

CARLOS MENIÑO COTÓN

CATEGORÍA LS

EN ESPACIOS MEDIBLES FOLIADOS

CON MEDIDA TRANSVERSA INVARIANTE

116

2010

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

CARLOS MENIÑO COTÓN

**CATEGORÍA LS EN
ESPACIOS MEDIBLES FOLIADOS CON
MEDIDA TRANSVERSA INVARIANTE**

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas, bajo la dirección del profesor Jesús Antonio Álvarez López, para obtener el Diploma de Estudios Avanzados en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela.

Se llevó a cabo su defensa el día 15 de Septiembre de 2008 en la Facultad de Matemáticas de dicha Universidad.

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 978-84-89390-33-1

Dep. Leg.: C 1579-2010

A mi familia.

Introducción

Se pretende en esta memoria ahondar más en las propiedades de la categoría LS para espacios foliados con medida transversa invariante, introducida por este autor en [25] (2007). En ese caso la versión era más topológica y se investigaba su comportamiento en diversos tipos de espacios foliados. Nuestro objetivo en el presente trabajo es extender algo más los resultados que allí se obtuvieron y, adicionalmente, presentar una versión de categoría LS para espacios medibles foliados (véase [3]). También se introduce una variante medible de la categoría tangente, introducida por Hellen Colman y Enrique Macías [8, 24].

La categoría de Lusternik-Schnirelmann para espacios topológicos fue introducida en 1934 en el contexto del cálculo de variaciones. Se trata de un invariante de homotopía definido como el mínimo cardinal de un recubrimiento por abiertos contráctiles en un espacio topológico. Este número da una cota inferior al número de puntos críticos de cualquier función diferenciable sobre una variedad cerrada [20]. En este sentido es un complemento a la teoría de Morse.

Pese a la simplicidad de su definición, es un invariante difícil de calcular en casos concretos. Las herramientas de cálculo suelen pasar por técnicas de homotopía y acotaciones por invariantes de topología algebraica.

Existen generalizaciones diversas de la categoría LS. En particular, se ha adaptado al contexto de foliaciones. En su tesis doctoral, Hellen Colman introduce dos tipos de adaptaciones de la categoría LS: la categoría transversa y la tangente. También adapta resultados sobre el cálculo y las propiedades de la categoría LS clásica, sobre todo para la categoría transversa.

La categoría tangente ha sido intensamente estudiada por E. Vogt y W. Singhof. Las homotopías que se consideran son las integrables, definidas como las que conservan cada hoja. Un abierto se dice tangencialmente categórico si existe una homotopía integrable que deforme a un punto cada componente conexa de los abiertos que induce en cada hoja. La categoría tangente es el cardinal mínimo de un recubrimiento por abiertos tangencialmente categóricos. Las homotopías integrables tienen relación con las transformaciones del pseudogrupo de holonomía asociado a una foliación. Se puede intuir que la categoría tangente debe guardar información interesante acerca de la dinámica transversa de una foliación.

Nuestro propósito es establecer una versión alternativa de la categoría tangente. Para ello usamos la teoría de Connes para foliaciones con medida transversa invariante (medi-

da en transversales invariante para las transformaciones del pseudogrupo de holonomía). Esta teoría se ha usado para dar versiones foliadas de invariantes de variedades como los números de Betti, la característica de Euler, la teoría del índice, la fórmula de la traza,...

La definición de espacio medible foliado es similar a la de espacio foliado, en el espacio subyacente se supone dada una estructura medible y una topología (la topología de las hojas), donde la parte transversa de las cartas foliadas es un espacio medible estándar y la parte tangente es homeomorfa a \mathbb{R}^n . Los espacios medibles foliados deben interpretarse como la estructura minimal que puede soportar a la teoría y construcciones de Connes. El análogo de las homotopías integrables son las homotopías medibles, que son medibles y continuas respecto a la topología de las hojas.

Para un espacio medible foliado, siempre existe una extensión de cualquier medida transversa invariante Λ a una medida $\tilde{\Lambda}$ en el espacio ambiente. Intuitivamente, $\tilde{\Lambda}$ se define como el apareamiento de Λ con la medida de contar en las hojas. Esta extensión es única exigiendo ciertas condiciones y la llamaremos extensión coherente. Este resultado se prueba en el Capítulo 2.

Para definir la Λ -categoría LS de un espacio foliado X y una medida transversa invariante Λ debemos tener en cuenta el peso transverso de las deformaciones tangentes de los abiertos del espacio. Primeramente medimos respecto a la extensión coherente, $\tilde{\Lambda}$, el conjunto $H(U \times \{1\})$, donde U es abierto y H es una homotopía integrable comenzando con la inclusión $U \hookrightarrow X$. Es decir, se mide el peso transverso de la fase final de la deformación. Entonces se define

$$\tau(U) = \inf\{\tilde{\Lambda}(H(U \times \{1\})) \mid \text{con } H \text{ deformación integrable de } U \hookrightarrow X\}.$$

Para un recubrimiento abierto \mathcal{U} , se define

$$\tau(\mathcal{U}) = \sum_{U \in \mathcal{U}} \tau(U).$$

Es decir, τ es una aplicación que optimiza el peso transverso al considerar todas las deformaciones integrables posibles que pueden actuar sobre los abiertos de un recubrimiento abierto de la foliación. La Λ -categoría se define como el ínfimo de estas cantidades al recorrer \mathcal{U} todos los recubrimientos abiertos. En el caso de un espacio medible foliado la definición es análoga cambiando homotopías integrables por homotopías medibles y tomando recubrimientos numerables por abiertos medibles. Sin esta condición de numerabilidad, las medidas que se anulasen puntualmente trivializarían la Λ -categoría.

El trabajo fundamental consiste en adaptar a esta Λ -categoría los resultados clásicos para la categoría LS usual y ver qué similitudes puede tener con la categoría tangente. Los primeros resultados se refieren a métodos de cálculo de la Λ -categoría. Para espacios foliados $L \times T$ con hojas $L \times \{*\}$, se tiene el resultado esperable:

$$\text{Cat}_{\text{Top}}(\mathcal{F}, \Lambda) = \text{Cat}_{\text{Med}}(\mathcal{F}, \Lambda) = \text{Cat}(L) \cdot \Lambda(T),$$

donde Cat es la categoría clásica y Cat_{Top} y Cat_{Med} se refieren a las Λ -categorías topológica y medible respectivamente.

Si la foliación está constituida por hojas cerradas, entonces una medida transversa invariante Λ para X induce una medida $\Lambda_{\mathcal{F}}$ en el cociente X/\mathcal{F} . Utilizamos en este contexto los trabajos de Epstein y de Sullivan [13, 12]. Para el caso especial de foliaciones compactas-Hausdorff, se obtiene en [25], que si Λ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue y regular exterior, entonces

$$\text{Cat}_{\text{Top}}(\mathcal{F}, \Lambda) = \int_{X/\mathcal{F}} \text{Cat}(L) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L) .$$

Medidas transversas invariantes en estas condiciones se pueden conseguir siempre puesto que las foliaciones compactas-Hausdorff son riemannianas. Generalizamos este resultado al caso de espacios foliados compactos-Hausdorff donde la medida transversa invariante es finita en compactos. Además comprobamos que esta relación es cierta en el caso de espacios foliados por hojas compactas en el contexto de Λ -categoría medible.

En [25] se demuestra que la Λ -categoría topológica se anula en el caso de los flujos de Kröner de pendiente irracional. Gracias a una aplicación del teorema de Rohlin (véase *e.g.* [34]) somos capaces de generalizar este resultado a suspensiones libres por grupos de Rohlin. También obtendremos que los flujos minimales tienen Λ -categoría nula.

Se adapta también un resultado de E. Vogt y W. Singhof que afirma que la categoría tangente es una función semicontinua superiormente en el espacio de foliaciones de dimensión fija sobre una variedad cerrada. Para la Λ -categoría topológica ya existe en [25] una adaptación de este resultado. Se define un espacio topológico de foliaciones con medidas transversas invariantes sobre una variedad cerrada y se prueba la semicontinuidad en este espacio. En aquel caso, la topología usada para aproximar las medidas transversas era la norma de la diferencia en una transversal dada. En el actual trabajo se utilizará la topología débil de las normas, que es más gruesa que la topología de la norma. Se tendrá también la semicontinuidad superior de la Λ -categoría topológica sobre este espacio.

Sobre el resultado de minimización de puntos críticos que da la categoría clásica, se consigue una versión para el caso de espacios foliados por hojas compactas. Se consideran funciones medibles cuyas restricciones a las hojas son diferenciables. Bajo estas condiciones, la diferencial varía mediblemente en el espacio ambiente (esto último es una observación debida a M. Bermúdez). Dada una función f de estas características, se define $\text{Crit}_{\mathcal{F}}(f)$ como el conjunto de todos los puntos críticos de las restricciones de f a las hojas. Se tiene

$$\text{Cat}_{\text{Med}}(\mathcal{F}, \Lambda) \leq \tilde{\Lambda}(\text{Crit}_{\mathcal{F}}(f)) .$$

Es decir, la Λ -categoría acota inferiormente el peso transverso de los puntos críticos de este tipo de funciones.

Para una variedad se tiene el siguiente resultado clásico:

$$\text{Nil } \tilde{H}^*(M, R) \leq \text{Cat}(M) ,$$

donde $\tilde{H}^*(M, R)$ es el anillo de cohomología reducida sobre M con coeficientes en un anillo conmutativo R , y Nil denota el orden de nilpotencia de un anillo; es decir, el número

mínimo de veces que debe multiplicarse consigo mismo para obtener el subconjunto cero. Para espacios foliados por hojas compactas, obtenemos el siguiente resultado

$$\int_{X/\mathcal{F}} \text{Nil } \tilde{H}^*(L, R) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L) \leq \text{Cat}_{\text{Med}}(\mathcal{F}, \Lambda) \leq \text{Cat}_{\text{Top}}(\mathcal{F}, \Lambda) .$$

Realizamos el cálculo de nuestros invariantes en diversos ejemplos para comprobar la utilidad de nuestros resultados.

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento al Profesor Dr. D. Jesús Antonio Álvarez López por su labor de dirección, por su intensa dedicación y por su paciencia. Al Departamento de Xeometría e Topoloxía y a sus miembros por todos los medios puestos a mi alcance que han ayudado a complementar mi formación. Al Ministerio de Educación y Ciencia por el soporte económico durante la elaboración de esta memoria (Programa FPU). Y a mi familia por su apoyo incondicional.

Índice general

1. Generalidades	1
1.1. De variedades foliadas a espacios medibles foliados	1
1.2. Holonomía	5
1.3. El espacio de hojas	7
1.4. Medida transversa invariante	7
1.5. Homotopía integrable y categoría tangente	8
1.6. Homotopía medible y categoría tangente medible	10
1.7. Ejemplos de espacios foliados	17
1.7.1. Foliaciones Riemannianas	17
1.7.2. Foliaciones de Lie	18
1.7.3. Espacios foliados por hojas compactas	18
1.7.4. Suspensiones	21
1.8. Ejemplos de MT-espacios	21
1.8.1. Espacios medibles y espacios topológicos	21
1.8.2. Una generalización de espacios medibles foliados	21
1.8.3. Grafos medibles	22
1.8.4. Subespacios y cocientes MT	22
1.8.5. Suspensiones medibles	23
1.8.6. Ejemplos de espacios medibles foliados inducidos	24
2. Extensión coherente de medidas invariantes	29
2.1. Introducción	29
2.2. Caso de un MT-espacio producto	29
2.3. El caso general	35
3. Categoría LS y medida transversa invariante	39
3.1. Introducción	39
3.2. Definición de Λ -categoría L-S	41
3.3. Primeras propiedades	41

4. Λ-categoría LS en espacios foliados por hojas compactas	49
4.1. La filtración asociada a un espacio foliado por hojas compactas	49
4.2. Estructura medible del espacio cociente. La medida cociente	50
4.3. Cálculo medible	51
4.4. Aplicación a puntos críticos	52
4.5. Cohomología	53
4.6. El caso topológico	55
4.7. Cálculo en ejemplos	59
5. Suspensiones de Rohlin y flujos minimales	67
5.1. Torres de Rohlin	67
5.2. Suspensiones medibles libres por grupos de Rohlin	68
5.3. Suspensiones topológicas libres por grupos de Rohlin	70
5.4. Ejemplos ilustrativos	73
5.5. Flujos minimales	75
6. Semicontinuidad en variedades cerradas	83
6.1. Consideraciones previas	83
6.2. Topologías para foliaciones con medida invariante	85
6.3. Semicontinuidad de la Λ -categoría	86

Capítulo 1

Generalidades

1.1. De variedades foliadas a espacios medibles foliados

Para esta sección nos guiamos usando notación y resultados expuestos en [6], [8] y [3].

Definición 1.1.1 Una foliación de dimensión m y codimensión n sobre una variedad (Hausdorff y segundo numerable) M es un atlas maximal \mathcal{F} que cumple las siguientes propiedades:

- (a) Si $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, entonces $\varphi(U) = D \times Z$, donde D es una bola abierta de \mathbb{R}^m y Z es cualquier abierto de \mathbb{R}^n .
- (b) Si $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ y $U \cap V \neq \emptyset$, entonces el cambio de cartas es localmente de la forma:

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)) .$$

Al par (M, \mathcal{F}) se le denomina variedad foliada.

A las cartas de \mathcal{F} se les denomina *cartas foliadas*. A cualquier familia de cartas foliadas cuyos dominios recubren M se le llama *atlas foliado* y determina \mathcal{F} . Se dice que dos atlas foliados son *equivalentes* cuando inducen la misma estructura foliada.

Los dominios de cartas foliadas se llaman *abiertos distinguidos*. En la Definición 1.1.1-(a), a los conjuntos de la forma $\varphi^{-1}(D \times \{y\})$ se les llaman *placas* y a los conjuntos $\varphi^{-1}(\{x\} \times Z)$ se les llaman *transversales* asociadas a esa carta. Con mayor generalidad, a cualquier subvariedad (embebida o inmersa) de dimensión n transversa a las hojas se le llama *transversal*, y se dice que es *completa* si corta a todas las hojas. Una transversal completa se consigue con la unión disjunta de transversales asociadas a las cartas de cualquier atlas foliado; esta transversal completa es inmersa en general, y es embebida si se escoge el atlas y las transversales de forma adecuada. La proyección del dominio de cada carta foliada sobre cualquier transversal asociada, cuyas fibras son las placas, se le denomina *aplicación cociente local*.

Las placas forman una base para una topología en M , llamada *topología de las hojas*, cuyas componentes conexas forman una partición de M por subvariedades inmersas denominadas *hojas*. Se suele usar la notación L_x para la hoja que pasa por un punto $x \in M$. Una foliación está determinada por sus hojas.

Una *estructura C^r* de \mathcal{F} , $r \in \{1, 2, \dots, \infty, \omega\}$, se define como un atlas foliado maximal con cambios de coordenadas C^r . Se define *estructura C^r transversa* de forma similar pidiendo que sean C^r las componentes h_2 de los cambios de coordenadas en (b), y lo mismo para definir *estructura C^r tangencial*, pidiendo que las componentes $h_1(x, y)$ tengan dependencia C^r de x y continuamente en y .

También podemos considerar *foliaciones con borde*. Para esto, se adapta la Definición 1.1.1 de forma que D sea una bola o semibola, y Z es un abierto de un semiespacio euclídeo. Los puntos del borde pueden ser de dos tipos, según en cada carta foliada vengán dados por puntos del borde de D o de Z . De esta forma el borde ∂M está formado por una parte *tangencial* y otra *transversa*, denotadas por $\partial_\tau M$ y $\partial_{\text{th}} M$, respectivamente. *Foliaciones con esquinas* se pueden definir de forma análoga.

Interesa considerar atlas foliados con propiedades adicionales, como los de la siguiente definición.

Definición 1.1.2 *Sea \mathcal{F} una foliación de una variedad M . Un atlas foliado $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ de \mathcal{F} se dice que es regular si cumple las siguientes propiedades:*

- (a) *Para cada $\alpha \in \Lambda$, existe alguna carta foliada (V, ψ) de \mathcal{F} tal que $\overline{U_\alpha}$ es un subconjunto compacto de V y $\psi|_{U_\alpha} = \varphi_\alpha$.*
- (b) *El recubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es localmente finito.*
- (c) *Para $\alpha, \beta \in \Lambda$, cada placa de $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ corta o bien a una placa de (U_β, φ_β) o bien a ninguna.*

Proposición 1.1.3 (Véase e.g. [6]) *Cualquier foliación admite un atlas foliado regular.*

La definición de *espacio foliado* es una generalización del concepto de variedad foliada. Para definirlo, en la Definición 1.1.1, se cambia M por un espacio topológico X y Z por cualquier espacio topológico. Se suele asumir que los espacios foliados son localmente compactos y polacos¹ para obtener mejores propiedades. Los términos indicados para foliaciones pueden generalizarse a espacios foliados. Obsérvese que, para espacios foliados, solamente tiene sentido considerar estructuras C^k tangenciales. La Proposición 1.1.3 también se generaliza a espacios foliados.

Precisamos los conceptos de transversal en el sentido general de espacios foliados, será éste el sentido en que lo entendamos.

¹Separable y completamente metrizable.

Definición 1.1.4 Una transversal a un espacio foliado (X, \mathcal{F}) es un par (T, i) , donde T es un espacio topológico e $i : T \rightarrow X$ es un embebimiento local tal que todo punto de T tiene un entorno abierto U con $i(U)$ contenido en un abierto distinguido V , siendo $p_V|_{i(U)}$ un embebimiento abierto y p_V es una aplicación cociente local de V . Si $i(T)$ corta a toda hoja de la foliación se dice que la transversal es completa o total. Una transversal se dirá local cuando i es un embebimiento, $i(T)$ está contenida en un abierto distinguido y la restricción de la aplicación cociente local a $i(T)$ sea un embebimiento abierto.

Normalmente, omitiremos la referencia a la aplicación i cuando no haya lugar a confusión.

Un espacio medible topológico o MT-espacio es un espacio dotado con una σ -álgebra y una topología. Una MT-aplicación entre MT-espacios es una aplicación que es medible y continua. Sea T un espacio de Borel estándar², y sea $\mathbb{R}^n \times T$ el MT-espacio con la σ -álgebra producto y la topología generada por los abiertos de las placas $\mathbb{R}^n \times \{*\}$. Una carta medible foliada para un MT-espacio X es una MT-aplicación $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times T$ que es un isomorfismo medible y un homeomorfismo, donde U es abierto y medible en X . Un atlas medible foliado es una familia numerable de cartas medibles foliadas que cubren X . Un espacio medible foliado es un MT-espacio que admite un atlas medible foliado. Las hojas serán las componentes conexas del MT-espacio. También se puede hablar de C^r estructura tangente de forma análoga a los espacios foliados (véase Lema 1.1.7). En el contexto de espacios medibles foliados, las transversales serán borelianos que intersecan cada hoja en una cantidad numerable de puntos, este punto de vista es más general que el que podemos encontrar en [3], donde se exige que las transversales tengan cortes cerrados y discretos con cada hoja. Como el atlas es numerable, es fácil ver que cada hoja es un espacio segundo numerable pero no necesariamente Hausdorff. De este modo tenemos definida una categoría dada por espacios medibles foliados y MT-aplicaciones. Existe un functor entre la categoría de espacios foliados y aplicaciones foliadas (las que llevan hojas en hojas) y la categoría de espacios medibles foliados y MT-aplicaciones. Este functor asigna a un espacio foliado un espacio medible foliado inducido por cualquiera de sus atlas foliados numerables, tomando el espacio foliado como un MT-espacio con la σ -álgebra de Borel y la topología de las hojas. Las aplicaciones foliadas pasan a ser ahora MT-aplicaciones. Denotaremos a este functor de olvido topológico por \mathcal{O} .

Nuestras herramientas fundamentales de trabajo en el caso medible vienen dadas por los dos siguientes teoremas.

Proposición 1.1.5 (Lusin, véase e.g. [35]) Sean X e Y espacios de Borel estándar y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación medible con fibras numerables. Entonces $f(X)$ es un conjunto de Borel en Y y existe una sección medible $s : f(X) \rightarrow X$ de f . En, particular, si f es inyectiva, entonces s es un isomorfismo de Borel. Adicionalmente, existe una partición numerable en borelianos, $X = \bigcup_i X_i$, con cada $f|_{X_i}$ inyectiva.

²Borel isomorfo a un boreliano de un espacio polaco

Teorema 1.1.6 (Kunugui, Novikov, véase e.g. [35]) *Sea $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de un espacio polaco P . Sea $B \subset P \times T$ un boreliano tal que $B \cap (P \times \{t\})$ es abierto para todo $t \in T$. Entonces existe una sucesión $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de borelianos de T tal que*

$$B = \bigcup_n (V_n \times B_n).$$

Lema 1.1.7 *Sea (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) cartas medibles foliadas de X . Existe una sucesión de borelianos de T_i , $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \bigcup_n (V_n \times B_n)$ y $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, t) = (g_{ijn}(x, t), f_{ijn}(t))$ para $(x, t) \in V_n \times B_n$, donde cada f_{ijn} es un isomorfismo de Borel.*

Demostración:

Aplicamos el Teorema 1.1.6 a $\varphi_j(U_i \cap U_j)$, tomando una base $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por abiertos conexos de \mathbb{R}^n y obtenemos una familia $V_n \times B'_n$ tal que $\varphi_j(U_i \cap U_j) = \bigcup_n (V_n \times B'_n)$. Ahora aplicamos de nuevo el Teorema 1.1.6 a cada conjunto $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(V_k \times B'_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Obtenemos sucesiones $B'_{k,n}$ tales que

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(V_k \times B'_k) = \bigcup_n (V_n \times B'_{k,n}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

El conjunto $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(V_n \times \{t\})$, $t \in B'_{k,n}$, está contenido en una sola placa de la forma $\mathbb{R}^n \times \{*\}$ pues cada V_n es conexo. Por tanto, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, t) = (g_{ijkn}(x, t), f_{ijkn}(t))$ para $(x, t) \in V_n \times B'_{k,n}$. Debemos mostrar que f_{ijkn} es biyectiva. Si existen $t, t' \in T_i$ con $f_{ijkn}(t) = f_{ijkn}(t') = t''$, entonces $g_{ijkn}(V_n \times \{t\})$ y $g_{ijkn}(V_n \times \{t'\})$ están contenidos en la placa $V_k \times \{t''\}$ en $V_k \times B'_k$, pero esta placa es la imagen por $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ de un abierto conexo dado que φ_j y φ_i son homeomorfismos y V_k es conexo. En consecuencia, la imagen por $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ de la placa $V_k \times \{t''\}$ está contenida en una única placa de U_i . Esto es una contradicción con la suposición $t \neq t'$.

Es fácil comprobar que las aplicaciones f_{ijkn} son medibles. Finalmente, la aplicación f_{ijkn} es un isomorfismo de Borel con su imagen por la Proposición 1.1.5. \square

También podemos hablar de la noción de atlas medibles foliados regulares.

Definición 1.1.8 *Un atlas medible foliado \mathcal{U} de un espacio medible foliado X se dice regular si y sólo si para cada carta $(U, \varphi) \in \mathcal{U}$ existe otra carta medible foliada (W, ψ) tal que $\bar{U} \subset W$, \bar{U} induce subespacios compactos en cada placa de W y $\varphi = \psi|_U$ y, además, para cada par de cartas $U, V \in \mathcal{U}$, cada placa de U corta a lo sumo una placa de V .*

Observamos que esta definición es más débil que la que usamos en el caso topológico. La condición de ser localmente finito es una condición topológica del espacio ambiente que ahora hemos perdido.

Proposición 1.1.9 *Todo espacio medible foliado que admite un atlas tal que cada carta es intersecada por una cantidad finita de cartas, admite un atlas medible foliado regular.*

Demostración:

La demostración es un corolario del Lema 1.1.7. No hay más que usar el lema una cantidad finita de veces en cada carta del atlas dado, tomando la base numerable $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ formada por abiertos relativamente compactos. Hay que usarlo tantas veces como cartas tengan intersección no vacía con cada carta dada. De este modo obtenemos un atlas medible foliado que refina al anterior y que cumple las propiedades de regularidad trivialmente. \square

1.2. Holonomía

La holonomía generaliza a foliaciones lo que es la aplicación de Poincaré para flujos. Nos dice en qué forma varían las transversales cuando se mueven a lo largo de las hojas. En esta parte hemos seguido la exposición de [6], [1] y [3].

Sea X un espacio foliado con estructura foliada \mathcal{F} . Escogemos un atlas regular $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$. Para $\alpha, \beta \in \Lambda$, sean S_α y S_β transversales asociadas a $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) . Supongamos que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, y sea $x \in S_\alpha$ tal que la placa de U_α que contiene x corta a U_β . Entonces existe un homeomorfismo $h_{\alpha\beta}$ de un entorno abierto de x en S_α a un abierto de S_β tal que, para cada x' en su dominio, la placa de U_α que contiene x' corta a la placa de U_β que contiene a $h_{\alpha\beta}(x')$; esta condición determina a $h_{\alpha\beta}$ por la regularidad del atlas. Sean $\varphi_\alpha(U_\alpha) = D_\alpha \times Z_\alpha$ y $\varphi_\beta(U_\beta) = D_\beta \times Z_\beta$ de acuerdo con la Definición 1.1.1, e identifiquemos S_α con Z_α y S_β con Z_β . Así $h_{\alpha\beta}$ se puede identificar con la componente h_2 de la expresión del cambio de coordenadas en Definición 1.1.1-(b). Por tanto $h_{\alpha\beta}$ es C^r si X es una variedad y \mathcal{F} es transversalmente C^r .

Dado un camino entre dos puntos x y x' de una hoja L de \mathcal{F} , $c : I = [0, 1] \rightarrow L$, existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ de I y existen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda$ tal que $c([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{\alpha_{i-1}} \cup U_{\alpha_i}$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Sea S_i la transversal asociada a $(U_{\alpha_i}, \varphi_{\alpha_i})$ que pasa por el punto $c(t_i)$. Entonces, de acuerdo a lo anterior, cada $h_{\alpha_{i-1}\alpha_i}$ está definido de un entorno de $c(t_{i-1})$ en S_{i-1} a un entorno de $c(t_i)$ en S_i . Además, si T y T' son transversales arbitrarias por x y x' , respectivamente, entonces existe un homeomorfismo h de un entorno de x en T a un entorno de x en S_0 tal que cada y en ese entorno está en la misma placa de U_{α_0} que $h(y)$, y existe un homeomorfismo análogo h' de un entorno de x' en S_k a un entorno de x' en T' . Por tanto la composición $h_c = h' \circ h_{\alpha_{k-1}\alpha_k} \circ \dots \circ h_{\alpha_0\alpha_1} \circ h$ está definida de un entorno Σ de x en T a un entorno Σ' de x' en T' , y es un difeomorfismo C^r si \mathcal{F} es transversalmente C^r . A h_c se le denomina *transformación de holonomía* definida por c . Es fácil ver que el germen de h_c es independiente de la elección de la partición y la familia de abiertos coordenados. Si d es otro camino en L de x a x' suficientemente próximo a c , entonces h_d tiene el mismo germen en x que h_c porque ambos homeomorfismos se pueden definir con la misma cadena de abiertos distinguidos. Se sigue que el germen de h_c en x depende solamente de la clase de homotopía de c relativa a los extremos.

Es fácil ver que, en la situación anterior, existe una aplicación $H_c : \Sigma \times I \rightarrow X$ tal que $H_c(\{y\} \times I)$ está contenido en una hoja de \mathcal{F} , $H_c : \{x\} \times I \equiv I \rightarrow X$ se identifica con c ,

$H_c : \Sigma \times \{0\} \equiv \Sigma \rightarrow X$ se identifica con la aplicación inclusión Σ en X , $H_c(\Sigma \times \{1\}) = \Sigma'$, y $H_c : \Sigma \times \{1\} \equiv \Sigma \rightarrow \Sigma'$ se identifica con h_c . A tal H_c se le denomina *tubo de caminos foliados* alrededor de c que define h_c .

Supongamos ahora que $x = x'$ y tomemos $T = T'$. Denotemos por $\mathcal{H}(T, x)$ el grupo de gérmenes en x de homeomorfismos locales de T cuyo dominio contiene x . Por lo anterior, se puede definir un homomorfismo

$$h : \pi_1(L, x) \longrightarrow \mathcal{H}(T, x)$$

que, a cada elemento de $\pi_1(L, x)$, representado por un lazo c , le asigna el germen de h_c en x . A este h se le denomina *representación de holonomía* de L en x , y a su imagen el *grupo de holonomía* de L en x , denotado por $\text{hol}(L, x)$. Como las hojas son conexas por caminos, los grupos de holonomía de una hoja en puntos distintos son isomorfos; de hecho conjugados por el germen de la transformación de holonomía de cualquier camino que una a ambos puntos. Así, a veces se usará la notación $\text{hol}(L)$.

Ahora recordemos algunos conceptos sobre pseudogrupos siguiendo a [19]. Un *pseudogrupo* en un espacio T es una familia \mathcal{H} de homeomorfismos entre abiertos de T que contiene id_T y es cerrada por las operaciones de composición (donde esté definida), inversión, restricción a abiertos y combinación. Se dice que \mathcal{H} está generado por un subconjunto $S \subset \mathcal{H}$ si cualquier elemento de \mathcal{H} se puede conseguir a partir de elementos de S usando las operaciones anteriores. La restricción de \mathcal{H} a un abierto $U \subset T$ es el pseudogrupo formado por los elementos de \mathcal{H} cuyos dominios e imágenes están contenidos en U .

Sean \mathcal{H} y \mathcal{H}' pseudogrupos sobre espacios T y T' , respectivamente. Se dice que \mathcal{H} y \mathcal{H}' son *equivalentes* cuando existe un pseudogrupo \mathcal{H}'' en $T \sqcup T'$ cuyas restricciones a T y T' son \mathcal{H} y \mathcal{H}' . Al conjunto Φ de elementos de \mathcal{H}'' con dominio en T e imagen en T' se denomina *equivalencia* de \mathcal{H} a \mathcal{H}' , y se usa la notación $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$. Se dice que una equivalencia $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ está *generada* por un subconjunto $S \subset \Phi$ si todos los elementos de Φ se pueden obtener a partir de los de S usando las operaciones de combinación y composición con elementos de \mathcal{H} y \mathcal{H}' .

Sea T una transversal completa de un espacio foliado X con estructura foliada \mathcal{F} ; la construcción siguiente es obviamente válida incluso cuando T es inmersa. Las transformaciones de holonomía entre abiertos suficientemente pequeños de T generan un pseudogrupo Γ_T sobre T . Esta definición es independiente del atlas foliado regular que se use para definir las transformaciones de holonomía. Además, distintas transversales completas, T y T' , dan lugar a pseudogrupos equivalentes; de hecho, $\Gamma_{T \sqcup T'}$ induce una equivalencia entre Γ_T y $\Gamma_{T'}$. A la clase de equivalencia de Γ_T , para cualquier transversal completa T , se le denomina *pseudogrupo de holonomía* de \mathcal{F} . El pseudogrupo de holonomía describe la dinámica transversa de \mathcal{F} , que es de gran importancia.

Para espacios medibles foliados no tiene sentido hablar de gérmenes de transformaciones de holonomía, puesto que las transversales sólo conservan estructura medible. Denotaremos por $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ el conjunto de todas las transversales de un espacio medible foliado. Una *transformación de holonomía medible* es un isomorfismo de Borel entre transversales

que mantienen la relación de las hojas; es decir, lleva puntos en cada hoja a puntos de esa misma hoja.

1.3. El espacio de hojas

Las hojas de una estructura foliada \mathcal{F} en un espacio X forman una partición. El correspondiente espacio cociente se denomina *espacio de hojas* y se denota por X/\mathcal{F} . La proyección $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{F}$ es una aplicación abierta [6]. Para un subconjunto $S \subset X$, el conjunto $\pi^{-1}(\pi(S))$ se denomina *saturación* de S , y es la unión de todas las hojas que cortan S ; también usaremos la notación $\text{sat}(S)$ para este conjunto. Las saturaciones de abiertos de X forman una topología denominada *saturada*, que es más gruesa que la topología de X (si $\dim \mathcal{F} > 0$).

La siguiente proposición inmediata muestra lo patológico que puede ser el espacio de hojas a poco que se complique la foliación (véase, por ejemplo, [8]).

Proposición 1.3.1 *Se cumplen las siguientes propiedades:*

- (a) *Las hojas densas pertenecen a todos los abiertos no vacíos de X/\mathcal{F} .*
- (b) *Si una hoja está en la clausura de las demás, entonces el único abierto de X/\mathcal{F} al que pertenece es el propio X/\mathcal{F} .*
- (c) *X/\mathcal{F} tiene la topología trivial si y sólo si todas las hojas son densas.*

A modo de ejemplo, los flujos de Krönecker en el toro con pendiente irracional son ejemplos de espacios foliados con todas las hojas densas y por tanto su espacio de hojas tiene la topología trivial. Los espacios foliados con todas sus hojas densas les llamaremos espacios foliados minimales. Esta definición pierde su sentido en espacios medibles foliados al perderse la estructura topológica transversa.

1.4. Medida transversa invariante

Definición 1.4.1 *Sea \mathcal{H} un pseudogrupo en un espacio T y Λ una medida de Borel en T . Se dice que Λ es invariante por \mathcal{H} si $\Lambda(h(B)) = \Lambda(B)$ para todo $h \in \mathcal{H}$ y todo boreliano $B \subset \text{dom } h$.*

El siguiente resultado es inmediato.

Proposición 1.4.2 *Sean \mathcal{H} y \mathcal{H}' pseudogrupos de transformaciones locales de espacios T y T' , respectivamente, y sea $\Phi : T \rightarrow T'$ una equivalencia. Para cualquier medida Λ en T invariante por \mathcal{H} , existe una única medida Λ' en T' invariante por \mathcal{H}' tal que $\Lambda'(\phi(B)) = \Lambda(B)$ para todo $\phi \in \Phi$ y todo boreliano $B \subset \text{dom } \phi$.*

En la situación de la Proposición 1.4.2, diremos que Λ' *corresponde* a Λ por Φ .

Observación 1.4.3 *De acuerdo a la Proposición 1.4.2, podemos hablar de una medida invariante en una clase de equivalencia de pseudogrupos refiriéndose a la medida invariante en cada representante y que correspondan entre sí por las respectivas equivalencias de pseudogrupos.*

Definición 1.4.4 *Una medida transversa invariante de un espacio foliado (X, \mathcal{F}) es una medida invariante en su pseudogrupo de holonomía. Haremos referencia a un espacio foliado con medida transversa invariante Λ mediante la terna $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$.*

Dada una medida transversa invariante Λ de un espacio foliado y una transversal completa T , usaremos la notación Λ_T para referirnos a la correspondiente medida en T .

Para el caso medible, usaremos una definición algo distinta.

Definición 1.4.5 *Una medida transversa invariante Λ para un espacio medible foliado (X, \mathcal{F}) es una aplicación σ -aditiva $\Lambda : \mathcal{T}(X, \mathcal{F}) \rightarrow [0, \infty]$ que es invariante por las transformaciones de holonomía medibles.*

Dado que disponemos de un functor de olvido, \mathcal{O} , que induce espacios medibles foliados a partir de espacios foliados, una cuestión que surge de modo natural es la coherencia entre ambas definiciones. En efecto, existe una correspondencia natural entre medidas transversas invariantes para un espacio foliado y medidas transversas invariantes para el espacio medible foliado inducido [10]. Por comodidad notaremos a esta correspondencia por \mathcal{O} .

1.5. Homotopía integrable y categoría tangente

Las definiciones y los resultados que a continuación se exponen pueden encontrarse en [24] o [8].

