MATERIA
Análise Económica dos Mercados Financeiros I

TITULACIÓN
Máster en Economía: Organización Industrial
e MercadosFinanceiros

unidade didáctica
7

Ciencias Sociais e Xurídicas

Modelo de valoración de activos CAPM

Juan Carlos Reboredo Nogueira

Departamento: Fundamentos da Análise Económica
Facultade ou Escola: Facultade de CC Económicas e Empresariais

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

ISBN
978-84-15876-35-9

MATERIA: Análise Económica dos mercados financeiros I
TITULACIÓN: Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Introdución: Economía Financeira e valoración
- Problemas básicos da Economía Financeira
- Valoración
- Arbitraxe e equilibrio

Unidade II. Cálculo financeiro
- Valor do diñeiro no tempo
- Rendas
- Préstamos
- Empréstitos

Unidade III. Estrutura temporal dos tipos de xuro
- A Curva Cupón Cero
- Métodos de estimación da curva cupón cero
- Teorías explicativas de estrutura temporal dos tipos de xuro

Unidade IV. Activos de renda fixa
- Activos de renda fixa
- Risco de activos de renda fixa
- Inmunización

Unidade V. Valoración de activos continxentes
- Activos continxentes
- Activos Arrow-Debreu
- Probabilidades neutrais ao risco
- Martingalas
- Mercados completos

Unidade VI. Decisións financeiras con incerteza
- Preferencias e incerteza
- Análise media-varianza
- Dominio estocástico

Unidade VII. Modelo de valoración de activos CAPM
- Alternativas de investimento no espazo media-varianza
- Equilibrio de mercado: modelo CAPM

Unidade VIII. Modelo de valoración de activos APT
- Modelo factorial e carteiras de activos
- Valoración con ausencia de arbitraxe: modelo APT

ÍNDICE

INTRODUCCION

Esta unidade didáctica forma parte do curso de Análise Económica dos Mercados Financeiros I que se imparte no primeiro cuadrimestre do Máster en Economía: Organización Industrial e Mercados Financeiros.

O propósito da unidade é introducir o modelo de valoración de activos en equilibrio denominado CAPM. Con este propósito, explícase a determinación do risco e da rendibilidade esperada dun activo ou dunha carteira de activos, introducindo así o concepto da diversificación e a determinación do conxuntos de carteiras que teñen varianza mínima para os diferentes niveles de rendibilidade esperada. Unha vez determinado o conxunto de alternativas de investimento, analízase o equilibrio de mercado e a determinación de prezo dun activo en función da rendibilidade da carteira de mercado, da súa beta coa carteira de mercado e da rendibilidade do activo sen risco.

A comprensión desta unidade reviste un grao de dificultade elevado na mediada que require dunha elevada capacidade de abstracción e do manexo de técnicas matemáticas de optimización e da teoría da elección baixo incerteza. Para facilitar a comprensión desta materia, ao longo da unidade utilízanse diversos exemplos numéricos que tratan de ilustrar a conexión entre utilidade financeira práctica do modelo e as limitacións prácticas dos seus supostos básicos.

PALABRAS CLAVE

Risco, rendibilidade esperada, prima de risco, ratio de Sharpe, separación de fondos, liña do mercado de capitais, beta, liña mercado de activos, CAPM.

METODOLOXIA

- A impartición do curso sempre adoptará como punto de partida as intuicións financeiras, que se tomarán como base, e a enmarcación destas intuicións no contexto do problema de valoración.
- Utilizarase preferentemente a linguaxe gráfica, máis intuitivo e máis fácil de asimilar polo estudante, pasando posteriormente á formulación dos problemas considerados en termos formais.
- Ilustraranse todos os conceptos con exemplos prácticos que estean próximos a realidade financeira do alumno coa finalidade de que o alumno aprenda a aplicar os instrumentos de valoración a activos financeiros con características semellantes.
- Propoñerase unha serie de exercicios prácticos que ilustren a aplicabilidade e utilidade dos coñecementos adquiridos.
- Fomentarase a participación do alumno, tanto no desenvolvemento dos contidos teóricos como na resolución dos casos prácticos.

ALTERNATIVAS DE INVESION NO ESPAZO MEDIA-VARIANZA

1. Risco e rendibilidade esperada dunha carteira

Dado un conxunto de activos j = 1, 2,…,N e dous momentos do tempo: t e t+1. Se collemos os prezos de eses activos en t e t+1, podemos determinar a rendibilidade do activo j como:

$$i_j = \frac{P_{j,t+1} - P_{j,t} + D_{j,t+1}}{P_{j,t}} \quad \text{ou} \quad r_j = \mathrm{Ln}\left(\frac{P_{j,t+1} + D_{j,t+1}}{P_{j,t}}\right)$$

Dado que estamos nun contorno de incerteza, a rendibilidade esperada e o risco do activo j obtémolo como :

$$\overline{r}_j = E(r_j) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s r_{j,s} = \int_s r_{j,s} f(r_j) dr_j$$

$$\sigma_j^2 = E\left(r_j - \overline{r}_j\right)^2 = \sum_{s=1}^{S} \pi_s (r_{j,s} - \overline{r}_j)^2 = \int_s (r_{j,s} - \overline{r}_j)^2 f(r_j) dr_j$$

Podemos estimar o valor esperado e a varianza dun activo j dunha maneira sinxela como:

$$\overline{r}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{j,t}$$

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(r_{j,t} - \overline{r}_j\right)^2$$

utilizando datos diarios, semanais mensuais,…dos prezos do activo j.
Polo xeral, o risco mídese utilizando a desviación estándar, posto que mide o risco nas mesmas unidades que o valor esperado:

$$\sigma_j = \sqrt{\sigma_j^2} = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(r_{j,t} - \overline{r}_j\right)^2}$$

Consideremos agora unha carteira e determinemos o seu valor esperado e o seu risco. Se dispoñemos dunha renda (m) que podemos investir en dúas ou máis activos financeiros, teríamos que:

- valor da carteira en t será: $m = P_{1,t} N_1 + P_{2,t} N_2 = P_{c,t}$
- valor da carteira en t+1 será: $P_{c,t+1} = P_{1,t+1} N_1 + P_{2,t+1} N_2$

Así, podemos determinar a rendibilidade da carteira de xeito semellante á de calquera activo j:

$$\frac{P_{c,t+1} - P_{c,t}}{P_{c,t}} = \frac{P_{1,t+1} - P_{1,t}}{m} N_1 + \frac{P_{2,t+1} - P_{2,t}}{m} N_2$$

$$= \frac{P_{1,t+1} - P_{1,t}}{P_{1,t}} \frac{P_{1,t}}{m} N_1 + \frac{P_{2,t+1} - P_{2,t}}{P_{2,t}} \frac{P_{2,t}}{m} N_2$$

Se denotamos por ω_j a proporción de renda dedicada á compra do activo j, a rendibilidade da carteira será:

$$i_c = \omega_1 i_1 + \omega_2 i_2$$

Ou ben para N activos: $i_c = \sum_{j=1}^{N} \omega_j \, i_j$

É dicir, a rendibilidade da carteira é unha media ponderada da rendibilidade dos activos que a compoñen, utilizando como ponderacións a proporción de renda investida en cada un dos activos.

O equilibrio orzamentario require que: $\omega_1 + \omega_2 = 1$, pero ω_j podería ser menor que cero se vendemos o activo j:

$$\omega_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 > 0$$

Dado que o custo do investimento no activo 2 é maior que a cantidade de renda da que se dispón, sendo ese custo adicional financiado coa venda do activo 1. A esta operación denomínaselle venda en descuberto (*short selling*)

Se consideramos o cálculo da rendibilidade da carteira en tempo continuo obtemos unha expresión diferente da anterior debido a que o logaritmo dunha suma non é a suma de logaritmos:

$$\mathrm{Ln}\left(\frac{P_{c,t+1}}{P_{c,t}}\right) = \mathrm{Ln}\left(\frac{P_{1,t+1}N_1 + P_{2,t+1}N_2}{P_{1,t}N_1 + P_{2,t}N_2}\right)$$

Con todo, para intervalos curtos de tempo: $r_c \cong \sum_{j=1}^{N} \omega_j \, r_j$

A. Rendibilidade esperada da carteira

$$\bar{r}_c = E(r_c) = E\left(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2\right) = \omega_1 \bar{r}_1 + \omega_2 \bar{r}_2 = \omega_1 \bar{r}_1 + (1-\omega_1)\bar{r}_2$$

En xeral: $\bar{r}_c = \sum_{j=1}^{N} \omega_j \, \bar{r}_j$.

É dicir, a rendibilidade esperada é a media ponderada das rendibilidades esperadas dos activos que compoñen a carteira, sendo as ponderacións as proporcións de renda investidas en cada activo.

B. Risco da carteira

$$\begin{aligned}
\sigma_c^2 &= E\left[\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 - (\omega_1 \bar{r}_1 + \omega_2 \bar{r}_2)\right]^2 \\
&= E\left[\omega_1 (r_1 - \bar{r}_1) + \omega_2 (r_2 - \bar{r}_2)\right]^2 \\
&= \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12} \\
&= \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}
\end{aligned}$$

En xeral:

$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2\sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{h=1 \\ j\neq h}}^{N} \omega_j\omega_h\sigma_{jh} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} \omega_j\omega_h\sigma_{jh} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} \omega_j\omega_h\sigma_j\sigma_h\rho_{jh}$$

$$= \omega^T V \omega$$

O risco/varianza da carteira depende non só do risco dos activos que a compoñen, senón tamén da covarianza/correlación entre eses activos.

