera equivalente $\Pi_{\mathcal{L}}$) no es inyectiva sobre $\Delta \times \{x\}$. Para concluir, nos basta modificar X_Δ hasta conseguir que $B_\Delta = \emptyset$.

Observemos en primer lugar que el conjunto B_Δ es compacto y fijemos un punto $x \in B_\Delta$. La propiedad (A1') nos dice que podemos tomar un pequeño entorno abierto y cerrado $X_x \subset X_{i_0}$ de x que se puede realizar como transversal local de un compacto foliado en producto (homeomorfo a $P_x \times X_x$) y verifica que

$$\Pi_{\mathcal{L}}(\text{Star}(\text{Star}([i_0] \times \{y\}, \mathcal{A}), \mathcal{A})) \subset P_x \times \{y\}$$

para cada $y \in X_x$. También podemos suponer que la estructura simplicial se mantiene, en el sentido de que $\text{Star}(y, \mathcal{A}) = \text{Star}(x, \mathcal{A})$ para cualquier $y \in X_x$.

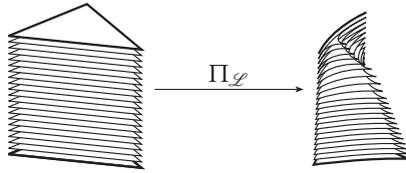


Figura 6.3.

En la caja de la figura, la tapa superior no cumple la propiedad (P).

Por otra parte, dados los puntos $\Pi_{\mathcal{L}}([i_l] \times \{x\}) = \sigma_{i_0, i_l}(x)$ con $l = 1, \dots, p$, podemos encontrar nuevos puntos x'_1, \dots, x'_p , tan cercanos a los anteriores como queramos, tales que

(P) las imágenes recíprocas por la aplicación exponencial \exp forman una base de $T_x(L_x)$.

Luego el cierre convexo de la familia formada por estos vectores y el vector $\mathbf{0}$ es un p -símplice. De hecho, podemos hacerlo sin necesidad de modificar aquellos puntos que ya satisfacen la condición (P). De manera precisas, si un símplice $\Delta' \times \{x'\}$ interseca a $\Delta \times \{x\}$ y verifica $x' \notin B_{\Delta'}$, entonces los vectores $\Upsilon([i'_0] \times \{x'\}), \dots, \Upsilon([i'_k] \times \{x'\})$ correspondientes a los vértices comunes $[i'_0] \times \{x'\}, \dots, [i'_k] \times \{x'\}$ serán linealmente independientes y se podrán completar en una base de $T_x(L_x)$ añadiendo simplemente los vectores $\exp^{-1}(x'_{k+1}), \dots, \exp^{-1}(x'_p)$. Siempre podremos suponer que estos puntos x'_{k+1}, \dots, x'_p pertenecen a la placa P_x .

Para concluir hemos de ver que esta situación se mantiene en un entorno de x , es decir, podemos sustituir los puntos x'_l por una familia de transversales locales $X'_l \subset P_x \times X_x$ que se proyectan sobre un mismo abierto y cerrado X'_x de X_x y cuyas trazas con las placas satisfacen siempre la propiedad (P). Habida cuenta de la finitud de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ y de la compacidad de B_{Δ} , podremos reducir todos los conjuntos B_{Δ} al vacío en un número finito de pasos. \square

Demostración del teorema 6.11. Como consecuencia del lema anterior, la aplicación $\Pi_{\mathcal{L}} : \mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \rightarrow M$ permite transportar la descomposición canónica en cajas simpliciales de $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ en una descomposición de M en cajas cuyas placas son politopos geodésicamente convexos. En efecto, dadas dos cajas simpliciales $\Delta \times X_{\Delta}$ y $\Delta' \times X_{\Delta'}$ de $\mathcal{N}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ cuyas imágenes por $\Pi_{\mathcal{L}}$ se corten, el lema anterior nos permite identificar cada una de ellas con su imagen por $\Pi_{\mathcal{L}}$. Llamemos σ a la transformación de holonomía correspondiente definida sobre un abierto y cerrado $X_{\Delta \cap \Delta'}$ de X_{Δ} . La intersección de las imágenes de $\Delta \times X_{\Delta}$ y $\Delta' \times X_{\Delta'}$ no está foliada en producto, ya que el número de vértices $v(x)$ del politopo obtenido como intersección de las placas $\Pi_{\mathcal{L}}(\Delta \times \{x\})$ y $\Pi_{\mathcal{L}}(\Delta' \times \{\sigma(x)\})$ puede crecer en el entorno de un punto $x \in X_{\Delta \cap \Delta'}$. Ahora bien, usando las mismas técnicas de la prueba del lema 6.10, podemos suponer que la aplicación $v : X_{\Delta \cap \Delta'} \rightarrow \mathbb{N}$ es continua. En tal caso, las imágenes inversas de los distintos valores proporcionan una partición finita de $X_{\Delta \cap \Delta'}$ en subconjuntos