Definición 1.5.1 *Sean (X, \mathcal{F}) e (Y, \mathcal{G}) espacios foliados. Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ se dice que es foliada si lleva hojas en hojas. En este caso se usará la notación $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$, o simplemente $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ si no hay lugar a confusión. Tal aplicación foliada induce una aplicación continua entre los correspondientes espacios de hojas, $\bar{f} : X/\mathcal{F} \rightarrow Y/\mathcal{G}$.*

Sea (X, \mathcal{F}) un espacio foliado. Consideramos en $X \times \mathbb{R}$ la estructura foliada $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ con hojas $L \times \mathbb{R}$, donde L recorre las hojas de \mathcal{F} . Si T es una transversal completa de \mathcal{F} , entonces $T \times \{t\} \equiv T$ es una transversal completa de $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$, y el representante del pseudogrupo de holonomía de $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ en $T \times \{t\}$ se identifica con el de \mathcal{F} en T . De esta forma, las medidas transversas invariantes de \mathcal{F} se pueden interpretar también como medidas transversas invariantes de $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$.

Definición 1.5.2 *Se dice que dos aplicaciones foliadas $f, g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ son integrablemente homótopas si existe una aplicación foliada $H : \mathcal{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ que es homotopía entre f y g . Diremos que H es una homotopía integrable entre f y g .*

Ser integrablemente homótopas es una relación de equivalencia.

Definición 1.5.3 *Se dice que una aplicación foliada $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es una equivalencia de homotopía integrable si existe una aplicación foliada $g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $f \circ g$ y $g \circ f$ son integrablemente homótopas a las correspondientes aplicaciones identidades.*

Los homeomorfismos foliados son equivalencias de homotopía integrables. Es inmediato que la equivalencia de homotopía integrable es una relación de equivalencia entre espacios foliados. También es evidente que aplicaciones foliadas integrablemente homótopas inducen la misma aplicación entre los correspondientes espacios de hojas. Por tanto una equivalencia de homotopía integrable induce un homeomorfismo entre los correspondientes espacios de hojas.

Proposición 1.5.4 (Álvarez, Masa [1]) *Sea $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ una equivalencia de homotopía integrable. Entonces, para cualquier transversal completa T de \mathcal{F} , la restricción $f : T \rightarrow Y$ es una transversal completa de \mathcal{G} , y además \mathcal{G} induce en T el mismo representante del pseudogrupo de holonomía que \mathcal{F} .*

En la situación de la Proposición 1.5.4, cualquier medida transversa invariante Λ de \mathcal{G} se puede considerar como una medida en T invariante por el representante del pseudogrupo de holonomía de \mathcal{G} definido por la transversal completa inmersa $f : T \rightarrow Y$. Como ese pseudogrupo coincide con el representante del pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F} en T , podemos también considerar Λ como una medida transversa invariante de \mathcal{F} , que denotaremos por $f^*\Lambda$, y la denominaremos *imagen recíproca* o *pullback* de Λ por f . Notamos que si f es una equivalencia por homotopía integrable y g es su inversa homotópica entonces $\Lambda = (g \circ f)^*\Lambda = g^*f^*\Lambda$.

Observación 1.5.5 *En lo sucesivo, siempre que hablemos de una equivalencia por homotopía integrable entre espacios foliados con medida transversa invariante, entenderemos que las medidas están relacionadas por imagen recíproca vía la equivalencia en cuestión.*

En cada abierto U de un espacio foliado (X, \mathcal{F}) se tiene una estructura foliada \mathcal{F}_U , denominada *restricción* de \mathcal{F} a U , cuyas hojas son las componentes conexas de las intersecciones de las hojas de \mathcal{F} con U .

Definición 1.5.6 (Macías, Colman Vale [24, 8]) *Un abierto U de un espacio foliado (X, \mathcal{F}) se dice que es tangencialmente categórico o \mathcal{F} -categórico si la aplicación inclusión $U \hookrightarrow X$ es integrablemente homotopa a una aplicación que es constante en cada hoja de \mathcal{F}_U . Una homotopía integrable que cumpla estas condiciones se dice que es una \mathcal{F} -contracción por homotopía integrable. Se llama categoría tangente de \mathcal{F} , denotada por*

$\text{Cat}(\mathcal{F})$, al menor número de abiertos \mathcal{F} -categóricos que cubren X ; si no hay ningún recubrimiento finito de este tipo diremos que $\text{Cat}(\mathcal{F}) = \infty$.

Observación 1.5.7 *La categoría tangente es una extensión de la categoría LS clásica. La definición es análoga tomando homotopías integrables en vez de las homotopías usuales.*

Es claro que una carta foliada es un abierto \mathcal{F} -categórico y por tanto el número de cartas foliadas de un atlas es una cota superior para la categoría tangente; en particular, la categoría tangente es finita si el espacio es compacto. Presentamos algunos resultados básicos referentes a la categoría tangente que podemos encontrar en [8]:

Proposición 1.5.8 *Se tiene:*

- (a) $\text{Cat}(\mathcal{F})$ es un invariante de equivalencias de homotopía integrable.
- (b) Si $\text{Cat}(\mathcal{F}) = 1$, entonces todas las hojas son cerradas y contráctiles.
- (c) Para cualquier hoja L se tiene que $\text{Cat}(L) \leq \text{Cat}(\mathcal{F})$.

La siguiente proposición, que será relevante para el Capítulo 4, nos da una idea de la buena estructura de los abiertos tangencialmente categóricos.

Proposición 1.5.9 (Singhof, Vogt [37]) *Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión m y codimensión n de una variedad M , sea U un abierto \mathcal{F} -categórico de M , sea $x \in U$, y sea $D \subset U$ una variedad transversa de dimensión n cuyo interior contiene a x . Entonces existe un entorno E de x en D tal que cada hoja de \mathcal{F}_U interseca a E a lo sumo en un punto.*

La proposición anterior también es cierta en el contexto de espacios foliados.

1.6. Homotopía medible y categoría tangente medible

Esta sección nace con el interés de adaptar todo lo anterior al contexto de espacios medibles foliados. Observamos que los espacios medibles foliados son, como espacios medibles, espacios de Borel estándar pues son una unión numerable de cartas medibles foliadas (que son espacios estándar).

Sean (X, \mathcal{F}) e (Y, \mathcal{G}) espacios de Borel foliados. Una MT-aplicación $f : X \rightarrow Y$ lleva hojas en hojas, pues lleva componentes conexas en componentes conexas por ser continua. En consecuencia induce una aplicación entre los correspondientes espacios de hojas, $\bar{f} : X/\mathcal{F} \rightarrow Y/\mathcal{G}$.

Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible foliado. Consideramos en $X \times \mathbb{R}$ la estructura medible foliada dada por el atlas $\mathcal{F} \times \mathbb{R} = \{(\mathbb{R} \times U_i, \text{id} \times \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, donde $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es el atlas que da la estructura medible foliada a (X, \mathcal{F}) . El espacio $X \times \mathbb{R}$ tiene hojas de la forma $L \times \mathbb{R}$

donde L es una hoja para \mathcal{F} . La proyección $\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ es una MT-aplicación. Usando la Proposición 1.1.5, obtenemos que $\pi(T) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ para toda $T \in \mathcal{T}(X \times \mathbb{R}, \mathcal{F} \times \mathbb{R})$. De hecho, existe una partición numerable en borelianos, $T = \bigcup_i T_i$, tal que cada $\pi|_{T_i}$ es inyectiva. De esta forma, si Λ es una medida transversa invariante de \mathcal{F} podemos obtener una aplicación σ -aditiva en $\mathcal{T}(X \times \mathbb{R}, \mathcal{F} \times \mathbb{R})$, definiendo $\Lambda(T) = \sum_i \Lambda(\pi(T_i))$. Es fácil probar que esta definición no depende de la partición escogida y que es invariante por transformaciones de holonomía medible (la prueba es análoga a la que se ve posteriormente en la Proposición 1.6.3). Por tanto una medida transversa invariante para \mathcal{F} induce una medida transversa invariante para $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$.

Definición 1.6.1 *Se dice que dos MT-aplicaciones $f, g : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ son mediblemente homótopas si existe una MT-aplicación $H : (X \times \mathbb{R}, \mathcal{F} \times \mathbb{R}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ tal que $H(-, 0) = f$ y $H(-, 1) = g$. Diremos que H es una homotopía medible entre f y g .*

Ser mediblemente homótopas es una relación de equivalencia.

Definición 1.6.2 *Se dice que una MT-aplicación $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ es una equivalencia de homotopía medible si existe una MT-aplicación $g : (Y, \mathcal{G}) \rightarrow (X, \mathcal{F})$ tal que $f \circ g$ y $g \circ f$ son mediblemente homótopas a las correspondientes aplicaciones identidades.*

Es inmediato que la equivalencia de homotopía medible es una relación de equivalencia entre espacios medibles foliados. También es evidente que MT-aplicaciones mediblemente homótopas inducen la misma aplicación entre los correspondientes espacios de hojas. Por tanto una equivalencia de homotopía medible induce una biyección entre los correspondientes espacios de hojas.

Sea $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ una equivalencia de homotopía medible entre espacios medibles foliados y sea Λ una medida transversa invariante para \mathcal{G} . Sea T una transversal de \mathcal{F} , como la aplicación inducida en los espacios de hojas es biyectiva obtenemos que $f|_T$ tiene fibras numerables y, usando la Proposición 1.1.5, obtenemos que $f(T)$ es transversal para \mathcal{G} . De hecho, existe una partición numerable en borelianos, $T = \bigcup_i T_i$, donde $f|_{T_i}$ es inyectiva. Definimos $f^*\Lambda(T) = \sum_i \Lambda(f(T_i))$.

Proposición 1.6.3 *La aplicación $f^*\Lambda$ está bien definida y es una medida transversa invariante para (X, \mathcal{F}) .*

Demostración:

Primero comprobaremos que la definición no depende de la elección de la partición numerable boreliana escogida. Sea $T \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ y sean $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, particiones cumpliendo las condiciones de la Proposición 1.1.5 para $f|_T$. Tomamos a continuación la familia $\{T_i \cap S_j\}_{i, j \in \mathbb{N}}$, que es una partición boreliana y numerable de T . Cada $f(T_i \cap S_j)$ es una

transversal para \mathcal{G} y puesto que cada $f|_{T_i}$ y cada $f|_{S_i}$ son inyectivas obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_i \Lambda(f(T_i)) &= \sum_i \Lambda(f(\bigcup_j (T_i \cap S_j))) \\
&= \sum_i \Lambda(\bigcup_j f(T_i \cap S_j)) \\
&= \sum_{i,j} \Lambda(f(T_i \cap S_j)) \\
&= \sum_j \Lambda(\bigcup_i f(T_i \cap S_j)) \\
&= \sum_j \Lambda(f(\bigcup_i (T_i \cap S_j))) \\
&= \sum_j \Lambda(f(S_j)) .
\end{aligned}$$

Comprobemos que $f^*\Lambda$ es σ -aditiva, sea $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia numerable y disjunta de transversales. La unión numerable de transversales es una transversal. Por definición, $f^*\Lambda(\bigsqcup_i T_i) = \sum_{i,j} \Lambda(f(S_{i,j}))$, donde cada familia $\{S_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una partición boreliana numerable de cada T_i en las condiciones de la Proposición 1.1.5. La unión de estas familias nos da una partición boreliana numerable de la unión de estas transversales y que cumple las condiciones requeridas. Naturalmente $\sum_{i,j} \Lambda(f(S_{i,j})) = \sum_i f^*\Lambda(T_i)$, que es lo que se quería probar.

Finalmente, sea $\gamma : T \rightarrow T'$ una transformación de holonomía medible. Debemos probar que $f^*\Lambda(T) = f^*\Lambda(T')$. Tomamos particiones borelianas numerables $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{T'_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de T y T' y en las condiciones de la Proposición 1.1.5 para $f|_T$ y $f|_{T'}$ respectivamente. Tomamos la familia $\{T_i \cap \gamma^{-1}(T'_j)\}_{i,j \in \mathbb{N}}$, que forma a su vez una partición boreliana de T válida para calcular $f^*\Lambda(T)$. Dado que γ conserva puntos en las mismas hojas y f aplica biyectivamente hojas en hojas, tenemos que las aplicaciones $f \circ \gamma \circ f^{-1}|_{f(T_i \cap \gamma^{-1}(T'_j))}$ son isomorfismos de Borel que llevan puntos a puntos en las mismas hojas. Es decir, son transformaciones de holonomía medibles en \mathcal{G} entre $f(T_i \cap \gamma^{-1}(T'_j))$ y $f(\gamma(T_i) \cap T'_j)$ y por tanto tienen la misma Λ -medida, pues Λ es invariante. Para terminar la demostración sólo hay que observar que la familia $\{\gamma(T_i) \cap T'_j\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ es válida para calcular $f^*\Lambda(T')$. \square

Proposición 1.6.4 *La imagen recíproca no depende de la equivalencia por homotopía medible escogida; es decir, si $f : X \rightarrow Y$ y $h : X \rightarrow Y$ son dos equivalencias por homotopía medible, entonces $f^*\Lambda = h^*\Lambda$.*

Demostración:

Tomamos una transversal T , y $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\{T'_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dos particiones borelianas de T en las condiciones de la Proposición 1.1.5 para f y h respectivamente. La familia $\{T_i \cap T'_j\}_{i,j \in \mathbb{N}}$

está en las condiciones requeridas para T respecto de f y h simultáneamente. La proposición queda probada observando que $\Lambda(f(T_i \cap T'_j)) = \Lambda(h(T_i \cap T'_j))$, $i, j \in \mathbb{N}$, puesto que son transversales en Y que se relacionan por una transformación de holonomía medible. \square

Definición 1.6.5 (Imagen recíproca medible) *La medida transversa invariante $f^*\Lambda$ se llamará imagen recíproca de la medida transversa invariante Λ respecto de la equivalencia f .*

Es un ejercicio sencillo comprobar que este pullback es natural en el siguiente sentido. Ya hemos visto que el functor de olvido \mathcal{O} induce una correspondencia entre medidas transversas invariantes. También es obvio que espacios foliados equivalentes por homotopía integrable inducen espacios de Borel foliados equivalentes por homotopía medible. Entonces la imagen recíproca topológica y medible están en correspondencia, es decir, $\mathcal{O}(f^*\Lambda) = \mathcal{O}(f)^*(\mathcal{O}(\Lambda))$.

Notamos que si f es una equivalencia por homotopía medible y g es una inversa homotópica suya, entonces $\Lambda = (g \circ f)^*\Lambda = f^*g^*\Lambda$.

Observación 1.6.6 *En lo sucesivo, siempre que hablemos de una equivalencia por homotopía medible entre espacios foliados con medida transversa invariante, entenderemos que las medidas están relacionadas por imagen recíproca vía la equivalencia en cuestión.*

En cada abierto medible U de un espacio medible foliado (X, \mathcal{F}) se tiene una estructura medible foliada \mathcal{F}_U , denominada *restricción* de \mathcal{F} a U , cuyas hojas son las componentes conexas de las intersecciones de las hojas de \mathcal{F} con U . Para obtener un atlas numerable para esta estructura foliada no hay más que usar el Teorema 1.1.6, aplicándolo a la intersección de U con cada carta medible foliada de \mathcal{F} .

Definición 1.6.7 *Un abierto U de un espacio de Borel foliado (X, \mathcal{F}) se dice que es mediblemente tangencialmente categórico ó \mathcal{F} -categórico si la MT-aplicación inclusión $(U, \mathcal{F}_U) \hookrightarrow (X, \mathcal{F})$ es mediblemente homótropa a una MT-aplicación que es constante en cada hoja de \mathcal{F}_U . Una homotopía medible que cumpla estas condiciones se dice que es una \mathcal{F} -contracción por homotopía medible. Se llama categoría tangente medible de \mathcal{F} , denotada por $\text{Cat}(\mathcal{F})$, al menor número de abiertos \mathcal{F} -categóricos que cubren X ; si no hay ningún recubrimiento finito de este tipo diremos que $\text{Cat}(\mathcal{F}) = \infty$.*

Observación 1.6.8 *Es importante en adelante no confundir los invariantes topológicos y medibles en la notación. Si hablamos de un espacio foliado, $\text{Cat}(\mathcal{F})$ siempre hace referencia a la categoría tangente topológica, si queremos hacer referencia a la categoría tangente medible usaremos la notación $\text{Cat}(\mathcal{O}(\mathcal{F}))$. Del mismo modo podemos usar la notación $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ -categórico para un abierto mediblemente tangencialmente categórico en un espacio medible foliado inducido por un espacio foliado. También usaremos Cat_{Top} y Cat_{Med} cuando no hagamos referencia a un espacio (medible) foliado en concreto.*

Es claro que una carta medible foliada es un abierto \mathcal{F} -categórico y por tanto el número de cartas medibles foliadas de un atlas es una cota superior para la categoría tangente medible. Adaptamos algunos resultados.

Proposición 1.6.9 *Se tiene:*

- (a) Cat_{Med} es invariante por equivalencia de homotopía medible.
- (b) Si $\text{Cat}(\mathcal{F}) = 1$, entonces todas las hojas son contráctiles.
- (c) Para cualquier hoja L se tiene que $\text{Cat}(L) \leq \text{Cat}(\mathcal{F})$.

Demostración:

La demostración de (a) es sencilla. Sea U un abierto medible \mathcal{G} -categórico, H una contracción por homotopía medible para U , f una equivalencia por homotopía medible entre (X, \mathcal{F}) y (Y, \mathcal{G}) , g una inversa homotópica y F una homotopía medible que lleva $g \circ f$ en la MT-aplicación identidad. Tomamos la homotopía medible

$$G = g \circ H \circ f \times \text{id} : f^{-1}(U) \times I \rightarrow U \times I \rightarrow Y \rightarrow X .$$

Esta homotopía medible no es necesariamente una \mathcal{F} -contracción, tomamos a continuación la homotopía medible $K : f^{-1}(U) \times I \rightarrow X$ definida como

$$K(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que K es una contracción por homotopía medible para $f^{-1}(U)$.

El apartado (b) es trivial. Realmente la parte no trivial de la Proposición 1.5.8 es el carácter cerrado de las hojas, algo que ahora no tiene sentido pues hemos perdido la topología ambiente en el caso de los espacios de Borel foliados.

El apartado (c) es, curiosamente, más sencillo de probar que en el caso topológico. Un recubrimiento por abiertos \mathcal{F} -categóricos induce necesariamente un recubrimiento por abiertos categóricos en cada hoja, lo cual implica este resultado. En el caso topológico existe una dificultad añadida pues la topología de una hoja como variedad puede no coincidir con la topología como subespacio del espacio foliado. \square

Proposición 1.6.10 *Sea (X, \mathcal{F}) un espacio foliado. Se tiene*

$$\text{Cat}(\mathcal{O}(\mathcal{F})) \leq \text{Cat}(\mathcal{F}) .$$

Demostración:

Las dificultades de la demostración recaen en el hecho de que una contracción por homotopía integrable, al restringirnos a una hoja, es continua respecto de la topología relativa de esa hoja en el espacio ambiente. Debemos probar que es continua respecto a la topología de

las hojas, lo cual nos dará una contracción por homotopía medible, con lo que terminamos la demostración.

Para ello L denotará a una hoja de \mathcal{F} con la topología de variedad. Démonos cuenta de que X con la topología de las hojas es homeomorfo a la suma topológica de sus hojas, por lo que es suficiente probar la continuidad hoja a hoja. Denotaremos por (L, τ_r) a una hoja con la topología inducida como subespacio de X , que es más gruesa que la topología de variedad. Es decir, $\bar{\text{id}} : L \rightarrow (L, \tau_r)$ es continua pero no necesariamente un homeomorfismo.

Si U es abierto en X tangencialmente categórico, $U \cap L$ es abierto en cada hoja L (y también en cada espacio (L, τ_r)) y es también un boreliano, por tanto es abierto y medible en el espacio medible foliado $\mathcal{O}(X, \mathcal{F})$. Sea $H : U \times I \rightarrow X$ una contracción por homotopía integrable, obviamente $H : (U \cap L, \tau_r) \times I \rightarrow (L, \tau_r)$ es continua. También es continua $H \circ (\bar{\text{id}} \times \text{id}) : (U \cap L) \times I \rightarrow (L, \tau_r)$ por lo dicho hasta ahora. Ahora remarcamos una propiedad interesante que cumple la aplicación $\bar{\text{id}}$. Si Z es un espacio topológico localmente conexo, entonces $f : Z \rightarrow (L, \tau_r)$ es continua si y sólo si $\bar{\text{id}}^{-1} \circ f : Z \rightarrow L$ es continua. Una de las implicaciones es trivial. Para la otra implicación sólo hay que usar entornos conexos suficientemente pequeños como para que sus imágenes por f estén contenidos en abiertos de la forma $U \cap L$, donde U es una carta foliada. Por conexidad, necesariamente estarán contenidos en placas, que son las que nos dan la topología de las hojas. \square

En definitiva, el estudio de la categoría tangente medible tiene interés en espacios foliados, pues nos da una cota inferior de la categoría tangente topológica. En el caso topológico si dos transversales se corresponden por holonomía existe un tubo de caminos foliados que las conecta. Se deduce de esto que existe una homotopía integrable que lleva una transversal en la otra. La cuestión que trataremos es probar esta proposición para espacios medibles foliados que admiten atlas regulares. Realizaremos la demostración partida en varios lemas.

Lema 1.6.11 *Sea $\mathbb{R}^n \times T$ donde T es un espacio de Borel estándar y consideramos sobre él la estructura de MT -espacio usual, sea $\pi : \mathbb{R}^n \times T \rightarrow T$ la proyección canónica. Sea S una transversal que corta a cada placa de $\mathbb{R}^n \times T$ en un punto a lo sumo. Existe una homotopía medible $H : S \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \times T$ tal que $H(s, 0) = s$ y $H(s, 1) = (0, \pi(s))$.*

Demostración:

Consideramos la homotopía medible

$$G : (\mathbb{R}^n \times T) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \times T, ((v, t), s) \mapsto ((1-s)v, t).$$

La homotopía buscada es $H = G|_{S \times I}$. \square

Corolario 1.6.12 *Sean T, T' dos transversales de una carta medible foliada U tales que corten a las mismas placas y a todas ellas en un punto. Entonces existe una homotopía medible $H : T \times I \rightarrow U$ tal que $H(t, 0) = t$ y $H(t, 1) = T' \cap P_t$ donde P_t es la placa que pasa por $t \in T$.*

Lema 1.6.13 Sean (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) dos cartas medibles foliadas de un atlas medible foliado con intersección no vacía. Suponemos que cada placa de U_i corta a lo sumo a una placa de U_j y viceversa. Entonces existe una transversal $S \subset U_i \cap U_j$ tal que cada placa de U_i y de U_j que corta a $U_i \cap U_j$ contiene un sólo punto de S . Además, ninguna otra placa corta a S .

Demostración:

Usamos el Teorema 1.1.6 en $U_i \cap U_j$. Obtenemos así una transversal $T \subset U_i \cap U_j$ que únicamente tiene intersección no vacía con las placas de U_i y U_j que cortan a $U_i \cap U_j$. Sea $\pi_i : U_i \rightarrow T_i$ una aplicación cociente local, donde T_i es una transversal asociada a la carta U_i . Si usamos la Proposición 1.1.5 a la aplicación $\pi_i|_T : T \rightarrow T_i$, obtenemos una sección medible $s : \pi_i(T) \rightarrow T$. La transversal $s(\pi_i(T))$ cumple las condiciones del lema. \square

Definición 1.6.14 Una cadena de cartas de un atlas $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión finita $\mathcal{C} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_n})$ tal que $U_{i_j} \cap U_{i_{j+1}} \neq \emptyset$. Diremos que una cadena \mathcal{C} recubre a un camino $c : I = [0, 1] \rightarrow X$ si $c(I) \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$ y existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de I tal que $c([t_{j-1}, t_j]) \subset U_{i_j}$.

Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible foliado que admite un atlas medible foliado regular. Sea $c : I \rightarrow X$ un camino contenido en una hoja. Al igual que en el caso topológico, a partir de una cadena de cartas $\mathcal{C} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_n})$ que recubre a $c(I)$ tenemos definida una transformación de holonomía medible $h_{\mathcal{C}}$ definida entre transversales (con dominio no trivial) que contienen a $c(0)$ y a $c(1)$.

Lema 1.6.15 Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible foliado que admite un atlas medible foliado regular. Sea $c : I \rightarrow X$ un camino contenido en una hoja. Sea $\mathcal{C} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_n})$ una cadena de cartas que recubre a $c(I)$ y $h_{\mathcal{C}}$ la transformación de holonomía inducida definida entre transversales que contienen a $c(0)$ y a $c(1)$. Sea T el dominio de $h_{\mathcal{C}}$, entonces existe una homotopía medible $H : T \times I \rightarrow X$ tal que $H(t, 0) = c(0)$ y $H(t, 1) = h_{\mathcal{C}}(t)$.

Demostración:

Por el Lema 1.6.13 existen $n - 1$ transversales S_1, \dots, S_{n-1} tales que $S_k \subset U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}}$ y que cortan únicamente a las placas que cortan a estas intersecciones y en un sólo punto. Usando el Corolario 1.6.12 sucesivas veces obtenemos la homotopía medible buscada. \square

Lema 1.6.16 (Tubo medible de caminos foliados) Sea $h : T \rightarrow T'$ una transformación de holonomía medible entre dos transversales T, T' de un espacio medible foliado (X, \mathcal{F}) que admite un atlas medible foliado regular. Entonces existe una homotopía medible $H : T \times I \rightarrow X$ tal que $H(t, 0) = t$ y $H(t, 1) = h(t)$.

Demostración:

Claramente, usando la Proposición 1.1.5, nos podemos restringir al caso en que cada transversal, T y T' , está contenida en una transversal asociada a una carta de un atlas medible foliado y regular. Observamos que existe una cantidad numerable de cadenas de cartas que recubran caminos en hojas que conecten puntos de T y T' ; denotaremos a las transformaciones de holonomía medible inducidas por $\{h_1, \dots, h_n, \dots\}$. Tomamos ahora los borelianos de T definidos como

$$B_n = \{t \in T \mid h_n(t) = h(t)\}.$$

Convertimos esta familia en una familia disjunta tomando $C_1 = B_1$ y recursivamente $C_n = B_n \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_{n-1})$, $n > 1$. Estas transversales forman una partición de T y, por el Lema 1.6.15, todas ellas admiten una homotopía medible $H^i : C_i \times I \rightarrow X$ tal que $H^i(t, 0) = t$ y $H^i(t, 1) = h_i(t) = h(t)$. Los borelianos $H^i(C_i, 1)$ forman una partición de T' , pues h es una biyección. Todas estas homotopías combinadas nos dan la homotopía buscada. \square

1.7. Ejemplos de espacios foliados

Nos centramos aquí en la presentación de ciertas clases de espacios foliados que modelan una gran cantidad de situaciones prácticas.

1.7.1. Foliaciones Riemannianas

Comenzamos con una introducción a una importante clase de foliaciones, denominadas Riemannianas (véase, por ejemplo, [26, 27, 33]).

Definición 1.7.1 *Una estructura Riemanniana transversa de una foliación transversalmente C^∞ es una métrica de Riemann invariante en su pseudogrupo de holonomía. Una foliación dotada de una estructura Riemanniana transversa invariante se dice que es Riemanniana.*

Observación 1.7.2 *Como en el caso de las medidas transversas invariantes, no importa el representante del pseudogrupo de holonomía en el que se considere la métrica Riemanniana invariante.*

Toda foliación Riemanniana tiene una medida transversa invariante C^∞ definida por el elemento de volumen de su estructura Riemanniana transversa.

La importancia de las foliaciones Riemannianas radica en que admiten una descripción geométrica muy útil debida a P. Molino [26, 27, 28].

1.7.2. Foliaciones de Lie

Sea G un grupo de Lie simplemente conexo. Se dice que una foliación es de *Lie* con *grupo estructural* G si su pseudogrupo de holonomía se puede representar por el pseudogrupo en G generado por las traslaciones a la izquierda por los elementos de algún subgrupo. Considerando una métrica Riemanniana en G invariante por la izquierda, se sigue que toda foliación de Lie es Riemanniana. Además son la pieza clave en la descripción geométrica de las Riemannianas. Por su parte, las foliaciones de Lie también tienen una descripción geométrica debida a E. Fedida [16, 17].

1.7.3. Espacios foliados por hojas compactas

Los espacios foliados por hojas compactas tienen un gran interés en la teoría de espacios foliados, puesto que pese a la buena estructura de sus hojas pueden tener interesantes propiedades dinámicas, en ocasiones muy patológicas. Referencias interesantes sobre estos espacios foliados son [13], [12], [38] o [5]. Dentro de los espacios foliados por hojas compactas, aquellos cuyo espacio de hojas es Hausdorff tienen muy buenas propiedades; los llamaremos espacios foliados *compacto-Hausdorff*.

La siguiente caracterización es bien conocida y fácil de probar (véase *e.g.* [6, 38]).

Proposición 1.7.3 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una variedad foliada (X, \mathcal{F}) :*

- a) \mathcal{F} es *compacta-Hausdorff*.
- b) \mathcal{F} tiene todas sus hojas compactas y los grupos de holonomía en cada hoja son finitos.

Ejemplo 1 *El resultado anterior no es cierto para espacios foliados. Consideramos el subespacio de $S \subset \mathbb{R}^2$ definido por*

$$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, 0)\}.$$

*Denotamos por S_n el círculo de radio $\frac{1}{n}$. Definimos la transformación $f : S \rightarrow S$ donde $f|_{S_n} : S_n \rightarrow S_n$ es una rotación de ángulo $\frac{2\pi}{n}$ y $f(0, 0) = (0, 0)$. La suspensión de este homeomorfismo, $\mathbb{R} \times_f S$ (ver Sección 1.7.4), es un espacio foliado *compacto-Hausdorff* como se comprueba fácilmente. Sin embargo la holonomía de la hoja que pasa por $(0, 0)$ no es finita.*

Proposición 1.7.4 ([13]) *Sea (X, \mathcal{F}) un espacio foliado con todas las hojas compactas y sea $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ la aplicación cociente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) \mathcal{F} es *compacta-Hausdorff*.
- b) π es una aplicación cerrada.

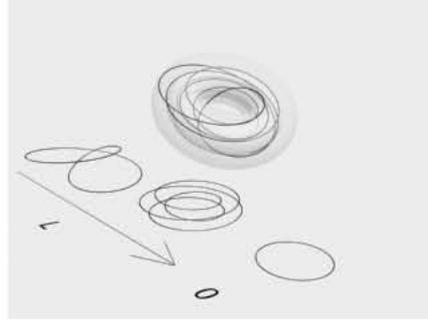


Figura 1.1: Visualización del ejemplo 1. Las hojas tienen una longitud cada vez mayor a medida que se aproximan a la hoja central.

- c) Cada hoja tiene una base de entornos saturados.
- d) La saturación de un compacto es un compacto.

Además para el caso de variedades foliadas disponemos de un resultado especialmente bueno.

Proposición 1.7.5 (Véase e.g. [8]) *Toda foliación compacta-Hausdorff C^∞ es riemanniana.*

Observación 1.7.6 *La situación local en un espacio foliado compacto-Hausdorff se puede resumir del siguiente modo:*

Afirmación 1 *Toda hoja admite un entorno homeomorfo a una suspensión (ver Sección 1.7.4) de una acción del grupo de holonomía de dicha hoja en una transversal local.*

En espacios foliados por hojas compactas no necesariamente con cociente Hausdorff, un objetivo de importancia es detectar el conjunto de hojas donde la holonomía no es trivial. Para ello se usa el concepto de *función de volumen*.

Definición 1.7.7 ([13]) *Una función de volumen es una aplicación, no necesariamente continua, $\nu : X/\mathcal{F} \rightarrow (0, \infty)$ para la cual existe un atlas foliado localmente finito de (X, \mathcal{F}) , $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\varphi_i : U_i \rightarrow D_i \times Z_i$, que cumple:*

- (a) *Para cada $i \in \mathbb{N}$, existe una función continua $\nu_i : Z_i \rightarrow [0, \infty)$ tal que $Z'_i = \{w \in Z_i \mid \nu_i(w) > 0\}$ tiene clausura compacta en Z_i .*
- (b) *Los abiertos $\varphi_i^{-1}(D_i \times Z'_i)$ recubren X .*
- (c) $\nu(L) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{v \in (L \cap \varphi_i^{-1}(Z_i))} \nu_i(\varphi(v))$.

Una función de volumen puede extenderse a X tomando $\bar{\nu}(x) = \nu(L_x)$ donde L_x es la hoja que pasa por x . Por definición, ν es invariante en las hojas. Observamos que $\nu(L) > 0$ para toda hoja L . También observamos que esta definición se podría extender a espacios foliados con hojas no compactas, en este caso las funciones ν_i deben cumplir ciertas condiciones si queremos mantener un volumen finito en las hojas no compactas.

La función de volumen es una buena herramienta para estudiar la dinámica transversa como muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.7.8 ([13]) *Sea (X, \mathcal{F}) un espacio foliado y L una hoja compacta. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (i) *Para alguna función de volumen ν y algún entorno N de L , $\nu|_N$ está acotada.*
- (ii) *Existe un entorno de L donde toda función de volumen está acotada.*
- (iii) *El grupo de holonomía de L es finito.*

Proposición 1.7.9 *Los puntos de continuidad de cualquier función de volumen $\nu : X \rightarrow [0, \infty)$ sobre un espacio foliado por hojas compactas es un abierto denso, invariante y con todas sus hojas con holonomía trivial.*

Observación 1.7.10 *La demostración de estos resultados es una consecuencia directa del siguiente lema debido a Epstein [13].*

Lema 1.7.11 (Epstein [13]) *Sea X un espacio foliado con una hoja compacta \mathcal{F} , y sea n un número entero. Sea ν una función de volumen en X . Entonces, dado un entorno B de L existe un conjunto finito de cartas foliadas $(U_i, \varphi_i)_{i=1}^k$ y un entorno N de L con $N \subset \bigcup_{i=1}^k U_i \subset B$ y tal que toda hoja P cortando N satisface una de las dos condiciones siguientes*

- (i) $\nu P > n \cdot \nu L$,
- (ii) *para algún entero r con $1 \leq r \leq n$, $|\nu P - r \cdot \nu L| < \frac{1}{n}$ y P es una hoja compacta contenida en $\bigcup_{i=1}^k U_i$ y corta a cada U_i en exactamente r placas.*

Demostración:

[Demostración de la Proposición 1.7.9] Siguiendo la notación del Lema 1.7.11, los puntos de continuidad de ν son precisamente la reunión de las hojas L tales que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un entorno N de L donde toda hoja que corta a N cumple la condición (ii) con $r = 1$. De esto se sigue que estas hojas tienen holonomía trivial, pues admiten entornos transversos donde cada hoja corta en a lo sumo un punto. Recíprocamente, es fácil probar, a partir de la definición de función de volumen, que las hojas con holonomía trivial son conjuntos donde se da la continuidad de dicha función. Los puntos con holonomía trivial forman un abierto, pues admiten un entorno de hojas con holonomía trivial. La densidad

de este conjunto se puede deducir del Lema 1.7.11, pero es conocido que en cualquier espacio foliado el conjunto de hojas con holonomía trivial es residual y por tanto denso [6]. \square

1.7.4. Suspensiones

En el ejemplo que ahora tratamos tenemos una transversal total y el pseudogrupo de holonomía está generado por un grupo de homeomorfismos globales. Todo lo aquí comentado puede encontrarse en [6].

Sea M una variedad de dimensión m , sea S un espacio metrizable, localmente compacto y separable y sea $h : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \text{Homeo}(S)$ un homomorfismo. Si \widetilde{M} es la cubierta universal de M , consideramos la acción φ de $\pi_1(M, x_0)$ sobre el producto $\widetilde{M} \times S$ dada por:

$$\varphi(g, (x, y)) = (xg^{-1}, h(g)(y)) .$$

Denotamos por $\widetilde{M} \times_h S$ el espacio de órbitas de esa acción que es un espacio Hausdorff, metrizable y segundo numerable. La aplicación $p : \widetilde{M} \times_h S \rightarrow M$ inducida por la proyección $\widetilde{M} \times S \rightarrow M$ es un fibrado localmente trivial de fibra S . La proyección en el segundo factor, $\widetilde{M} \times S \rightarrow S$, induce una foliación \mathcal{F} en $\widetilde{M} \times_h S$ que se llama *suspensión* del homomorfismo h . Esta foliación es transversa al fibrado dado por p y sus hojas son cubiertas de la variedad M .