A covarianza, que mide como se moven conxuntamente as rendibilidades de dous activos, podendo ser positiva ou negativa, polo que unha combinación de activos pode dar lugar a un risco de carteira que podería ser mesmo inferior ao risco dos activos que a compoñen.

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_1 = 8\% \\ \sigma_2 = 5\% \\ \rho_{12} = 20\%\end{array}\right\}$$

ω_1	ω_2	σ_c
0,7	0,3	6,08%
0,5	0,5	5,12%
0,1	0,9	4,73%

A estratexia consistente en combinar activos financeiros con diferentes covarianzas/correlacións co obxectivo de reducir o risco denomínase diversificación.
As posibilidades de diversificación coas que conta un investidor dependen, por tanto, da correlación entre os activos cos que configura a súa carteira.
Posibilidades e beneficios da diversificación

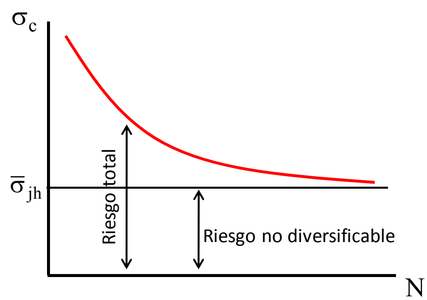
$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{h=1 \\ j\neq h}}^{N} \omega_j \omega_h \sigma_{jh} \underset{\omega_j = \frac{1}{N}}{\uparrow}= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{h=1 \\ j\neq h}}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{N}\right)\sigma_{jh}$$

$$\sigma_c^2 = \left(\frac{1}{N}\right)\overline{\sigma}^2 + \left(\frac{N-1}{N}\right) \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{h=1 \\ j\neq h}}^{N} \left(\frac{1}{N(N-1)}\right)\sigma_{jh}$$

$$\sigma_c^2 = \left(\frac{1}{N}\right)\overline{\sigma}^2 + \left(\frac{N-1}{N}\right)\overline{\sigma}_{jh} = \frac{1}{N}\left(\overline{\sigma}^2 - \overline{\sigma}_{jh}\right) + \overline{\sigma}_{jh}$$

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_c^2 = \overline{\sigma}_{jh}$$

O grao diversificación dunha carteira depende de como sexa a covarianza entre os activos que a configuran: se os activos non teñen covarianza nula, o risco non pode mitigarse completamente; en caso contrario bastaría con engadir activos á carteira (*risk pooling*).
Graficamente:

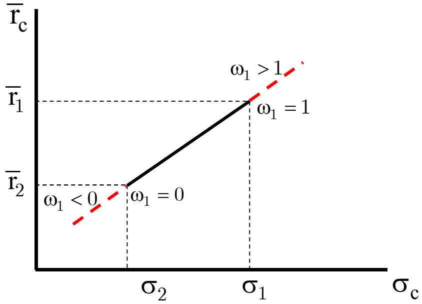


2. Carteiras eficientes con 2 activos

A. A relación entre o risco e a rendibilidade das carteiras que se poden configurar con 2 activos depende da correlación existente entre eses dous activos. Consideraremos diferentes casos:

a) $\rho_{12} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{r}_c = \omega_1 \bar{r}_1 + (1-\omega_1)\bar{r}_2 \\ \sigma_c^2 = (\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2)^2 \\ \sigma_c = (\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2) \end{array}\right] \Rightarrow \bar{r}_c = \frac{\bar{r}_2\sigma_1 + \bar{r}_1\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} + \left(\frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\right)\sigma_c$$



Carteira de varianza mínima:

$$\frac{d\sigma_c^2}{d\omega_1} = 2\omega_1\sigma_1^2 - 2(1-\omega_1)\sigma_2^2 + (2-4\omega_1)\sigma_1\sigma_2 = 0 \Rightarrow \omega_1{}^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}$$

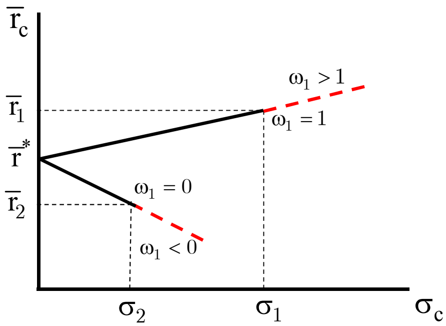
O risco da carteira pode ser nulo con vendas ao descuberto:

$$\sigma_c{}^* = \omega_1^*\sigma_1 + (1-\omega_1^*)\sigma_2 = 0 \Rightarrow \omega_1^* \notin [0,1]$$

Un exemplo de activos perfectamente correlacionados é un activo derivado e o seu subxacente.

b) $\rho_{12} = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{r}_c = \omega_1 \bar{r}_1 + (1-\omega_1)\bar{r}_2 \\ \sigma_c^2 = (\omega_1\sigma_1 - \omega_2\sigma_2)^2 \\ \sigma_c = (\omega_1\sigma_1 - \omega_2\sigma_2) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \bar{r}_c = \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\bar{r}_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\bar{r}_2\right] + \left(\frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)\sigma_c \\ \bar{r}_c = \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\bar{r}_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\bar{r}_2\right] - \left(\frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)\sigma_c \end{array}\right.$$



Carteira de varianza mínima:

$$\frac{d\sigma_c^2}{d\omega_1} = 2\omega_1\sigma_1^2 - 2(1-\omega_1)\sigma_2^2 - (2-4\omega_1)\sigma_1\sigma_2 = 0 \Rightarrow \omega_1{*} = \frac{\sigma_2}{(\sigma_1+\sigma_2)}$$

A carteira de varianza mínima configúrase sen vendas ao descuberto dado que $\omega_1{*} > 0$. O risco desta carteira será:

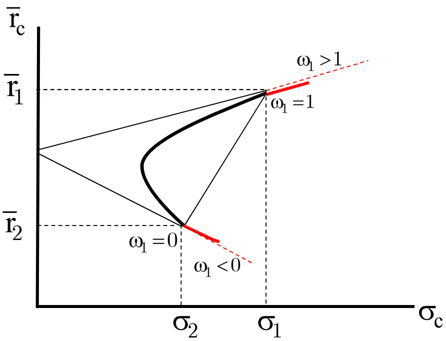
$$\sigma_c = \frac{\sigma_2}{(\sigma_1+\sigma_2)}\sigma_1 - \frac{\sigma_1}{(\sigma_1+\sigma_2)}\sigma_2 = 0$$

Que é equivalente a un activo de renda fixa.

c) $-1 < \rho_{12} < 1$

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_c &= \omega_1\,\bar{r}_1 + (1-\omega_1)\,\bar{r}_2 \\ \sigma_c^2 &= \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ \sigma_c &= \sqrt{\omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sigma_c = f(\bar{r}_c)$$

Ecuación dunha hipérbola



A pendente da relación rendibilidade esperada risco da carteira obtense como:

$$\frac{d\bar{r}_c}{d\sigma_c} = \frac{d\bar{r}_c/d\omega_1}{d\sigma_c/d\omega_1} = \frac{2\left(\bar{r}_1-\bar{r}_2\right)\sqrt{\omega_1^2\sigma_1^2 + (1-\omega_1)\sigma_2^2 + 2\omega_1(1-\omega_1)\sigma_{12}}}{2\omega_1\sigma_1^2 - 2(1-\omega_1)\sigma_2^2 + (2-4\omega_1)\sigma_{12}}$$

Carteira de varianza mínima:

$$\frac{d\sigma_c^2}{d\omega_1} = 2\omega_1\sigma_1^2 - 2(1-\omega_1)\sigma_2^2 + (2-4\omega_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = 0 \Rightarrow \omega_1{*} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}$$

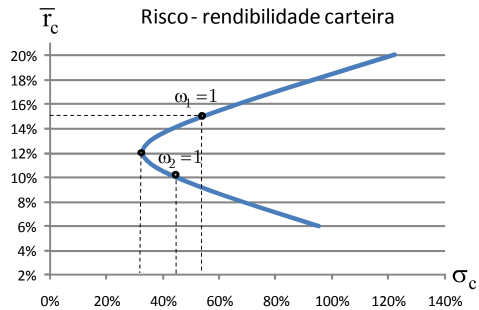
No caso no que os dous activos son independentes, $\rho_{12} = 0$, teremos que:

$$\sigma_c^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 \Rightarrow \omega_1{*} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Exemplo:

	rent. esp.	Varianza
Activo 1	15%	30%
Activo 2	10%	20%
Correlación	-0.1	

Rent. cartera	omega_1	Des. est. carteira
20%	2	1.22
19%	1.8	1.08
18%	1.6	0.94
17%	1.4	0.80
16%	1.2	0.67
15%	1	0.55
14%	0.8	0.44
13%	0.6	0.36
12%	0.4	0.33
11%	0.2	0.36
10%	0	0.45
9%	-0.2	0.56
8%	-0.4	0.68
7%	-0.6	0.82
6%	-0.8	0.95

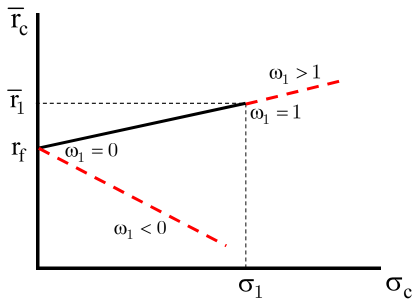


Carteira de varianza mínima	
omega_1	0.41
rendibilidade	12%
varianza	0.33

B. Consideremos agora a rendibilidade esperada e o risco da carteira cando incluímos na carteira un activo sen risco:

$$r_c = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_f = r_f + \omega_1 (r_1 - r_f)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{r}_c = r_f + \omega_1 (\bar{r}_1 - r_f) \\ \sigma_c^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 \\ \sigma_c = \pm \omega_1 \sigma_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{r}_c = r_f \pm \left(\frac{\bar{r}_1 - r_f}{\sigma_1} \right) \sigma_c$$



- $\bar{r}_1 - r_f$ exceso de rendibilidade da activo/carteira de renda variable sobre o activo de renda fixa: prima de risco
- $\dfrac{\bar{r}_1 - r_f}{\sigma_1}$ pendente da recta: ratio de Sharpe. Exceso de rendibilidade que se paga por unidade de risco. É o prezo do risco e constitúe unha boa medida da eficiencia dunha carteira.

C. A dependencia entre dúas carteiras, dunha carteira e un activo e o efecto do cambio na composición da carteira é:

- Covarianza entre 2 carteiras

$$\mathrm{Cov}(r_{c1}, r_{c2}) = \mathrm{Cov}\left(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2,\ \theta_1 r_1 + \theta_2 r_2\right)$$
$$= \omega_1\theta_1\sigma_1^2 + \omega_2\theta_2\sigma_2^2 + (\omega_2\theta_1 + \omega_1\theta_2)\sigma_{12}$$

Con N activos: $\mathrm{Cov}(r_{c1}, r_{c2}) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N}\omega_j\theta_h\sigma_{jh} = \omega V \theta$

- Covarianza entre 1 activo e 1 carteira

$$\mathrm{Cov}(r_j, r_c) = \mathrm{Cov}\left(r_j, \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2\right) = \omega_1 \mathrm{Cov}(r_j, r_1) + \omega_2 \mathrm{Cov}(r_j, r_2)$$

En xeral:

$$\sigma_{jc} = \sum_{h=1}^{N}\omega_h\sigma_{jh}$$

Media ponderada entre a covarianza do activo j e os activos da carteira, onde as ponderacións están dadas polo peso de cada activo na carteira.

σ_{jc} mide a contribución á varianza dunha carteira se incrementamos o peso do activo j.

$$\sigma_c^2 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N}\omega_j\omega_h\sigma_{jh} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\sigma_c^2}{\partial\omega_j} = 2\omega_j\sigma_j^2 + 2\sum_{\substack{h=1\\ j\neq h}}^{N}\omega_h\sigma_{jh} = 2\sigma_{jc}$$

Se a carteira está ben diversificada, cun peso para cada activo próximo a cero:

$$\frac{\partial\sigma_c^2}{\partial\omega_j} \cong 2\sum_{\substack{h=1\\ j\neq h}}^{N}\omega_h\sigma_{jh}$$

- Cambios na composición dunha carteira:

A variación que experimenta a varianza dunha carteira ante unha variación na ponderación dun activo denomínase varianza marxinal. Dada unha carteira c, aumentamos en x euros o investimento no activo j e financiámola co activo sen risco:

$$r_c^* = r_c + x(r_j - r_f)$$

$$\sigma_c^{2*} = \sigma_c^2 + x^2\sigma_j^2 + 2x\sigma_{jc}$$

$$\frac{\partial\sigma_c^{2*}}{\partial x} = 2x\sigma_j^2 + 2\sigma_{jc} \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial\sigma_c^{2*}}{\partial x}\right|_{x=0} = 2\sigma_{jc}$$

Se o cambio no activo j axustámolo cunha redución do activo h:

$$r_c^* = r_c + x(r_j - r_h)$$
$$\sigma_c^{2*} = \sigma_c^2 + x^2(\sigma_j^2 + \sigma_h^2 - 2\sigma_{jh}) + 2x\,\mathrm{cov}(r_c, r_j - r_h)$$

$$\left.\frac{\partial \sigma_c^{2*}}{\partial x}\right|_{x=0} = 2x(\sigma_j^2 + \sigma_h^2 - 2\sigma_{jh}) + 2\,\mathrm{cov}(r_c, r_j - r_h)\Big|_{x=0} = 2(\sigma_{jc} - \sigma_{hc})$$

O efecto sobre a varianza de penderá de se:

- $(\sigma_{jc} - \sigma_{hc}) > 0$ un aumento de j e diminución de h aumenta a varianza da carteira.
- $(\sigma_{jc} - \sigma_{hc}) < 0$ un aumento de j e diminución de h reduce a varianza da carteira.

Podemos reducir a varianza da carteira recompondo as ponderacións da mesma de acordo coa covarianza, de modo que conseguimos a carteira de varianza mínima. Este proceso finaliza cando: $(\sigma_{jc} - \sigma_{hc}) = 0$. Ademais, o proceso de reaxuste tamén afecta á rendibilidade esperada da carteira:

$$\frac{\partial \overline{r}_c^*}{\partial x} = (\overline{r}_j - \overline{r}_h)$$

<u>Exemplo</u>:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{r}_1 = 8\% & \sigma_1 = 30\% \\ \overline{r}_2 = 4\% & \sigma_2 = 20\% \end{array}\right\} \rho_{12} = 0,25$$

$$\mathrm{Cov}(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2, r_1) = \omega_1\sigma_1^2 + (1-\omega_1)\mathrm{Cov}(r_1, r_2) = 0,015 + 0,075\omega_1$$

$$\mathrm{Cov}(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2, r_2) = \omega_1\mathrm{Cov}(r_1, r_2) + (1-\omega_1)\sigma_2^2 = 0,04 - 0,025\omega_1$$

Risco mínimo: $\mathrm{Cov}(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2, r_1) = \mathrm{Cov}(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2, r_2) \Rightarrow \omega_1 = 0,25$

$$\overline{r}_c = 0,25 \cdot 0,08 + 0,75 \cdot 0,04 = 0,05$$

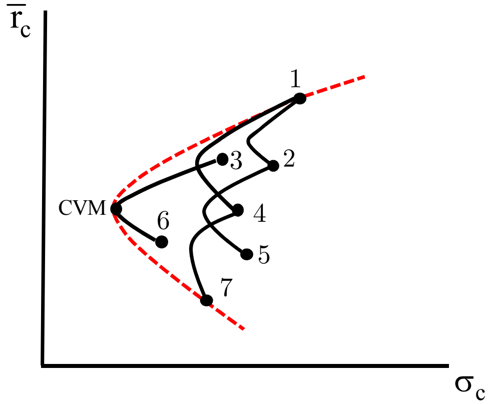
O mesmo resultado se obtería con: $\omega_1{}^* = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}$

3. Carteiras eficientes con máis de 2 activos con risco

Consideremos que $-1 < \rho_{jh} < 1$ e $\omega_j < 0$, é dicir, permítese a posibilidade de operacións de venda á vista (short selling) sempre que: $\sum_{j=1}^{N} \omega_j = 1$

O conxunto de carteiras eficientes no espazo media-varianza que podemos configurar cos N activos está dado por todas aquelas carteiras que teñen unha varianza mínima para cada nivel de rendibilidade esperada. As carteiras eficientes "dominan" no espazo media-varianza ás restantes carteiras na medida que para a mesma rendibilidade esperada o risco é inferior.

Graficamente:



onde:

--- indica o conxunto de carteiras eficientes no espazo media-varianza que se poden configurar a partir dunha combinación de activos ou de carteiras de activos.

-CVM, carteira de varianza mínima, $\sigma_{cvm} > 0$

Podemos expor o problema de xeito analítico; así para cada $\overline{r}_c$ da fronteira:

$$\left.\begin{array}{ll} \min\limits_{\{\omega_1,\ldots,\omega_N\}} & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N}\omega_j\omega_h\sigma_{jh} \\ \text{tal que:} & \sum_{j=1}^{N}\omega_j\overline{r}_j = \overline{r}_c \\ & \sum_{j=1}^{N}\omega_j = 1 \end{array}\right\}$$

Para resolvelo:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N}\omega_j\omega_h\sigma_{jh} + \lambda_1\left[\overline{r}_c - \sum_{j=1}^{N}\omega_j\overline{r}_j\right] + \lambda_2\left[1 - \sum_{j=1}^{N}\omega_j\right]$$

$$\text{CPO}: \quad \frac{\partial L}{\partial \omega_j} = \omega_j\sigma_j^2 + \sum_{\substack{h=1 \\ j\neq h}}^{N}\omega_h\sigma_{jh} - \lambda_1\overline{r}_j - \lambda_2 = 0 \quad j = 1,2,\ldots,N$$

Podemos escribir as CPO como:

$$\sum_{h=1}^{N}\omega_h\sigma_{jh} - \lambda_1\overline{r}_j - \lambda_2 = 0 \quad j = 1,2,\ldots,N$$

Usando notación matricial, teriamos o seguinte sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_N \end{pmatrix}}_{\omega} - \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{r}_1 \\ \overline{r}_2 \\ \vdots \\ \overline{r}_N \end{pmatrix}}_{\overline{r}} - \lambda_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{1_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{0_N}$$

$$V\omega - \lambda_1 \overline{r} - \lambda_2 1_N = 0_N \quad \Rightarrow \quad \omega = \lambda_1 V^{-1}\, \overline{r} + \lambda_2 V^{-1} 1_N$$

Co valor dos multiplicadores de Lagrange determinamos a composición da carteira de varianza mínima cunha rendibilidade esperada de $\overline{r}_c$. Teremos os seguinte sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \lambda_1 V^{-1}\, \overline{r} + \lambda_2 V^{-1} 1_N \\ \overline{r}_c &= \sum_{j=1}^{N} \omega_j \overline{r}_j = \omega^T \overline{r} \\ 1 &= \sum_{j=1}^{N} \omega_j = \omega^T 1_N \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\Rightarrow \overline{r}_c = \lambda_1 \underbrace{\left(\overline{r}^T V^{-1}\, \overline{r}\right)}_{B} + \lambda_2 \underbrace{\left(1_N^T V^{-1} \overline{r}\right)}_{A} \\ &\Rightarrow 1 = \lambda_1 \underbrace{\left(\overline{r}^T V^{-1} 1_N\right)}_{A} + \lambda_2 \underbrace{\left(1_N^T V^{-1} 1_N\right)}_{C} \end{aligned}\right]$$

De xeito que:

$$\left.\begin{aligned} \overline{r}_c &= \lambda_1 B + \lambda_2 A \\ 1 &= \lambda_1 A + \lambda_2 C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{C\overline{r}_c - A}{BC - A^2} \qquad \lambda_2 = \frac{B - A\overline{r}_c}{BC - A^2}$$

$$\omega = \frac{C\overline{r}_c - A}{BC - A^2}\left(V^{-1}\right)\overline{r} + \frac{B - A\overline{r}_c}{BC - A^2}\left(V^{-1} 1_N\right)$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{BV^{-1}1_N - AV^{-1}\overline{r}}{BC - A^2} + \frac{CV^{-1}\overline{r} - AV^{-1}1_N}{BC - A^2}\,\overline{r}_c = g + h\overline{r}_c$$

Con estas ponderacións obtemos o conxunto de carteiras de varianza mínima para diferentes valores da rendibilidade esperada: fronteira de carteiras eficientes.

- Risco da carteira eficiente:

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} \omega_j \omega_h \sigma_{jh} = \omega^T V \omega \\ &= \omega^T V\left(\lambda_1 V^{-1}\, \overline{r} + \lambda_2 V^{-1} 1_N\right) \\ &= \lambda_1 \overline{r}_c + \lambda_2 \\ &= \frac{C\overline{r}_c - A}{BC - A^2}\,\overline{r}_c + \frac{B - A\overline{r}_c}{BC - A^2} \\ &= \frac{1}{BC - A^2}\left[C\overline{r}_c^2 - 2A\overline{r}_c + B\right] \end{aligned}$$

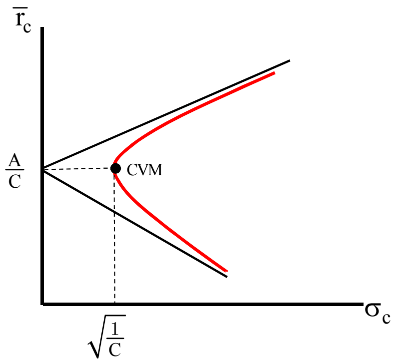
- A ecuación da hipérbola no espazo media-desviación estándar é:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{1}{D}\left[C\overline{r}_c^2 - 2A\overline{r}_c + B\right]} \text{ con } D = BC - A^2$$

- Carteira de varianza mínima:

$$\frac{d\sigma_c}{d\overline{r}_c} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{D}\left(C\overline{r}_c^2 - 2A\overline{r}_c + B\right)\right]^{-1/2}\left(2C\overline{r}_c - 2A\right) = 0 \Rightarrow \overline{r}_c = \frac{A}{C}, \sigma_c = \sqrt{\frac{1}{C}}$$

Graficamente:



- Todas as carteiras que teñen unha rendibilidade esperada superior á CVM son eficientes: fronteira eficiente de carteiras. En caso contrario, para o mesmo nivel de risco existe unha carteira con maior rendibilidade esperada. Covarianza entre dúas carteiras eficientes, p e q:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(r_p, r_q\right) &= \omega_p^T V \omega_q \\
&= \left(g + h\overline{r}_p\right)^T V\left(g + h\overline{r}_q\right) \\
&= \left(g + h\overline{r}_p\right)^T \left(\frac{B1_N - A\overline{r}}{D} + \frac{C\overline{r} - A1_N}{D}\overline{r}_q\right) \\
&= \left(\frac{B1_N^T V^{-1} - A\overline{r}^T V^{-1}}{D} + \frac{C\overline{r}^T V^{-1} - A1_N^T V^{-1}}{D}\overline{r}_p\right)\left(\frac{B1_N - A\overline{r}}{D} + \frac{C\overline{r} - A1_N}{D}\overline{r}_q\right) \\
&= \frac{C}{D}\left[\left(\overline{r}_p - A/C\right)\left(\overline{r}_q - A/C\right)\right] + \frac{1}{C}
\end{aligned}$$

<u>Exemplo</u>:

$$\left.\begin{array}{ll}
\overline{r}_1 = 12\% & \sigma_1 = 30\% \\
\overline{r}_2 = 6\% & \sigma_2 = 20\% \\
\overline{r}_3 = 8\% & \sigma_2 = 40\%
\end{array}\right] \qquad \left.\begin{array}{l}
\rho_{12} = 0{,}15 \\
\rho_{13} = 0{,}06 \\
\rho_{23} = 0{,}35
\end{array}\right]$$

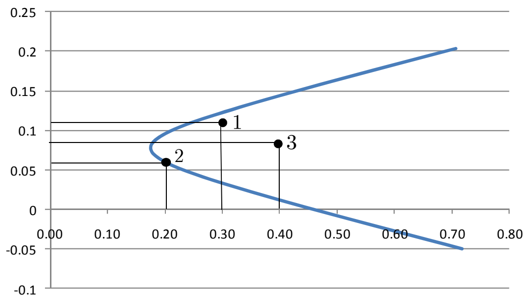
$A = 2.51498193$, $B = 0.22863006$, $C = 32.4348548$, $D = 1.09044862$

$$g = \begin{pmatrix} -0.94327294 \\ 2.11345411 \\ -0.17018117 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} 15.6593407 \\ -18.6813187 \\ 3.02197802 \end{pmatrix}$$

omega 1	omega 2	omega 3	rent	sigma
0.00	0.99	0.01	0.06	0.20
0.17	0.79	0.04	0.07	0.18
0.34	0.58	0.08	0.08	0.18
0.51	0.38	0.11	0.09	0.19
0.69	0.17	0.14	0.10	0.23
0.86	-0.03	0.18	0.12	0.27
1.03	-0.24	0.21	0.13	0.32
1.20	-0.45	0.24	0.14	0.37
1.37	-0.65	0.28	0.15	0.42
1.55	-0.86	0.31	0.16	0.48

Graficamente:



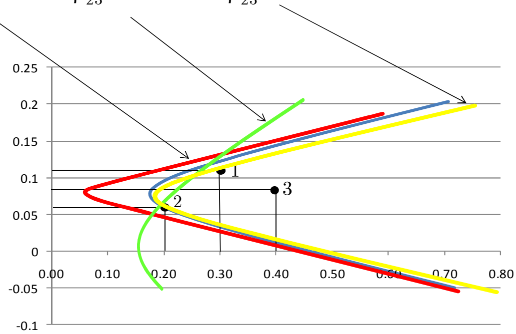
CVM $\begin{cases} \text{rendibilidade esperada: 7,75\%} \\ \text{risco: 17,56\%} \end{cases}$

Efectos das variacións da correlación na fronteira eficiente:

$\rho_{12} = 15\%$ $\rho_{13} = -90\%$ $\rho_{23} = -50\%$

$\rho_{12} = 90\%$ $\rho_{13} = 70\%$ $\rho_{23} = 50\%$

$\rho_{12} = -1\%$ $\rho_{13} = 8\%$ $\rho_{23} = 5\%$



4. Teorema de separación de fondos e outros resultados

Calquera carteira eficiente da fronteira de carteiras pode ser xerada a partir da media ponderada de dúas carteiras calquera eficientes. Dadas dúas carteiras eficientes arbitrarias, p e q, podemos atopar unha carteira eficiente, j, cunha rendibilidade esperada $\overline{r}_j$ a partires dunha combinación lineal de p e q tal que:

$$\overline{r}_j = \theta\overline{r}_p + (1-\theta)\overline{r}_q \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\overline{r}_j - \overline{r}_q}{\overline{r}_p - \overline{r}_q}$$

$$\begin{aligned}\omega_j &= \theta\omega_p + (1-\theta)\omega_q \\ &= \theta(g + h\overline{r}_p) + (1-\theta)(g + h\overline{r}_q) \\ &= g + h(\theta\overline{r}_p + (1-\theta)\overline{r}_q)) \\ &= g + h\overline{r}_j\end{aligned}$$

Outros resultados:

- Calquera combinación linear de carteiras fronteira está sobre a fronteira.

$$\omega_c = \sum_{m=1}^{M}\lambda_m\omega_m = \sum_{m=1}^{M}\lambda_m\left(g + h\overline{r}_m\right) = g + h\sum_{m=1}^{M}\lambda_m\overline{r}_m = g + h\overline{r}_c$$

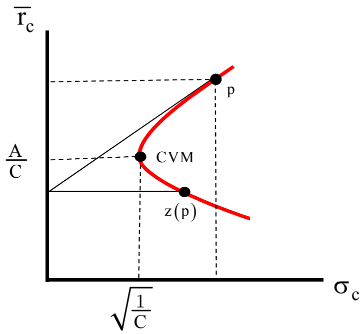
- Calquera combinación convexa de carteiras da fronteira eficiente será eficiente.

$$\overline{r}_c = \sum_{m=1}^{M}\lambda_m\overline{r}_m \geq \sum_{m=1}^{M}\lambda_m\frac{A}{C} = \frac{A}{C}$$

- Para calquera carteira p sobre a fronteira, excepto CVM, existe unha única carteira, z(p), sobre a fronteira que teñen covarianza nula con p.

$$\mathrm{Cov}\left(r_p, r_{z(p)}\right) = \frac{C}{D}\left[\left(\overline{r}_p - A/C\right)\left(\overline{r}_{z(p)} - A/C\right)\right] + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow \overline{r}_{z(p)} = \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{\overline{r}_p - A/C}$$

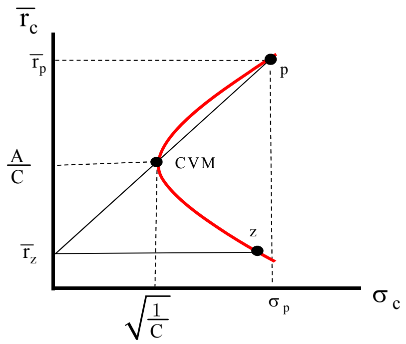
Graficamente:



- A covarianza da CVM con calquera outra carteira é igual á varianza da CVM.

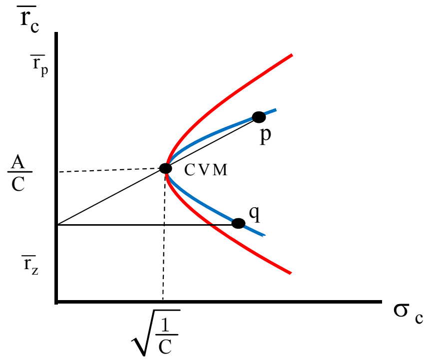
$$\mathrm{Cov}\left(r_p, r_{cvm}\right) = \frac{C}{D}\left[\left(\overline{r}_p - A/C\right)\left(\overline{r}_{cvm} - A/C\right)\right] + \frac{1}{C} = \frac{1}{C} = \sigma^2_{cvm}$$

- Para calquera carteira q, tal que $\omega_q = \lambda\omega_{cvm} + (1-\lambda)\omega_p \quad \lambda \in [0,1)$ existe unha carteira z que teñen covarianza nula con q.



$$\left.\begin{aligned}\overline{r}_q &= \lambda\frac{A}{C}+(1-\lambda)\overline{r}_p \\ \overline{r}_z &= \frac{A}{C}-\frac{D/C^2}{\overline{r}_q-A/C}\end{aligned}\right\} \quad \overline{r}_q=\left[\frac{A}{C}-\frac{D/C^2}{\overline{r}_p-A/C}\right]+\left[\frac{\overline{r}_p-A/C}{\sigma_p^2-1/C}\right]$$

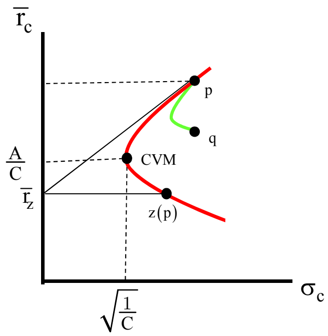
- Dada unha carteira p ineficiente, a ordenada na orixe da recta que une p e a CVM é igual á rendibilidade esperada dunha carteira q que ten covarianza nula con p e mínima varianza entre todas as carteiras de covarianza nula con p.



$$\min_{\omega_q}\omega_q^T V\omega_q \quad \text{t.q. } \omega_q^T V\omega_q=0,\ \omega_q^T 1_N=1$$

- A relación entre a rendibilidade dunha carteira q, con independencia de se é eficiente ou non, e as carteiras situadas na fronteira está dada por:

$$\overline{r}_q=\beta_{qp}\overline{r}_p+(1-\beta_{qp})\overline{r}_{z(p)} \qquad \beta_{qp}=\frac{\sigma_{qp}}{\sigma_p^2}$$



$$\frac{d\bar r}{d\sigma_p} = \frac{\bar r_p - \bar r_q}{\frac{\sigma_p^2 - \sigma_{qp}}{\sigma_p}} \quad \text{cando} \quad \lambda p + (1-\lambda) q$$

$$\text{pendente recta que une p e } \bar r_z = \frac{\bar r_p - \bar r_z}{\sigma_p}$$

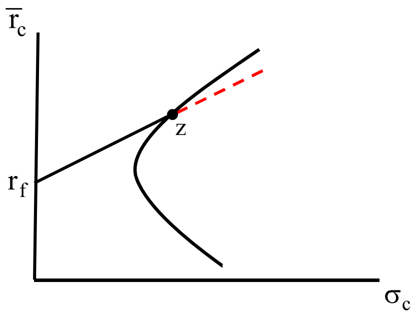
$$\frac{\bar r_p - \bar r_q}{\frac{\sigma_p^2 - \sigma_{qp}}{\sigma_p}} = \frac{\bar r_p - \bar r_z}{\sigma_p} \Rightarrow \bar r_q = \frac{\sigma_{qp}}{\sigma_p^2}\bar r_p + \frac{\sigma_p^2 - \sigma_{qp}}{\sigma_p^2}\bar r_z$$

5. Carteiras eficientes con activos con e sen risco

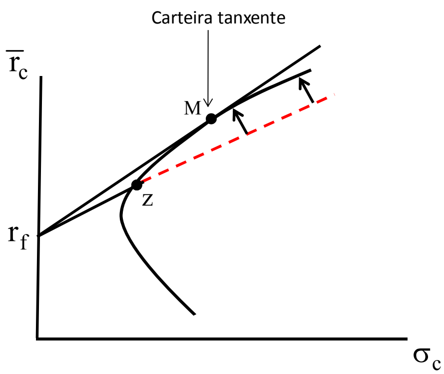
Consideramos un activo sen risco e un activo ou unha carteira con varios activos con risco. As características desta carteira serán:

$$\left.\begin{array}{l} \bar r_c = r_f + \omega_1 (\bar r_z - r_f) \\ \sigma_c = \omega_1 \sigma_z \end{array}\right\} \Rightarrow \bar r_c = r_f + \left(\frac{\bar r_z - r_f}{\sigma_z}\right)\sigma_c$$

Graficamente:



Neste caso, a fronteira de carteiras eficientes será:



Analiticamente, podemos derivar esta fronteira resolvendo o problema:

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_M &= \sum_{j=1}^{N} \omega_j \bar{r}_j \\ \sigma_M^2 &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} \omega_j \omega_h \sigma_{jh} \end{aligned}\right] \quad \max_{\{\omega_1,\dots,\omega_N\}} \frac{\sum_{j=1}^{N} \omega_j \left(\bar{r}_j - r_f\right)}{\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} \omega_j \omega_h \sigma_{jh}\right)^{1/2}}$$

Ou ben:

$$\left.\begin{aligned} &\min_{\{\omega_1,\dots,\omega_N\}} \quad \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} \omega_j \omega_h \sigma_{jh} \\ &\text{tal que}: \quad \sum_{j=1}^{N} \omega_j \bar{r}_j + \left(1 - \sum_{j=1}^{N} \omega_j\right) r_f = \bar{r}_M \end{aligned}\right]$$

<u>Solución 1</u>:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} \omega_j \omega_h \sigma_{jh} + \lambda_1 \left[\bar{r}_M - \sum_{j=1}^{N} \omega_j \bar{r}_j - \left(1 - \sum_{j=1}^{N} \omega_j\right) r_f\right]$$

CPO:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_j} = \omega_j \sigma_j^2 + \sum_{\substack{h=1 \\ j\neq h}}^{N} \omega_h \sigma_{jh} - \lambda_1 \left(\bar{r}_j - r_f\right) = 0 \quad j = 1,2,\dots,N$$

$$= \sum_{J=1}^{N}\sum_{=1}^{N} \omega_j \omega_h \sigma_{jh} - \lambda_1 \left(\bar{r}_j - r_f\right) = 0 \quad j = 1,2,\dots,N$$

En termos matriciais, podemos escribir as CPO como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_N \end{pmatrix}}_{\omega} - \lambda_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \vdots \\ \bar{r}_N \end{pmatrix}}_{\bar{r}} + \lambda_1 r_f \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{1_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{0_N}$$

$$\left.\begin{aligned} V\omega - \lambda_1(\bar{r} - r_f 1_N) &= 0_N \\ \bar{r}_M &= \omega^T(\bar{r} - r_f 1_N) + r_f \end{aligned}\right] \Rightarrow \omega = V^{-1}(\bar{r} - r_f 1_N)\frac{\bar{r}_M - r_f}{H}$$

$$H = (\bar{r} - r_f 1_N)^T V^{-1} (\bar{r} - r_f 1_N)$$

Solución 2:

$$\text{CPO: } (\bar{r}_j - r_f)\sigma_M^{-1} - \frac{1}{2}(\bar{r}_M - r_f)\left(\sigma_M^2\right)^{-3/2}(2\omega_j\sigma_j^2 + 2\sum_{\substack{h=1 \\ j\neq h}}^{N} \omega_h \sigma_{jh}) = 0$$

$$(\overline{r}_j - r_f) = \underbrace{\frac{(\overline{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2}}_{P} \sum_{h=1}^{N} \omega_h \sigma_{jh} \quad j = 1,2,\ldots,N$$

Teremos un sistema de ecuacións:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \overline{r}_1 - r_f \\ \overline{r}_2 - r_f \\ \vdots \\ \overline{r}_N - r_f \end{pmatrix}}_{\overline{r}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} P\omega_1 \\ P\omega_2 \\ \vdots \\ P\omega_N \end{pmatrix}}_{\hat{\omega}} \Rightarrow \quad \hat{\omega} = V^{-1}\overline{r}$$

ω_j podémolo obter resolvendo:

$$P\omega_1 + P\omega_2 + \cdots + P\omega_N = P(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_N) = P$$

$$P\omega_j = K_j \qquad j = 1,2,\ldots,N$$

$$\Rightarrow \omega_j = \frac{K_j}{P\omega_1 + P\omega_2 + \cdots + P\omega_N} \qquad j = 1,2,\ldots,N$$

<u>Exemplo</u>:

$$\left.\begin{matrix} \overline{r}_1 = 12\% & \sigma_1 = 30\% \\ \overline{r}_2 = 6\% & \sigma_2 = 20\% \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} \rho_{12} = 0,15 \\ i = 5\% \end{matrix}$$

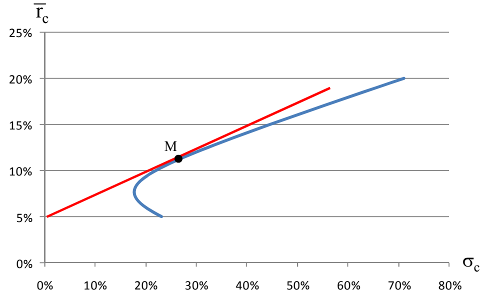
CPO :

$$\left.\begin{matrix} (\overline{r}_1 - r_f)\sigma_M^{-1} - \dfrac{(\overline{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2}\left(\omega_1\sigma_1^2 + \omega_2\sigma_{12}\right) = 0 \\ (\overline{r}_2 - r_f)\sigma_M^{-1} - \dfrac{(\overline{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2}\left(\omega_2\sigma_2^2 + \omega_1\sigma_{12}\right) = 0 \end{matrix}\right] \quad \left.\begin{matrix} (\overline{r}_1 - r_f) = P\omega_1\sigma_1^2 + P\omega_2\sigma_{12} \\ (\overline{r}_2 - r_f) = P\omega_2\sigma_2^2 + P\omega_1\sigma_{12} \end{matrix}\right]$$

$$\left.\begin{matrix} (0,12 - 0,05) = P\omega_1 0,30^2 + P\omega_2(0,30 \cdot 0,20 \cdot 0,15) \\ (0,06 - 0,05) = P\omega_2 0,20^2 + P\omega_1(0,30 \cdot 0,20 \cdot 0,15) \end{matrix}\right] \quad \begin{matrix} P\omega_1 = 0,7701 \\ P\omega_2 = 0,0767 \end{matrix}$$

$$\omega_1 = \frac{0,7701}{0,8468} = 0,9094 \qquad \omega_2 = \frac{0,0767}{0,8468} = 0,0906$$

Graficamente:

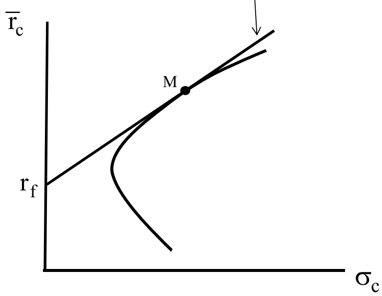


$\overline{r}_M = 11,5\% \quad \sigma_M = 27,6\%$

Unha vez que determinamos a carteira tanxente M, o conxunto de carteiras eficientes no espazo media desviación estándar está dado por:

$$\overline{r}_c = r_f + \left(\frac{\overline{r}_M - r_f}{\sigma_M}\right)\sigma_c \longrightarrow \text{Liña do mercado de capitais}$$

Graficamente:



Liña do mercado de capitais: relaciona a rendibilidade esperada e o risco para carteiras eficientes.

Neste caso, teorema de separación de fondos establece que o conxunto de carteiras eficientes no espazo media-desviación estándar está determinado por dous únicos fondos: o activo sen risco e a carteira tanxente.

A carteira tanxente podémola atopar como:

$$(\overline{r}_j - r_f) = \underbrace{\frac{(\overline{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2}}_{P}\sum_{h=1}^{N}\omega_h\sigma_{jh} = P\mathrm{Cov}(r_j, r_M) \qquad j = 1,2,\ldots,N$$

$$\frac{(\overline{r}_1 - r_f)}{\mathrm{Cov}(r_1, r_M)} = \frac{(\overline{r}_2 - r_f)}{\mathrm{Cov}(r_2, r_M)} = \cdots = \frac{(\overline{r}_N - r_f)}{\mathrm{Cov}(r_N, r_M)} = \frac{(\overline{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2}$$

Para calquera activo j:

$$\frac{(\overline{r}_j - r_f)}{\mathrm{Cov}(r_j, r_M)} = \frac{(\overline{r}_M - r_f)}{\sigma_M^2} \qquad \forall j = 1,2,\ldots,N$$

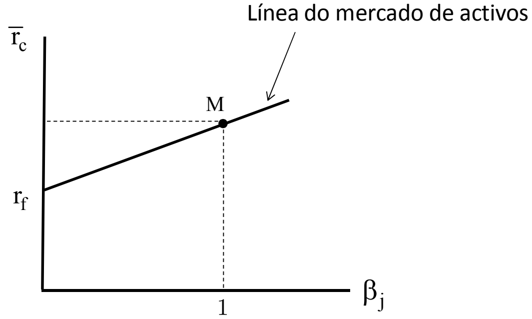
$$\bar{r}_j = r_f + \underbrace{\frac{Cov(r_j, r_M)}{\sigma_M^2}}_{\beta_j}(\bar{r}_M - r_f) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, N$$

Polo tanto, o coeficiente beta do activo j $\beta_j = \dfrac{Cov(r_j, r_M)}{\sigma_M^2}$ indica a contribución proporcional do risco do activo j á carteira M.

Así, podemos escribir a rendibilidade esperada do activo j como:

$$\bar{r}_j = r_f + \beta_j(\bar{r}_M - r_f)$$

Graficamente:



A liña do mercado de activos relaciona a rendibilidade esperada dun activo co risco beta, con independencia de se o activo é eficiente ou non.

Se coñecemos a beta dun activo j, a liña do mercado de activos permítenos valoralo simplemente replicando a súa rendibilidade esperada cunha combinación dos activos sen risco e a carteira M:

$$\bar{r}_j = r_f + \beta_j(\bar{r}_M - r_f) = \beta_j \bar{r}_M + (1 - \beta_j) r_f \quad \Rightarrow \quad \beta_j = \omega_M$$

A rendibilidade esperada de todos os activos financeiros, dada a súa beta, situarase sobre a liña do mercado de activos, pola contra existirían oportunidades de arbitraxe.

Por exemplo: se a rendibilidade é maior que a de equilibrio, entón é porque o prezo de mercado é baixo: o exceso de demanda acabaría por elevar o prezo e reducir a rendibilidade até o seu nivel de equilibrio.

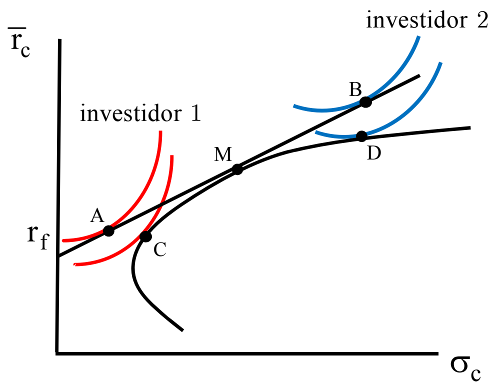
A beta dunha carteira c coa carteira M é igual a:

$$\begin{aligned}
\beta_c &= \frac{Cov(r_c, r_M)}{\sigma_M^2} \\
&= \frac{Cov(\omega_1 r_1 + \cdots + \omega_N r_N, r_M)}{\sigma_M^2} \\
&= \frac{\omega_1 Cov(r_1, r_M)}{\sigma_M^2} + \cdots + \frac{\omega_N Cov(r_N, r_M)}{\sigma_M^2} \\
&= \omega_1 \beta_1 + \cdots + \omega_N \beta_N
\end{aligned}$$

EQUILIBRIO DE MERCADO: MODELO CAPM

1. Supostos básicos:

- Mercado:
  - Modelo estático: un único período de tempo no que se negocian activos.
  - Os activos son divisibles e a súa oferta está dada.
  - Non existen custos de transacción.
  - Pódese (ou non) intercambiar un activo sen risco a cuxo tipo de xuro se pode prestar ou pedir prestada calquera cantidade de recursos.
  - Mercado competitivo: os investidores toman como dados as distribucións de rendibilidade dos activos, non explicitando ningunha relación destas con variables reais da economía.
- Investidores
  - Os investidores teñen expectativas homoxéneas (información simétrica) sobre a distribución da rendibilidade dos activos
  - A fronteira eficiente no espazo media-varianza é o mesmo para todos os investidores.
  - Os investidores adoptan as súas decisións segundo o rendemento esperado e a varianza ou volatilidade da rendibilidade dos investimentos
  - A rendibilidade dos activos segue unha distribución normal ou as preferencias dos investidores son cuadráticas.
- Elección:
  - (a) u''<0, concavidade ou aversión ao risco: a carteira óptima está sobre a fronteira.
  - (b) u''>0, utilidade crecente: a carteira óptima é eficiente.



2. Equilibrio de mercado sen activo sen risco: cero-beta CAPM

Os mercados baléiranse: oferta = demanda

- Demanda do activo j para un prezo dado do individuo i: $\omega_{ij} W_i$
- Demanda total do activo j: $\sum_{i=1}^{I} \omega_{ij} W_i$

- Equilibrio para o activo j: $\sum_{i=1}^{I} \omega_{ij} W_i = P_j Q_j$
- Equilibrio de mercado: $\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{I} \omega_{ij} W_i = \sum_{j=1}^{N} P_j Q_j = W_M$

$$\sum_{i=1}^{I} \omega_{ij} \frac{W_i}{W_M} = \frac{P_j Q_j}{W_M} = \omega_{Mj} \quad \forall j$$

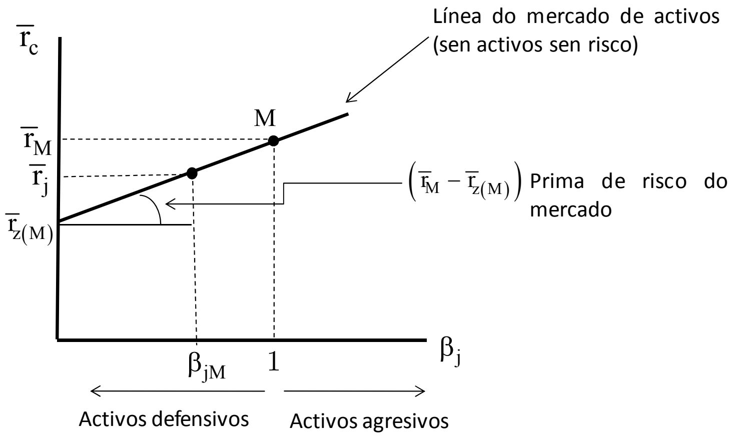
Teremos que:

- A carteira de mercado é unha combinación convexa das carteiras individuais.
- A carteira de mercado é eficiente dado que calquera combinación convexa de carteiras da fronteira eficiente (as carteiras individuais) está sobre a fronteira eficiente de carteiras.

Dada a carteira de mercado: o rendemento de calquera activo pode replicarse cunha combinación da carteira de mercado e unha carteira de covarianza nula con respecto á carteira de mercado:

$$\bar{r}_j = \bar{r}_{z(M)} + \left(\bar{r}_M - \bar{r}_{z(M)}\right)\beta_{jM} \qquad \beta_{jM} = \frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M^2}$$

A este modelo de valoración denomínaselle cero-beta CAPM.
Graficamente:



3. Equilibrio de mercado cun activo sen risco

- Calquera investidor:
  - Non empeora a súa utilidade con respecto ao caso no que non é posible negociar un activo sen risco, independentemente de cal sexa a súa aversión ao risco.
  - A súa carteira óptima consiste nunha combinación do activo sen risco e a carteira tanxente M: separación de fondos. Esa combinación depende da aversión ao risco do investidor.
  - Compra a mesma carteira de activos con risco: a carteira tanxente M.
- Os mercados baléiranse:

- A cantidade prestada = cantidade que se pide prestada; MA = MB
- Os activos con risco: oferta = demanda

  Demanda do activo j para un prezo dado do individuo i: $\omega_{ij} W_i$

  Demanda total do activo j: $\sum_{i=1}^{I} \omega_{ij} W_i$

  Equilibrio para o activo j: $\sum_{i=1}^{I} \omega_{ij} W_i = P_j Q_j$

  Equilibrio de mercado: $\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{I} \omega_{ij} W_i = \sum_{j=1}^{N} P_j Q_j = W_M$

$$\sum_{i=1}^{I} \omega_{ij} \frac{W_i}{W_M} = \frac{P_j Q_j}{W_M} = \omega_{Mj} \quad \forall j$$

Teremos que:

- A carteira de mercado é unha combinación convexa das carteiras individuais.
- A carteira de mercado é eficiente dado que calquera combinación convexa de carteiras da fronteira eficiente (as carteiras individuais) está sobre a fronteira eficiente de carteiras.
- A carteira de mercado é a carteira tanxente M.

Así, o prezo de equilibrio de calquera activo eficiente j está dado por:

$$\bar{r}_j = \beta_j \bar{r}_M + (1-\beta_j) r_f = r_f + \left(\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \right) \frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M} = r_f + \beta_j (\bar{r}_M - r_f)$$

?

Valor temporal do diñeiro

Ratio de Sharpe: remuneración do risco

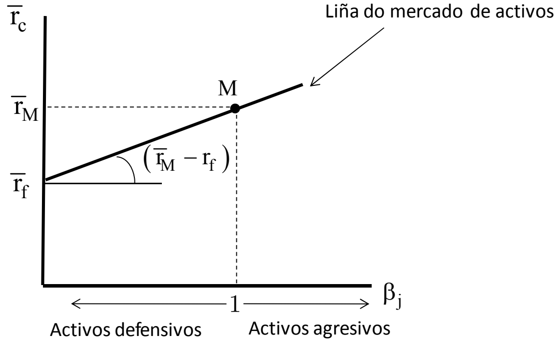
Cantidade de risco: $\beta_j \sigma_M = \rho_{jM} \sigma_j$

Prima de risco do activo de renda variable: cantidade de risco por exceso de rendabilidade da carteira de mercado $(\bar{r}_M - r_f) > 0 \text{ si } u' > 0$

Risco sistemático: contribución do activo j ao risco da carteira de mercado M. Este é o único risco que se paga en equilibrio.

A esta relación de equilibrio que nos permite valorar un activo denomínaselle Modelo de Valoración de Activos (Capital Asset Pricing Model), CAPM, desenvolvido por Lintner (1965), Mossin (1965) e Sharpe (1964).

Graficamente:



4. Prezo de equilibrio dun activo

Modelo de mercado de Sharpe (1963) establece unha relación lineal ente a rendibilidade dun activo e a rendibilidade da carteira de mercado que nos permite descompor o risco en varios compoñentes:

$$\tilde{r}_j = \underbrace{r_f + \beta_j(\overline{r}_M - r_f)}_{\text{Compoñente sistemático}} + \underbrace{\varepsilon_j}_{\text{Compoñente non sistemático}}, \quad E\left(\varepsilon_j\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_j^2 = \underbrace{\beta_j^2 \sigma_M^2}_{\text{Risco non diversificable, sistemático ou de mercado}} + \underbrace{\sigma_\varepsilon^2}_{\text{Risco diversificable, residual ou non sistemático}}$$

↑

Si o activo é eficiente, este compoñente do risco se elimínase coa diversificación.

↑

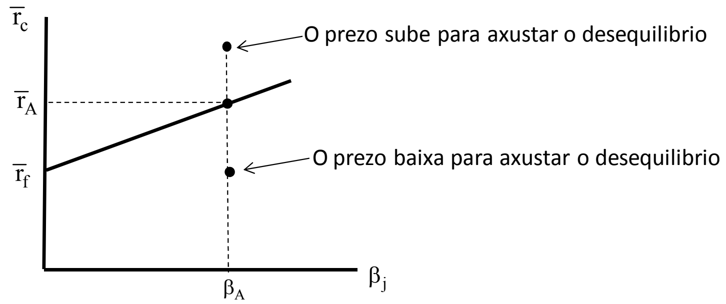
En equilibrio este risco NON é retribuido.

Así, o prezo dun activo podémolo obter como:

$$\frac{E\left(P_{jt+1}\right)}{P_{jt}} = \overline{r}_j = r_f + \beta_j(\overline{r}_M - r_f) \quad \Rightarrow \quad P_{jt} = \frac{E\left(P_{jt+1}\right)}{r_f + \beta_j(\overline{r}_M - r_f)}$$

$$\frac{\partial P_{jt}}{\partial \beta_j} < 0, \qquad \frac{\partial P_{jt}}{\partial E\left(P_{jt}\right)} > 0$$

En caso de desequilibrio, producirase unha corrección:



5. Outra aproximación ao modelo CAPM

- Os mercados baléiranse:

A cantidade prestada = cantidade que se pide prestada

Os activos con risco: oferta = demanda, $\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{I}\omega_{ij}W_i = \sum_{j=1}^{N}P_jQ_j = W_M$

$$\begin{array}{cc}
 & \text{Activos}\\
 & \begin{array}{ccccc}1 & 2 & & N & N+1\end{array}\\
\text{investidores}\begin{array}{c}1\\2\\\vdots\\I\end{array} & \begin{bmatrix}\varpi_{11} & \varpi_{12} & \cdots & \varpi_{1N} & \varpi_{1N+1}\\ \varpi_{21} & \varpi_{22} & \cdots & \varpi_{2N} & \varpi_{2N+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \varpi_{I1} & \varpi_{I2} & \cdots & \varpi_{IN} & \varpi_{IN+1}\end{bmatrix}\begin{array}{c}\delta_1\\\delta_2\\\vdots\\\delta_I\end{array} \Rightarrow \sum_{j=1}^{N+1}\sum_{i=1}^{I}\varpi_{ij}=1\\
 & \begin{array}{ccccc}\theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_N & 0\end{array}
\end{array}$$

- Os investidores maximizan a súa utilidade esperada: $E\left[u_i\left(r\right)\right]=f_i\left(\overline{r}_i,\sigma_i^2\right)$, onde:

$\overline{r}_i=\left(\frac{1}{\delta_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\varpi_{ij}r_j+\varpi_{iN+1}r_f\right)$ e $\sigma_i^2=\left(\frac{1}{\delta_i}\right)^2\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\varpi_{ij}\varpi_{ik}\sigma_{jk}\right)$. A restrición orzamentaria é: $\left(\frac{1}{\delta_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{N}\varpi_{ij}+\varpi_{iN+1}\right)=1$

- Maximización da utilidade esperada dada a restrición orzamentaria:

CPO, j = 1,2,…,N

$$\frac{\partial f_i}{\partial \overline{r}_i}\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial \varpi_{ij}}+\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i^2}\frac{\partial \sigma_i^2}{\partial \varpi_{ij}}+\lambda_i\left(\frac{1}{\delta_i}\right)=\frac{\partial f_i}{\partial \overline{r}_i}\left(\frac{1}{\delta_i}\right)\overline{r}_j+\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i^2}\left[2\left(\frac{1}{\delta_i}\right)^2\sum_{k=1}^{N}\varpi_{ik}\sigma_{jk}\right]+\lambda_i\left(\frac{1}{\delta_i}\right)=0$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \overline{r}_i}\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial \varpi_{iN+1}}+\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i^2}\frac{\partial \sigma_i^2}{\partial \varpi_{iN+1}}+\lambda_i\left(\frac{1}{\delta_i}\right)=\frac{\partial f_i}{\partial \overline{r}_i}\left(\frac{1}{\delta_i}\right)r_f+\lambda_i\left(\frac{1}{\delta_i}\right)=0$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial \overline{r}_i}\left(\overline{r}_j-r_f\right)+\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i^2}\left[2\left(\frac{1}{\delta_i}\right)\sum_{k=1}^{N}\varpi_{ik}\sigma_{jk}\right]=0 \quad j=1,2,\ldots,N$$

Concretamente, para os activos j e k:

$$\frac{\frac{\partial f_i}{\partial \bar{r}_i}\left(\bar{r}_j - r_f\right)}{\frac{\partial f_i}{\partial \bar{r}_i}\left(\bar{r}_z - r_f\right)} = \frac{-\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i^2}\left[2\left(\frac{1}{\delta_i}\right)\sum_{k=1}^{N}\varpi_{ik}\sigma_{jk}\right]}{-\frac{\partial f_i}{\partial \sigma_i^2}\left[2\left(\frac{1}{\delta_i}\right)\sum_{k=1}^{N}\varpi_{ik}\sigma_{zk}\right]} \Rightarrow \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sum_{k=1}^{N}\varpi_{ik}\sigma_{jk}} = \frac{\bar{r}_z - r_f}{\sum_{k=1}^{N}\varpi_{ik}\sigma_{zk}}$$

Como en equilibrio: $\sum_{k=1}^{N}\varpi_{ik} = \theta_k \quad k = 1, 2, \dots, N$

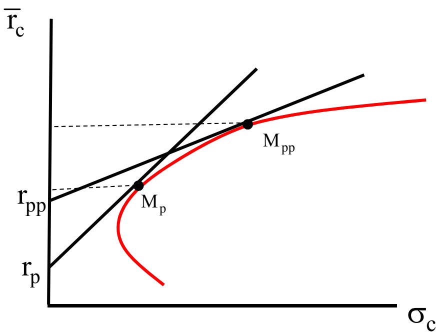
$$\frac{\bar{r}_j - r_f}{\sum_{k=1}^{N}\theta_k\sigma_{jk}} = \frac{\bar{r}_z - r_f}{\sum_{k=1}^{N}\theta_k\sigma_{zk}}$$

Multiplicando por θ_d e sumando para todo activo con risco:

$$\frac{\sum_{d=1}^{N}\left(\theta_d\bar{r}_j - \theta_d r_f\right)}{\sum_{d=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\theta_d\theta_k\sigma_{jk}} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M^2} \Rightarrow \frac{\bar{r}_j - r_f}{\sum_{k=1}^{N}\theta_k\sigma_{jk}} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M^2} \Rightarrow \bar{r}_j = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}\frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M}$$

6. Extensión do modelo CAPM

O tipo de xuro ao que se presta e pídese prestado son diferentes



$$\bar{r}_j = r_p + \beta_{jM_p}(\bar{r}_{M_p} - r_p) \quad \text{si } \bar{r}_j < \bar{r}_{M_p}$$

$$\bar{r}_j = r_{pp} + \beta_{jM_{pp}}(\bar{r}_{M_{pp}} - r_{pp}) \quad \text{si } \bar{r}_j < \bar{r}_{M_{pp}}$$

7. Limitacións do modelo CAPM

- A toma de decisións limítase ao espazo media-varianza, dado que non se consideran os termos de orde maior a tres na aproximación da utilidade esperada.
    - Preferencias cuadráticas. Problemas?
    - Rendibilidades normais: son estables baixo a suma, pero non é acoutada por abaixo, o que é inconsistente coa responsabilidade limitada.

- Os supostos do modelo sobre o mercado non son moi realistas: expectativas homoxéneas, modelo estático?
- A evidencia empírica non avala en moitos casos as conclusións extraídas do modelo teórico: O CAPM é un modelo que explica o prezo dun activo en función dun único factor, pero exíste a evidencia de que outras variables (taxa de beneficios, cociente valor contable e valor de mercado, vendas, etc.), ademais da carteira de mercado, tamén teñen capacidade explicativa.

8. Ecuación fundamental de valoración e modelo CAPM

$$\bar{r}_j = r_f + \beta_j(\bar{r}_M - r_f) \Rightarrow \left(1+\bar{r}_j\right) = \left(1+r_f\right) + \beta_j(\bar{r}_M - r_f)$$

$$\frac{\left(1+\bar{r}_j\right)}{\left(1+r_f\right)} - \frac{(\bar{r}_M - r_f)\sigma_{jM}}{\left(1+r_f\right)\sigma_M^2} = 1$$

$$\hookrightarrow 1 = \frac{1}{1+i}E\left(r_j\right) + \mathrm{Cov}\left(M, r_j\right)$$

$$\frac{\left(1+\bar{r}_j\right)}{\left(1+r_f\right)} + \mathrm{Cov}\left(r_j, \frac{1}{\left(1+r_f\right)} - \frac{(\bar{r}_M - r_f)\left(r_M - r_f\right)}{\left(1+r_f\right)\sigma_M^2}\right) = 1$$

$$M = \frac{1}{\left(1+r_f\right)} - \frac{(\bar{r}_M - r_f)\left(r_M - \bar{r}_M\right)}{\left(1+r_f\right)\sigma_M^2}$$

$$M = \underbrace{\frac{1}{\left(1+r_f\right)} + \frac{(\bar{r}_M - r_f)\bar{r}_M}{\left(1+r_f\right)\sigma_M^2}}_{\alpha_0} - \underbrace{\frac{(\bar{r}_M - r_f)}{\left(1+r_f\right)\sigma_M^2}}_{\alpha_1} r_M$$

$$\Rightarrow E\left[r_j\left(\alpha_0 - \alpha_1 r_M\right)\right] = 1 \quad \forall j = 1, 2, \ldots, N$$

BIBLIOGRAFÍA

DANTHINE, JEAN-PIERRE E DONALDSON, JOHN B. (2005): INTERMEDIATE FINANCIAL THERORY. ACADEMIC PRESS ADVANCED FINANCE SERIES. CAPÍTULO 5, 6 Y 7.

HENS, THORSTEN E RIEGER, MARC O. (2010): FINANCIAL ECONOMICS. A CONCISE INTRODUCTION TO CLASSICAL AND BEHAVIORAL FIINANCE. SPRINGER. CAPITULO 3.

MARÍN, JOSÉ MARÍA E RUBIO, GONZALO (2001): ECONOMÍA FINANCIERA. ANTONI BOSCH. CAPÍTULO 5, 6 Y 7.

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

VICERREITORÍA DE ESTUDANTES,
CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA