MATERIA
Análise Económica dos Mercados Financeiros I

TITULACIÓN
Máster en Economía: Organización Industrial e Mercados Financeiros

unidade didáctica
6

Ciencias Sociais e Xurídicas

Decisións financeiras con incerteza

Juan Carlos Reboredo Nogueira

Departamento: Fundamentos da Análise Económica
Facultade ou Escola: Facultade de CC Económicas e Empresariais

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

ISBN
978-84-15876-34-2

MATERIA: Análise Económica dos mercados financeiros I
TITULACIÓN: Máster en Economía: Organización industrial e mercados financeiros
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Introdución: Economía Financeira e valoración
- Problemas básicos da Economía Financeira
- Valoración
- Arbitraxe e equilibrio

Unidade II. Cálculo financeiro
- Valor do diñeiro no tempo
- Rendas
- Préstamos
- Empréstitos

Unidade III. Estrutura temporal dos tipos de xuro
- A Curva Cupón Cero
- Métodos de estimación da curva cupón cero
- Teorías explicativas de estrutura temporal dos tipos de xuro

Unidade IV. Activos de renda fixa
- Activos de renda fixa
- Risco de activos de renda fixa
- Inmunización

Unidade V. Valoración de activos continxentes
- Activos continxentes
- Activos Arrow-Debreu
- Probabilidades neutrais ao risco
- Martingalas
- Mercados completos

Unidade VI. Decisións financeiras con incerteza
- Preferencias e incerteza
- Análise media-varianza
- Dominio estocástico

Unidade VII. Modelo de valoración de activos CAPM
- Alternativas de investimento no espazo media-varianza
- Equilibrio de mercado: modelo CAPM

Unidade VIII. Modelo de valoración de activos APT
- Modelo factorial e carteiras de activos
- Valoración con ausencia de arbitraxe: modelo APT

ÍNDICE

INTRODUCCION

Esta unidade didáctica forma parte do curso de Análise Económica dos Mercados Financeiros I que se imparte no primeiro cuadrimestre do Máster en Economía: Organización Industrial e Mercados Financeiros.

O propósito da unidade é caracterizar as preferencias dun investidor polos activos financeiros ante unha situación de incerteza. As preferencias son un ingrediente fundamental da teoría de elección de carteira. Con esta finalidade, introdúcese a utilidade esperada e descríbense diferentes funcións de utilidade que, dependendo das súas características, permiten describir diferentes actitudes dos investidores cara o risco como aversión, neutralidade ou amor ao risco. Tamén se caracteriza a utilidade esperada no espazo media varianza, de xeito que en función das características de risco e rendibilidade esperada dun activo podemos ordenar as diferentes alternativas de investimento de acordo coas preferencias do individuo. Finalmente, introdúcese o concepto de dominio estocástico, un concepto que, dependendo de cómo sexa a relación entre a distribución de probabilidade dos rendementos dos activos, vainos a permitir establecer unha relación de preferencia entre dous activos a partires dunha información moi básica das preferencias.

A comprensión desta unidade reviste un grao de dificultade elevado na mediada que require de unha elevada capacidade de abstracción e do manexo da teoría da elección baixo incerteza e da estatística. É por iso que ao longo da unidade se utilizan diversos exemplos numéricos que tratan de ilustrar os conceptos teóricos expostos.

PALABRAS CLAVE

Utilidade esperada, aversión ao risco, prima de risco, media, varianza, dominio estocástico, distribución de probabilidade

METODOLOXIA

- A impartición do curso sempre adoptará como punto de partida as intuicións financeiras, que se tomarán como base, e a enmarcación destas intuicións no contexto do problema de valoración.
- Utilizarase preferentemente a linguaxe gráfica, máis intuitivo e máis fácil de asimilar polo estudante, pasando posteriormente á formulación dos problemas considerados en termos formais.
- Ilustraranse todos os conceptos con exemplos prácticos que estean próximos a realidade financeira do alumno coa finalidade de que o alumno aprenda a aplicar os instrumentos de valoración a activos financeiros con características semellantes.
- Propoñerase unha serie de exercicios prácticos que ilustren a aplicabilidade e utilidade dos coñecementos adquiridos.
- Se fomentará a participación do alumno, tanto no desenvolvemento dos contidos teóricos como na resolución dos casos prácticos.