Un abierto $U \subset M$ se dice que es un *abierto de trivialidad* para la suspensión si existe un homeomorfismo foliado $f : p^{-1}(U) \rightarrow U \times S$ tal que $\pi_1 \circ f = p$, donde $\pi_1 : U \times S \rightarrow U$ es la proyección en el primer factor. Recordemos que si $U \subset M$ es un abierto simplemente conexo, entonces es un abierto de trivialidad para p .

A S le llamaremos *fibra* de la suspensión y a M le llamaremos *base*.

1.8. Ejemplos de MT-espacios

1.8.1. Espacios medibles y espacios topológicos

Los ejemplos más sencillos de MT-espacios son los espacios topológicos y los espacios medibles. En el caso de espacios medibles tomamos la topología discreta, de manera que aplicaciones medibles se transforman en aplicaciones continuas y, por tanto, son también MT-aplicaciones. En el caso de espacios topológicos, podemos usar la σ -álgebra dada por sus borelianos, de manera que todas las aplicaciones continuas pasan a ser medibles y, por tanto, MT-aplicaciones.

1.8.2. Una generalización de espacios medibles foliados

Para la definición de espacios medibles foliados usábamos cartas medibles foliadas de forma $\mathbb{R}^n \times T$, donde T es un espacio de Borel estándar. Una pequeña generalización puede

conseguirse usando cartas medibles foliadas con MT-espacios de la forma $P \times T$ donde T es un espacio medible estándar y P es un espacio polaco, conexo y localmente conexo por caminos. La σ -álgebra tomada es la generada por el producto de las σ -álgebras de P y T . La topología es la que tiene por base a los abiertos de las “placas” $P \times \{t\} \equiv P$. En este caso, seguiremos llamando hojas a las componentes conexas del MT-espacio. Las hojas ya no tienen por qué ser variedades pero sí serán segundo numerables. Destacamos que el concepto de transversal, holonomía y medida transversal invariante se adaptan a esta generalización del mismo modo que para espacios medibles foliados. Estos MT-espacios serán llamados *espacios medibles polaco-foliados*. También forman una categoría tomando las MT-aplicaciones. Los resultados obtenidos en secciones precedentes se pueden adaptar a esta categoría.

1.8.3. Grafos medibles

Sea T un espacio medible estándar. Un *grafo medible* sobre T es una familia numerable de isomorfismos de Borel $\Phi = \{\gamma_i : A_i \rightarrow B_i\}$ entre borelianos de T . Llamaremos *arco* de Φ todo par de puntos (x, y) para los que existe $k \in \mathbb{N}$ con $y = \gamma_k(x)$. Construimos un MT-espacio \mathcal{K}_Φ mediante la adjunción de un segmento euclídeo entre los puntos x y y de un arco de Φ . La estructura medible será la generada por los borelianos de $U_n \times A_i$ y los borelianos de T , donde los U_n forman una base de abiertos del interior del segmento euclídeo. Remarcamos que se identifica $[0, 1] \times A_i$ vía $(0, x) \sim x$ y $(1, x) \sim \gamma_i(x)$ y el resto de puntos vía un homeomorfismo que conserve orientación entre los segmentos adjuntados a los arcos de Φ . Con esta estructura, \mathcal{K}_Φ admite a T como transversal completa. No es difícil comprobar que los grafos medibles son un ejemplo de espacios medibles polaco-foliados.

1.8.4. Subespacios y cocientes MT

Dos técnicas de construcción de MT-espacios es dar condiciones para que un subconjunto de un MT-espacio sea a su vez MT-espacio con las estructuras heredadas y para qué un cociente de un MT-espacio sea MT-espacio.

Definición 1.8.1 *Un MT-subespacio de un MT-espacio X es un MT-espacio Y para el cual existe una MT-aplicación $i : Y \rightarrow X$ tal que i es inyectiva y conserva conjuntos medibles. Diremos que Y es un MT-subespacio embebido si i es un embebimiento. Si $\text{sat}(i(Y)) = i(Y)$, entonces diremos que Y es un MT-subespacio saturado.*

Si los MT-espacios X e Y son estándar, la inyectividad de i implica la conservación de borelianos.

Definición 1.8.2 *Sea X un MT-espacio y R una relación de equivalencia. El MT-espacio X/R dotado con la topología cociente y la σ -álgebra generada por la proyección de las saturaciones por R de conjuntos medibles es el MT-espacio cociente de X por R .*

Ésta es la definición más amplia de MT-espacio cociente, sin embargo, en la práctica, el conjunto cociente puede admitir otras σ -álgebras y topologías que puedan ser definidas por otros medios y con interesantes propiedades. Cuando trabajemos con un cociente explicaremos claramente qué σ -álgebra se toma en cada caso. A modo de ejemplo, para un espacio foliado, en el espacio de hojas, la topología cociente del espacio ambiente da información de interés que no es captada por el cociente de la topología de las hojas (que es la que tenemos al considerarlo como MT-espacio). Adicionalmente se puede tomar la σ -álgebra de Borel asociada a esta topología que, en general, no coincide con la σ -álgebra que tiene como MT-espacio cociente.

Ejemplo 2 (Espacio de hojas de espacios medibles foliados) *En el caso de un espacio medible foliado tenemos la relación de equivalencia de las hojas. El MT-espacio cociente por esta relación se llama MT-espacio de hojas asociado.*

El hecho de que los atlas medibles sean numerables implica que la saturación de un boreliano es necesariamente un boreliano. Por lo tanto se puede controlar la estructura medible del cociente a partir de la estructura medible del MT-espacio. Como refuerzo a nuestra definición de MT-espacio cociente y MT-espacio de hojas presentamos la siguiente proposición.

Proposición 1.8.3 *Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia por homotopía medible entre dos espacios de Borel foliados, entonces la biyección inducida en los MT-espacios de hojas asociados es un MT-isomorfismo.*

Demostración:

Probaremos que si $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ es una equivalencia por homotopía medible, entonces la aplicación inducida $\bar{f} : X/\mathcal{F} \rightarrow Y/\mathcal{G}$ es medible. Para comprobar que \bar{f} es medible es suficiente comprobar que la imagen inversa de cada generador es medible en la σ -álgebra cociente. Para ello observamos que si B es un conjunto medible de Y saturado entonces $f^{-1}(B)$ es un conjunto medible y saturado de X y $\pi_{\mathcal{F}}(f^{-1}(B)) = \bar{f}^{-1}(\pi_{\mathcal{G}}(B))$. Donde $\pi_{\mathcal{F}}$ y $\pi_{\mathcal{G}}$ son las proyecciones al espacio de hojas. Razonando del mismo modo obtenemos que la aplicación inducida por una inversa homotópica es también medible y, por tanto, \bar{f} será un isomorfismo medible.

Por otro lado la topología cociente en el espacio de hojas es la topología discreta y por tanto una biyección es automáticamente un homeomorfismo. \square

1.8.5. Suspensiones medibles

Este ejemplo se construye en analogía al ejemplo de espacios foliados. Sea M una variedad de dimensión m , sea S un espacio de Borel estándar. Denotaremos $\text{Med}(S)$ el grupo de isomorfismos de Borel sobre S . Sea

$$h : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \text{Med}(S)$$

un homomorfismo. Si \widetilde{M} es la cubierta universal de M , consideramos la acción φ de $\pi_1(M, x_0)$ sobre el MT-producto $\widetilde{M} \times S$ dada por:

$$\varphi(g, (x, y)) = (xg^{-1}, h(g)(y)) .$$

Denotamos por $\widetilde{M} \times_h S$ el MT-espacio de órbitas de esa acción, que se llama *suspensión medible* del homomorfismo h (la estructura MT viene dada como MT-espacio cociente). Esta foliación admite a S como transversal y sus hojas son cubiertas de la variedad M . Es fácil probar que una suspensión medible es un espacio de Borel foliado. En [3] se trabaja con una versión más general de suspensión admitiendo como base M a un espacio polaco, conexo y localmente conexo por caminos. En estas condiciones, las suspensiones medibles serían espacios medibles polaco-foliados. Las hojas son espacios de recubrimiento de M y los abiertos simplemente conexos de M también son abiertos de trivialidad para la suspensión, al igual que en el caso de suspensiones topológicas. Es sencillo demostrar, usando la Proposición 1.1.5, que el espacio medible foliado inducido por una suspensión topológica y el MT-espacio cociente de la suspensión medible asociada son MT-isomorfos.

1.8.6. Ejemplos de espacios medibles foliados inducidos

Ya observamos a lo largo de este capítulo que el functor \mathcal{O} nos regala una familia muy importante de espacios medibles foliados, aquellos que son inducidos por un espacio foliado. En este apartado comentaremos algunos ejemplos de espacios foliados y observaremos cómo se comporta su versión medible.

Ejemplo 3 (Componentes de Reeb) Para todo $a \in [0, 1]$ consideramos la función $c_a : B^n \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de la bola unidad de \mathbb{R}^n con valores en el círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} definida por

$$c_a(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} + a .$$

El grafo de esta función es un plano topológico L_a de dimensión n puestos a lo largo del toro sólido abierto $B^n \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y que se acumulan en el infinito al borde de este toro. El espacio foliado obtenido en el toro sólido cerrado $\overline{B}^n \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que tiene como hojas a las componentes conexas del borde del toro y los grafos de las funciones c_a se llama componente de Reeb de dimensión n (ver Figura 1.2). Este espacio foliado tiene un especial interés pues no se obtiene a partir de una suspensión de homeomorfismos puesto que no existe una transversal completa cerrada.

La versión medible de la componente de Reeb es mucho más sencilla. Una transversal total puede darse por $T = (P_N \times \{0\}) \sqcup (\{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \sqcup (P_S \times \{0\})$ para la componente de dimensión 1 donde P_N y P_S denotan los polos norte y sur respectivos del disco \overline{B}^n , para las componentes de dimensiones mayores tomamos $T = (P_N \times \{0\}) \sqcup (\{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z})$. La razón es que en dimensión 1 tenemos dos componentes en el borde y en dimensiones mayores sólo una. Estas transversales cortan todas las hojas y además en un sólo punto.

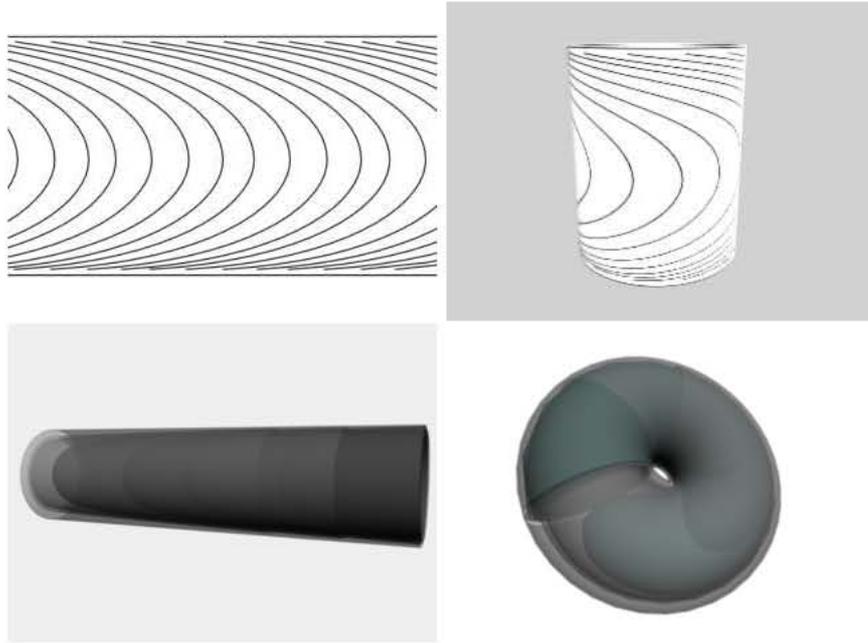


Figura 1.2: Componentes de Reeb de dimensión 1 y 2.

Es fácil ver que el espacio medible inducido por la componente de Reeb de dimensión n es MT-isomorfo al inducido por la suma topológica de $S^{n-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, donde $S^{n-1} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ está foliado por una hoja y $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ está foliado como un producto por las generatrices $\mathbb{R}^n \times \{*\}$ (ver Figura 1.3).

Ejemplo 4 (Flujos de Krönecker) Tomamos S^1 como la circunferencia compleja. Tomamos la rotación de ángulo $2\pi\alpha$, $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$, $R_\alpha(e^{2\pi t}) = e^{2\pi(t+\alpha)}$. La suspensión de esta rotación origina un flujo en el toro $S^1 \times S^1$. Atendiendo a si α es racional o irracional tenemos las dos situaciones siguientes

- (i) Todas las hojas son compactas, homeomorfas a un círculo y con holonomía trivial.
- (ii) Todas las hojas son inmersiones inyectivas de \mathbb{R} y densas en el toro.

En la situación (i) es fácil encontrar un boreliano que corte a cada hoja en un solo punto, en consecuencia, es MT-isomorfo a un espacio medible foliado producto. Para la situación (ii), no existe una transversal que corte a cada hoja en un sólo punto, es decir, no es MT-isomorfo a un espacio medible producto.

Se puede hablar de flujos de Krönecker de mayor codimensión. Para ello se realiza la suspensión de homeomorfismos de la forma

$$R_{\alpha_1} \times \dots \times R_{\alpha_n} : (S^1)^n \rightarrow (S^1)^n ,$$

la suspensión nos da un flujo sobre $(S^1)^{n+1}$. En este caso se obtiene

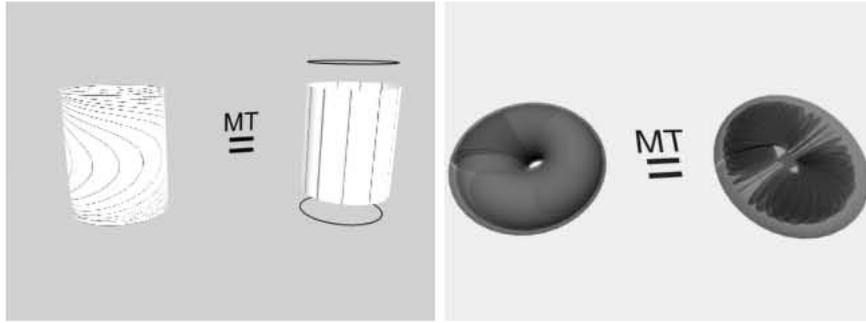


Figura 1.3: Componentes de Reeb de dimensión 1 y 2 vistas como espacios medibles.

- (i) Si los $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son todos racionales, entonces todas las hojas son compactas, homeomorfas a círculos y con holonomía trivial.
- (ii) Si algún α_i es irracional pero no todos, entonces las hojas son inmersiones inyectivas de \mathbb{R} . La clausura de cada hoja es un toro embebido de dimensión igual a la cantidad de α_i irracionales.
- (iii) Si todos los α_i son irracionales, las hojas son inmersiones inyectivas de \mathbb{R} y el flujo es minimal.

El caso (i) es MT-isomorfo a la situación (i) anterior. Tanto en el caso (ii) como en el (iii), no obtenemos espacios medibles foliados producto. Los flujos de Kröneckers correspondientes a los casos (ii) y (iii) no son MT-isomorfos. La única medida de probabilidad transversa invariante que admite un flujo de Kröneckers minimal es la de Lebesgue, sin embargo flujos del tipo (ii) admiten más medidas de probabilidad transversas invariantes; a modo de ejemplo, tenemos las medidas producto obtenidas de tomar la medida de Lebesgue en la parte irracional de la suspensión y una medida de Dirac en la parte racional. Si fuesen MT-isomorfos las medidas transversas invariantes deberían estar en correspondencia biyectiva (pues, en particular, es una equivalencia de homotopía medible) y acabamos de ver que no es así.

También se pueden obtener foliaciones de Kröneckers de mayor dimensión. La suspensión se realiza sobre el toro de dimensión n cuyo grupo fundamental es $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}$. Sobre cada generador se toma alguna de las transformaciones antes descritas. De este modo obtenemos las foliaciones de Kröneckers de dimensión mayor. Una gran parte de las propiedades dinámicas de estas foliaciones se deducen de las propiedades de los flujos que ya hemos explicado.

Ejemplo 5 (Foliación de Denjoy) La foliación de Denjoy en el toro T^2 es un caso de interés por diferentes motivos. Ofrece un ejemplo de superficie foliada con un conjunto minimal excepcional; es decir un conjunto saturado y cerrado, no vacío, que no contiene ningún subconjunto propio con estas características, y no se trata de una hoja cerrada.

Por otro lado se trata de una foliación C^1 que no es homeomorfa a ninguna foliación C^r con $r > 1$ (esto es consecuencia del teorema de Sacksteder [6]).

Empezamos la construcción denotando por $S(\lambda)$ al círculo que se obtiene identificando los extremos del intervalo $[0, \lambda]$, así $S^1 = S(1)$. Denotamos por R_α a la rotación de ángulo irracional α en $S(1)$, definida por $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$. Sea $x_0 \in S^1$ y definimos $x_n = R_\alpha^n(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Definimos, además, una bisucesión de números reales $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con $a_n = \frac{1}{2^{|n|}}$; la serie asociada a esta bisucesión converge y se tiene:

$$a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n = 3.$$

A cada término de la bisucesión insertamos un intervalo I_n de la circunferencia $S(1+a)$ de longitud a_n . Estos intervalos, colocados justo a continuación de cada correspondiente x_n , siguiendo la orientación dada por el círculo, cumplen que, si i, j, n son enteros con x_j entre x_i y x_n , entonces I_j está situado entre I_i e I_n . No es difícil probar, usando la irracionalidad de α , que $S(1+a) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{int}(I_n)$ es un conjunto que no es denso en ningún abierto de $S(1+a)$ y que es homeomorfo a un conjunto de Cantor.

Tomamos ahora una aplicación C^1 , $h : S(1+a) \rightarrow S(1)$, que lleva $\overline{I_n}$ a x_n y es biyectiva en el conjunto de puntos que no están contenidos en ningún $\overline{I_n}$, que denotamos por Ω^0 . Ahora podemos construir el difeomorfismo de Denjoy (ver Figura 6.3), que es un difeomorfismo C^1 , $f : S(1+a) \rightarrow S(1+a)$, tal que:

$$(1) \text{ Para todo } n \in \mathbb{Z}, f(I_n) = I_{n+1},$$

$$(2) f(\Omega^0) = \Omega^0,$$

$$(3) h \circ f = R_\alpha \circ h.$$

La suspensión de este difeomorfismo define una foliación C^1 en el toro (pues f conserva la orientación), donde la saturación del conjunto $S(1+a) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ es un conjunto minimal excepcional y su complementario es una foliación producto de fibra un intervalo abierto y hoja \mathbb{R} . Ésta es la foliación de Denjoy.

La foliación de Denjoy se simplifica mucho desde el punto de vista medible. Es fácil probar que es MT-isomorfa a la suma topológica de $\mathbb{R} \times (0, 1)$ y $S^1 \times_{R_\alpha} S^1$, donde $S^1 \times_{R_\alpha} S^1$ es un flujo de Krönecker irracional, que es MT-isomorfo al conjunto minimal de la foliación de Denjoy. Desde el punto de vista medible, la foliación de Denjoy no añade información que no hayamos tratado.

Observación 1.8.4 No es trivial conseguir el difeomorfismo de Denjoy, para una construcción detallada remitimos a [23].

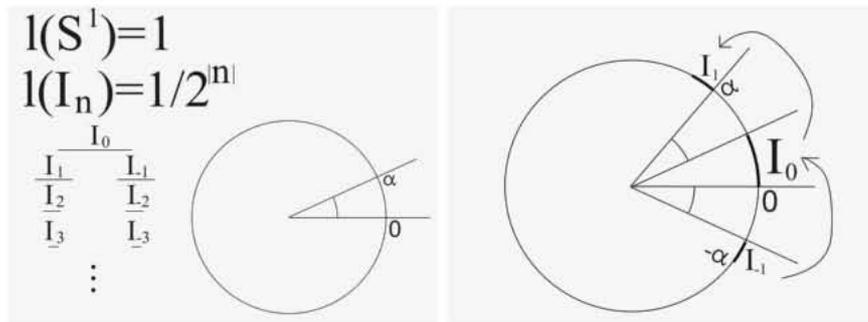


Figura 1.4: Construcción de la aplicación de Denjoy.

Capítulo 2

Extensión coherente de medidas invariantes

2.1. Introducción

Existen diversas interpretaciones de las medidas transversas invariantes en el contexto de espacios foliados y variedades; de hecho, pueden extenderse a las transversales de los espacios medibles inducidos (borelianos que cortan cada hoja en un conjunto numerable) [10]. En esta sección mostraremos que las medidas transversas invariantes pueden ser extendidas a toda la σ -álgebra de Borel en el espacio ambiente. De hecho, probaremos esto en el caso más general de espacios medibles foliados con medida transversa invariante. El resultado que demostramos es el siguiente.

Teorema 2.1.1 *Sea X un espacio medible foliado con una medida transversa invariante Λ . Existe una medida de Borel $\tilde{\Lambda}$ en X tal que $\tilde{\Lambda}(T) = \Lambda(T)$ para toda transversal T .*

También discutiremos acerca de la unicidad de esta extensión, lo que nos conduce al concepto de extensión coherente.

2.2. Caso de un MT-espacio producto

Comenzaremos con una demostración del teorema 2.1.1 en un caso más restringido: un producto de un espacio estándar por una variedad Hausdorff y segundo numerable. Trabajaremos con algo más de generalidad, tomaremos MT-espacios de la forma $P \times T$ con P polaco y T estándar.

Observación 2.2.1 *Tomaremos una nueva topología sobre $P \times T$, adicional a la que posee como MT-espacio. Todos los espacios de Borel estándar son Borel isomorfos a un conjunto finito, \mathbb{Z} o el intervalo $[0, 1]$ (véase e.g. [35, 22]). De esta forma $P \times T$ se identifica con $P \times \mathbb{Z}$, $P \times [0, 1]$ o $P \times A$ (A finito) vía un isomorfismo de Borel. Cuando hablemos de*

“abiertos” en $P \times T$ nos referimos a abiertos en alguno de los espacios anteriores con la topología producto. Denotaremos $\pi : P \times T \rightarrow T$ a la proyección canónica.

Proposición 2.2.2 (R.Kallman [21]) *Si $B \subset P \times T$ es un conjunto de Borel y $B \cap (P \times \{t\})$ es un σ -compacto para todo $t \in T$, entonces $\pi(B)$ es boreliano. Más aún, existe un boreliano $B' \subset B$ que corta a cada placa que corta a B en un sólo punto.*

Sea $(X, \mathcal{M}, \Lambda)$ un espacio de medida. La *compleción* de \mathcal{M} respecto de la medida Λ es la σ -álgebra

$$\mathcal{M}_\Lambda = \{Z \subset X \mid \exists A, B \in \mathcal{M}, A \subset Z \subset B, \Lambda(B \setminus A) = 0\}.$$

La medida Λ se extiende de forma natural a \mathcal{M}_Λ , definiendo $\Lambda(Z) = \Lambda(A) = \Lambda(B)$ con Z, A, B en las condiciones anteriores.

Sea Λ una medida de Borel en T . Definimos

$$\pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda) = \{B \subset \mathcal{B}^* \mid \pi(B \cap U) \in \mathcal{B}_\Lambda \forall U \text{ abierto de } P \times T\},$$

donde \mathcal{B} y \mathcal{B}^* son las σ -álgebras de Borel de T y $P \times T$, respectivamente.

Proposición 2.2.3 $\pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$ es cerrado por uniones numerables.

Demostración:

Es obvio, pues $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}^*$ y $\pi((\bigcup_n B_n) \cap U) = \bigcup_n \pi(B_n \cap U)$ pertenece a \mathcal{B}_Λ , trivialmente, para cualquier abierto $U \subset P \times T$ y cualquier sucesión B_n en $\pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$. \square

Observación 2.2.4 *Si Λ es σ -finita (i.e., T es una unión numerable de borelianos de Λ -medida finita), entonces $\pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda) = \mathcal{B}^*$, ya que por el Ejercicio 14.6 en [22], cualquier conjunto de \mathcal{B}^* se proyecta en un conjunto analítico, y por tanto Λ -medible, pues Λ es σ -finita [35, Teorema 4.3.1].*

Observación 2.2.5 *Obtenemos que si $B \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$ y U es un abierto en $P \times T$, entonces $B \cap U \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$. Por la Proposición 2.2.2, $\pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$ contiene a los borelianos con intersección σ -compacta con las placas $P \times \{t\}$.*

Denotamos por \mathcal{B}^{**} a la σ -álgebra de Borel de $P \times T \times P \times T$, $\tilde{\pi}$ la proyección natural $P \times T \times P \times T \rightarrow T \times T$, y $\langle \mathcal{B}_\Lambda \times \mathcal{B}_\Lambda \rangle$ la σ -álgebra generada por conjuntos de la forma $A \times B$ with $A, B \in \mathcal{B}_\Lambda$.

Lema 2.2.6 *Si $B, B' \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$, entonces $B \times B' \in \tilde{\pi}(\mathcal{B}^{**}, \langle \mathcal{B}_\Lambda \times \mathcal{B}_\Lambda \rangle)$.*

Demostración:

Como $B, B' \in \mathcal{B}^*$ se tiene $B \times B' \in \mathcal{B}^{**}$. Observamos que todo abierto $U \subset P \times T$ es una unión numerable de productos de abiertos. Tomamos $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (U_n \times V_n)$ con U_n y V_n abiertos de P y T respectivamente para $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}((B \times B') \cap U) &= \tilde{\pi} \left((B \times B') \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (U_n \times V_n) \right) \\ &= \tilde{\pi} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((B \cap U_n) \times (B' \cap V_n)) \right) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\pi}((B \cap U_n) \times (B' \cap V_n)) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\pi(B \cap U_n) \times \pi(B' \cap V_n)), \end{aligned}$$

que está en $\langle \mathcal{B}_\Lambda \times \mathcal{B}_\Lambda \rangle$. □

Definición 2.2.7 Para $B \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$, sea

$$\tilde{\Lambda}(B) = \int_T \#(B \cap (P \times \{t\})) d\Lambda(t) = \int_T \left(\int_{P \times \{t\}} \chi_{B \cap (P \times \{t\})} d\nu \right) d\Lambda(t),$$

donde ν denota la medida de contar y χ_A la función característica sobre $A \subset P \times \{t\}$.

Observación 2.2.8 Destacamos que la medida en T induce una medida transversa invariante en $P \times T$ tomando la Definición 2.2.7 para transversales generalizadas. Por tanto la Definición 2.2.7, si está bien definida, extiende la medida transversa invariante en $P \times T$ a $\pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$.

Proposición 2.2.9 Para cada $B \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$, $\tilde{\Lambda}$ está bien definida y satisface

(a) $\tilde{\Lambda}(\emptyset) = 0$,

(b) $\tilde{\Lambda}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\Lambda}(B_n)$ para toda familia numerable de conjuntos disjuntos $B_n \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda), n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

$\tilde{\Lambda}$ está bien definida si y solo si la función $h : T \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $h(t) = \#(B \cap (P \times \{t\}))$, es medible respecto de la σ -álgebra \mathcal{B}_Λ in T ; i.e., si $h^{-1}(n) \in \mathcal{B}_\Lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Procedemos por inducción en n . Es claro que $h^{-1}(0) = T \setminus \pi(B)$ pertenece a \mathcal{B}_Λ pues $B \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$. Ahora, supongamos $h^{-1}(i) \in \mathcal{B}_\Lambda$ para $i \in \{0, \dots, n-1\}$ y comprobemos que $h^{-1}(n) \in \mathcal{B}_\Lambda$.

Sea

$$C_n = \{(p_1, t), (p_2, t), \dots, (p_{n+1}, t) \mid t \in T, p_i \in P \forall i\},$$

que es cerrado en $(P \times T)^{n+1}$ (recordemos que consideramos la topología producto, véase Observación 2.2.1). Observamos que C_n es el conjunto de $(n+1)$ -uplas en $P \times T$ que están en la misma placa. Es claro que C_n es homeomorfo a $P^{n+1} \times \Delta_T$, donde Δ_T es la diagonal del producto T^{n+1} , y la proyección

$$\pi_T : \Delta_T \rightarrow T, (t, \dots, t) \mapsto t$$

es un homeomorfismo. La medida Λ se convierte en una medida en Δ_T vía π_T . La intersección $B^{n+1} \cap C_n$, denotada por D_n , es el conjunto de $(n+1)$ -uplas en B que pertenecen a la misma placa. Sea

$$\Delta_n = \{(p_1, t), (p_2, t), \dots, (p_{n+1}, t) \in C_n \mid \exists i \neq j \text{ con } p_i = p_j\},$$

que es cerrado en C_n . El conjunto $D_n \setminus \Delta_n$ está formado por las $(n+1)$ -uplas de elementos distintos en B que están en la misma placa. En consecuencia, el conjunto $\pi_T \circ \pi_\Delta(D_n \setminus \Delta_n)$ consiste de los puntos $t \in T$ cuya placa correspondiente $P \times \{t\}$ contiene más de n puntos distintos de B , donde $\pi_\Delta : C_n \rightarrow \Delta_T$ es la proyección natural.

A continuación probemos que $\pi_\Delta(D_n \setminus \Delta_n) \in \pi_T^{-1}(\mathcal{B}_\Lambda) = \pi_T^{-1}(\mathcal{B})_\Lambda$. Por el Lema 2.2.6, obtenemos $\tilde{\pi}(B^{n+1} \setminus \Delta_n) \in \langle \mathcal{B}_\Lambda^{n+1} \rangle$, donde $\tilde{\pi} : (P \times T)^{n+1} \rightarrow T^{n+1}$ es la proyección natural. Por tanto

$$\pi_\Delta(D_n \setminus \Delta_n) = \Delta_T \cap \tilde{\pi}(B^{n+1} \setminus \Delta_n) \in \langle \mathcal{B}_\Lambda^{n+1} \rangle|_{\Delta_T},$$

donde $\langle \mathcal{B}_\Lambda^{n+1} \rangle|_{\Delta_T}$ denota la restricción a Δ_T de la σ -álgebra $\langle \mathcal{B}_\Lambda^{n+1} \rangle$. Solamente resta probar $\langle \mathcal{B}_\Lambda^{n+1} \rangle|_{\Delta_T} \subset \pi_T^{-1}(\mathcal{B}_\Lambda)$. Para este propósito, debemos comprobar que cada generador $\prod_{k=1}^{n+1} F_k$, con $F_k \in \mathcal{B}_\Lambda$, satisface $(\prod_{k=1}^{n+1} F_k) \cap \Delta_T \in \pi_T^{-1}(\mathcal{B}_\Lambda)$. Para cada k , tomamos $A_k, B_k \in \mathcal{B}$ con $A_k \subset F_k \subset B_k$ y $\Lambda(B_k \setminus A_k) = 0$. Entonces

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} A_k \right) \cap \Delta_T \subset \left(\prod_{k=1}^{n+1} F_k \right) \cap \Delta_T \subset \left(\prod_{k=1}^{n+1} B_k \right) \cap \Delta_T,$$

y $(\prod_{k=1}^{n+1} A_k) \cap \Delta_T, (\prod_{k=1}^{n+1} B_k) \cap \Delta_T$ pertenecen a $\pi_T^{-1}(\mathcal{B})$ pues

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} A_k \right) \cap \Delta_T = \bigcap_{k=1}^{n+1} \pi_T^{-1}(A_k), \quad \left(\prod_{k=1}^{n+1} B_k \right) \cap \Delta_T = \bigcap_{k=1}^{n+1} \pi_T^{-1}(B_k).$$

Más aún

$$\begin{aligned}
\Lambda \left(\left(\left(\prod_{k=1}^{n+1} B_k \right) \cap \Delta_T \right) \setminus \left(\left(\prod_{k=1}^{n+1} A_k \right) \cap \Delta_T \right) \right) &= \Lambda \left(\bigcap_{k=1}^{n+1} (\pi_T^{-1}(B_k) \setminus \pi_T^{-1}(A_k)) \right) \\
&= \Lambda \left(\pi_T^{-1} \left(\bigcap_{k=1}^{n+1} (B_k \setminus A_k) \right) \right) \\
&= \Lambda \left(\bigcap_{k=1}^{n+1} (B_k \setminus A_k) \right) \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\pi_\Delta(D_n \setminus \Delta_n) \in \pi_T^{-1}(\mathcal{B}_\Lambda) = \pi_T^{-1}(\mathcal{B})_\Lambda$. Por inducción, tenemos

$$h^{-1}(n) = T \setminus ((\pi_T \circ \pi_\Delta(D_n \setminus \Delta_n) \cup h^{-1}(\{0, \dots, n-1\})) \in \mathcal{B}_\Lambda .$$

La propiedad (a) es obvia. Para probar (b), observamos que $\chi_{\bigcup B_n} = \sum \chi_{B_n}$ y la propiedad se sigue usando el teorema de la convergencia monótona. \square

Definición 2.2.10 Si $B \in \mathcal{B}^* \setminus \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$, entonces definimos $\tilde{\Lambda}(B) = \infty$.

Proposición 2.2.11 $(P \times T, \mathcal{B}^*, \tilde{\Lambda})$ es un espacio de medida y $\tilde{\Lambda}$ extiende a Λ .

Demostración:

Sólo tenemos que probar que $\tilde{\Lambda}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\Lambda}(B_n)$ para toda familia de conjuntos disjuntos $B_n, n \in \mathbb{N}$ en \mathcal{B}^* . Por la Proposición 2.2.9, esto funciona si $B_n \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}^* \setminus \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$, entonces es obvio. Únicamente tenemos que considerar el caso en que algún $B_j \in \mathcal{B}^* \setminus \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$ y, sin embargo, $\bigcup_n B_n \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$. Podemos suponer $B_j = B_1$ y usaremos la notación $B = \bigcup_n B_n$. Tomamos

$$B^\infty = \{t \in T \mid \#(B \cap (P \times \{t\})) = \infty\} ,$$

que pertenece a \mathcal{B}_Λ por la Proposición 2.2.9; la prueba se terminará si comprobamos que $\Lambda(B^\infty) > 0$. Tenemos $B_1^\infty \subset B^\infty$, donde

$$B_1^\infty = \{t \in T \mid \#(B_1 \cap (P \times \{t\})) = \infty\} .$$

Supongamos $\Lambda(B^\infty) = 0$. Como $\mathcal{B}^\infty \in \mathcal{B}_\Lambda$, existe algún $A \in \mathcal{B}$ tal que $B^\infty \subset A$ y $\Lambda(A) = 0$. El boreliano $\pi^{-1}(A)$ satisface $B_1 \cap \pi^{-1}(A) \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$ pues

$$\emptyset \subset \pi(B_1 \cap \pi^{-1}(A) \cap U) \subset A$$

y $\Lambda(A) = 0$ para cada abierto U de $P \times T$. Por otro lado, $B_1 \setminus \pi^{-1}(A)$ es un boreliano que interseca toda placa en un conjunto finito, en particular en un σ -compacto, y en consecuencia se proyecta en un boreliano por la Proposición 2.2.2. Finalmente $B_1 \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$ por la Proposición 2.2.3, que es una contradicción. \square

La cuestión que surge de un modo natural es la siguiente, ¿es esta extensión la única que admite una medida transversa invariante en un MT-espacio de este estilo? Esto es falso en general, por ejemplo, tomemos el producto foliado $\mathbb{R} \times \{*\}$ y sea Λ la medida nula en $\{*\}$; nuestra extensión $\tilde{\Lambda}$ es la medida nula en el espacio total. Ahora, tomemos la medida μ definida por

- (i) $\mu(B) = 0$ para todo conjunto numerable B ; y
- (ii) $\mu(B) = \infty$ para todo boreliano no numerable B .

La medida μ extiende a Λ y es bastante diferente de $\tilde{\Lambda}$. Para resolver este problema, requeriremos algunas condiciones a la extensión. Estas condiciones buscarán la coherencia con el concepto de medida transversa invariante. Probaremos que nuestra extensión es la única extensión coherente.

