Sandra Gavino Fernández

ESTUDO DO TENSOR DE CURVATURA Ó LONGO DE XEODÉSICAS E CÍRCULOS EN VARIEDADES DE WALKER

115
2009

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sandra Gavino Fernández

ESTUDO DO TENSOR DE CURVATURA Ó LONGO DE XEODÉSICAS E CÍRCULOS EN VARIEDADES DE WALKER

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección dos profesores Eduardo García Río e Miguel Brozos Vázquez, para obter o Diploma de Estudios Avanzados en Ciencias Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levouse a cabo a súa defensa o día 17 de Xullo de 2009 na Facultade de Matemáticas de dita Universidade, obtendo a calificación de Sobresaliente (10).

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servizos
Campus Universitario

ISBN: 978-84-89390-32-4

Dep. Leg.: C 3014-2009

A meu irmán.

Agradecementos

Resulta difícil escoller as palabras axeitadas e os nomes que deben aparecer nesta páxina, pois son moitas as persoas que, directa ou indirectamente, me amosaron o seu apoio ó longo dos anos, dende que comecei a vida universitaria ata esta, máis novidosa e inquietante, etapa post-universitaria. É este o punto no que me atopo e dende aquí quero darvos as gracias.

En primeiro lugar gustaríame comezar estes agradecementos destacando o apoio e a axuda que me prestaron os directores deste traballo, Eduardo García Río e Miguel Brozos Vázquez. Espero que estas breves liñas consigan expresar o meu sentimento de gratitude. Tamén quixera agradecer a todos os membros do Departamento de Xeometría e Topoloxía polo bo ambiente no que nos envolven de cara ó traballo e polas facilidades que me brindaron sempre que precisei da súa axuda. En especial, quero salientar a colaboración da profesora Elena Vázquez Abal e a súa sempre boa disposición.

Por ser este o meu primeiro traballo de investigación non podo esquecer á persoa que me fixo manter a ilusión nas matemáticas, o profesor Ramón Vázquez Lorenzo, a quen agradezco todo o que me ensinou e toda a axuda que me prestou durante todos estes anos confiando dende o principio nas miñas posibilidades.

Merecen unha mención especial os meus compañeiros de despacho, Coté, Miguel, Javier e Esteban que co tempo se convertiron en amigos e que sempre estiveron e están dispostos a prestarme a súa axuda.

Gustaríame agradecer tamén á miña familia e en especial: a meus pais, polo esforzo que tiveron que facer para que meu irmán e máis eu acadásemos os nosos obxectivos; a meu irmán, por todo o que me valora e a Dani, por estar sempre ó meu lado. Sin eles non houbera sido capaz de acadar as miñas metas.

E por último, tamén quería mencionar a todos aqueles AMIGOS que, aínda que moitas veces dende a distancia, sempre estiveron ó meu carón cando os precisei. A todos vós, MOITAS GRACIAS.

Abstract

The notion of curvature is one of the most important concepts in differential geometry. As a consequence of the difficulty of working with all the information that curvature tensor encodes, usually the study focusses in some operators defined in a natural way from the curvature tensor. In this memory we are going to focuss in two of them: Jacobi operator (R_γ) and skew-symmetric curvature operator (R_c). These two operators give a big quantity of information about geodesics and circles, that are objects of main interest in mathematics and also in physics.

The Riemannian locally symmetric spaces can be characterized by the fact that the Jacobi operator along every geodesic γ has constant eigenvalues ($\mathfrak{C}$) and parallel eigenspaces ($\mathfrak{P}$). Two natural generalizations of locally symmetric spaces appear when we consider conditions $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{P}$ separately [2]. Also Riemannian locally symmetric spaces can be characterized by the fact that for every unit circle c, the skew-symmetric curvature operator has constant eigenvalues ($\mathfrak{O}$) and there exists a Jordan parallel basis for R_c along c ($\mathfrak{T}$). Our objective in this work is to investigate all these properties in Lorentzian geometry focussing in Walker metrics as a first step towards a description of the corresponding manifolds.

The geometry of Walker manifolds, as the study of some of their specific characteristics and its influence in the study of Lorentzian geometry, will be fundamental aspects that we will use along this work [4]. Since the point of view of Walker geometry, Walker manifolds of dimension 3 are the first non trivial case to consider. Also, the fact that all geometric information is codified in an unique function makes this geometry more tractable than the higher dimension cases.

In a more concise way this work is structured as follows.

In Chapter 1 we remind some basic concepts of semi-Riemannian geometry, with the principal interest of fixing the notation that we will use later. Also, as mentioned before, for the importance of curvature tensor and associated operators which we are going to work with, we make a brief introduction and definition of those elements. Because of the importance that they have in the study of semi-Riemannian geometry in general and in this work in particular, we will remind the definition of Walker structures and some of their basic properties, focussing overall in 3-dimensional case. Finally, we make a brief analysis of Osserman, recurrent and Ivanov-Petrova manifolds, because later in Chapters 3 and 4 we will see that they are related with $\mathfrak{C}$-spaces, $\mathfrak{P}$-spaces and $\mathfrak{O}$-spaces, respectively.

In Chapter 2 we will briefly review the study made for Gray [12] about generalizations of Einstein metrics, reminding the irreducible spaces $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}^{\perp}$ and $\mathcal{C}$, defined from the covariant derivative of the Ricci tensor, and focussing in the particular case of Walker metrics. As a new part we will make a detailed study of the classes $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}^{\perp}$ and $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}^{\perp}$, as before, for the case of Walker metrics. We finish this chapter, with a table where we organize the classification made in previous parts and in which are included the following results:

- *A Walker manifold of dimension 3 is in class $\mathcal{A}$ or $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}^{\perp}$ if and only if is locally symmetric.*
- *A Walker manifold of dimension 3 is in class $\mathcal{B}$ or $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}^{\perp}$ if and only if is locally conformally flat.*

Chapter 3 treats the study and classification of spaces characterized for the behavior of Jacobi operator along geodesics, in dimension 3 for Walker metrics. In the first part of the chapter we will make a review of $\mathfrak{C}$-spaces and in the second one we will review $\mathfrak{P}$-spaces, giving for both spaces a new classification for Walker metrics of dimension 3 and with constant scalar curvature:

- *A Walker manifold of dimension 3 in a $\mathfrak{C}$-space if and only if is locally symmetric.*
- *A Walker manifold of dimension 3 with constant scalar curvature is a $\mathfrak{P}$-space if and only if is locally symmetric or a strict Walker manifold.*

In Chapter 4 we will make an analogous study as in Chapter 3 but now for the geometry of the skew-symmetric curvature operator. As in previous chapter we will study the $\mathfrak{O}$ and $\mathfrak{T}$ conditions for Walker metrics of dimension 3 getting a compleat classification for metrics of constant scalar curvature.

To finish, in Chapter 5, and motivated for the situation analyzed in Chapters 3 and 4 we are going to make an analysis of the relation between $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{T}$ spaces. For that we will proof the implication $\mathfrak{T}$-space$\Rightarrow$ $\mathfrak{P}$-space in the case of Walker metrics of dimension 3. This relation was seeing in [16] for the Riemannian case and presented as a open problem in a context more general. At the end of this memory we will give examples in dimension 4 of $\mathfrak{T}$-spaces that are not $\mathfrak{P}$-spaces.

Introdución

A noción de curvatura é un dos conceptos máis importantes en xeometría diferencial. Debido á dificultade de manexar toda a información subxacente ó tensor de curvatura, con frecuencia o estudo céntrase na análise de certos operadores definidos de xeito natural a partir deste. Nesta memoria centrarémonos principalmente en dous deles: o operador de Jacobi (R_γ) e o operador de curvatura antisimétrico (R_c). Estes operadores proporcionan unha grande cantidade de información sobre xeodésicas e círculos, que son obxectos de gran importancia tanto en Matemáticas como en Física.

Os espazos Riemannianos localmente simétricos poden ser caracterizados polo feito de que o operador de Jacobi ó longo de cada xeodésica γ ten autovalores constantes ($\mathfrak{C}$) e autoespazos paralelos ($\mathfrak{P}$). Dúas xeneralizacións naturais de espazos localmente simétricos aparecen cando consideramos as condicións $\mathfrak{C}$ e $\mathfrak{P}$ por separado [2]. Do mesmo xeito pódense caracterizar os espazos Riemannianos localmente simétricos pola constancia dos autovalores asociados ó operador de curvatura antisimétrico ó longo de todo círculo unitario c ($\mathfrak{O}$) e a existencia dunha base de Jordan paralela para R_c ao longo de c ($\mathfrak{T}$). O noso obxectivo neste traballo é investigar todos estes espazos en xeometría de Lorentz centrándonos nas métricas de Walker como un primeiro paso cara unha descripción completa de ditas variedades.

A xeometría das variedades de Walker así como o estudo dalgunhas das súas características específicas e a súa influencia no estudo da xeometría de Lorentz, serán aspectos fundamentais que empregaremos ó longo deste traballo [4]. Dende o punto de vista da xeometría de Walker, as variedades de Walker de dimensión 3 son o primeiro caso non trivial a considerar. Ademais, o feito de que toda a información xeométrica estea codificada nunha única función fai que esta xeometría sexa máis manexable que a de variedades de Walker de dimensión superior.

Dun xeito máis preciso este traballo estructúrase como segue.

No Capítulo 1 recordamos algúns conceptos de xeometría semi-Riemanniana, co principal interese de fixar a notación que posteriormente utilizaremos. Ademais, pola importancia, citada ó principio, que teñen tanto o tensor de curvatura como os operadores asociados cos que imos traballar faremos unha pequena introdución e definición destes elementos. Polo importante papel que desempeñan no estudo da xeometría semi-Riemanniana en xeral e neste traballo en particular, recordaremos a definición das estructuras de Walker e algunhas das súas propiedades básicas, centrándonos sobre todo en variedades 3-dimensionais. E, finalmente, faremos unha pequena análise das variedades Osserman, recurrentes e Ivanov-Petrova xa que posteriormente veremos que están relacionadas cos $\mathfrak{C}$-espazos, $\mathfrak{P}$-espazos, $\mathfrak{O}$-espazos e $\mathfrak{T}$-espazos, respectivamente, nos Capítulos 3 e 4.

No Capítulo 2 faremos un percorrido polo estudo realizado por Gray [12] de xeneralización das métricas de Einstein, recordando os espazos irreducibles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}^\perp$ e $\mathcal{C}$, definidos a partir da derivada covariante do tensor de Ricci, centrándonos en particular no caso de métricas de Walker. Completaremos os resultados coñecidos coa caracterización das clases $\mathcal{A}\oplus\mathcal{C}^\perp$ e $\mathcal{B}\oplus\mathcal{C}^\perp$, proporcionando así unha clasificación completa para métricas de Walker 3-dimensionais. E, para finalizar este capítulo, faremos unha táboa na que se poida visualizar e ordenar a clasificación realizada nos apartados anteriores e na que se inclúen os seguintes resultados:

- *Unha variedade de Walker 3-dimensional pertence ás clases $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}\oplus\mathcal{C}^\perp$ se, e só se, é localmente simétrica.*
- *Unha variedade de Walker 3-dimensional pertence ás clases $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}\oplus\mathcal{C}^\perp$ se, e só se, é localmente conformemente chá.*

No Capítulo 3 estudiaremos e clasificaremos os espazos caracterizados pola análise do comportamento do operador de Jacobi ó longo de xeodésicas, en dimensión 3 e para métricas de Walker. Na primeira parte do capítulo faremos un repaso de todo o xa coñecido acerca dos $\mathfrak{C}$-espazos e na segunda parte repasaremos os $\mathfrak{P}$-espazos e as clasificacións xa coñecidas en signatura Riemanniana, dando para ambos espazos unha nova clasificación para métricas de Walker 3-dimensionais de curvatura escalar constante:

- *Unha variedade de Walker 3-dimensional é un $\mathfrak{C}$-espazo se, e só se, é localmente simétrica.*
- *Unha variedade de Walker 3-dimensional con curvatura escalar constante é un $\mathfrak{P}$-espazo se, e só se, é localmente simétrica ou unha variedade de Walker estricta.*

No Capítulo 4 faremos un estudo, de modo análogo a como se fixo no Capítulo 3, da xeometría do operador de curvatura antisimétrico. Análogamente ó capítulo anterior, estudiaremos estas condicións para métricas de Walker 3-dimensionais, chegando a unha clasificación completa para métricas de curvatura escalar constante.

Para rematar, no Capítulo 5, e motivados pola situación analizada nos Capítulos 3 e 4 faremos unha análise da relación existente entre os $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{T}$ espazos. Para iso, demostraremos a implicación $\mathfrak{T}$-espazo$\Rightarrow$ $\mathfrak{P}$-espazo no subconxunto das métricas de Walker de dimensión 3. Esta relación xa fora posta de manifesto en [16] para o caso Riemanniano e plantexada como un problema aberto nun contexto máis xeral. No termo desta memoria daremos exemplos en dimensión 4 de $\mathfrak{T}$-espazos que non son $\mathfrak{P}$-espazos.

Índice xeral

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo de preliminares ten como obxectivo introducir os conceptos básicos nos que se fundamenta este traballo, así como sentar as bases da terminoloxía e notación que se empregará ó longo dos demais capítulos.

A Sección 1.1 está dedicada preferentemente a repasar algúns conceptos elementais e a fixar a notación, para posteriormente na Sección 1.2 dar algunhas definicións importantes relacionadas coas nocións estudiadas e na Sección 1.3 introducir os espazos localmente simétricos. Na Sección 1.4 introduciranse unha serie de operadores asociados ó tensor de curvatura que utilizaremos nos demais capítulos do traballo. Na Sección 1.5 faremos un pequeno resumo das métricas de Walker e as súas características, pois constitúen unha parte fundamental do estudo realizado, e para finalizar faremos nas Seccións 1.6, 1.7 e 1.8 unha pequena introdución ás variedades Osserman, recurrentes e Ivanov-Petrova, respectivamente, pois desempeñan un importante papel nas clasificacións realizadas nos Capítulos 3 e 4.

1.1. Introdución

O ámbito de estudo deste traballo enmárcase na xeometría semi-Riemanniana e máis concretamente nas métricas de Walker. Por este motivo comezamos este primeiro capítulo recordando os principais elementos xeométricos dunha variedade semi-Riemanniana, fixando a notación que empregaremos no desenvolvemento da memoria.

Posto que o obxectivo é analizar a xeometría de variedades semi-Riemannianas, trataremos, en xeral, cunha variedade $\mathcal{M}$ de dimensión n sobre a que está definida unha métrica g simétrica, non dexenerada e con signatura (p, q), onde $p+q = n$. Denotaremos entón a este par por $(\mathcal{M}, g)$ e referirémonos a el en xeral como variedade semi-Riemanniana. Diremos que $(\mathcal{M}, g)$ é unha *variedade de Riemann* se $p = 0$, é dicir, se g é definida positiva, diremos que $(\mathcal{M}, g)$ é unha *variedade de Lorentz* se $p = 1$ e que $(\mathcal{M}, g)$ ten *signatura neutra* se $p = q$.

Tendo en conta o anterior, a primeira definición que imos dar hérdase da xeometría de Lorentz utilizada na Teoría da Relatividade:

Definición 1.1.1 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade semi-Riemanniana e sexa $p \in \mathcal{M}$, un vector $x \in T_p\mathcal{M}$ diremos que é*
- temporal se $g_p(x, x) < 0$,
- espacial se $g_p(x, x) > 0$,
- nulo se $g_p(x, x) = 0$ e $x \neq 0$,
- non nulo se $g_p(x, x) \neq 0$,
e ademais, a un vector non nulo x tal que $|g_p(x, x)| = 1$ chamarémoslle unitario.

Denotamos por $S_p^-(\mathcal{M})$, $S_p^+(\mathcal{M})$ e $S_p(\mathcal{M})$ os conxuntos

$$\begin{aligned} S_p^-(\mathcal{M}) &= \{x \in T_p\mathcal{M} : g_p(x, x) = -1\}, \\ S_p^+(\mathcal{M}) &= \{x \in T_p\mathcal{M} : g_p(x, x) = 1\}, \\ S_p(\mathcal{M}) &= \{x \in T_p\mathcal{M} : |g_p(x, x)| = 1\}, \end{aligned}$$

de vectores unitarios temporais, unitarios espaciais e unitarios, respectivamente, do espazo tanxente á variedade no punto p. O análogo para campos de vectores será:

$$\begin{aligned} S^-(\mathcal{M}) &= \bigcup_{p \in \mathcal{M}} S_p^-(\mathcal{M}) = \{X \in T\mathcal{M} : g(X, X) = -1\}, \\ S^+(\mathcal{M}) &= \bigcup_{p \in \mathcal{M}} S_p^+(\mathcal{M}) = \{X \in T\mathcal{M} : g(X, X) = 1\}, \\ S(\mathcal{M}) &= \bigcup_{p \in \mathcal{M}} S_p(\mathcal{M}) = \{X \in T\mathcal{M} : |g(X, X)| = 1\}, \end{aligned}$$

chamados, respectivamente, *fibrados unitario temporal, unitario espacial e unitario* da variedade $(\mathcal{M}, g)$. En xeral, denotaranse os vectores con letras latinas minúsculas: x, y, z, v, w, ..., e os campos de vectores coas correspondentes maiúsculas: $X, Y, Z, V, W, \ldots$. O conxunto de campos de vectores dunha variedade $(\mathcal{M}, g)$ denotarase por $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Dada $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade semi-Riemanniana, tense determinada de forma única unha conexión simétrica que fai paralela á métrica g, denominada *conexión de Levi-Civita*, que denotaremos por ∇. A *fórmula de Koszul* dános a expresión da conexión:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ &- g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]), \end{aligned}$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ e sendo $[\cdot, \cdot]$ o corchete de Lie para campos de vectores en $\mathcal{M}$.

Ademais tamén denotamos por ∇ ó operador gradiente en $\mathcal{M}$. Nótese que o gradiente dunha función $f : (\mathcal{M}, g) \longrightarrow \mathbb{R}$ vén dado por

$$g(\nabla f, X) = X(f), \ X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Unha vez temos a conexión de Levi-Civita sobre $(\mathcal{M}, g)$, definimos o tensor de curvatura de tipo $(1,3)$ como:

$$R(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

que verifica as identidades:

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z,$$

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0, \tag{1.1}$$

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = 0, \tag{1.2}$$

para calesquera campos de vectores $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. No que segue referirémonos á expresión (1.1) como *Primeira Identidade de Bianchi* (ou *Identidade de Bianchi Alxébrica*) e a (1.2) como *Segunda Identidade de Bianchi* (ou *Identidade de Bianchi Diferencial*).

A partir do tensor de curvatura de tipo $(1,3)$ defínese o tensor de curvatura de tipo $(0,4)$ asociado, que tamén denotaremos por R, como:

$$R(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z,V).$$

Este cumpre, ademais das propiedades que se derivan das tres anteriores, dúas referidas á antisimetría nos dous últimos argumentos e á simetría entre o primeiro e o segundo par, é dicir:

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,V) &= -R(X,Y,V,Z), \\ R(X,Y,Z,V) &= R(Z,V,X,Y), \end{aligned}$$

de novo para $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

1.2. Curvatura seccional, tensor de Ricci, curvatura escalar e tensor de Weyl

A curvatura da variedade é un obxecto de importancia fundamental no estudo xeométrico dunha variedade, mais dunha dificultade extrema, debido ó seu carácter de tipo $(0,4)$. Por iso, debido á dificultade que entraña traballar cun campo de tensores deste tipo, téñense definido obxectos máis sinxelos que permiten recuperar información relevante sobre o tensor de curvatura. Así, o uso das súas simetrías fai posible definir e estudiar obxectos xeométricos asociados que permiten, non só un tratamento máis sinxelo, senón dar unha interpretación máis tanxible da curvatura da variedade. Entre eles, o máis significativo é a *curvatura seccional*, definida sobre os planos non dexenerados (é dicir, sobre os planos Π que verifican $g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2 \neq 0$ onde X e Y son campos de vectores que xeneran o plano Π) como segue:

$$K(\Pi) := \frac{R(X,Y,Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}.$$

A importancia do concepto de curvatura seccional radica non só en que permite dar unha interpretación xeométrica da curvatura como a curvatura da superficie tanxente ó plano considerado no punto en cuestión, senón que, ademais, é posible reconstruír o tensor de curvatura a partir da curvatura seccional dos planos do espazo tanxente, é dicir, a curvatura seccional determina univocamente a curvatura da variedade.

Para métricas indefinidas unha consecuencia importante do feito de non estar a curvatura seccional definida sobre toda a Grassmanniana de 2-planos en cada punto, é que non está necesariamente acotada, nin toma valores nun conxunto conexo de $\mathbb{R}$. De feito, a posibilidade de estender con continuidade dita función a toda a Grassmanniana é equivalente á súa acotación, o que só é posible se K é constante [7], [19].

A contracción de tensores permite tamén definir, a partir do tensor de curvatura, o *Tensor de Ricci*:

$$\rho(X,Y) := Tr[Z \rightsquigarrow R(Z,X)Y],$$

para campos de vectores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Sexa $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ unha base ortonormal e sexa $\varepsilon_{E_i} = g(E_i, E_i)$, entón o tensor de Ricci vén dado por:

$$\rho(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} R(E_i, X, Y, E_i).$$

Cunha nova contracción a partir da curvatura obtense a *curvatura escalar*, que denotamos por τ e que con respecto dunha base ortonormal $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ exprésase:

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} \rho(E_i, E_i) = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{E_i} \varepsilon_{E_j} R(E_j, E_i, E_i, E_j),$$

onde $\varepsilon_{E_k} = g(E_k, E_k)$, para todo $k = 1, \dots, n$.

Observación 1.2.1 En dimensión 2 e 3 o tensor de Ricci determina completamente o tensor de curvatura da variedade, pero en dimensións maiores o tensor de Ricci contén menos información que este.

Unha situación na que a curvatura da variedade é relativamente simple é aquela na que o tensor de Ricci se pode expresar como un múltiplo escalar do tensor métrico.

Definición 1.2.2 *Unha variedade $(\mathcal{M}, g)$ dise que é unha variedade Einstein se:*

$$\rho = \lambda\, g,$$

onde λ é unha constante real e, tendo en conta que

$$\tau = \lambda\, dim\mathcal{M},$$

tense entón que unha variedade é Einstein se se verifica que

$$\rho = \frac{\tau}{dim\mathcal{M}}\, g.$$

Observación 1.2.3

- En $dim\ \mathcal{M} = 2$ tense sempre que $\rho = \lambda\ g$, sendo λ a curvatura de Gauss da superficie, polo tanto a variedade é Einstein se, e só se, a superficie ten curvatura de Gauss constante.
- En $dim\ \mathcal{M} = 3$ unha variedade é Einstein se, e só se, ten curvatura seccional constante.
- Para $dim\ \mathcal{M} \geq 4$, a situación cambia radicalmente e as variedades Einstein están lonxe de ser clasificadas.

Definición 1.2.4 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Riemann de dimensión n e sexa T un campo de tensores de tipo $(0,2)$. Dise que o campo de tensores T é cíclico paralelo se*

$$(\nabla_X T)(X, X) = 0,\ \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}),$$

ou, equivalentemente, se

$$(\nabla_X T)(Y, Z) + (\nabla_Y T)(Z, X) + (\nabla_Z T)(X, Y) = 0,\ \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Dise que o campo de tensores T é Codazzi se

$$(\nabla_X T)(Y, Z) = (\nabla_Y T)(X, Z),\ \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Definición 1.2.5 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de dimensión n. Defínese o tensor de Weyl e o tensor de Schouten como:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(X, Y, Z, V) &:= R(X, Y, Z, V) \\
&+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{g(X, V)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, V)\} \\
&- \frac{1}{n-2}\{\rho(X, V)g(Y, Z) - \rho(X, Z)g(Y, V) \\
&+ \rho(Y, Z)g(X, V) - \rho(Y, V)g(X, Z)\}, \\
C(X, Y) &:= \frac{1}{n-2}\{\rho(X, Y) - \frac{\tau}{2(n-1)}\ g(X, Y)\}.
\end{aligned}$$

Notemos que estes tensores están relacionados polo feito de que $\rho = 0$ se, e só se, $C = 0$ e isto acontece se, e só se, $\mathcal{W} = R$.

Definición 1.2.6 *Unha métrica g é localmente conformemente chá se para cada punto $p \in \mathcal{M}$ existe unha veciñanza U e un difeomorfismo $\psi : V \subset \mathbb{R}^n_\nu \longrightarrow U$ con $\psi^* g = \phi^2 g_{\mathbb{R}^n_\nu}$ para un certo natural n, é dicir, se a métrica é localmente un cambio conforme dunha métrica pseudo-euclidiana usual.*

O seguinte resultado completa este feito dando a caracterización de variedades localmente conformemente chás.

Teorema 1.2.7 [18] *Sexa* $(\mathcal{M}, g)$ *unha variedade semi-Riemanniana de dimensión* n*.*

(i) *Se* $n \geq 4$*,* $(\mathcal{M}, g)$ *é conformemente chá se, e só se,* $\mathcal{W} = 0$*.*

(ii) *Para* $n = 3$*,* $(\mathcal{M}, g)$ *é conformemente chá se, e só se,*

$$(\nabla_X C)(Y, Z) = (\nabla_Y C)(X, Z)$$

para calesquera campos de vectores $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$*; onde* C *denota o tensor de Schouten* $(R = C \bullet g + \mathcal{W})$*.*

Teorema 1.2.8 [18] *Sexa* $(\mathcal{M}, g)$ *unha variedade semi-Riemanniana* n*-dimensional con* $n \geq 3$*. Entón* $(\mathcal{M}, g)$ *ten curvatura seccional constante se, e só se, é Einstein e localmente conformemente chá.*

1.3. Variedades localmente simétricas

Definición 1.3.1 *Unha variedade* $(\mathcal{M}, g)$ *dise que é localmente simétrica se para cada punto* $p \in \mathcal{M}$ *existe unha veciñanza* V *de* p *de xeito que, para todo punto desta* $q \in V$*, a simetría xeodésica local*

$$\varphi_p : q = exp_p(ru) \longmapsto \varphi_p(q) = exp_p(-ru)$$

é unha isometría.

Un resultado clásico de Cartan caracteriza as variedades localmente simétricas en termos da derivada covariante do tensor de curvatura: $(\mathcal{M}, g)$ *é localmente simétrica se, e só se,* $\nabla R = 0$.

Observación 1.3.2 Posto que en dimensión 3 o tensor de Ricci determina completamente o tensor de curvatura da variedade tense que, en tal dimensión, $\nabla R = 0$ se, e só se, $\nabla \rho = 0$.

1.4. Operadores asociados ó tensor de curvatura

Dado que, como xa diximos, o tensor de curvatura nos dá moita información xeométrica dunha variedade e que o estudo do propio tensor resulta moi complexo, o que faremos será estudar certos operadores construídos a partir do propio tensor de curvatura. Os máis comúns e máis estudiados son: *o operador de Ricci, o operador de Jacobi, o operador de Jacobi de orde superior, o operador de curvatura antisimétrico, o operador de curvatura antisimétrico de orde superior e o operador de Szabó.*

Nesta memoria centrarémonos no operador de Jacobi e no operador de curvatura antisimétrico. Definiremos a continuación estes operadores, así como o operador de Szabó e o operador de Ricci, dando algunhas das súas propiedades máis importantes.

1.4.1. Operador de Jacobi

Consideremos $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade semi-Riemanniana. Sexa $z \in T_p\mathcal{M}$ e consideremos a aplicación linear

$$\begin{array}{rccc} R(\cdot, z)z: & T_p\mathcal{M} & \longrightarrow & T_p\mathcal{M} \\ & x & \mapsto & R(x, z)z. \end{array}$$

Dado que $g(R(x, z)z, z) = 0$ e $g(R(z, z)z, x) = 0$, podemos restrinxir o percorrido da aplicación anterior ó subespazo ortogonal a z e considerar así a aplicación

$$R(\cdot, z)z : z^\perp \longrightarrow z^\perp.$$

Estamos agora en condicións de introducir o operador de Jacobi na seguinte definición.

Definición 1.4.1 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade semi-Riemanniana e $z \in S(\mathcal{M})$. A restrición $R_z : z^\perp \longrightarrow z^\perp$ da aplicación linear $R_z x = R(x, z)z$, denomínase operador de Jacobi na dirección de z.*

Observación 1.4.2 Para $x, y \in z^\perp$ temos

$$\begin{aligned} g(R_z x, y) &= g(R(x, z)z, y) = g(R(z, y)x, z) \\ &= g(R(y, z)z, x) = g(R_z y, x), \end{aligned}$$

logo o operador de Jacobi é unha aplicación autoadxunta.

Por ser o operador de Jacobi unha aplicación autoadxunta, no caso en que a métrica sexa definida positiva, será diagonalizable con autovalores reais. En consecuencia, o coñecemento tanto dos autovalores como dos autoespazos do operador de Jacobi proporcionará importante información sobre a curvatura de tales variedades. En xeral, a situación non é tan sinxela para métricas indefinidas, podendo presentar R_x autovalores complexos ou raíces múltiples do seu polinomio mínimo. Ademais, é importante sinalar que o espectro de R_x non determina completamente o operador de Jacobi, sendo preciso o estudo dos polinomios mínimos de R_x.

1.4.2. Operador de curvatura antisimétrico

Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade semi-Riemanniana e consideremos os vectores $x, y \in T_p\mathcal{M}$. O operador de curvatura antisimétrico $R(x, y)$ vén dado por

$$g(R(x, y)z, w) = R(x, y, z, w),$$

onde debemos salientar o papel que desempeñan os argumentos x e y, con un comportamento antisimétrico.

Se consideramos $\{e_1, e_2\}$ unha base ortonormal orientada para un 2-plano orientado π non dexenerado, o operador de curvatura antisimétrico $R_\pi = R(\pi)$ vén dado por

$$R_\pi z = R(\pi)z := R(e_1, e_2)z.$$

Esta definición é independente da base ortonormal positivamente orientada escollida. Nótese que o operador de curvatura antisimétrico é anti-auto-adxunto, en contraste co operador de Jacobi que é autoadxunto. Isto xustifica en moitos casos as distintas propiedades que ambos operadores presentan en certas circunstancias.

1.4.3. Operador de Ricci

Partindo do tensor de Ricci de tipo $(0, 2)$ podemos definir o *operador de Ricci* como:

$$g(\rho(x), y) := \rho(x, y),$$

denotando tamén como ρ ó operador de Ricci, que diferenciaremos do tensor de Ricci dependendo do contexto no que nos atopemos.

Observación 1.4.3 O operador de Ricci é autoadxunto por ser ρ simétrico. Polo tanto en signatura Riemanniana o operador de Ricci é diagonalizable, é dicir, para dimensión 3 existe $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal tal que

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ reciben o nome de *curvaturas de Ricci.*

En signatura Lorentziana o operador de Ricci non é necesariamente diagonalizable aínda sendo autoadxunto. Sexan as curvaturas de Ricci (posiblemente complexas) os autovalores do operador de Ricci ρ. Pódense dar catro casos diferentes atendendo á forma normal de Jordan deste operador:

(I_a) O operador de Ricci é diagonalizable, é dicir,

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

(I_b) O operador de Ricci ten autovalores complexos, é dicir,

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

onde $\beta \neq 0$.

(II) Hai un bloque de Jordan de orde 2×2 e polo tanto unha raíz doble do polinomio mínimo de ρ, é dicir,

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

(III) Hai un bloque de Jordan de orde 3×3 e polo tanto unha raíz triple do polinomio mínimo de ρ, é dicir,

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1.4.4. Operador de Szabó

Ó contrario que o resto de operadores vistos ata agora, o operador de Szabó defínese a partir da derivada covariante do tensor de curvatura R.

Definición 1.4.4 *O operador de Szabó defínese como:*

$$R'_x : y \longrightarrow (\nabla_x R)(y,x)x, \ \forall x, y \in T_p\mathcal{M}.$$

1.5. Métricas de Walker

Para cada espazo vectorial V, denotamos con $Gr_k(V)$ a Grassmanniana de k-planos en V, é dicir,

$$Gr_k(V) = \{\pi \subset V \text{ subespazo } k - \text{dimensional}\}.$$

Se temos $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade entón

$$Gr_k(T\mathcal{M}) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} Gr_k(T_p\mathcal{M})$$

denota o fibrado de Grassmann sobre $\mathcal{M}$.

Unha *distribución r-dimensional* nunha variedade $\mathcal{M}$ é unha sección do fibrado de Grassmann $Gr_k(T\mathcal{M})$, ou equivalentemente, unha correspondencia diferenciable

$$\mathcal{D} : p \in \mathcal{M} \longmapsto \mathcal{D}_p \subset T_p\mathcal{M},$$

onde $\mathcal{D}_p$ é un subespazo r-dimensional de $T_p\mathcal{M}$. Dise que $\mathcal{D}$ *é paralela* se

$$\nabla_X \mathcal{D} \subset \mathcal{D},$$

é dicir, se

$$\nabla_X Y \in \mathcal{D}, \ \forall Y \in \mathcal{D}, \ \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Definición 1.5.1 *Unha variedade $(\mathcal{M}, g)$ dise que é de Walker se é unha variedade semi-Riemanniana que admite unha distribución nula paralela $\mathcal{D}$ de dimensión $r \geq 1$.*

Convén notar que se $\mathcal{D}$ é unha distribución nula de dimensión r en $(\mathcal{M}, g)$ entón $r \leq \frac{1}{2}n$. Máis aínda, se $(\mathcal{M}, g)$ ten signatura (p, q), entón $r \leq \text{mín}\{p, q\}$.

Nesta memoria centrarémonos no estudo de distintas clases de variedades pero sempre no contexto das métricas de Walker. Por este motivo é conveniente usar un sistema de coordenadas específico asociado a unha métrica de Walker. Consideremos g unha métrica semi-Riemanniana de dimensión n que admite unha distribución nula paralela de dimensión r. Walker demostrou que existe un sistema de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e unha forma canónica de escribir dita métrica.

Teorema 1.5.2 [23] *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade semi-Riemanniana n-dimensional que admite unha distribución nula paralela $\mathcal{D}$ de dimensión r. Entón existen coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ nas que o tensor métrico vén dado na forma matricial seguinte:*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Id_r \\ 0 & A & H \\ Id_r & H^t & B \end{pmatrix},$$

onde Id_r é a matriz identidade de orde $r \times r$ e A, B, H son matrices cuxos coeficientes son funcións que dependen das coordenadas satisfacendo o seguinte:

1. *A e B son simétricas de orde $(n - 2r) \times (n - 2r)$ e $r \times r$ respectivamente. H é de orde $(n - 2r) \times r$ e H^t denota a trasposta de H.*

2. *A e H son independentes das coordenadas $(x_1, \ldots, x_r)$.*

Ademais, a distribución nula paralela $\mathcal{D}$ está localmente xerada polos campos de vectores coordenados $\{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_r}\}$.

Observación 1.5.3 Nótese que este sistema de coordenadas de Walker non é único que, polo tanto, esta forma canónica tampouco o é. Véxase [4] para máis información sobre variedades de Walker.

1.5.1. Métricas de Walker 3-dimensionais

Nesta sección imos facer un resumo dos principais resultados referentes a métricas de Walker 3-dimensionais e que aparecen recollidos en [5].

As coordenadas de Walker simplifícanse cando a distribución nula r-dimensional $\mathcal{D}$ ten dimensión máxima. Dado que $dim\ \mathcal{D} \leq \frac{1}{2}n$ pódense dar dous casos dependendo de se n é par ou impar:

Teorema 1.5.4 [23]

1. *A forma canónica para unha variedade semi-Riemanniana* $(2r+1)$*-dimensional* $(\mathcal{M}, g)$ *que admite unha distribución* $\mathcal{D}$ *nula paralela de dimensión* r *vén dada polo tensor métrico en forma matricial*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Id_r \\ 0 & \epsilon & 0 \\ Id_r & 0 & B \end{pmatrix},$$

onde Id_r *é a matriz identidade de orde* $r \times r$*,* B *é a matriz simétrica de orde* $r \times r$ *na que as entradas son funcións que dependen das coordenadas* $(x_1, \dots, x_{2r+1})$ *e* $\epsilon = \pm 1$*.*

2. *A forma canónica para unha variedade semi-Riemanniana* $(\mathcal{M}, g)$ *de dimensión* $2r$ *que admite unha distribución nula paralela* $\mathcal{D}$ *de dimensión* r *vén dada polo tensor métrico en forma matricial*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & Id_r \\ Id_r & B \end{pmatrix},$$

onde Id_r *é a matriz identidade* $r \times r$ *e* B *é unha matriz simétrica de orde* $r \times r$ *que ten por entradas funcións nas coordenadas* $(x_1, \dots, x_{2r})$*.*

Observación 1.5.5 Nesta memoria imos traballar, en xeral, con métricas de Walker de dimensión 3. Atendendo ó apartado (1.) do teorema anterior, imos considerar métricas da forma:

$$g_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

sendo $f = f(t, x, y)$ unha función diferenciable definida nun subconxunto aberto $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^3$ e sendo $\epsilon = \pm 1$. Dado que unha métrica desta forma queda totalmente determinada pola función f, empregaremos a notación $\mathcal{M}_f := (\mathcal{O}, g_f)$ para referirnos a variedades de Walker de dimensión 3 coa métrica expresada en coordenadas locais coa forma canónica de Walker.

A variedade $\mathcal{M}_f$ ten signatura $(1,2)$ se $\epsilon = +1$; e ten signatura $(2,1)$ se $\epsilon = -1$. Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Walker 3-dimensional. Tendo en conta o Teorema 1.5.4, temos que $\mathcal{M}$ é localmente isométrica a $\mathcal{M}_f$ para algúns $\{\mathcal{O}, f, \epsilon\}$ axeitadamente escollidos. Sen embargo, debemos enfatizar o feito de que o sistema de coordenadas de Walker escollido non é único e que f non está determinada de forma única.

1.5.2. Símbolos de Christoffel, curvatura e tensor de Ricci

Neste apartado imos considerar $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3 en coordenadas locais tal e como vimos na Observación 1.5.5, e consideraremos

$$f^{(i,j,k)}(t,x,y) := \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial^i t\, \partial^j x\, \partial^k y} f(t,x,y),$$

a expresión que denota a derivada parcial de orde i con respecto de t, de orde j con respecto de x e de orde k con respecto de y. Por comodidade de notación escribiremos

$$f \text{ e } f^{(i,j,k)},$$

sobreentendendo que se trata sempre de funcións de t, x e y. Tendo en conta todo isto imos dar algúns resultados importantes que utilizaremos máis adiante.

Lema 1.5.6 [4] *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3 definida como na Observación 1.5.5. Entón:*

1. *A conexión de Levi-Civita vén dada por:*

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t}\partial_y &= \frac{1}{2} f^{(1,0,0)}\partial_t,\ \nabla_{\partial_x}\partial_y = \frac{1}{2} f^{(0,1,0)}\partial_t, \\ \nabla_{\partial_y}\partial_y &= \frac{1}{2}(f f^{(1,0,0)} + f^{(0,0,1)})\partial_t - \frac{\epsilon}{2} f^{(0,1,0)}\partial_x - \frac{1}{2} f^{(1,0,0)}\partial_y. \end{aligned}$$

2. *A distribución $\mathcal{D} := Span\{\partial_t\}$ é unha distribución nula paralela. Ademais $\mathcal{D}$ admite un campo de vectores paralelo se, e só se, $f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\beta(y)$.*

Tendo en conta o Lema 1.5.6 anterior, tense entón que:

Lema 1.5.7 [4] *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3.*

1. *O tensor de curvatura de $\mathcal{M}_f$ vén dado por:*

$$\begin{aligned} R(\partial_t,\partial_y)\partial_t &= \frac{1}{2} f^{(2,0,0)}\partial_t,\ R(\partial_t,\partial_y)\partial_y = \frac{1}{2} f f^{(2,0,0)}\partial_t - \frac{\epsilon}{2} f^{(1,1,0)}\partial_x - \frac{1}{2} f^{(2,0,0)}\partial_y, \\ R(\partial_t,\partial_y)\partial_x &= \frac{1}{2} f^{(1,1,0)}\partial_t,\ R(\partial_x,\partial_y)\partial_t = \frac{1}{2} f^{(1,1,0)}\partial_t, \\ R(\partial_x,\partial_y)\partial_x &= \frac{1}{2} f^{(0,2,0)}\partial_t,\ R(\partial_x,\partial_y)\partial_y = \frac{1}{2} f f^{(1,1,0)}\partial_t - \frac{\epsilon}{2} f^{(0,2,0)}\partial_x - \frac{1}{2} f^{(1,1,0)}\partial_y. \end{aligned}$$

2. *O tensor de Ricci de $\mathcal{M}_f$ en forma matricial é*

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} f^{(2,0,0)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} f^{(1,1,0)} \\ \frac{1}{2} f^{(2,0,0)} & \frac{1}{2} f^{(1,1,0)} & \frac{1}{2}(\epsilon f f^{(2,0,0)} - f^{(0,2,0)}) \end{pmatrix}.$$

3. O operador de Ricci ρ de $\mathcal{M}_f$ é

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}f^{(2,0,0)} & \frac{1}{2}f^{(1,1,0)} & -\frac{\epsilon}{2}f^{(0,2,0)} \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon}{2}f^{(1,1,0)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}f^{(2,0,0)} \end{pmatrix}.$$

4. A curvatura escalar de $\mathcal{M}_f$ é $\tau = f^{(2,0,0)}$.

5. $(\mathcal{M}_f, g)$ é Einstein se, e só se, $\mathcal{M}_f$ é chá.

Lema 1.5.8 [5] *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3 en coordenadas locais da forma (1.3). $\mathcal{M}_f$ é localmente simétrica se, e só se, a función f ten unha das formas seguintes:*

1. $f(t,x,y) = \psi(y) + \frac{x}{2\kappa}(\eta(y)\xi(y) + 2\xi'(y)) + \frac{x^2}{4\kappa}\xi(y)^2 + t(\eta(y) + x\xi(y)) + t^2\kappa,$
   para calesquera funcións ψ, η e ξ de y e para calquera constante real $\kappa \neq 0$. Neste caso $\tau = 2\kappa$.

2. $f(t,x,y) = \alpha(y) + x\beta(y) + x^2\delta(y) + t\eta(y),$
   para calesquera funcións α, β, δ e η de y cumprindo a ecuación diferencial $\delta' + \eta\delta = 0$. Neste caso tense que $\tau = 0$.

1.5.3. Métricas de Walker estrictas

Definición 1.5.9 *Unha variedade de Walker $\mathcal{M}_f$ dise que é unha variedade de Walker estricta se, e só se, a distribución $\mathcal{D}$ admite un campo de vectores nulo paralelo.*

Observación 1.5.10 Se $\mathcal{D}$ admite un campo de vectores paralelo podemos renormalizar as coordenadas de Walker de xeito que f é independente do parámetro t e $\mathcal{D} = Span\{\partial_t\}$ [23].

Así, por exemplo, para dimensión 3, podemos escoller un sistema de coordenadas axeitado de tal forma que $f(t,x,y) = f(x,y)$ [23], e a forma canónica da métrica é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & f(x,y) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Tendo en conta o Lema 1.5.6 podemos dar os seguintes resultados referentes a métricas de Walker estrictas.

Lema 1.5.11 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker estricta de dimensión 3, con g_f como en (1.4). Entón a conexión de Levi-Civita vén dada por:*

$$\nabla_{\partial_x}\partial_y = \frac{1}{2}f^{(0,1,0)}\partial_t, \ \ e\ \nabla_{\partial_y}\partial_y = \frac{1}{2}f^{(0,0,1)}\partial_t - \frac{\epsilon}{2}f^{(0,1,0)}\partial_x.$$

Do mesmo xeito, como f non depende de t, as relacións do Lema 1.5.7 simplifícanse e temos o seguinte resultado:

Lema 1.5.12 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker estricta de dimensión 3 en coordenadas locais en que a métrica vén dada por (1.4). Entón:*

1. *O tensor de curvatura vén dado por:*

$$R(\partial_x, \partial_y)\partial_x = \frac{1}{2} f^{(0,2,0)} \partial_t, \;\; e \; R(\partial_x, \partial_y)\partial_y = -\frac{\epsilon}{2} f^{(0,2,0)} \partial_x.$$

2. *O operador de Ricci é da forma:*

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\epsilon}{2} f^{(0,2,0)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 1.5.13 Unha variedade $\mathcal{M}_f$ de Walker é estricta se, e só se, o operador de Ricci é nilpotente en dous pasos.

Teorema 1.5.14 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker estricta de dimensión 3 (con $f = f(x, y)$), con tensor métrico como en (1.4). Entón:*

1. *Todos os invariantes escalares de $\mathcal{M}_f$ anúlanse.*
2. *$\mathcal{M}_f$ é localmente simétrica se, e só se, $f = \alpha(y) + x\beta(y) + x^2\delta$.*
3. *As seguintes afirmacións son equivalentes:*
   a) *O tensor de Ricci é Codazzi.*
   b) *$\mathcal{M}_f$ é localmente conformemente chá.*
   c) *Podemos escoller un sistema de coordenadas tal que $f = \alpha(y) + x\beta(y) + x^2\delta(y)$.*

1.6. Variedades Osserman

Nesta sección imos facer unha pequena introdución ás variedades Osserman xa que aparecerán no Capítulo 3 como un caso particular dos $\mathfrak{C}$-espazos.

Consideremos unha variedade semi-Riemanniana $(\mathcal{M}, g)$, e consideremos R_Z o operador de Jacobi asociado tal e como definimos anteriormente. Comentabamos alí que se $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade Riemanniana, o operador de Jacobi R_Z é diagonalizable, sen embargo, isto non é certo en xeral para métricas g indefinidas. É por iso que damos a seguinte definición xeral:

Definición 1.6.1 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade semi-Riemanniana e $p \in \mathcal{M}$. $(\mathcal{M}, g)$ dise Osserman temporal (resp. Osserman espacial) en p se o polinomio característico de R_z é independente de $z \in S_p^-(\mathcal{M})$ (resp. $z \in S_p^+(\mathcal{M})$); equivalentemente, se os autovalores de R_z son constantes en $S_p^-(\mathcal{M})$ (resp. $S_p^+(\mathcal{M})$).*

O seguinte teorema simplifica a situación en que nos atopamos, pois amosa que as condicións Osserman temporal e espacial son equivalentes:

Teorema 1.6.2 [10] *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade semi-Riemanniana e $p \in \mathcal{M}$. Entón $(\mathcal{M}, g)$ é Osserman temporal en p se, e só se, é Osserman espacial en p.*

Este teorema dá coherencia á seguinte definición que vén a substituír á Definición 1.6.1:

Definición 1.6.3 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade semi-Riemanniana. Entón $(\mathcal{M}, g)$ é Osserman en $p \in \mathcal{M}$ se é Osserman temporal ou espacial en p.*

Hai que ter en conta que o polinomio característico do operador de Jacobi R_z non ten que ser constante para $z \in S_p(\mathcal{M})$, pois pode ser diferente segundo o vector z sexa espacial ou temporal, é dicir, $z \in S_p^-(\mathcal{M})$ ou $z \in S_p^+(\mathcal{M})$. De feito, nun espazo de curvatura seccional constante c, tense que $R_z = c \cdot Id$ se $z \in S_p^+(\mathcal{M})$ e $R_z = -c \cdot Id$ se $z \in S_p^-(\mathcal{M})$.

Un primeiro resultado concerninte á condición puntual de ser Osserman é o seguinte:

Proposición 1.6.4 [10] *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade semi-Riemanniana. Se $(\mathcal{M}, g)$ é Osserman en $p \in \mathcal{M}$ entón $\rho_p = \frac{\tau_p}{n} g_p$.*

Ata agora a condición de ser Osserman considerouse como unha condición meramente alxébrica, definida sobre un só punto. As definicións seguintes estenden esta condición a toda a variedade de dous modos diferentes: puntual e globalmente, se ben, como veremos máis adiante, en ocasións ambas condicións son equivalentes.

Definición 1.6.5 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade semi-Riemanniana. Diremos que $(\mathcal{M}, g)$ é puntualmente Osserman se $(\mathcal{M}, g)$ é Osserman en cada punto $p \in \mathcal{M}$.*

Definición 1.6.6 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade semi-Riemanniana. Diremos que $(\mathcal{M}, g)$ é globalmente Osserman se os autovalores de $g(Z, Z)R_Z$ son constantes en $S(\mathcal{M})$ (i.e., son independentes da dirección $z \in S_p(\mathcal{M})$ e do punto base $p \in \mathcal{M}$).*

En vista das dúas definicións anteriores, é obvio que a condición de ser globalmente Osserman é máis restritiva que a de ser puntualmente Osserman.

1.6.1. Variedades Osserman en Xeometría de Riemann

A Proposición 1.6.4 mostra que toda variedade Osserman é Einstein e, polo tanto, de curvatura constante en dimenión dous e tres. A continuación imos dar algún resultado de variedades Osserman en dimensión catro.

Teorema 1.6.7 [6] *Sexa* $(\mathcal{M}, g)$ *unha variedade de Riemann de dimensión 4, globalmente Osserman, entón é localmente isométrica a unha variedade de curvatura seccional constante, ou a unha variedade Kähler de curvatura seccional holomorfa constante.*

O noso propósito é ver a existencia de exemplos de variedades puntualmente Osserman que non son globalmente Osserman. Recordar que, unha variedade dise k-stein se existen constantes c_i tales que para todo $i = 1, \dots, k$,

$$Tr((R_x)^k) = c_i g(x, x)^k.$$

Teorema 1.6.8 [14] *Sexa* $(\mathcal{M}, g)$ *unha variedade de dimensión catro. Entón, as seguintes condicións son equivalentes:*

a) $(\mathcal{M}, g)$ *é unha variedade puntualmente Osserman.*

b) *Localmente existe unha orientación para* $\mathcal{M}$ *tal que o tensor métrico é autodual e Einstein.*

c) $(\mathcal{M}, g)$ *é* 2*-stein.*

1.6.2. Variedades Osserman en Xeometría de Lorentz

A solución da conxetura de Osserman en xeometría de Lorentz foi obtida estudiando por separado o caso espacial e temporal. Actualmente sabemos que as nocións de Osserman temporal e espacial son equivalentes, o que facilita o seu estudo.

Como xa vimos en xeometría de Riemann, a curvatura seccional é unha función continua definida en toda a Grassmanniana de planos 2-dimensionais tanxentes a $(\mathcal{M}, g)$ en p. O problema chega cando estamos en xeometría semi-Riemanniana, xa que a función curvatura seccional non está definida sobre toda a Grassmanniana, senón que só está definida sobre os planos non dexenerados.

Teorema 1.6.9 [10] *Sexa* $(\mathcal{M}, g)$ *unha variedade de Lorentz, tal que dim* $\mathcal{M} \geq 3$*. Entón,* $(\mathcal{M}, g)$ *é Osserman en* $p \in \mathcal{M}$ *se, e só se,* $(\mathcal{M}, g)$ *ten curvatura seccional constante en* $p \in \mathcal{M}$*.*

Teorema 1.6.10 [10] *Sexa* $(\mathcal{M}, g)$ *unha variedade de Lorentz conexa, con dim* $\mathcal{M} \geq 3$*. Se é puntualmente Osserman entón é de curvatura seccional constante.*

Teorema 1.6.11 *Sexa* $\mathcal{M}_f$ *unha variedade de Walker de dimensión 3 como en (1.3). Entón,* $\mathcal{M}_f$ *é Osserman en* $p \in \mathcal{M}_f$ *se, e só se,* $\mathcal{M}_f$ *é chá.*

Demostración.
Pola Proposición 1.6.4 temos que, por ser, por hipótese, $\mathcal{M}_f$ Osserman, tamén é Einstein. Entón o resultado séguese do Lema 1.5.7 (5).

$\square$

1.7. Variedades recurrentes

Nesta sección introducimos os operadores recurrentes, así como as variedades recurrentes e Ricci recurrentes, pois estas son exemplos de $\mathfrak{P}$-espazos, que serán obxecto de estudo no Capítulo 3.

Definición 1.7.1 *Dise que un campo de tensores T é recurrente se existe unha 1-forma σ tal que*

$$\nabla_X T = \sigma(X)\, T,\ \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}).$$

Definición 1.7.2 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade. Entón dise que $(\mathcal{M}, g)$ é recurrente se é curvatura recurrente, é dicir, se se verifica:*

$$(\nabla_X R)_{YZUV} = \sigma(X)\, R_{YZUV},\ \forall X, Y, Z, U, V \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}),$$

para algunha 1-forma σ en $\mathcal{M}$.

Teorema 1.7.3 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de dimensión 3. Entón $(\mathcal{M}, g)$ é recurrente se, e só se, é Ricci recurrente.*

Demostración.
Sabemos que unha variedade é recurrente se é curvatura recurrente. En dimensión 3 temos que

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,V) &= -\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{g(X,V)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,V)\} \\ &+ \frac{1}{n-2}\{\rho(X,V)g(Y,Z) - \rho(X,Z)g(Y,V) \\ &+ \rho(Y,Z)g(X,V) - \rho(Y,V)g(X,Z)\}. \end{aligned}$$

Agora, posto que $\tau = Tr(\rho)$ quédanos:

$$\begin{aligned} (\nabla_W R)(X,Y,Z,V) &= -\frac{Tr(\nabla_W \rho)}{2}\{g(X,V)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,V)\} \\ &+ \{\nabla_W \rho(X,V)g(Y,Z) - \nabla_W \rho(X,Z)g(Y,V) \\ &+ \nabla_W \rho(Y,Z)g(X,V) - \nabla_W \rho(Y,V)g(X,Z)\}. \end{aligned}$$

De onde se segue que se é Ricci recurrente entón é recurrente. A implicación inversa é certa en calquera dimensión e séguese da definición do tensor de Ricci.

$\square$

1.8. Variedades Ivanov-Petrova

Nesta sección ó igual que na sección anterior imos facer unha pequena introdución ás variedades Ivanov-Petrova, que se tratarán no Capítulo 4, como exemplo de $\mathfrak{O}$-espazos.

Denotamos con $Gr^+_{0,2}(T\mathcal{M})$, $Gr^+_{1,1}(T\mathcal{M})$ e $Gr^+_{2,0}(T\mathcal{M})$ os fibrados de Grassmann de 2-planos orientados tanxentes a $\mathcal{M}$ con signatura $(0,2)$, $(1,1)$ e $(2,0)$, respectivamente.

Definición 1.8.1 *Sexa R o tensor de curvatura dunha variedade $(\mathcal{M}, g)$ de signatura (p,q). Diremos que $(\mathcal{M}, g)$ é espacial, mixto ou temporal IP se os autovalores do operador curvatura antisimétrico R_π son constantes en $Gr^+_{0,2}(T\mathcal{M})$, $Gr^+_{1,1}(T\mathcal{M})$ ou $Gr^+_{2,0}(T\mathcal{M})$, respectivamente.*

Observación 1.8.2 As condicións de ser espacial, mixto ou temporal IP son equivalentes [11].

1.8.1. Variedades IP en Xeometría de Riemann

En xeometría de Riemann as variedades IP foron clasificadas por Ivanov e Petrova en [17] para dimensión menor ou igual que catro.

O seguinte teorema caracteriza as variedades IP en dimensión tres. En dimensión dous o problema é obvio.

Teorema 1.8.3 [17] *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Riemann de dimensión tres. Entón $(\mathcal{M}, g)$ é unha variedade puntualmente IP (respectivamente, globalmente IP) se, e só se, ou ben dúas das curvaturas principais de Ricci son cero e a terceira é unha función diferenciable (respectivamente, constante), ou ben é un espazo de curvatura seccional constante.*

1.8.2. Variedades IP en Xeometría de Lorentz

O estudo das variedades IP en xeometría de Lorentz está totalmente aberto. Salvo algún resultado parcial en dimensión catro [21], tan só existen respostas satisfactorias en dimensión tres, onde se presentan notables diferenzas co caso Riemanniano [9].

Desde un punto de vista puramente alxébrico os tensores curvatura alxébricos IP en signatura $(-++)$ están completamente caracterizados.

Teorema 1.8.4 [9] *Unha variedade de Lorentz de dimesión 3 é IP se, e só se, o seu operador de Ricci ρ satisfai unha das seguintes condicións:*

(i) *ρ é un múltiplo da identidade.*

(ii) *ρ é diagonalizable con dous autovalores nulos.*

(iii) *ρ é nilpotente en dous pasos, é dicir, $\rho^2 = 0$, $\rho \neq 0$.*

Non obstante, a resolución diferenciable do problema é complexa e tan só se teñen resultados baixo condicións adicionais como son o ser homoxéneo ou localmente simétrico:

Teorema 1.8.5 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3. Entón as seguintes afirmacións son equivalentes:*

1. *$\mathcal{M}_f$ é Ivanov-Petrova.*
2. *$\mathcal{M}_f$ é unha variedade de Walker estricta.*
3. *$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\beta(y)$, para calesquera funcións $\alpha(x,y)$ e $\beta(y)$.*

Teorema 1.8.6 [9] *Unha variedade de Lorentz 3-dimensional $(\mathcal{M}, g)$ localmente simétrica é IP se, e só se, é un espazo de curvatura seccional constante ou a métrica é de Walker*

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & f(t,x,y) \end{pmatrix},$$

onde $f(t,x,y) = -t\frac{\delta'(y)}{\delta(y)} + x^2\delta(y) + x\eta(y) + \xi(y)$ para funcións diferenciables arbitrarias $\delta \neq 0$, η, ξ dependendo da variable y.

Observación 1.8.7 Nótese que todas as variedades do teorema anterior son localmente conformemente chás. Sen embargo, existen exemplos de variedades IP de Lorentz que non son localmente conformemente chás.

Posto que o rango do operador de curvatura antisimétrico é par, do anterior dedúcese que o operador de curvatura antisimétrico dunha variedade Lorentziana ten necesariamente o cero como autovalor.

Capítulo 2

Espazos de Gray

Neste capítulo en primeiro lugar faremos un repaso das métricas Einstein así como de dúas clases de variedades de Riemann introducidas por A. Gray [12] ($\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$). Estas dúas clases sitúanse entre as variedades con tensor de Ricci paralelo $\mathcal{P}$ e as que teñen curvatura escalar constante $\mathcal{C}$. Como xa vimos no capítulo anterior, en dimensión tres as variedades con tensor de Ricci paralelo son localmente simétricas. Dende este punto de vista, as clases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ aquí introducidas xeneralizan as variedades localmente simétricas.

A caracterización das clases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^\perp$ para métricas de Walker de dimensión 3 foi dada en [5]. O novo obxectivo no presente capítulo é recordar estes resultados e completar a clasificación coa caracterización das variedades que residen en $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}^\perp$ e $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}^\perp$.

2.1. Xeneralizacións de métricas de Einstein

As métricas Einstein, así como as métricas de curvatura escalar constante, son clases importantes de variedades semi-Riemannianas. Denotaremos estas clases por $\mathcal{E}$ e $\mathcal{C}$ respectivamente. Ademais, denotaremos por $\mathcal{P}$ a clase das variedades con tensor de Ricci paralelo. En resumo:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{\text{variedades Einstein}\}, \\ \mathcal{P} &= \{\text{variedades con tensor de Ricci paralelo}\}, \\ \mathcal{C} &= \{\text{variedades con curvatura escalar constante}\}. \end{aligned}$$

Toda métrica Einstein ten tensor de Ricci paralelo e, polo tanto, curvatura escalar constante. Sen embargo, non toda variedade con curvatura escalar constante ten tensor de Ricci paralelo. Polo tanto, pódese decir que as variedades con tensor de Ricci paralelo sitúanse entre as dúas clases anteriores. Así temos que:

$$\mathcal{E} \subsetneq \mathcal{P} \subsetneq \mathcal{C}.$$

Toda variedade Riemanniana con tensor de Ricci paralelo é localmente un producto de variedades de Einstein, feito este que non se cumple en xeometría semi-Riemanniana [3], o que lle confire un interese engadido á clase $\mathcal{P}$.

2.1.1. Espazos en $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}^\perp$

A. Gray [12] xeneralizou a condición de ter tensor de Ricci paralelo de dúas formas distintas.

Definición 2.1.1 *Consideremos ρ o tensor de Ricci tal e como o definimos no capítulo anterior. De xeito análogo a como vimos na Definición 1.2.4 temos que o tensor de Ricci é cíclico paralelo se se verifica*

$$(\nabla_X \rho)(X, X) = 0,\ \forall X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}),$$

ou equivalentemente, se

$$(\nabla_X \rho)(Y, Z) + (\nabla_Y \rho)(Z, X) + (\nabla_Z \rho)(X, Y) = 0,\ \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}),$$

e que o tensor de Ricci é Codazzi se

$$(\nabla_X \rho)(Y, Z) = (\nabla_Y \rho)(X, Z),\ \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}),$$

é dicir, se o tensor de Ricci verifica a condición de ser Codazzi.

Observación 2.1.2 Consideremos $\mathcal{M}$ unha variedade con tensor de Ricci cíclico paralelo ou Codazzi, entón $\mathcal{M}$ ten curvatura escalar constante.

Trasladando as simetrías da derivada covariante do tensor de Ricci a un contexto alxébrico, Gray considerou o espazo $\mathfrak{G}$ de 3 tensores coas simetrías de $(\nabla.\rho)(\cdot,\cdot)$. Sexa V un espacio vectorial e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto escalar, sexa $\{e_1, \dots, e_n\}$ unha base de V e $\epsilon_{ij} := \langle e_i, e_j\rangle$. Definimos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &:= \{\sigma \in \otimes^3 V^* : \sigma(x, y, z) = \sigma(x, z, y) \\ &\quad \text{e} \quad \sum_{ij} \epsilon_{ij}\sigma(x, e_i, e_j) = 2\sum_{ij} \epsilon_{ij}\sigma(e_i, e_j, x)\ \forall x, y, z \in V\}. \end{aligned}$$

Dotamos a $\mathfrak{G}$ dun producto interior e introducimos o seguinte subespazo que, no contexto xeométrico, se correspondería coas variedades de curvatura escalar constante:

$$\mathcal{C} := \{\sigma \in \mathfrak{G} : \sum_{ij} \epsilon_{ij}\sigma(x, e_i, e_j) = 0\}.$$

De igual modo definimos os seguintes subespazos de $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{\sigma \in \mathfrak{G} : \sigma(x, y, z) + \sigma(y, z, x) + \sigma(z, x, y) = 0\ \forall x, y, z \in V\},\ \text{e} \\ \mathcal{B} &:= \{\sigma \in \mathfrak{G} : \sigma(x, y, z) = \sigma(y, x, z)\ \forall x, y, z \in V\}. \end{aligned}$$

Nótese que a derivada covariante do tensor de Ricci de variedades con tensor de Ricci cíclico paralelo en calquera punto está en $\mathcal{A}$; e de igual modo a derivada covariante do tensor de Ricci de variedades con tensor de Ricci Codazzi en calquera punto está en $\mathcal{B}$.

Tendo en conta as definicións anteriores tense que

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B},$$

e en conclusión tense a seguinte descomposición en suma directa ortogonal [12]:

$$\mathfrak{G} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}^{\perp}.$$

Entón verifícase o seguinte:

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{P} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^{\subset \mathcal{A}}_{\subset \mathcal{B}} \subset \mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}.$$

As variedades correspondentes a modelos en $\mathcal{C}^{\perp}$ están caracterizadas pola seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \nabla_X(\rho)(Y,Z) &= \frac{1}{(n+2)(n-1)}\{nX(\tau)g(Y,Z) \\ &+ \frac{1}{2}(n-2)(Y(\tau)g(X,Z) + Z(\tau)g(X,Y))\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Observación 2.1.3 Toda variedade de Riemann 2-dimensional satisfai a condición (2.1).

Claramente toda variedade con tensor de Ricci paralelo ten tensor de Ricci cíclico paralelo e tensor de Ricci Codazzi, e satisfai a ecuación (2.1), pero o oposto non é certo en xeral. Sen embargo, calquera variedade que satisfai dúas condicións calesqueira das tres anteriores necesariamente ten tensor de Ricci paralelo.

Imos ver a continuación unha clasificación dos espazos que acabamos de definir pero agora considerando $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3, onde empregamos a notación da Observación 1.5.5.

Teorema 2.1.4 *As variedades de Walker 3-dimensionais $\mathcal{M}_f$ con curvatura escalar constante son aquelas que teñen:*

$$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\beta(x,y) + t^2\kappa,$$

onde κ denota unha constante.

Teorema 2.1.5 [5] *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker 3-dimensional, verifícase entón que:*

1. *O tensor de Ricci de $\mathcal{M}_f$ é cíclico paralelo se, e só se, é paralelo.*

2. *$\mathcal{M}_f$ é unha variedade de $\mathcal{C}^\perp$ se, e só se, o tensor de Ricci de $\mathcal{M}$ é paralelo.*

Corolario 2.1.6 *Unha variedade $\mathcal{M}_f$ de Walker 3-dimensional ten tensor de Ricci cíclico paralelo ou está en $\mathcal{C}^\perp$ se, e só se, é localmente simétrica.*

Teorema 2.1.7 [5] *Dada $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker 3-dimensional, as seguintes afirmacións son equivalentes:*

1. *O tensor de Ricci de $\mathcal{M}_f$ é Codazzi.*
2. *$\mathcal{M}_f$ é localmente conformemente chá.*
3. *A función f verifica*

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= \alpha(y) + \frac{x}{2\kappa}(\delta(y)\beta(y) + 2\beta'(y)) + \frac{x^2}{4\kappa}\beta(y)^2 \\ &+ \eta(y)e^{x\sqrt{\epsilon}\sqrt{\kappa}} + \xi(y)e^{-x\sqrt{\epsilon}\sqrt{\kappa}} + t(\delta(y) + x\beta(y)) + t^2\kappa. \end{aligned}$$

2.2. Espazos de tipo Einstein en métricas de Walker

Neste capítulo en primeiro lugar fixemos unha introdución dos espazos de tipo Einstein dando as definicións dos espazos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}^\perp$ entre outros, así como as súas clasificacións para variedades de Walker de dimensión 3. A continuación imos dar a caracterización e clasificación, para variedades de Walker de dimensión 3, dos $\mathcal{A}\oplus\mathcal{C}^\perp$-espazos e dos $\mathcal{B}\oplus\mathcal{C}^\perp$- espazos.

2.2.1. $\mathcal{A}\oplus\mathcal{C}^\perp$-espazos

Comezamos en primeiro lugar co estudo dos $\mathcal{A}\oplus\mathcal{C}^\perp$-espazos para unha métrica de Walker de dimenión 3, tendo en conta a relación que os caracteriza [12]:

$$\mathcal{A}\oplus\mathcal{C}^\perp:\ \mathfrak{S}_{XYZ}\{\nabla_X(\rho)(Y,Z) - \frac{2}{n+2}X(\tau)g(Y,Z)\} = 0, \tag{2.2}$$

$\forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, onde $\mathfrak{S}$ denota a suma cíclica.

Lema 2.2.1 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3. Entón $\mathcal{M}_f$ é localmente simétrica se, e só se, a función f verifica as seguintes condicións:*

$$0 = f^{(3,0,0)}, \tag{2.3}$$
$$0 = f^{(1,2,0)}, \tag{2.4}$$
$$0 = f^{(2,1,0)}, \tag{2.5}$$
$$0 = f^{(2,0,1)}, \tag{2.6}$$
$$0 = f^{(0,3,0)}, \tag{2.7}$$
$$0 = f^{(1,0,0)}f^{(1,1,0)} + 2f^{(1,1,1)} - f^{(0,1,0)}f^{(2,0,0)}, \tag{2.8}$$
$$0 = f^{(0,2,1)} + f^{(0,2,0)}f^{(1,0,0)} - f^{(0,1,0)}f^{(1,1,0)}. \tag{2.9}$$

Teorema 2.2.2 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3. Entón $\mathcal{M}_f$ é un $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}^{\perp}$-espazo se, e só se, é localmente simétrica.*

Demostración.
Consideremos unha métrica de Walker xeral en coordenadas locais e consideremos as ecuacións que resultan de impoñerlle que sexa un $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}^{\perp}$-espazo da fórmula (2.2):

$$0 = f^{(3,0,0)}, \tag{2.10}$$
$$0 = f^{(2,1,0)}, \tag{2.11}$$
$$0 = -5f^{(1,2,0)} + 2\epsilon f^{(2,0,1)}, \tag{2.12}$$
$$0 = -\frac{5f^{(0,3,0)}}{\epsilon} + 5f^{(1,0,0)}f^{(1,1,0)} + 10f^{(1,1,1)} - 5f^{(0,1,0)}f^{(2,0,0)}, \tag{2.13}$$
$$0 = -5f^{(0,2,1)} - 5f^{(0,2,0)}f^{(1,0,0)} + 5f^{(0,1,0)}f^{(1,1,0)} + \epsilon f f^{(2,0,1)}. \tag{2.14}$$

Vexamos entón que se verifica

$$\mathcal{M}_f \text{ é } \mathcal{A} \oplus \mathcal{C}^{\perp}\text{-espazo} \Leftrightarrow \mathcal{M}_f \text{ é localmente simétrica.}$$

“ $\Longleftarrow$”
É doado comprobar que as ecuacións (2.3)-(2.9) implican as condicións (2.10)-(2.14).

“ $\Longrightarrow$”
Supoñamos que se verifican as condicións (2.10)-(2.14). Entón temos que probar que $\mathcal{M}_f$ é localmente simétrica.

Consideremos a ecuación (2.12) e derivémola con respecto de x. Resulta que

$$-5f^{(1,3,0)} + 2\epsilon f^{(2,1,1)} = 0,$$

pero como por (2.11) se verifica que $f^{(2,1,1)} = 0$, dedúcese que

$$f^{(1,3,0)} = 0.$$

Entón temos:

$$f^{(3,0,0)} = f^{(2,1,0)} = f^{(1,3,0)} = 0.$$

Consideremos agora a ecuación (2.14) e derivémola con respecto de x dúas veces:

$$\begin{aligned} 0 &= -5f^{(2,2,1)} - 5f^{(2,2,0)}f^{(1,0,0)} - 5f^{(0,2,0)}f^{(3,0,0)} - 10f^{(1,2,0)}f^{(2,0,0)} \\ &+ 5f^{(2,1,0)}f^{(1,1,0)} + 5f^{(0,1,0)}f^{(3,1,0)} + 10f^{(1,1,0)}f^{(2,1,0)} \\ &+ \epsilon f^{(2,0,0)}f^{(2,0,1)} + \epsilon f f^{(4,0,1)} + 2\epsilon f^{(1,0,0)}f^{(3,0,1)}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Simplificamos esta expresión tendo en conta os termos que xa sabemos que se anulan e resulta o seguinte:

$$f^{(2,0,0)}(-10f^{(1,2,0)} + \epsilon f^{(2,0,1)}) = 0,$$

e desta ecuación obtemos que:

1. ou ben:

   $f^{(2,0,0)} = 0$, polo tanto $f^{(2,0,1)} = 0$ e pola ecuación (2.12) tamén se ten $f^{(1,2,0)} = 0$,

2. ou ben:

   $-10f^{(1,2,0)} + \epsilon f^{(2,0,1)} = 0$, e isto xunto coa condición (2.12) lévanos a un sistema homoxéneo de dúas ecuacións con dúas incógnitas compatible determinado; polo tanto dedúcese que $f^{(1,2,0)} = f^{(2,0,1)} = 0$.

Das dúas opcións anteriores dedúcese que $f^{(1,2,0)} = f^{(2,0,1)} = 0$ e temos en conclusión ata este momento que

$$f^{(3,0,0)} = f^{(2,1,0)} = f^{(2,0,1)} = 0.$$

Isto implica que

$$\tau = f^{(2,0,0)} = cte,$$

pois trátase dunha métrica de Walker. Entón, por ter curvatura escalar constante sabemos que $\mathcal{M}_f$ está en $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ e estamos supoñendo ademais por hipótese que está en $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}^\perp$.

Polo tanto, dedúcese que $g_f \in \mathcal{A}$, e polo Corolario 2.1.6, que a variedade é localmente simétrica.

□

2.2.2. $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}^\perp$-espazos

Pasamos agora ó estudo dos $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}^\perp$-espazos de novo para métricas de Walker de dimensión 3, tendo en conta a relación que os caracteriza [12]:

$$\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}^\perp : \ \nabla_X(\rho)(Y,Z) - \nabla_Y(\rho)(X,Z) = \frac{1}{n-1}\{X(\tau)g(Y,Z) - Y(\tau)g(X,Z)\}, \tag{2.16}$$

$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$.

Lema 2.2.3 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3. Entón $\mathcal{M}_f$ ten tensor de Ricci Codazzi se, e só se, a función f verifica as seguintes condicións:*

$$\begin{aligned}
(2.17)\quad 0 &= f^{(3,0,0)},\\
(2.18)\quad 0 &= f^{(1,2,0)},\\
(2.19)\quad 0 &= f^{(2,1,0)},\\
(2.20)\quad 0 &= \epsilon f^{(2,0,1)} - \epsilon f f^{(3,0,0)},\\
(2.21)\quad 0 &= 2f^{(0,3,0)} + \epsilon(f^{(1,0,0)}f^{(1,1,0)} + 2f^{(1,1,1)} - f^{(0,1,0)}f^{(2,0,0)} - 2ff^{(2,1,0)}).
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.4 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3. $\mathcal{M}_f$ é un $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}^{\perp}$-espazo se, e só se, existen coordenadas locais nas que*

$$g_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & f(t,x,y) \end{pmatrix},$$

con:

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= \alpha(y) + \frac{x}{2\kappa}(\delta(y)\beta(y) + 2\beta'(y)) + \frac{x^2}{4\kappa}\beta(y)^2 \\ &+ \eta(y)e^{x\sqrt{\epsilon}\sqrt{\kappa}} + \xi(y)e^{-x\sqrt{\epsilon}\sqrt{\kappa}} + t(\delta(y) + x\beta(y)) + t^2\kappa, \end{aligned}$$

é dicir, se $\mathcal{M}_f$ ten tensor de Ricci Codazzi ($\mathcal{B}$).

Demostración.
Vexamos entón que se verifica:

$$g_w \in \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}^{\perp} \Leftrightarrow g_w \in \mathcal{B},$$

tal e como se enuncia no teorema.

"$\Longleftarrow$"
Esta implicación verifícase trivialmente pois se g_w está en $\mathcal{B}$ en particular $g_w \in \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}^{\perp}$.

"$\Longrightarrow$"
Consideremos as ecuacións que resultan de comprobar que o espazo do que partimos verifica a condición (2.16):

$$0 = f^{(3,0,0)}, \tag{2.22}$$
$$0 = f^{(2,1,0)}, \tag{2.23}$$
$$0 = f^{(1,2,0)}, \tag{2.24}$$
$$0 = f^{(2,0,1)}, \tag{2.25}$$
$$0 = 2f^{(0,3,0)} + \epsilon f^{(1,0,0)} f^{(1,1,0)} + 2\epsilon f^{(1,1,1)} - \epsilon f^{(0,1,0)} f^{(2,0,0)}. \tag{2.26}$$

Entón considerando as ecuacións (2.22), (2.23) e (2.25), deducimos que

$$f^{(3,0,0)} = f^{(2,1,0)} = f^{(2,0,1)} = 0,$$

polo tanto

$$\tau = f^{(2,0,0)} = cte,$$

é dicir,

$$g_f \in \mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B},$$

e como por hipótese se ten que

$$g_f \in \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}^{\perp},$$

podemos concluír que

$$g_f \in \mathcal{B}.$$

□

2.2.3. Clasificación para métricas de Walker

Neste apartado imos a facer un resumo coas clasificacións que fomos facendo ó longo do capítulo, sempre considerando unha variedade $\mathcal{M}_f$ de Walker e de dimensión 3 en coordenadas locais como na Observación 1.5.5.

Na táboa seguinte amósase cada un dos espazos de Gray coas correspondentes caracterizazións e clasificacións para variedades de Walker 3-dimensionais.

Espazos	Caracterización	Clasificación	Descripción da función f
$\mathcal{A}$	ρ cíclico paralelo $(\nabla_X\rho)(Y,Z)+(\nabla_Y\rho)(Z,X)+(\nabla_Z\rho)(X,Y)=0,$	$\nabla\rho=0$	$\bullet f(t,x,y)=\psi(y)+\frac{x}{2\kappa}(\eta(y)\xi(y)+2\xi'(y))$ $+\frac{x^2}{4\kappa}\xi(y)^2+t(\eta(y)+x\xi(y))+t^2\kappa,$ $\bullet f(t,x,y)=\alpha(y)+x\beta(y)+x^2\delta(y)+t\eta(y),$ con $\delta'+\eta\delta=0.$
$\mathcal{B}$	ρ Codazzi $(\nabla_X\rho)(Y,Z)=(\nabla_Y\rho)(X,Z),$	en xeral $\nabla\rho\neq 0$	$f(t,x,y)=\alpha(y)+\frac{x}{2\kappa}(\delta(y)\beta(y)+2\beta'(y))$ $+\frac{x^2}{4\kappa}\beta(y)^2+\eta(y)e^{x\sqrt{\epsilon}\sqrt{\kappa}}+\xi(y)e^{-x\sqrt{\epsilon}\sqrt{\kappa}}$ $+t(\delta(y)+x\beta(y))+t^2\kappa.$
$\mathcal{C}^\perp$	$\nabla_X(\rho)(Y,Z)=\frac{1}{(n+2)(n-1)}\{nX(\tau)g(Y,Z)$ $+\frac{1}{2}(n-2)(Y(\tau)g(X,Z)+Z(\tau)g(X,Y))\},$	$\nabla R=0$	$\bullet f(t,x,y)=\psi(y)+\frac{x}{2\kappa}(\eta(y)\xi(y)+2\xi'(y))$ $+\frac{x^2}{4\kappa}\xi(y)^2+t(\eta(y)+x\xi(y))+t^2\kappa,$ $\bullet f(t,x,y)=\alpha(y)+x\beta(y)+x^2\delta(y)+t\eta(y),$ con $\delta'+\eta\delta=0.$
$\mathcal{C}=\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$	$\tau=\kappa$	$f^{(3,0,0)}=0$	$f(t,x,y)=\psi(x,y)+t\varphi(x,y)+t^2\frac{\kappa}{2}.$
$\mathcal{A}\oplus\mathcal{C}^\perp$	$\mathfrak{S}_{XYZ}\{\nabla_X(\rho)(Y,Z)-\frac{2}{n+2}X(\tau)g(Y,Z)\}=0,$	$\nabla R=0$	$\bullet f(t,x,y)=\psi(y)+\frac{x}{2\kappa}(\eta(y)\xi(y)+2\xi'(y))$ $+\frac{x^2}{4\kappa}\xi(y)^2+t(\eta(y)+x\xi(y))+t^2\kappa,$ $\bullet f(t,x,y)=\alpha(y)+x\beta(y)+x^2\delta(y)+t\eta(y),$ con $\delta'+\eta\delta=0.$
$\mathcal{B}\oplus\mathcal{C}^\perp$	$\nabla_X(\rho)(Y,Z)-\nabla_Y(\rho)(X,Z)=$ $=\frac{1}{n-1}\{X(\tau)g(Y,Z)-Y(\tau)g(X,Z)\},$	ρ Codazzi	$f(t,x,y)=\alpha(y)+\frac{x}{2\kappa}(\delta(y)\beta(y)+2\beta'(y))$ $+\frac{x^2}{4\kappa}\beta(y)^2+\eta(y)e^{x\sqrt{\epsilon}\sqrt{\kappa}}+\xi(y)e^{-x\sqrt{\epsilon}\sqrt{\kappa}}$ $+t(\delta(y)+x\beta(y))+t^2\kappa.$

Táboa de clasificación dos espazos de Gray para métricas de Walker 3-dimensionais.

Capítulo 3

Xeometría do operador de Jacobi

Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade con g unha métrica Riemanniana ou Lorentziana. Unha técnica moi útil para estudiar a curvatura consiste en analizar o operador de Jacobi ó longo de xeodésicas γ. Neste capítulo imos facer un estudo detallado do operador de Jacobi ó longo de xeodésicas pero centrando a nosa atención nas métricas de Lorentz e, máis concretamente, particularizando este estudo a métricas de Walker.

Xeneralizaremos os espazos localmente simétricos, tendo en conta dúas condicións sobre o operador de Jacobi que nos axudarán a coñecer mellor as propiedades da variedade. Ademais, partindo dos resultados xa coñecidos no contexto Riemanniano, estudiaremos esas condicións para variedades de Walker de dimensión 3.

Berndt e Vanhecke [2] introduciron os $\mathfrak{C}$-espazos e os $\mathfrak{P}$-espazos como unha xeneralización dos espazos localmente simétricos en signatura Riemanniana. O noso primeiro obxectivo será estender estas xeneralizacións a signatura Lorentziana para posteriormente dar unha clasificación similar para variedades de Walker de dimensión 3.

3.1. Introdución ós $\mathfrak{C}$- e $\mathfrak{P}$-espazos

Definición 3.1.1 [2] *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Riemann.*

1. *Dise que $(\mathcal{M}, g)$ é un $\mathfrak{C}$-espazo se o operador de Jacobi ten autovalores constantes ó longo de cada xeodésica.*

2. *Dise que $(\mathcal{M}, g)$ é un $\mathfrak{P}$-espazo se o operador de Jacobi ten autoespazos paralelos ó longo de cada xeodésica.*

Observación 3.1.2 Os autoespazos de R_γ dise que son paralelos ó longo de γ se son invariantes con respecto ó transporte paralelo ó longo de γ.

Teorema 3.1.3 [2] *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Riemann. $(\mathcal{M}, g)$ é un espazo localmente simétrico se, e só se, é un $\mathfrak{C}$-espazo e un $\mathfrak{P}$-espazo simultáneamente.*

3.2. Clasificación Riemanniana

Nesta sección imos dar un resumo das clasificacións xa coñecidas para variedades de Riemann de dimensión 2 e 3.

3.2.1. Clasificación dos $\mathfrak{C}$-espazos en dimensión dous e tres

J. Berndt e L. Vanhecke deron a seguinte clasificación dos $\mathfrak{C}$-espazos para variedades Riemannianas de dimensión 2 e 3:

Supoñamos que temos unha variedade de Riemann $\mathcal{M}$ de dimensión 2, e sexa γ unha xeodésica en $\mathcal{M}$. Entón o operador de Jacobi asociado R_γ ten dous autovalores: 0 e $c\kappa$, onde c é unha constante e κ é a curvatura seccional de $\mathcal{M}$ ó longo de γ. Polo tanto:

Teorema 3.2.1 [2] *Unha variedade de Riemann 2-dimensional é un $\mathfrak{C}$-espazo se, e só se, ten curvatura seccional constante.*

Teorema 3.2.2 [2] *Unha variedade de Riemann 3-dimensional é un $\mathfrak{C}$-espazo se, e só se, é un dos seguintes espazos:*

(i) *un espazo simétrico,*

(ii) $SU(2)$ *cunha métrica de Riemann especial invariante pola esquerda,*

(iii) *o recubrimento universal de* $SL(2,\mathbb{R})$ *cunha métrica de Riemann especial invariante pola esquerda, ou*

(iv) *o grupo de Heisenberg 3-dimensional con calquera métrica de Riemann invariante pola esquerda.*

Se $\mathcal{M}$ non é completa ou non é simplemente conexa, é localmente isométrica a un destes espazos.

3.2.2. Clasificación dos $\mathfrak{P}$-espazos en dimensión dous e tres

A seguinte clasificación correspondente ós $\mathfrak{P}$-espazos en signatura Riemanniana de dimensión dous e tres:

Teorema 3.2.3 [2] *Toda variedade de Riemann conexa de dimensión 2 é un $\mathfrak{P}$-espazo.*

Teorema 3.2.4 [2] *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ un $\mathfrak{P}$-espazo de dimensión 3. Entón $(\mathcal{M}, g)$ é localmente isométrico en casi todo punto, é dicir, nun subconxunto aberto e denso de $\mathcal{M}$, a un dos seguintes espazos:*

(i) *un espazo con curvatura seccional constante,*

(ii) *un producto warped da forma $\mathcal{M}_1 \times_f \mathcal{M}_2$, onde $\mathcal{M}_1$ é unha variedade de Riemann 1-dimensional, $\mathcal{M}_2$ é unha variedade de Riemann 2-dimensional e f é unha función positiva en $\mathcal{M}_1$,*

(iii) *un producto warped da forma $\mathcal{M}_2 \times_f \mathcal{M}_1$, onde $\mathcal{M}_1$ é unha variedade de Riemann 1-dimensional, $\mathcal{M}_2$ é un espazo de Liouville e f vén dada por*

$$f^2(x, y) = |\varphi(x)\psi(x)|,$$

onde as funcións φ e ψ veñen da forma de Liouville (local)

$$(\varphi(x) + \psi(y))(dx^2 + dy^2),$$

da métrica de Riemann de $\mathcal{M}_2$, ou

(iv) *unha variedade de Riemann 3-dimensional con métrica de Riemann da forma*

$$\mathfrak{S}_{1,2,3} F_1(x_1)|x_1 - x_2||x_1 - x_3|\, dx_1^2,$$

onde $\mathfrak{S}$ denota a suma cíclica e F_1, F_2, F_3 son funcións positivas.

Recíprocamente, calquera variedade de Riemann 3-dimensional do tipo (i), (ii), (iii) ou (iv) é un $\mathfrak{P}$-espazo.

3.3. Extensión a signatura Lorentziana

A xeometría de Lorentz ten gran importancia, non só no ámbito das Matemáticas, senón tamén na Física, e sobre todo na Teoría da Relatividade. Se nos centramos no campo das Matemáticas, cando traballamos en xeometría semi-Riemanniana, e como caso particular en xeometría de Lorentz, atopámonos coa existencia de vectores de norma positiva, de norma negativa e con vectores non nulos pero de norma cero, é dicir, o noso producto interior non é definido positivo. Isto acarrea certas dificultades, entre elas, que non temos garantido que o operador de Jacobi sexa diagonalizable aínda sendo autoadxunto con respecto á nosa métrica g, polo que os conceptos de $\mathfrak{C}$-espazo e $\mathfrak{P}$-espazo que imos estudiar non teñen a mesma interpretación en signatura Lorentziana que en signatura Riemanniana.

O obxectivo desta sección é estender os conceptos de $\mathfrak{C}$-espazo e $\mathfrak{P}$-espazo a variedades de Lorentz. Os autovalores dun operador quedan determinados polas trazas das sucesivas potencias do mesmo, así que, dicir que os autovalores do operador de Jacobi sexan constantes ao longo de γ ($\mathfrak{C}$-espazos) equivale a que se verifique o seguinte:

$$\nabla_{\gamma'} Tr R_\gamma^{(k)} = 0,\ k = 1, \ldots, n-1.$$

Para os $\mathfrak{P}$-espazos, que os autoespazos sexan paralelos ó longo da xeodésica γ equivale a que se verifique que

$$\nabla_{\gamma'} E_\lambda \subset E_\lambda,$$

e para signatura Riemanniana isto equivale a que exista unha base paralela de autovectores $\{e_i\}$. Vexamos que existe unha base verificando isto:

Consideremos $E_i(t)$ unha base do autoespazo E_λ e tomemos:

$$e_i(t) = \sum_j f_j E_j,$$

sendo $\{f_j\}$ funcións que debemos determinar que existen. Entón:

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} e_i &= \sum_j (f_j)' E_j + \sum_j f_j \nabla_{\gamma'} E_j \\ &= \sum_k (f_k)' E_k + \sum_{j,k} f_j \lambda_j^k E_k. \end{aligned}$$

Que a base $\{e_i\}$ sexa paralela tradúcese, polo tanto, no seguinte sistema de ecuacións diferenciais:

$$(f_k)' + f_j \lambda_j^k = 0.$$

Este sistema de ecuacións diferenciais ordinarias ten solución e así dedúcese que en signatura Riemanniana se pode atopar unha base paralela de autovectores. Isto equivale ademais a que se verifique a seguinte condición [2]:

$$R_{\gamma'} R'_{\gamma'} - R'_{\gamma'} R_{\gamma'} = 0,$$

onde $R'_{\gamma'} := (\nabla_{\gamma'} R)(\cdot, \gamma')\gamma'$, é o operador de Szabó asociado a γ.

Tomemos agora unha variedade Lorentziana e consideremos γ unha xeodésica temporal. O espazo ortogonal ó vector velocidade da xeodésica $(\gamma')^\perp$ ten signatura positiva, e polo tanto os operadores $R_{\gamma'}$ e $R'_{\gamma'}$ son diagonalizables. Tendo en conta estas observacións, estamos en condicións de dar a seguinte definición:

Definición 3.3.1 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Lorentz.*

1. *Dise que $(\mathcal{M}, g)$ é un $\mathfrak{C}$-espazo temporal ($T\mathfrak{C}$) se o operador de Jacobi ten autovalores constantes ó longo de cada xeodésica temporal.*
2. *Dise que $(\mathcal{M}, g)$ é un $\mathfrak{P}$-espazo temporal ($T\mathfrak{P}$) se o operador de Jacobi ten autoespazos paralelos ó longo de cada xeodésica temporal.*

Observación 3.3.2 En signatura Riemanniana, como vimos, tense que $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{P}$ se corresponde coa clase formada polos espazos localmente simétricos, é dicir, unha variedade de Riemann é localmente simétrica se, e só se, é $\mathfrak{C}$-espazo e $\mathfrak{P}$-espazo simultaneamente. Entón podémonos preguntar se acontece o mesmo para signatura Lorentziana:

$$T\mathfrak{C} \cap T\mathfrak{P} \stackrel{?}{=} \{\nabla R = 0\},$$

onde $\{\nabla R = 0\}$ denota a clase constituída polos espazos localmente simétricos.

Consideremos as clases $T\mathfrak{C}$ e $T\mathfrak{P}$ e vexamos cales son as variedades que son $\mathfrak{C}$-espazos e $\mathfrak{P}$-espazos temporais ó mesmo tempo. As variedades que pertencen á intersección:

$$T\mathfrak{C} \cap T\mathfrak{P}$$

son aquelas para as que se verifica:

$$\nabla_X R_{XYYX} = 0, \ \forall X \text{ temporal e } Y \perp X,$$

xa que por estar en $T\mathfrak{P}$ sabemos que para cada autoespazo existe unha base paralela de autovectores e ademais por estar en $T\mathfrak{C}$ estes autovectores son constantes, polo tanto a derivada covariante dos mesmos é cero e en conclusión verifícase a igualdade anterior.

Empregamos agora un resultado de [8] para ver que isto implica que:

$$\nabla R = 0.$$

Polo tanto temos así que en xeometría de Lorentz tamén se verifica que $T\mathfrak{C} \cap T\mathfrak{P}$ se corresponde coa clase de espazos localmente simétricos, e ten sentido entón facer un estudo dos $\mathfrak{C}$-espazos temporais e dos $\mathfrak{P}$-espazos temporais por separado como facíamos no caso Riemanniano, e como xeneralizacións dos espazos localmente simétricos.

Sen embargo, esta estensión que vimos de facer depende da condición Lorentziana da variedade, pois en signatura superior, se tratamos de estender estes conceptos dun xeito natural, podemos atopar variedades que son $\mathfrak{C}$-espazos e $\mathfrak{P}$-espazos pero que non son localmente simétricas.

Exemplo 1 *Sexa $\mathcal{O}$ un aberto de $\mathbb{R}^4$ e consideremos a métrica g dada en coordenadas locais (t, x, y, z) como segue:*

$$g(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b(y) \end{pmatrix}.$$

$(\mathcal{O}, g)$ é unha variedade de Walker estricta de signatura neutra $(2, 2)$ e onde $\{\frac{\partial}{\partial_t}, \frac{\partial}{\partial_x}\}$ son paralelos. Ademais é sempre Osserman e polo tanto sempre $T\mathfrak{C}$-espazo e tamén é $T\mathfrak{P}$-espazo. Non obstante, se $b^{(3)}(y) \neq 0$, $(\mathcal{O}, g)$ non é localmente simétrica.

Demostración.
Da expresión da métrica dedúcese que $(\mathcal{O}, g)$ é unha variedade de Walker estricta. Polo tanto, o operador de Jacobi é nilpotente e ten autovalores 0. Así, $(\mathcal{O}, g)$ é Osserman e, en particular, ten autovalores constantes ó longo de cada xeodésica temporal, polo que $(\mathcal{O}, g)$ é un $T\mathfrak{C}$-espazo.

Para ver que $(\mathcal{O}, g)$ é un $T\mathfrak{P}$-espazo comprobaremos que o operador de Jacobi e o operador de Szabó conmutan. Para iso facemos os cálculos con respecto a un vector

u, expresado na base de campos coordenados como $u = u_1\partial_t + u_2\partial_x + u_3\partial_y + u_4\partial_z$, $(u = (u_1, u_2, u_3, u_4))$, e escollido de forma arbitraria.

O operador de Jacobi vén dado por:

$$R_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}u_4^2 b''(y) & \frac{1}{2}u_3u_4b''(y) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}u_3u_4b''(y) & -\frac{1}{2}u_3^2 b''(y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e o operador de Szabó vén dado por:

$$R'_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}u_3u_4^2 b^{(3)}(y) & \frac{1}{2}u_3^2u_4b^{(3)}(y) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}u_3^2u_4b^{(3)}(y) & -\frac{1}{2}u_3^3 b^{(3)}(y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vese fácilmente que ambos conmutan e, en conclusión, que $(\mathcal{O}, g)$ é un $T\mathfrak{P}$-espazo.

Finalmente, dado que

$$\nabla_{\partial_x} R(\partial_x, \partial_y, \partial_y, \partial_x) = \frac{1}{2} b^{(3)}(y),$$

se $b^{(3)}(y) \neq 0$ entón

$$\nabla R \neq 0,$$

e a variedade non é localmente simétrica.

$\square$

É difícil dar unha clasificación completa para as variedades Lorentzianas 3-dimensionais que son $\mathfrak{C}$ ou $\mathfrak{P}$-espazos temporais. Por iso, a partir deste momento centrarémonos nas variedades de Walker como exemplo propio de variedades de Lorentz en dimensión 3 e estudiaremos independentemente os $\mathfrak{C}$-espazos e os $\mathfrak{P}$-espazos temporais. Sen embargo, por comodidade de notación imos referirnos a estes como $\mathfrak{C}$-espazos e $\mathfrak{P}$-espazos sobreentendendo en función do contexto en que situación nos atopamos.

3.4. $\mathfrak{C}$-espazos

Unha vez feita a introdución dos espazos $\mathfrak{C}$ coas súas caracterizacións e clasificacións para un contexto xeral, nesta sección centrarémonos nas variedades de Walker de dimensión 3.

Lema 3.4.1 *Unha variedade $(\mathcal{M}, g)$ de Lorentz 3-dimensional é un $\mathfrak{C}$-espazo se, e só se, satisfai as seguintes condicións alxébricas:*

(1) $\nabla_x \rho(x, x) = 0$, $\forall x \in T\mathcal{M}$,

(2) $\sum_i \varepsilon_i R(e_i, x, x, e_i)\nabla_x R(e_i, x, x, e_i) = 0$, *$\forall x \in T\mathcal{M}$ e $\{e_i\}$ base ortonormal.*

Demostración.
Pola definición sabemos que $(\mathcal{M}, g)$ é un $\mathfrak{C}$-espazo se o operador de Jacobi ten autovalores constantes ó longo de cada xeodésica temporal. E tal e como vimos ó comezo deste capítulo en xeral probar que os autovalores do operador de Jacobi son constantes ó longo dunha xeodésica γ equivale a probar, considerando x temporal, que:

$$\nabla_{\gamma'} Tr R_x^{(k)} = 0,$$

(pois as trazas das matrices $R_x^{(k)}$ determinan os autovalores do operador de Jacobi), ou o que é o mesmo, posto que $\rho(x,x) = TrR_x$:

$$\nabla_x \rho(x,x) = 0, \tag{3.1}$$

$$\sum_i \varepsilon_i R(e_i, x, x, e_i)\nabla_X R(e_i, x, x, e_i) = 0, \tag{3.2}$$

$$...$$

para todo x temporal.

En dimensión 3, que é o que nos atañe, é suficiente con que se cumpran as condicións de Ledger de orde 3 e 5, respectivamente (3.1) e (3.2).

Vexamos ademais que estas condicións se verifican para todo vector x. Consideremos as dúas condicións seguintes:

$$\begin{array}{rcl} \nabla_x \rho(x,x) & = & 0, \ \forall |x| < 0, \\ \sum_i \varepsilon_i R(a,x,x,b)\nabla_x R(a,x,x,b) & = & 0, \ \forall |x| < 0, \end{array}$$

e vexamos que se poden xeneralizar:

sexa x espacial con $|x| = 1$, consideremos $y \perp x$ con $|y| = -1$ e tomemos agora

$$z = \lambda x + y, con |z| = \lambda^2 - 1.$$

Tense que z é temporal sempre e cando se verifique $|\lambda| < 1$ e nese caso:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \nabla_z \rho(z,z) = \nabla_{\lambda x + y}\rho(\lambda x + y, \lambda x + y) \\ & = & \lambda^3 \nabla_x \rho(x,x) + \lambda^2\{\cdot\} + \lambda\{\cdot\} + \nabla_y \rho(y,y). \end{array}$$

Entón, por ser y temporal, o termo $\nabla_y \rho(y,y)$ anúlase e por ser o que nos queda un polinomio de grado 3 dedúcese que o termo en λ^3 debe ser cero e, polo tanto,

$$\nabla_x \rho(x,x) = 0.$$

Isto proba (1). Facendo un razonamento análogo para a outra condición chegamos a que tamén se verifica para todo x a condición (2).

□

En conclusión:

$$(\mathcal{M}, g) \text{ é un } \mathfrak{C}\text{-espazo} \Leftrightarrow \text{ se verifican as condicións (1) e (2),}$$

e a caracterización de $\mathfrak{C}$-espazo para vectores temporais equivale á caracterización para vectores espaciais. Ten sentido polo tanto falar de $\mathfrak{C}$-espazos en signatura Lorentziana dos cales faremos un estudo detallado.

Observación 3.4.2 Os análogos Lorentzianos das variedades obtidas na clasificación dos $\mathfrak{C}$-espazos Riemannianos tamén son $\mathfrak{C}$-espazos, o que se obtén tras cálculos sinxelos.

3.4.1. Variedades de Osserman

Un caso particular de $\mathfrak{C}$-espazos de especial interese é o das métricas de Osserman.

Teorema 3.4.3 *Toda variedade $(\mathcal{M}, g)$ Osserman é un $\mathfrak{C}$-espazo.*

Demostración.
Por ser $(\mathcal{M}, g)$ Osserman tense que o operador de Jacobi ten autovalores constantes para vectores unitarios en toda a variedade. Entón, en particular, tamén se verifica que o operador de Jacobi ten autovalores constantes ó longo de toda xeodésica γ.

□

3.4.2. Métricas de Walker

Supoñamos agora que temos $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3. Queremos facer unha clasificación dos $\mathfrak{C}$-espazos para este caso particular de métricas de Lorentz.

Como xa vimos, para que sexa $\mathfrak{C}$-espazo a variedade $\mathcal{M}_f$ debe verificar:

$$\nabla_x \rho(x, x) = 0, \text{ e } \nabla_x Tr R_x^2 = 0.$$

Tendo en conta o visto no capítulo anterior, así como resultados xa coñecidos, podemos enunciar o seguinte teorema de clasificación dos $\mathfrak{C}$-espazos para métricas de Walker de dimensión 3.

Teorema 3.4.4 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3. $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{C}$-espazo se, e só se, $\mathcal{M}_f$ é localmente simétrica.*

Demostración.
Se $\mathcal{M}_f$ é localmente simétrica verifícanse de xeito trivial as condicións de ser $\mathfrak{C}$-espazo. Vexamos entón que a implicación inversa tamén se verifica. Supoñemos que $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{C}$-espazo, entón en particular tense que $\nabla_x \rho(x,x) = 0$, é dicir, $\mathcal{M}_f$ ten tensor de Ricci cíclico paralelo e polo Teorema 2.1.5 sabemos que unha variedade de Walker de dimensión 3 con tensor de Ricci cíclico paralelo é localmente simétrica.

□

3.5. $\mathfrak{P}$-espazos

J.Berndt e L.Vanhecke deron a seguinte caracterización dos $\mathfrak{P}$-espazos para signatura Riemanniana,

Teorema 3.5.1 *Unha variedade de Riemann (M,g) é un $\mathfrak{P}$-espazo se se verifica que:*

$$R_\gamma R'_\gamma = R'_\gamma R_\gamma, \tag{3.3}$$

é dicir, ser $\mathfrak{P}-$espazo equivale a que o operador de Jacobi e o operador de Szabó conmuten.

Tal e como vimos ó comezo deste capítulo esta caracterización tamén nos sirve para signatura Lorentziana e do mesmo xeito que acontecía cos $\mathfrak{C}$-espazos pódese probar fácilmente que o operador de Jacobi e o operador de Szabó conmutan para xeodésicas temporais se, e só se, $R_x R'_x = R'_x R_x = 0$, $\forall x$. Entón:

Lema 3.5.2 *Unha variedade $(\mathcal{M},g)$ de Lorentz 3-dimensional é un $\mathfrak{P}$-espazo se, e só se, satisfai a seguinte condición alxébrica:*

$$R_x R'_x = R'_x R_x = 0, \ \forall x \in T\mathcal{M}.$$

Observación 3.5.3 Os análogos Lorentzianos das variedades optidas na clasificación Riemanniana dos $\mathfrak{P}$-espazos tamén o son, sen máis que realizar uns cálculos sinxelos.

3.5.1. Variedades recurrentes

Como xa vimos no Capítulo 1 as variedades recurrentes son un exemplo de $\mathfrak{P}$-espazos, pois verifícase o seguinte:

Teorema 3.5.4 *Toda variedade $(\mathcal{M},g)$ curvatura recurrente é un $\mathfrak{P}$-espazo.*

Demostración.
Supoñamos que $(\mathcal{M},g)$ é curvatura recurrente, entón:

$$(\nabla_U R)_{XUU} = \sigma(U) R_{XUU}, \text{ e } R'_U = \sigma(u) R_U.$$

Polo tanto verifícase o seguinte:

$$R'_U R_U - R_U R'_U = \sigma(U) R_U R_U - \sigma(U) R_U R_U = 0,$$

é dicir, $(\mathcal{M}, g)$ é un $\mathfrak{P}$-espazo.

□

3.5.2. Métricas de Walker

Ímonos centrar agora no estudo e clasificación dos $\mathfrak{P}$-espazos pero para unha variedade de Walker 3-dimensional $\mathcal{M}_f$ como na Observación 1.5.5.

Métricas de Walker xerais

Consideramos unha métrica de Walker xeral como en (1.3) e calculamos a matriz 3×3 que resulta de realizar os cálculos da ecuación (3.3) con respecto a un vector u, expresado na base de campos coordenados como $u = (u_1, u_2, u_3)$, e obtemos unha matriz de orde 3×3 que denotamos por P. É fácil probar que as 6 compoñentes distintas de 0 da matriz P dan as mesmas EDPs, sendo a matriz:

$$P = R_u R'_u - R'_u R_u = \begin{pmatrix} P_{11} & -P_{11}\frac{u_1+u_3 f}{u_2} & P_{11} f \\ -P_{11}\frac{u_3}{u_2\epsilon} & 0 & P_{11}\frac{u_1}{u_2\epsilon} \\ 0 & P_{11}\frac{u_3}{u_2} & 0 \end{pmatrix},$$

onde o operador de Jacobi vén dado por:

$$R_u = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -\frac{u_3^2 f^{(1,1,0)}}{2\epsilon} & -\frac{u_3^2 f^{(0,2,0)}}{2\epsilon} & \frac{u_3(u_2 f^{(0,2,0)}+u_1 f^{(1,1,0)})}{2\epsilon} \\ -\frac{1}{2}u_3^2 f^{(2,0,0)} & -\frac{1}{2}u_3^2 f^{(1,1,0)} & \frac{1}{2}u_3(u_2 f^{(1,1,0)} + u_1 f^{(2,0,0)}) \end{pmatrix},$$

con:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2}u_3(u_2 f^{(1,1,0)} + (u_1 + u_3 f) f^{(2,0,0)}), \\ a_{12} &= \frac{1}{2}u_3(u_2 f^{(0,2,0)} + (u_1 + u_3 f) f^{(1,1,0)}), \\ a_{13} &= \frac{1}{2}(-u_2^2 f^{(0,2,0)} - u_2(2u_1 + u_3 f) f^{(1,1,0)} - u_1(u_1 + u_3 f) f^{(2,0,0)}). \end{aligned}$$

Polo tanto será suficiente con estudiar as EDPs que aparecen no termo P_{11} e ver baixo que condicións se anulan, xa que se se anula P_{11} anúlase toda a matriz e polo tanto a variedade é un $\mathfrak{P}$-espazo.

Consideremos as 6 ecuacións que constitúen o termo P_{11} que temos que estudiar:

$$\begin{aligned}
p_1 &= -2\epsilon f^{(0,3,0)} f^{(2,0,0)} + 2\epsilon f^{(0,2,0)} f^{(2,1,0)},\\
p_2 &= -4\epsilon f^{(2,0,0)} f^{(2,1,0)} + 4\epsilon f^{(1,1,0)} f^{(3,0,0)},\\
p_3 &= -6\epsilon f^{(1,2,0)} f^{(2,0,0)} + 4\epsilon f^{(1,1,0)} f^{(2,1,0)} + 2\epsilon f^{(0,2,0)} f^{(3,0,0)},\\
p_4 &= 2 f^{(0,2,1)} f^{(1,1,0)} + f^{(0,2,0)} f^{(1,0,0)} f^{(1,1,0)} - 2\epsilon f f^{(1,1,1)} f^{(2,0,0)}\\
&+ \epsilon f f^{(0,1,0)} f^{(2,0,0)2} - 2 f^{(0,2,0)} f^{(1,1,1)} + f^{(0,1,0)} f^{(0,2,0)} f^{(2,0,0)}\\
&- 2 f^{(0,1,0)} f^{(1,1,0)2} + 2\epsilon f f^{(1,1,0)} f^{(2,0,1)} - \epsilon f f^{(1,0,0)} f^{(1,1,0)} f^{(2,0,0)},\\
p_5 &= 2 f^{(1,1,0)} f^{(1,2,0)} - 2\epsilon f^{(1,0,0)} f^{(1,1,0)} f^{(2,0,0)} - 4\epsilon f^{(1,1,1)} f^{(2,0,0)}\\
&+ 2\epsilon f f^{(1,1,0)} f^{(3,0,0)} - 2\epsilon f f^{(2,0,0)} f^{(2,1,0)} + 2\epsilon f^{(0,1,0)} f^{(2,0,0)2}\\
&+ 4\epsilon f^{(1,1,0)} f^{(2,0,1)} - 2 f^{(0,2,0)} f^{(2,1,0)},\\
p_6 &= 2\epsilon f^{(0,1,0)} f^{(1,1,0)} f^{(2,0,0)} - 2 f^{(0,2,0)} f^{(1,2,0)} - 2\epsilon f^{(0,2,1)} f^{(2,0,0)}\\
&- 2\epsilon f^{(0,2,0)} f^{(1,0,0)} f^{(2,0,0)} + 2\epsilon f^{(0,2,0)} f^{(2,0,1)} + 2\epsilon f f^{(1,1,0)} f^{(2,1,0)}\\
&+ 2 f^{(0,3,0)} f^{(1,1,0)} - 2\epsilon f f^{(1,2,0)} f^{(2,0,0)}.
\end{aligned}$$

Entón o sistema de ecuacións diferenciais que debemos resolver vén dado por

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0.$$

Como podemos observar trátase dun sistema moi complexo que non somos quen de resolver en xeral. Centrarémonos por tanto no estudo do caso particular en que a curvatura escalar é constante.

Métricas de Walker con curvatura escalar constante

Teorema 3.5.5 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker xeral de dimensión 3 con métrica en coordenadas locais (t, x, y) e con curvatura escalar constante, é dicir, $\tau = f^{(2,0,0)} = \kappa$. Entón verifícase o seguinte:*

1. **Curvatura escalar $\tau = 0$**

   $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{P}$-espazo se, e só se, $\mathcal{M}_f$ é unha variedade de Walker estricta.

2. **Curvatura escalar $\tau \neq 0$**

   $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{P}$-espazo se, e só se, é localmente simétrica, é dicir, se a función f é da forma:

$$\begin{aligned}
f(t,x,y) &= \psi(y) + \frac{x}{2\kappa}(\eta(y)\xi(y) + 2\xi'(y))\\
&+ \frac{x^2}{4\kappa}\xi(y)^2 + t(\eta(y) + x\xi(y)) + t^2\kappa.
\end{aligned}$$

Demostración.

1. *Curvatura escalar* $\tau = 0$

   En primeiro lugar asumiremos que a curvatura escalar é cero, $\tau = f^{(2,0,0)}(t,x,y) = 0$, e polo tanto tense que a función f é da forma:

   $$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\beta(x,y).$$

   Baixo esta hipótese vemos como se simplifican as 6 condicións que tiñamos de partida e vemos que se anulan tres, $p_2 = p_4 = p_5 = 0$. Consideremos as outras tres condicións que nos quedan:

   $$0 = 2\beta^{(1,0)}\beta^{(2,0)}, \tag{3.4}$$

   $$0 = -2\alpha^{(2,0)}\beta^{(2,0)} - 2t{\beta^{(2,0)}}^2 + 2\beta^{(1,0)}\alpha^{(3,0)} + 2t\beta^{(1,0)}\beta^{(3,0)}, \tag{3.5}$$

   $$\begin{aligned} 0 &= -2\alpha^{(1,0)}{\beta^{(1,0)}}^2 + 2\beta^{(1,0)}\alpha^{(2,1)} - 2t\beta^{(1,1)}\beta^{(2,0)} - 2t{\beta^{(1,0)}}^3 \\ &- 2\beta^{(1,1)}\alpha^{(2,0)} + 2t\beta^{(1,0)}\beta^{(2,1)} + t\beta\beta^{(1,0)}\beta^{(2,0)} + \beta\beta^{(1,0)}\alpha^{(2,0)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

   Consideremos a ecuación (3.4). Para que esta ecuación se cumpla supoñemos que $\beta^{(2,0)}(x,y) = 0$, pois esta condición é menos restritiva que supoñer $\beta^{(1,0)}(x,y) = 0$. Temos entón

   $$\beta(x,y) = \eta(y) + x\xi(y).$$

   Simplificamos de novo as condicións e xa só nos quedan dúas ecuacións diferenciais. Consideremos a ecuación (3.5) xa simplificada:

   $$2\xi(y)\alpha^{(3,0)}(x,y) = 0.$$

   Temos entón dúas opcións:

   a) $\xi(y) = 0$
   Neste caso xa teriamos que as 6 ecuacións diferenciais de partida se verifican e f queda:

   $$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\eta(y).$$

   b) $\alpha^{(3,0)}(x,y) = 0$
   Entón

   $$\alpha(x,y) = \psi(y) + x\chi(y) + x^2\varphi(y),$$

   e agora só nos queda unha ecuación diferencial (3.6):

   $$\begin{aligned} 0 &= 2\varphi(y)\eta(y)\xi(y) - 2\chi(y)\xi(y)^2 - 2x\varphi(y)\xi(y)^2 \\ &- 2t\xi(y)^3 + 4\xi(y)\varphi'(y) - 4\varphi(y)\xi'(y). \end{aligned}$$

Entón se derivamos con respecto de t deducese que

$$\xi(y) = 0,$$

e estamos na mesma situación que no apartado a).
Polo tanto para curvatura escalar 0 e f da forma

$$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\eta(y),$$

o espazo de partida é un $\mathfrak{P}$-espazo e viceversa, se é $\mathfrak{P}$-espazo f é desta forma.

En conclusión para $\tau = 0$, tendo en conta o Lema 1.5.6(2) e considerando $\eta(y) = \beta(y)$, $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{P}$-espazo se, e só se, $\mathcal{M}_f$ é estricta.

2. *Curvatura escalar* $\tau \neq 0$

Supoñamos agora que a curvatura escalar é $\tau = f^{(2,0,0)}(t,x,y) = \kappa \neq 0$, e polo tanto que a función é da forma:

$$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\beta(x,y) + t^2\kappa.$$

As 6 ecuacións diferenciais de partida quedan agora reducidas ás 5 ecuacións seguintes:

$$0 = -12\kappa\epsilon\beta^{(2,0)}, \tag{3.7}$$
$$0 = -4\kappa\epsilon\alpha^{(3,0)} - 4\kappa t\epsilon\beta^{(3,0)}, \tag{3.8}$$

$$0 = 8\kappa^2\epsilon\alpha^{(1,0)} - 4\kappa\epsilon\beta\beta^{(1,0)} - 2(4\kappa\epsilon\beta^{(1,1)} - \beta^{(1,0)}\beta^{(2,0)}), \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 4\kappa\epsilon\alpha^{(1,0)}\beta^{(1,0)} - 4\kappa\epsilon\beta(\alpha^{(2,0)} + 2t\beta^{(2,0)}) - 2(-2\kappa t\epsilon{\beta^{(1,0)}}^2 \\ &+ 2\kappa\epsilon(3\kappa t^2 + \alpha)\beta^{(2,0)} + t{\beta^{(2,0)}}^2 + \alpha^{(2,0)}(4\kappa^2 t\epsilon + \beta^{(2,0)}) \\ &+ 2\kappa\epsilon(\alpha^{(2,1)} + t\beta^{(2,1)} - \beta^{(1,0)}(\alpha^{(3,0)} + t\beta^{(3,0)})), \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2\kappa t\alpha^{(1,0)}\beta^{(2,0)} + 4\kappa t^2\beta^{(1,0)}\beta^{(2,0)} + 4\kappa^3 t^2\epsilon\alpha^{(1,0)} - 2\kappa^2 t^2\epsilon\beta\beta^{(1,0)} \\ &- 2\kappa t\epsilon\beta^2\beta^{(1,0)} - 4\kappa\epsilon\alpha\beta^{(1,1)} + 4\kappa t\beta^{(1,0)}\alpha^{(2,0)} - 2\beta^{(1,1)}\alpha^{(2,0)} \\ &- 4\kappa t\epsilon\beta\beta^{(1,1)} - 2t\beta^{(1,1)}\beta^{(2,0)} + 2\beta^{(1,0)}\alpha^{(2,1)} + 2t\beta^{(1,0)}\beta^{(2,1)} \\ &+ 2\kappa\alpha^{(1,0)}\alpha^{(2,0)} + 4\kappa^2\epsilon\alpha\alpha^{(1,0)} + 4\kappa^2 t\epsilon\beta\alpha^{(1,0)} + t\beta\beta^{(1,0)}\beta^{(2,0)} \\ &- 2\kappa\epsilon\alpha\beta\beta^{(1,0)} + \beta\beta^{(1,0)}\alpha^{(2,0)} - 2t{\beta^{(1,0)}}^3 - 4\kappa^2 t^2\epsilon\beta^{(1,1)} - 2\alpha^{(1,0)}{\beta^{(1,0)}}^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Consideremos (3.7): $-12\kappa\epsilon\beta^{(2,0)}(x,y) = 0$.
Posto que $\kappa \neq 0$, desta ecuación dedúcese que $\beta^{(2,0)}(x,y) = 0$ e polo tanto

$$\beta(x,y) = \eta(y) + x\xi(y).$$

De novo simplifícanse as ecuacións anteriores que agora se reducen a 4. Consideramos de novo a máis sinxela delas xa simplificada (3.8):

$$-4\kappa\epsilon\alpha^{(3,0)}(x,y) = 0.$$

Temos entón que $\alpha^{(3,0)}(x,y) = 0$ e polo tanto

$$\alpha(x,y) = \psi(y) + x\chi(y) + x^2\varphi(y).$$

Agora quédannos as 3 ecuacións diferenciais que resultan de simplificar (3.9), (3.10) e (3.11). Tomemos (3.9) simplificada:

$$2\kappa\epsilon(4\kappa\chi(y) + 8\kappa x\varphi(y) - 2\eta(y)\xi(y) - 2x\xi(y)^2 - 4\xi'(y)) = 0.$$

Derivamos esta ecuación con respecto de x e resulta que

$$2\kappa\epsilon(8\kappa\varphi(y) - 2\xi(y)^2) = 0,$$

de onde se deduce que

$$\varphi(y) = \frac{\xi(y)^2}{4\kappa},$$

pois estamos supoñendo que $\kappa \neq 0$. Vemos como quedan simplificadas as 3 condicións restantes e temos que

$$4\kappa\epsilon(2\kappa\chi(y) - \eta(y)\xi(y) - 2\xi'(y)) = 0,$$

é condición necesaria e suficiente para que se anulen todas as condicións que restan. Desta ecuación dedúcese que

$$\chi(y) = \frac{\eta(y)\xi(y) + 2\xi'(y)}{2\kappa}.$$

En conclusión, se a curvatura escalar é $\kappa \neq 0$, a función f é da forma:

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= \psi(y) + \frac{x}{2\kappa}(\eta(y)\xi(y) + 2\xi'(y)) \\ &+ \frac{x^2}{4\kappa}\xi(y)^2 + t(\eta(y) + x\xi(y)) + t^2\kappa. \end{aligned}$$

Observemos que a expresión de f coincide coa forma de f dun espazo localmente simétrico (Teorema 1.5.8).

□

Teorema 3.5.6 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3 e con curvatura escalar constante. Entón $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{P}$-espazo se, e só se, é curvatura recurrente.*

Demostración.
Consideremos unha variedade de Walker de dimensión 3 en coordenadas locais como en (1.3) e con curvatura escalar constante. Queremos ver que se $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{P}$-espazo entón tamén é Ricci recurrente e polo tanto tamén é curvatura recurrente.

Será polo tanto suficiente con ver que, supoñendo que $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{P}$-espazo, existe unha 1-forma $\sigma = \sigma_i dx^i$, $(\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3))$ verificando a seguinte condición:

$$\nabla_X \rho(Y,Z) - \sigma(X)\rho(Y,Z) = 0. \tag{3.12}$$

1. **Curvatura escalar** $\tau = 0$

   Supoñamos que $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{P}$-espazo, é dicir, a función f é:

   $$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\eta(y).$$

   Considerando f desta forma, tense que a condición (3.12) se verifica para $\alpha^{(2,0)}(x,y) \neq 0$ con $\sigma = \{0, \frac{\alpha^{(3,0)}(x,y)}{\alpha^{(2,0)}(x,y)}, \frac{\alpha^{(2,1)}(x,y)}{\alpha^{(2,0)}(x,y)}\}$ pois as ecuacións que se teñen que verificar son:

   $$\begin{aligned} 0 &= \frac{\sigma_1 \alpha^{(2,0)}(x,y)}{2\epsilon}, \\ 0 &= \frac{\sigma_2 \alpha^{(2,0)}(x,y) - \alpha^{(3,0)}(x,y)}{2\epsilon}, \\ 0 &= \frac{(\sigma_3 - \eta(y))\alpha^{(2,0)}(x,y) - \alpha^{(2,1)}(x,y)}{2\epsilon}. \end{aligned}$$

   Se $\alpha^{(2,0)}(x,y) = 0$ a variedade é localmente simétrica e temos que trivialmente é curvatura recurrente.

2. **Curvatura escalar** $\tau \neq 0$

   Supoñamos que $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{P}$-espazo, entón, polo Teorema 3.5.5, a variedade é localmente simétrica e verifícase trivialmente que $\mathcal{M}_f$ é curvatura recurrente.

□

Os resultados desta sección dan lugar ó seguinte teorema de clasificación:

Teorema 3.5.7 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker 3-dimensional con curvatura escalar constante. Entón $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{P}$-espazo se, e só se, $\mathcal{M}_f$ é localmente simétrica ou unha variedade de Walker estricta.*

Demostración.
Unha aplicación inmediata do Lema 1.5.6(2) e dos Teoremas 1.5.8 e 3.5.5 proba este teorema.

□

Capítulo 4

Xeometría do operador de curvatura antisimétrico

O obxectivo deste capítulo é tratar de estender as condicións Riemannianas de $\mathfrak{O}$-espazo e $\mathfrak{T}$-espazo a signatura Lorentziana. Así como no capítulo anterior definimos as condicións para xeodésicas temporais, e isto levounos a condicións naturais similares ás do caso Riemanniano, nesta ocasión non dispoñemos destas ferramentas, pois non podemos falar de círculos temporais, pois se consideramos un vector temporal tanxente ó círculo nun punto e o movemos ó longo da curva este non se mantén temporal. Recurriremos entón ás condicións alxébricas que caracterizan ós $\mathfrak{O}$-espazos e $\mathfrak{T}$-espazos en signatura Lorentziana, para estender estes conceptos directamente a partir destas condicións, sen ter en conta a interpretación xeométrica.

Empezamos a continuación cunha introdución ás nocións de $\mathfrak{O}$-espazo e $\mathfrak{T}$-espazo en signatura Riemanniana.

4.1. Introdución ós $\mathfrak{O}$- e $\mathfrak{T}$-espazos

Definición 4.1.1 [20] *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade Riemanniana. Unha curva diferenciable $c(t) : I_\epsilon \longrightarrow \mathcal{M}$, $I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, con campo de vectores tanxente c', parametrizada polo parámetro lonxitude de arco, dise que é un círculo de curvatura k_1 se a súa primeira curvatura $k_1 = ||\nabla_{c'} c'||$ é unha constante distinta de cero e todas as demais curvaturas son cero. Un círculo unitario é polo tanto un círculo con curvatura $k_1 = 1$.*

Para un círculo unitario, $\nabla_{c'} c' = \xi$ e $\nabla_{c'} \xi = -c'$, onde o campo de vectores unitarios ξ é o primeiro normal de $c(t)$. Tódolos outros normais ortogonais a c' e ξ son paralelos ó longo de $c(t)$. As ecuacións diferenciais para o círculo unitario son equivalentes a

$$\nabla_{c'} \nabla_{c'} c' + c' = 0.$$

Se a dimensión de $\mathcal{M}$ é maior ou igual a dous, entón para todo punto $p \in \mathcal{M}$ e para todo par de vectores ortonormais $u, v \in T_p\mathcal{M}$, existe localmente un único círculo unitario $c(t)$

parametrizado por arco e satisfacendo as condicións iniciais:

$$c(0) = p, \; c'(0) = u, \; (\nabla_{c'} c')(0) = v.$$

Definición 4.1.2 *Tal e como aparece recollido en [15] para todo círculo unidade c nunha variedade de Riemann $\mathcal{M}$ defínese o operador de curvatura antisimétrico asociado como*

$$R_c := R(c', \nabla_{c'} c'),$$

ó longo de c.

Do mesmo xeito que no capítulo anterior estudiabamos a curvatura ó longo de xeodésicas agora centrarémonos no estudo da curvatura ó longo de círculos unitarios. Segundo [16] temos a seguinte definición:

Definición 4.1.3 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Riemann.*

1. *$(\mathcal{M}, g)$ dise que é un $\mathfrak{O}$-espazo se para cada círculo c en $\mathcal{M}$ os autovalores de R_c son constantes, e*

2. *$(\mathcal{M}, g)$ dise que é un $\mathfrak{T}$-espazo se para cada círculo c en $\mathcal{M}$ o campo de tensores R_c pode ser diagonalizado por unha base que é base de Jordan paralela para R_c en cada punto ó longo de c.*

Vimos de ver no Capítulo 3 como os $\mathfrak{C}$-espazos e os $\mathfrak{P}$-espazos xeneralizan a condición de simetría local, e dun xeito similar temos que os $\mathfrak{O}$-espazos e os $\mathfrak{T}$-espazos tamén o fan.

Teorema 4.1.4 [15] *Unha variedade de Riemann é localmente simétrica se, e só se, é un $\mathfrak{O}$-espazo e un $\mathfrak{T}$-espazo ó mesmo tempo.*

Se consideramos $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Riemann atopamos os seguintes resultados que nos dan a caracterización dos $\mathfrak{O}$-espazos para dimensións superiores a 2.

Proposición 4.1.5 [16] *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Riemann n-dimensional $(n \geq 2)$. Entón $\mathcal{M}$ é un $\mathfrak{O}$-espazo se, e só se, o operador autoadxunto R_c^2 ten autovalores constantes ó longo de todo círculo unitario c en $\mathcal{M}$.*

Teorema 4.1.6 [16] *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Riemann diferenciable de dimensión n, $(n \geq 2)$. Entón as seguintes condicións son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{M}$ é un $\mathfrak{O}$-espazo;*

(ii) *Para cada punto $p \in \mathcal{M}$ e para calesqueira dous vectores tanxentes x, y en p verifícase:*

$$\sum_{i,j} R_{xye_ie_j} (\nabla_x R)_{xye_ie_j} = 0.$$

S.Ivanov e I.Petrova estudiaron en [15] os $\mathfrak{T}$-espazos para signatura Riemanniana.

Teorema 4.1.7 [15] *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Riemann n-dimensional ($n \geq 2$) conexa. Entón as seguintes condicións son equivalentes:*

(i) *$(\mathcal{M}, g)$ é un $\mathfrak{T}$-espazo,*

(ii) *$R'_c \circ R_c = R_c \circ R'_c$, para todo círculo unitario c en $\mathcal{M}$.*

Teorema 4.1.8 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Riemann n-dimensional ($n \geq 2$) conexa. Entón $(\mathcal{M}, g)$ é un $\mathfrak{T}$-espazo se, e só se, verifica a seguinte igualdade:*

$$(\nabla_X R)(X, Y) \circ R(X, Y) = R(X, Y) \circ (\nabla_X R)(X, Y), \tag{4.1}$$

$\forall X, Y$ campos de vectores en calquera punto de $\mathcal{M}$.

4.2. Clasificación Riemanniana

4.2.1. Clasificación dos $\mathfrak{O}$-espazos en dimensión dous e tres

Os $\mathfrak{O}$-espazos só están clasificados para dimensión 2 e 3. Vexamos algúns resultados relativos á clasificación dos $\mathfrak{O}$-espazos nestas dimensións.

Consideremos en primeiro lugar que estamos no caso 2-dimensional. Neste suposto os autovalores de R_c son $\sqrt{-1}\tau$ e $-\sqrt{-1}\tau$, onde τ denota a curvatura escalar. Polo tanto temos:

Proposición 4.2.1 [16] *Unha variedade de Riemann 2-dimensional conexa é un $\mathfrak{O}$-espazo se, e só se, ten curvatura seccional constante.*

Tendo en conta todos os resultados anteriores, S. Ivanov e I. Petrova [16] deron a seguinte clasificación para os $\mathfrak{O}$-espazos en signatura Riemanniana de dimensión 3.

Teorema 4.2.2 [16] *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ un $\mathfrak{O}$-espazo de dimensión 3. Entón $(\mathcal{M}, g)$ é localmente isométrico en casi todo punto, é dicir, nun subconxunto aberto e denso de $\mathcal{M}$, a un dos seguintes espazos:*

(i) *un espazo con curvatura seccional constante,*

(ii) *un producto directo da forma $(\mathcal{M} \times \mathbb{R}, g \oplus dt^2)$, onde $(\mathcal{M}, g)$ é un espazo Riemanniano 2-dimensional e con curvatura seccional constante,*

(iii) *unha variedade de Riemann con curvaturas principais de Ricci constantes $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 \neq 0$.*

Recíprocamente, calquera variedade de Riemann 3-dimensional do tipo (i), (ii) ou (iii) é un $\mathfrak{O}$-espazo.

Observación 4.2.3 De acordo con Singer [22] unha variedade de Riemann $(\mathcal{M}, g)$ dise *curvatura homoxénea* se para cada par de puntos $p, q \in \mathcal{M}$ hai unha isometría linear $F : T_p\mathcal{M} \longrightarrow T_q\mathcal{M}$ entre os correspondentes espazos tanxentes tal que $F^*R_q = R_p$. É sabido que un espazo de Riemann 3-dimensional é curvatura homoxéneo se, e só se, ten autovalores principais de Ricci constantes.

4.2.2. Clasificación dos $\mathfrak{T}$-espazos en dimensión dous e tres

Do mesmo xeito que fixemos cos $\mathfrak{O}$-espazos, tratamos a continuación o problema de clasificación dos $\mathfrak{T}$-espazos para signatura Riemanniana en dimensión dous e tres.

Teorema 4.2.4 [15] *Toda variedade de Riemann diferenciable 2-dimensional* $(\mathcal{M}, g)$ *é un* $\mathfrak{T}$*-espazo.*

Teorema 4.2.5 [15] *Sexa* $(\mathcal{M}, g)$ *un* $\mathfrak{T}$*-espazo de dimensión 3. Entón* $(\mathcal{M}, g)$ *é localmente isométrico a un dos seguintes espazos:*

(i) *un espazo con curvatura seccional constante,*

(ii) *un producto directo da forma* $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$*, onde* $\mathcal{M}_1$ *é unha variedade de Riemann 1-dimensional e* $\mathcal{M}_2$ *é unha variedade de Riemann 2-dimensional.*

Recíprocamente, calquera variedade de Riemann 3-dimensional do tipo (i) e (ii) é un $\mathfrak{T}$*-espazo.*

4.3. Extensión a signatura Lorentziana

Como xa dixemos, ó contrario do que acontecía no capítulo anterior, non ten sentido falar de círculos temporais e por ese motivo imos dar unha definición de $\mathfrak{O}$-espazo e $\mathfrak{T}$-espazo a partir das condicións alxébricas, pero sen manter a interpretación xeométrica de cada situación.

Se pensamos agora na situación Lorentziana, non se verifica que $\mathfrak{O} \cap \mathfrak{T}$ coincida coa clase de variedades de Lorentz localmente simétricas. De feito as métricas de Walker estrictas son un exemplo de $\mathfrak{O}$-espazos (o operador de Ricci é nilpotente en dous pasos, polo tanto son IP, véxaxe o Teorema 1.8.4) e $\mathfrak{T}$-espazos (o operador de Ricci é recurrente), que non son localmente simétricas.

Vexamos entón a continuación como se xeneralizan para signatura Lorentziana as condicións alxébricas de ser $\mathfrak{O}$-espazo e $\mathfrak{T}$-espazo que tiñamos para signatura Riemanniana.

Definición 4.3.1 *Sexa* $(\mathcal{M}, g)$ *unha variedade de Lorentz de dimensión* n*,* $(n \geq 2)$*. Entón diremos que:*

(i) *$(\mathcal{M}, g)$ é un $\mathfrak{O}$-espazo se cada calesqueira dous campos de vectores X, Y en p e $\{e_i\}$ base ortonormal se verifica:*

$$\sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j R_{XYe_ie_j} (\nabla_X R)_{XYe_ie_j} = 0.$$

(ii) *$(\mathcal{M}, g)$ é un $\mathfrak{T}$-espazo se para calesqueira X, Y campos de vectores se verifica a seguinte igualdade:*

$$(\nabla_X R)(X, Y) \circ R(X, Y) = R(X, Y) \circ (\nabla_X R)(X, Y). \tag{4.2}$$

Observación 4.3.2 Aínda que non temos a interpretación xeométrica que tiñamos na sección Riemanniana verifícase que toda variedade IP é $\mathfrak{O}$-espazo, pois por ser IP ten autovalores constantes e isto implica que $\nabla_x TrR^{(k)} = 0$ e polo tanto verifícase a condición dada en (i) na Definición 4.3.1.

Exemplo 2 *Sexa $\mathcal{O}$ un aberto de $\mathbb{R}^4$ dotado da métrica g de signatura $(++--)$ que en coordenadas locais (t, x, y, z) se escribe como segue:*

$$g_2(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & tS(y) + A(y, z) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & xV(z) + B(y, z) \end{pmatrix}.$$

Esta familia de variedades son IP e polo tanto $\mathfrak{O}$-espazos, verifican a condición alxébrica de ser $\mathfrak{T}$-espazos e, sen embargo, non son localmente simétricas.

Demostración.
Para esta demostración consideramos u e v dous vectores arbitrarios expresados na base de campos coordenados como $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ e $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, e con respecto os cales facemos os cálculos.

O tensor de curvatura vén dado por:

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r_{14} \\ 0 & 0 & -r_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$r_{14} = \frac{1}{4}(u_4 v_3 - u_3 v_4)(V(z)A^{(0,1)} + 2A^{(0,2)} + S(y)B^{(1,0)} + 2B^{(2,0)}),$$

entón ten autovalores constantes: $\{0, 0, 0, 0\}$, é dicir, é unha variedade IP e polo tanto tamén é un $\mathfrak{O}$-espazo.

Ademais a derivada covariante do tensor de curvatura vén dada por:

$$\nabla_u R(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -s_{23} \\ 0 & 0 & s_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde:

$$\begin{aligned} s_{23} &= \frac{1}{4}(u_4v_3 - u_3v_4)(u_4V(z)^2A^{(0,1)} + u_4V'(z)A^{(0,1)} + 2u_4A^{(0,3)} + u_3S(y)^2B^{(1,0)} \\ &+ u_3S'(y)B^{(1,0)} + 2u_3A^{(1,2)}S(y)(2u_3A^{(0,2)} + V(z)(u_3A^{(0,1)} + u_4B^{(1,0)}) + u_4B^{(1,1)} \\ &+ 3u_3B^{(2,0)}) + V(z)(3u_4A^{(0,2)} + u_3A^{(1,1)} + 2u_4B^{(2,0)}) + 2u_4B^{(2,1)} + 2u_3B^{(3,0)}). \end{aligned}$$

Polo tanto verifícase a condición alxébrica de ser $\mathfrak{T}$-espazo, pois o tensor de curvatura e a súa derivada covariante conmutan.

E, por último, en xeral $\nabla R \neq 0$, e temos que a variedade non é localmente simétrica. Así, por exemplo, se tomamos $S(y) = y$, $A(y,z) = z$, $V(z) = z^2$ e $B(y,z) = y$ tense que

$$\nabla_{\partial_y} R(\partial_y, \partial_z, \partial_z, \partial_y) = \frac{1}{4}(1 + y(y + z^2)),$$

polo que $\nabla R \neq 0$.

$\square$

4.4. $\mathfrak{O}$-espazos

Consideremos $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Lorentz. Entón empregaremos a seguinte condición alxébrica:

$$\mathcal{M} \text{ é un } \mathfrak{O}\text{-espazo} \Leftrightarrow \sum_{i,j} \varepsilon_i\varepsilon_j R_{xye_ie_j}(\nabla_x R)_{xye_ie_j} = 0, \ \forall x, y. \tag{4.3}$$

Observación 4.4.1 Pódese probar que as variedades que aparecen na Sección 4.2.1, de clasificación dos $\mathfrak{O}$-espazos para signatura Riemanniana, tamén verifican a condición alxébrica de ser $\mathfrak{O}$-espazos en signatura Lorentziana.

4.4.1. Variedades IP

Un caso particular de $\mathfrak{O}$-espazos de especial interese é o das métricas IP. Estas foron analizadas en profundidade en diversos contextos e existen numerosas referencias que as estudian [17], [13].

Teorema 4.4.2 *Sexa $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Riemann IP. Entón $(\mathcal{M}, g)$ é un $\mathfrak{O}$-espazo.*

Demostración.
Como vimos no Capítulo 1 as variedades IP caracterízanse porque os autovalores do operador R_π son constantes. Polo tanto, en particular, verifícase que estes autovalores son constantes ó longo do círculo c, é dicir, verifícase a condición de ser $\mathfrak{O}$-espazos.

$\square$

Teorema 4.4.3 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha métrica de Walker de dimensión 3 e IP. Entón tamén é un $\mathfrak{O}$-espazo.*

A demostración farémola na Sección 4.4.2.

Recordemos que para métricas de Walker temos o seguinte resultado:

Teorema 4.4.4 [4], [9] *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3. Entón as seguintes afirmacións son equivalentes:*

1. *$\mathcal{M}_f$ é Ivanov-Petrova*
2. *$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\eta(y)$, para calesquera funcións $\alpha(x,y)$ e $\eta(y)$.*

Observación 4.4.5 Consideremos $\mathcal{M}$ unha variedade de Walker de dimensión 4 en signatura $(2,2)$. Entón, condición suficiente para que $\mathcal{M}$ sexa IP é que sexa, en coordenadas locais, desta forma:

$$g(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & tS(y)+A(y,z) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & xV(z)+B(y,z) \end{pmatrix}.$$

Próbase dun xeito sinxelo que unha variedade dada nesta forma é IP.
Consideremos o tensor de curvatura asociado que vén dado por:

$$R(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -t_{23} \\ 0 & 0 & t_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con u e v vectores escollidos de forma arbitraria expresados na base de campos coordenados como $u = (u_1,u_2,u_3,u_4)$ e $v = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, e con

$$t_{23} = \frac{1}{4}(u_4v_3 - u_3v_4)(V(z)A^{(0,1)} + 2A^{(0,2)} + S(y)B^{(1,0)} + 2B^{(2,0)}).$$

Entón $R(u,v)$ ten autovalores constantes: $\{0,0,0,0\}$, e a variedade é IP.

Ademais das variedades IP como exemplo de $\mathfrak{O}$-espazos nesta sección pretendemos atopar $\mathfrak{O}$-espazos que non sexan IP facendo un estudio das métricas de Walker.

4.4.2. Métricas de Walker

Centramos agora a nosa atención no estudo dos $\mathfrak{O}$-espazos considerando agora $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3 en coordenadas locais (1.3):

$$g_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & f(t,x,y) \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.4.6 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3. Entón a variedade é un $\mathfrak{O}$-espazo se a función f ten unha das expresións seguintes:*

a)

$$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\eta(y),$$

b)

$$f(t,x,y) = \alpha(y) + t\eta(y) + t^2\delta, \ \textit{ou}$$

c)

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= \psi(y) + x\chi(y) + x^2\varphi(y) \\ &+ t\left(\frac{\chi(y)\sqrt{\delta\varphi(y)} - \varphi'(y)}{\varphi(y)} + x\sqrt{4\delta\varphi(y)}\right) + t^2\delta, \end{aligned}$$

con $\varphi(y) \neq 0$.

Demostración.
Consideramos unha métrica de Walker xeral en coordenadas locais tal e como aparece recollida no enunciado do teorema e realizamos os cálculos da caracterización (4.3) que estamos empregando. Obtemos o seguinte sistema de EDPs:

$$0 = \frac{1}{2} f^{(2,0,0)} f^{(3,0,0)}, \tag{4.4}$$

$$0 = \frac{1}{2} f^{(1,1,0)} f^{(1,2,0)}, \tag{4.5}$$

$$0 = \frac{1}{2} f^{(2,0,0)} f^{(2,0,1)}, \tag{4.6}$$

$$0 = \frac{1}{2} f^{(1,1,0)} f^{(2,1,0)}, \tag{4.7}$$

$$0 = \frac{1}{2} f^{(2,0,0)} f^{(2,1,0)}, \tag{4.8}$$

$$
\begin{array}{lrcl}
(4.9) & 0 & = & \frac{1}{2}f^{(1,2,0)}f^{(2,0,0)}+\frac{1}{2}f^{(1,1,0)}f^{(2,1,0)}, \\
(4.10) & 0 & = & \frac{1}{2}f^{(2,0,0)}f^{(2,1,0)}+\frac{1}{2}f^{(1,1,0)}f^{(3,0,0)}, \\
 & 0 & = & \frac{1}{4}f^{(1,0,0)}f^{(1,1,0)}f^{(2,0,0)}+\frac{1}{2}f^{(1,1,1)}f^{(2,0,0)} \\
(4.11) & & - & \frac{1}{4}f^{(0,1,0)}f^{(2,0,0)2}+\frac{1}{2}f^{(1,1,0)}f^{(2,0,1)}, \\
(4.12) & 0 & = & \frac{1}{4}f^{(1,0,0)}f^{(1,1,0)2}+\frac{1}{2}f^{(1,1,0)}f^{(1,1,1)}-\frac{1}{4}f^{(0,1,0)}f^{(1,1,0)}f^{(2,0,0)}.
\end{array}
$$

Consideramos a primeira destas ecuacións (4.4). Dado que $f^{(2,0,0)}(t,x,y)=0$ é máis restritivo que $f^{(3,0,0)}(t,x,y)=0$, concluímos que $f^{(3,0,0)}=0$ e polo tanto:

$$f(t,x,y)=\alpha(x,y)+t\beta(x,y)+t^2\delta(x,y).$$

Tendo en conta isto simplificamos de novo as 9 ecuacións que tiñamos de partida e estas quedan reducidas a 8. Consideremos (4.6) e (4.8):

$$
\begin{aligned}
2\delta(x,y)\delta^{(0,1)}(x,y) &= 0, \text{ e} \\
2\delta(x,y)\delta^{(1,0)}(x,y) &= 0.
\end{aligned}
$$

De onde deducimos que

$$\delta(x,y)=\delta=cte.$$

Unha vez considerada esta restricción vemos que as condicións quedan agora reducidas a 4, que se corresponden con (4.5), (4.9), (4.11) e (4.12) simplificadas. En concreto, (4.9) redúcese a

$$\delta\beta^{(2,0)}(x,y)=0.$$

Temos entón dúas opcións:

1. $\underline{\delta=0}$.

   Neste caso quédannos agora só dúas ecuacións diferenciais por resolver: (4.5) e (4.12) simplificadas. A primeira delas é

   $$\frac{1}{2}\beta^{(1,0)}(x,y)\beta^{(2,0)}(x,y)=0,$$

   e de aquí deducimos que $\beta^{(2,0)}(x,y)=0$ pois esta condición é menos restritiva que $\beta^{(1,0)}(x,y)=0$, polo tanto temos que

   $$\beta(x,y)=\eta(y)+x\xi(y).$$

   (4.12) simplifícase para obter:

   $$\frac{1}{4}\eta(y)\xi(y)^2+\frac{1}{4}x\xi(y)^3+\frac{1}{2}\xi(y)\xi'(y)=0.$$

Que esta expresión sexa cero quere dicir que en particular a súa derivada con respecto de x tamén debe ser cero, é dicir,

$$\frac{\xi(y)^3}{4} = 0 \Rightarrow \xi(y) = 0.$$

Deste xeito xa teriamos que se verifica a última condición e que para f da forma:

$$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\eta(y),$$

o espazo de partida é un $\mathfrak{O}$-espazo.

2. $\underline{\beta^{(2,0)}(x,y) = 0}$.

   Neste suposto teriamos que a función f_1 sería da forma

   $$\beta(x,y) = \eta(y) + x\xi(y),$$

   e que as condicións quedarían agora reducidas a (4.11) e (4.12) simplificadas. Consideremos a ecuación (4.12) simplificada

   $$\frac{1}{4}\eta(y)\xi(y)^2 + \frac{1}{4}x\xi(y)^3 + \frac{1}{2}\xi(y)\xi'(y) - \frac{1}{2}\delta\xi(y)\alpha^{(1,0)}(x,y) = 0.$$

   Se derivamos con respecto de x dúas veces obtemos que

   $$-\frac{1}{2}\delta\xi(y)\alpha^{(3,0)}(x,y) = 0,$$

   e polo tanto temos tres posibilidades:

   a) $\delta = 0$.
   Esta opción xa foi estudiada no apartado anterior.

   b) $\xi(y) = 0$.
   Quedaríanos só a ecuación (4.11):

   $$-\delta^2\alpha^{(1,0)}(x,y) = 0,$$

   que nos dá de novo dúas posibles solucións: a primeira é $\delta = 0$ que xa temos analizada e a segunda é $\alpha^{(1,0)}(x,y) = 0$ que implica que

   $$\alpha(x,y) = \alpha(y),$$

   e dá unha solución do sistema de 9 ecuacións de partida. Polo tanto temos que para f da forma:

   $$f(t,x,y) = \alpha(y) + t\eta(y) + t^2\delta,$$

   o espazo de partida é un $\mathfrak{O}$-espazo.

c) $\alpha^{(3,0)}(x,y) = 0$.
Isto implica que

$$\alpha(x,y) = \psi(y) + x\chi(y) + x^2\varphi(y),$$

e quedaríannos de novo dúas ecuacións por resolver: (4.11) e (4.12). Dado que ámbalas dúas expresións deben ser cero, en particular tamén se anularán as súas derivadas con respecto de x, entón, considerando a derivada da ecuación (4.12) con respecto de x temos que:

$$\frac{1}{4}\xi(y)(-4\delta\varphi(y) + \xi(y)^2) = 0.$$

Polo tanto, ou ben $\xi(y) = 0$ ou ben $\xi(y) = \sqrt{4\delta\varphi(y)}$. Quedámonos con este último caso pois o anterior xa está analizado en pasos anteriores. Unha vez suposta ξ desta forma quédannos dúas ecuacións por resolver que se corresponden con (4.11)=(4.12)$\frac{\sqrt{\delta\varphi(y)}}{\varphi(y)}$. Polo tanto despexando de (4.12):

$$-\delta\chi(y)\sqrt{\delta\varphi(y)} + \delta\varphi(y)\eta(y) + \delta\varphi'(y) = 0,$$

$$\eta(y) = \frac{\chi(y)\sqrt{\delta\varphi(y)} - \varphi'(y)}{\varphi(y)}.$$

Temos así outra solución do sistema de partida. Para f da forma

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= \psi(y) + x\chi(y) + x^2\varphi(y) \\ &+ t\left(\frac{\chi(y)\sqrt{\delta\varphi(y)} - \varphi'(y)}{\varphi(y)} + x\sqrt{4\delta\varphi(y)}\right) + t^2\delta \end{aligned}$$

o espazo de partida é un $\mathfrak{D}$-espazo.

□

Vexamos agora a demostración do Teorema 4.4.3.
Demostración.
Consideremos $\mathcal{M}_f$ unha métrica de Walker de dimensión 3 e IP. Polo Teorema 4.4.4 temos que a función f é da forma $f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\eta(y)$, para calesquera funcións $\alpha(x,y)$ e $\eta(y)$, e esta forma correspóndese coa do apartado **a)** do Teorema 4.4.6, é dicir, $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{D}$-espazo.

□

Observación 4.4.7 Nótese que das tres posibles opcións do teorema anterior só os dous últimos nos dan información nova, pois o primeiro deles correspóndese coa forma que presenta f no caso de ser $\mathcal{M}_f$ Walker e IP (Teorema 4.4.4). Ademais este apartado *a*) correspóndese coas variedades de Walker estrictas como vimos no Lema 1.5.6(2).

4.5. $\mathfrak{T}$-espazos

Consideramos $(\mathcal{M}, g)$ unha variedade de Lorentz. Entón empregaremos a seguinte condición alxébrica:

$$\mathcal{M} \text{ é un } \mathfrak{T}\text{-espazo} \Leftrightarrow (\nabla_x R)(x,y)R(x,y) = R(x,y)(\nabla_x R)(x,y), \; \forall x, y. \tag{4.13}$$

Observación 4.5.1 Pódese probar que os análogos Lorentzianos ás variedades obtidas na clasificación dos $\mathfrak{T}$-espazos Riemannianos da Sección 4.2.2 tamén verifican a condición alxébrica de ser $\mathfrak{T}$-espazos.

4.5.1. Variedades recurrentes

Como xa vimos nos Capítulos 1 e 3 as variedades recurrentes son un exemplo de $\mathfrak{P}$-espazos. Ademais imos ver a continuación que tamén son un exemplo de $\mathfrak{T}$-espazos.

Teorema 4.5.2 *Toda variedade $(\mathcal{M}, g)$ curvatura recurrente é un $\mathfrak{T}$-espazo.*

Demostración.
A demostración é análoga á dada no Teorema 3.5.4 intercambiando os papeis do operador de Jacobi e o operador de curvatura antisimétrico.

□

4.5.2. Métricas de Walker

Ímonos centrar agora no estudo e clasificación dos $\mathfrak{T}$-espazos pero considerando agora $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker 3-dimensional.

Métricas de Walker xerais

Consideremos $\mathcal{M}_f$ unha métrica de Walker xeral en coordenadas locais da forma (1.3):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & f(t,x,y) \end{pmatrix}.$$

O operador de curvatura antisimétrico calculado con respecto a u e v vectores expresados na base de campos coordenados como $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ vén dado por:

$$R(u,v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & f a_{11} \\ 0 & 0 & \frac{-a_{12}}{2\epsilon} \\ 0 & 0 & -a_{11} \end{pmatrix},$$

onde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2}((u_3v_2 - u_2v_3)f^{(1,1,0)} + (u_3v_1 - u_1v_3)f^{(2,0,0)}), \\ a_{12} &= \frac{1}{2}((u_3v_2 - u_2v_3)f^{(0,2,0)} + (u_3v_1 - u_1v_3)f^{(1,1,0)}). \end{aligned}$$

Polo tanto, se calculamos a matriz de orde 3×3 que resulta de realizar os cálculos da ecuación (4.2) obtemos unha matriz de orde 3×3 que denotamos por T. Nela aparecen dous termos distintos de 0 que son iguais salvo unha constante

$$T_{23} = -\frac{1}{\epsilon}T_{12},$$

polo que a matriz T é da forma:

$$T = (\nabla_u R) \circ (u,v)R(u,v) - R(u,v) \circ (\nabla_u R)(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\epsilon}T_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Será entón suficiente estudiar as EDPs do termo T_{12}, pois si se anula este anúlase toda a matriz e xa teriamos probado que se verifica a condición (4.2).

Consideramos o termo T_{12} e analizámolo. Obtemos as 9 expresións seguintes:

$$\begin{aligned} t_1 &= -f^{(1,1,0)}f^{(1,2,0)} + f^{(0,2,0)}f^{(2,1,0)}, \\ t_2 &= -f^{(1,2,0)}f^{(2,0,0)} + f^{(1,1,0)}f^{(2,1,0)}, \\ t_3 &= -f^{(2,0,0)}f^{(2,1,0)} + f^{(1,1,0)}f^{(3,0,0)}, \\ t_4 &= -f^{(0,3,0)}f^{(2,0,0)} + f^{(0,2,0)}f^{(2,1,0)}, \\ t_5 &= f^{(1,1,0)}f^{(2,1,0)} - f^{(0,2,0)}f^{(3,0,0)}, \\ t_6 &= f^{(0,3,0)}f^{(1,1,0)} - f^{(0,2,0)}f^{(1,2,0)}, \\ t_7 &= -\frac{1}{4}f^{(0,2,1)}f^{(1,1,0)} - \frac{1}{8}f^{(0,2,0)}f^{(1,0,0)}f^{(1,1,0)} + \frac{1}{4}f^{(0,1,0)}f^{(1,1,0)^2} \\ &+ \frac{1}{4}f^{(0,2,0)}f^{(1,1,1)} - \frac{1}{8}f^{(0,1,0)}f^{(0,2,0)}f^{(2,0,0)}, \\ t_8 &= -\frac{1}{4}f^{(0,2,1)}f^{(2,0,0)} - \frac{1}{4}f^{(0,2,0)}f^{(1,0,0)}f^{(2,0,0)} \\ &+ \frac{1}{4}f^{(0,1,0)}f^{(1,1,0)}f^{(2,0,0)} + \frac{1}{4}f^{(0,2,0)}f^{(2,0,1)}, \\ t_9 &= -\frac{1}{8}f^{(1,0,0)}f^{(1,1,0)}f^{(2,0,0)} - \frac{1}{4}f^{(1,1,1)}f^{(2,0,0)} \\ &+ \frac{1}{8}f^{(0,1,0)}f^{(2,0,0)^2} + \frac{1}{4}f^{(1,1,0)}f^{(2,0,1)}. \end{aligned}$$

Entón o sistema que debemos solucionar, para determinar as variedades que verifican (4.2), é o seguinte:

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = t_8 = t_9 = 0.$$

Como sucedía coa análise dos $\mathfrak{P}$-espazos, obtivemos un sistema complexo. Particularizaremos o noso estudo a variedades de Walker de curvatura escalar constante.

Métricas de Walker de curvatura escalar constante

Teorema 4.5.3 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker xeral de dimensión 3 con métrica en coordenadas locais (t, x, y) e con curvatura escalar constante, é dicir, $\tau = f^{(2,0,0)} = \kappa$. Entón verifícase o seguinte:*

1. **Curvatura escalar $\tau = 0$**

   $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{T}$-espazo se, e só se, $\mathcal{M}_f$ é unha variedade de Walker estricta.

2. **Curvatura escalar $\tau = \kappa \neq 0$**

   $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{T}$-espazo se, e só se, é localmente simétrica, é dicir, se a función f é da forma:

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= \psi(y) + \frac{x}{2\kappa}(\eta(y)\xi(y) + 2\xi'(y)) \\ &+ \frac{x^2}{4\kappa}\xi(y)^2 + t(\eta(y) + x\xi(y)) + t^2\kappa. \end{aligned}$$

Demostración.

1. *Curvatura escalar* $\tau = 0$.

   En primeiro lugar asumimos que a curvatura escalar é cero, $\tau = f^{(2,0,0)}(t,x,y) = 0$ e polo tanto a función f é da forma:

$$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\beta(x,y).$$

   Baixo esta hipótese vemos como se simplifican as 9 condicións que tiñamos de partida. Consideremos as tres ecuacións simplificadas que resultan:

$$\begin{aligned} &(4.14) \qquad & 0 &= -\beta^{(1,0)}\beta^{(2,0)}, \\ &(4.15) \qquad & 0 &= \alpha^{(2,0)}\beta^{(2,0)} + t{\beta^{(2,0)}}^2 - \beta^{(1,0)}\alpha^{(3,0)} - t\beta^{(1,0)}\beta^{(3,0)}, \\ & & 0 &= \beta^{(1,1)}\alpha^{(2,0)} - \beta^{(1,0)}\alpha^{(2,1)} + t\beta^{(1,1)}\beta^{(2,0)} + \alpha^{(1,0)}{\beta^{(1,0)}}^2 \\ &(4.16) \qquad & &+ t{\beta^{(1,0)}}^3 - \frac{1}{2}\beta\beta^{(1,0)}\alpha^{(2,0)} - \frac{1}{2}t\beta\beta^{(1,0)}\beta^{(2,0)} - t\beta^{(1,0)}\beta^{(2,1)}. \end{aligned}$$

   Tomemos a ecuación (4.14). Dado que a condición $\beta^{(2,0)}(x,y) = 0$ é máis restrictiva que $\beta^{(1,0)}(x,y) = 0$ concluímos que $\beta^{(2,0)}(x,y) = 0$, polo que temos que β é da forma:

$$\beta(x,y) = \eta(y) + x\xi(y).$$

Simplificamos de novo as condicións de partida tendo en conta esta expresión de β e consideramos a ecuación (4.15), que se simplifica a

$$-\xi(y)\alpha^{(3,0)}(x,y) = 0.$$

Temos entón dúas opcións distintas:

a) Se $\xi(y) = 0$ compróbase facilmente que todos os termos se anulan e, polo tanto, se

$$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\eta(y),$$

$\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{T}$-espazo.

b) Se $\alpha^{(3,0)}(x,y) = 0$, temos que α é da forma:

$$\alpha(x,y) = \psi(y) + x\chi(y) + x^2\varphi(y),$$

e só nos restaría a condición (4.16) que se reduce a:

$$\begin{aligned} 0 &= -\varphi(y)\eta(y)\xi(y) + \chi(y)\xi(y)^2 + x\varphi(y)\xi(y)^2 \\ &+ t\xi(y)^3 - 2\xi(y)\varphi'(y) + 2\varphi(y)\xi'(y). \end{aligned}$$

Derivamos con respecto de t e deducimos que debe ser $\xi(y)^3 = 0$ e, polo tanto, $\xi(y) = 0$, polo que para f da forma

$$f(t,x,y) = \psi(y) + x\chi(y) + x^2\varphi(y) + t\eta(y),$$

$\mathcal{M}_f$ é $\mathfrak{T}$-espazo. Dado que este é un caso particular do anterior podemos concluír que para curvatura escalar 0 e f da forma

$$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\eta(y),$$

o espazo de partida $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{T}$-espazo e viceversa.

En conclusión para $\tau = 0$, tendo en conta o Lema 1.5.6(2) e considerando $\eta(y) = \beta(y)$, $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{T}$-espazo se, e só se, $\mathcal{M}_f$ é estricta.

2. *Curvatura escalar* $\tau = \kappa \neq 0$

Asumimos agora que a curvatura escalar é $\tau = f^{(2,0,0)}(t,x,y) = \kappa$, con $\kappa \neq 0$ e polo tanto que a función f é da forma:

$$f(t,x,y) = \alpha(x,y) + t\beta(x,y) + t^2\kappa.$$

As 9 ecuacións diferenciais de partida quedan agora reducidas a 7:

$$
\begin{array}{lrcl}
(4.17) & 0 & = & -\kappa\beta^{(2,0)}, \\
(4.18) & 0 & = & -\beta^{(1,0)}\beta^{(2,0)}, \\
(4.19) & 0 & = & -\kappa\alpha^{(3,0)} - t\kappa\beta^{(3,0)}, \\
(4.20) & 0 & = & 2\kappa^2\alpha^{(1,0)} - \kappa\beta\beta^{(1,0)} - 2\kappa\beta^{(1,1)}, \\
(4.21) & 0 & = & \alpha^{(2,0)}\beta^{(2,0)} + t{\beta^{(2,0)}}^2 - \beta^{(1,0)}\alpha^{(3,0)} - t\beta^{(1,0)}\beta^{(3,0)}, \\
 & 0 & = & -t\kappa\beta^{(2,1)} - 2t\kappa^2\alpha^{(2,0)} - 2t^2\kappa^2\beta^{(2,0)} - \kappa\beta\alpha^{(2,0)} \\
(4.22) & & - & \kappa\alpha^{(2,1)} + t\kappa{\beta^{(1,0)}}^2 + \kappa\alpha^{(1,0)}\beta^{(1,0)} - t\kappa\beta\beta^{(2,0)}, \\
 & 0 & = & -t\beta\beta^{(1,0)}\beta^{(2,0)} - \beta\beta^{(1,0)}\alpha^{(2,0)} + 2t\beta^{(1,1)}\beta^{(2,0)} - 4t^2\kappa\beta^{(1,0)}\beta^{(2,0)} \\
 & & - & 2t\beta^{(1,0)}\beta^{(2,1)} + 2\beta^{(1,1)}\alpha^{(2,0)} - 2\beta^{(1,0)}\alpha^{(2,1)} + 2\alpha^{(1,0)}{\beta^{(1,0)}}^2 \\
(4.23) & & + & 2t{\beta^{(1,0)}}^3 - 4t\kappa\beta^{(1,0)}\alpha^{(2,0)} - 2t\kappa\alpha^{(1,0)}\beta^{(2,0)} - 2\kappa\alpha^{(1,0)}\alpha^{(2,0)}.
\end{array}
$$

Tomemos a ecuación (4.17):

$$-\kappa\beta^{(2,0)}(x,y) = 0.$$

Dado que estamos supoñendo que $\kappa \neq 0$, para que esta ecuación se cumpra débese verificar que $\beta^{(2,0)}(x,y) = 0$, e polo tanto β é da forma:

$$\beta(x,y) = \eta(y) + x\xi(y).$$

As ecuacións simplifícanse de novo e consideramos agora a ecuación (4.19) xa simplificada:

$$-\kappa\alpha^{(3,0)}(x,y) = 0.$$

Entón $\alpha^{(3,0)}(x,y) = 0$, pois estamos supoñendo $\kappa \neq 0$, e temos que

$$\alpha(x,y) = \psi(y) + x\chi(y) + x^2\varphi(y).$$

Agora a ecuación (4.20) queda:

$$2\kappa^2\chi(y) + 4x\kappa^2\varphi(y) - \kappa\chi(y)\xi(y) - x\kappa\xi(y)^2 - 2\kappa\xi'(y) = 0.$$

Derivamola con respecto de x e obtemos as dúas condicións seguintes:

i) $4\kappa^2\varphi(y) - \kappa\xi(y)^2 = 0$, e

ii) $2\kappa^2\chi(y) - \kappa\chi(y)\xi(y) - 2\kappa\xi'(y) = 0$.

Destas dúas ecuacións dedúcese que:

$$\varphi(y) = \frac{\xi(y)^2}{4\kappa}, e$$

$$\chi(y) = \frac{\eta(y)\xi(y) + 2\xi'(y)}{\kappa},$$

respectivamente. Ademais tendo en conta estas condicións vemos que as tres ecuacións restantes se satisfan.

En conclusión, se a curvatura escalar é constante $\kappa \neq 0$ e a función f é da forma:

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= \psi(y) + \frac{x}{2\kappa}(\eta(y)\xi(y) + \xi'(y)) \\ &+ \frac{x^2}{4\kappa}\xi(y)^2 + t(\eta(y) + x\xi(y)) + t^2\kappa, \end{aligned}$$

entón o espazo de partida $\mathcal{M}_f$ é localmente simétrico.

□

Observación 4.5.4 Se temos $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3 e con curvatura escalar τ constante verifícase a seguinte equivalencia:

$$\mathfrak{P} - espazo \Leftrightarrow \mathfrak{T} - espazo.$$

Teorema 4.5.5 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker de dimensión 3 e con curvatura escalar constante. Entón si $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{T}$-espazo tamén é curvatura recurrente.*

Demostración.
Dado que pola observación anterior temos que unha variedade de Walker de dimensión 3 é un $\mathfrak{P}$-espazo se, e só se, é un $\mathfrak{T}$-espazo, e vimos no Capítulo 3 que, baixo as mesmas condicións, é un $\mathfrak{P}$-espazo se, e só se, é curvatura recurrente, entón podemos concluír que é $\mathfrak{T}$-espazo se, e só se, é curvatura recurrente.

□

Os resultados desta sección dan lugar ó seguinte teorema de clasificación:

Teorema 4.5.6 *Sexa $\mathcal{M}_f$ unha variedade de Walker 3-dimensional con curvatura escalar constante. Entón $\mathcal{M}_f$ é un $\mathfrak{T}$-espazo se, e só se, $\mathcal{M}_f$ é localmente simétrica ou unha variedade de Walker estricta.*

Demostración.
Unha aplicación inmediata do Lema 1.5.6(2) e do Teorema 4.5.3 proba este teorema.

□

Capítulo 5

Relación entre $\mathfrak{P}$-espazos e $\mathfrak{T}$-espazos

S. Ivanov e I. Petrova [15] puxeron de manifesto o interese de comparar os $\mathfrak{T}$-espazos estudiados no Capítulo 4 cos $\mathfrak{C}$-espazos e $\mathfrak{P}$-espazos definidos e estudiados no Capítulo 2.

Para variedades Riemannianas temos os seguintes resultados [15]:

- En xeral os $\mathfrak{T}$-espazos e os $\mathfrak{C}$-espazos son diferentes.

- Para variedades de dimensión 2 a clase dos $\mathfrak{T}$-espazos coincide coa clase dos $\mathfrak{P}$-espazos.

- Un $\mathfrak{T}$-espazo de dimensión 3 é localmente para case todo punto un $\mathfrak{P}$-espazo, sen embargo, existen $\mathfrak{P}$-espazos de dimensión 3 que non son localmente $\mathfrak{T}$-espazos para case todo punto.

Á vista do anterior parece natural facerse a seguinte pregunta: Para $n \geq 3$ todo $\mathfrak{T}$-espazo n-dimensional é localmente un $\mathfrak{P}$-espazo para case todo punto? E para contestar a esta cuestión imos empezar recordando algún resultado coñecido para dimensión 3 e a continuación daremos algún contraexemplo para dimensión 4.

5.1. Walker 3-dimensionais: $\mathfrak{T}$-espazo$\Rightarrow$ $\mathfrak{P}$-espazo

Teorema 5.1.1 *Consideremos $(\mathcal{M}, g)$ unha métrica de Walker de dimensión 3. Se $(\mathcal{M}, g)$ é $\mathfrak{T}$-espazo entón tamén é $\mathfrak{P}$-espazo.*

Demostración.
Consideremos as 6 condicións que caracterizan os $\mathfrak{P}$-espazos para unha métrica de Walker xeral de dimensión 3 vistas na subsubsección 3.5.2:

$$\begin{aligned}
p_1 &= -2\epsilon f^{(0,3,0)}f^{(2,0,0)} + 2\epsilon f^{(0,2,0)}f^{(2,1,0)},\\
p_2 &= -4\epsilon f^{(2,0,0)}f^{(2,1,0)} + 4\epsilon f^{(1,1,0)}f^{(3,0,0)},\\
p_3 &= -6\epsilon f^{(1,2,0)}f^{(2,0,0)} + 4\epsilon f^{(1,1,0)}f^{(2,1,0)} + 2\epsilon f^{(0,2,0)}f^{(3,0,0)},\\
p_4 &= 2f^{(0,2,1)}f^{(1,1,0)} + f^{(0,2,0)}f^{(1,0,0)}f^{(1,1,0)} - 2\epsilon f f^{(1,1,1)}f^{(2,0,0)}\\
&+ \epsilon f f^{(0,1,0)}{f^{(2,0,0)}}^2 - 2f^{(0,2,0)}f^{(1,1,1)} + f^{(0,1,0)}f^{(0,2,0)}f^{(2,0,0)}\\
&- 2f^{(0,1,0)}{f^{(1,1,0)}}^2 + 2\epsilon f f^{(1,1,0)}f^{(2,0,1)} - \epsilon f f^{(1,0,0)}f^{(1,1,0)}f^{(2,0,0)},\\
p_5 &= 2f^{(1,1,0)}f^{(1,2,0)} - 2\epsilon f^{(1,0,0)}f^{(1,1,0)}f^{(2,0,0)} - 4\epsilon f^{(1,1,1)}f^{(2,0,0)}\\
&+ 2\epsilon f f^{(1,1,0)}f^{(3,0,0)} - 2\epsilon f f^{(2,0,0)}f^{(2,1,0)} + 2\epsilon f^{(0,1,0)}{f^{(2,0,0)}}^2\\
&+ 4\epsilon f^{(1,1,0)}f^{(2,0,1)} - 2f^{(0,2,0)}f^{(2,1,0)},\\
p_6 &= 2\epsilon f^{(0,1,0)}f^{(1,1,0)}f^{(2,0,0)} - 2f^{(0,2,0)}f^{(1,2,0)} - 2\epsilon f^{(0,2,1)}f^{(2,0,0)}\\
&- 2\epsilon f^{(0,2,0)}f^{(1,0,0)}f^{(2,0,0)} + 2\epsilon f^{(0,2,0)}f^{(2,0,1)} + 2\epsilon f f^{(1,1,0)}f^{(2,1,0)}\\
&+ 2f^{(0,3,0)}f^{(1,1,0)} - 2\epsilon f f^{(1,2,0)}f^{(2,0,0)}.
\end{aligned}$$

e as 9 condicións que caracterizan os $\mathfrak{T}$-espazos para unha métrica de Walker de dimensión 3 que vimos na subsubsección 4.5.2:

$$\begin{aligned}
t_1 &= -f^{(1,1,0)}f^{(1,2,0)} + f^{(0,2,0)}f^{(2,1,0)},\\
t_2 &= -f^{(1,2,0)}f^{(2,0,0)} + f^{(1,1,0)}f^{(2,1,0)},\\
t_3 &= -f^{(2,0,0)}f^{(2,1,0)} + f^{(1,1,0)}f^{(3,0,0)},\\
t_4 &= -f^{(0,3,0)}f^{(2,0,0)} + f^{(0,2,0)}f^{(2,1,0)},\\
t_5 &= f^{(1,1,0)}f^{(2,1,0)} - f^{(0,2,0)}f^{(3,0,0)},\\
t_6 &= f^{(0,3,0)}f^{(1,1,0)} - f^{(0,2,0)}f^{(1,2,0)},\\
t_7 &= -\frac{1}{4}f^{(0,2,1)}f^{(1,1,0)} - \frac{1}{8}f^{(0,2,0)}f^{(1,0,0)}f^{(1,1,0)} + \frac{1}{4}f^{(0,1,0)}{f^{(1,1,0)}}^2\\
&+ \frac{1}{4}f^{(0,2,0)}f^{(1,1,1)} - \frac{1}{8}f^{(0,1,0)}f^{(0,2,0)}f^{(2,0,0)},\\
t_8 &= -\frac{1}{4}f^{(0,2,1)}f^{(2,0,0)} - \frac{1}{4}f^{(0,2,0)}f^{(1,0,0)}f^{(2,0,0)}\\
&+ \frac{1}{4}f^{(0,1,0)}f^{(1,1,0)}f^{(2,0,0)} + \frac{1}{4}f^{(0,2,0)}f^{(2,0,1)},\\
t_9 &= -\frac{1}{8}f^{(1,0,0)}f^{(1,1,0)}f^{(2,0,0)} - \frac{1}{4}f^{(1,1,1)}f^{(2,0,0)}\\
&+ \frac{1}{8}f^{(0,1,0)}{f^{(2,0,0)}}^2 + \frac{1}{4}f^{(1,1,0)}f^{(2,0,1)}.
\end{aligned}$$

Entón o sistema que caracteriza os $\mathfrak{P}$-espazos vén dado por:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0,$$

e o que caracteriza ós $\mathfrak{T}$-espazos vén dado por

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = t_8 = t_9 = 0.$$

Para demostrar o teorema imos supoñer que se verifica o sistema que caracteriza ós $\mathfrak{T}$-espazos e veremos que tamén se verifica o sistema correspondente ós $\mathfrak{P}$-espazos.

Supoñamos en primeiro lugar que se cumple:

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = t_8 = t_9 = 0,$$

entón temos que ver que:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 0.$$

1. Consideremos p_1. Pódese observar que é múltiplo de t_5 ($p_1 = 2\epsilon \cdot t_5$) polo tanto como tiñamos que $t_5 = 0$ concluímos que $p_1 = 0$.

2. Consideremos agora p_2 que é $p_2 = 4\epsilon \cdot t_4$, temos entón que $p_2 = 0$, pois estamos supoñendo $t_4 = 0$.

3. Tomemos p_3 que verifica: $p_3 = 6\epsilon \cdot t_3 - 2\epsilon \cdot t_6$. Entón como por hipótese temos que $t_3 = t_6 = 0$ concluímos que $p_3 = 0$.

4. Tomemos $p_4 = -8 \cdot t_7 + 8\epsilon f(t, x, y) \cdot t_9$. Por hipótese verifícase que $t_7 = t_9 = 0$ e polo tanto dedúcese da igualdade anterior que $p_4 = 0$.

5. Tomemos $p_5 = -2 \cdot t_2 + 2\epsilon f(t, x, y) \cdot t_4 + 16\epsilon \cdot t_9$. Como por hipótese sabemos que $t_2 = t_4 = t_9 = 0$ concluímos que $p_5 = 0$.

6. Por último, $p_6 = 2 \cdot t_1 + 2\epsilon f(t, x, y) \cdot t_3 + 8\epsilon \cdot t_8$. Por hipótese temos que $t_1 = t_3 = t_8 = 0$ e en conclusión verifícase que $p_6 = 0$.

Temos así probado que se verifica o sistema que caracteriza os $\mathfrak{P}$-espazos.

$\square$

Observación 5.1.2 Ademais tal e como vimos no Capítulo 4, se temos $\mathcal{M}_f$ unha métrica de Walker de dimensión 3 e con curvatura escalar τ constante verifícase a seguinte equivalencia:

$$\mathfrak{P} - espazo \Leftrightarrow \mathfrak{T} - espazo.$$

Faltaríanos agora saber se para métricas de Walker 3-dimensionais xerais tamén se verifica a implicación inversa. Sen embargo, non sabemos se isto é certo e intentaremos atopar algún contraexemplo para este caso.

Ademais, non sabemos se en xeral en dimensión 3 se cumpre:

$$\mathfrak{T}\text{-espazo} \Longrightarrow \mathfrak{P}\text{-espazo}.$$

Tamén cabería facernos a seguinte pregunta: ¿$\mathfrak{P}$-espazo ou $\mathfrak{T}$-espazo implica curvatura recurrente, para variedades 3-dimensionais en xeral? E a resposta é NON, pois atopamos un $\mathfrak{P}$-espazo que non é $\mathfrak{T}$-espazo e polo tanto nesta situación este $\mathfrak{P}$-espazo non é curvatura recurrente.

Exemplo 3 *Sexa g_3 unha métrica dada en coordenadas locais (t, x, y) como segue:*

$$g_3(t,x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & h(t) & 0 \\ 0 & 0 & h(t) \end{pmatrix}.$$

Verifícase que g_3 é un $\mathfrak{P}$-espazo e, sen embargo, non é $\mathfrak{T}$-espazo.

Demostración.
Probemos que é un $\mathfrak{P}$-espazo vendo que o operador de Jacobi e o operador de Szabó conmutan. Os cálculos facémolos con respecto de vectores u e v expresados na base de campos coordenados como $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, e escollidos de forma arbitraria.

O operador de Jacobi vén dado por:

$$R_u = \frac{1}{4h(t)} \begin{pmatrix} -(u_2^2 + u_3^2)\Delta & u_1u_2\Delta & u_1u_3\Delta \\ -\frac{u_1u_2\Delta}{h(t)} & \frac{(u_1^2+u_3^2h(t))h'(t)^2 - 2u_1^2h(t)h''(t)}{h(t)} & -u_2u_3h'(t)^2 \\ -\frac{u_1u_3\Delta}{h(t)} & -u_2u_3h'(t)^2 & \frac{(u_1^2+u_2^2h(t))h'(t)^2-2u_1^2h(t)h''(t)}{h(t)} \end{pmatrix},$$

con $\Delta = h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)$, e o operador de Szabó vén dado por:

$$R'_u = \frac{1}{2h(t)^2} \begin{pmatrix} u_1(u_2^2u_3^2)\Phi & -u_1^2u_2\Phi & -u_1^2u_3\Phi \\ \frac{u_1^2u_2\Phi}{h(t)} & \Gamma & 2u_1u_2u_3h'(t)\Psi \\ \frac{u_1^2u_3\Phi}{h(t)} & 2u_1u_2u_3h'(t)\Psi & \Xi \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\frac{u_1((u_1^2 + 2u_3^2h(t))h'(t)^3 - 2h(t)(u_1^2 + u_3^2h(t))h'(t)h''(t) + u_1^2h(t)^2h^{(3)}(t))}{h(t)}, \\ \Xi &= -\frac{u_1((u_1^2 + 2u_2^2h(t))h'(t)^3 - 2h(t)(u_1^2 + u_2^2h(t))h'(t)h''(t) + u_1^2h(t)^2h^{(3)}(t))}{h(t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}\Phi & = & h'(t)^3 - 2h(t)h'(t)h''(t) + h(t)^2 h^{(3)}(t),\\ \Psi & = & h'(t)^2 - h(t)h''(t).\end{array}$$

Pódese probar fácilmente que R_u e R'_u conmutan. Polo tanto, g é un $\mathfrak{P}$-espazo.

Vexamos agora que, en cambio, o tensor de curvatura e a súa derivada covariante non conmutan.

O tensor de curvatura vén dado por:

$$R(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(u_2v_1-u_1v_2)\Delta}{4h(t)} & -\frac{(u_3v_1-u_1v_3)\Delta}{4h(t)} \\ -\frac{(u_2v_1-u_1v_2)\Delta}{4h(t)^2} & 0 & \frac{(u_3v_2-u_2v_3)h'(t)^2}{4h(t)} \\ -\frac{(u_3v_1-u_1v_3)\Delta}{4h(t)^2} & \frac{(-u_3v_2+u_2v_3)h'(t)^2}{4h(t)} & 0 \end{pmatrix},$$

e a súa derivada covariante por:

$$\nabla_u R(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega}{4h(t)^2} & \frac{\Lambda}{4h(t)^2} \\ \frac{\Omega}{4h(t)^3} & 0 & -\frac{3u_1(u_3v_2-u_2v_3)h'(t)\Psi}{4h(t)^2} \\ \frac{\Lambda}{4h(t)^3} & \frac{3u_1(u_3v_2-u_2v_3)h'(t)\Psi}{4h(t)^2} & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{array}{rcl}\Omega & = & (2u_1(u_2v_1-u_1v_2)+u_3(-u_3v_2+u_2v_3)h(t))h'(t)^3 + h(t)(4u_1(-u_2v_1+u_1v_2)\\ & + & u_3(u_3v_2-u_2v_3)h(t))h'(t)h''(t) + 2u_1(u_2v_1-u_1v_2)h(t)^2h(t)^3,\\ \Lambda & = & (2u_1(u_3v_1-u_1v_3)+u_2(u_3v_2-u_2v_3)h(t))h'(t)^3 + h(t)(4u_1(-u_3v_1+u_1v_3)\\ & + & u_2(-u_3v_2+u_2v_3)h(t))h'(t)h''(t) + 2u_1(u_3v_1-u_1v_3)h(t)^2h(t)^3.\end{array}$$

Destas dúas expresións dedúcese fácilmente que $R(u,v)$ e $\nabla_u R(u,v)$ non conmutan, é dicir, g_3 non é un $\mathfrak{T}$-espazo.

□

5.2. Métricas de Walker 4-dimensionais

Tal e como explicamos anteriormente, non sabemos que acontece noutras signaturas nin noutras dimensións. É por iso que para tratar de atopar un contraexemplo á implicación $\mathfrak{T}$-espazo $\Longrightarrow$ $\mathfrak{P}$-espazo imos subir unha dimensión. Facemos a continuación, polo tanto, unha introdución ás variedades de Walker de dimensión 4.

No Capítulo 1 demos unha introdución ás métricas de Walker particularizando despois ó dimensión 3. Imos centrar agora a nosa atención en variedades de Walker de dimensión 4. Comezamos co seguinte resultado xeral [23]:

Teorema 5.2.1 *A forma canónica para unha variedade pseudo-Riemanniana $\mathcal{M}$ de dimensión $2n$ que admite un campo paralelo de planos nulos r-dimensionais $\mathcal{D}$ vén dada polo tensor métrico en forma matricial:*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & Id_r \\ Id_r & B \end{pmatrix},$$

onde Id_r é a matriz identidade de orde $r \times r$ e B é unha matriz simétrica de orde $r \times r$ con entradas que son funcións que dependen das coordenadas $(x_1, \dots, x_{2r})$.

Notemos que se o r-plano nulo é estrictamente paralelo pódense escoller as entradas de B do teorema anterior independentes das coordenadas $(x_1, \dots, x_r)$ [23].

Nós ímonos centrar na xeometría das variedades pseudo-Riemannianas de dimensión 4 que admiten un campo paralelo nulo de planos 2-dimensionais, é dicir, as variedades de Walker de dimensión par máis sinxela que admite un plano paralelo nulo de dimensión máxima. Tendo en conta o Teorema 5.2.1, podemos escribir unha métrica de Walker 4-dimensional en coordenadas locais da forma:

$$g_{a,b,c}(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(t,x,y,z) & c(t,x,y,z) \\ 0 & 1 & c(t,x,y,z) & b(t,x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Adoptamos a seguinte notación:

Sexa $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^4$ subconxunto aberto e sexan $a, b, c \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$. Definimos entón $\mathcal{M}_{a,b,c} := (\mathcal{O}, g_{a,b,c})$.

Un cálculo directo amósanos que:

Teorema 5.2.2 *Os símbolos de Christoffel de $\mathcal{M}_{a,b,c}$ veñen dados por:*

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_t}\partial_y &= \frac{1}{2}a_1\partial_t + \frac{1}{2}c_1\partial_x, \ \nabla_{\partial_t}\partial_z = \frac{1}{2}c_1\partial_t + \frac{1}{2}b_1\partial_x, \\
\nabla_{\partial_x}\partial_y &= \frac{1}{2}a_2\partial_t + \frac{1}{2}c_2\partial_x, \ \nabla_{\partial_x}\partial_z = \frac{1}{2}c_2\partial_t + \frac{1}{2}b_2\partial_x, \\
\nabla_{\partial_y}\partial_y &= \frac{1}{2}(aa_1 + ca_2 + a_3)\partial_t + \frac{1}{2}(ca_1 + ba_2 - a_4 + 2c_3)\partial_x - \frac{a_1}{2}\partial_y - \frac{a_2}{2}\partial_z, \\
\nabla_{\partial_y}\partial_z &= \frac{1}{2}(a_4 + ac_1 + cc_2)\partial_t + \frac{1}{2}(b_3 + cc_1 + bc_2)\partial_x - \frac{c_1}{2}\partial_y - \frac{c_2}{2}\partial_z, \\
\nabla_{\partial_z}\partial_z &= \frac{1}{2}(ab_1 + cb_2 - b_3 + 2c_4)\partial_t + \frac{1}{2}(cb_1 + bb_2 + b_4)\partial_x - \frac{b_1}{2}\partial_y - \frac{b_2}{2}\partial_z.
\end{aligned}$$

5.2.1. Contraexemplos en dimensión 4

Consideramos agora unha métrica $\mathcal{M}_{a,b,c}$ de Walker 4-dimensional para construír exemplos de $\mathfrak{T}$-espazos que non son $\mathfrak{P}$-espazos.

Teorema 5.2.3 *Sexa a métrica de Walker $\mathcal{M}_{a,b,c}$ con*

$$\begin{aligned} a(t,x,y,z) &= a(x,z), \\ b(t,x,y,z) &= 0, \ e \\ c(t,x,y,z) &= 0. \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a(x,z) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entón $\mathcal{M}_{a,b,c}$ é un $\mathfrak{T}$-espazo e, sen embargo, non é un $\mathfrak{P}$-espazo sempre que:

$$u_4 a^{(0,3)} a^{(2,0)} + u_2 a^{(1,2)} a^{(2,0)} - a^{(0,2)}(u_4 a^{(2,1)} + u_2 a^{(3,0)}) \neq 0, \tag{5.1}$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ é un vector expresado na base de campos coordenados e escollido de forma arbitraria.

Demostración.
Vemos fácilmente que se verifica que un espazo desta forma é un $\mathfrak{T}$-espazo, pois o operador curvatura antisimétrico vén dado por:

$$R(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & j_{12} & 0 & j_{14} \\ 0 & 0 & -j_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} j_{12} &= \frac{1}{2}((-u_4v_3 + u_3v_4)a^{(1,1)}(x,z) + (u_3v_2 - u_2v_3)a^{(2,0)}(x,z)), \\ j_{14} &= \frac{1}{2}((-u_4v_3 + u_3v_4)a^{(0,2)}(x,z) + (u_3v_2 - u_2v_3)a^{(1,1)}(x,z)), \end{aligned}$$

a derivada covariante do tensor de curvatura é nula, $\nabla_u R(u,v) = 0, \ \forall u, v$, e polo tanto verifícase trivialmente a condición (4.2).

Vexamos agora que a condición de ser $\mathfrak{P}$-espazo non se cumple.

O operador de Jacobi vén dado por:

$$R_u = \begin{pmatrix} 0 & k_{12} & \frac{1}{2}(-u_4^2 a^{(0,2)} - 2u_2u_4a^{(1,1)} - u_2^2 a^{(2,0)}) & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{13} & -\frac{1}{2}u_3^2 a^{(0,2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}u_3^2 a^{(2,0)} & k_{12} & k_{22} \end{pmatrix},$$

con

$$
\begin{aligned}
k_{12} &= \frac{1}{2}u_3(u_4a^{(1,1)} + u_2a^{(2,0)}),\\
k_{13} &= \frac{1}{2}u_3(u_4a^{(0,2)} + u_2a^{(1,1)}),\\
k_{22} &= -\frac{1}{2}u_3^2a^{(1,1)},
\end{aligned}
$$

e o operador de Szabó vén dado por:

$$
R'_u = \begin{pmatrix} 0 & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ 0 & l_{22} & l_{14} & -\frac{1}{2}u_3^2a^{(0,2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}u_3^2(u_4a^{(2,1)} + u_2a^{(3,0)}) & l_{12} & l_{22} \end{pmatrix},
$$

onde

$$
\begin{aligned}
l_{13} &= \frac{1}{2}(-u_4^3a^{(0,3)} - 3u_2u_4^2a^{(1,2)} - 3u_2^2u_4a^{(2,1)} - u_2^3a^{(3,0)}),\\
l_{12} &= \frac{1}{2}u_3(u_4^2a^{(1,2)} + u_2(2u_4a^{(2,1)} + u_2a^{(3,0)})),\\
l_{14} &= \frac{1}{2}u_3(u_4^2a^{(0,3)} + u_2(2u_4a^{(1,2)} + u_2a^{(2,1)})),\\
l_{22} &= -\frac{1}{2}u_3^2(u_4a^{(1,2)} + u_2a^{(2,1)}).
\end{aligned}
$$

Polo tanto é fácil ver que non se verifica a igualdade (3.3). Calculando $R_u \cdot R'_u - R'_u \cdot R_u$, tense por resultado unha matriz 3×3 na cal os termos non nulos son múltiplos da expresión:

$$
u_4a^{(0,3)}a^{(2,0)} + u_2a^{(1,2)}a^{(2,0)} - a^{(0,2)}(u_4a^{(2,1)} + u_2a^{(3,0)}),
$$

que en xeral non é cero.

En conclusión as variedades con métricas desta forma son $\mathfrak{T}$-espazos e non son $\mathfrak{P}$-espazos, a menos que se verifique a igualdade (5.1).

□

Exemplo 4 *Un exemplo específico sinxelo de métrica de Walker da forma que acabamos de ver no teorema anterior, que é $\mathfrak{T}$-espazo e non é $\mathfrak{P}$-espazo, é:*

$$
g_4(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x^2 + z^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Por ser un caso particular da métrica do teorema anterior, temos que trivialmente é un $\mathfrak{T}$-espazo. Ademais, agora a condición (5.1) resulta ser: $12u_4$, que en xeral non é cero. Polo tanto non é un $\mathfrak{P}$-espazo.

Exemplo 5 *Consideremos agora unha métrica de Lorentz en coordenadas locais da forma:*

$$w(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} \kappa_1 y + \frac{y^2\kappa_1^2}{4\kappa_2} + \kappa_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y + x\phi(z) \end{pmatrix},$$

onde $h(y) = \kappa_1 y + \frac{y^2\kappa_1^2}{4\kappa_2} + \kappa_2$ *é unha función de* y*, con* k_1 *e* k_2 *constantes reais. Esta función* h *determina a función de deformación deste producto warped da forma:* $\mathbb{R} \times_h \mathcal{M}_f$*, no que* $\mathcal{M}_f$ *é unha métrica de Walker 3-dimensional con* $f(t,x,y) = y + x\phi(z)$*. A métrica* w *é un* $\mathfrak{T}$*-espazo pero non é un* $\mathfrak{P}$*-espazo.*

Demostración.
Probemos que é un $\mathfrak{T}$-espazo vendo que o tensor de curvatura e a súa derivada covariante conmutan. Os cálculos facémolos con respecto de vectores u e v expresados na base de campos coordenados como $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ e $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, e escollidos de forma arbitraria.

O tensor de curvatura vén dado por:

$$R(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{(-u_4v_1+u_1v_4)\kappa_1}{2y\kappa_1+4\kappa_2} \\ \frac{(u_2v_1-u_1v_4)\kappa_1(y\kappa_1+2\kappa_2)}{8\kappa_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e a súa derivada covariante por:

$$\nabla_u R(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-\theta}{2(y\kappa_1+2\kappa_2)^2} \\ \frac{\theta}{8\kappa_2} & 0 & \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$\theta = -\kappa_1((u_3u_4v_1 + u_1u_4v_3 - 2u_1u_3v_4)\kappa_1 + u_4(u_4v_1 - u_1v_4)(y\kappa_1 + 2\kappa_2)\phi(z)), \text{ e}$$

$$\vartheta = \frac{u_1(u_4v_1 - u_1v_4)\kappa_1^2}{8\kappa_2}.$$

Destas dúas expresións dedúcese fácilmente que $R(u,v)$ e $\nabla_u R(u,v)$ conmutan.

Vexamos agora que, en cambio, o operador de Jacobi e o operador de Szabó non conmutan.

O operador de Jacobi vén dado por:

$$R_u = \begin{pmatrix} -\frac{u_4^2\kappa_1}{2y\kappa_1+4\kappa_2} & 0 & 0 & \frac{u_1u_4\kappa_1}{2y\kappa_1+4\kappa_2} \\ \frac{u_1u_4\kappa_1(y\kappa_1+2\kappa_2)}{8\kappa_2} & 0 & 0 & -\frac{u_1^2\kappa_1(y\kappa_1+2\kappa_2)}{8\kappa_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e o operador de Szabó vén dado por:

$$R'_u = \begin{pmatrix} -\frac{\varpi}{2(y\kappa_1+2\kappa_2)^2} & 0 & \frac{u_1u_4^2\kappa_1^2}{2(y\kappa_1+2\kappa_2)^2} & \frac{\iota}{2(y\kappa_1+2\kappa_2)^2} \\ \frac{\iota}{8\kappa_2} & 0 & -\frac{u_1^2u_4\kappa_1^2}{8\kappa_2} & \frac{-\varpi}{8\kappa_2} \\ \frac{u_1u_4^2\kappa_1^2}{8\kappa_2} & 0 & 0 & -\frac{u_1^2u_4\kappa_1^2}{8\kappa_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$\begin{aligned} \varpi &= u_4^2\kappa_1(-u_3\kappa_1 + u_4(y\kappa_1+2\kappa_2)\phi(z)), \text{ e} \\ \iota &= u_1u_4\kappa_1(-2u_3\kappa_1 + u_4(y\kappa_1+2\kappa_2)\phi(z)), \end{aligned}$$

e pódese probar fácilmente que non conmutan, pois por exemplo a compoñente $(1,3)$ verifica

$$R'_u \cdot R_u[(1,3)] = 0,$$

e en cambio,

$$R_u \cdot R'_u[(1,3)] = -\frac{u_1u_4^4\kappa_1^3}{4(y\kappa_1+2\kappa_2)^3}.$$

Polo tanto, non se dá a igualdade e w non é un $\mathfrak{P}$-espazo.

□

Temos así probado que, para métricas de Walker de dimensión 4 e para a familia de métricas de Lorentz que acabamos de dar, a implicación

$$\mathfrak{T} - espazo \Rightarrow \mathfrak{P} - espazo$$

non é certa.

Bibliografía

[1] J. Berndt, Three-dimensional Einstein-like manifolds, *Differential Geom. Appl.* **2** (1992), 385-397.

[2] J. Berdnt, L. Vanhecke, Two natural generalizations of locally symmetric spaces, *Differential Geom. Appl.* **2** (1992), 57-80.

[3] Ch. Boubel, L. Bérard-Bergery, On pseudo-Riemannian manifolds whose Ricci tensor is parallel, *Geom. Dedicata* **86** (2001), 1-18.

[4] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikcevic, R. Vázquez-Lorenzo, *The geometry of Walker manifolds*, Synthesis lectures on Mathematics and Statistics **5**, Morgan & Claypool Publ., 2009.

[5] M. Chaichi, E. García-Río, M. E. Vázquez-Abal, Three-dimensional Lorentz manifolds admitting a parallel null vector field, *J. Phys. A* **38** (2005), 841-850.

[6] Q. S. Chi, Curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces, *J. Diff. Geom.* **28** (1988), 187-202.

[7] M. Dajczer, K. Nomizu, On sectional curvature of indefinite metrics II, *Math. Ann.* **247** (1980), 279-282.

[8] E. García-Río, M. E. Vázquez-Abal, Geodesic reflections in semi-Riemannian Geometry, *Czechoslovak Math. J.* **43 (118)** (1993), no. 4, 583-597.

[9] E. García-Río, A. Haji-Badali, R. Vázquez-Lorenzo, Lorentzian 3-manifolds with special curature operators, *Class. Quantum Grav.* **25** (2008), 015003.

[10] E. García-Río, D. N. Kupeli, R. Vázquez-Lorenzo, *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry*, Lecture notes in Mathematics **1777**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2002.

[11] P. Gilkey, *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemannian Curvature Tensor*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.

[12] A. Gray, Einstein-like manifolds which are not Einstein, *Geom. Dedicata* **7** (1978), 259-280.

[13] P. Gilkey, J. V. Leahy, H. Sadofsky, Riemannian manifolds whose skew-symmetric curvature operator has constant eigenvalues, *Indiana Univ. Math. J.* **48** (1999), 615-634.

[14] P. Gilkey, A. Swann, L. Vanhecke, Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator, *Quart. J. Math. Oxford* **46** (1995), 299-320.

[15] S. Ivanov, I. Petrova, Curvature operator with parallel Jordanian basis on circles, *Riv. Mat. Univ. Parma* **5** (1996), 23-31.

[16] S. Ivanov, I. Petrova, Riemannian Manifolds in which Certain Curvature Operator has Constant Eigenvalues Along Each Circle, *Ann. Global Anal. Geom.* **15** (1997), 157-171.

[17] S. Ivanov, I. Petrova, Riemannian manifold in which the skewsymmetric curvature operator has pointwise constant eigenvalues, *Geom. Dedicata* **70** (1998), 269-282.

[18] W. Kühnel, *Differential Geometry. Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library **16**, American Mathematical Society, Providence, RI, (2002).

[19] R. S. Kulkarni, The values of sectional curvature in indefinite metrics, *Comm. Math. Helv.* **54** (1979), 173-176.

[20] K. Nomizu, K. Yano, On circles and spheres in Riemannian geometry, *Math. Ann.* **210** (1974), 163-170.

[21] K. J. Pearson, T. Zhang, The non existence of rank 4 IP tensors in signature (1,3), *Int. J. Math. Math. Sci.* **31** (2002), 259-269.

[22] I. M. Singer, Infinitesimally homogeneous spaces, *Commun. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 685-697.

[23] A. G. Walker, Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, *Quart. J. Math. Oxford* **(2) 1** (1950), 69-79.

Publicacións do departamento de Xeometría e Topoloxía

95 A. RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ *Cohomoloxía das foliacións riemannianas con follas densas. Cohomoloxía de Alexander-Spanier de foliacións compactas Hausdorff.* Tesiña de Licenciatura (2001) ISBN: 84-89390-12-6

96 M. FERNÁNDEZ LÓPEZ *Resultados de descomposición asociados á ecuación de Möbius.* Tese de Doutoramento (2002) ISBN: 84-89390-13-4

97 J.C. DÍAZ RAMOS *Curvaturas totais de esferas xeodésicas.* Tesiña de Licenciatura (2002) ISBN: 84-89390-14-2

98 M. F. GONZÁLEZ LÁZARO *Resolución de singularidades en acciones polares.* DEA (2003) ISBN: 84-89390-16-9

99 A. SOTELO ARMESTO *El grupo de difeomorfismos del espacio de hojas de una foliación de Lie desde el punto de vistas difeológico.* Tesiña de Licenciatura (2003) ISBN: 84-89390-15-0

100 M. BROZOS VÁZQUEZ *Variedades semi-riemannianas con tensor de curvatura especial.* Tesiña de Licenciatura (2003) ISBN: 84-89390-18-5

101 J.C. DÍAZ RAMOS *Caracterización de variedades riemannianas mediante curvaturas escalares totais de esferas xeodésicas.* DEA (2003) ISBN: 84-89390-17-7

102 M.T. PÉREZ LÓPEZ *Campos de vectores harmónicos-Killing.* Tese de Doutoramento (2003) ISBN: 84-89390-19-3

103 I. GARCÍA RAMÍREZ *Aplicación de las formulas de Bochner al estudio de variedades 4-dimensionales doblemente casi-hermíticas.* DEA (2003) ISBN: 84-89390-20-7

104 A. MARTÍN MÉNDEZ *Álgebras de Lie graduadas y estructuras de segundo orden asociadas.* Tese de Doutoramento (2004) ISBN: 84-89390-21-5

105 M. BROZOS VÁZQUEZ *Propiedades conformes de productos deformados.* DEA (2004) ISBN: 84-89390-22-3

106 J.C. DÍAZ RAMOS *Geometric consequences of intrisic and extrinsic curvature conditions.* Tese de Doutoramento (2006) ISBN: 84-89390-23-1

107 P. GONZÁLEZ SEQUEIROS *A dinámica dos mosaicos de Robinson.* Tesiña de Licenciatura (2006) ISBN: 84-89390-24-X

108 E. CALVIÑO LOUZAO *Variedades de Osserman e Ivanov-Petrova en dimensión cuatro.* DEA (2007) ISBN 978-84-89390-25-6

109 M. BROZOS VÁZQUEZ *Geometric consequences of algebraic conditions on curvature operators.* Tese de Doutoramento (2007) ISBN 978-84-89390-26-3

110 M. PÉREZ FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA *Número de ramificación de un pseudogrupo.* DEA (2007) ISBN 978-84-89390-27-0

111 P. GONZÁLEZ SEQUEIROS *A dinámica dos mosaicos euclidianos.* DEA (2007) ISBN 84-89390-28-7

112 ÁLVARO LOZANO ROJO *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos.* Tese de Doutoramento (2008) ISBN 978-84-89390-29-4

113 M. J. PEREIRA SÁEZ *Aplicación traza, transformación de Cayley y categoría LS de los grupos de Lie clásicos.* DEA (2008) ISBN 978-84-89390-30-0

114 S. VILARIÑO FERNÁNDEZ *Nuevas aportaciones al estudio de los formalismos k-simpléctico y k-cosimpléctico.* Tese de Doutoramento (2009) ISBN 978-84-89390-31-7