PREFERENCIAS E INCERTEZA

1. A utilidade esperada

Como toman as decisións de investimento ou de compra de activos os individuos/investidores nun contexto de incerteza?

Existen dous enfoques que nos permiten dar unha resposta a esta pregunta: un enfoque racional, que nos permite saber como teñen que ser as decisións (óptimas) que se adoptan, e un enfoque descritivo do comportamento humano (*behavioural*) que nos permite caracterizar as decisións reais que os individuos adoptan. Nesta unidade, centraremos a atención no primeiro enfoque.

Para caracterizar as decisións baixo incerteza, temos primeiramente que se ser capaces de:

- ordenar as alternativas de elección de acordo coas preferencias dos individuos para o que é necesario definir unha función de utilidade,
- definir o conxunto de alternativas de elección ou investimento
- establecer un criterio de elección/decisión o que nos vai permitir formular o problema de investimento do individuo como un problema de optimización.

Como ordena/clasifica o individuo as diferentes alternativas de elección en orde de preferencia? Por exemplo, para os seguintes dous activos:

Activo 1 → Estado 1: 100 $1/2$; Estado 2: 25 $1/2$

Activo 2 → Estado 1: 100 0,7 ; Estado 2: 25 0,3

Para ordenar as diferentes alternativas precisamos dunha función de utilidade, se ben esta só nos indica o nivel de satisfacción que obtén o individuo do consumo en cada estado da natureza dado que este é coñecido. Entón, como valora o investidor os activos nunha situación de incerteza?

Parece razoable que a forma na que un individuo valora os activos dependerá non só dos seus fluxos en cada estado da natureza, senón tamén da probabilidade de que ocorra cada estado. Von Neumann-Morgenstern (1944) propón que, baixo determinados supostos, podemos describir as preferencias dun individuo en situacións de incerteza utilizando a <u>función de utilidade esperada</u>, definida para dous estados como:

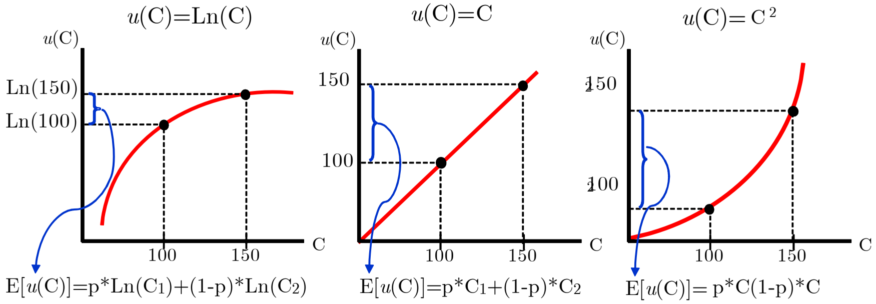
$$E\left[u(r)\right] = p\,u\left(r_1\right) + \left(1-p\right)u\left(r_2\right)$$

Ou ben, considerando múltiples estados,

$$E\left[u(r)\right] = \sum_{s=1}^{S} \pi_s u(r_s) = \int_s u(r_s) f(r_s) ds$$

A función de utilidade esperada indícanos que a utilidade do investimento nun activo financeiro con risco, denominada utilidade esperada, é a media ponderada das utilidades do investimento en cada estado da natureza, utilizando como ponderacións a probabilidade de cada estado.

Se consideramos un activo con 2 estados e fluxos 150 e 100, a función de utilidade esperada podémola representar a partir de funcións de utilidade de diferentes tipos como:



- $u''(c)<0$ (utilidade marxinal decrecente)
- Función utilidade cóncava
- Preferencias Cobb-Douglas

- $u''(c)=0$ (utilidade marxinal constante)
- Función utilidade lineal
- Sustitutos perfectos