abiertos y cerrados que se pueden realizar como transversales locales de compactos foliados en producto. \square

Demostración del teorema 6.3. Según el teorema anterior, el espacio M se descompone en la unión de una familia finita de cajas cuyas placas son polítopos geodésicamente convexo. Dada cualquier caja de este tipo, podemos triangular las placas fijando una transversal local formada por sus centros de gravedad y uniendo éstos a los bordes de las placas mediante geodésicas. Logramos así descomponer la caja en una unión de cajas con placas simpliciales, aunque no nos aseguramos que los cambios de carta sean afines. Ahora bien, para ello, nos basta modificar la aplicación $\Pi_{\mathcal{L}}$ reparametrizando cada una de las nuevas cajas simpliciales. \square

6.2. Inflación y límites inversos

Nos proponemos mostrar aquí que los resultados de J. Bellissard, R. Benedetti y J.-M. Gambaudo sobre la existencia de estructuras de límite inverso para envolturas de mosaicos aperiódicos y repetitivos del plano [BBG] y G -solenoides [BG] siguen siendo válidos para cualquier laminación transversalmente Cantor, minimal y sin holonomía. En esta segunda etapa de la prueba, comenzaremos observando que el proceso de inflación descrito en estos trabajos se extiende inmediatamente a nuestra situación.

6.2.1. Inflación

Definición 6.12. Sea (M, \mathcal{L}) una laminación modelada transversalmente por un espacio localmente compacto, metrizable y separable 0-dimensional. Diremos que una descomposición por cajas \mathcal{B}' se obtiene por inflación a partir de otra descomposición \mathcal{B} si

- I1. para cada punto x perteneciente a la intersección de una caja $B \in \mathcal{B}$ y una caja $B' \in \mathcal{B}'$, la transversal local de B' que pasa por x está contenida en la transversal local de B que pasa por x ;
- I2. el borde vertical de una caja $B' \in \mathcal{B}'$ está contenido en el borde vertical de \mathcal{B} , es decir, $\partial_{\text{h}} B' \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \partial_{\text{h}} B$;
- I3. para cada caja $B' \in \mathcal{B}'$, existe una caja $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \cap B' \neq \emptyset$ y $\partial_{\text{h}} B' \cap \partial_{\text{h}} B = \emptyset$.

La condición (I1) nos dice que el cambio de coordenadas entre las cajas de \mathcal{B} y \mathcal{B}' está dado por la igualdad (6.1) de la definición 6.1. La condición (I2) implica que las \mathcal{B}' -placas son uniones de \mathcal{B} -placas. Por último, la condición (I3) garantiza que cada placa de \mathcal{B}' contiene una placa de \mathcal{B} en su interior. Repitiendo el argumento usado en el caso de espacios foliados por grafos (véase el teorema 5.22), obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.13 ([BBG],[BG]). Sea (M, \mathcal{L}) una laminación compacta transversalmente 0-dimensional, minimal y sin holonomía. Supongamos que \mathcal{B} es una descomposición por cajas de (M, \mathcal{L}) . Existe otra descomposición \mathcal{B}' que se obtiene por inflación a partir de \mathcal{B} .

Corolario 6.14. Sea (M, \mathcal{L}) una laminación compacta transversalmente 0-dimensional, minimal y sin holonomía. Supongamos que existe una descomposición por cajas \mathcal{B} de M . Existe una sucesión de descomposiciones por cajas $\{\mathcal{B}^{(n)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{B}^{(1)} = \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^{(n+1)}$ se obtiene por inflación de $\mathcal{B}^{(n)}$.