Definición 2.2.12 *Sea μ una extensión de una medida transversa invariante Λ en un espacio medible foliado producto X . La medida μ es una extensión coherente de Λ si cumple las siguientes condiciones.*

- (a) *Si $B \in \mathcal{B}^*$, $\pi(B)$ no está contenido en ninguna transversal de medida nula y cumple $\#B \cap (P \times \{t\}) = \infty$ para cada placa $P \times \{t\}$ que corte a B , entonces $\mu(B) = \infty$.*
- (b) *Si $\Lambda(S) = 0$ para una transversal S , entonces $\mu(\pi^{-1}(S)) = 0$.*
- (c) *Si $B \in \mathcal{B}^*$ y $\Lambda(S) = \infty$ para toda transversal S con $B \subset \pi^{-1}(S)$, entonces $\mu(B) = \infty$.*

Observación 2.2.13 *La condición (a) fuerza el comportamiento de μ en los borelianos con una cantidad infinita de puntos en placas que no están en la saturación de una transversal de Λ -medida nula. La condición (b) es natural, es la coherencia entre los soportes de Λ y de la extensión μ . La condición (c) fuerza el comportamiento de μ cuando el boreliano sólo puede cubrirse por la saturación de borelianos de Λ -medida infinita.*

Proposición 2.2.14 *La extensión $\tilde{\Lambda}$ es la única extensión coherente.*

Demostración:

Probaremos que cualquier extensión coherente μ toma los mismos valores que $\tilde{\Lambda}$ en \mathcal{B}^* . Primero consideramos el caso $B \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$. Sea

$$B^\infty = \{t \in T \mid \#(B \cap (P \times \{t\})) = \infty\}.$$

Este conjunto pertenece a \mathcal{B}_Λ por la Proposición 2.2.9. Por tanto existen borelianos A, C con $A \subset B^\infty \subset C$ y $\Lambda(C \setminus A) = 0$. Sea $\tilde{B}^\infty = B \cap \pi^{-1}(C)$. El boreliano $B \setminus \tilde{B}^\infty$ es una transversal y, en consecuencia, μ está determinada por Λ . Por otro lado, si $\Lambda(\pi(\tilde{B}^\infty)) = 0$ entonces $\mu(\tilde{B}^\infty) \leq \mu(\pi^{-1}(\tilde{B}^\infty)) = 0$ por la condición (b). Si $\Lambda(B^\infty) > 0$, sea $\hat{B}^\infty = B \cap \pi^{-1}(A)$ y $B'^\infty = B \cap \pi^{-1}(C \setminus A)$. Entonces $\mu(\hat{B}^\infty) = \infty$ por la condición (a) y

$\mu(B'^\infty) = 0$ por la condición (b). Esto prueba que μ esta definida en $\pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$ de la misma forma que $\tilde{\Lambda}$.

El caso $B \in \mathcal{B}^* \setminus \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$ es similar. El conjunto B^∞ no es necesariamente boreliano en este caso, pero observemos que $B \cap \pi^{-1}(B^\infty)$ no está contenido en la saturación de ninguna transversal S de medida finita o obtenemos $B \cap \pi^{-1}(S) \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$ usando el mismo argumento de la Observación 2.2.4 y, por tanto, teniendo en cuenta que $B \setminus \pi^{-1}(S)$ sería una transversal, $B \in \pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$ por la Proposición 2.2.3. Finalmente, $\mu(B) = \infty$ por la condición (c). Esto prueba que μ y $\tilde{\Lambda}$ coinciden sobre \mathcal{B}^* . \square

2.3. El caso general

En esta sección probamos el teorema principal del capítulo.

Teorema 2.3.1 *Sea X un espacio medible foliado con una medida transversa invariante Λ . Existe una medida $\tilde{\Lambda}$ en X que extiende a Λ .*

Sea X un espacio medible foliado con medida transversa invariante Λ . Sea $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un atlas medible foliado con $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^n \times T_i$, donde T_i es un espacio de Borel estándar. Vía φ_i , obtenemos una medida de Borel Λ_i en T_i . Por la Proposición 2.2.11, existe una medida $\tilde{\Lambda}_i$ en $U_i \approx \mathbb{R}^n \times T_i$ que extiende Λ_i . De hecho, la Proposición 2.2.2 implica $\tilde{\Lambda}_i(T) = \Lambda(T)$ para toda transversal $T \subset U_i$. Sean $\pi_i : U_i \rightarrow \varphi_i^{-1}(\{*\} \times T_i)$ las proyecciones naturales.

Lema 2.3.2 *Sea B un boreliano de $U_i \cap U_j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$B \in \pi_i(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_{\Lambda_i}) \iff B \in \pi_j(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_{\Lambda_j}).$$

Demostración:

Por el Lema 1.1.7, existe una familia numerable de transformaciones de holonomía medible de $\varphi_i^{-1}(\{*\} \times T_i)$ a $\varphi_j^{-1}(\{*\} \times T_j)$ cuyos dominios y rangos cubren $\pi_i(U_i \cap U_j)$ y $\pi_j(U_i \cap U_j)$, respectivamente. Por tanto, si A es un boreliano contenido en $U_i \cap U_j$ y $\pi_i(A)$ es boreliano, entonces $\pi_j(A)$ es boreliano y $\Lambda(\pi_i(A)) = 0 \iff \Lambda(\pi_j(A)) = 0$. \square

Lema 2.3.3 $\tilde{\Lambda}_i(B) = \tilde{\Lambda}_j(B)$ para todo boreliano $B \subset U_i \cap U_j$, $i, j \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Observamos que $\tilde{\Lambda}_i$ y $\tilde{\Lambda}_j$ toman los mismos valores en transversales de $U_i \cap U_j$. Por el Lema 2.3.2, solo consideraremos borelianos en $\pi_i(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$. Supondremos, en lo sucesivo, que B es tal que $\pi_i(B)$ es boreliano. Si no fuese el caso, B es Λ -medible y podemos tomar un boreliano $A \subset \pi_i(B)$ con $\Lambda(B \setminus A) = 0$. Tomamos a continuación el boreliano $\tilde{B} = B \cap \pi_i^{-1}(A)$. Este boreliano se proyecta en el boreliano A y $\tilde{\Lambda}_i(B \setminus \tilde{B}) = \tilde{\Lambda}_j(B \setminus \tilde{B}) = 0$ por

la Definición 2.2.7 y el Lema 2.3.2. En consecuencia, $\tilde{\Lambda}_i(B) = \tilde{\Lambda}_i(\tilde{B})$ and $\tilde{\Lambda}_j(B) = \tilde{\Lambda}_j(\tilde{B})$.
Sea

$$B^k = \{t \in \varphi_i^{-1}(T) \mid \#B \cap \varphi_i^{-1}(\varphi_i(t) \times \mathbb{R}^n) = k\}, \quad k = 1, \dots, \infty.$$

Estos conjuntos son Λ -medibles por la Proposición 2.2.9, asumiremos que son borelianos por la misma razón que antes. Denotemos por \tilde{B}^k a los borelianos $B \cap \pi_i^{-1}(B^k)$. Es obvio que $\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}^k$ es una transversal, por tanto $\tilde{\Lambda}_i(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{B}^k) = \tilde{\Lambda}_j(\bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{B}^k)$. Ahora consideramos

$$\tilde{B}_l^\infty = \{x \in \tilde{B}^\infty \mid \#(B \cap P_x^j) = l\}, \quad l = 1, \dots, \infty,$$

donde P_x^j denota la placa de U_j que contiene a x . Por los mismos razonamientos podemos suponer que este conjunto es un boreliano cuya proyección es boreliana. La prueba estaría terminada para el caso $\Lambda(\pi_i(\tilde{B}_\infty)) = 0$ (nos podemos restringir al caso de una transversal). Si $\Lambda(\pi_i(\tilde{B}_\infty)) > 0$, entonces $\Lambda(\pi_j(\tilde{B}_\infty)) > 0$ y, obviamente, obtenemos $\tilde{\Lambda}_i(B) = \infty = \tilde{\Lambda}_j(B)$. \square

Definición 2.3.4 *Sea B un conjunto medible en X , y*

$$B_1 = B \cap U_1, \quad B_k = (B \cap U_k) \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{k-1}),$$

para $k \geq 2$. Definimos

$$\tilde{\Lambda}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_i(B_i).$$

Por el Lema 2.3.3, es fácil probar que la Definición 2.3.4 no depende ni del orden de las cartas ni en la elección del atlas medible foliado numerable escogido. Es obvio que $\tilde{\Lambda}$ extiende Λ dado que ambas toman los mismos valores en transversales contenidas en cada carta y, por tanto, en cada transversal. El Teorema 2.3.1 queda demostrado.

Definición 2.3.5 *Sea μ una extensión de una medida transversal invariante Λ en un espacio medible foliado X . La medida μ es una extensión coherente de Λ si es una extensión coherente en cada carta medible foliada para la medida transversal invariante inducida en ella.*

Para comprobar si una extensión es coherente, es suficiente comprobarlo en las cartas de cualquier atlas medible foliado.

Corolario 2.3.6 $\tilde{\Lambda}$ es la única extensión coherente.

El Teorema 2.1.1 da una nueva interpretación para las medidas transversas invariantes y ofrece un nuevo concepto de transversal para espacios medibles foliados con medida transversal invariante.

Definición 2.3.7 Sea X un espacio foliado con medida transversa invariante Λ . Una Λ -transversal es un boreliano con $\tilde{\Lambda}$ -medida finita.

Observación 2.3.8 En la Sección 2.2, solo usamos que las placas son espacios polacos. El Lema 1.1.7 es cierto sustituyendo el espacio euclídeo \mathbb{R}^n por un espacio polaco, conexo y localmente conexo. Con estas condiciones, nuestro resultado puede extenderse a otros casos interesantes como grafos medibles o espacios medibles polaco-foliados en un contexto más general.

Observación 2.3.9 Para el caso topológico existe otra formulación de la extensión coherente $\tilde{\Lambda}$, usada en [25], y que también es de interés. Sea $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ un atlas foliado regular del espacio foliado con medida transversa invariante $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$, T_i transversales asociadas a cada carta, $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una partición de la unidad subordinada a dicho atlas, y ν la medida de contar. Entonces

$$\tilde{\Lambda}(B) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{T_i} \left(\int_P \lambda_i \chi_{B \cap P} d\nu \right) d\Lambda(P).$$

Obtenemos que esta expresión está bien definida carta a carta en $\pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$, la demostración es una combinación de los resultados de este trabajo y la demostración original que puede encontrarse en [25]. Fuera de $\pi(\mathcal{B}^*, \mathcal{B}_\Lambda)$ la definición ∞ es la única que sabemos que es coherente.

Capítulo 3

Categoría LS y medida transversa invariante

3.1. Introducción

Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible foliado. Desde el punto de vista medible, una contracción por homotopía medible induce una transversal en su paso final, es decir, $H(U \times \{1\}) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, por ser las hojas segundo numerables y por definición de contracción. Cuando disponemos de una medida transversa invariante Λ , la expresión $\Lambda(H(U \times \{1\}))$ nos da una medida de la deformación. Intuitivamente conseguir contracciones que den medidas más pequeñas se relaciona con obtener homotopías óptimas en sentido transverso. Esto vale para cualquier tipo de abierto y deformación medibles, nuestra herramienta para “medir” la deformación final será la extensión coherente. Lo único que necesitamos probar es que $H(U \times \{1\}) \equiv H_1(U)$ es un conjunto medible para todo abierto medible U y toda homotopía medible sobre U con $H_0 = i_U$, donde $i_U : U \rightarrow X$ es la inclusión. En lo sucesivo siempre supondremos que $H_0 = i_U$ para homotopías tanto medibles como integrables.

Lema 3.1.1 *Para todo abierto medible de un espacio medible foliado X y para toda homotopía medible H , se tiene que $H_1(U)$ es medible.*

Demostración:

Observamos que podemos suponer que H_1 está definida entre dos productos del tipo $\mathbb{R}^n \times T$ con T un espacio de Borel estándar. Para esto tomamos

$$H_1^i : U \cap H_1^{-1}(U_i) \rightarrow U_i, \quad x \mapsto H(x, 1)$$

donde U_i son los dominios de cada carta de un atlas medible foliado numerable. A continuación usamos el Teorema 1.1.6, tomando una base de entornos homeomorfos a \mathbb{R}^n , en cada abierto medible $U \cap H_1^{-1}(U_i) \cap U_j$, $i, j \in \mathbb{N}$. De este modo conseguimos una cantidad numerable de espacios medibles foliados producto $\mathbb{R}^n \times T_k$ y MT-embebimientos

$i_k : \mathbb{R}^n \times T_k \rightarrow U_{j(k)}$ tales que

$$U = \bigcup_k i_k(\mathbb{R}^n \times T_k), \quad H_1 \circ i_k : \mathbb{R}^n \times T_k \rightarrow U_{i(k)},$$

donde $i(k)$ y $j(k)$ son enteros que dependen de k . Si la imagen de cada una de estas aplicaciones es medible entonces $H_1(U)$ es medible pues sería una unión numerable de conjuntos medibles.

Por tanto, suponemos $H_1 : \mathbb{R}^n \times T \rightarrow \mathbb{R}^n \times S$ con T y S espacios de Borel estándar. Como H_1 es de Borel entre espacios estándar se tiene que que el grafo de H_1 ,

$$\text{Graf}(H_1) = \{((x, t), H_1(x, t)) \mid (x, t) \in \mathbb{R}^n \times T\},$$

es un boreliano de $\mathbb{R}^n \times T \times \mathbb{R}^n \times S$ (véase *e.g.* [36]). Denotamos

$$\pi_2 : \mathbb{R}^n \times T \times \mathbb{R}^n \times S \rightarrow \mathbb{R}^n \times S$$

la proyección en el segundo factor, destacamos que estos espacio producto son obviamente estándar. Es claro que $\pi_2(\text{Graf}(H_1)) = H_1(\mathbb{R}^n \times T)$. Tomamos una nueva topología en $\mathbb{R}^n \times T$, la topología producto de la euclídea en \mathbb{R}^n y una topología en T que lo convierta en espacio polaco (ver Observación 2.2.1). Con esta topología $\mathbb{R}^n \times T$ se convierte en un espacio polaco. Como T es Hausdorff, las placas son cerrados en esta nueva topología. La σ -álgebra de Borel de esta topología es precisamente la que teníamos como MT-espacio. En consecuencia, un boreliano que sea σ -compacto en las placas, será también σ -compacto respecto de la nueva topología. Si probamos que $\text{Graf}(H_1)$ tiene fibras σ -compactas, entonces la Proposición 2.2.2 implicará que $H_1(\mathbb{R}^n \times T)$ es boreliano lo que termina la prueba. Sólo resta ver que $\text{Graf}(H_1) \cap (\mathbb{R}^n \times T \times \{(y, s)\})$ es σ -compacto para todo $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times S$. Basta darse cuenta que

$$\begin{aligned} \text{Graf}(H_1) \cap (\mathbb{R}^n \times T \times \{(y, s)\}) &= \\ &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times T \mid H_1(x, t) \\ &= (y, s)\} = H_1^{-1}(\{(y, s)\}). \end{aligned}$$

Como H_1 es continua con la topología de MT-espacios, que es Hausdorff, obtenemos que $H_1^{-1}(\{(y, s)\})$ es un cerrado, y por tanto es un σ -compacto en cada placa $\mathbb{R}^n \times \{t\} \subset \mathbb{R}^n \times T$. Finalmente observamos que $H_1^{-1}(\{(y, s)\})$ sólo puede cortar una cantidad numerable de tales placas, pues de lo contrario la hoja que pasa por (y, s) (entendido como punto en X) no sería segundo numerable. Es aquí donde hacemos uso explícito del hecho de que H es una homotopía medible que comienza en la identidad, esto implica que las placas que corta $H_1^{-1}(\{(y, s)\})$ están en la misma hoja, pues están en la misma componente conexa (existen caminos que unen estas placas). En definitiva, cada $H_1^{-1}(\{(y, s)\})$, $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times S$, es una unión numerable de σ -compactos, por tanto, un σ -compacto. Observamos que estos conjuntos son σ -compactos tanto en la topología que se tiene como MT-espacio como con la nueva topología que convierte al producto en un espacio polaco. \square

3.2. Definición de Λ -categoría L-S

Las definiciones de las Λ -categorías topológica y medible son análogas. La definición de Λ -categoría topológica puede encontrarse en [25] por lo que abordaremos aquí la definición de Λ -categoría medible. También podemos obtener la definición topológica cambiando abierto medible por abierto y homotopía medible por homotopía integrable en lo sucesivo.

Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio medible foliado con medida transversa invariante y $U \subset X$ un abierto medible. Definimos el *peso transverso óptimo* de U , $\tau(U)$, como

$$\tau(U) = \inf\{\tilde{\Lambda}(H_1(U)) \mid H \text{ homotopía medible sobre } U\}.$$

El peso transverso óptimo es la pieza clave para definir la Λ -categoría.

Definición 3.2.1 *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio medible foliado, definimos la Λ -categoría LS de (X, \mathcal{F}) como*

$$\begin{aligned} \text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) &= \\ &= \inf\left\{\sum_{U \in \mathcal{U}} \tau(U) \mid \mathcal{U} \text{ recubrimiento numerable de } X \text{ por abiertos medibles}\right\}. \end{aligned}$$

El lema anterior nos asegura la buena definición de la Λ -categoría.

Observación 3.2.2 *La Λ -categoría generaliza a la categoría LS usual tomando la medida de contar en la transversal (en este caso un punto). La extensión coherente es la medida de contar en la variedad.*

3.3. Primeras propiedades

Observamos que, por definición, si la Λ -categoría es finita entonces existe una Λ -transversal que corta a todas las hojas.

Proposición 3.3.1 *Si un espacio foliado o medible foliado no admite una transversal total con medida finita entonces $\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = \infty$.*

Lema 3.3.2 (Invarianza de la Λ -categoría) *Sean $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ y (Y, \mathcal{G}, Δ) espacios de Borel foliados con medida transversa invariante, sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia por homotopía medible. Suponemos que las medidas están relacionadas por imagen recíproca. Entonces, para cualquier conjunto K medible en X y σ -compacto en cada hoja, se tiene que $f(K)$ es medible y $\tilde{\Delta}(f(K)) \leq \tilde{\Lambda}(K)$.*

Demostración:

Sean $\mathcal{U} = \{(U_n, \varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\mathcal{V} = \{(V_n, \psi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ atlas medibles foliados para X e Y respectivamente. Observamos primero la existencia de un atlas medible foliado numerable $\mathcal{W} = \{(W_n, \phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X que cumple las siguientes condiciones:

- (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un entero $k(n)$ para el cual $f(W_n) \subset V_{k(n)}$.
- (b) La función f induce una aplicación inyectiva del conjunto de placas de W_n en el conjunto de placas de $V_{k(n)}$, es decir, cada placa de $V_{k(n)}$ contiene, a lo sumo, la imagen por f de una sólo placa de W_n .

Usando el Teorema 1.1.6 en los abiertos medibles $U_n \cap f^{-1}(V_m)$ conseguimos un atlas medible foliado, $\mathcal{W}' = \{(W'_i, \phi'_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, que cumple la condición (a). Tomando las MT-parametrizaciones, consideramos las funciones $\psi_l \circ f \circ \phi_m'^{-1} : \mathbb{R}^n \times T_m \rightarrow \mathbb{R}^p \times S_l$, donde T_m y S_l son espacios de Borel estándar para todo $m, l \in \mathbb{N}$. La aplicación inducida en las transversales,

$$\overline{\psi_l \circ f \circ \phi_m'^{-1}} : T_m \rightarrow S_l,$$

tiene fibras numerables pues de lo contrario se contradice, bien la segundo numerabilidad de alguna hoja de X , bien el hecho de que f induce una biyección en el espacio de hojas de X por ser una equivalencia por homotopía medible. Siguiendo el mismo argumento del Lema 3.1.1 tenemos que $\psi_l \circ f \circ \phi_m'^{-1}(K)$ es de Borel para todo conjunto $K \subset \mathbb{R}^n \times T_m$ medible y σ -compacto en las placas. Por tanto $f(K)$ es medible, pues se puede escribir como unión numerable de conjuntos medibles. Usando la Proposición 1.1.5 con la aplicación $\overline{\psi_l \circ f \circ \phi_m'^{-1}}$, obtenemos una partición boreliana y numerable de T_m , $T_m = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_{m,i}$, donde la aplicación restringida a cada transversal, $\overline{\psi_l \circ f \circ \phi_m'^{-1}}|_{T_{m,i}}$, es inyectiva. En consecuencia, $\psi_l \circ f \circ \phi_m'^{-1}$ aplica placas de cada $\mathbb{R}^n \times T_{m,i}$ inyectivamente en placas de $\mathbb{R}^p \times S_l$ en el sentido descrito en la condición (b).

Tomamos un atlas \mathcal{W} , con MT-parametrizaciones $\phi_m : W_m \rightarrow \mathbb{R}^n \times T_m$, que cumple (a) y (b). Consideramos las funciones $\psi_l \circ f \circ \phi_m^{-1} : \mathbb{R}^n \times T_m \rightarrow \mathbb{R}^p \times S_l$. Como las medidas están relacionadas por imagen recíproca y $\psi_l \circ f \circ \phi_m^{-1}$ aplica inyectivamente las placas, tenemos que $\Lambda(D) = \Delta(f(D))$ para todo boreliano $D \subset T_m$. Denotaremos por $P_{m,l}^f$ a la placa de $\mathbb{R}^p \times S_l$ que contiene a $\psi_l \circ f \circ \phi_m^{-1}(P)$, donde P es una placa de $\mathbb{R}^n \times T_m$. Es claro que

$$\#f(K) \cap P_{m,l}^f \leq \#K \cap P$$

para toda placa P de $\mathbb{R}^n \times T_m$. Esto se deduce del hecho de que $\psi_l \circ f \circ \phi_m^{-1}$ es inyectiva en las placas y de que $\#\psi_l \circ f \circ \phi_m^{-1}(B \cap P) \leq \#B \cap P$. Obtenemos así

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\psi_l \circ f \circ \phi_m^{-1}(K)) &= \int_{S_l} \#(\psi_l \circ f \circ \phi_m^{-1}(K) \cap P') d\Delta(P') \\ &= \int_{\psi_l \circ f \circ \phi_m^{-1}(T_m)} \#(\psi_l \circ f \circ \phi_m^{-1}(K) \cap P_{m,l}^f) d\Delta(P_{m,l}^f) \\ &= \int_{T_m} \#(\psi_l \circ f \circ \phi_m^{-1}(K) \cap P_{m,l}^f) d\Lambda(P) \\ &\leq \int_{T_m} \#(K \cap P) d\Lambda(P) \\ &= \tilde{\Lambda}(K). \end{aligned}$$

Por tanto el lema es cierto en cada carta de \mathcal{W} . Dado K medible y σ -compacto en las hojas, tomamos los conjuntos medibles definidos de forma recursiva por $B_1 = (B \cap W_1)$, $B_k = (K \cap W_k) \setminus (W_1 \cup \dots \cup W_{k-1})$, para $k > 1$. Esta familia de conjuntos medibles y σ -compactos en las hojas es disjunta y cubre a K . Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(f(K)) &= \tilde{\Delta}\left(\bigcup_i f(B_i)\right) \\ &\leq \sum_i \tilde{\Delta}(f(B_i)) \\ &\leq \sum_i \tilde{\Lambda}(B_i) \\ &= \tilde{\Lambda}(K) \end{aligned}$$

como queríamos probar. \square

Proposición 3.3.3 *Si $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ y (Y, \mathcal{G}, Δ) son espacios de Borel foliados con medida transversa invariante que son equivalentes por equivalencia medible y las medidas están relacionadas por la imagen recíproca dada por la equivalencia, entonces*

$$\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = \text{Cat}(\mathcal{G}, \Delta) .$$

Demostración:

Sea $f : X \rightarrow Y$ la equivalencia por homotopía medible y g su inversa homotópica. Sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento por abiertos medibles de Y , entonces $\{f^{-1}(U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento por abiertos medibles de X . Probaremos que $\tau_\Lambda(f^{-1}(U_n)) \leq \tau_\Delta(U_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean H^n homotopías medibles sobre U_n , y F la homotopía medible que lleva $g \circ f$ en la MT-aplicación identidad de X , entonces tomamos la homotopía medible

$$G = (g \circ H \circ f) \times id : f^{-1}(U) \times I \rightarrow U \times I \rightarrow Y \rightarrow X .$$

Esta homotopía no comienza en la identidad, ésto sí lo cumple la homotopía medible $K : f^{-1}(U) \times I \rightarrow X$ definida como

$$K(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Ahora aplicamos el Lema 3.3.2 y obtenemos

$$\tilde{\Lambda}(K_1(f^{-1}(U))) = \tilde{\Lambda}(g(H_1(U))) \leq \tilde{\Delta}(H_1(U)) ,$$

por tanto $\tau_\Lambda(f^{-1}(U_n)) \leq \tau_\Delta(U_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como consecuencia obtenemos $\tilde{\Lambda}(\{f^{-1}(U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}) \leq \tilde{\Delta}(\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ y $\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) \leq \text{Cat}(\mathcal{G}, \Delta)$. La desigualdad inversa se obtiene de modo análogo. \square

Proposición 3.3.4 ([25]) *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio foliado con medida transversa invariante Λ y U un abierto de X . Si Λ es positiva en los abiertos no vacíos de una transversal completa, entonces*

$$\tau_\Lambda(U) < \infty \implies U \text{ tangencialmente categórico}$$

Ésta es la relación fundamental entre la Λ -categoría topológica y la categoría tangente. Nos indica que la Λ -categoría puede restringirse a tratar con abiertos tangencialmente categóricos y contracciones por homotopía integrable en el caso de tener una medida invariante “positiva” en abiertos. En [25] esta proposición puede usarse para probar la restricción en el cálculo de la Λ -categoría a abiertos tangencialmente categóricos exigiendo que el espacio foliado sea compacto, sin imponer condiciones a la medida. Éste es un problema todavía no solucionado en el caso de espacios foliados no compactos. En el caso medible no existe topología en la parte transversa pero aún así disponemos de una adaptación de este resultado.

Proposición 3.3.5 *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio medible foliado con medida transversa invariante Λ y sea U un abierto medible en X . Entonces*

$$\tau_\Lambda(U) < \infty \implies \exists U' \subset U, \mathcal{F}\text{-categórico, tal que } \tilde{\Lambda}(U \setminus U') = 0.$$

Demostración:

Primero observamos que H es una contracción por homotopía medible sobre U si y sólo si $H_1(U)$ es una transversal. Tomamos una homotopía medible H sobre U con $\tilde{\Lambda}(H_1(U)) < \infty$. Tomamos un atlas medible foliado $\mathcal{U} = \{(U_n, \varphi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre X . Denotamos $\pi_n : U_n \rightarrow T_n$ la proyección natural sobre la transversal estándar asociada. Tomamos la familia de borelianos $H_1(U) \cap U_n$, $n \in \mathbb{N}$, que cubren $H_1(U)$. Observamos que $\pi_n(H_1(U) \cap U_n)$ es boreliano para todo $n \in \mathbb{N}$, pues son borelianos con intersección σ -compacta con las placas de U_n . Sea

$$H_1(U)_n^k = \{t \in T_n \mid \#H_1(U) \cap P_t = k\},$$

donde $P_t = \varphi_n^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{t\})$. El conjunto $H_1(U)_n^\infty$ es boreliano (mismo razonamiento que en la Proposición 2.2.9). Si $\Lambda(H_1(U)_n^\infty) > 0$ para algún n , se tendría $\tilde{\Lambda}(H_1(U)) = \infty$ en contra de la hipótesis. En consecuencia $\Lambda(H_1(U)_n^\infty) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos ahora los conjuntos $H_1(U)_n^k$ para $k \in \mathbb{N}$. Afirmamos que los conjuntos $H_1^{-1}(\pi_n^{-1}(H_1(U)_n^k))$, $k \in \mathbb{N}$, son abiertos medibles y \mathcal{F} -categóricos contenidos en U . Esto se sigue del hecho de que los borelianos $H_1(U)_n^k$ cortan en una cantidad finita de puntos a las placas de U_n , por lo que la imagen inversa de cada uno de estos puntos mediante H_1 es una unión de componentes conexas de U y por tanto un abierto. En consecuencia, H define una contracción por homotopía medible en cada abierto medible $H_1^{-1}(\pi_n^{-1}(H_1(U)_n^k))$. Tomamos

$$U' = \bigcup_k H_1^{-1}(\pi_n^{-1}(H_1(U)_n^k)),$$

que es un abierto medible donde H define una contracción por homotopía medible. Observamos que $U \setminus U'$ es también abierto medible, pues U' es unión de componentes conexas de U . Ahora debemos probar que $\tilde{\Lambda}(U \setminus U') = 0$. Claramente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n(H_1(U \setminus U') \cap U_n) \subset H_1(U)_n^\infty$; de aquí deducimos que $\tilde{\Lambda}(H_1(U \setminus U')) = 0$. Por las propiedades de extensión coherente $\tilde{\Lambda}(\text{sat}(U \setminus U')) = 0$, y por tanto $\tilde{\Lambda}(U \setminus U') = 0$. \square

Observación 3.3.6 *Otra consecuencia que podemos obtener es que, para calcular la Λ -categoría, podemos tomar recubrimientos por abiertos medibles que admiten homotopías medibles que los deformen a Λ -transversales. De no existir recubrimientos de estas características la Λ -categoría es infinita.*

Definición 3.3.7 *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio medible foliado con medida transversa invariante Λ . Un conjunto medible B se dice que es transversalmente nulo si $\tilde{\Lambda}(B) = 0$.*

Proposición 3.3.8 *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio medible foliado con medida transversa invariante Λ y sea B un conjunto transversalmente nulo. Entonces $X \setminus \text{sat } B$ hereda una estructura de espacio medible foliado con medida transversa invariante, donde $\mathcal{F}|_{X \setminus \text{sat } B}$ y $\Lambda|_{X \setminus \text{sat } B}$ denotan las restricciones a $X \setminus \text{sat } B$, y $\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = \text{Cat}(\mathcal{F}|_{X \setminus \text{sat } B}, \Lambda|_{X \setminus \text{sat } B})$.*

Observación 3.3.9 *La demostración es trivial. En [25] existe una versión topológica de este resultado. En este caso hay que exigir una condición a la medida, la regularidad exterior, que nos indica que la medida de cualquier boreliano se puede aproximar por la medida de los abiertos que lo contienen.*

Proposición 3.3.10 [25] *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio foliado con medida transversa invariante regular exterior y B un conjunto transversalmente nulo. Entonces*

$$\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = \inf \left\{ \sum_{U \in \mathcal{U}} \tau(U) \mid \mathcal{U} \text{ recubrimiento de } X \setminus B \text{ por abiertos en } X \right\}.$$

Esta igualdad también es cierta si la medida es regular exterior en σ -compactos y el conjunto transversalmente nulo es σ -compacto. Observemos que para calcular τ_Λ usamos homotopías integrables en \mathcal{F} .

Proposición 3.3.11 *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio foliado con medida transversa invariante. Entonces $\text{Cat}(\mathcal{O}(\mathcal{F}), \Lambda) \leq \text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda)$.*

Es decir, la Λ -categoría medible acota inferiormente a la topológica. La demostración es sencilla, teniendo en cuenta que, mediante el uso del functor \mathcal{O} , abiertos y homotopías integrables dan lugar a abiertos medibles y homotopías medibles, respectivamente.

Proposición 3.3.12 *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio medible foliado con una medida transversa invariante Λ . Supongamos que este espacio está definido a partir de una suspensión medible $\tilde{M} \times_h S$. Entonces*

$$\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) \leq \text{Cat}(M) \cdot \Lambda(S).$$

Demostración:

Sea U un abierto categórico para la variedad M , sea H la homotopía que deforma a U en un punto $\{x\}$. Sea $p : \widetilde{M} \times_h S \rightarrow M$ la proyección canónica. Es fácil comprobar que $p^{-1}(U)$ es un abierto medible y H se levanta a una homotopía medible que contrae $p^{-1}(U)$ en $p^{-1}(x)$. Por tanto $\tau_\Lambda(U) \leq \Lambda(S)$. \square

Observación 3.3.13 *Esta proposición es análoga en el caso topológico [25]. Del mismo modo, también existe una versión topológica de la siguiente proposición.*

Proposición 3.3.14 *Sea $M \times S$, con M variedad y S un espacio de Borel estándar, foliado como un producto. Una medida Λ en S origina una medida transversa invariante Λ en $M \times S$ y se tiene*

$$\text{Cat}(M \times S, \Lambda) = \text{Cat}(M) \cdot \Lambda(S) .$$

Demostración:

La proposición anterior nos da la desigualdad $\text{Cat}(M \times S, \Lambda) \leq \text{Cat}(M) \cdot \Lambda(S)$. Para obtener la otra desigualdad observamos primero que

$$\tilde{\Lambda}(B) = \int_S \#(B \cap (M \times \{s\})) d\Lambda(s) .$$

Es suficiente comprobar que para todo recubrimiento numerable abierto y medible \mathcal{U} de $M \times S$ se tiene que $\sum_{U \in \mathcal{U}} \tau(U) \geq \text{Cat}(M) \cdot \Lambda(S)$. Sea $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento abierto y medible de $M \times S$ y consideramos una sucesión de homotopías medibles H^i sobre cada U_i respectivamente. Veamos que

$$\text{Cat}(M) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \#(H_1^i(U_i) \cap (M \times \{s\})) ,$$

para todo $s \in S$. Ésto, junto a la observación previa y el teorema de la convergencia monótona, terminan la prueba. Si existiese un $s' \in S$ para el que no se verificase esta desigualdad, se tendría, en particular, que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \#(H_1^i(U_i) \cap (M \times \{s'\})) < \infty .$$

En consecuencia sólo una cantidad finita de abiertos U_i cortan a $M \times \{s'\}$. Sea U_1, \dots, U_N los abiertos que cortan a $M \times \{s'\}$. Se tiene también que

$$H^k : (U_k \cap (M \times \{s'\})) \times I \rightarrow M \times \{s'\}$$

es una homotopía que deforma al abierto $U_k \cap (M \times \{s'\})$ de $M \times \{s'\}$ en una cantidad numerable de puntos y, por tanto, son abiertos categóricos en la hoja $M \times \{s'\} \approx M$, de donde $\text{Cat}(M) \leq N \leq \sum_{k=1}^N \#(H_1^k(U_k) \cap (M \times \{s'\}))$, que es la contradicción buscada. \square

Veamos las relaciones existentes entre la Λ -categoría de un espacio medible foliado y la de sus subespacios medibles.

Observación 3.3.15 Sea (Y, \mathcal{G}) un espacio medible foliado que es MT-subespacio de un espacio medible foliado (X, \mathcal{F}) , donde $i : Y \rightarrow X$ es la MT-aplicación inclusión (véase Capítulo 1). Si $\dim \mathcal{G} = \dim \mathcal{F}$ la aplicación i lleva transversales en transversales. Si Λ es una medida transversa invariante para (X, \mathcal{F}) entonces induce una medida transversa invariante en (Y, \mathcal{G}) que denotaremos también por Λ .

Las siguiente dos demostraciones son sencillas de probar a partir de las definiciones.

Proposición 3.3.16 Sea (Y, \mathcal{G}) un espacio medible foliado que es un MT-subespacio saturado del espacio medible foliado con medida transversa invariante $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ y de la misma dimensión. Entonces

$$\text{Cat}(\mathcal{G}, \Lambda) \leq \text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) .$$

Proposición 3.3.17 Sean $(Y_n, \mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia disjunta de espacios medibles foliados que son MT-subespacios saturados del espacio medible foliado con medida transversa invariante $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$, de la misma dimensión que \mathcal{F} y tales que recubren X . Entonces

$$\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Cat}(\mathcal{G}_n, \Lambda) .$$

Observación 3.3.18 También existen adaptaciones de estos resultados para la Λ -categoría topológica en [25]. Destacamos que la Proposición 3.3.17 es un resultado más fuerte en la versión medible y es una buena herramienta de cálculo. La versión topológica sólo nos ofrece una forma de acotación inferior:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Cat}(\mathcal{G}_n, \Lambda) \leq \text{Cat}(X, \mathcal{F}) .$$

Ejemplo 6 Ya hemos visto que la Λ -categoría medible da una cota inferior de la topológica. Daremos un ejemplo a continuación en el que esta desigualdad es estricta. Tomamos el subespacio $T = \{n, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ de \mathbb{R} . Tomamos el homeomorfismo $f : T \rightarrow T$ dado por $f(n) = n - 1$ si $n > 1$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ si $n \leq 1$ y $f(0) = 0$. Tomamos la suspensión de este homeomorfismo lo cual nos ofrece un espacio foliado que consta de dos hojas. Una de las hojas es homeomorfa a \mathbb{R} y es densa y la otra es homeomorfa a S^1 . Consideramos al medida de Borel en T dada por $\Lambda(\{x\}) = 1$ si $x \neq 0$ y $\Lambda(\{0\}) = 0$. Dicha medida es transversa invariante. Desde el punto de vista medible, la densidad de la hoja \mathbb{R} no se detecta. Nuestra suspensión es MT-isomorfa a $\mathbb{R} \sqcup S^1$ donde la medida transversa invariante es la de contar en \mathbb{R} y la nula en S^1 . Es sencillo comprobar que $\text{Cat}(\mathbb{R} \times_f T, \Lambda) = \infty$ y $\text{Cat}(\mathcal{O}(\mathbb{R} \times_f T), \Lambda) = 1$.

Destacamos que la medida Λ no es regular exterior. No disponemos de ejemplos donde las dos Λ -categorías difieran y la medida transversa sea regular exterior.

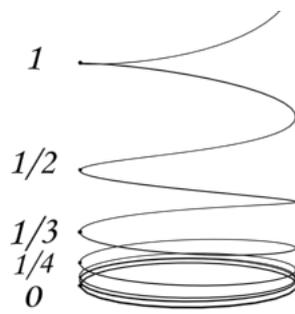


Figura 3.1: *Ejemplo 6.*

Capítulo 4

Λ -categoría LS en espacios foliados por hojas compactas

Trabajaremos en lo sucesivo con espacios foliados por hojas compactas. Las propiedades básicas de estos espacios están comentadas en el Capítulo 1. Nuestro referente para este capítulo es un resultado obtenido en [25].

Teorema 4.0.19 *Sea $(M, \mathcal{F}, \Lambda)$ una variedad C^1 -foliada compacta-Hausdorff y Λ una medida transversa invariante finita en compactos, regular exterior y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. Entonces*

$$\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = \int_{M/\mathcal{F}} \text{Cat}(L) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L) .$$

Aquí $\Lambda_{\mathcal{F}}$ es una medida en el espacio de hojas inducida por la medida transversa invariante. Este resultado se puede deducir de nuestro trabajo posterior. En este capítulo lograremos probar generalizaciones de este teorema.

4.1. La filtración asociada a un espacio foliado por hojas compactas

Introducimos en esta sección una técnica muy importante para espacios foliados por hojas compactas. Estas ideas son debidas a Epstein, Edwards, Millet y Sullivan [14, 12]. Consideramos una función de volumen $\nu : X \rightarrow (0, \infty)$ definida sobre un espacio foliado por hojas compactas (X, \mathcal{F}) . Se define

$$B_1 = \{x \in X \mid \nu \text{ no es continua en } x\} .$$

Por lo visto en la Proposición 1.7.9, B_1 es cerrado, saturado y formado exactamente por las hojas con holonomía no trivial. Claramente B_1 es un subespacio foliado saturado de

(X, \mathcal{F}) . Por definición recursiva obtenemos

$$B_k = \{x \in B_{k-1} \mid \nu|_{B_{k-1}} \text{ no es continua en } x\}.$$

De hecho, mediante inducción transfinita [13], se puede conseguir una familia de subespacios foliados cerrados y saturados $(B_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$, con Ω un conjunto bien ordenado, tales que $B_{\alpha+1} \subset B_\alpha$. La propiedad de Lindelöf del espacio X nos asegura que esta familia es a lo sumo numerable y finita si X es compacto.

A la familia formada por estos espacios se le denomina la *filtración* asociada al espacio foliado (X, \mathcal{F}) . Denotaremos la filtración por $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $B_0 = X$. Los conjuntos $B_i \setminus B_{i+1}$, $i \geq 0$, son abiertos densos en B_i y forman una partición de X en subespacios foliados saturados con holonomía trivial. Por tanto, la Proposición 3.3.17, nos asegura que

$$\text{Cat}(\mathcal{O}(X), \Lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Cat}(\mathcal{O}(B_{i-1} \setminus B_i), \Lambda).$$

Para el caso topológico obtenemos una cota inferior de $\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda)$ a partir de las Λ -categorías de los $B_{i-1} \setminus B_i$, $i \in \mathbb{N}$. Por tanto, la cuestión primera es dar un método de cálculo de la Λ -categoría para los espacios foliados por hojas compactas y con holonomía trivial.

4.2. Estructura medible del espacio cociente. La medida cociente

Existen diversas formas de dar una buena estructura medible al cociente incluso teniendo en cuenta el aparente problema de que éste pueda no ser Hausdorff. Exponemos a continuación un resultado de interés que podemos encontrar en [36].

Definición 4.2.1 *Sea (X, R) un conjunto con una relación de equivalencia. Un subespacio Y de X se dice que es una región fundamental para la relación R si Y corta a cada clase de equivalencia en exactamente un punto.*

Teorema 4.2.2 ([36]) *Sea R una relación de equivalencia en un espacio Polaco X tal que cada clase de equivalencia es un cerrado de X . Si la saturación de cada abierto en X es un conjunto de Borel, entonces existe un conjunto de Borel S en X que es una región fundamental para R . Si la saturación de un abierto es abierta, entonces se puede escoger un espacio polaco como región fundamental.*

Proposición 4.2.3 *Sea (X, \mathcal{F}) un espacio foliado con todas las hojas cerradas y sea T una transversal total para \mathcal{F} . Entonces existe una región fundamental boreliana para la relación de equivalencia inducida por \mathcal{F} en T .*

Demostración:

Es consecuencia del teorema anterior. Las órbitas son cerradas pues las hojas de \mathcal{F} lo son y la saturación de un abierto es un abierto. Además, en la Proposición 4.2.3, dicha región se puede tomar homeomorfa a un espacio polaco. \square

Sea Γ el pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F} en T . Si R es una región fundamental boreliana, existe una aplicación continua y biyectiva

$$\pi : R \rightarrow T/\Gamma \approx X/\mathcal{F}$$

inducida por la proyección al cociente. Esta aplicación es siempre un isomorfismo de Borel. La razón de esto es que toda región fundamental es un espacio estándar y X/\mathcal{F} también tiene estructura estándar pues la filtración de Epstein da un medio de expresar este espacio como unión numerable de espacios estándar, toda aplicación medible y biyectiva entre espacios estándar es un isomorfismo medible. Por lo tanto la medida $\Lambda_{\mathcal{F}}$ en X/\mathcal{F} se define mediante este isomorfismo considerando la medida Λ en la región R . De hecho, en [25], se comprueba que $\Lambda_{\mathcal{F}}$ no depende de la región fundamental escogida, pues todas las regiones fundamentales son equivalentes por holonomía medible.

Observación 4.2.4 *La existencia de la filtración nos ofrece como corolario que la función $\text{Cat} : (X/\mathcal{F}, \mathcal{M}_{\pi}) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es medible.*

4.3. Cálculo medible

El caso medible queda restringido al mero cálculo en el caso de espacios foliados por hojas compactas y con holonomía trivial. Este caso es muy sencillo desde el punto de vista medible. Tomamos las componentes conexas del espacio X , a lo sumo una cantidad numerable. Como todas las hojas tienen holonomía trivial, en cada componente conexa disponemos de una sola clase de homeomorfía en las hojas (la hoja genérica). Teniendo en cuenta que disponemos de una región fundamental que es un espacio de Borel estándar y que la hoja es genérica en cada componente conexa, obtenemos que el espacio medible foliado $\mathcal{O}(X)$ es una unión disjunta de espacios producto $L_n \times R_n$. Donde L_n es la hoja genérica en cada componente y R_n es una región fundamental de cada componente. Como consecuencia de las Proposiciones 3.3.14 y 3.3.17, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.3.1 *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio foliado por hojas compactas con medida transversal invariante Λ . Se tiene*

$$\text{Cat}(\mathcal{O}(\mathcal{F}), \Lambda) = \int_{(X/\mathcal{F}, \mathcal{M}_{\pi})} \text{Cat}(L) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L) \leq \text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) .$$

4.4. Aplicación a puntos críticos

El verdadero interés que tiene la categoría LS clásica, y de hecho, lo que motivó su definición, es su relación con los puntos críticos de funciones diferenciables. En esta sección damos una adaptación de este resultado al caso de espacios foliados por hojas compactas. Recordemos primero un resultado clásico.

Teorema 4.4.1 (Ver e.g. [20, 11]) *Sea M una variedad cerrada C^1 y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable arbitraria. Entonces*

$$(4.1) \quad \text{Cat}(M) \leq \# \text{Crit}(f) .$$

Aquí, $\text{Crit}(f)$ denota el conjunto de puntos críticos de f . Observamos que la categoría LS clásica acota inferiormente el número de puntos críticos de cualquier función diferenciable sobre la variedad.

Suponemos en lo sucesivo que la clase de un espacio foliado es al menos $C^{1,0}$; es decir, los cambios de cartas son C^1 en las componentes tangentes a las hojas y continuos en la parte transversa y se tiene que las diferenciales de f en las hojas varían continuamente en el espacio ambiente.

Proposición 4.4.2 *Sea M una variedad cerrada y \mathcal{F} la foliación producto en $M \times S$ con hojas $M \times \{s\}, s \in S$, sea Λ una medida de Borel en S y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función $C^{1,0}$. Entonces*

$$\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) \leq \tilde{\Lambda}(\text{Crit}_{\mathcal{F}}(f)) ,$$

donde $\text{Crit}_{\mathcal{F}}(f) = \bigcup_{s \in S} \text{Crit}(f_s)$, siendo f_s la restricción de f a cada hoja $M \times \{s\}$.

Demostración:

Probaremos que $\text{Crit}_{\mathcal{F}}(f)$ es un conjunto σ -compacto, de hecho, veremos que es cerrado y por tanto medible. Esto se tiene en general para cualquier espacio foliado, así que lo probaremos con esta generalidad. Para ello consideramos la función diferencial $df : X \rightarrow T\mathcal{F}^*$ que está definida desde X al fibrado cotangente de la foliación. Al igual que el fibrado tangente de una variedad, $T\mathcal{F}^*$ tiene una estructura de fibrado vectorial heredada a partir de las cartas foliadas. Con esta estructura la sección cero θ , es una aplicación con imagen cerrada en $T\mathcal{F}^*$. Por otro lado df es continua pues $f \in C^{1,0}(M \times S, \mathcal{F})$. El carácter cerrado se obtiene ahora de observar que $\text{Crit}_{\mathcal{F}}(f) = df^{-1}(\theta(X))$.

Finalmente, de la desigualdad (4.1), se deduce fácilmente que

$$\begin{aligned} \text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) &= \text{Cat}(M) \cdot \Lambda(S) \\ &\leq \int_S \# \text{Crit}(f_s) d\Lambda(s) \end{aligned}$$

que concluye la demostración pues la última expresión es la medida transversa (tomando la extensión coherente) de los puntos críticos. \square

Esto sugiere en qué modo la Λ -categoría adapta el resultado sobre puntos críticos de la categoría L-S clásica; en este caso no se acota el número de puntos críticos sino lo que “pesan” transversalmente respecto de la medida.

Teorema 4.4.3 *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio foliado C^1 por hojas compactas con medida transversa invariante. Entonces*

$$\text{Cat}(\mathcal{O}(\mathcal{F}), \Lambda) \leq \tilde{\Lambda}(\text{Crit}_{\mathcal{F}}(f)) ,$$

para todo $f \in C^{1,0}(M, \mathcal{F})$.

Atendiendo a la fórmula del Corolario 4.3.1, obtenemos la siguiente expresión formal:

$$\text{Cat}(\mathcal{O}(\mathcal{F}), \Lambda) = \int_{X/\mathcal{F}} \text{Cat}(L) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L) \leq \int_{X/\mathcal{F}} \# \text{Crit}(f_L) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L) .$$

Esta expresión es formal puesto que no hemos visto que la segunda integral esté bien definida.

La demostración del teorema se reduce a dos cuestiones:

(1) La función $h : X/\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definida por $h(L) = \# \text{Crit}(f_L)$ es Borel-medible.

(2) $\int_{X/\mathcal{F}} \# \text{Crit}(f_L) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L) = \tilde{\Lambda}(\text{Crit}_{\mathcal{F}}(f))$.

Pero estas cuestiones de medibilidad se pueden restringir al caso de holonomía trivial, usando la filtración asociada. Por tanto estamos, esencialmente, en el mismo caso que el de un espacio medible foliado producto con hojas compactas.

Observación 4.4.4 *EL teorema también es cierto exigiendo algo menos a las funciones. Basta con que sean medibles y diferenciables en las hojas, con estas condiciones la diferencial varía mediblemente en el espacio ambiente, ésta es una apreciación debida a M.Bermúdez. Esto es suficiente para que $\text{Crit}_{\mathcal{F}}(f)$ sea medible, pues, a partir de las cartas, $T\mathcal{F}^*$ tiene estructura de espacio medible foliado con hojas TL^* , $L \in \mathcal{F}$, y la sección θ tiene imagen medible en $T\mathcal{F}^*$.*

El verdadero interés de este resultado es que sirve como punto de apoyo para futuras adaptaciones a casos más complicados en los que las hojas no sean necesariamente variedades cerradas.

4.5. Cohomología

A continuación enunciamos uno de los teoremas más útiles para obtener cotas inferiores de la categoría LS.

Definición 4.5.1 Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Se dice que es nilpotente si existe un número entero positivo n tal que $A^n = 0$. Se define el orden de nilpotencia de A , $\text{Nil}(A, +, \cdot)$, como el menor entero k que cumple $A^k = 0$.

Generalmente cometeremos el abuso de obviar la operación “+” del anillo en la notación.

Proposición 4.5.2 (ver e.g. [20, 11]) Sea M una variedad. Entonces

$$\text{Nil}(\tilde{H}^*(M, R), \wedge) \leq \text{Cat}(M),$$

donde $\tilde{H}^*(M, R)$ denota el anillo en cohomología singular reducida con coeficientes en R , siendo R cualquier anillo conmutativo.

Cuando $R = \mathbb{R}$, se trata de la cohomología de de Rham y podemos trabajar con formas diferenciales. Destacamos que existen cotas similares para la categoría tangente en variedades foliadas.

Proposición 4.5.3 (Macías, Colman Vale [8]) Sea (M, \mathcal{F}) una variedad foliada entonces se tiene

$$\text{Nil}(\tilde{H}^*(\mathcal{F})) \leq \text{Cat}(M, \mathcal{F}),$$

donde $\tilde{H}^*(\mathcal{F})$ es el anillo en cohomología foliada reducida.

Esta cohomología se obtiene al hacer el cociente del complejo de de Rham por el subcomplejo de las p -formas que se anulan en cualquier p -upla de campos de vectores tangentes a las hojas.

Proposición 4.5.4 (Singhof, Vogt [37]) Sea (M^n, \mathcal{F}) una variedad foliada (C^0) con $\dim \mathcal{F} = p$. Sea R un anillo conmutativo. Si existen elementos x_1, \dots, x_k de $H^*(M, R)$ de grado mayor que $n - p$ tales que $x_1 \cdots x_k \neq 0$, entonces $k + 1 \leq \text{Cat}(\mathcal{F})$.

Para espacios foliados con hojas compactas y con medida transversa invariante, en virtud del Corolario 4.3.1, es fácil probar que

$$\int_{X/\mathcal{F}} \text{Nil}(\tilde{H}^*(L, R)) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L) \leq \text{Cat}(\mathcal{O}(\mathcal{F}), \Lambda).$$

para cualquier anillo conmutativo R . La función

$$\text{Nil}(\tilde{H}^*(-, R)) : M/\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$$

es medible, pues es constante en cada elemento de la partición $\{B_{i-1} \setminus B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, donde $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es la filtración asociada. El resultado se sigue usando la Proposición 4.5.2.

Obtenemos así una familia de cotas simultáneas para la Λ -categoría topológica y medible en el caso de espacios foliados por hojas compactas. De todas formas no parece un buen camino para abordar una definición general de Λ -índice de nilpotencia que pueda adaptarse a casos más generales de forma sencilla.

Tal vez resulte más sencillo trabajar con la L^2 -cohomología (ver [7] y [18]). La idea a desarrollar es lograr introducir la medida a nivel cohomológico y tratar de definir lo que sería un Λ -índice de nilpotencia, del mismo modo que Connes logra definir los Λ -números de Betti (ver [10, 9]). Si nuestras definiciones son consistentes, deberíamos obtener una cota inferior para la Λ -categoría. Estas mismas ideas se pueden adaptar al caso de foliaciones medibles como podemos ver en [3].

Otra cuestión que surge es adaptar las Proposiciones 4.5.3 y 4.5.4 al caso de la categoría tangente medible. En general, los resultados existentes para categoría tangente se adaptan sin demasiados problemas a la categoría tangente medible.

4.6. El caso topológico

En esta sección realizamos el cálculo de la Λ -categoría topológica en el caso de espacios foliados compacto-Hausdorff con holonomía trivial y medida transversa invariante finita en compactos. Para una hoja L denotaremos U_L a una transversal local donde la dinámica de la foliación se trivialice. Es decir, existe un embebimiento abierto y foliado $i : L \times U_L \rightarrow (X, \mathcal{F})$, donde $L \times U_L$ está foliado como un producto con hojas $L \times \{*\}$ y existen $x \in L, y \in U_L$ tales que $i|_{L \times \{y\}}(z, y) = z$ y $i|_{\{x\} \times U_L}(x, h) = x$. Cuando la medida es finita en compactos la regularidad exterior se tiene inmediatamente para compactos. A una transversal del estilo U_L le llamaremos *transversal de trivialidad*.

Proposición 4.6.1 *Si la medida es finita en compactos, entonces para cada compacto K de una transversal se tiene*

$$\Lambda(K) = \inf\{\Lambda(V) \mid V \text{ abierto, } K \subset V\}.$$

Demostración:

Denotamos $V^\delta = \{x \in T \mid d(x, K) < \delta\}$, donde d denota una métrica en T compatible con la topología. Tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $V^{\frac{1}{N}}$ sea compacto. Veremos que para $\varepsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda(V^{\frac{1}{n}} \setminus K) < \varepsilon$. Como la medida es finita en compactos, tenemos que la serie

$$\sum_{m \geq N} \Lambda\left(V^{\frac{1}{m}} \setminus \overline{V^{\frac{1}{m+1}}}\right)$$

converge absolutamente. Esto implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{m \geq n} \Lambda\left(V^{\frac{1}{m}} \setminus \overline{V^{\frac{1}{m+1}}}\right) < \varepsilon.$$

No hay más que observar ahora que $\sum_{m \geq n} \Lambda \left(V^{\frac{1}{m}} \setminus \overline{V^{\frac{1}{m+1}}} \right) = \Lambda(V^{\frac{1}{n}} \setminus K)$. \square

Corolario 4.6.2 *Si la medida es finita en compactos, entonces para cada conjunto σ -compacto K de una transversal se tiene*

$$\Lambda(K) = \inf\{\Lambda(V) \mid V \text{ abierto, } K \subset V\}.$$

Proposición 4.6.3 *Para cada hoja L existe una transversal de trivialidad U_L tal que $\Lambda(\partial U_L) = 0$.*

Demostración:

Sea L una hoja, $x \in L$ y T una transversal asociada a una carta, $x \in T$ y tal que \overline{T} es compacto. Podemos suponer que $\overline{U}_L \subset T$. Sea d una métrica en T compatible con la topología. Tomamos el abierto

$$U_L^\varepsilon = \{x \in T \mid d(x, U_L) < \varepsilon\}$$

y suponemos que existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que U_L^δ es de trivialidad. Todos los abiertos U_L^ε con $0 < \varepsilon \leq \delta$ son de trivialidad para L . Los bordes ∂U_L^ε son disjuntos. Si ninguno de ellos tiene medida nula obtenemos que

$$\begin{aligned} \Lambda(U_L^\delta) &\geq \sup\left\{\sum_{\varepsilon \in I} \Lambda(\partial U_L^\varepsilon) \mid I \subset (0, \delta) \text{ } I \text{ finito}\right\} \\ &= \sum_{0 < \varepsilon < \delta} \Lambda(\partial U_L^\varepsilon) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

la última igualdad se sigue de que la suma no numerable de términos positivos no nulos es infinita. Pero $\Lambda(\overline{U}_L)$ es finito pues la medida es finita en compactos. \square

Teorema 4.6.4 *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio foliado compacto-Hausdorff con medida transversal invariante finita en compactos y cuyas hojas tienen holonomía trivial. Entonces*

$$\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = \int_{X/\mathcal{F}} \text{Cat}(L) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L).$$

Demostración:

Para cada L tomamos una transversal de trivialidad U_L relativamente compacta en una transversal y tal que $\Lambda(\partial U_L) = 0$. Por la propiedad de Lindelöf obtenemos una familia $\{U_{L_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ junto con embebimientos foliados, $f_i : L \times U_{L_i} \rightarrow (X, \mathcal{F})$, tales que la familia $\{f_i(L_i \times U_{L_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$ recubre a X . Por abuso de notación no haremos referencia al embebimiento f_i y consideraremos los productos $L_i \times U_{L_i}$ como abiertos saturados de (X, \mathcal{F})

vía f_i . Recursivamente definimos $A_1 = L_1 \times U_{L_1}$, $A_k = (L_k \times U_{L_k}) \setminus (\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_{k-1}})$ para $k > 1$. Los conjuntos A_k son abiertos disjuntos y recubren X salvo un conjunto σ -compacto transversalmente nulo, pues los bordes de los U_{L_i} se escogieron de medida nula. Como la medida es regular exterior en σ -compactos, se sigue de la Proposición 3.3.10 que podemos prescindir de este conjunto a la hora de calcular la Λ -categoría topológica. En consecuencia

$$\begin{aligned} \text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Cat}(A_n, \Lambda) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{Cat}(L) \cdot \Lambda(U_{L_n} \cap A_n) \\ &= \int_{X/\mathcal{F}} \text{Cat}(L) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L). \end{aligned}$$

Esta cota superior es en realidad una igualdad, pues la desigualdad inversa la tenemos por la Observación 3.3.18. \square

Con un poco más de trabajo podemos ampliar este resultado a espacios foliados compactos-Hausdorff, con lo que se generaliza el Teorema 4.0.19.

Teorema 4.6.5 *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio foliado compacto-Hausdorff y Λ una medida transversa invariante finita en compactos. Entonces*

$$\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = \int_{X/\mathcal{F}} \text{Cat}(L) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L).$$

Demostración:

Observamos que Λ es regular exterior sobre σ -compactos. Sea $\{B_0 = X, B_1, \dots, B_n, \dots\}$ la filtración asociada a (X, \mathcal{F}) . Obtenemos así la partición de X dada por los conjuntos $\{F_i = B_{i-1} \setminus B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, donde cada F_i es un espacio foliado compacto-Hausdorff con holonomía trivial y denso en B_i . Para una hoja L , denotaremos por U_L a un abierto de trivialidad en una transversal. Es decir, existe un embebimiento foliado

$$i_L : L \times_{h_L} U_L \rightarrow (X, \mathcal{F})$$

donde $i_L(L \times_{h_L} U_L)$ es un abierto en X que contiene a la hoja L , y $h_L(\pi_1(L))$, es un grupo de homeomorfismos de U_L isomorfo al grupo de holonomía $\text{hol}(L)$. Al igual que en el teorema anterior, cometeremos el abuso de no hacer referencia a las aplicaciones i_L . Para cada hoja $L \subset F_i$ y para $\varepsilon > 0$ tomamos un abierto de trivialidad U_L^i de modo que cumplan las siguientes condiciones:

- (i) $\overline{U_L^i}$ es compacto;
- (ii) $\Lambda(\partial U_L^i) = 0$;

$$(iii) \quad \Lambda((\bigcup_{L \in F_i/\mathcal{F}} U_L^i) \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2^i};$$

(iv) U_L^i corta a cada hoja de F_i en a lo sumo un punto. Además, las hojas de F_i contenidas en U_L^i son homeomorfas.

La propiedad (i) se deduce a partir de la compacidad local, las propiedades (ii) y (iii) se deducen a partir de la regularidad exterior en σ -compactos, y la propiedad (iv) es consecuencia de la continuidad de cualquier función de volumen en F_i . Usando la propiedad de Lindelöf, existen hojas $L_1^i, \dots, L_n^i, \dots$ de F_i tales que la familia de abiertos $L_n^i \times_{h_{L_n^i}} U_{L_n^i}^i$, $n \in \mathbb{N}$, recubre a X . Usamos ahora la técnica del teorema anterior. Tomamos $A_1^i = L_1^i \times_{h_{L_1^i}} U_{L_1^i}^i$ y

$$A_n^i = (L_n^i \times_{h_{L_n^i}} U_{L_n^i}^i) \setminus (\overline{A_1^i} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1}^i}), \quad n > 1.$$

Las familias $\{A_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ están formada por abiertos disjuntos que recubren a F_i salvo un conjunto σ -compacto transversalmente nulo, por tanto es prescindible a la hora de calcular la Λ -categoría topológica. Cada A_n^i es una suspensión de base L_n^i y fibra transversa $S_n^i = U_{L_n^i}^i \setminus (\overline{A_1^i} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1}^i})$. Es conocido que la categoría LS de las variedades está acotada superiormente por su dimensión más uno (véase *e.g.* [20]). Es sencillo comprobar que

$$(i) \quad \Lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^i \cap F_i) = \Lambda_{\mathcal{F}}(F_i/\mathcal{F}),$$

$$(ii) \quad \Lambda((\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^i) \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Combinando todos estos hechos con la Proposición 3.3.12 obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Cat}(L_n^i) \cdot \Lambda(S_n^i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\bigcup_n S_n^i} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Cat}(L_n^i) \chi_{S_n^i} d\Lambda \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\bigcup_n S_n^i \cap F_i} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Cat}(L_n^i) \chi_{S_n^i} d\Lambda \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\bigcup_n S_n^i \setminus F_i} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Cat}(L_n^i) \chi_{S_n^i} d\Lambda \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{F_i/\mathcal{F}} \text{Cat}(L) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L) + (\dim \mathcal{F} + 1) \cdot \Lambda((\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^i) \setminus F_i) \right) \\ &= \int_{X/\mathcal{F}} \text{Cat}(L) d\Lambda_{\mathcal{F}}(L) + (\dim \mathcal{F} + 1) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Dado que el término ε puede hacerse arbitrariamente pequeño obtenemos el resultado. \square

Este teorema permite hacer una adaptación del resultado de puntos críticos.

Corolario 4.6.6 Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio foliado $C^{1,0}$ compacto-Hausdorff con medida transversa invariante finita en compactos. Se tiene

$$\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) \leq \tilde{\Lambda}(\text{Crit}_{\mathcal{F}}(f)) .$$

para todo $f \in C^{1,0}(M, \mathcal{F})$.

4.7. Cálculo en ejemplos

Ejemplo 7 (Flujos de Krönecker de pendiente racional) Tomamos el plano euclídeo, y sobre él la foliación consistente en rectas paralelas a la recta que corta al origen con pendiente $\frac{m}{n}$, siendo m y n enteros primos entre sí. Al considerar la relación de equivalencia inducida por translaciones unitarias verticales y horizontales, obtenemos una foliación $\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}$ en el toro. Estas foliaciones son otra forma de ver los flujos de Krönecker racionales que introducimos en el Ejemplo 4. En un primer caso, vamos a mantener la medida transversa invariante fija en una misma transversal y calcular la correspondiente Λ -categoría.

La medida transversa invariante que consideraremos es la de Lebesgue en el meridiano que es una medida de probabilidad. Supondremos que la pendiente es $\frac{m}{n}$ siendo m y n primos entre sí. El espacio $T^2/\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}$ es homeomorfo a S^1 y veremos que la medida transversa cociente pasa a ser la de probabilidad anterior dividida por n . Por tanto obtenemos

Teorema 4.7.1 Sea $(T^2, \mathcal{F}_{\frac{m}{n}}, \Lambda)$ el flujo de Krönecker de pendiente racional $\frac{m}{n}$ sobre el toro con medida transversa invariante Λ que es la de Lebesgue normalizada sobre un meridiano, entonces $\text{Cat}_{\Lambda}(\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}) = \int_{S^1} 2 \, d\Lambda_{\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}} = \frac{2}{n}$.

Si consideramos la medida fija en el ecuador obtenemos $\text{Cat}(\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}, \Lambda) = \frac{2}{m}$.

En estos dos cálculos hemos omitido la foliación de pendiente 0. En el primero porque no tiene sentido decir que 0 es primo con nada, en este caso nos daría un producto y la Λ -categoría sería $\text{Cat}(S^1) \cdot \Lambda(S^1) = 2$. En el segundo la excluimos porque la medida ya no es transversa.

Estas foliaciones son homeomorfas y por tanto equivalentes por homotopía integrable. Dado que la Λ -categoría, considerando las medidas transversas anteriores, difiere en función de la pendiente, se sigue que cualquier equivalencia integrable entre los flujos de Krönecker racionales no puede ser compatible con las medidas anteriores.

Corolario 4.7.2 Sean $\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}$ y $\mathcal{F}_{\frac{p}{q}}$ dos flujos de Krönecker de pendiente racional positiva ó nula distinta. Entonces no existe ninguna equivalencia de homotopía integrable $\mathcal{F}_{\frac{m}{n}} \rightarrow \mathcal{F}_{\frac{p}{q}}$ que sea compatible con las medidas transversas invariantes anteriores.

Podemos sin embargo dejar variar la medida con la foliación para tener un resultado más natural. En este caso tomamos como transversal a un círculo que corte perpendicularmente a cada hoja de nuestra foliación y, como antes, damos la medida de Lebesgue. El cociente vuelve a ser S^1 pero veremos que la medida en este caso se divide por un factor $m^2 + n^2$.

Teorema 4.7.3 Sea $(T^2, \mathcal{F}_{\frac{m}{n}}, \Lambda)$ el flujo de Kröner de pendiente racional $\frac{m}{n}$ sobre el toro con medida transversa invariante Λ que es la de Lebesgue normalizada sobre una hoja de la foliación de Kröner de pendiente $\frac{m}{n}$. Entonces $\text{Cat}(\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}, \Lambda) = \frac{2}{m^2+n^2}$.

De nuevo, excluimos el caso $m=0$; también de aquí deducimos un resultado similar a la Proposición 4.7.2.

Corolario 4.7.4 Sean $\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}$ y $\mathcal{F}_{\frac{p}{q}}$ dos flujos de Kröner de pendiente racional distinta con $m \neq 0 \neq p$ y $m^2+n^2 \neq p^2+q^2$. Entonces no existe ninguna equivalencia de homotopía integrable entre estas foliaciones que sea compatible con las medidas transversas anteriores.

Adjuntamos a continuación los pasos a seguir para obtener los dos resultados que hemos introducido sobre la Λ -categoría de los flujos de Kröner racionales.

En el primer caso aseguramos que la medida cociente no depende del numerador de la fracción irreducible $\frac{m}{n}$. El cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ corta a cada clase de equivalencia; en él restringimos nuestro estudio. Un meridiano, que podemos identificar con el lado $[0, 1] \times \{0\}$, es una transversal compacta que corta a todas las hojas; por tanto el espacio $T^2/\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}$ se puede ver como un cociente de este meridiano. Para el cálculo del espacio cociente no tenemos más que ver en cuántos puntos distintos corta una de las hojas de $\mathcal{F}_{\frac{m}{n}}$ a nuestro meridiano.

Tomamos la hoja correspondiente a la recta $y = \frac{m}{n}x$. Como n y m son primos entre sí, existen enteros k y l tales que $kn+lm=1$. Usando esto es fácil probar que todas las rectas de la forma $y = \frac{m}{n}x + \frac{j}{n}$, $j \in \mathbb{N}$, son equivalentes con la tomada y , además, son todas las que son equivalentes con ésta. De este modo corta al meridiano en n puntos, pues corta a $[0, 1] \times \{0\}$ en $n-1$ puntos de su interior y en sus dos extremos que se identifican en un mismo punto en el cociente. Como estos puntos dividen este segmento en n intervalos iguales que son regiones fundamentales para el cociente. La medida cociente se reduce a la medida de cada uno de estos intervalos. En el caso especial de la medida de Lebesgue la medida cociente es la de Lebesgue, dividida por n .

En el segundo caso, la transversal tomada es una hoja de la foliación $\mathcal{F}_{-\frac{n}{m}}$. Por el razonamiento anterior, debemos calcular el número de puntos de corte que están en el cuadrado unidad entre la familia de rectas $y = \frac{m}{n}x + \frac{j}{n}$, $j \in \mathbb{N}$, que dan lugar a la hoja que pasa por el origen, y la familia $y = -\frac{n}{m}x + \frac{k}{m}$, $k \in \mathbb{N}$, que se asocian a una transversal que corta ortogonalmente a las hojas de la foliación. Usando que m y n son primos entre sí, es sencillo ver que los únicos puntos del borde del cuadrado en que estas familias se cortan son los vértices. Por tanto basta probar que el número de puntos de corte en el interior del cuadrado unitario es n^2+m^2-1 . Por simetría también nos podemos restringir al caso en que $m < n$.

Al igual que antes, suponemos que m y n son dos enteros primos entre sí con $m < n$. Las familias de rectas antes indicadas forman una figura en el plano que es invariante por traslaciones unitarias verticales y horizontales, y también es invariante por rotaciones de

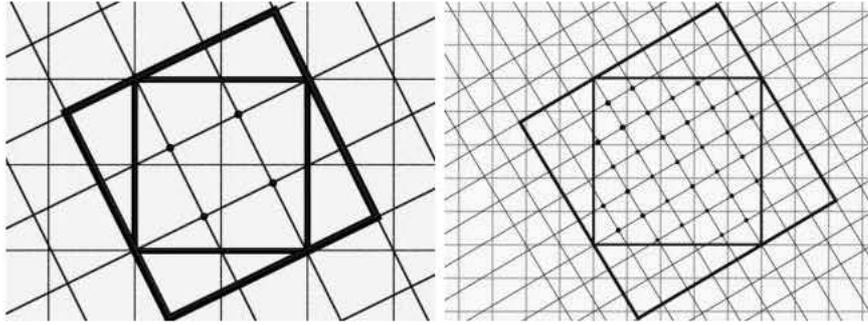


Figura 4.1: Cálculo de la Λ -categoría para pendientes $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$. Se remarcan los puntos que interesa contar en el interior del cuadrado unitario.

90 grados (ver figura 4.1). Podemos encerrar al cuadrado unitario en otro cuadrado, al que llamaremos C , determinado por las rectas

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{m}{n}x - \frac{m}{n}, & y_2 &= \frac{m}{n}x + 1, \\ y_3 &= -\frac{n}{m}x, & y_4 &= -\frac{n}{m}x + \frac{n+m}{m}. \end{aligned}$$

Los puntos de la intersección de esta familia que están en el interior del cuadrado unitario están contenidos en el conjunto de puntos de intersección del interior de C . Es sencillo ver que son $(m+n-1)^2$ puntos. Por otra parte, $C \setminus ((0,1) \times (0,1))$ es un conjunto formado por la unión disjunta de cuatro triángulos rectángulos iguales y que, por simetría y transformaciones del grupo que actúa en la figura, contienen en su interior el mismo número de puntos de intersección (véase Figura 4.1). Además, no hay puntos de intersección en la hipotenusa de ninguno de estos triángulos pues m y n son primos entre sí. De manera que, para calcular el número de puntos de intersección en cualquiera de estos triángulos, basta con tomar la mitad de puntos de intersección que hay en el rectángulo con diagonal una hipotenusa; esto nos da $\frac{(m-1)(n-1)}{2}$. Estas observaciones implican que el número de puntos de intersección en el cuadrado unitario es

$$(m+n-1)^2 - 4 \frac{(m-1)(n-1)}{2} = m^2 + n^2 - 1.$$

Observamos que, como la medida es finita en compactos y el espacio foliado es compacto-Hausdorff, la fórmula obtenida en el Teorema 4.6.5 nos da la Λ -categoría topológica y medible.

Ejemplo 8 El ejemplo que vamos a tratar a continuación fue descubierto por Bing [5]. Se trata de una foliación compacto-Hausdorff que no admite en las hojas de holonomía no trivial ningún entorno saturado que sea homeomorfo a una suspensión de un disco en $\mathbb{R}^{\text{codim } \mathcal{F}}$ por la acción de un grupo finito de $O(n)$. Por tanto, esta foliación no es

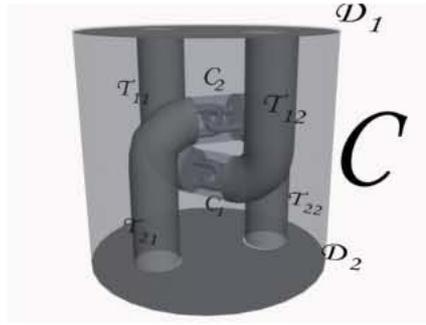


Figura 4.2: Construcción de la esfera con cuernos de Alexander.

homeomorfa a ninguna foliación C^1 compacta-Hausdorff. El resultado de Bing es largo de explicar y por tanto remitimos a la bibliografía. Ofrecemos aquí los resultados sin su demostración lo que será suficiente para abordar el cálculo de las Λ -categorías medible y topológica.

La esfera con cuernos fue introducida por Alexander en 1924 [2]. Se trata de un espacio en \mathbb{R}^3 homeomorfo a S^2 pero cuyo interior es un abierto que no es simplemente conexo. La construcción de la esfera con cuernos se realiza como sigue. Primero tomamos un cilindro cerrado C en \mathbb{R}^3 con tapas D_1 y D_2 . En cada una de las tapas escogemos dos discos disjuntos que son reemplazados por tubos T_{i1}, T_{i2} con una sola tapa cada uno D_{i1}, D_{i2} . Tomamos dos nuevos cilindros C_1 y C_2 , que son ayudantes para la construcción pero que no se consideran parte topológica de la esfera con cuernos, dichos cilindros tienen por tapas a D_{i1}, D_{i2} $i = \{1, 2\}$ respectivamente. Esto se hace de manera que los tubos $T_{11} \cup C_1 \cup T_{12}$ y $T_{21} \cup C_2 \cup T_{22}$ se entrelacen como indica la figura 4.2. Repetimos ahora el proceso en los cilindros C_1 y C_2 y así ad infinitum. Es claro que cada espacio que obtenemos en una cantidad finita de pasos, pasos en los que extraemos pares de discos disjuntos y adjuntamos pares de tubos con una tapa, es homeomorfo a S^2 . Alexander prueba que el espacio límite también es homeomorfo a una esfera y su interior no es simplemente conexo.

Teorema 4.7.5 (Bing [5]) Existe una descomposición de S^3 , $S^3 = U_1 \sqcup U_2 \sqcup M$, donde los U_i son abiertos y M es una esfera con cuernos, y existe un homeomorfismo involutivo $f : S^3 \rightarrow S^3$ que intercambia U_1 con U_2 y fija los puntos de M . En los puntos de M no existe ningún entorno donde f sea topológicamente un movimiento rígido de \mathbb{R}^3 .

Obtenemos así una foliación compacta-Hausdorff de dimensión 1 sobre una variedad de dimensión 4 dada por la suspensión $R \times_f S^3$. Una medida transversa invariante viene caracterizada por sus valores en los borelianos de U_1 y de M . Usando el Corolario 4.3.1 y el Teorema 4.6.5 obtenemos

$$\text{Cat}(\mathcal{O}(\mathcal{F}), \Lambda) = \text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = 2 \cdot \Lambda(U_1) + 2 \cdot \Lambda(M) = \Lambda(S^3) + \Lambda(M).$$

El estudio de este ejemplo fue el que motivó la demostración del Teorema 4.6.5.

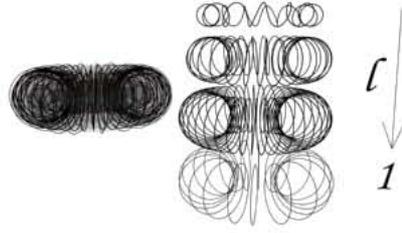


Figura 4.3: Visualización del ejemplo 9.

Ejemplo 9 Damos a continuación un ejemplo muy sencillo de espacio foliado por hojas compactas con espacio cociente no Hausdorff. Consideramos el subespacio de $S \subset \mathbb{R}^2$ definido por $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n > 1\}$. Denominamos S_1 a la circunferencia de radio l . Definimos sobre $T = S \setminus S_1$ el homeomorfismo $f : T \rightarrow T$ donde $f|_{S_{1-\frac{1}{n}}} : S_{1-\frac{1}{n}} \rightarrow S_{1-\frac{1}{n}}$ es una rotación de ángulo $\frac{2\pi}{n}$. Sobre $S^1 \times S$ definimos un espacio foliado donde las hojas en $S^1 \times T$ vienen dadas por las hojas de la suspensión $\mathbb{R} \times_f T$ y sobre $S^1 \times S_1$ consideramos la foliación producto donde las hojas son las fibras $S^1 \times \{*\}$. Visualizamos este espacio foliado en la Figura 4.3. Claramente la filtración asociada viene dada por $B_0 = X$ y $B_1 = S^1 \times S_1$. Una medida invariante es considerar la medida de Lebesgue en cada círculo S_l , homogeneizada de forma que $\Lambda(S_{1-\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}$, y $\Lambda(\{*\} \times S_1) = 1$ para la fibra de B_1 . El Corolario 4.3.1, junto con los cálculos realizados en el Ejemplo 7, nos da la Λ -categoría medible de forma automática

$$\text{Cat}(\mathcal{O}(\mathcal{F}), \Lambda) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Destacamos que la medida considerada no es regular exterior ni finita en compactos. Sin embargo, es fácil probar, usando la Proposición 1.5.9, que $\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = \infty$, pues el cálculo del peso transversal óptimo de un recubrimiento abierto de B_1 incluirá una sección infinita de la serie armónica $\sum_n \frac{2}{n}$. Por tanto las categorías topológica y medible no coinciden.

Del ejemplo anterior se desprende que una condición necesaria para tener la igualdad entre las categorías es la regularidad exterior en σ -compactos.

Ejemplo 10 Tratamos, por último, una familia entera de ejemplos. Dicha familia fue introducida por Vogt [38] basándose en un trabajo de Reeb [32]. Esta familia sirve para probar el siguiente teorema.

Teorema 4.7.6 (E. Vogt [38]) Para toda variedad cerrada y analítica F , existe una foliación compacta no Hausdorff analítica de codimensión mayor o igual que 2 que admite a F como hoja típica.

Tomamos una variedad cerrada y analítica F . Sea $f : F \rightarrow [0, 1]$ una aplicación de Morse analítica y consideramos la variedad analítica

$$M' = F \times S^1 \times (-1, 1)$$

con coordenadas $x \in F, \varphi \in S^1 (= \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), t \in (-1, 1)$. Sea

$$M = M' \setminus \{(x, \varphi, 0) \mid f(x) \text{ es un valor crítico para } f\}.$$

En M , el sistema Paffiano dado por

$$\omega_1 = dt \quad \omega_2 = t d\varphi + df$$

tiene rango 2 y define una foliación $\mathcal{F}(F, f)$ de dimensión $\dim F$ por $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Cada hoja está contenida en alguna de las secciones

$$M_\tau = \{(x, \varphi, t) \mid t = \tau\}.$$

Para $\tau \neq 0$ las hojas en $M_\tau = F \times S^1 \times \{\tau\}$ son los grafos de las funciones

$$\phi_\tau + \varphi_0 : F \rightarrow S^1,$$

donde $(\phi_\tau + \varphi_0)(x) = (-\frac{1}{\tau}f(x) + \varphi_0) \bmod 2\pi$. Para $\tau = 0$ las hojas son de la forma $L \times S^1 \times \{0\}$, donde L es una componente conexa de $f^{-1}(s)$ para algún valor regular s de f . Es decir, vienen dadas por las "curvas" de nivel de f .

En consecuencia toda hoja de $M \setminus M_0$ es difeomorfa a F ; de hecho, tienen holonomía trivial y cortan en un sólo punto a la variedad $\{x\} \times S^1 \times ((-1, 1) \setminus \{0\})$; el corte es transversal si x no es un punto crítico de f . Por tanto $M \setminus M_0$ es un fibrado trivial con fibra transversal $S^1 \times ((-1, 1) \setminus \{0\})$ y base F .

Por otro lado, todo entorno de una hoja de M_0 corta una hoja en M_t para $t \neq 0$. La función f , vista como aplicación de M a $[0, 1]$ es constante en las hojas de M_0 (pues son precisamente las "curvas" de nivel de f). Sin embargo f es sobreyectiva en cada hoja de $M \setminus M_0$. Así, las hojas de M_0 admiten entornos que no contienen entornos saturados. Por tanto el cociente no es Hausdorff en virtud de la Proposición 1.7.4.

Las medidas invariantes se caracterizan por la medida en borelianos de $\{x\} \times S^1 \times ((-1, 1) \setminus \{0\})$ y la medida en una transversal completa para M_0 . Denotamos por $\{L_i\}_{i=1}^N$ a los diferentes tipos de homeomorfía en las curvas de nivel de f (preimágenes de valores regulares de f). Usando la reconstrucción de F a partir de los puntos críticos de la función de Morse f , obtenemos que

$$M_0 \approx \sqcup_{i=1}^N (L_i \times S^1) \times I_i,$$

donde los I_i son intervalos abiertos embebidos en F transversos a las curvas de nivel. En consecuencia,

$$\text{Cat}(\mathcal{O}(\mathcal{F}(F, f)), \Lambda)$$

$$= \text{Cat}(F) \cdot \Lambda(\{x\} \times S^1 \times ((-1, 1) \setminus \{0\})) + \sum_{i=1}^N \text{Cat}(L_i \times S^1) \cdot \Lambda(I_i).$$

El estudio de la Λ -categoría topológica en general dependerá de la elección de F y f . Puede esperarse que la regularidad exterior fuerce la igualdad de las dos Λ -categorías al igual que en el ejemplo anterior, pero no disponemos una prueba genérica de este hecho.

Pregunta 4.7.7 *La cuestión que queda abierta es encontrar condiciones para asegurar que la fórmula obtenida en el Teorema 4.6.5 se generalice al caso de espacios foliados por hojas compactas cuyo cociente no sea necesariamente Hausdorff. ¿Basta la regularidad exterior para obtener este resultado?*

Capítulo 5

Suspensiones de Rohlin y flujos minimales

Estudiamos en este capítulo la Λ -categoría topológica y medible de espacios foliados minimales. Nuestra inspiración surge del cálculo de la Λ -categoría topológica de los flujos de Krönecker de pendiente irracional [25]. Haremos previamente un estudio medible que, como es de esperar, será más sencillo.

5.1. Torres de Rohlin

Teorema 5.1.1 (Teorema de la Torre de Rohlin, véase e.g. [34]) *Sea f un automorfismo de Borel de un espacio de probabilidad (S, μ) que conserva la medida de S . Suponemos que f es aperiódica, es decir, $f^n(x) \neq x \forall x \in X$. Entonces, para cada entero positivo n y cada $\varepsilon > 0$ existe un boreliano $E \subset S$ tal que los conjuntos E, fE, \dots, f^nE son disjuntos y $\mu(E \cup \dots \cup f^nE) > 1 - \varepsilon$.*

El teorema de Rohlin tiene potentes generalizaciones a acciones libres de cierto tipo de grupos sobre un espacio de Borel estándar. En lo sucesivo supondremos que los grupos considerados son localmente compactos, Hausdorff y segundo numerables. Esto implica la existencia de una medida de Haar en los grupos.

Definición 5.1.2 *Sea G un grupo topológico localmente compacto, Hausdorff y segundo numerable actuando sobre un espacio de Borel estándar X con una medida de probabilidad invariante Λ . Sea $F \subset G$ un boreliano. Una F -base en X es un boreliano $V \subset X$ tal que FV es de Borel, $\Lambda(FV) > 0$, y los conjuntos $fV, f \in F$, son disjuntos. Una F -torre $\bar{V} \subset X$ es un conjunto $\bar{V} = FV$ donde V es una F -base.*

Definición 5.1.3 *Un abierto relativamente compacto $F \subset G$ es un conjunto de Rohlin si para cualquier acción libre de G sobre un espacio de Borel estándar X que conserva*

una medida de probabilidad Λ , y para todo $\varepsilon > 0$ existe una F -torre $\bar{V} \subset X$ tal que $\Lambda(\bar{V}) > 1 - \varepsilon$.

Definición 5.1.4 G es un grupo de Rohlin si para cualquier compacto $E \subset G$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existe un conjunto de Rohlin $F \subset G$ tal que $E \subset F$.

Ejemplo 11 Cualquier grupo abeliano discreto es un grupo de Rohlin. También $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m$ son grupos de Rohlin. También los grupos resolubles son de Rohlin. Una generalización de estos resultados está dada en [34].

Definición 5.1.5 Un grupo localmente compacto, Hausdorff y segundo numerable G con una medida de Haar λ se dice promediable si existe un funcional lineal $\Lambda : L^\infty(G, \lambda) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ tal que $\Lambda(1) = 1$, $\Lambda(f) \geq 0$ si $f \geq 0$ y $\Lambda(gf) = \Lambda(f)$ para todo $g \in G$, $f \in L^\infty(G, \lambda)$. Donde $1 : G \rightarrow \mathbb{R}$ es la función constante 1 y $L^\infty(G, \lambda)$ es el espacio de Banach de funciones esencialmente acotadas respecto de la medida λ .

Definición 5.1.6 Un grupo G se dice casi conexo si G/G_0 es compacto, donde G_0 representa la componente conexa del elemento neutro.

Teorema 5.1.7 (Caroline Series [34]) Los grupos localmente compactos, Hausdorff, segundo numerables, casi conexos y promediables son grupos de Rohlin.

Teorema 5.1.8 (Ornstein, Weiss [29]) Los grupos discretos y promediables son grupos de Rohlin.

5.2. Suspensiones medibles libres por grupos de Rohlin

Las suspensiones medibles admiten atlas medibles foliados regulares, esto es sencillo de probar tomando un recubrimiento localmente finito de la variedad base por abiertos de trivialidad; esto permite usar el Lema 1.6.16. El teorema de Rohlin tiene una aplicación inmediata al cálculo de la Λ -categoría de una suspensión medible generada por un automorfismo aperiódico.

Proposición 5.2.1 Sea $\widetilde{S^1} \times_h S$ una suspensión medible y, identificando $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, suponemos $h(1)$ aperiódica. Sea Λ una medida transversa invariante que es finita en S . Entonces $\text{Cat}(\widetilde{S^1} \times_h S, \Lambda) = 0$.

Demostración:

Sin perder generalidad podemos suponer que la medida es de probabilidad y aplicar el Teorema 5.1.1. Para cada n y $\varepsilon > 0$ obtenemos un boreliano $E \subset S$ con $\Lambda(E \cup \dots \cup h(1)^n E) > 1 - \varepsilon$, donde esta unión es disjunta. Es claro que $\Lambda(E) < \frac{1}{n}$. Sea $\{U_1, U_2\}$ un recubrimiento por abiertos contráctiles de S^1 , que son, en particular, abiertos de trivialidad. En consecuencia $p^{-1}(U_i) \approx U_i \times S$ vía un MT-isomorfismo $f_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times S$ tal que $\pi \circ f_i = p$,

donde $\pi : U_i \times S \rightarrow S^1$ es la proyección en el primer factor y $p : \mathbb{R} \times_h S \rightarrow S^1$ es la proyección inducida en la suspensión. Los abiertos medibles $f_i^{-1}(U_i \times E)$ son tangencialmente mediblemente categóricos y se contraen por homotopía medible a E y $\tau_\Lambda(U_i \times E) < \frac{1}{n}$. Lo mismo que hemos hecho para E se puede hacer para cada $h(1)^k E$, obteniendo $2 \cdot (n + 1)$ abiertos producto MT-embedidos:

$$f_i^{-1}(U_i \times E), \dots, f_i^{-1}(U_i \times h(1)^n E), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Destacamos ahora que para cada $i \in \{1, 2\}$, el abierto $\bigcup_{k=0}^n f_i^{-1}(U_i \times h(1)^k E)$ es también un abierto producto con transversal medible E y placas categóricas. Esto se deduce del hecho de que los borelianos $E, \dots, h(1)^n E$ son disjuntos y se corresponden por holonomía, por tanto existe una homotopía medible que deforma a cada $h(1)^j E$ en E por el Lema 1.6.16. Componiendo estas homotopías medibles, en el sentido de la Definición 6.3.6, con las contracciones que llevan a cada $f_i^{-1}(U_i \times h(1)^j E)$ en $h(1)^j E$ obtenemos la homotopía buscada.

Por tanto, los abiertos medibles $V_i = \bigcup_{k=0}^n f_i^{-1}(U_i \times h(1)^k E)$, $i \in \{1, 2\}$, se deforman por homotopía medible en $f_i^{-1}(\{*\} \times E)$. Tomamos a continuación los abiertos medibles $V'_i = f_i^{-1}(U_i \times (S \setminus \bigcup_{k=0}^n h(1)^k E))$, $i \in \{1, 2\}$, que claramente se deforman por homotopía medible en $f_i^{-1}(\{*\} \times (S \setminus \bigcup_{k=0}^n h(1)^k E))$ que tiene medida menor que ε . Obtenemos así un recubrimiento de $\mathbb{R} \times_h S$ por abiertos medibles, $\mathcal{U} = \{V_1, V_2, V'_1, V'_2\}$. Es claro que $\tau_\Lambda(\mathcal{U}) < 2 \cdot (\frac{1}{n} + \varepsilon)$, que tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ y $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Recordamos que una acción es libre si solo existe una transformación con puntos fijos, que es la identidad. Cuando hablamos de suspensiones libres $\widetilde{M} \times_h S$, entendemos que es el grupo $h(\pi_1(M))$ el que actúa libremente sobre S . Cuando una suspensión tenga un grupo de holonomía de Rohlin actuando libremente diremos que es una *suspensión de Rohlin*. La anterior demostración se adapta sin dificultad para obtener el siguiente resultado.

Corolario 5.2.2 *Sea $\widetilde{M} \times_h S$ una suspensión de Rohlin y Λ es una medida transversa invariante finita en S , suponemos $\#h(\pi_1(M)) = \infty$. Entonces*

$$\text{Cat}(\widetilde{M} \times_h S, \Lambda) = 0.$$

Observación 5.2.3 *Si $h(\pi_1(M))$ es finito, entonces estamos en el caso de un espacio medible foliado por hojas compactas. Existe un boreliano $B \subset S$ que corta a cada hoja en un sólo punto (aplicando el Teorema 4.2.2). Puesto que los tipos de hoja se corresponden con las isotropías del grupo $h(\pi_1(M))$, que son a lo sumo una cantidad finita, obtenemos una partición finita de $B = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_N$ en borelianos donde todos los puntos de cada B_i tienen la misma isotropía. Usando los mismos argumentos del capítulo 3, es fácil probar que*

$$\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = \sum_{i=1}^N \text{Cat}(L_i) \cdot \Lambda(B_i) = \int_B \text{Cat}(L_x) d\Lambda(x),$$

donde L_i es cualquier hoja que corta a B_i y L_x es la hoja pasando por el punto x . Este argumento sirve aunque la acción no sea libre siempre y cuando la holonomía sea finita.

5.3. Suspensiones topológicas libres por grupos de Rohlin

Nuestro enfoque actual se centra en adaptar el resultado anterior al caso topológico. Nuestro objetivo es calcular la Λ -categoría topológica en este caso. Por medida transversa invariante se entenderá una medida de probabilidad en S que es invariante por la acción del grupo $h(\pi_1(M))$. Al igual que antes, cuando el grupo $h(\pi_1(M))$ sea de Rohlin y la acción sea libre, diremos que se trata de una *acción de Rohlin*.

Teorema 5.3.1 *Sea $\widetilde{M} \times_h S$ una suspensión de Rohlin, Λ una medida de probabilidad transversa invariante y regular exterior y tal que $\#h(\pi_1(M)) = \infty$. Entonces $\text{Cat}(\widetilde{M} \times_h S, \Lambda) = 0$.*

Recordamos que los grupos de homotopía de las variedades son discretos. En lo sucesivo tomaremos una numeración de $h(\pi_1(M)) = \{\phi_i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, donde denotaremos $\phi_0 = \text{id}$.

Definición 5.3.2 *Sea $\widetilde{M} \times_h S$ una suspensión. Sea V un abierto de S y sea $x \in S$. Se dice que V admite una extensión de longitud n respecto de una numeración ϕ_i de $h(\pi_1(M))$ si la colección de abiertos $\{\phi_i(V)\}_{i=0}^n$ es dos a dos disjunta.*

Observación 5.3.3 *Observamos también que, como la medida es finita y regular exterior, para todo $\varepsilon > 0$ y para todo abierto V de S existe un abierto $W \subset S$ que lo contiene tal que $\Lambda(W \setminus V) < \varepsilon$ y $\Lambda(\partial W) = 0$. Esto nos permitirá tomar abiertos con borde de medida nula. El abierto W también se puede suponer ε -próximo a V respecto de una métrica en S . Esto se obtiene usando los mismos argumentos de la Sección 4.6 del Capítulo 4.*

Lema 5.3.4 *Sea M una variedad conexa. Sea $\widetilde{M} \times_h S$ una suspensión libre y Λ una medida de probabilidad en S transversa invariante, regular exterior y que se anule en puntos. Para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo abierto V de S y para todo $x \in S$, existe una partición $\{F, V_1, \dots, V_n, \dots\}$ de V tal que F es un cerrado en V con Λ -medida nula y cada V_i es un abierto que admite una extensión de longitud n respecto de la numeración dada de $h(\pi_1(M))$.*

Demostración:

Probamos primero el caso $n = 1$, el caso general se seguirá por inducción. Si $\phi_1(V)$ no es disjunto con V entonces, usando que la acción es libre y las transformaciones continuas, para cada $y \in V$ existe un entorno abierto $V_y \subset V$ donde $V_y \cap \phi(V_y) = \emptyset$. También podemos suponer, por la observación anterior, que los bordes de estos abiertos tienen Λ -medida nula. Por la propiedad de Lindelöf existe una subcolección numerable $\{V_{y_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ que cubre a V . Tomemos la colección de abiertos $W_1 = V_{y_1}$, $W_k = \text{int}(V_{y_k} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} W_i)$ para $k \geq 2$. Obtenemos la partición $\{F = V \setminus \bigcup_n W_n, W_1, \dots, W_j, \dots\}$ de V , F es de medida nula y $W_i \cap \phi_1(W_i) = \emptyset$. Esto prueba el caso $n = 1$.

Suponemos ahora que el lema es cierto para $n-1$, con lo cual existe una descomposición $\{F', W'_1, \dots, W'_j, \dots\}$ de V tal que F' es un cerrado de medida nula y los W'_j son abiertos que

admiten extensiones de longitud $n - 1$ respecto de la numeración. Vamos a refinar esta descomposición en un número finito de pasos para conseguir la descomposición deseada. Si $W'_j \cap \phi_n(W'_j) = \emptyset$ entonces tomamos $W_1^{0j} = W'_j$. En caso contrario podemos proceder como en caso $n = 1$ y conseguimos descomposiciones $\{F_{0j}, W_1^{0j}, \dots, W_k^{0j}, \dots\}$ de W'_j donde F_{0j} es un cerrado de medida nula en W'_j y los W_k^{0j} son abiertos tales que $W_k^{0j} \cap \phi_n(W_k^{0j}) = \emptyset$. La familia de conjuntos $\{F_0 = F' \cup \bigcup_j F_{0j}, W_k^{0j}\}_{k,j \in \mathbb{N}}$ es una partición de V , donde F_0 es un cerrado de medida nula y los W_k^{0j} admiten extensiones de longitud $n - 1$ y además $W_k^{0j} \cap \phi_n(W_k^{0j}) = \emptyset$. Podemos reenumerar esta descomposición para que sea más cómodo el trabajo quedándonos de la siguiente forma: $\{F_0, W_1^0, \dots, W_j^0, \dots\}$. A continuación, si $\phi_1(W_j^0) \cap \phi_n(W_j^0) = \emptyset$, entonces tomamos $W_1^{1j} = W_j^0$. En caso contrario procedemos como en el caso 1 obteniendo la descomposición $\{F_{1j}, W_1^{1j}, \dots, W_k^{1j}, \dots\}$ de W_j^0 , donde F_{1j} es un cerrado en W_j^0 de medida nula y los W_k^{1j} son abiertos tales que $\phi_l(W_j^0) \cap \phi_n(W_j^0) = \emptyset$, $0 \leq l \leq 1$; de este modo obtenemos la descomposición $\{F_1 = F_0 \cup \bigcup_j F_{1j}, W_k^{1j}\}_{k,j \in \mathbb{N}}$ de V donde F_1 es un cerrado de medida nula y los W_k^{1j} son abiertos disjuntos tales que $\phi_l(W_j^0) \cap \phi_n(W_j^0) = \emptyset$, $0 \leq l \leq 1$, dicha descomposición se puede reenumerar como $\{F_1, W_1^1, \dots, W_j^1, \dots\}$ y proceder del mismo modo para ϕ_2 . Es claro que la descomposición final $\{F_{n-1}, W_1^{n-1}, \dots, W_j^{n-1}, \dots\}$ es la partición buscada. \square

Observación 5.3.5 (Significado geométrico de las extensiones) *Sea V un abierto que admite una extensión de longitud n respecto de una numeración $\{\phi_j\}$ de $h(\pi_1(M))$, y sea $\{U_1, \dots, U_k\}$ un recubrimiento por abiertos contráctiles de M , que son abiertos de trivialidad para la suspensión. Usando las mismas notaciones que en la sección anterior tenemos los homeomorfismos foliados $f_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times S$. Los abiertos $f_i^{-1}(U_i \times \phi_j(V))$ se contraen por homotopía integrable en $f_i^{-1}(\{*\} \times \phi_j(V))$. Dado que $V, \phi_1(V), \dots, \phi_n(V)$ son disjuntos y se corresponden por holonomía obtenemos, usando el mismo argumento que en la Proposición 5.2.1, que cada abierto $V_i = f_i^{-1}(\bigcup_{j=0}^n (U_i \times \phi_j(V)))$, $i \in \{1, \dots, k\}$, se deforman por homotopía integrable en $f_i^{-1}(\{*\} \times V)$. Ver Figura 5.1.*

Ya disponemos de todos los ingredientes para afrontar la demostración del Teorema 5.3.1.

Demostración:

[Demostración del Teorema 5.3.1]

Sea $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Como la acción es libre y $h(\pi_1(M))$ es de Rohlin, podemos usar las propiedades de esta acción dadas en la Sección 5.1. Tomamos las transformaciones de holonomía ϕ_0, \dots, ϕ_n . Existe un conjunto de Rohlin $F \subset G$, tal que $\phi_i \in F$ para $i \in \{0, \dots, n\}$. Como estamos en un grupo discreto y F es relativamente compacto, F es finito y por tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F \subset K = \{\phi_i \mid 0 \leq i \leq m\} \subset h(\pi_1(M))$. Como F es un conjunto de Rohlin obtenemos un boreliano $E \subset S$ tal que la colección $\{\phi(E)\}_{\phi \in F}$ es disjunta dos a dos y $\Lambda(\bigcup_{\phi \in F} \phi(E)) > 1 - \varepsilon$; en particular, $\Lambda(E) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$.

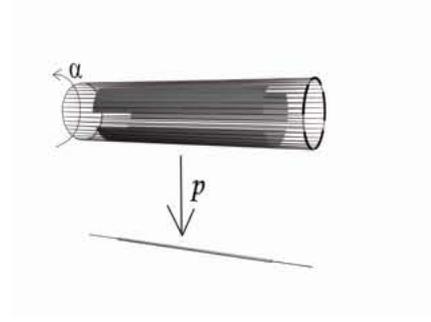


Figura 5.1: En esta figura se visualiza una extensión de longitud 5 en un flujo de Kröneck-er irracional (extremo derecho del cilindro). En verde vemos el abierto tangencialmente categórico que se forma a partir de un abierto contráctil en la circunferencia. Por comodidad visualizamos la foliación en un cilindro previo al paso por el cociente en el toro.

Teniendo en cuenta que la medida es regular exterior, existe un abierto V que contiene a E y $\Lambda(V \setminus E) < \varepsilon$, que implica $\Lambda(V) < 2\varepsilon$. También supondremos que $\Lambda(\partial V) = 0$. El Lema 5.3.4 implica la existencia de una partición $\{C, V_1, \dots, V_l, \dots\}$ de V tal que C es un cerrado de medida nula y los V_i admiten una extensión de longitud $m + 1$ respecto de la numeración dada. En virtud de la Observación 5.3.5 obtenemos una familia de abiertos tangencialmente categóricos $V_1^j, \dots, V_l^j, \dots$, $j \in \{1, \dots, k\}$, con $\tau_\Lambda(V_i^j) \leq \Lambda(V_i)$, donde k es el cardinal de un recubrimiento finito de M , $\{U_1, \dots, U_k\}$, por abiertos contráctiles. En consecuencia

$$\sum_{i=1, j=1}^{\infty, k} \tau_\Lambda(V_i^j) \leq \sum_{i=1, j=1}^{\infty, k} \Lambda(V_i) = k \cdot \Lambda(V) < 2k\varepsilon.$$

Observamos que $S \setminus \bigcup_{\phi \in K} \phi(\overline{V})$ es abierto pues K es finito, y $\Lambda(S \setminus \bigcup_{\phi \in F} \phi(\overline{V})) < \varepsilon$ puesto que $E \subset V$. Tomamos a continuación los abiertos

$$V_i' = f_i^{-1}(U_i \times (S \setminus \bigcup_{\phi \in F} \phi(\overline{V}))),$$

que son tangencialmente categóricos, pues se deforman por homotopía integrable a la transversal $S \setminus (\bigcup_{\phi \in F} \phi(\overline{V}))$. Uniendo todos estos resultados obtenemos la familia $\mathcal{U} = \{V_j', V_i^j\}_{i \in \mathbb{N}}^{j=1, \dots, k}$ que, junto con la saturación de $C \cup \partial V$, que es transversalmente nulo, recubre $\widetilde{M} \times_h S$. Por tanto

$$\text{Cat}(\widetilde{M} \times_h S, \Lambda) \leq \tau_\Lambda(\mathcal{U}) < k\varepsilon + 2k\varepsilon = 3k\varepsilon.$$

Dado que k es un parámetro fijo, obtenemos que la Λ -categoría es nula al tomar ε arbitrariamente pequeño. \square

Corolario 5.3.6 *Sea $\mathbb{R} \times_h S$ una suspensión minimal de dimensión 1, donde excluimos el caso trivial $S^1 \times \{*\}$. Sea Λ una medida de probabilidad en S transversa invariante regular exterior. Entonces $\text{Cat}(\mathbb{R} \times_h S) = 0$.*

Demostración:

Las suspensiones minimales de dimensión 1 están generadas por una transformación. Puesto que las hojas son densas, si la acción no es libre entonces existe una hoja homeomorfa a S^1 y toda la suspensión se reduce a esta hoja y estamos en el caso excluido. Si la acción es libre, usamos el Teorema 5.3.1 que nos da el resultado, pues \mathbb{Z} es un grupo de Rohlin. \square

Observación 5.3.7 *Dado que el Teorema 5.1.7 funciona para acciones de grupos promediabiles y casi conexos. Surge de modo natural la cuestión de adaptar estos resultados a espacios foliados originados a partir de una acción de un grupo de Lie promediable y casi conexo (o, en general, un grupo de Lie que sea también de Rohlin).*

5.4. Ejemplos ilustrativos

Damos a continuación una serie de ejemplos para comprender la aplicación del teorema precedente. En los ejemplos daremos cual es la transversal S la base M y las imágenes por h de los generadores del grupo fundamental de M .

Ejemplo 12 (Foliación de Denjoy) *La foliación de Denjoy (Ejemplo 5) es una suspensión aperiódica pero no minimal. La Λ -categoría se anula en este caso. Este resultado ya se obtuvo de forma independiente en [25].*

Ejemplo 13 *La suspensión tórica donde $S = S^1$, $h((1, 0)) = \text{id}$ y $h((0, 1))$ es una rotación minimal es libre y minimal. Este ejemplo muestra que la acción del grupo fundamental vía h no es libre pero sí es libre la acción de $h(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$; de hecho las hojas de la suspensión son cilindros.*

Ejemplo 14 *Sobre S^3 existen homeomorfismos minimales [15]; es decir, existen aplicaciones $f : S^3 \rightarrow S^3$ tal que el conjunto $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es minimal para todo $x \in S^3$. Tomamos $S^2 \times S^1$ sobre la que realizamos una suspensión con transversal $S = S^3$. El grupo fundamental de $S^2 \times S^1$ es \mathbb{Z} . Si tomamos como $h(1)$ un homeomorfismo minimal obtenemos una suspensión minimal y libre donde todas las hojas son homeomorfas a $S^2 \times \mathbb{R}$. Las hojas no son contráctiles pero sí simplemente conexas.*

Ejemplo 15 *Ya hemos visto que una suspensión libre no es necesariamente minimal. Vamos a dar un ejemplo a continuación de suspensión minimal no libre. La suspensión no se hará sobre una variedad; el resultado no será un espacio foliado si no un espacio polaco-foliado (ver Sección 1.8.2 del Capítulo 1).*

La suspensión se hará sobre la figura “8”, cuyo grupo fundamental es $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Llamaremos a y b a los generadores de este grupo. La transversal tomada será S^1 . Daremos a continuación dos homeomorfismos que serán las imágenes de los generadores del grupo fundamental. Tomamos sobre $[-1, 1]$ el homeomorfismo $f(x) = x^3$. Dicho homeomorfismo induce un homeomorfismo $\bar{f} : S^1 \rightarrow S^1$ identificando -1 con 1 . Claramente \bar{f} tiene dos puntos fijos, la clase del 1 y el 0 . Finalmente tomamos la suspensión donde $h(a) = \bar{f}$ y $h(b)$ es una rotación minimal. Dicha suspensión es minimal pero no es libre.

Este ejemplo es interesante por otro motivo. Dado que \bar{f} tiene dos puntos fijos, todas las hojas del espacio polaco foliado salvo dos son homeomorfas al grafo de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Las otras dos hojas que pasan por los puntos fijos, L' y L'' , son homeomorfas al grafo de \mathbb{Z} añadiéndole una circunferencia a cada vértice. La categoría LS del grafo de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ es 1 pues es contráctil. La categoría LS de L' es 2 como se comprueba fácilmente. Como el espacio foliado es minimal, la topología cociente es trivial (ver Proposición 1.3.1). Por tanto la σ -álgebra de Borel del espacio de hojas es trivial. La función $\text{Cat} : X/\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ no es constante y por tanto no es medible en el cociente.

Observamos que si en el espacio de hojas tomamos la estructura MT dada en la Definición 1.8.2, la función anterior sí es medible.

Ejemplo 16 (Foliaciones medibles de dimensión 2) En [4] se realiza una clasificación de los espacios medibles foliados de dimensión 2, ergódicas y promediables en función de la característica de Euler foliada [10] y del número de finales de la hoja genérica. Dicha clasificación se realiza salvo quasi-isomorfismos. Estudiaremos la Λ -categoría en esta clasificación. Se supone que los espacios en consideración admiten un atlas medible foliado finito y una transversal completa de medida finita. Adicionalmente, se supone que todas las hojas son Hausdorff.

Definición 5.4.1 Una medida de probabilidad transversa invariante Λ en un espacio medible foliado se dice ergódica si cualquier boreliano saturado A en una transversal completa tiene medida total o nula.

Definición 5.4.2 Dos espacios medibles foliados ergódicos son quasi-isomorfos si existe una MT-aplicación entre ellos que es un isomorfismo de Borel, conserva la medida ergódica y es un homeomorfismo hoja a hoja salvo en un conjunto de medida nula.

Definición 5.4.3 Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio medible foliado de dimensión 2, ergódico y promediable, y T una transversal. Obtenemos un nuevo espacio foliado ergódico y promediable $(X, \mathcal{F}, \Lambda)_T^\#$ definido por sustituir, en cada punto de T , un disco que rodee a dicho punto por un asa. La familia de discos se toma medible para que no haya problemas en la estructura medible.

Teorema 5.4.4 (Clasificación [4]) La clasificación salvo quasi-isomorfía de los espacios de Borel foliados de dimensión 2, ergódicos, promediables y orientados es la siguiente:

- (a) Si $\chi(X, \mathcal{F}, \Lambda) > 0$, entonces $(X, \mathcal{F}, \Lambda) \simeq S^2$.
- (b) Si $\chi(X, \mathcal{F}, \Lambda) = 0$, entonces $(X, \mathcal{F}, \Lambda) \simeq T^2$ o bien $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ es quasi-isomorfo a una suspensión tórica libre sobre S^1 por dos rotaciones de ángulo minimal, o bien es quasi-isomorfo a la suspensión dada en el Ejemplo 13.
- (c) Si $\chi(X, \mathcal{F}, \Lambda) < 0$, entonces $(X, \mathcal{F}, \Lambda) \simeq (Y, \mathcal{G}, \Lambda)_T^\#$, donde $(Y, \mathcal{G}, \Lambda)$ es un espacio de Borel foliado de los del tipo (b) y T una transversal.

Donde $\chi(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ es la Λ -carácterística de Euler del espacio medible foliado (ver [4]).

Proposición 5.4.5 Dos espacios de Borel foliados quasi-isomorfos tienen la misma Λ -categoría.

Proposición 5.4.6 Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio de Borel foliado de dimensión 2, ergódico, promediable y orientado. Supondremos que Λ es una medida de probabilidad en una transversal completa. Entonces la Λ -categoría vale

- (a) $\text{Cat}(X)$ si X es una superficie.
- (b) 0 en otro caso.

Demostración:

La prueba es una consecuencia de los resultados obtenidos hasta ahora cuando $\chi(X, \mathcal{F}, \Lambda) \geq 0$. El caso $\chi(X, \mathcal{F}, \Lambda) < 0$ es muy similar a los cálculos realizados en este capítulo. \square

5.5. Flujos minimales

Los flujos minimales son espacios foliados minimales de dimensión 1. Consideraremos siempre que las hojas son homeomorfas a \mathbb{R} , pues de lo contrario estaríamos en el caso de una foliación por una hoja, donde el estudio de la Λ -categoría se reduce al estudio de la categoría L-S usual. También supondremos que existen transversales no discretas, de lo contrario, el espacio foliado no es más que una suma topológica de una cierta cantidad de espacios homeomorfos a \mathbb{R} . A los flujos minimales que cumplan estas condiciones los llamaremos flujos minimales *no triviales*.

Las medidas transversas invariantes que tomaremos serán finitas en conjuntos compactos. Supondremos siempre que el espacio ambiente es compacto. Nuestro objetivo es probar que, bajo estas condiciones, la Λ -categoría es nula. Dado que el espacio total es compacto, existe un atlas foliado regular finito $\mathcal{U} = \{(U_1, \varphi_1), \dots, (U_N, \varphi_N)\}$. Tomamos transversales T_1, \dots, T_N asociadas a las cartas de \mathcal{U} . La transversal $\coprod_{i=1}^N T_i$ es completa para el flujo. Usaremos la notación $\text{sat}_i(B)$ para la saturación de un conjunto B contenido en la carta U_i respecto a las placas de dicha carta. Así mismo $\text{sat}(B)$ denota la saturación de un subconjunto B de X respecto a las hojas de \mathcal{F} .

Definición 5.5.1 Decimos que una cadena de cartas (ver definición 1.6.14) define una transformación de holonomía si existe un camino $c : [0, 1] \rightarrow L$, $L \in \mathcal{F}$, tal que existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ de I tal que $c([t_{j-1}, t_j]) \subset U_{i_j}$ para $1 \leq j \leq n$, sin pérdida de generalidad se puede suponer que $c(0) \in T_{i_0}$ y $c(1) \in T_{i_n}$. Si \mathcal{C} es una cadena que define una transformación de holonomía entonces llamaremos $\phi_{\mathcal{C}}$ a la transformación inducida por la cadena. Consideraremos siempre que el dominio de definición de $\phi_{\mathcal{C}}$, $\text{dom } \phi_{\mathcal{C}}$, es maximal. Una subcadena de una cadena \mathcal{C} es una subsucesión de \mathcal{C} que es una cadena. Un ciclo es una cadena $(U_{i_1}, \dots, U_{i_n})$ con $U_{i_n} = U_{i_1}$. Diremos que la cadena $\mathcal{C} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_n})$ se puede componer con la cadena $\mathcal{C}' = (U_{j_1}, \dots, U_{j_m})$ si la colección $\mathcal{C}\mathcal{C}' = (U_{i_1}, \dots, U_{i_n}, U_{j_1}, \dots, U_{j_m})$ define una cadena, dicha cadena se llamará cadena composición de \mathcal{C} con \mathcal{C}' . Para una cadena \mathcal{C} , denotamos por \mathcal{C}_k a la subcadena formada por los k primeros elementos de \mathcal{C} . Si U_{i_j} es la primera carta de una subcadena \mathcal{C}' de una cadena $\mathcal{C} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_n})$, entonces denotamos por $\mathcal{C}'_{ini} = \mathcal{C}_j$. Una cadena $\mathcal{C} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_n})$ se dirá ciclable si la colección $\tilde{\mathcal{C}} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_n}, U_{i_1})$ es un ciclo que define una transformación de holonomía. Para una cadena $\mathcal{C} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_n})$, definimos la longitud de \mathcal{C} como $l(\mathcal{C}) = n$, la cadena $\mathcal{C}^{-1} = (U_{i_n}, \dots, U_{i_1})$ se llamará cadena inversa de \mathcal{C} .

Definición 5.5.2 Sea $\mathcal{C} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_n})$ una cadena que define una transformación de holonomía. Diremos que \mathcal{C} es una cadena homotópicamente trivial si el abierto $S(\mathcal{C}) = \bigcup_{j=1}^n \text{sat}_{i_j}(\phi_{\mathcal{C}_j}(\text{dom } \phi_{\mathcal{C}}))$ es foliadamente homeomorfo $\mathbb{R} \times \text{dom } \phi_{\mathcal{C}}$, donde consideramos la estructura foliada que tiene por hojas a $\mathbb{R} \times \{*\}$. Si $V \subset \text{dom } \phi_{\mathcal{C}}$ entonces denotaremos $S(\mathcal{C}, V) = \bigcup_{j=1}^n \text{sat}_{i_j}(\phi_{\mathcal{C}_j}(V))$.

La siguiente afirmación se prueba sin dificultad.

Afirmación 2 Sea (X, \mathcal{F}) un espacio foliado con $\dim \mathcal{F} = 1$. Sea V una transversal y ϕ una transformación de holonomía no trivial tal que $\phi(V) = V$. Suponemos ϕ generada por una cadena de cartas $\mathcal{C} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_n})$. Entonces $\text{sat}(V) = S(\mathcal{C}, V)$.

Proposición 5.5.3 Sea (X, \mathcal{F}) un flujo minimal. Si $\mathcal{C} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_n})$ es una cadena que define una transformación de holonomía tal que toda subcadena ciclable \mathcal{C}' cumple una de las dos condiciones siguientes:

- (a) $\phi_{\tilde{\mathcal{C}}}(W) = W$,
- (b) $\phi_{\tilde{\mathcal{C}}}(W) \cap W = \emptyset$.

donde $W = \phi_{\mathcal{C}'_{ini}}(\text{dom } \phi_{\mathcal{C}}) \cap \text{dom } \phi_{\tilde{\mathcal{C}}}$. Entonces \mathcal{C} es homotópicamente trivial o (X, \mathcal{F}) es una suspensión minimal de dimensión 1.

Demostración:

La demostración se realiza por inducción en la longitud. Para $l(\mathcal{C}) = 1$, tenemos $\mathcal{C} = \{U_{i_1}\}$, sólo hay una cadena ciclable y $\text{dom } \phi_{\tilde{\mathcal{C}}} = T_{i_1}$. Claramente \mathcal{C} es una cadena homotópicamente trivial. Suponemos el resultado cierto para cualquier cadena \mathcal{C}' tal que $l(\mathcal{C}') < n$.

Por hipótesis de inducción, o bien $S(\mathcal{C}_{n-1}) = X$ y es suspensión de dimensión 1, o bien $S(\mathcal{C}_{n-1}, \text{dom } \phi_{\mathcal{C}})$ es foliadamente homeomorfo a $\mathbb{R} \times \text{dom } \phi_{\mathcal{C}}$. En el primer caso la inducción se sigue de modo trivial. Para el segundo caso debemos analizar qué ocurre con el conjunto $S(\mathcal{C}_{n-1}) \cup \text{sat}_{i_n}(\phi_{\mathcal{C}_n}(\text{dom } \phi_{\mathcal{C}}))$. Sea P una placa en $\text{sat}_{i_n}(\phi_{\mathcal{C}_n}(\text{dom } \phi_{\mathcal{C}}))$. El conjunto $P \cap S(\mathcal{C}_{n-1}, \text{dom } \phi_{\mathcal{C}})$ es un abierto en P que puede estar compuesto por una o dos componentes conexas por ser $\dim \mathcal{F} = 1$. Si todas las placas se intersecan en una sola componente conexa, entonces, claramente, $S(\mathcal{C})$ es foliadamente homeomorfo a $\mathbb{R} \times \text{dom } \phi_{\mathcal{C}}$. Si alguna placa corta en dos componentes conexas, entonces existe una subcadena ciclable \mathcal{C}' con $\phi_{\tilde{\mathcal{C}}'}(\text{dom } \phi_{\tilde{\mathcal{C}}'}) \cap \text{dom } \phi_{\tilde{\mathcal{C}}'} \neq \emptyset$. Por hipótesis $\phi_{\tilde{\mathcal{C}}'}(W) = W$, donde $W = \phi_{\mathcal{C}'_{ini}}(\text{dom } \phi_{\mathcal{C}}) \cap \text{dom } \phi_{\tilde{\mathcal{C}}'}$. La transformación $\phi_{\tilde{\mathcal{C}}'}$ no puede ser trivial o de lo contrario alguna hoja de \mathcal{F} sería homeomorfa a S^1 que contradice la minimalidad de \mathcal{F} . La Afirmación 2 implica que $X = S(\mathcal{C}') \subset S(\mathcal{C})$ pues \mathcal{F} es minimal, y por tanto $(X, \mathcal{F}) = \mathbb{R} \times_{\phi_{\tilde{\mathcal{C}}'}}(\phi_{\mathcal{C}'_{ini}} W)$ lo que concluye la demostración. \square

Como el estudio de la Λ -categoría de una suspensión minimal de dimensión 1 ya fue abordado en la sección anterior, en lo sucesivo supondremos que el flujo minimal no es de este tipo.

Definición 5.5.4 Para $j \in \{1, \dots, N\}$, se definen los conjuntos $\mathcal{E}_i(j)$ como las transformaciones de holonomía generadas por cadenas de i cartas cuya primera carta de la cadena es U_j . Claramente, estos conjuntos son finitos.

Definición 5.5.5 Sea V un abierto de algún T_j . Diremos que V es extensible respecto de la transformación

$$\phi_{\mathcal{C}} \in \mathcal{E}_n(j), \mathcal{C} = (U_j, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}), V \subset \text{dom } \phi_{\mathcal{C}},$$

si toda subcadena ciclable \mathcal{C}' cumple una de las dos condiciones siguientes:

- (a) $\phi_{\tilde{\mathcal{C}}'}(W) = W$,
- (b) $\phi_{\tilde{\mathcal{C}}'}(W) \cap W = \emptyset$,

donde $W = \phi_{\mathcal{C}'_{ini}}(V) \cap \text{dom } \phi_{\tilde{\mathcal{C}}'}$.

Observación 5.5.6 Por la minimalidad de \mathcal{F} , es fácil probar que la medida tiene que anularse en puntos o la medida no sería finita en compactos. También podemos suponer que $\partial \text{dom } \phi_{\mathcal{C}}$ tiene medida nula, donde $\text{dom } \phi_{\mathcal{C}}$ es el dominio maximal de cualquier aplicación de holonomía asociada a una cadena de cartas \mathcal{C} . Esto se deduce de que los bordes de estos dominios dependen de los bordes de las transversales asociadas a las cartas, si tomamos un refinamiento preciso del atlas tomado con los bordes suficientemente próximos, obtenemos que estos bordes tienen que tener medida nula por la propiedad de regularidad exterior en σ -compactos, que ya vimos en el Capítulo 4 que se deduce de la finitud en compactos.

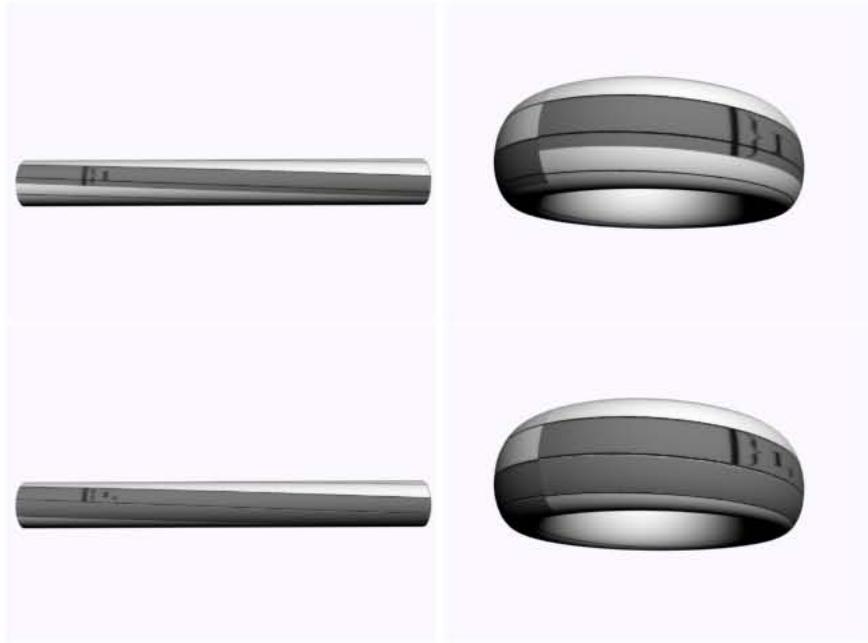


Figura 5.2: Construcción de los abiertos tangencialmente categóricos para un flujo de Kronecker irracional en el toro. El intervalo abierto transversal inicial se subdivide al aparecer una transformación de holonomía no trivial. Los nuevos intervalos son extensibles respecto de una cadena de mayor longitud, en la figura sólo se ve uno de los nuevos subintervalos generados (I_1).

Lema 5.5.7 *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un flujo minimal no trivial sobre un espacio compacto que admite una medida transversa invariante finita en compactos. Sea V un abierto de algún T_j para $j \in \{1, \dots, N\}$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Existe una partición $\{F, V_1, \dots, V_i, \dots\}$ de V tal que F es un cerrado en V de medida nula y los V_i son abiertos tales que para cada $\phi \in \mathcal{E}_n(j)$ con $V_i \cap \text{dom } \phi \neq \emptyset$ se tiene $V_i \subset \text{dom } \phi$ y es extensible respecto de ϕ .*

Demostración:

Para $n = 1$ es trivial pues la única cadena es $\mathcal{C} = \{U_j\}$, que cumple las condiciones pedidas. Suponemos que tenemos la descomposición para el caso $n - 1$ y probaremos que existe para el caso n . Es decir, tenemos una partición $\{F, V_1, \dots, V_i, \dots\}$ de V , donde F es un cerrado en V de medida nula y los V_i , $i \in \mathbb{N}$, son abiertos disjuntos extensibles respecto de cualquier transformación $\phi \in \mathcal{E}_{n-1}(j)$ tal que $V_i \cap \text{dom } \phi \neq \emptyset$. El lema se seguirá consiguiendo una partición $\{F_i, V_{i,1}, \dots, V_{i,n}, \dots\}$ de cada V_i tal que cada $V_{i,k}$ es extensible respecto de todas las transformaciones $\phi \in \mathcal{E}_n(j)$ con $V_{i,k} \cap \text{dom } \phi \neq \emptyset$, y F_i es un cerrado en V_i de medida nula. Probaremos esto para V_1 y análogamente se procede en cada V_i . Sean $\{\phi_1, \dots, \phi_L\} = \mathcal{E}_n(j)$ y $W_k = V_1 \cap \text{dom}(\phi_k)$. Sea $\mathcal{C}(k)$ la cadena que origina a ϕ_k . El conjunto de subcadenas ciclables de $\mathcal{C}(k)$ es finito. Denotaremos por $\{\mathcal{C}^{1,k}, \dots, \mathcal{C}^{M,k}\}$ al conjunto de subcadenas ciclables de $\mathcal{C}(k)$ que no cumplen la condición de extensibilidad para el abierto W_k . Por tanto

- (i) $\phi_{\mathcal{C}^{1,k}} \widetilde{\phi}_{\mathcal{C}^{1,k}}(\phi_{\mathcal{C}^{1,k}}(V) \cap \text{dom } \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}) \cap (\phi_{\mathcal{C}^{1,k}}(V) \cap \text{dom } \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}) \neq \emptyset$,
- (ii) $\phi_{\mathcal{C}^{1,k}} \widetilde{\phi}_{\mathcal{C}^{1,k}}(\phi_{\mathcal{C}^{1,k}}(V) \cap \text{dom } \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}) \neq \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}(V) \cap \text{dom } \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}$.

No se puede dar un contenido estricto

$$\phi_{\mathcal{C}^{1,k}} \widetilde{\phi}_{\mathcal{C}^{1,k}}(\phi_{\mathcal{C}^{1,k}}(V) \cap \text{dom } \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}) \subsetneq \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}(V) \cap \text{dom } \phi_{\mathcal{C}^{1,k}},$$

pues de lo contrario el cerrado

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\phi_{\mathcal{C}^{1,k}}^n \widetilde{\phi}_{\mathcal{C}^{1,k}}(\phi_{\mathcal{C}^{1,k}}(V) \cap \text{dom } \phi_{\mathcal{C}^{1,k}})}$$

es no vacío e invariante por el pseudogrupo de holonomía, ya que $\dim \mathcal{F} = 1$, y esto contradice el hecho de que \mathcal{F} sea minimal. Se razona del mismo modo para la inclusión inversa. Tomamos a continuación los abiertos

$$W_{k,1} = \text{int}(W_k \setminus \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}^{-1}(\phi_{\mathcal{C}^{1,k}} \widetilde{\phi}_{\mathcal{C}^{1,k}}(\phi_{\mathcal{C}^{1,k}}(W_k) \cap \text{dom } \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}))), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dichos abiertos cumplen la condición de extensión para la subcadena $\mathcal{C}^{1,k}$. Los abiertos

$$O_{k,1} = W_k \cap \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}^{-1}(\phi_{\mathcal{C}^{1,k}} \widetilde{\phi}_{\mathcal{C}^{1,k}}(\phi_{\mathcal{C}^{1,k}}(W_k) \cap \text{dom } \phi_{\mathcal{C}^{1,k}})), \quad k \in \mathbb{N}$$

pueden no cumplir la condición de extensión para la subcadena $\mathcal{C}^{1,k}$. Realizando el mismo procedimiento anterior obtenemos los abiertos

$$W_{k,2} = \text{int}(O_1 \setminus \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}^{-1}(\phi_{\mathcal{C}^{1,k}}(O_1) \cap \text{dom } \phi_{\widetilde{\mathcal{C}^{1,k}}})) , \quad k \in \mathbb{N} ,$$

que cumplen la condición pedida. Si alguno de los abiertos

$$O_{k,2} = O_{k,1} \cap \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}^{-1}(\phi_{\widetilde{\mathcal{C}^{1,k}}}(\phi_{\mathcal{C}^{1,k}}(O_{k,1}) \cap \text{dom } \phi_{\widetilde{\mathcal{C}^{1,k}}}))$$

no cumple la condición de extensión para la subcadena $\mathcal{C}^{1,k}$, entonces repetimos el procedimiento. Obtenemos recursivamente una familia de abiertos disjuntos $W_{k,n}$ que cumplen la condición de extensión para la subcadena $\mathcal{C}^{1,k}$. Aseguramos que este proceso termina en una cantidad finita de pasos; es decir, para algún $m(k) \in \mathbb{N}$ el abierto $O_{k,m(k)}$ es vacío. De lo contrario, el cerrado

$$C = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \overline{\phi_{\mathcal{C}^{1,k}}(O_{k,j})}$$

es no vacío y $\phi_{\mathcal{C}^{1,k}}^{-1}(C) \subset C$. Como $\dim \mathcal{F} = 1$, obtenemos que el cerrado $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \phi_{\mathcal{C}^{1,k}}^{-j}(C)$ es no vacío e invariante por la acción del pseudogrupo, que contradice el hecho de que \mathcal{F} es minimal. Para k fijo, los abiertos $\{W_{k,j} \mid 1 \leq j \leq m(k)\}$ son disjuntos entre sí y cumplen la condición de extensión respecto de la subcadena $\mathcal{C}^{1,k}$. De este modo obtenemos L colecciones de abiertos disjuntos, $\{W_{k,j} \mid 1 \leq j \leq m(k)\}$, $1 \leq k \leq L$, contenidos en los W_k . Los conjuntos $W_k \setminus \bigcup_{j=1}^{m(k)} W_{k,j}$ son cerrados en W_k y tienen medida nula pues $\Lambda(\partial W_{k,j}) = 0$ dado que los bordes de los dominios de las transformaciones de holonomía tienen medida nula. Los abiertos $W_{k,j}$ cumplen la condición de extensión para la subcadena ciclable $\mathcal{C}^{1,k}$. Repitiendo este proceso M veces en cada uno de los abiertos que vamos generando, obtenemos particiones finitas $\{F_k, V_{k,1}, \dots, V_{k,R(k)}\}$ de los W_k , donde F_k es un cerrado en W_k de medida nula y cada $V_{k,i}$, $1 \leq i \leq R(k)$ es extensible respecto de ϕ_k . Reenumeramos a la colección $\{V_{1,1}, \dots, V_{1,R(1)}, \dots, V_{L,1}, \dots, V_{L,R(L)}\}$ por $\{S_1, \dots, S_J\}$, denotamos $I = \{1, \dots, J\}$ y definimos $S(A) = (\bigcap_{i \in J \setminus A} S_i) \setminus (\bigcup_{j \in A} \overline{S_j})$ para $A \subset I$. Los abiertos $S(A)$ son disjuntos y cubren V_1 salvo un cerrado de medida nula y son extensibles respecto de cada ϕ_k tal que $\text{dom } \phi_k \cap S(A) \neq \emptyset$.

Análogamente se procede en cada V_i de la partición que nos da la hipótesis de inducción. Los abiertos construidos son disjuntos y, junto con el complementario de su unión, forman una partición que cumple las condiciones del lema. Observamos que la partición que obtenemos es, de hecho, finita. \square

Sea $V \subset T_j$ un abierto extensible respecto de una transformación $\phi \in \mathcal{E}_n(j)$. Denotamos por V^ϕ al abierto tangencialmente categórico que origina dado por la Proposición 5.5.3. Dicho abierto admite una contracción por homotopía integrable a V .

Lema 5.5.8 Sean ϕ_1, \dots, ϕ_k transformaciones originadas por cadenas de cartas de longitud menor o igual que n cuya carta inicial sea U_j . Sea $V \subset T_j$ un abierto contenido en los

dominios de estas transformaciones que es extensible respecto de cualquier transformación de holonomía $\phi \in \mathcal{E}_{(2k+1)n}(j)$ con $V \cap \text{dom } \phi \neq \emptyset$. Entonces existe una transformación de holonomía ψ inducida por una cadena de cartas de longitud menor o igual que $(2k+1)n$ que cumple

$$\bigcup_{j=1}^k \text{sat}_{i(\phi_j)}(\phi_j(V)) \subset V^\psi,$$

donde $i(\phi_j)$ es la última carta de la cadena que induce a ϕ_j .

Demostración:

Si \mathcal{C}_i son las cadenas que inducen las transformaciones ϕ_i , entonces basta tomar como ψ a la transformación de holonomía inducida por la cadena $\mathcal{C}_1\mathcal{C}_1^{-1} \cdots \mathcal{C}_{k-1}\mathcal{C}_{k-1}^{-1}\mathcal{C}_k$. \square

Teorema 5.5.9 *Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un flujo minimal no trivial sobre un espacio compacto que admite una medida transversa invariante finita en compactos. Entonces $\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = 0$.*

Demostración:

Consideramos la notación anterior. Usando la regularidad exterior, tomamos un abierto V en T_1 con Λ -medida menor que ε y borde de medida nula. Dado que el espacio foliado es minimal, la colección $\{\text{sat}_{i(\phi)}(\phi(V \cap \text{dom}(\phi)))\}$, donde ϕ recorre todas las transformaciones de holonomía cuya carta inicial es U_1 e $i(\phi)$ es la carta final de las cadenas que inducen dichas transformaciones, es un recubrimiento de X . Como X es compacto, existen transformaciones ϕ_1, \dots, ϕ_k inducidas por cadenas de cartas de longitud menor o igual que un n dado y tales que la familia $\mathcal{S} = \{\text{sat}_{i(\phi_j)}(\phi_j(V \cap \text{dom}(\phi_j))) \mid 1 \leq j \leq k\}$ recubre a X . Usamos a continuación el Lema 5.5.7 y, para $L = (2k+1)n$, obtenemos una partición $\{F, V_1, \dots, V_i, \dots\}$ de V , donde F es un cerrado en V de medida nula y los V_i son abiertos extensibles respecto de cualquier transformación $\phi \in \mathcal{E}_L(1)$ con $\text{dom } \phi \cap V_i \neq \emptyset$. Aplicando el Lema 5.5.8 a cada abierto V_i obtenemos transformaciones de holonomía ψ_i , $i \in \mathbb{N}$, tales que

$$X = \bigcup_{i=1, j=1}^{\infty, k} \text{sat}_{i(\phi_j)}(\phi_j(V_i \cap \text{dom } \phi_j)) = \text{sat}(\partial V \cup F) \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i^{\psi_i}.$$

Por tanto, como $\text{sat}(\partial V \cup F)$ es un σ -compacto transversalmente nulo, obtenemos

$$\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau_{\Lambda}(V_i^{\psi_i}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda(V_i) = \Lambda(V) < \varepsilon.$$

Como ε puede escogerse tan pequeño como se desee, $\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = 0$. \square

Observación 5.5.10 *Las condiciones de que la medida transversa sea finita en compactos o regular exterior no son fuertes en el sentido de que el teorema de representación de Riesz provee medidas con estas dos condiciones. Para flujos minimales, dado que el crecimiento de cada hoja es lineal, existe una medida transversa invariante que viene dada por el teorema de representación de Riesz [30, 31].*

Pregunta 5.5.11 *Como acabamos de ver, si tenemos un flujo sobre un espacio compacto y una medida transversa invariante finita en compactos, entonces la Λ -categoría ayuda a estudiar el carácter minimal de dicho flujo en el sentido de que $\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) > 0 \implies$ el flujo no es minimal. La cuestión que surge es ver bajo que condiciones el recíproco es cierto; el flujo de Denjoy es un contraejemplo considerando las hipótesis del Teorema 5.5.9 por lo que necesitamos restringir el marco de trabajo.*

Conjetura 5.5.12 *Los resultados de este Capítulo nos llevan de modo natural a formular la siguiente conjetura. Sea $(X, \mathcal{F}, \Lambda)$ un espacio foliado minimal no trivial y Λ una medida transversa invariante que finita en compactos. Entonces $\text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) = 0$. Dicha conjetura es formulada en dimensión arbitraria y sin la hipótesis de compacidad.*

Capítulo 6

Semicontinuidad en variedades cerradas

Adaptamos un resultado de E. Vogt y W. Singhof [37], que afirma que la categoría tangente es una función semicontinua en el espacio de foliaciones de C^2 de una variedad C^∞ cerrada dada. Este espacio puede describirse del siguiente modo. Consideramos la variedad M embebida en un espacio euclídeo \mathbb{R}^N . Identificamos una foliación C^2 de dimensión p con una aplicación $M \rightarrow \mathbb{R}^{N^2}$ que asigna a cada punto la proyección ortogonal de \mathbb{R}^N en el espacio tangente dado por la foliación en ese punto. La topología del espacio de foliaciones de dimensión p y clase C^{k+1} es la dada como subespacio del espacio de aplicaciones $M \rightarrow \mathbb{R}^{N^2}$ de clase C^{k+1} , y lo denotaremos por $\text{Fol}_p^k(M)$.

Teorema 6.0.13 (Singhof, Vogt [37]) *Para cualquier variedad cerrada M , la función*

$$\text{Cat} : \text{Fol}_p^1(M) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

es superiormente semicontinua.

Usamos $T \pitchfork \mathcal{F}$ para denotar que T es transversa a \mathcal{F} en sentido diferenciable. A lo largo del capítulo, para una homotopía integrable $H : U \times I \rightarrow (M, \mathcal{F})$, usamos indistintamente la notación $H_1(x)$ y $H(x, 1)$ para el paso final de la deformación en un punto $x \in U$ y siempre supondremos $H(x, 0) = x$.

6.1. Consideraciones previas

El Teorema 6.0.13 es consecuencia inmediata del siguiente resultado:

Lema 6.1.1 (Singhof, Vogt [37]) *Sea M una variedad cerrada C^∞ y \mathcal{F} una foliación C^2 de dimensión p sobre M . Si U es un abierto \mathcal{F} -categórico y W es un abierto con $\overline{W} \subset U$, entonces existe un entorno \mathcal{V} de \mathcal{F} en $\text{Fol}_p^1(M)$ tal que W es \mathcal{G} -categórico para toda $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$. Además, podemos suponer que las \mathcal{G} -contracciones de V son C^1 .*

Además tenemos en cuenta los siguientes dos resultados.

Proposición 6.1.2 (Singhof, Vogt [37]) *Sea M una n -subvariedad cerrada de \mathbb{R}^N y $\mathcal{F} \in \text{Fol}_p^1(M)$. Sean A_1, \dots, A_m $(n-p)$ -subvariedades C^1 compactas de M transversas a \mathcal{F} , sea $C_i \subset A_i$ un collar del borde de A_i y denotamos $A = \bigcup_i (A_i \setminus C_i)$. Entonces existe un entorno \mathcal{V} en $\text{Fol}_p^1(M)$ y un entorno W de A en M tal que W es tangencialmente contráctil para cada $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$.*

Proposición 6.1.3 (Singhof, Vogt [37]) *Sea $\mathcal{F} \in \text{Fol}_p^1(M)$, sea U un abierto en M y sea $F : U \times I \rightarrow M$ una homotopía integrable con $F(x, 0) = x$ para todo $x \in U$. Sea $\varepsilon > 0$ y K un subconjunto compacto de U . Entonces existe un entorno \mathcal{V} de \mathcal{F} tal que, para toda $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$, existe una \mathcal{G} -homotopía integrable $G : U \times I \rightarrow M$ con $G(x, 0) = x$ para todo $x \in U$ y $|F - G| < \varepsilon$ en $K \times I$.*

En la próxima proposición, B_r^k denota la bola abierta en dimensión k de radio r y D_r^k denota la correspondiente bola cerrada.

Proposición 6.1.4 (Singhof, Vogt [37]) *Sea \mathcal{F} una foliación C^{r+1} en una variedad cerrada $M \subset \mathbb{R}^N$ con $\dim \mathcal{F} = p$ y $\dim M = n$, y sea $a \in M$. Sea $\varphi : B_3^p \times B_4^{n-p} \rightarrow U \subset M$ la parametrización asociada a una carta foliada centrada en a . Entonces existe un entorno \mathcal{V} de \mathcal{F} en $\text{Fol}_p^r(M)$ tal que, para cada $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$ y cada $t \in B_3^{n-p}$, hay una aplicación $g_t : B_3^p \rightarrow B_4^{n-p}$ con las siguientes propiedades:*

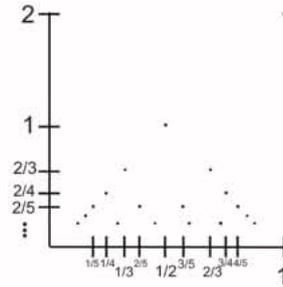
- (i) *La aplicación $g : B_3^p \times B_3^{n-p} \rightarrow B_3^p \times B_4^{n-p}$ definida como $(x, t) \mapsto (x, g_t(x))$ es un C^{r+1} -embebimiento.*
- (ii) *$B_3^p \times B_2^{n-p}$ está contenido en la imagen de g y $B_3^p \times B_1^{n-p}$ está contenido en $g(B_3^p \times B_2^{n-p})$.*
- (iii) *Para cada $t \in B_3^{n-p}$, el conjunto $\{(x, g_t(x)) \mid x \in B_3^p\}$ está contenido en la hoja de la imagen recíproca $\varphi^*\mathcal{G}$ de \mathcal{G} a $B_3^p \times B_4^{n-p}$ a través del punto $(0, t)$.*

Además g está unívocamente determinada por (i) y (iii), la aplicación definida como $\varphi \circ g : B_3^p \times B_3^{n-p} \rightarrow U_g \subset M$ es una C^{r+1} -parametrización de una carta foliada para \mathcal{G} y $\varphi(B_3^p \times B_2^{n-p}) \subset U_g$, donde $U_g = \varphi \circ g(B_3^p \times B_3^{n-p})$.

Definición 6.1.5 (Singhof, Vogt [37]) *En las condiciones de la Proposición 6.1.4, a la familia $\{\varphi \circ g \mid \mathcal{G} \in \mathcal{V}\}$ se le llama una parametrización local simultánea de \mathcal{V} en M .*

Las parametrizaciones simultáneas permiten trabajar con las foliaciones próximas a una dada de forma muy cómoda, las usaremos para probar uno de los lemas de importancia del capítulo.

Como motivación previa tomaremos los flujos de Krönecker, cuya Λ -categoría ya fue calculada en los capítulos previos. En este caso nos restringimos a estas foliaciones y

Figura 6.1: *Función de Thomae.*

tenemos en cuenta que el subespacio de los flujos de Krönecker $\{\mathcal{F}_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \text{Fol}_1^\infty(T^2)$ es homeomorfo a \mathbb{R} por la aplicación $\mathcal{F}_\alpha \mapsto \alpha$. Si dejamos la medida fija en el meridiano, tomando la de Lebesgue normalizada, el cálculo de la Λ -categoría da una función que vale $|\frac{2}{n}|$ en los racionales $\frac{m}{n}$ con m y n primos entre sí, 2 en 0 y 0 en los irracionales, que es claramente semicontinua superiormente (Figura 6.1). Esta función es la de Thomae, en análisis elemental es usada para encontrar un ejemplo de funciones Riemann-integrables cuya composición no es Riemann-integrable.

6.2. Topologías para foliaciones con medida invariante

Sobre el mismo ejemplo, considerando solo el caso de pendiente racional, permitamos también variar la medida “continuamente” cuando calculamos respecto a la medida de Lebesgue normalizada en un círculo perpendicular. Entonces obtenemos una función que vale $\frac{2}{m^2+n^2}$ en los racionales $\frac{m}{n}$ con m y n primos entre sí (ver Ejemplo 7), de nuevo vuelve a ser una función semicontinua superiormente.

Los ejemplos anteriores sugieren que la Λ -categoría es semicontinua superiormente, no sólo permitiendo variar la foliación sino también la medida transversa. En [25] ya se abordó este tema considerando la topología dada por la norma de las medidas.

En lo sucesivo supondremos que las medidas transversas son finitas en compactos.

Proposición 6.2.1 *Si S es una transversal en sentido diferenciable completa para una foliación \mathcal{F} , entonces existe un entorno $U^S(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} en $\text{Fol}_p^1(M)$ tal que S también es transversal completa para $\mathcal{G} \in U^S(\mathcal{F})$.*

Definición 6.2.2 (Topología fuerte) *Sea (\mathcal{F}, Λ) una foliación C^2 de dimensión p en M con medida transversa invariante, \mathcal{U} un entorno de \mathcal{F} en $\text{Fol}_p^1(M)$, T una transversal completa para \mathcal{F} y ε un número real positivo. Se define*

$$U(\mathcal{F}, \Lambda, \mathcal{U}, T, \varepsilon) = \{(\mathcal{G}, \Delta) \mid \mathcal{G} \in \mathcal{U}, T \pitchfork \mathcal{G} \text{ y } \|\Lambda_T - \Delta_T\| < \varepsilon\},$$

donde (\mathcal{G}, Δ) es foliación C^2 de dimensión p en M con medida transversa invariante. Estos conjuntos forman una subbase que da lugar a una topología en el conjunto de foliaciones C^2 de dimensión p de M con medida transversa invariante finita en compactos. Denotaremos a este espacio topológico por $\text{FolMed}_p^1(M)$.

Para los espacios polacos localmente compactos también disponemos de la topología débil para las medidas. Una sucesión $\{\Lambda_n\}$ de medidas en un espacio polaco localmente compacto P convergen a una medida Λ si, para toda función continua $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, la sucesión $\int_P f d\Lambda_n$ converge a $\int_P f d\Lambda$. Esta topología es más gruesa que la topología de la norma.

Definición 6.2.3 (Topología débil) Sea $(\mathcal{F}_n, \Lambda_n)$ una sucesión de foliaciones C^2 con medida transversa invariante sobre una variedad cerrada M . Diremos que $(\mathcal{F}_n, \Lambda_n)$ converge débilmente a (\mathcal{F}, Λ) si \mathcal{F}_n converge a \mathcal{F} en $\text{Fol}_p^1(M)$ y para toda transversal completa T de \mathcal{F} y toda función continua $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que la sucesión $\int_T f d\Lambda_n$ converge a $\int_T f d\Lambda$. Al espacio topológico caracterizado por esta convergencia lo denotaremos por

$$\mathcal{W}\text{FolMed}_p^1(M).$$

Observación 6.2.4 Como la medida es finita en compactos, tenemos que dicha medida es regular exterior es σ -compactos. También es regular interior en abiertos, es decir, para cualquier abierto V contenido en una transversal a \mathcal{F} , se tiene

$$\Lambda(V) = \max\{\Lambda(K) \mid K \subset V, K \text{ compacto}\}.$$

La demostración usa argumentos análogos a los utilizados en el Capítulo 4.

6.3. Semicontinuidad de la Λ -categoría

La semicontinuidad en el caso de la topología fuerte fue probada en [25]. Usaremos técnicas similares para abordar el caso débil. La parte fundamental de este capítulo está concentrada en el Lema 6.3.13, del cual se deduce la semicontinuidad de forma inmediata. Previamente introduciremos conceptos que nos serán útiles posteriormente.

Definición 6.3.1 Sea $f : A \rightarrow B$ una aplicación. Se define la n -preimagen de f como:

$$F_n^f = \{x \in A \mid \#f^{-1}(\{f(x)\}) = n\}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

En la Definición 6.3.1, si f es continua, no es difícil probar que los conjuntos F_n^f son σ -compactos, y por tanto medibles.

Definición 6.3.2 Un abierto U de un espacio foliado se dice que es regular si existe una cantidad finita de transversales en sentido diferenciable locales T_1, \dots, T_k contenidas en U y tales que cualquier hoja de \mathcal{F}_U corta a alguna de estas transversales.

Observación 6.3.3 *Sea U un abierto de M y $K \subset U$ un compacto. Entonces existe un abierto regular V tal que $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Esto se prueba recubriendo K con una cantidad finita de cartas foliadas cuyas clausuras estén contenidas en U .*

Observación 6.3.4 *Sea (M, \mathcal{F}) una variedad cerrada C^∞ foliada, sea U un abierto regular \mathcal{F} -categórico y sea H una \mathcal{F} -contracción por homotopía integrable. Usando ahora el Lema 1.5.9, podemos encontrar transversales locales T_1, \dots, T_k que cumplan las dos condiciones siguientes:*

- (1) *Cada hoja de \mathcal{F}_U corta a cada T_i en a lo sumo un punto, y al menos corta a alguno de ellos.*
- (2) *$H_1(T_i)$ es una transversal local (embebida) para \mathcal{F} .*

Usando argumentos de posición general es fácil encontrar una \mathcal{F} -contracción G tal que $\Lambda(G_1(U)) \leq \Lambda(H_1(U))$ y $G_1(T_i)$ es una transversal diferenciable de \mathcal{F} y $1 \leq i \leq k$. En consecuencia, supondremos también que

- (3) *$H_1(T_i)$ es una transversal diferenciable de \mathcal{F} .*

Por tanto tenemos que $H_1(U) = H_1(\bigcup_{i=1}^k T_i)$. Teniendo en cuenta esto y que $H_1 : \bigcup_{i=1}^k T_i \rightarrow M$ es una aplicación continua, el siguiente lema es evidente.

Lema 6.3.5 *Sea U abierto regular \mathcal{F} -categórico, H una \mathcal{F} -contracción por homotopía integrable, T_1, \dots, T_k transversales locales en las condiciones anteriores y Λ una medida transversa invariante. Entonces*

$$\tilde{\Lambda}(H_1(U)) = \sum_{i=1}^k \tilde{\Lambda}(H_1(F_i^{H_1})) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \Lambda(F_i^{H_1}),$$

donde consideramos $H_1 : \bigcup_{i=1}^k T_i \rightarrow M$.

Definición 6.3.6 *Sean $H : U \times I \rightarrow X$ y $G : V \times I \rightarrow X$ homotopías con $G_0 = \text{id}_U$ y $H(U, 1) \subset V$. Definimos $H * G : U \times I \rightarrow X$ la homotopía definida como*

$$H * G(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(H_1(x), 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

El siguiente lema muestra una propiedad interesante sobre el comportamiento de $\tilde{\Lambda}$ cuando se componen homotopías sucesivamente, en el sentido expresado en la Definición 6.3.6.

Lema 6.3.7 Sean U un abierto regular \mathcal{F} -categórico, $H : U \times I \rightarrow M$ una \mathcal{F} -contracción por homotopía integrable, T_1, \dots, T_k como en el Lema 6.3.5 y Λ una medida transversa invariante. Sea O un abierto que contiene a $H_1(U) = \bigcup_{i=1}^k H_1(T_i)$ tal que cada hoja de \mathcal{F}_O corta a $H_1(U)$. Sea G una \mathcal{F} -contracción por homotopía integrable de O . Entonces

$$\tilde{\Lambda}(H_1(U)) \geq \tilde{\Lambda}(H * G_1(U)) .$$

Demostración:

Sólo hay que observar que $\bigcup_{i=1}^j F_i^{H_1} \supset \bigcup_{i=1}^j F_i^{H * G_1}$ para $1 \leq j \leq k$ y aplicar el Lema 6.3.5. \square

El siguiente lema se prueba de forma análoga.

Lema 6.3.8 Sea K un σ -compacto contenido en O que corte a cada hoja de \mathcal{F}_O . Entonces

$$\tilde{\Lambda}(H_1(U)) \geq \tilde{\Lambda}(G_1(K)) .$$

Definición 6.3.9 Sea Λ_n una sucesión de medidas que convergen débilmente a Λ . Un conjunto medible E se dice estable si $\lim \Lambda_n(E) = \Lambda(E)$.

Observación 6.3.10 Dado que consideramos al convergencia débil de las medidas, en general existen conjuntos medibles no estables. Por el Lema de Urysohn y la regularidad de las medidas (véase Observación 6.2.4), es fácil ver que los abiertos U tales que $\Lambda_n(\partial U) = \Lambda(\partial U) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ son conjuntos estables. Esta clase de abiertos da lugar a una base para la topología de las transversales, por tanto podemos suponer que las transversales T_i son estables.

Proposición 6.3.11 Sea $(\mathcal{F}, \Lambda) \in \mathcal{W} \text{FolMed}_p^1(M)$, U un abierto regular tangencialmente categórico, $H : U \times I \rightarrow M$ una \mathcal{F} -contracción por homotopía integrable, W un abierto tal que $\overline{W} \subset U$. Suponemos dadas transversales T_1, \dots, T_k en las condiciones del Lema 6.3.5 y $\varepsilon, \delta > 0$. Entonces, para toda sucesión $(\mathcal{F}_n, \Lambda_n)$ convergente a (\mathcal{F}, Λ) en $\mathcal{W} \text{FolMed}_p^1(M)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq N$, se cumple que

- (1) las transversales $T_1, \dots, T_k, H_1(T_1), \dots, H_1(T_k)$ de \mathcal{F} son transversas a \mathcal{F}_n ,
- (2) $|\Lambda(H(T_i \times \{1\})) - \Lambda_n(H(T_i \times \{1\}))| < \varepsilon$, para $1 \leq i \leq k$,
- (3) existen homotopías integrables $H^{\mathcal{F}_n}$ de W para cada $(\mathcal{F}_n, \Lambda_n)$ tales que $|H(x, t) - H^{\mathcal{F}_n}(x, t)| < \delta$ para $x \in \overline{W}$.

Demostración:

Es un corolario de la Proposición 6.2.1 y las definiciones dadas hasta el momento. La propiedad (2) es consecuencia de la Observación 6.3.10. Recordamos que las medidas en las condiciones del teorema de representación de Riesz son regulares. La propiedad (3) se deduce de la Proposición 6.1.3. \square

Sin ninguna dificultad, se prueba la siguiente afirmación.

Afirmación 3 Usando la notación $A_i = H_1(T_i)$, existen entornos C_i en forma de collar de los bordes de A_i tales que $H_1(\overline{W}) \subset \bigcup_{i=1}^k A_i \setminus C_i$.

Sea P el abierto que contiene a $\bigcup_{i=1}^k A_i \setminus C_i$ que da la Proposición 6.1.2. Tomando N más grande si es necesario, podemos asegurar que P es \mathcal{F}_n -categórico para cada $n \geq N$. Denotaremos por $G^{\mathcal{F}_n}$ a las \mathcal{F}_n -contracciones para P .

Proposición 6.3.12 Tomando N más grande si es necesario, existe un abierto $P' \subset P$ tal que $H_1(\overline{W}) \subset P'$ y toda hoja de \mathcal{F}_n corta a $\bigcup_{i=1}^k A_i \setminus C_i$ para $n \geq N$.

La demostración de esta proposición es técnica por lo que la posponemos hasta el final del capítulo a fin de no romper la continuidad de los argumentos.

Lema 6.3.13 Sea U un abierto regular \mathcal{F} -categórico, H una \mathcal{F} -contracción para U y W un abierto con $\overline{W} \subset U$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ y para toda sucesión $(\mathcal{F}_n, \Lambda_n)$ convergente a (\mathcal{F}, Λ) en $\mathcal{W}\text{FolMed}_p^1(M)$, existe $N \in \mathbb{N}$ y existen \mathcal{F}_n -contracciones $J^{\mathcal{F}_n}$ de W para cada $(\mathcal{F}_n, \Lambda_n)$ con $n \geq N$ tales que

$$\tilde{\Lambda}(J_1^{\mathcal{F}_n}(W)) \leq \tilde{\Lambda}(H_1(U)) + \varepsilon.$$

Demostración:

Comenzamos usando las Observaciones 6.3.4 junto con la Afirmación 3 y las Proposiciones 6.3.12 y 6.3.11. Obtenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ de \mathcal{F} tal que, para cada $(\mathcal{F}_n, \Lambda_n)$ con $n \geq N$, existe una homotopía integrable $H^{\mathcal{F}_n}$ tal que $H_1^{\mathcal{F}_n}(W) \subset P'$ (donde P' es el abierto que nos da la Proposición 6.3.12). Además, existen \mathcal{F}_n -contracciones $G^{\mathcal{F}_n}$ de P' . Podemos suponer

$$\left| \Lambda_n\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) - \Lambda\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \right| < \varepsilon,$$

para $n \geq N$ por la la Observación 6.3.10. Por tanto, usando el Lema 6.3.8, tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda(H_1(U)) + \varepsilon &= \Lambda\left(\bigcup_{i=1}^k H_1(T_i)\right) + \varepsilon \\ &\geq \Lambda_n\left(\bigcup_{i=1}^k H_1(T_i)\right) \\ &\geq \Lambda_n\left(\bigcup_{i=1}^k (A_i \setminus C_i)\right) \\ &\geq \Lambda_n\left(\bigcup_{i=1}^k P' \cap (A_i \setminus C_i)\right) \\ &\geq \Lambda_n(H^{\mathcal{F}_n} * G_1^{\mathcal{F}_n}(W)) \end{aligned}$$

de donde obtenemos el resultado tomando $J^{\mathcal{F}_n} = H^{\mathcal{F}_n} * G^{\mathcal{F}_n}$. \square

Este es el lema básico de la sección. Ahora vemos como la semicontinuidad superior se obtiene como consecuencia.

Teorema 6.3.14 *La aplicación*

$$\text{Cat}_{\text{Top}} : \mathcal{W}\text{FolMed}_p^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es semicontinua superiormente.

Demostración:

Como M es compacta, podemos restringirnos a recubrimientos por abiertos tangencialmente categóricos para calcular la Λ -categoría [25].

Hay que probar que, para todo $\varepsilon > 0$ y para cada sucesión $(\mathcal{F}_n, \Lambda_n)$ convergente a (\mathcal{F}, Λ) en $\mathcal{W}\text{FolMed}_p^\infty(M)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Cat}(\mathcal{F}_n, \Lambda_n) \leq \text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) + \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

Tomamos un recubrimiento finito $\{U_1, \dots, U_K\}$ por abiertos \mathcal{F} -categóricos de M , y \mathcal{F} -contracciones H^1, \dots, H^n tales que

$$\sum_{i=1}^K \Lambda(H_1^i(U_i)) \leq \text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usando paracompacidad y la Observación 6.3.3, podemos suponer que cada U_i es un abierto regular. Utilizando paracompacidad nuevamente, obtenemos una serie de abiertos W_i , $i = 1, \dots, K$, que forman un recubrimiento de M y tales que $\overline{W_i} \subset U_i$. Por el Lema 6.3.13, obtenemos $N \in \mathbb{N}$ y \mathcal{F}_n -contracciones $H^{\mathcal{F}_n, i} : W_i \times I \rightarrow M$ para $1 \leq i \leq K$ y $n \geq N$ tales que

$$\Lambda_n(H_1^{\mathcal{F}_n, i}(W_i)) \leq \Lambda(H_1^i(U_i)) + \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Finalmente, para $n \geq N$, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Cat}(\mathcal{F}_n, \Lambda_n) &\leq \sum_{i=1}^K \Lambda_n(H_1^{\mathcal{G}, i}(W_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^K \Lambda(H_1^i(U_i)) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \text{Cat}(\mathcal{F}, \Lambda) + \varepsilon \end{aligned}$$

que es precisamente la condición de semicontinuidad superior. \square

Solo resta probar ahora la Proposición 6.3.12 para concluir el capítulo. Se estudiará el caso más simple en que T sea una transversal local contenida en una parametrización local simultánea. Es claro que este caso implica probar el caso general.

Antes de comenzar la prueba, introducimos una métrica en $\text{Fol}_p^1(M)$. Recordamos que una foliación C^1 \mathcal{F} se identifica con una C^1 -aplicación $\mathcal{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^{N^2}$. La aplicación $\mathcal{F}_p : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es la proyección ortogonal de \mathbb{R}^N en el subespacio vectorial tangente a \mathcal{F} en p , considerando M embebida en \mathbb{R}^N .

Definición 6.3.15 Si \mathcal{F} y \mathcal{G} son foliaciones en M de la misma dimensión, definimos su distancia foliada como

$$d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \max_{p \in M} \|\mathcal{F}_p - \mathcal{G}_p\| .$$

Observación 6.3.16 Es claro que d está bien definida pues M es compacta. Es claro también que d es una distancia en $\text{Fol}_p^1(M)$ que nos da su topología. Observamos también que d puede definirse sin asumir que las foliaciones tengan dimensiones iguales, obteniendo una métrica en $\text{Fol}^1(M)$. Este punto de vista no ofrece nueva información teniendo en cuenta que los $\text{Fol}_p^1(M)$ serían cerrados y abiertos respecto de la métrica d .

Como la prueba de la Proposición 6.3.12 se puede reducir a una cuestión local, interpretamos la distancia foliada desde el punto de vista de parametrizaciones locales simultáneas. Seguiremos la notación de la Proposición 6.1.4. Restringiéndonos a las parametrizaciones, podemos ignorar a la variedad ambiente.

Sea $\{\varphi \circ g \mid \mathcal{G} \in \mathcal{V}\}$ una parametrización local simultánea entorno a un punto $a = \varphi(0, 0) \in M$, siguiendo la Definición 6.1.5.

Definición 6.3.17 Sean $\mathcal{G}, \mathcal{O} \in \mathcal{V}$. Se define la distancia foliada en φ como

$$d_\varphi(\mathcal{G}, \mathcal{O}) = \max_{x \in D_3^p \times D_1^{n-p}} \|\mathcal{F}_p - \mathcal{G}_p\| .$$

Podemos reconstruir la topología de $\text{Fol}_p^1(M)$ tomando como subbase las bolas asociadas a una sucesión (finita) de distancias foliadas asociadas a parametrizaciones locales simultáneas que recubran a M . Por tanto podemos reducirnos al caso en que la variedad es \mathbb{R}^n y \mathcal{F} es la foliación estándar por planos paralelos de dimensión p . No hay más que tomar un difeomorfismo foliado α entre $\text{int}(D_3^p \times D_1^{n-p})$ y \mathbb{R}^n , con $\alpha(0) = 0$.

Definición 6.3.18 Sea \mathcal{F} la foliación de dimensión p en \mathbb{R}^n definida por traslaciones del subespacio $x_{p+1} = 0, \dots, x_n = 0$. Para $\varepsilon, \delta > 0$, definimos

$$R_0(\varepsilon, \delta) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \|(x_{p+1}, \dots, x_n)\| \leq \varepsilon \|(x_1, \dots, x_p)\|, \|(x_1, \dots, x_n)\| \leq \delta\} .$$

Para $a \in M$, se define el conjunto $R_a(\varepsilon, \delta) = a + R_0(\varepsilon, \delta)$ (ver Figura 6.2).

Observación 6.3.19 Se tiene que $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) < \varepsilon$ si y solo si $T_a \mathcal{G} \subset R_a(\varepsilon, \infty) \forall a \in \mathbb{R}^n$, donde $T_a \mathcal{G}$ denota el espacio tangente a \mathcal{G} en a .

Lema 6.3.20 *Sea $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ una aplicación C^1 tal que $f(0) = 0$ y la aplicación lineal $df(x)$ tenga su grafo contenido en $R_0(\varepsilon, \infty)$ para todo $x \in \mathbb{R}^p$. Entonces el grafo de f está contenido en $R_0(\varepsilon, \infty)$.*

Demostración:

Previamente nos fijamos en que el caso con $p = 1$ y $n = 2$ se deduce inmediatamente a partir del teorema del valor medio.

Probamos ahora el resultado por inducción para $p = 1$ y n arbitrario. Supongamos que el resultado es falso para algún $n - 1 > 1$. Por tanto existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $\|f(y)\| > \varepsilon|y|$. Sea $\pi_y : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \langle f(y) \rangle \cong \mathbb{R}$ la proyección ortogonal en el subespacio generado por $f(y)$. La aplicación $\pi_y \circ f$ cumple que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\|(\pi_y \circ f)'(t)\| = \|\pi_y(f'(t))\| \leq \|f'(t)\| \leq \varepsilon.$$

Sin embargo $\|\pi_y \circ f(y)\| = \|f(y)\| > \varepsilon|y|$ en contra de lo dicho anteriormente para funciones reales de una variable real.

Sea ahora f en las condiciones del lema. Si el resultado es falso, existe algún $y \in \mathbb{R}^p$ tal que $\|f(y)\| > \varepsilon\|y\|$. Definimos $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ como $p(t) = t \cdot y$. Se tiene

$$\|(f \circ p)'(t)\| = \|df_{p(t)}(p'(t))\| \leq \varepsilon\|y\|$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Sin embargo

$$\|f \circ p(1)\| = \|f(y)\| > \varepsilon\|y\|,$$

que constituye una contradicción. □

Observación 6.3.21 *Para nuestros propósitos, en el contexto del lema anterior, el grafo de f es una hoja de una foliación próxima a \mathcal{F} . En consecuencia, volviendo a nuestra parametrización, se deduce que, si $(v, w) \in B_3^p \times B_1^{n-p}$, entonces existe una región compacta,*

$$\overline{\alpha^{-1}(R_{\alpha(v,w)}(\varepsilon, \infty))},$$

tal que toda hoja en $D_3^p \times D_1^{n-p}$ de $\varphi^\mathcal{G}$ que pasa por (v, w) está contenida en dicha región (si es necesario hay que hacer el abierto \mathcal{V} que nos da la parametrización local simultánea algo más pequeño).*

Ahora ya tenemos todo lo necesario para abordar la demostración de la Proposición 6.3.12. Consideramos el caso particular $T = \{0\} \times B_{\frac{1}{2}}^{n-p}$, que es una transversal local embebida en $B_3^p \times B_1^{n-p}$. Definimos el ρ -tubo de T como $U(T, \rho) = B_\rho^p \times B_{\frac{1}{2}}^{n-p}$, $0 < \rho < 3$. El borde de la transversal ∂T es compacto, y para cada punto $x \in \partial T$ consideramos una región compacta R_x en las condiciones de la Observación 6.3.21. El conjunto $K = \bigcup_{x \in \partial T} R_x$ es compacto, y por tanto cerrado. El conjunto $P(T, \rho) = U(T, \rho) \setminus K$ es un entorno abierto de T y cumple

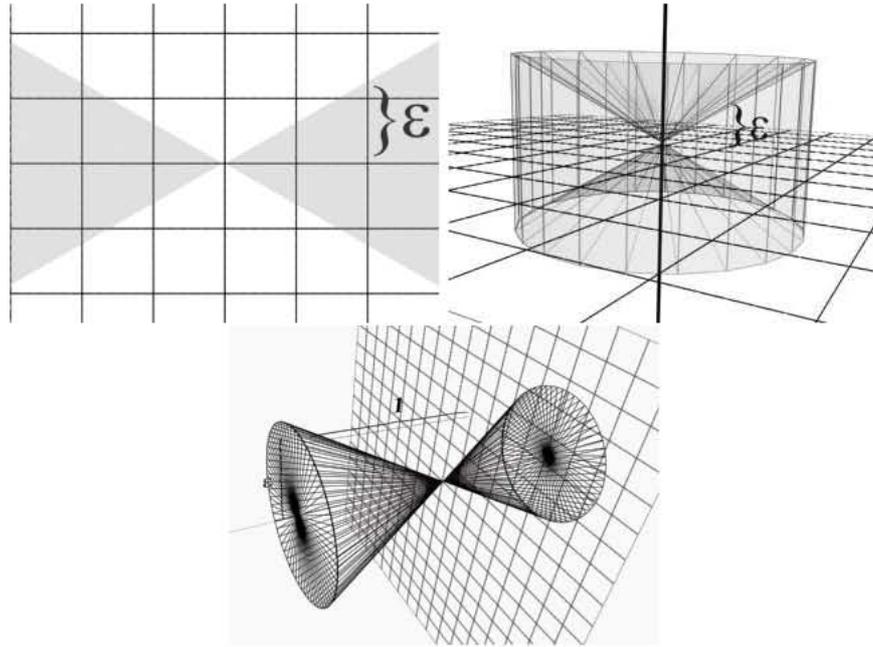


Figura 6.2: En esta figura se visualizan las regiones $R_0(\varepsilon, \infty)$. Para los casos con (p, n) igual a $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(1, 3)$.

las condiciones pedidas en una bola centrada en \mathcal{F} de radio suficientemente pequeño (esto se prueba fácilmente como consecuencia del Lema 6.3.20, obsérvese la Figura 6.3 para más detalles).

Demostración:

[Demostración de la Proposición 6.3.12] En las condiciones de la Proposición 6.3.12, existen k transversales S_1, \dots, S_k tales que $\overline{S_i} \subset A_i \setminus C_i$, $1 \leq i \leq k$, y $H_1(\overline{W}) \subset \bigcup_{i=1}^k S_i$. En consecuencia, si P es un entorno de $\bigcup_{i=1}^k A_i \setminus C_i$ existe un entorno \mathcal{V} de \mathcal{F} en $\text{Fol}_p^1(M)$ y existe entorno abierto $P(S_i, \rho_i) \subset P$ de cada S_i tal que cada hoja de $\mathcal{G}_{P(S_i, \rho_i)}$ corta a S_i (y por tanto a $A_i \setminus C_i$) para $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$. El abierto $\bigcup_{i=1}^k P(S_i, \rho_i)$ cumple las condiciones pedidas. \square

La utilidad del Teorema 6.3.14 es clara: nos permite obtener cotas inferiores para la Λ -categoría siempre que seamos capaces de aproximar una foliación por otras con Λ -categoría conocida.

Pregunta 6.3.22 *En este capítulo no hemos abordado el problema de la semicontinuidad en el caso de la Λ -categoría medible. Los resultados de Vogt y Singhof que usamos reiteradamente en este capítulo no se generalizan inmediatamente al caso medible por lo que parece más natural el enfoque topológico. También queda como cuestión abierta si este resultado es aplicable cuando consideramos foliaciones de clase ≤ 1 .*

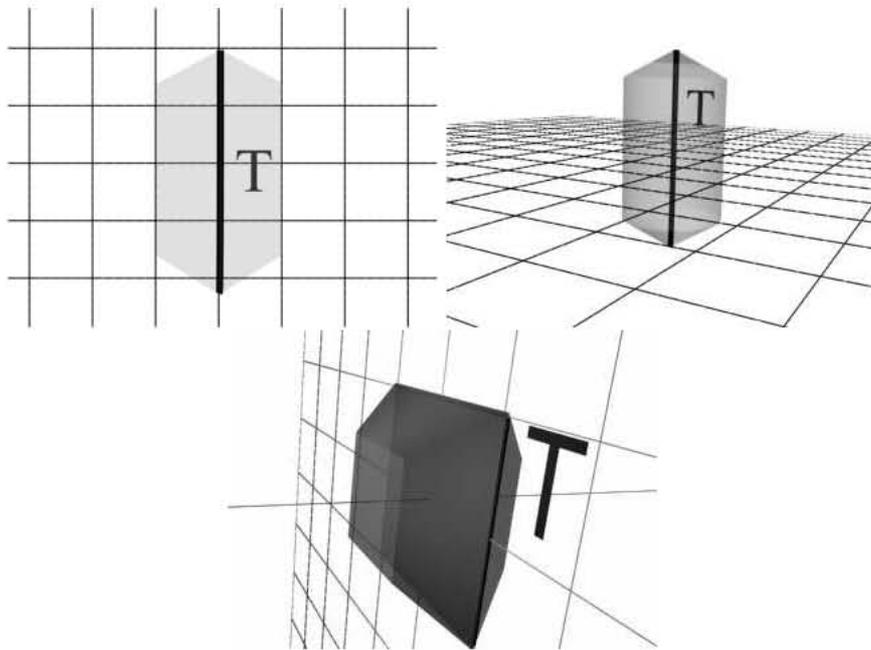


Figura 6.3: En esta figura se visualizan los abiertos contruidos para transversales en ejemplos donde p y n varían. Se muestran los casos con (p, n) igual a $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(1, 3)$.

Bibliografía

- [1] J. ÁLVAREZ LÓPEZ, X.M. MASA *Morphisms between complete Riemannian pseudogroups* Topology and its Applications 155, 544-604 (2008).
- [2] J.W.ALEXANDER, *An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected*, Proc. Nat. Acad. Sci.,U.S.A., 10, 8-10 (1924).
- [3] M. BERMÚDEZ, *Laminations Boréliennes*, Tesis, Université Claude Bernard-Lyon 1, (2004).
- [4] M. BERMÚDEZ, *Classification des feuilletages moyennables de dimension deux*, Preprint, Institut de Mathématiques Jussieu, (2006).
- [5] R.H.BING, *A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres*, Ann. Math., 58, n°2, 354-362 (1952).
- [6] A. CANDEL, L. CONLON *Foliations I*. American Mathematical Society (1999)
- [7] J. CHEEGER, M. GROMOV *L_2 -cohomology and group cohomology*. Topology 25,2,189-215(1986).
- [8] H. COLMAN VALE *Categoría L - S en foliaciones*. Tesis, Departamento de Xeometría e Topoloxía, Universidad de Santiago de Compostela (1998).
- [9] A. CONNES *Sur la theorie non commutative de l'integration, in Algèbres de opérateurs (Sém. Les Plans-sur-Bex, 1978)*. Lecture Notes in Math., 725, 19-1431 (1979).
- [10] A. CONNES *A survey of foliations and operator algebras*. Proc. Sympos. Pure Math., 38, 520-628 (1982).
- [11] B. DUBROVIN, S. NÓVIKOV, A. FOMENKO *Geometría Moderna. Métodos de la teoría de homología*s. Ed. Mir Moscú (traducción castellano 1987).
- [12] R. EDWARDS, K. MILLETT, D. SULLIVAN *Foliations with all leaves compact*. Topology 16, 13-32 (1977).

- [13] D. B. A. EPSTEIN *Foliations with all leaves compact*. Ann. Inst. Fourier 26, 265–282 (1976).
- [14] D. B. A. EPSTEIN *Periodic flows on 3-manifolds*. Ann. Math. 95, 68–82 (1972).
- [15] A. FATHI, M. R. HERMAN *Existence de difféomorphismes minimaux*. Astérisque 49, 37–59 (1977).
- [16] E. FEDIDA *Sur la théorie des feuilletages associée au repère mobile: cas des feuilletages de Lie*. Differential topology, foliations and Gelfand-Fuks cohomology (Proc. Sympos., Pontificia Univ. Católica, Rio de Janeiro), Lecture Notes in Math., 652, 183–195, Springer, Berlín (1976).
- [17] E. FEDIDA *Sur les feuilletages de Lie*. C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, 272, 999–1001 (1971).
- [18] D. GABORIAU *Sur la (co-)homologie L^2 des actions préservant una mesure*. C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, 365–370 (2000).
- [19] A. HAEFLIGER *Pseudogroups of local isometries*. En L.A. Cordero, editor, *Differential Geometry, Santiago de Compostela, 1984, Res. Notes in Math.*, vol. 131, 174–197. Pitman, Boston, MA (1985).
- [20] I. M. JAMES *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann* Topology, 17, 331–348 (1978).
- [21] R. KALLMAN. *Certain quotient spaces are countably separated, III*. J. Funct. Analysis, 22, 3, 225–241 (1976).
- [22] A. S. KECHRIS. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [23] G. KUPERBERG *A volume-preserving counterexample to the Seifert conjecture*. Comment. Math. Helvetici, 71, 70–97 (1996).
- [24] E. MACÍAS VIRGÓS, H. COLMAN *Tangential Lusternik-Schnirelmann category of foliations*. J. London Math. Soc., 2, 745–756 (2002).
- [25] C. MENIÑO *Categoría L-S en espacios foliados con medida transversa invariante*. Tesina, Departamento de Xeometría e Topoloxía, Santiago de Compostela (2007).
- [26] P. MOLINO *Étude des feuilletages transversalement complets et applications*. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 10(4), 289–307 (1977).
- [27] P. MOLINO *Géométrie globale des feuilletages riemanniens*. Proc. ,A 85(1), 45–76 (1982).

- [28] P. MOLINO AND M. PIERROT. *Théorèmes de slice et holonomie des feuilletages riemanniens singuliers*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 37(4), 207–223 (1987).
- [29] D. ORNSTEIN, B. WEISS. *Ergodic Theory of Amenable Group Actions I, The Rohlin Lemma*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 2, 161–164 (1980).
- [30] J.F. PLANTE. *Foliations with measure preserving holonomy*. Annals of Mathematics, 102, 327–361 (1975).
- [31] J.F. PLANTE, S.E. GOODMAN *Holonomy and averaging in foliated sets* J. Differential Geometry, 14, 401–407(1979).
- [32] G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Act. Sci. et Ind. 1183, Paris: Hermann (1952).
- [33] B.L. REINHART *Foliated manifolds with bundle-like metrics*. Ann. of Math. (2), 69, 119–132 (1959).
- [34] C. SERIES *The Rohlin Tower theorem and hyperfiniteness for actions of continuous groups*. Israel Journal of Mathematics, 30, Nos. 1-2, 99–122 (1978).
- [35] S.M. SRIVASTAVA, *A course on Borel sets* Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.
- [36] M. TAKESAKI. *Theory of Operator Algebras*. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin (1979).
- [37] E. VOGT, W. SINGHOF *Tangential category of foliations*. Topology 42, 603–627 (2003).
- [38] E. VOGT *The first cohomology group of leaves and local stability of compact foliations*. Manuscripta math. 37, 229–267 (1982).
- [39] P.G. WALCZAK. *Dynamics of foliations, groups and pseudogroups*. Ed. Birkhauser (2004).

Publicacións do departamento de Xeometría e Topoloxía

- 95 A. RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ *Cohomoloxía das foliacións riemannianas con follas densas. Cohomoloxía de Alexander-Spanier de foliacións compactas Hausdorff*. Tesiña de Licenciatura (2001) ISBN: 84-89390-12-6
- 96 M. FERNÁNDEZ LÓPEZ *Resultados de descomposición asociados á ecuación de Möbius*. Tese de Doutoramento (2002) ISBN: 84-89390-13-4
- 97 J.C. DÍAZ RAMOS *Curvaturas totais de esferas xeodésicas*. Tesiña de Licenciatura (2002) ISBN: 84-89390-14-2
- 98 M. F. GONZÁLEZ LÁZARO *Resolución de singularidades en acciones polares*. DEA (2003) ISBN: 84-89390-16-9
- 99 A. SOTELO ARMESTO *El grupo de difeomorfismos del espacio de hojas de una foliación de Lie desde el punto de vistas difeológico*. Tesiña de Licenciatura (2003) ISBN: 84-89390-15-0
- 100 M. BROZOS VÁZQUEZ *Variedades semi-riemannianas con tensor de curvatura especial*. Tesiña de Licenciatura (2003) ISBN: 84-89390-18-5
- 101 J.C. DÍAZ RAMOS *Caracterización de variedades riemannianas mediante curvaturas escalares totais de esferas xeodésicas*. DEA (2003) ISBN: 84-89390-17-7
- 102 M.T. PÉREZ LÓPEZ *Campos de vectores harmónicos-Killing*. Tese de Doutoramento (2003) ISBN: 84-89390-19-3
- 103 I. GARCÍA RAMÍREZ *Aplicación de las formulas de Bochner al estudio de variedades 4-dimensionales doblemente casi-hermíticas*. DEA (2003) ISBN: 84-89390-20-7
- 104 A. MARTÍN MÉNDEZ *Álgebras de Lie graduadas y estructuras de segundo orden asociadas*. Tese de Doutoramento (2004) ISBN: 84-89390-21-5
- 105 M. BROZOS VÁZQUEZ *Propiedades conformes de productos deformados*. DEA (2004) ISBN: 84-89390-22-3
- 106 J.C. DÍAZ RAMOS *Geometric consequences of intrinsic and extrinsic curvature conditions*. Tese de Doutoramento (2006) ISBN: 84-89390-23-1
- 107 P. GONZÁLEZ SEQUEIROS *A dinámica dos mosaicos de Robinson*. Tesiña de Licenciatura (2006) ISBN: 84-89390-24-X
- 108 E. CALVIÑO LOUZAO *Variedades de Osserman e Ivanov-Petrova en dimensión cuatro*. DEA (2007) ISBN 978-84-89390-25-6

- 109** M. BROZOS VÁZQUEZ *Geometric consequences of algebraic conditions on curvature operators*. Tese de Doutoramento (2007) ISBN 978-84-89390-26-3
- 110** M. PÉREZ FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA *Número de ramificación de un pseudogrupo*. DEA (2007) ISBN 978-84-89390-27-0
- 111** P. GONZÁLEZ SEQUEIROS *A dinámica dos mosaicos euclidianos*. DEA (2007) ISBN 84-89390-28-7
- 112** ÁLVARO LOZANO ROJO *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos*. Tese de Doutoramento (2008) ISBN 978-84-89390-29-4
- 113** M. J. PEREIRA SÁEZ *Aplicación traza, transformación de Cayley y categoría LS de los grupos de Lie clásicos*. DEA (2008) ISBN 978-84-89390-30-0
- 114** S. VILARIÑO FERNÁNDEZ *Nuevas aportaciones al estudio de los formalismos k -simpléctico y k -cosimpléctico*. Tese de Doutoramento (2009) ISBN 978-84-89390-31-7
- 115** S. GAVINO FERNÁNDEZ *Estudio do tensor de curvatura ó longo de xeodésicas e círculos en variedades de Walker*. DEA (2009) ISBN 978-84-89390-32-4