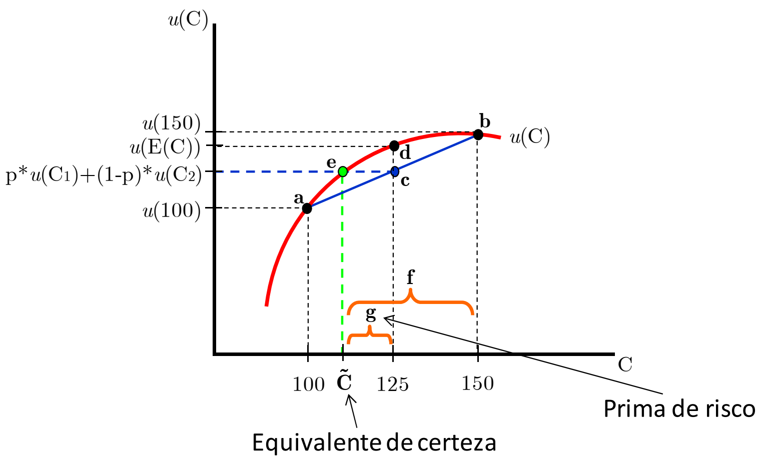
- $u''(c)>0$ (utilidade marxinal crecente)
- Función utilidade convexa

2. Aversión ao risco

Segundo a disposición do individuo a evitar unha situación de incerteza, podemos ter 3 tipos de preferencias polo risco:

A. Adverso ao risco: prefire unha situación de certeza a unha de incerteza: está disposto a pagar ou renunciar a unha cantidade monetaria (comprar un seguro) para evitar unha situación de incerteza. Graficamente:

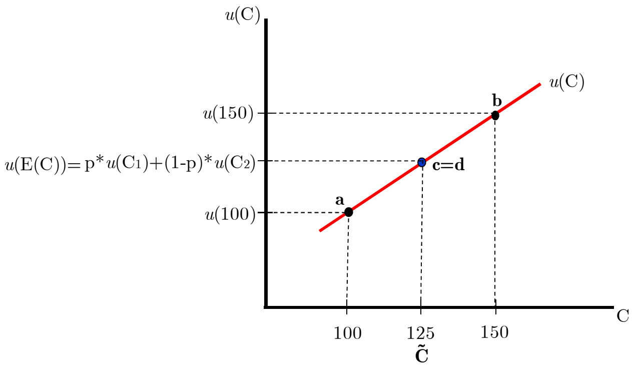
$$E[u(C)]=p*u(C_1)+(1-p)*u(C_2)<u(E(C))$$



A distancia entre os puntos d e c mide as ganancias de utilidade derivadas de comprar un seguro completo e xusto. O intervalo f acouta a prima de seguro que o individuo estaría disposto a pagar e o intervalo g acouta os posibles valores que podería tomar o prezo do seguro desde o punto de vista do individuo e da empresa aseguradora.

B. Neutral ao risco: é indiferente entre unha situación de certeza e unha de incerteza: non está disposto a pagar unha cantidade monetaria (comprar un seguro) para evitar unha situación de incerteza. Graficamente:

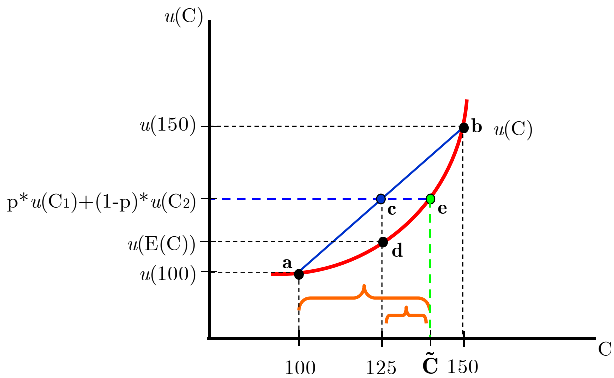
$$E[u(C)]=p*u(C_1)+(1-p)*u(C_2)=u(E(C))$$



Neste caso non existen ganancias de utilidade derivadas de comprar un seguro completo e actuarialmente xusto: o individuo é indiferente entre estar nunha situación de certeza ou nunha de incerteza.

C. Amante ao risco: prefire unha situación de incerteza a unha de certeza: está disposto a pagar unha cantidade monetaria (vender un seguro) para enfrontarse a unha situación de incerteza. Graficamente:

$$E[u(C)]=p*u(C_1)+(1-p)*u(C_2)>u(E(C))$$



A distancia entre c e d mide a ganancia de utilidade derivada deste intercambio dado pola venda un seguro (completo e actuarialmente xusto).

3. Medida da aversión ao risco

O grao de aversión ao risco dos individuos pódese medir utilizando a información que nos achega a segunda derivada da función de utilidade. Porén, dado que esta derivada non é invariante a transformacións lineais positivas, Arrow e Pratt (AP) propoñen como medida útil da actitude cara ao risco a seguinte ratio:

$$\mathrm{AP}(\mathrm{r}) = -\frac{u''(\mathrm{r})}{u'(\mathrm{r})}$$

Denominada coeficiente de Arrow-Pratt da aversión absoluta ao risco. Teremos que:

- Aversión ao risco, $u'' < 0 \Rightarrow \mathrm{AP}(r) > 0$
- Neutralidade ao risco, $u'' = 0 \Rightarrow \mathrm{AP}(r) = 0$
- Amor ao risco, $u'' > 0 \Rightarrow \mathrm{AP}(r) < 0$

A prima de risco que un individuo tería que recibir para estar disposto a comprar un activo con risco depende de:

- A actitude do individuo cara ao risco
- a cantidade de risco medido pola varianza

Supoñamos que o individuo ten unha riqueza certa de $\overline{\mathrm{C}}$ pero pode ocorrer que gañe ou perda unha cantidade r, tal que E(r)=0, entón:

$$u(\overline{\mathrm{C}} - \mathrm{Pr}) = \mathrm{E}[u(\overline{\mathrm{C}} + \mathrm{r})]$$

$$u(\overline{\mathrm{C}} - \mathrm{Pr}) \cong u(\overline{\mathrm{C}}) - u'(\overline{\mathrm{C}})\mathrm{Pr} + error$$

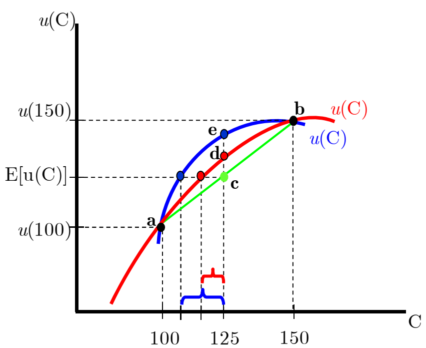
$$\mathrm{E}[u(\overline{\mathrm{C}} + \mathrm{r})] = \mathrm{E}[u(\overline{\mathrm{C}}) + u'(\overline{\mathrm{C}})r + \tfrac{1}{2}u''(\overline{\mathrm{C}})r^2 + error] = u(\overline{\mathrm{C}}) + \tfrac{1}{2}u''(\overline{\mathrm{C}})E(r^2)$$

$$u(\overline{\mathrm{C}}) - u'(\overline{\mathrm{C}})\mathrm{Pr} \cong u(\overline{\mathrm{C}}) + \tfrac{1}{2}u''(\overline{\mathrm{C}})\sigma_r^2 \Rightarrow \mathrm{Pr} \cong -\tfrac{1}{2}\frac{u''(\overline{\mathrm{C}})}{u'(\overline{\mathrm{C}})}\sigma_r^2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{AP}(\overline{\mathrm{C}})\sigma_r^2$$

- $\uparrow \mathrm{AP} \Leftrightarrow \uparrow \mathrm{Pr}$
- $\uparrow \sigma_r^2 \Leftrightarrow \uparrow \mathrm{Pr}$

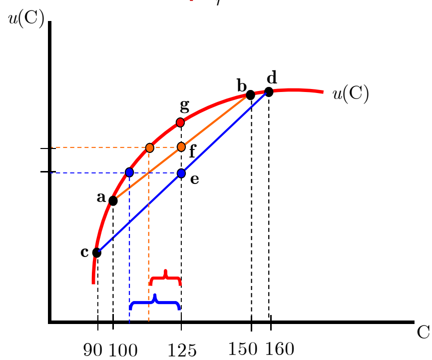
Graficamente:

$\uparrow \mathrm{AP}$



Ganacias: (e-c)>(d-c)

$\uparrow \sigma_r^2$



Ganacias: (g-e)>(g-f)

A aversión ao risco cambia co nivel de riqueza, polo que o prezo que está disposto a pagar para evitar un risco cambia co nivel de renda.