Además es posible tomar la sucesión de descomposiciones $\mathcal{B}^{(n)}$ de forma que la intersección de los ejes $\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{B \in \mathcal{B}^{(n)}} C_B$ se reduzca a un único punto.

6.2.2. Variedades ramificadas y aplicaciones celulares

Si consideramos una sucesión de descomposiciones simpliciales $\mathcal{B}^{(n)}$ de (M, \mathcal{L}) y colapsamos cada una de las cajas simpliciales en una de sus placas, obtendremos una sucesión de CW-complejos S_n con buenas propiedades. El objetivo de esta sección es recordar la definición de variedad ramificada introducida por R. F. Williams [Wil]. Intuitivamente se trata de un CW-complejo que tiene espacio tangente en todo punto como se muestra en la figura 6.4.

Definición 6.15 ([Wil]). Una *variedad ramificada* de dimensión p y clase C^r es un espacio localmente compacto, metrizable y separable K junto con

1. una familia de cerrados $\{U_i\}$ de K ;
2. una colección finita $\{D_{ij}\}$ de cerrados de U_i tales que $\bigcup D_{ij} = U_i$;
3. una aplicación $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{D}^p$,

satisfiriendo las siguientes condiciones:

- B1. $\bigcup_i \overset{\circ}{U}_i = K$;
- B2. $\psi_i|_{D_{ij}} : D_{ij} \rightarrow \mathbb{D}^p$ es un homeomorfismo;
- B3. los cambios de coordenadas $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ son difeomorfismos de clase C^r .

Se llama *parte singular* de K al conjunto $\text{Sing } K$ formado por aquellos puntos que no poseen un entorno homeomorfo a un disco.

Como las variedades usuales, las variedades ramificadas poseen un espacio tangente bien definido. En restricción a cada disco D_{ij} tenemos el espacio tangente $TD_{ij} = (\psi_i|_{D_{ij}})^* T\mathbb{D}^p = \{(x, \mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in T_{\psi_i(x)}\mathbb{R}^p\}$ inducido por $\psi_i|_{D_{ij}}$. Sobre la unión disjunta $\bigsqcup_{ij} TD_{ij}$ definimos la relación de equivalencia \sim dada por

$$(x, \mathbf{v}) \in TD_{ij} \sim (y, \mathbf{w}) \in TD_{kl} \iff x = y \quad y \quad (\psi_i \circ \psi_k^{-1})_*(\mathbf{w}) = \mathbf{v}.$$

Definición 6.16. El cociente $TK = \bigsqcup_{ij} TD_{ij}/\sim$ es el *fibrado tangente* de K .



Figura 6.4.
Algunas variedades ramificadas

De forma similar se pueden definir otros fibrados naturales sobre K .

Definición 6.17. Dadas dos variedades ramificadas K y K' de clase C^r y una aplicación continua entre ellas $f : K \rightarrow K'$, diremos que f es de clase C^r si

1. la aplicación $f_{ij}^k : \pi_i(D_{ij}) \xrightarrow{\psi_{D_{ij}}^{-1}} D_{ij} \xrightarrow{f|_{D_{ij} \cap f^{-1}(U'_k)}} U'_k \xrightarrow{\psi_k} \mathbb{D}^{p'}$ es de clase C^r ;
2. si para cada $x \in K$, los gérmenes de las aplicaciones f_{ij}^k coinciden en $\psi_i(x)$ para los diferentes valores de j .

Esta última condición nos dice que, según nos aproximamos a las singularidades de K , la aplicación se comporta de la misma manera en las diferentes ramas.

Como en el caso usual, las aplicaciones diferenciables inducen aplicaciones sobre el fibrado tangente. En efecto, sea $f : K \rightarrow K'$ una aplicación diferenciable entre dos superficies ramificadas de clase C^r . Podemos definir $f_* : TK \rightarrow TK'$ localmente como $(f_*)_{ij}^k(x, \mathbf{v}) = (f(x), f_{ij_*}^k(\mathbf{v}))$, si $f(x) \in U'_k$. La condición 2 y la diferenciable de los cambios de coordenadas prueban que esta definición es correcta (véase [Wil]).

Definición 6.18. La aplicación $f : K \rightarrow K'$ es una *inmersión* si $f_{*x} : T_x K \rightarrow T_{f(x)} K'$ es un monomorfismo para cada $x \in K$.

A diferencia del caso de las variedades usuales, una inmersión no es, en general, localmente inyectiva.

Definición 6.19. Una aplicación $f : K \rightarrow K'$ entre dos variedades ramificadas es una *aplicación celular* si $\text{Sing } K \subset f^{-1}(\text{Sing } K')$.

6.2.3. Límites inversos

Estamos en condiciones de enunciar y probar el teorema principal del capítulo:

Teorema 6.20. *Cualquier laminación compacta de clase C^1 y dimensión p transversalmente 0-dimensional, minimal, sin holonomía es límite inverso de variedades ramificadas de dimensión p .*

Demostración. Supongamos que la laminación (M, \mathcal{L}) verifica las condiciones del enunciado. Según el (teorema 6.3), existe una descomposición simplicial \mathcal{B} de (M, \mathcal{L}) . De hecho, como consecuencia del corolario 6.14, la laminación (M, \mathcal{L}) posee una sucesión de descomposiciones simpliciales $\mathcal{B}^{(n)}$ tales que $\mathcal{B}^{(1)} = \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^{(n+1)}$ se obtiene por inflación de $\mathcal{B}^{(n)}$.

i) *Construcción de una sucesión de variedades ramificadas S_n .* Para cada $n \leq 1$, llamamos $S_n = M / \sim_n$ al espacio cociente de M por la relación de equivalencia \sim_n que colapsa cada caja B de $\mathcal{B}^{(n)}$ a una placa, es decir, que identifica dos puntos x y x' de M si y sólo si x y x' pertenecen a una misma caja $B \in \mathcal{B}^{(n)}$ y sus imágenes por la aplicación $p_1 \circ \varphi : B \rightarrow P \times C \rightarrow P$ son iguales. Denotamos por $\pi_n : M \rightarrow S_n$ la proyección canónica. De manera equivalente, podemos definir S_n de la siguiente manera:

a) el espacio cociente $S_n = \bigsqcup_{B \in \mathcal{B}^{(n)}} B / \sim_n$ de la unión disjunta de todas las cajas de $\mathcal{B}^{(n)}$ por la relación de equivalencia inducida por \sim_n sobre cada caja (que seguiremos denotando \sim_n);

b) el espacio cociente $S_n = \mathcal{M} / \sim_n$ de la variedad \mathcal{M} de clase C^1 y dimensión p por la relación de equivalencia \sim_n definida antes. Seguiremos denotando por $\pi_n : \mathcal{M} \rightarrow S_n$ la proyección canónica.

La primera de estas dos nuevas definiciones permite probar muy fácilmente que S_n satisface las condiciones generales exigidas a cualquier variedad ramificada. De hecho, S_n es un espacio compacto Hausdorff. La segunda muestra de manera inmediata que S_n es una variedad ramificada e clase C^1 y dimensión p . Cada estrella $\text{Star}(x, \mathcal{B}^n)$ contiene un cerrado homeomorfo al disco \mathbb{D}^p y su descomposición como unión finita de placas de \mathcal{B}^n determina una descomposición de cada cerrado en una familia finita de cerrados que satisfacen las condiciones de la definición 6.15.

ii) *Construcción del límite proyectivo.* Como las placas de $\mathcal{B}^{(n)}$ son unión de placas de $\mathcal{B}^{(n-1)}$, la proyección canónica $\pi_{n-1} : \mathcal{M} \rightarrow S_{n-1}$ pasa al cociente en una aplicación sobreyectiva $f_n : S_n \rightarrow S_{n-1}$ de clase C^1 . Es evidente que, tanto la proyección $\pi_{n-1} : \mathcal{M} \rightarrow S_{n-1}$, como la aplicación $f_n : S_n \rightarrow S_{n-1}$ son inmersiones celulares. El límite proyectivo $S_\infty = \varprojlim (S_n, f_n) = \{(x_n) \mid f_n(x_n) = x_{n-1}\} \subset \prod_n S_n$ es un espacio compacto Hausdorff.

iii) *Descripción de la estructura foliada de S_∞ .* Para cada punto $(x_n) \in S_\infty$, vamos a construir una carta foliada que lo contenga. Para ello, distinguimos dos casos:

a) Existe $N \geq 1$ tal que x_N pertenece a la parte regular de S_N . Por lo tanto existe una placa P de $\mathcal{B}^{(N)}$ tal que $x_N \in \pi_N(\overset{\circ}{P})$. Si denotamos por $F_{N,n} = f_n \circ \dots \circ f_N$ para cada $n \geq N$, entonces

$$U = \{(y_n) \in S_\infty \mid F_{N,n}(y_n) \in \pi_N(P) \text{ para cada } n \geq N\}$$

es un abierto de S_∞ que contiene al punto (x_n) y es homeomorfo al producto de la placa $\overset{\circ}{P}$ por el compacto

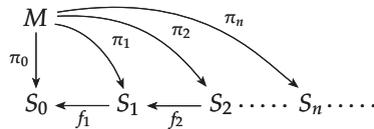
$$C = \{(y_n) \in S_\infty \mid F_{N,n}(y_n) = x_N \text{ para cada } n \geq N\} = \pi_N^{-1}(x_N).$$

Si dos abiertos U y U' se intersecan, entonces tendremos placas P de $\mathcal{B}^{(N)}$ y P' de $\mathcal{B}^{(N')}$ tales que $F_{N,N'}(\pi_{N'}(P')) \cap \pi_N(P) \neq \emptyset$ suponiendo que $N' \geq N$. Si denotamos por B la caja de $\mathcal{B}^{(N)}$ que contiene a la placa P , esto significa que P' corta a B a lo largo de una copia de P . El cambio de coordenadas es descrito a partir del cambio de coordenadas entre P' y dicha placa de B .

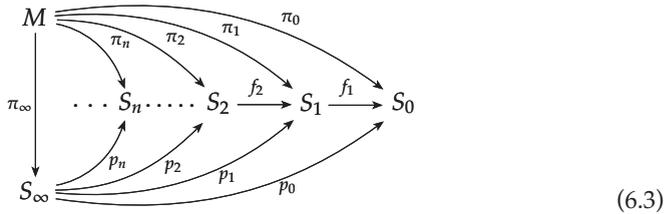
b) $x_n \in \text{Sing}(S_n)$ para cada $n \geq 1$. Entonces el abierto distinguido U se construye como en el caso anterior. La diferencia está en que los abiertos de S_n que contienen a x_n serán la imagen, no ya de una placa, sino de varias placas.

En cualquiera de los casos, el espacio S_∞ está dotado de una laminación transversalmente 0-dimensional de clase C^1 y dimensión p .

iv) Construcción de un homeomorfismo foliado entre M y S_∞ . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo



La propiedad universal del límite inverso nos dice que estas aplicaciones factorizan a través de S_∞ , es decir, existe una aplicación $\pi_\infty : M \rightarrow S_\infty$ que hace el diagrama



conmutativo. Puesto que cada aplicación π_n es sobreyectiva, la imagen de la aplicación π_∞ es densa en S_∞ . Además, como M es compacto, su imagen también lo ha de ser. Luego π_∞ es también sobreyectiva. Si vemos que π_∞ es inyectiva, habremos probado que es un homeomorfismo, ya que sería una biyección continua de un espacio compacto en un espacio Hausdorff. Pero, en la construcción de las descomposiciones $\mathcal{B}^{(n)}$, podemos suponer que la intersección de los ejes $\bigcap C_{\mathcal{B}^{(n)}}$ se reduce a un punto. Esto fuerza que, dados dos puntos $x \neq y$ de M , exista un entero $n \geq 1$ tal que $\pi_n(x) \neq \pi_n(y)$. Luego π_∞ es inyectiva. Si dotamos a los espacios M y S_∞ de las topologías de las hojas respectivas, resulta claro que π_∞ sigue siendo un homeomorfismo, con lo que queda probado el teorema. \square

Bibliografía

- [AGL] F. ALCALDE CUESTA, P. GONZÁLEZ SEQUEIROS y Á. LOZANO ROJO. Affability of Euclidean tilings, enviado para publicar.
- [BBG] J. BELLISSARD, R. BENEDETTI y J.-M. GAMBAUDO. Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labelling. *Comm. Math. Phys.*, **261**(1), (2006), 1–41.
- [BG] R. BENEDETTI y J.-M. GAMBAUDO. On the dynamics of G -solenoids. Applications to Delone sets. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23**(3), (2003), 673–691.
- [BH] M. Á. BERMÚDEZ CARRO y G. HECTOR. Laminations hyperfinites et revêtements. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **26**(2), (2005), 305–339.
- [Bla1] E. BLANC. Examples of mixed minimal foliated spaces. Por aparecer en *Ergodic Theory Dynam. Systems*.
- [Bla2] ———. *Propriétés génériques des laminations*. Tesis Doctoral, Université Claude Bernard–Lyon 1 (1992).
- [Bra] O. BRATTELI. Inductive limits of finite dimensional C^* -algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **171**, (1972), 195–234.
- [CnC] A. CANDEL y L. CONLON. *Foliations I, Graduate Studies in Mathematics*, tomo 23. AMS (2000).
- [CtC] J. CANTWELL y L. CONLON. Generic leaves. *Comment. Math. Helv.*, **73**, (1998), 306–336.
- [Con] A. CONNES. *Noncommutative geometry*. Academic Press (1994).
- [CFW] A. CONNES, J. FELDMAN y B. WEISS. An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **1**, (1981), 431–450.
- [DK] R. DIESTEL y D. KÜHN. Graph-theoretical versus topological ends of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, **87**, (2003), 197–206.

Bibliografía

- [DJK] R. DOUGHERTY, S. JACKSON y A. S. KECHRIS. The structure of hyperfinite Borel equivalence relations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **341**(1), (1994), 193–225.
- [Dye] H. A. DYE. On groups of measure preserving transformations. I. *Amer. J. Math.*, **81**(1), (1959), 119–159.
- [Ele] G. ELEK. Betti numbers and Euler’s formula for combinatorial foliations. *Manuscripta Math.*, **92**, (1997), 239–247.
- [Ell] G. ELLIOT. On the classification of inductive limits of semisimple finite dimensional algebras. *J. Algebra*, **38**, (1972), 29–44.
- [EMT] D. EPSTEIN, K. MILLETT y D. TISCHLER. Leaves without holonomy. *J. London Math. Soc. (2)*, **16**, (1977), 548–552.
- [FM] J. FELDMAN y C. C. MOORE. Ergodic equivalence relations, cohomology and Von Neumann algebras, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **234**(2), (1977), 289–324.
- [Fre] H. FREUDENTHAL. Über die enden topologischer räume und gruppen. *Math. Zeitschr.*, **33**, (1931), 692–713.
- [Gab1] D. GABORIAU. Dynamique des systèmes d’isométries: sur les bouts des orbites. *Invent. Math.*, **126**, (1996), 297–318.
- [Gab2] ———. Coût des relations d’équivalence et des groupes. *Invent. Math.*, **139**, (2000), 41–98.
- [Ghy1] É. GHYS. Topologie des feuilles génériques. *Ann. of Math.*, **141**, (1995), 387–422.
- [Ghy2] ———. Laminations par surfaces de Riemann. *Panor. Synthèses*, **8**, (1999), 49–95.
- [GMPS1] T. GIORDANO, H. MATUI, I. F. PUTNAM y C. F. SKAU. The absorption theorem for affable equivalence relations (2007). [arXiv 0705.3270](https://arxiv.org/abs/0705.3270).
- [GMPS2] ———. Orbit equivalence for Cantor minimal \mathbb{Z}^2 -systems. *J. Amer. Math. Soc.*, (2008), Posted January 22, PII S 0894–0347(08)00595–X.
- [GPS1] T. GIORDANO, I.F. PUTNAM y C.F. SKAU. Topological orbit equivalence and C^* -crossed products. *J. Reine angew. Math.*, **496**, (1995), 51–111.
- [GPS2] ———. Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor dynamical systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **24**, (2004), 441–476.
- [Gon] P. GONZÁLEZ SEQUEIROS. *A dinámica dos mosaicos euclideos*. Memoria de DEA, Universidad de Santiago de Compostela (2007).

- [GP] S.E. GOODMAN y J.F. PLANTE. Holonomy and averaging in foliated sets. *J. Differential Geometry*, **14**, (1979), 401–407.
- [Gou] F.Q. GOUVÊA. *p-adic numbers: An introduction*. Springer (1997).
- [Gro1] M. GROMOV. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, **53**, (1981), 53–78.
- [Gro2] ———. *Structure métrique pour les variétés riemanniennes*. Cedric/Fernand Nathan (1981).
- [Gro3] ———. Asymptotic invariants for infinite groups. En *Geometric Group Theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, n^o 182 en London Math. Soc. Lecture Note Series. CUP (1993).
- [Hae1] A. HAEFLIGER. Groupoïdes d'holonomie et classifiants. *Astérisque*, **116**, (1984), 70–97.
- [Hae2] ———. Pseudogroups of local isometries. En *Differential Geometry (Santiago de Compostela, 1984)*, n^o 131 en Research Notes in Math. Pitman (1985), 174–197.
- [Hae3] ———. Foliations and compactly generated pseudogroups. En *Foliations: geometry and dynamics (Warsaw, 2000)*. World Scientific (2002), 275–295.
- [Hal] R. HALIN. Über unendliche wege in graphen. *Math. Annalen*, **157**, (1964), 125–137.
- [Hec] G. HECTOR. *Feuilletages en cylindres*. N^o 597 en LNM. Springer (1977), 252–270.
- [HH] G. HECTOR y H. HIRSCH. *Introduction to the geometry of foliations. Part A*. Vieweg & Sohn (1981).
- [Ken1] R. KENYON. A group of paths in \mathbb{R}^2 . *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**, (1996), 3155–3172.
- [Ken2] ———. *Sur la dynamique, la combinatoire et la statistique des pavages* Mémoire d'habilitation. Université Paris-Sud (1999).
- [Lev] G. LEVITT. On the cost of generating an equivalence relation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **15**, (1995), 1173–1181.
- [Loz] Á. LOZANO ROJO. The Cayley foliated space of a graphed pseudogroup. En *Proceedings of the XIV Fall Workshop on Geometry and Physics, Publ. de la RSME*, tomo 10. RSME (2006), 267–272.
- [Moi] E. MOISE. *Geometric topology in dimensions 2 and 3, GTM*, tomo 47. Springer (1977).

Bibliografía

- [PS] A. PHILLIPS y D. SULLIVAN. Geometry of leaves. *Topology*, **20**, (1981), 209–218.
- [RW] C. RADIN y M. WOLFF. Space tilings and local isomorphism. *Geom. Dedicata*, **42**, (1992), 355–360.
- [Ren1] J. RENAULT. *A groupoid approach to C^* -algebras*. N^o 793 en Lecture Notes in Maths. Springer (1980).
- [Ren2] ———. AF equivalence relations and their cocycles. En *Proceedings of the OAMP Conference, Constanza, July 2001*. Theta Foundation (2001). arXiv:math.OA/0111182.
- [SW] L. SADUN y R. F. WILLIAMS. Tiling spaces are Cantor set fibre bundles. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23**, (2003), 307–316.
- [Sam] M. SAMUELIDES. Tout feuilletage à croissance polynomiale est hyperfini. *J. Funct. Anal.*, **34**, (1979), 363–369.
- [Ser] C. E. SERIES. Foliations of polynomial growth are hyperfinite. *Israel J. Math.*, **34**(3), (1979), 245–258.
- [Ska] C. F. SKAU. Minimal dynamical systems, ordered Bratteli diagrams and associated C^* -products. En *Proceedings of Current Topics in Operator Algebras* (1990), 264–280.
- [SS] T. SLAMAN y J. STEEL. Definable functions on degrees. En *Cabal Seminar 81–85, LNM*, tomo 1333. Springer (1988), 37–55.
- [Sol] B. SOLOMYAK. Dynamics of self-similar tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **17**, (1997), 695–738.
- [Wil] R. F. WILLIAMS. Expanding attractors. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, **43**, (1974), 169–203.