Exemplo:

- Utilidade logarítmica: $u(\mathrm{C}) = Ln(\mathrm{C}) \Rightarrow \mathrm{AP(C)} = \dfrac{1}{\mathrm{C}}$
- Utilidade exponencial: $u(\mathrm{C}) = -e^{\mathrm{AC}},\ A > 0 \Rightarrow \mathrm{AP(C)} = \mathrm{A}$

Se queremos unha medida de aversión ao risco que independente do nivel de riqueza podemos utilizar o coeficiente de Arrow-Pratt de aversión relativa ao risco:

$$\mathrm{APR(C)} = -\mathrm{C}\frac{u''(\mathrm{C})}{u'(\mathrm{C})}$$

Esta medida é o valor negativo da elasticidade da utilidade marxinal da renda: mostra a sensibilidade da utilidade marxinal a cambios na renda de forma que é independente da función de utilidade que se utilice e das unidades nas que se mida a renda. A contía da prima de risco está dada por:

$$\frac{\mathrm{Pr}}{\overline{\mathrm{C}}} \cong -\frac{1}{2}\frac{u''(\overline{\mathrm{C}})}{u'(\overline{\mathrm{C}})}\overline{\mathrm{C}}\left(\frac{\sigma_r}{\overline{\mathrm{C}}}\right)^2 = \frac{1}{2}\mathrm{APR}(\overline{\mathrm{C}})\left(\frac{\sigma_r}{\overline{\mathrm{C}}}\right)^2$$

PREFERENCIAS NO ESPAZO MEDIA-VARIANZA

A utilidade esperada podemos expresala en termos da media e a varianza da rendibilidade baixo un dos seguintes supostos:

- Utilizando a aproximación da utilidade esperada:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\mathrm{u(r)}\right] &= \mathrm{E}\left[\mathrm{u}(\overline{\mathrm{r}}) + \mathrm{u}'(\overline{\mathrm{r}})(\mathrm{r}-\overline{\mathrm{r}}) + \tfrac{1}{2}\mathrm{u}''(\overline{\mathrm{r}})(\mathrm{r}-\overline{\mathrm{r}})^2 + \sum_{\mathrm{n}=3}^{\infty}\tfrac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{u}^{(\mathrm{n})}(\overline{\mathrm{r}})(\mathrm{r}-\overline{\mathrm{r}})^{\mathrm{n}}\right] \\ &\cong \mathrm{u}(\overline{\mathrm{r}}) + \mathrm{u}'(\overline{\mathrm{r}})\mathrm{E}(\mathrm{r}-\overline{\mathrm{r}}) + \tfrac{1}{2}\mathrm{u}''(\overline{\mathrm{r}})\mathrm{E}(\mathrm{r}-\overline{\mathrm{r}})^2 \\ &= \mathrm{u}(\overline{\mathrm{r}}) + \tfrac{1}{2}\mathrm{u}''(\overline{\mathrm{r}})\sigma_{\mathrm{r}}^2 \end{aligned}$$

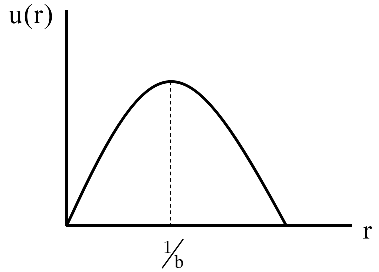
  Co que: $\mathrm{E}\left[\mathrm{u(r)}\right] = \mathrm{f}(\overline{\mathrm{r}}, \sigma_{\mathrm{r}}^2)$

  Esta aproximación será exacta no caso no que os individuos teñan preferencias cuadráticas:

  $\mathrm{u(r)} = \mathrm{r} - \mathrm{br}^2 \Rightarrow \mathrm{E}\left[\mathrm{u(r)}\right] = \mathrm{E(r)} - \mathrm{bE(r^2)} = \overline{\mathrm{r}} - \mathrm{b}\overline{\mathrm{r}}^2 - \mathrm{b}\sigma_{\mathrm{r}}^2$

  O problema e que esta función de utilidade mostra saturación e aversión absoluta ao risco crecente (os activos con risco son bens inferiores).

Graficamente:



- A rendibilidade do activo ou da carteira segue unha distribución normal (univariante ou multivariante).

$$r \sim N(\bar{r}, \sigma_r^2) \Rightarrow \frac{r-\bar{r}}{\sigma_r} \sim N(0,1)$$

$$E\left[u(r)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} u(r) f(r) dr = \int_{-\infty}^{\infty} u(\bar{r} + \sigma_r z) f(z) dz$$

A aversión ao risco relaciónase coa utilidade esperada e risco do seguinte xeito:

Aversión: u''() < 0 Neutralidade: u''() = 0 Amor: u''() > 0

$$\begin{cases} \uparrow \sigma_r^2 & \Rightarrow \downarrow E\left[u(r)\right] \\ \uparrow \bar{r} & \Rightarrow \uparrow E\left[u(r)\right] \end{cases} \quad \begin{cases} \uparrow \sigma_r^2 & \Rightarrow \quad E\left[u(r)\right] \\ \uparrow \bar{r} & \Rightarrow \uparrow E\left[u(r)\right] \end{cases} \quad \begin{cases} \uparrow \sigma_r^2 & \Rightarrow \uparrow E\left[u(r)\right] \\ \uparrow \bar{r} & \Rightarrow \uparrow E\left[u(r)\right] \end{cases}$$

A relación de preferencia entre risco e rendibilidade podémola representar por medio de curvas de indiferenza, dado que:

$$dE\left[u(r)\right] = u'(\bar{r}) d\bar{r} + \tfrac{1}{2} u'''(\bar{r}) d\bar{r} \sigma_r^2 + \tfrac{1}{2} u''(\bar{r}) d\sigma_r^2 = 0$$

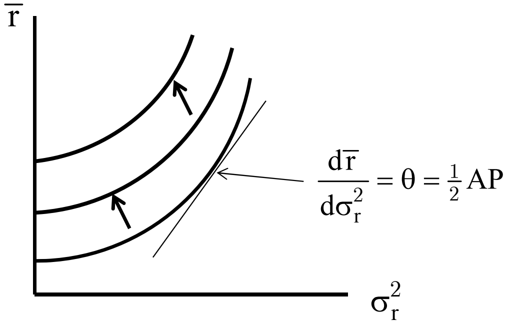
$$d\bar{r} + \tfrac{1}{2} \frac{u''(\bar{r})}{u'(\bar{r})} d\sigma_r^2 = 0 \quad \text{si } u'''() = 0$$

$$d\bar{r} - \theta d\sigma_r^2 = dE\left[u(r)\right] \text{ onde } \theta = -\tfrac{1}{2} \frac{u''(\bar{r})}{u'(\bar{r})} = \tfrac{1}{2} AP$$

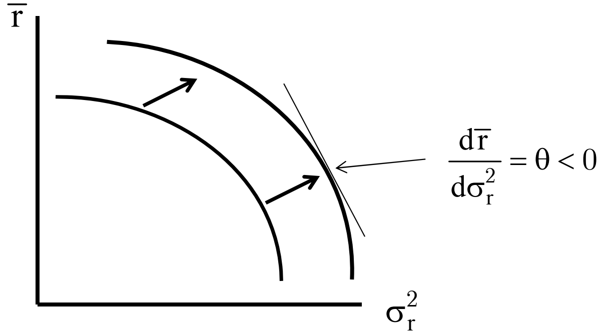
$$E\left[u(r)\right] = \bar{r} - \theta \sigma_r^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{r} = E\left[u(r)\right] + \theta \sigma_r^2$$

Pola tanto, a forma das curvas de indiferenza no espazo media-varianza dependerá da actitude do individuo cara o risco. Graficamente:

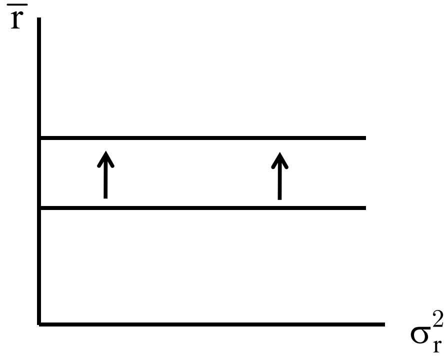
- Aversión ao risco: as curvas de indiferenza teñen pendente positiva



- Amante ao risco: as curvas de indiferenza teñen pendente negativa



- Neutral ao risco: as curvas de indiferenza teñen pendente nula

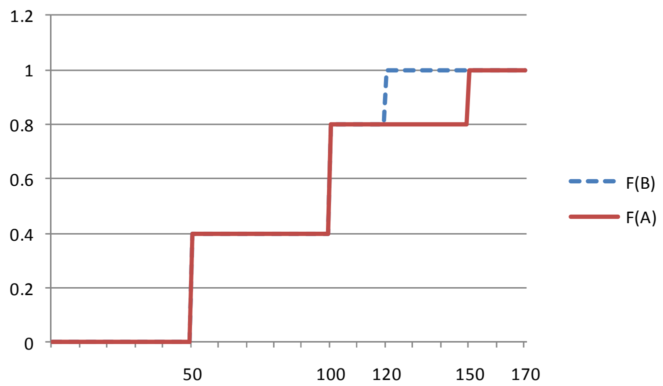


DOMINIO ESTOCASTICO

Podemos comparar dous activos con risco sen necesidade de ter en conta o *trade-off* entre risco e rendibilidade esperada representado pola utilidade esperada.

Exemplo:

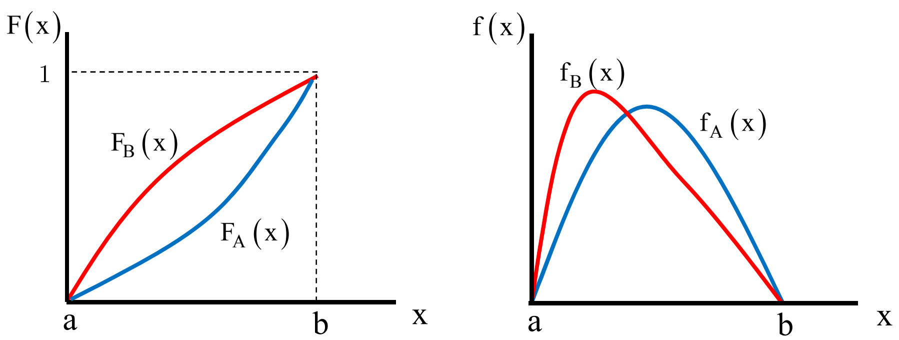
	s = 1	s = 2	s = 3	Valor esperado	Risco
Activo A	50	100	150	90	37,42
Activo B	50	100	120	84	28,71
Probabilidade	0,4	0,4	0,2		



Definición: Dadas as funcións de distribución da rendibilidade de dous activos A e B: $F_A(x)$ e $F_B(x)$, a rendibilidade do activo A ten dominio estocástico de primeira orde sobre a rendibilidade do activo B se e só se $F_A(x) \leq F_B(x)$.

$$r_A \text{ depo } r_B \Leftrightarrow F_A(x) \leq F_B(x), \quad x \in [a, b]$$

Graficamente:



Teremos que:

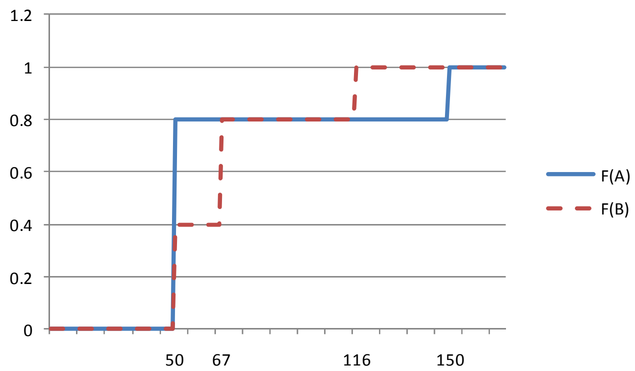
- Se r_A depo $r_B \Rightarrow E(r_A) \geq E(r_B)$
- Se r_A depo $r_B \Leftrightarrow r_A = r_B + \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0$

Proposición: r_A depo $r_B \Leftrightarrow E\left[u\left(r_A\right)\right] \geq E\left[u\left(r_B\right)\right]$, sendo u unha función de utilidade non decrecente e continua.
Para demostración deste resultado vésase Huang e Litzenberger (capítulo 2) ou Danthine e Donaldson (capítulo 3).

Este resultado é útil posto que nos permite comparar diferentes alternativas de investimento en termos de utilidade tendo moi pouca información sobre as preferencias.

Unha medida menos esixente que tamén nos permite facer comparacións é o dominio estocástico de segunda orde. Consideremos o seguinte exemplo:

	s = 1	s = 2	s = 3	Valor esperado	Risco
Activo A	50	50	150	70	40,00
Activo B	50	67	116	70	24,22
Probabilidade	0,4	0,4	0,2		



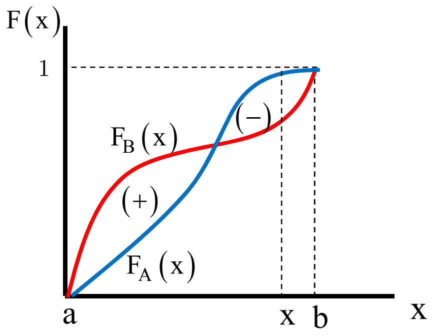
Definición: Dadas as funcións de distribución da rendibilidade de dous activos A e B: $F_A(x)$ e $F_B(x)$, a rendibilidade do activo A ten dominio estocástico de segunda orde sobre a rendibilidade do activo B se e só se:

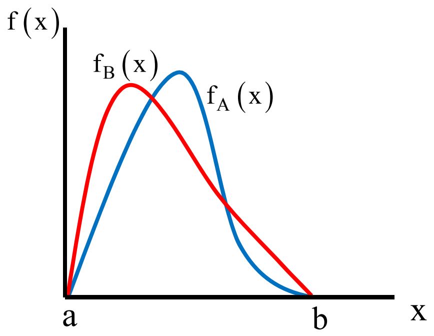
$$\int_a^x \left(F_B(t) - F_A(t)\right) dt \geq 0, \quad \forall x \in [a,b]$$

sendo a desigualdade é estrita para algún x.

$$r_A \text{ deso } r_B \Leftrightarrow \int_a^x \left(F_B(t) - F_A(t)\right) dt \geq 0, \quad \forall x \in [a,b]$$

Graficamente:





Teremos que:

- Se r_A deso $r_B \Rightarrow E(r_A) = E(r_B)$ y $\sigma_A^2 \leq \sigma_B^2$
- Se r_A deso $r_B \Rightarrow r_B = r_A + \varepsilon \quad E(\varepsilon/A)=0$ (*mean preserving spread*)

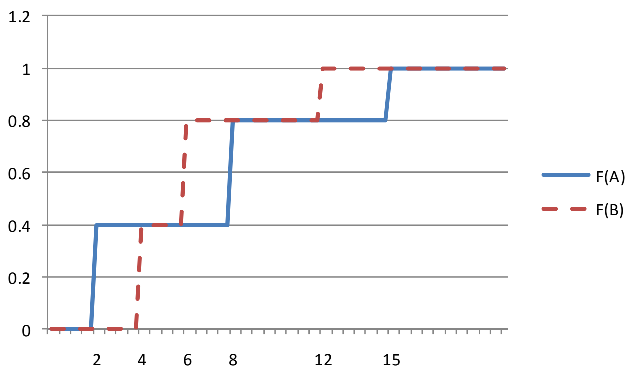
Proposición: r_A deso $r_B \Leftrightarrow E\left[u(r_A)\right] \geq E\left[u(r_B)\right]$, sendo u(·) unha función de utilidade non decrecente e cóncava (aversión ao risco).

Para demostración deste resultado vésase Huang e Litzenberger (capítulo 2).

Este resultado é útil para ordenar alternativas de investimento sen necesidade de ter moita información sobre as preferencias do individuo.

Exemplo:

	s = 1	s = 2	s = 3	Valor esperado	Risco
Activo A	2	8	15	7	4,82
Activo B	4	6	12	6,4	2,94
Probabilidade	0,4	0,4	0,2		



BIBLIOGRAFÍA

DANTHINE, JEAN-PIERRE E DONALDSON, JOHN B. (2005): INTERMEDIATE FINANCIAL THERORY. ACADEMIC PRESS ADVANCED FINANCE SERIES. CAPÍTULO 3 E 4.

HENS, THORSTEN E RIEGER, MARC O. (2010): FINANCIAL ECONOMICS. A CONCISE INTRODUCTION TO CLASSICAL AND BEHAVIORAL FIINANCE. SPRINGER. CAPITULO 2.

HUANG, CHI-FU E LITZENBERGER,ROBERT H. (1988): FOUNDATIONS FOR FINANCIAL ECONOMICS. PRENTICE HALL. CAPITULO 1 Y 2.

MARÍN, JOSÉ MARÍA E RUBIO, GONZALO (2001): ECONOMÍA FINANCIERA. ANTONI BOSCH. CAPÍTULO 18.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA