Alexandre Andrés Cortés Ayaso

MÉTRICAS DE WALKER: ESTRUCTURA SIMPLÉCTICA DAS VARIEDADES DE OSSERMAN

117

2010

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Alexandre Andrés Cortés Ayaso

MÉTRICAS DE WALKER: ESTRUCTURA SIMPLÉCTICA DAS VARIEDADES DE OSSERMAN

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección dos profesores M. Elena Vázquez Abal e J. Carlos Díaz Ramos, para obter o Diploma de Estudos Avanzados en Ciencias Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levouse a cabo a súa defensa o día 21 de xullo de 2006 na Facultade de Matemáticas de dita Universidade, obtendo a cualificación de Sobresaliente.

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 978-84-89390-34-8

Dep. Leg.: C 3257-2010

Á memoria da miña bisavoa Cipriana

Agradecementos

Das moitas persoas ás que quero agradecer, quero comezar polo primeiro mestre que me fixo ver o marabilloso das matemáticas: Antonio Ayaso Santamaría, o meu avó. Esas marabillas tomaron outra forma coa guía, consello e axuda dos profesores Luis Hervella Torrón, Elena Vázquez Abal e Eduardo García Río, que me levaron a conseguir, entre outras moitas cousas, o que agora se publica. Pero non foron os únicos, aí estaban, no día a día, os meus compañeiros, guías e amigos Miguel Brozos Vázquez e José Carlos Díaz Ramos. Pero se a alguén teño que agradecer todo o que conseguín na vida é a meus pais, Pura e Manolo. Eles déronme todo o que se precisa para o camiño: amor e educación.

Graciñas a todos.

Introducción

É ben sabido que a existencia dun campo paralelo de k-planos nunha variedade riemanniana da lugar a unha descomposición local da variedade como producto riemanniano. Esta propiedade exténdese sen problemas ó ámbito, máis xeral, da xeometría semi–riemanniana asumindo que a restrición do tensor métrico ó campo de k-planos é non dexenerada. Sen embargo, a situación é moi difente cando o campo paralelo de k-planos é dexenerado (o que se coñece como unha estructura de Walker), dando lugar a unha estructura indescompoñible pero non irreducible [2]. É por isto que as métricas de Walker aparecen como estructuras subxacenetes en moitas situacións estrictamente semi–riemannianas sen análogo riemanniano. Como exemplo, as métricas lorentzianas de frontes de ondas (que posúen un campo de vectores nulo paralelo) constitúen un caso especial de estructuras lorentzianas de Walker. As hipersuperficies de Einstein con operadores de Jacobi nilpotentes [26], xunto coas estructuras para–Kähler [12] e hipersimplécticas [22] son exemplos de variedades de Walker de signatura neutra (ν, ν).

O estudio da xeometría das variedades con campos de k-planos dexenerados simplificouse notablemente gracias ó traballo de Walker [34], [35]. A existencia de sistemas de coordenadas adaptados permite reducir de xeito drástico o número de compoñentes do tensor métrico $g = (g_{ij})$. Así, en dimensión tres as compoñentes de g redúcense de seis a unha e de dez a tres en dimensión catro. É por isto que gran parte dos estudios realizados ata agora sobre as propiedades das variedades de Walker centranse na súa xeometría local, particularmente en dimensións baixas.

Recentemente, Derdzinski e Roter [13] obtiveron unha descrición alternativa das métricas de Walker mediante certas construccións de fibrados, o cal permitirá abordar algúns problemas de carácter global. Sen embargo, a estructura global das métricas de Walker é un aspecto aínda case descoñecido.

O noso interés no estudio das métricas de Walker ven motivado pola súa importante relevancia no estudio do problema de Osserman (véxase, por exemplo, [7], [14], [15], [20] e as referencias indicadas neles). En particular, o estudio das métricas de Walker 4-dimensionais permitiu caracterizar unha clase de variedades de Osserman que se supoñía baleira. Tales espacios presentan gran similitude coas variedades kählerianas e para–kählerianas a nivel local dende o punto de vista da súa curvatura e, de xeito máis particular, na forma dos seus operadores de Jacobi. Sen embargo, o estudio global destas variedades é aínda un problema aberto.

O estudio da estructura global de variedades partindo das súas propiedades locais é un aspecto ampliamente desenvolto na xeometría riemanniana. Sen embargo, salvo os resultados clásicos de Calabi-Markus sobre e existencia de variedades lorentzianas compactas de curvatura seccional constante [9] ou o traballo de Law [24] xeneralizando as desigualdades de Hitchin-Thorpe, pouco se sabe sobre a influencia global de propiedades locais no ámbito semi–riemanniano. O noso obxectivo neste traballo é desenvolver un estudio da xeometría local/global das variedades de Walker 4-dimensionais partindo de certas propiedades da súa curvatura.

Así, da observación da estructura autodual e anti–autodual das métricas de Walker, próbase a existencia dunha estructura case para–hermítica definida globalmente sobre calquera variedade de Walker sempre que a súa curvatura escalar sexa distinta de cero en todo punto (véxase (3.7). O estudio desta estructura é o obxectivo central do presente traballo, no cal destacamos as seguintes conclusións [11]:

- [Teorema 3.3]

  Sexa (M, g) unha variedade de Walker 4-dimensional compacta con curvatura escalar distinta de cero en cada punto. Entón, a primeira clase de Chern de M é identicamente nula (i.e. $c_1^2[M] = 0$).

- [Teoremas 3.4, 3.5, 3.6]

  A estructura case para–hermítica (g, J) é isotrópica Kähler (i.e. $\|\nabla J\| = 0$), isotrópica case para-Kähler (i.e., $\|d\Omega\| = 0$) e isotrópica para-Hermítica (i.e., $\|N_J\| = 0$), aínda que $\nabla J \neq 0$, $d\Omega \neq 0$ e $N_J \neq 0$ respectivamente.

- [Teorema 4.13]

  Unha métrica de Walker autodual con estructura case para–hermítica (g, J) asociada debilmente *–Einstein é simpléctica se e só se a curvatura escalar é constante.

- [Teorema 5.8]

  Non existen variedades de Osserman compactas 4-dimensionais tales que os seus operadores de Jacobi posúan unha raíz dobre do seu polinomio mínimo, salvo que estes sexan nilpotentes.

Índice xeral

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Métricas semi–riemannianas

O noso campo de estudio serán as variedades semi–riemannianas, i.e. unha variedade diferenciable n-dimensional M dotata en cada espacio tanxente T_pM dun producto interior g_p de signatura (r, s) que se extende diferenciablemente ó longo da variedade.

Comezamos dando unha serie de definicións que permiten fixar a notación e nomenclatura empregada; para iso tomamos como referencias básicas [20], [21] e [31].

Esta primeira definición hérdase da xeometría de Lorentz, empregada na Teoría da Relatividade. Dada (M, g) unha variedade semi–riemanniana, un vector $x \in T_pM$ diremos que é

– *temporal* se $g(x, x) < 0$

– *espacial* se $g(x, x) > 0$

– *nulo* se $g(x, x) = 0$ e $x \neq 0$

e ademais, a un vector non nulo x tal que $|g(x, x)| = 1$ chamarémoslle unitario.

Denotamos por $S_p^-(M)$, $S_p^+(M)$ e $S_p(M)$ os conxuntos

$$\begin{aligned} S_p^-(M) &= \{x \in T_pM : g(x,x) = -1\}, \\ S_p^+(M) &= \{x \in T_pM : g(x,x) = 1\}, \\ S_p(M) &= \{x \in T_pM : |g(x,x)| = 1\}, \end{aligned}$$

de vectores unitarios temporais, espaciais e non nulos, respectivamente, do espacio tanxente á variedade no punto p. O análogo para campos de vectores será

$$\begin{aligned} S^-(M) &= \bigcup_{p\in M} S_p^-(M) = \{X \in TM : \ g(X,X) = -1\}, \\ S^+(M) &= \bigcup_{p\in M} S_p^+(M) = \{X \in TM : \ g(X,X) = 1\}, \\ S(M) &= \bigcup_{p\in M} S_p(M) = \{X \in TM : \ |g(X,X)| = 1\}, \end{aligned}$$

chamados *fibrados unitarios temporal*, *espacial* e *non nulo* da variedade (M, g), respectivamente. En xeral, notaranse os vectores con letras latinas minúsculas: $x, y, z, v, w, \ldots$, e os campos de vectores coas correspondentes maiúsculas: $X, Y, Z, V, W, \ldots$

Dada a variedade semi–riemanniana (M, g), tense determinada de forma única a conexión de Levi–Civita asociada a (M, g) como a conexión simétrica que fai paralela a métrica g. A fórmula de Koszul danos a expresión de tal conexión

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_X Y, Z\right) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])\,, \end{aligned}$$

onde X, Y, Z son campos de vectores sobre M.

Unha vez temos unha conexión sobre M, definimos o tensor curvatura de tipo $(1, 3)$ da forma

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

que verifica as identidades

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z,$$

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0,$$

$$(\nabla_X R)(Y,Z)V + (\nabla_Y R)(Z,X)V + (\nabla_Z R)(X,Y)V = 0,$$

para calesquera X, Y, Z, V campos de vectores en M e onde $[\,,\,]$ denota o corchete de Lie de campos de vectores en M. A segunda identidade coñécese co nome de Primeira Identidade de Bianchi ou Identidade de Bianchi Alxébrica e a última co nome de Segunda Identidade de Bianchi ou Identidade de Bianchi Diferencial.

En ocasións consideraremos o tensor curvatura de tipo $(0, 4)$ asociado:

$$R(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z,V)$$

que, ademais, cumpre

$$R(X,Y,Z,V) = R(Z,V,X,Y),$$

$$R(X,Y,Z,V) = -R(X,Y,V,Z),$$

de novo para calesquera X, Y, Z, V campos de vectores sobre M.

Dada a dificultade que supón traballar con un campo de tensores tipo $(1,3)$ ou $(0,4)$, defínense obxectos máis sinxelos que permiten obter información relevante sobre o tensor curvatura. Empréganse, e son de vital importancia, ó longo do traballo dúas contraccións do tensor curvatura

– o *tensor de Ricci*

$$Ric\,(X,Y) = tr\,\{Z \to R(Z,X)Y\}\ ,$$

– a *curvatura escalar*

$$Sc = tr(Ric)\,,$$

que se denotaran por ρ e τ, respectivamente, ó longo do traballo.

Localmente, para unha referencia ortonormal $E_1, \dots, E_n$, o tensor de Ricci pódese expresar do seguinte xeito

$$\rho(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} R(E_i, X, Y, E_i),$$

e a curvatura escalar como

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} \rho(E_i, E_i) = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{E_i} \varepsilon_{E_j} R(E_j, E_i, E_i, E_j),$$

onde $\varepsilon_{E_k} = g(E_k, E_k)$, para todo $k = 1, \dots, n$.

Unha situación na que a curvatura da variedade é relativamente simple, é aquela na que o tensor de Ricci pode expresarse coma un múltiplo escalar do tensor métrico, i.e.

$$\rho = \lambda\, g\,,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Neste caso $\lambda = \frac{\tau}{n}$ e dicimos que a variedade é *Einstein*. Para $dimM = 2$, temos que toda superficie cumpre que $\rho = \lambda g$ para algunha función λ, polo que a propiedade de ser Einstein é equivalente á constancia da curvatura de Gauss. Analogamente, unha variedade 3-dimensional é Einstein se e só se a curvatura seccional é constante. Sen embargo, para $dimM \geq 4$, a situación cambia radicalmente e as variedades Einstein están lonxe de ser completamente clasificadas.

Outro obxecto máis sinxelo que nos permite recuperar información sobre o tensor curvatura é a curvatura seccional. Defínese a *curvatura seccional* sobre os planos non dexenerados (é dicir, sobre os planos π que verifican $g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2 \neq 0$, onde x e y son vectores que xeneran o plano π) como segue

$$K(\pi) = \frac{R(x,y,y,x)}{g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2} \quad .$$

A importancia do concepto de curvatura seccional radica non só en que permite dar unha interpretación xeométrica da curvatura como a curvatura da superficie tanxente ó plano considerado, senón que, ademais, é posible reconstruir o tensor curvatura a partir da curvatura seccional dos planos do espacio tanxente.

Observación 1.1. A curvatura seccional é constante c se e só se o tensor curvatura se pode escribir $R(x,y)z = c\{g(y,z)x - g(x,z)y\}$.

Ademais sabemos que se a curvatura seccional é constante c, entón a métrica é Einstein, con $\lambda = c(n-1)$. O recíproco non é certo en xeral, pero sí nas variedades 3-dimensionais.

Sexa agora $z \in T_pM$ e consideremos a aplicación linear

$$\begin{array}{rccc} R(\cdot,z)z: & T_pM & \longrightarrow & T_pM \\ & x & \mapsto & R(x,z)z. \end{array}$$

Dado que $g(R(x,z)z,z) = 0$ e $g(R(z,z)z,x) = 0$, podemos restrinxir o percorrido da aplicación anterior ó subespacio ortogonal a z e considerar así a aplicación

$$R(\cdot,z)z : z^\perp \longrightarrow z^\perp.$$

Estamos entón en condicións de introducir o operador de Jacobi. Dada (M,g) unha variedade semi–riemanniana e $Z \in S(M)$, a restricción $R_Z : Z^\perp \longrightarrow Z^\perp$ da aplicación linear $R(\cdot,Z)Z$ a $Z^\perp$ denomínase *operador de Jacobi con respecto a Z*

$$R_Z X = R(X,Z)Z, \text{ con } X \in Z^\perp.$$

Observación 1.2. Para campos de vectores $X, Y \in Z^\perp$ temos

$$\begin{aligned} g(R_Z X, Y) &= g(R(X,Z)Z,Y) = g(R(Z,Y)X,Z) \\ &= g(R(Y,Z)Z,X) = g(R_Z Y, X), \end{aligned}$$

logo o operador de Jacobi é autoadxunto.

Por ser o operador de Jacobi autoadxunto, no caso en que a métrica sexa definida positiva, será diagonalizable e os seus autovalores indicarán os valores extremos da curvatura seccional. En xeral, no caso semi–riemanniano, a situación non é tan sinxela, podendo presentar R_X autovalores complexos ou raíces múltiples do seu polinomio mínimo. Ademais, é importante sinalar que o espectro de R_X non determina completamente o operador de Jacobi en métricas indefinidas, sendo preciso o estudio dos polinomios mínimos de R_X.

1.2. Estructuras case para–hermíticas

Sexa M unha variedade diferenciable $2n$-dimensional. Dise que M é *paracomplexa* (ou localmente difeomorfa a un producto de dúas variedades da mesma dimensión) cando é posible construir sobre ela un sistema de coordenadas paracomplexas.

Unha condición necesaria para que unha variedade diferenciable sexa difeomorfa a unha variedade paracomplexa é a existencia dun campo de tensores J de tipo $(1,1)$ sobre a variedade verificando

$$J^2 = Id,$$

de xeito que os autovalores $+1$ e -1 de J teñan a mesma multiplicidade. Este campo J denominase *estructura case paracomplexa* sobre M. Sen embargo, a existencia deste campo de tensores non é unha condición suficiente para ter asegurada a existencia dunha estructura paracomplexa sobre a variedade. Debe cumprirse tamén unha condición de integrabilidade, equivalente á anulación do *tensor de Nijenhuis*

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] + [X, Y].$$

Neste caso, o campo de tensores J denomínase *estructura paracomplexa.*

Unha variedade *case para–hermítica* (M, g, J) é unha variedade diferenciable M, xunto cunha estructura case paracomplexa J e unha métrica semi–riemanniana g, compatibles no seguinte sentido

$$g(JX, Y) + g(X, JY) = 0, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Se J é unha estructura paracomplexa, o triple (M, g, J) chámase entón variedade *para–hermítica.*

Sexa M^{2n} unha variedade diferenciable. Unha 2-forma Ω sobre M dise *case simpléctica* se é non dexenerada, é dicir, se $\Omega^n \neq 0$. Se a 2-forma Ω é, ademais, pechada (é dicir, $d\Omega = 0$), Ω dise *simpléctica* e o par (M, Ω) denomínase variedade *simpléctica.*

Observación 1.3. Unha *subvariedade lagranxiana* dunha variedade case simpléctica (M^{2n}, Ω) é unha subvariedade inmersa, N, n-dimensional tal que Ω induce a forma cero sobre N.

Sexa M una variedad diferenciable tal que o fibrado tanxente TM admite unha descomposición da forma $TM \cong L \oplus L'$, sendo L e L' subfibrados lagranxianos respecto dunha certa 2-forma Ω. Denotemos por π_L e $\pi_{L'}$ as proxeccións de TM sobre L e L' respectivamente, e definamos $J = \pi_L - \pi_{L'}$. Entón J é unha estructura case paracomplexa sobre M, verificándose que $\Omega(JX, JY) = -\Omega(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Reciprocamente, se J é unha estructura case paracomplexa sobre M e Ω é unha 2-forma sobre M, tal que $\Omega(JX, JY) = -\Omega(X, Y)$ para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entón os subfibrados de TM correspondentes ós autovalores ± 1 da estructura J son lagranxianos para a 2-forma Ω. En conclusión, tense que TM admite unha descomposición da forma $L \oplus L'$, sendo L e L' subfibrados lagranxianos respecto dunha 2-forma Ω se e só se existe unha estructura case paracomplexa J sobre M tal que $\Omega(JX, JY) = -\Omega(X, Y)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Entón, se (M, Ω) é unha variedade case simpléctica, verifícase que a descomposición de TM en suma de Withney de subfibrados lagranxianos é equivalente á existencia dunha estructura case para–hermítica sobre M (a métrica para–hermítica está relacionada coa 2-forma Ω pola expresión $g(X, Y) = \Omega(JX, Y)$).

Definimos, entón, unha variedade *para–Kähler* como unha variedad simpléctica localmente difeomorfa a un producto de subvariedades lagranxianas. A proposición seguinte pon de manifesto a relación existente entre a 2-forma Ω, o tensor de Nijenhuis N_J, a estructura case para–hermítica J e a conexión métrica, ∇, asociada á métrica g (definida por $g(X, Y) = \Omega(JX, Y)$).

Proposición 1.4. *Sexa (M, g, J) unha variedade case para–hermítica e denotemos por ∇ a conexión de Levi-Civita asociada a g. Cúmprese que*

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) + 3d\Omega(X, Y, Z) + 3d\Omega(X, JY, JZ) + g(JX, N_J(Y, Z)) = 0,$$

sendo $\Omega(X, Y) = g(JX, Y)$ para calesquera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Observación 1.5. Esta proposición amosa que unha variedade para–Kähler é unha variedade para–hermítica (M, g, J) tal que $\nabla J = 0$, sendo ∇ a conexión de Levi-Civita de g. Como consecuencia, se R é o tensor curvatura asociado a ∇, é fácil comprobar que

$$R(JX, JY, Z, W) = R(X, Y, JZ, JW) = -R(X, Y, Z, W)\,,$$

para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Véxase [12] para máis información sobre as variedades case para–hermíticas (tamén chamadas bi–lagranxianas [18]).

As variedades para–Kähler de curvaturas seccional holommorfa constante son localmente chás, como consecuencia das identidades postas de manifesto na observación 1.5. Este feito suxeriu a consideración doutro tipo de función curvatura como é a a curvatura seccional paraholomorfa. Un 2-plano π dise paraholomorfo se $J\pi \subset \pi$ e, así, a *curvatura seccional paraholomorfa* defínese como a restricción da función curvatura seccional a planos paraholomorfos non dexenerados

$$H(\pi) = \frac{R(x, Jx, Jx, x)}{g(x, x)g(Jx, Jx) - g(x, Jx)^2} \quad ,$$

onde os vectores x, Jx xeneran o plano π.

As variedades para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante c son espacios localmente simétricos, caracterizados polo feito de que o seu tensor de curvatura pode expresarse como [19]

$$R(x,y)z = \frac{c}{4}\left\{g(y,z)x - g(x,z)y + g(Jx,z)Jy - g(Jy,z)Jx + 2g(Jx,y)Jz\right\}.$$

Séguese así, do anterior, que os correspondentes operadores de Jacobi son diagonalizables da forma

$$R_X = \begin{pmatrix} c\,g(X,X) & 0 \\ 0 & \frac{c}{4}\,g(X,X)\,\mathrm{Id} \end{pmatrix},$$

onde o autovalor distinguido $c\,g(X,X)$ ten multiplicidade 1. Ademais,a diferencia da xeometría kähleriana, a métrica inducidada en

$$E_c(X) =< X > \oplus Ker(R_X - c\,g(X,X)\,\mathrm{Id}) =< X, JX >$$

ten signatura lorentziana. (Véxase [5] para máis información sobre a acotación da curvatura seccional paraholomorfa).

Capítulo 2

Métricas de Walker

Un r-*plano* nun punto $p \in M^n$ é un subespacio vectorial r-dimensional de T_pM. Denotamos por $\mathcal{D}^\perp$ o plano ortogonal. O *plano nulo* $\mathcal{D}^\star$ de $\mathcal{D}$ é a intersección de $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}^\perp$. Nótese que $\mathcal{D}$ é *dexenerado* se e só se a restricción do tensor métrico a $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ é dexenerado (i.e. $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}^\perp \neq 0$) e é *totalmente dexenerado* se

$$g(X, Y) = 0 \quad para \quad todo \quad X, Y \in \mathcal{D}.$$

Nese caso $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp \cap \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ é *paralelo* se $\nabla\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ é *estrictamente paralelo* se existe unha base local $\{x_1, \dots, x_r\}$ de $\mathcal{D}$ tal que $\nabla_{x_i} = 0$, para todo $i = 1, \dots, r$.

É ben sabido que a existencia dun campo de planos paralelos nunha variedade de Riemann da lugar a unha descomposición local da variedade como un producto directo. Esta propiedade exténdese ás variedades semi–riemannianas sempre que o campo de planos sexa non dexenerado. Sen embargo, as consecuencias xeométricas da existencia dun campo de planos paralelo dexenerado aínda non está completamente estudiada.

Aló polo 1950, Walker ([34], [35]) estudiou as variedades semi–riemannianas (M, g) n-dimensionais que admiten un campo paralelo $\mathcal{D}$ de r-planos dexenerados, con $r \leq \frac{n}{2}$. Unha das súas grandes aportacións foi descubrir que estas variedades posúen en cada punto un sistema de coordenadas locais $(x^1, ..., x^r, x^{r+1}, ..., x^{n-r}, x^{n-r+1}, ..., x^n)$ para o que a métrica se pode expresar mediante a chamada forma canónica

$$g = [g_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & A & H \\ I_r & H^t & B \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

onde I_r é a matriz identidade r-dimensional, e A, B e H son matrices función das coordenadas. Ademais, A e B son matrices simétricas de orde $(n - 2r) \times (n - 2r)$ e $r \times r$, respectivamente. H é de orde $(n - 2r) \times r$ e H^t a trasposta de H. Tanto A coma H son independentes das coordenadas $(x^1, ..., x^r)$.

Debemos sinalar que os r primeiros vectores $\partial_i (= \partial/\partial_i)$ $(i = 1, ..., r)$ xeneran o campo paralelo de planos nulos

$$\mathcal{D} = span\{\partial_1, ..., \partial_r\},$$

co cal

$$\nabla_{\partial_j}\partial_i \in \mathcal{D} \quad i = 1, .., r \; e \; j = 1, ..., n.$$

No caso especial no que a métrica de Walker sexa estricta, as funcións compoñentes da matriz B da forma canónica (2.1) non dependen das coordenadas $(x_1, \dots, x_r)$ (véxase [34]).

2.1. Estructuras de Walker e métricas indefinidas

As métricas de Walker aparecen como a estructura subxacente a numerosas situacións estrictamente semi–riemannianas tanto explícita como implícitamente. Veremos varios exemplos.

2.1.1. Grupos de Lie nilpotentes en dous pasos

Sexa N un grupo de Lie nilpotente en dous pasos cunha métrica semi–riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariante pola esquerda e con álxebra de Lie $\mathfrak{n}$.

No caso riemanniano temos a descomposición

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{z}^{\perp},$$

onde $\perp$ denota o complemento ortogonal respecto da métrica. $\mathfrak{z}$ pode conter un subespacio dexenerado $\mathfrak{U}$ tal que

$$\mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}^{\perp}.$$

No caso semi–riemanniano introdúcese a seguinte descomposición (véxase [10])

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{C},$$

onde $\mathfrak{z} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{Z}$ e $\mathfrak{b} = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{C}$. Aquí, $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{D}$ son subespacios complementarios nulos e $\mathfrak{U}^{\perp} \cap \mathfrak{D}^{\perp} = \mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{D}$ (en realidade, $\mathfrak{Z}$ é a parte do centro que está en $\mathfrak{U}^{\perp} \cap \mathfrak{D}^{\perp}$ e $\mathfrak{C}$ é o seu complemento ortogonal en $\mathfrak{U}^{\perp} \cap \mathfrak{D}^{\perp}$).

A xeometría dun grupo de Lie semi–riemanniano nilpotente en dous pasos está controlada esencialmente pola aplicación lineal $j : \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{Z} \to (\mathfrak{D} \oplus \mathfrak{C})$, definida por $\langle j(a)x, y \rangle = \langle [x, y], \iota a \rangle$, onde ι é unha involución intercambiando $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{D}$. Dado que $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{z}$, séguese de contado que $\mathfrak{U}$ é un subespacio dexenerado paralelo e, así, a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é necesariamente unha métrica de Walker.

2.1.2. Álxebras de Lie indefinidas Kähler

As álxebras de Lie indefinidas Kähler $\mathfrak{g}$ de dimensión 4 divídense de xeito natural en dúas clases dependendo de se un ideal lagranxiano $\mathfrak{h}$ definido naturalmente satisfai que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{J}\mathfrak{h}$ é trivial ou que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{J}\mathfrak{h}$ coincide con $\mathfrak{g}$. Se acontece o segundo, a métrica inducida é unha métrica de Walker. Tales álxebras de Lie corresponden co caso $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$, $\delta_{4,1}$ e $\delta_{4,2}$. Véxase Ovando [31] para os detalles.

2.1.3. Hipersuperficies de Einstein

As hipersuperficies Einstein N no espacio de formas real indefinido $\overline{N(c)}$ foron estudiadas por Magid [26] quen demostrou que o operador de configuración S de calquera de tales hipersuperficies debe ser diagonalizable. Este operador ou ben define, tras reescalar, unha estructura complexa en N (i.e. $S^2 = -b^2 Id$ para algún $b \neq 0$), ou ben é nilpotente en dous pasos (i.e. $S^2 = 0$, $S \neq 0$).

Ademais, o feito de que S sexa paralelo mostra que a métrica subxacente a unha hipersuperficie de Einstein, N, con operador de configuración nilpotente é unha métrica de Walker [25].

2.1.4. Estructuras para–Kähler e hipersimplécticas

Lembremos que unha variedade para–Kähler é unha variedade simpléctica localmente difeomorfa a un producto de subvariedades lagranxianas $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$. Esta definición implica que o campo de tensores $(1,1)$ J, definido como $J = \pi_L - \pi_{L'}$, é unha estructura case paracomplexa, i.e. $J^2 = Id$ en M e $g(X,Y) = \Omega(X,JY)$ unha métrica para–hermítica. A especial importancia da condición para–Kähler reside en que é equivalente a afirmar que a estructura paracomplexa é paralela con respecto á conexión de Levi-Civita de g, i.e. $\nabla J = 0$ (véxase [12]). A estructura paracomplexa J ten autovalores ± 1 cos correspondentes autoespacios totalmente dexenerados debido á antisimetría de J. Ademais, dado que J é paralela no caso para–Kähler, tamén o son os autoespacios ± 1, o cal implica que toda estructura para–Kähler (g,J) admite necesariamente unha métrica de Walker.

Unha estructura *case hiper–paracomplexa* sobre unha variedade $4n$-dimensional M é un triple $J_\alpha, a = 1,2,3$, onde J_1, J_2 son estructuras case paracomplexas e J_3 é unha estructura case complexa, sastisfacendo as identidades paracuaterniónicas

$$J_1^2 = J_2^2 = -J_3^2 = \mathrm{Id}\,, \qquad J_1\,J_2 = J_2\,J_1 = J_3.$$

Obsérvamos que sobre unha variedade case hiper–paracomplexa hai en realidade un hiperboloide de dúas follas de estructuras case complexas

$$S_1^2(-1) = \{c_1 J_1 + c_2 J_2 + c_3 J_3 : c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = -1\}.$$

Unha métrica *hiper–parahermítica* é unha métrica semi–riemanniana compatible coa estructura (case) hiperparcomplexa no senso de que a métrica g é antisimétrica respecto a cada $J_\alpha, \alpha = 1,2,3$, i.e.

$$g(J_1\cdot, J_1\cdot) = g(J_2\cdot, J_2\cdot) = -g(J_3\cdot, J_3\cdot) = -g(\cdot,\cdot).$$

Esta estructura chámase estructura *case hiper–parahermítica*. Se sobre unha variedade hiper–parahermítica existe unha base admisible tal que cada $J_\alpha, \alpha = 1,2,3$, é paralela respecto á conexión de Levi-Civita ou, equivalentemente, as tres formas de Kähler son pechadas, entón a variedade dise *hipersimpléctica* (véxase [22]). Como J_1 e J_2 son estructuras para–Kähler, tense que g é unha métrica de Walker.

2.1.5. Métricas Osserman 4-dimensionais

As métricas de Walker tamén aparecen asociadas a algúns problemas de curvatura. Por exemplo as métricas Osserman de dimensión 4 que teñen operadores de Jacobi non diagonalizables e posúen dous autovalores diferentes e distintos de cero son necesariamente métricas de Walker (véxase [3] e [15]). Este asunto está relacionado coa clasificación dos operadores lineais do espacio de Lorentz de dimensión 3 $\mathbb{R}^{1,2}$ (véxase [24] e [30]):

$$\underset{\textit{Tipo } I_a}{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}, \quad \underset{\textit{Tipo } I_b}{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}, \quad \underset{\textit{Tipo } II}{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}}, \quad \underset{\textit{Tipo } III}{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}}.$$

A estructura Kähler-Einstein indefinida de Petean sobre un toro (véxase [33]) tamén é un exemplo de variedade de Walker 4-dimensional propia case hermítica. (véxase [29] e tamén [28]).

2.1.6. Extensións de Riemman

Sexa M unha variedade n-dimensional e T_p^*M o seu espacio cotanxente en $p \in M$. O conxunto $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ chámase *fibrado cotanxente* da variedade M. Un punto $\tilde{p} \in T^*M$ ven dado por $\tilde{p} = (p, \omega)$, onde $p \in M$ e $\omega \in T_p^\star M$. Sexa $\pi : T^\star M \to M, \pi(\tilde{p}) = p$ a proxección canónica. Se f é unha función sobre M, defínese o seu *levantamento vertical* a T_p^*M como $f^v = f \circ \pi$.

Unha carta $(U, (x_i))$ sobre M induce coordenadas naturais $(x_i, x_{i'})$ en $\pi^{-1}(U)$, onde a 1-forma $\omega \in U$ pódese escribir como $\omega = \sum x_{i'} dx_i$. Para cada campo de vectores X sobre M, defínese a función $\imath_X : T^\star M \to \mathbb{R}$ por $\imath_X(\tilde{p}) = \imath_X(p, \omega) = \omega(X_p)$. En coordenadas locais, $\imath_X(x_i, x_{i'}) = \sum x_{i'} X_i$, onde $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Definimos o *levantamento completo* a T^*M dun campo de vectores X en M, e denotámolo por X^c, como o campo de vectores sobre $T^\star M$ verificando $X^c(\imath_Z) = \imath_{[X,Z]}$, para todo campo de vectores Z sobre M.

Sexa ∇ unha conexión afin sobre M libre de torsión, definimos a súa *extensión de Riemann* a T^*M, g_∇ (que é un tensor métrico sobre T^*M) como

$$g_\nabla(X^c, Y^c) = -\imath(\nabla_X Y + \nabla_Y X)$$

para todo campo de vectores X, Y sobre M.

Nas coordenadas locais $(x_i, x_{i'})$ inducidas sobre $\pi^{-1}(U) \subset T^*M$, a extensión de Riemann exprésase como

$$g_\nabla = \begin{pmatrix} -2x_{k'}\Gamma_{ij}^k & \delta_i^j \\ \delta_i^j & 0 \end{pmatrix},$$

onde Γ_{ij}^k son os símbolos de Christoffel da conexión libre de torsión ∇ con respecto a $(U, (x_i))$, o cal mostra que g_∇ é unha métrica semi–riemanniana de signatura (n, n) sobre T^*M.

Sexa, agora, M unha variedade semi–riemanniana 2-dimensional con conexión libre de torsión ∇ e (x^1, x^2) un sistema de coordenadas locais, entón (T^*M, g_∇) é unha variedade de Walker con métrica de Walker g_∇ de signatura $(2,2)$ e que se expresa nas coordenadas inducidas (x^1, x^2, x^3, x^4) como

$$g_\nabla = \begin{pmatrix} x^3\Gamma_{11}^1 + x^4\Gamma_{11}^2 & x^3\Gamma_{12}^1 + x^4\Gamma_{12}^2 & 1 & 0 \\ x^3\Gamma_{21}^1 + x^4\Gamma_{21}^2 & x^3\Gamma_{22}^1 + x^4\Gamma_{22}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2. Variedades de Walker 4-dimensionais

Nós estamos interesados nas variedades de Walker M 4-dimensional, cun campo paralelo de 2-planos nulos, i.e., $(n,r) = (4,2)$, que é o caso de variedade semi–riemanniana con signatura non lorentziana de dimensión máis baixa posible. Neste caso A e H son triviais e a forma canónica da métrica g e do campo paralelo $\mathcal{D}$ de 2-planos nulos convírtense, respectivamente, no seguinte

$$(2.2) \qquad g = [g_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{D} = span\{\partial_1, \partial_2\},$$

onde a, b e c son función das coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4). Nótese que a estructura de Walker é estricta se e só se as funcións a, b e c non dependen das coordenadas (x_1, x_2).

A inversa de g é da forma

$$g^{-1} = [g^{ij}] = \begin{pmatrix} -a & -c & 1 & 0 \\ -c & -b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste apartado describiremos os principais elementos asociados a este tipo de métricas: conexión de Levi-Civita, tensor de curvatura, tensor de Ricci e curvatura escalar.

Denotamos por a_i, b_i, c_i, a_{ij}, b_{ij} e c_{ij} $(i,j = 1,2,3,4)$ ás derivadas parciais e derivadas parciais segundas das funcións a, b e c con respecto ás variables i e ij, respectivamente.

Un cálculo sinxelo mostranos que os termos da *conexión de Levi-Civita*, $\nabla_{\partial_i}\partial_j$, da métrica de Walker distintos de cero son (véxase, por exemplo, [15] ou [29])

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{\partial_1}\partial_3 = \tfrac{1}{2}a_1\partial_1 + \tfrac{1}{2}c_1\partial_2,\\
&\nabla_{\partial_1}\partial_4 = \tfrac{1}{2}c_1\partial_1 + \tfrac{1}{2}b_1\partial_2,\\
&\nabla_{\partial_2}\partial_3 = \tfrac{1}{2}a_2\partial_1 + \tfrac{1}{2}c_2\partial_2,\\
&\nabla_{\partial_2}\partial_4 = \tfrac{1}{2}c_2\partial_1 + \tfrac{1}{2}b_2\partial_2,\\
&\nabla_{\partial_3}\partial_3 = \tfrac{1}{2}(aa_1 + ca_2 + a_3)\partial_1 + \tfrac{1}{2}(ca_1 + ba_2 - a_4 + 2c_3)\partial_2 - \tfrac{1}{2}a_1\partial_3 - \tfrac{1}{2}a_2\partial_4,\\
&\nabla_{\partial_3}\partial_4 = \tfrac{1}{2}(a_4 + ac_1 + cc_2)\partial_1 + \tfrac{1}{2}(b_3 + cc_1 + bc_2)\partial_2 - \tfrac{1}{2}c_1\partial_3 - \tfrac{1}{2}c_2\partial_4,\\
&\nabla_{\partial_4}\partial_4 = \tfrac{1}{2}(ab_1 + cb_2 - b_3 + 2c_4)\partial_1 + \tfrac{1}{2}(cb_1 + bb_2 + b_4)\partial_2 - \tfrac{1}{2}b_1\partial_3 - \tfrac{1}{2}b_2\partial_4.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

O *tensor curvatura de Riemann* $R(X,Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y]$ ten compoñentes

$$
\begin{aligned}
R_{1313} &= -\tfrac{1}{2}a_{11}, \quad R_{1314} = -\tfrac{1}{2}c_{11}, \quad R_{1323} = -\tfrac{1}{2}a_{12}, \quad R_{1324} = -\tfrac{1}{2}c_{12},\\
R_{1334} &= \tfrac{1}{4}(-a_2b_1 + c_1c_2 + 2a_{14} - 2c_{13}),\\
R_{1414} &= -\tfrac{1}{2}b_{11}, \quad R_{1423} = -\tfrac{1}{2}c_{12}, \quad R_{1424} = -\tfrac{1}{2}b_{12},\\
R_{1434} &= \tfrac{1}{4}(-c_1^2 + a_1b_1 - b_1c_2 + b_2c_1 - 2b_{13} + 2c_{14}),\\
R_{2323} &= -\tfrac{1}{2}a_{22}, \quad R_{2324} = -\tfrac{1}{2}c_{22},\\
R_{2334} &= \tfrac{1}{4}(c_2^2 - a_2b_2 - a_1c_2 + a_2c - 1 + 2a_{24} - 2c_{23},\\
R_{2424} &= -\tfrac{1}{2}b_{22}, \quad R_{2434} = \tfrac{1}{4}(a_2b_2 - c_1c_2 - 2b_{23} + 2c_{24})\\
R_{3434} &= \tfrac{1}{4}(-ac_1^2 - bc_2^2 + aa_1b_1 + ca_1b_2 - a_1b_3 + 2a_1c_4\\
&\quad +ca_2b_1 + ba_2b_2 + a_2b_4 + a_3b_1 - a_4b_2 - 2a_4c_1\\
&\quad +2b_2c_3 - 2b_3c_2 - 2cc_1c_2 - 2a_{44} - 2b_{33} + 4c_{34}).
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

O *tensor de Ricci*, $\rho(X,Y) = traza\{U \rightsquigarrow R(X,U)Y\}$, ven dado por

$$
\begin{aligned}
&\rho_{13} = \tfrac{1}{2}(a_{11} + c_{12})\,, \qquad \rho_{14} = \tfrac{1}{2}(b_{12} + c_{11})\,,\\
&\rho_{23} = \tfrac{1}{2}(a_{12} + c_{22})\,, \qquad \rho_{24} = \tfrac{1}{2}(b_{22} + c_{12})\,,\\
&\rho_{33} = \tfrac{1}{2}(aa_{11} + ba_{22} + 2ca_{12} + a_1c_2 + a_2b_2 - a_2c_1 - c_2^2 - 2a_{24} + 2c_{23})\,,\\
&\rho_{34} = \tfrac{1}{2}(ac_{11} + bc_{22} + cc_{12} - a_2b_1 + c_1c_2 + a_{14} + b_{23} - c_{13} - c_{24})\,,\\
&\rho_{44} = \tfrac{1}{2}(ab_{11} + bb_{22} + 2cb_{12} + a_1b_1 - b_1c_2 + b_2c_1 - c_1^2 - 2b_{13} + 2c_{14}\,.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

A *curvatura escalar*, $\tau = traza\{\rho\}$ resulta ser

$$\tau = a_{11} + b_{22} + 2c_{12}\,. \tag{2.6}$$

Asociado ó tensor de Ricci, defínese o correspondente operador de tipo $(1,1)$, Ric como

$$g(Ric(X), Y) = \rho(X, Y).$$

Unha gran cantidade de información xeométrica atópase codificada polos autovalores do operador de Ricci (tamén chamados *curvaturas de Ricci*). No que segue faremos unha análise das curvaturas de Ricci das variedades de Walker 4-dimensionais, onde se pon de manifesto a complexidade inherente á non diagonalizabilidade do operador de Ricci.

O operador de Ricci da métrica de Walker (2.2) vén dado por

$$\begin{aligned}
Ric\,\partial_1 &= \tfrac{1}{2}\,(a_{11} + c_{12})\partial_1 + \tfrac{1}{2}\,(b_{12} + c_{11})\partial_2\,,\\
Ric\,\partial_2 &= \tfrac{1}{2}\,(a_{12} + c_{22})\partial_1 + \tfrac{1}{2}\,(b_{22} + c_{12})\partial_2\,,\\
Ric\,\partial_3 &= \tfrac{1}{2}\,(-ac_{12} + ba_{22} + c(a_{12} - c_{22}) + a_1c_2 + a_2(b_2 - c_1) - c_2^2 - 2a_{34} + 2c_{23})\partial_1\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,(ac_{11} - ba_{12} - c(a_{11} - c_{12}) - a_2b_1 + c_1c_2 + a_{14} + b_{23} - c_{13} - c_{24})\partial_2\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,(a_{11} + c_{12})\partial_3 + \tfrac{1}{2}\,(a_{12} + c_{22})\partial_4\,,\\
Ric\,\partial_4 &= \tfrac{1}{2}\,(-ab_{12} + bc_{22} - c(b_{22} - c_{12}) - a_2b_1 + c_1c_2 + a_{14} + b_{23} - c_{13} - c_{24})\partial_1\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,(ab_{11} - bc_{12} + c(b_{12} - c_{11}) + a_1b_1 - b_1c_2 + b_2c_1 - c_1^2 - 2b_{13} + 2c_{14})\partial_2\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,(b_{12} + c_{11})\partial_3 + \tfrac{1}{2}\,(b_{22} + c_{12})\partial_4\,.
\end{aligned}$$

As curvaturas de Ricci, $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, son da forma

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \ \lambda_2 &= \tfrac{1}{4}\,(\tau + \sqrt{\mu})\,,\\
\lambda_3 = \ \lambda_4 &= \tfrac{1}{4}\,(\tau - \sqrt{\mu})\,,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\tau &= a_{11} + b_{22} + 2c_{12}\,,\\
\mu &= (a_{11} - b_{22})^2 + 4(a_{12} + c_{22})(b_{12} + c_{11})\,.
\end{aligned}$$

Temos por tanto dous autovalores de multiplicidade 2 que serán complexos se e só se $\mu < 0$.

Observación 2.1. Os catro autovalores son iguais ($\lambda_i = \frac{1}{2}\,\tau$, $i = 1, 2, 3, 4$) se e só se $\mu = 0$. Para que isto aconteza e suficiente que a métrica sexa Einstein (véxase o teorema 4.5), pero non necesario. De feito, se a métrica é Einstein, o operador de Ricci é diagonalizable con $\lambda_i = \frac{1}{2}\,\tau = a_{11} + c_{12}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Vexamos un exemplo no que as curvaturas de Ricci son todas iguais, pero o operador de Ricci non é diagonalizable.

Exemplo 2.2. Sexa a métrica de Walker dada polas funcións

$$\begin{aligned} a &= 0\,, \\ b &= 0\,, \\ c &= 2x_1x_2\mathcal{A}\,, \end{aligned}$$

con $\mathcal{A}$ unha función non nula das coordenadas x_3 e x_4. As súas curvaturas de Ricci son todas iguais, $\lambda_i = \mathcal{A}$, $i = 1, 2, 3, 4$, pero non necesariamente constantes, dado que o seu operador de Ricci non é diagonalizable. De feito, a súa forma canónica de Jordan vén dada pola matriz

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathcal{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathcal{A} \end{pmatrix}.$$

Vexamos agora un exemplo no que as curvaturas de Ricci son complexas.

Exemplo 2.3. Sexa a métrica de Walker dada polas funcións

$$\begin{aligned} a &= -\tfrac{2}{3}\,\mathcal{A}x_1x_2\,, \\ b &= \tfrac{2}{3}\,\mathcal{A}x_1x_2\,, \\ c &= \tfrac{2}{3}\,\mathcal{A}(x_1^2 - x_2^2)\,, \end{aligned}$$

con $\mathcal{A}$ unha función non nula das coordenadas x_3 e x_4. As súas curvaturas de Ricci son $\lambda_1 = \lambda_2 = \mathcal{A}i$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = -\mathcal{A}i$.

Capítulo 3

Estructura autodual e anti-autodual das métricas de Walker

Neste capítulo analizamos a estructura autodual e anti–autodual das métricas de Walker 4-dimensionais. No caso en que a curvatura escalar sexa non nula, $\tau \neq 0$, somos quen de dar unha estructura case para–hermítica definida globalmente sobre a variedade. A continuación estudiamos as propiedades de isotropía e o carácter integrable, simpléctico e para–Kähler nun caso máis xeral.

Considerando o tensor de curvatura R como un endomorfismo de $\Lambda^2(M)$, temos a seguinte $O(2,2)$–descomposición do tensor de curvatura

$$R = \frac{\tau}{12} Id_{\Lambda^2} + \rho^0 + W : \Lambda^2 \to \Lambda^2, \tag{3.1}$$

onde ρ^0 denota o *tensor de Ricci* sen traza, $\rho^0(X,Y) = \rho(X,Y) - (\tau/4)g(X,Y)$ e W denota o *tensor de Weyl* dado por

$$W = R + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} R_0 - \frac{1}{n-2} R_1,$$

onde R_0 e R_1 son as funcións curvatura definidas por

$$\begin{aligned} R_0(x,y,z,w) &= g(y,z)g(x,w) - g(x,z)g(y,w)\,, \\ R_1(x,y,z,w) &= g(y,z)\rho(x,w) - g(x,z)\rho(y,w) \\ &\quad + \rho(y,z)g(x,w) - \rho(x,z)g(y,w)\,. \end{aligned}$$

O *operador estrela de Hodge* $* : \Lambda^2 \to \Lambda^2$ asociado a toda métrica $(2,2)$ induce unha descomposición $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$, onde $\Lambda^2_\pm$ denota o ± 1-autoespacio do operador estrela de Hodge, é dicir, $\Lambda^2_\pm = \{\alpha \in \Lambda^2(M) : *\alpha = \pm\alpha\}$ (véxase [23]). Así, o tensor de curvatura descomponse como

$$R = \frac{\tau}{12} Id_{\Lambda^2} + \rho^0 + W^+ + W^-,$$

onde $W^\pm = \frac{1}{2}(W \pm *W)$. Lembramos que unha variedade semi–riemanniana 4-dimensional dise *autodual* (respectivamente *anti–autodual*) se $W^- = 0$ (respectivamente $W^+ = 0$).

Sexa $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ unha base ortonormal con e_1 e e_2 vectores espaciais e e_3 e e_4 vectores temporais. Podemos construir bases locais dos espacios de dúas formas autodual e anti–autodual

$$\Lambda^2_\pm = \langle \{E_1^\pm, E_2^\pm, E_3^\pm\} \rangle,$$

onde

$$E_1^\pm = \frac{e^1 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^4}{\sqrt{2}}, \qquad E_2^\pm = \frac{e^1 \wedge e^3 \pm e^2 \wedge e^4}{\sqrt{2}}, \qquad E_3^\pm = \frac{e^1 \wedge e^4 \mp e^2 \wedge e^3}{\sqrt{2}}, \tag{3.2}$$

sendo e^i o dual de e_i.

Observamos que o operador estrela de Hodge satisfai

$$e^i \wedge e^j \wedge *(e^k \wedge e^l) = (\delta^i_k \delta^j_l - \delta^i_l \delta^j_k)\varepsilon_i \varepsilon_j \, e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4,$$

onde $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$. Nótese que $\ll E_1^\pm, E_1^\pm \gg = 1$, $\ll E_2^\pm, E_2^\pm \gg = \ll E_3^\pm, E_3^\pm \gg = -1$, onde $\ll , \gg$ denota o producto escalar inducido en Λ^2 a partir de g definido por

$$\ll x \wedge y, z \wedge w \gg := R_0(x, y, z, w) = g(y, z)g(x, w) - g(x, z)g(y, w).$$

Así, respecto a tales bases, os operadores curvatura de Weyl autodual e anti–autodual $W^\pm : \Lambda^2_\pm \to \Lambda^2_\pm$ teñen a seguinte representación matricial

$$W^\pm = \begin{pmatrix} W^\pm_{11} & W^\pm_{12} & W^\pm_{13} \\ -W^\pm_{12} & -W^\pm_{22} & -W^\pm_{23} \\ -W^\pm_{13} & -W^\pm_{23} & -W^\pm_{33} \end{pmatrix},$$

onde $W^\pm_{ij} = W(E_i^\pm, E_j^\pm)$ e $g(W(e^i \wedge e^j), e^k \wedge e^l) = W(e_i, e_j, e_k, e_l)$.

Empregando coordenadas locais, consideramos a base ortonormal da métrica de Walker

$$\begin{aligned} e_1 &= \tfrac{1}{2}(1-a)\partial_1 + \partial_3, \\ e_2 &= -c\partial_1 + \tfrac{1}{2}(1-b)\partial_2 + \partial_4, \\ e_3 &= -\tfrac{1}{2}(1+a)\partial_1 + \partial_3, \\ e_4 &= -c\partial_1 - \tfrac{1}{2}(1+b)\partial_2 + \partial_4. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Empregando o tensor de curvatura, o tensor de Ricci e a curvatura escalar ((2.4), (2.5) e (2.6) respectivamente), podemos amosar que as compoñentes de W^- veñen dadas por

$$\text{(3.4)}\qquad \begin{aligned} W^-_{11} &= -\tfrac{1}{12}(a_{11} + 3a_{22} + 3b_{11} + b_{22} - 4c_{12})\,, \\ W^-_{22} &= -\tfrac{1}{6}(a_{11} + b_{22} - 4c_{12})\,, \\ W^-_{33} &= \tfrac{1}{12}(a_{11} - 3a_{22} - 3b_{11} + b_{22} - 4c_{12})\,, \\ W^-_{12} &= \tfrac{1}{4}(a_{12} + b_{12} - c_{11} - c_{22})\,, \\ W^-_{13} &= \tfrac{1}{4}(a_{22} - b_{11})\,, \\ W^-_{23} &= \tfrac{1}{4}(a_{12} - b_{12} + c_{11} - c_{22})\,, \end{aligned}$$

mentres que as compoñentes de W^+ quedan determinadas polos termos W^+_{11}, W^+_{12} e a curvatura escalar

$$W^+_{22} = -\frac{\tau}{6}, \qquad W^+_{33} = W^+_{11} + \frac{\tau}{6}, \qquad W^+_{13} = W^+_{11} + \frac{\tau}{12}, \qquad W^+_{23} = W^+_{12},$$

sendo as expresións de W^+_{11} e W^+_{12}

$$\begin{aligned} W^+_{11} \;=\; & \tfrac{1}{12}\,(6ca_1b_2 - 6a_1b_3 - 6ba_1c_2 + 12a_1c_4 - 6ca_2b_1 + 6ba_2c_1 \\ & +6a_3b_1 - 6a_4b_2 - 12a_4c_1 + 6ab_1c_2 - 6ab_2c_1 + 12b_2c_3 - 12b_3c_2 \\ & -a_{11} - 12c^2a_{11} - 12bca_{12} + 24ca_{14} - 3b^2a_{22} + 12ba_{24} - 12a_{44} \\ & -3a^2b_{11} + 12ab_{13} - b_{22} - 12b_{33} \\ & +12acc_{11} - 2c_{12} + 6abc_{12} - 24cc_{13} - 12ac_{14} - 12bc_{23} + 24c_{34}), \end{aligned}$$

$$\text{(3.5)}\qquad W^+_{12} = \frac{1}{4}(-2ca_{11} - ba_{12} + 2a_{14} + ab_{12} - 2b_{23} + ac_{11} - 2cc_{12} - 2c_{13} - bc_{22} + 2c_{24}).$$

A interrelación entre as compoñentes de W^+ permite escribir

$$\text{(3.6)}\qquad W^+ = \begin{pmatrix} W^+_{11} & W^+_{12} & W^+_{11} + \frac{\tau}{12} \\ -W^+_{12} & \frac{\tau}{6} & -W^+_{12} \\ -(W^+_{11} + \frac{\tau}{12}) & -W^+_{12} & -(W^+_{11} + \frac{\tau}{6}) \end{pmatrix},$$

podendo así calcular os autovalores de W^+ que resultan

$$\{\frac{\tau}{6}, -\frac{\tau}{12}, -\frac{\tau}{12}\}.$$

Dado que a métrica inducida en Λ^2_+ é lorentziana, a estructura de W^+ está determinada pola súa forma de Jordan. Un cálculo sinxelo amosa que

$$(W^+ - \frac{\tau}{6} Id) \cdot (W^+ + \frac{\tau}{12} Id) = \frac{\tau^2 + 12\tau W^+_{11} + 48(W^+_{12})^2}{48} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde obtemos o seguinte

- Se $\tau \neq 0$, entón W^+ ten autovalores distintos de cero $\{\frac{\tau}{6}, -\frac{\tau}{12}, -\frac{\tau}{12}\}$ e

$$\tau^2 + 12\tau W^+_{11} + 48(W^+_{12})^2 = 0$$

  é condición necesaria e suficiente para que W^+ sexa diagonalizable. Se a ecuación non se satisfai, entón $-\frac{\tau}{12}$ é solución dobre do polinomio mínimo de W^+.

- Se $\tau = 0$, entón W^+ anúlase se e só se $W^+_{11} = W^+_{12} = 0$ e ademais
  - W^+ é nilpotente en dous pasos se só se $W^+_{11} \neq 0$ e $W^+_{12} = 0$,
  - W^+ é nilpotente en tres pasos se e só se $W^+_{12} \neq 0$.

Por outro lado, observamos que toda métrica de Walker anti–autodual ten curvatura escalar cero.

3.1. Estructura case para–hermítica global asociada á métrica de Walker

Estamos interesados no caso en que $\tau \neq 0$. Lembramos que neste caso os autovalores de W^+ son $\{\frac{\tau}{6}, -\frac{\tau}{12}, -\frac{\tau}{12}\}$. Así, $Ker(W^+ - \frac{\tau}{6} I_{\Lambda_+})$ é de dimensión 1 e está xenerado por unha 2-forma Ω que orixina unha estructura case paracomplexa J,

$$g(JX, Y) =: \Omega(X, Y).$$

Dada unha métrica de Walker 4-dimensional, (M, g), con curvatura escalar $\tau \neq 0$ en cada punto, chamaremos *estructura case para–hermítica asociada á métrica de Walker* á estructura definida polo autovalor distinguido de W^+.

Observación 3.1. Dada a forma en que construimos a estructura case para–hermítica asociada á métrica de Walker, a estructura está definida globalmente. Existen numerosas estructuras definidas sobre variedades de Walker a partires da súa forma canónica (véxase, por exemplo [14], [28], [29]. Tales estructuras están definidas localmente, sendo a estructura case para–hermítica J definida anteriormente o primeiro obxecto de naturaleza global construido sobre as variedades de Walker.

O noso primeiro obxectivo é definir J en coordenadas locais. O autovalor $\frac{\tau}{6}$ ten asociado o autovector $(-W_{12}^+, -\frac{\tau}{4}, W_{12}^+)$, polo tanto a expresión de Ω será

$$\Omega = -\frac{8W_{12}^+}{\tau\sqrt{2}}\,E_1^+ - \frac{2}{\sqrt{2}}\,E_2^+ + \frac{8W_{12}^+}{\tau\sqrt{2}}\,E_3^+.$$

Tras un sinxelo cálculo, empregando as expresións de E_1^+, E_2^+ e E_3^+ en (3.2) e a definición de J, obtemos a expresión de J na base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$$\begin{aligned} Je_1 &= -\tfrac{4W_{12}^+}{\tau}\,e_2 - e_3 + \tfrac{4W_{12}^+}{\tau}\,e_4, \\ Je_2 &= \tfrac{4W_{12}^+}{\tau}\,e_1 - \tfrac{4W_{12}^+}{\tau}\,e_3 - e_4, \\ Je_3 &= -e_1 - \tfrac{4W_{12}^+}{\tau}\,e_2 + \tfrac{4W_{12}^+}{\tau}\,e_4, \\ Je_4 &= \tfrac{4W_{12}^+}{\tau}\,e_1 - e_2 - \tfrac{4W_{12}^+}{\tau}\,e_3. \end{aligned}$$

Empregando agora a expresión da base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dada en (3.3), obtemos a expresión de J en coordenadas locais

$$\begin{aligned} J\partial_1 &= \partial_1, \\ J\partial_2 &= \partial_2, \\ J\partial_3 &= a\,\partial_1 - \tfrac{4W_{12}^+}{\tau}\,\partial_2 - \partial_3, \\ J\partial_4 &= (2c + \tfrac{4W_{12}^+}{\tau})\,\partial_1 + b\,\partial_2 - \partial_4. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Observación 3.2. A estructura case para–hermítica asociada á metrica de Walker deixa invariante o campo de planos paralelos. Outras estructuras case para–hermíticas definidas localmente que deixan invariante a distribución dexenerada teñen sido consideradas con anterioridade no estudio das variedades de Osserman [14].

A definición global da estructura (3.7) ten consecuencias importantes sobre a topoloxía da variedade subxacente.

Teorema 3.3. *Sexa (M, g) unha variedade de Walker 4-dimensional compacta con curvatura escalar distinta de cero en cada punto. Entón a primeira clase de Chern de M é identicamente nula (i.e., $c_1^2[M] = 0$).*

Demostración. Nótese que a existencia dunha estructura case para–hermítica (g, J) é equivalente á existencia dunha estructura case anti–hermítica $(g, \mathcal{J})$, é dicir, $\mathcal{J}^2 = -Id$, $g(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) = -g(X, Y)$ para todo campo de vectores X, Y en M. De feito, sexa (g, J) unha estructura case para–hermítica e tomemos h unha métrica de Riemann arbitraria sobre M tal que $h(JX, JY) = h(X, Y)$ para todo X, Y en M. Definimos unha estructura case producto Q como $h(QX, Y) = g(X, Y)$ e poñemos $\mathcal{J} = -JQ$. Un cálculo inmediato amosa que $\mathcal{J}$ é unha esctructura case complexa sobre M e ademais

$$g(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) = g(JQX, JQY) = -g(QX, QY) = -g(X, Y),$$

que amosa que $(g, \mathcal{J})$ é case anti–hermítica. Ademais un cálculo sinxelo amosa que $\mathcal{J}$ é h-ortogonal e as 2-formas asociasdas Ω e $\Omega^h_{\mathcal{J}}(X, Y) = h(\mathcal{J}X, Y)$ coinciden. Así, tanto J como $\mathcal{J}$ inducen a mesma orientación en M (véxase [4], [6] para máis información sobre estructuras anti–hermíticas e anti–Kähler).

As clases de Chern de variedades case complexas con métricas anti–hermíticas estúdianse en [4], [6], demostrando que tódalas clases de Chern impares se anulan (i.e., $c_{2k+1}[M] = 0$, para todo k), do cal se segue o teorema. □

3.2. Propiedades de isotropía

Imos estudiar agora algunhas propiedades de isotropía. Como as propiedades que estudiamos a continuación son consecuencia de cálculos locais imos facelo no caso da estructura definida por

$$\begin{aligned} J\partial_1 &= \partial_1, \\ J\partial_2 &= \partial_2, \\ J\partial_3 &= a\partial_1 - f\partial_2 - \partial_3, \\ J\partial_4 &= (2c + f)\partial_1 + b\partial_2 - \partial_4, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde f é unha función arbitraria nas coordenadas $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Séguese de (3.7) que a estructura case para–hermítica asociada á métrica de Walker é un caso particular para

$$f = 4\frac{W^+_{12}}{\tau}.$$

Unha estructura case para–hermítica (g, J) dise

– *isotrópica para–Kähler* se $\|\nabla J\|^2 = 0$,

– *isotrópica simpléctica* se $\|d\Omega\|^2 = 0$,

– *isotrópica para–hermítica* se $\|N_J\|^2 = 0$.

As condicións anteriores xeneralizan as correspondentes condicións de ser para–Kähler, simpléctica e para–hermítica, e referiremonos a elas como *estrictas* cando $\|\nabla J\|^2 = 0$ pero $\nabla J \neq 0$, $\| \, d\Omega\|^2 = 0$ pero $d\Omega \neq 0$ e $\|N_J\|^2 = 0$ pero $N_J \neq 0$, respectivamente.

Teorema 3.4. *A estructura J é isotrópica para–Kähler, i.e., $\|\nabla J\|^2 = 0$.*

Demostración. ∇J en coordenadas locais vén dada por $(\nabla_{\partial_i} J)\partial_j = (\nabla J)_{ij}^k \partial_k$. Entón, un cálculo sinxelo a partir de (2.3) e (3.8) mostra que os termos non nulos de ∇J son

$$
\begin{aligned}
(\nabla J)_{13}^2 &= -(\nabla J)_{14}^1 = -c_1 - f_1,\\
(\nabla J)_{23}^2 &= -(\nabla J)_{24}^1 = -c_2 - f_2,\\
(\nabla J)_{33}^2 &= -(\nabla J)_{34}^1 = \tfrac{1}{2}\left(ac_1 - ba_2 - 2ca_1 - f(a_1 + c_2) + 2a_4 - 4c_3 - 2f_3\right),\\
(\nabla J)_{43}^2 &= -(\nabla J)_{44}^1 = -\tfrac{1}{2}\left(ab_1 - bc_2 - 2cc_1 - f(b_2 + c_1) - 2b_3 - 2f_4\right).
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Como $\|\nabla J\|^2$ ven dado por

$$\|\nabla J\|^2 = \sum_{i,j,k,l,r,s=1}^{4} g^{il} g^{jr} g_{ks} (\nabla J)_{ij}^k (\nabla J)_{lr}^s \quad ,$$

tras un cálculo sinxelo obtemos o resultado. □

Teorema 3.5. *A estructura J é isotrópica case para–Kähler, i.e., $\|d\Omega\|^2 = 0$.*

Demostración. A 2-forma asociada asociada a J é

$$\Omega = dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4 - (c + f) dx_3 \wedge dx_4. \tag{3.10}$$

Empregando a notación $d\Omega = (d\Omega)_{ijk} \, dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$, os termos de $d\Omega$ distintos de cero son

$$
\begin{aligned}
(d\Omega)_{134} &= -(d\Omega)_{143} = -(d\Omega)_{314} = (d\Omega)_{341} = (d\Omega)_{413} = -(d\Omega)_{431} = -(c_1 + f_1),\\
(d\Omega)_{234} &= -(d\Omega)_{243} = -(d\Omega)_{324} = (d\Omega)_{342} = (d\Omega)_{423} = -(d\Omega)_{432} = -(c_2 + f_2).
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Como $\|d\Omega\|$ ven dada por

$$\|d\Omega\|^2 = \sum_{i,j,k,l,r,s=1}^{4} g^{il} g^{jr} g^{ks} (d\Omega)_{ijk} (d\Omega)_{lrs} \quad ,$$

tras un breve cálculo obtemos o resultado. □

Teorema 3.6. *A estructura J é isotrópica para–hermítica, i.e., $\|N_J\|^2 = 0$.*

Demostración. Empregando a notación $N_J(\partial_i, \partial_j) = (N_J)_{ij}^k\, \partial_k$, os termos de N_J distinos de cero son

$$
\begin{aligned}
(N_J)_{13}^4 = -(N_J)_{14}^3 &= 2\,(a(2c_1 + f_1) - ba_2 - 2ca_1 - f(a_1 + 2c_2 + f_2) \\
&\quad + a_4 - 4c_3 - 2f_3), \\
(N_J)_{23}^4 = -(N_J)_{24}^3 &= 2\,(ab_1 + bf_2 + 2cf_1 + f(f_1 - b_2) - 2b_3 - 2f_4).
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Como $\|N_J\|^2$ ven dada por

$$
\|N_J\|^2 = \sum_{i,j,k,l,r,s=1}^{4} g^{il} g^{jr} g_{ks} (N_J)_{ij}^k (N_J)_{lr}^s \quad ,
$$

tras un breve cálculo obtemos o resultado. □

Observación 3.7. $\|\nabla J\|$, $\|d\Omega\|$ e $\|N_J\|$ son cero aínda que non se anulen ∇J, $d\Omega$ e N_J respectivamente.

3.3. Condicións da estructura J

Nesta sección faremos un estudio pormenorizado da estructura J. Daremos as condicións necesarias e suficientes para que a estructura J sexa simpléctica, integrable e para–Kähler.

Lembremos que a estructura J é *integrable* se e só se o seu tensor de Nijenhuis se anula, i.e., $N_J = 0$.

Teorema 3.8. *A estructura J é integrable se e só se verifica as condicións*

$$
0 = a(2c_1 + f_1) - ba_2 - 2ca_1 - f(a_1 + 2c_2 + f_2) + a_4 - 4c_3 - 2f_3\,, \tag{3.13}
$$

$$
0 = ab_1 + bf_2 + 2cf_1 + f(f_1 - b_2) - 2b_3 - 2f_4\,. \tag{3.14}
$$

Demostración. A demostración consiste en considerar as ecuacións resultantes da anulación dos termos do tensor de Nijenhuis que non eran trivialmente cero. Os termos non nulos están dados en (3.12). Son catro que, por antisimetría, dan lugar ás dúas condicións. □

Corolario 3.9. *A estructura case para–hermítica asociada a unha métrica de Walker 4-dimensinal é integrable se e só se verifica as dúas condicións seguintes*

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \tau^3(2ac_1 - ba_2 - 2ca_1 + 2a_4 - 4c_3) \\
& -4\tau^2(W_{12}^+(a_1 + 2c_2) - a(W_{12}^+)_1 + 2(W_{12}^+)_3) \\
& +4\tau W_{12}^+(-a\tau_1 + 2\tau_3 - 4(W_{12}^+)_2) + 16(W_{12}^+)^2\tau_2 \,,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \tau^3(ab_1 - 2b_3) \\
& +\tau^2(4b(W_{12}^+)_2 + 8c(W_{12}^+)_1 - 4W_{12}^+b_2 - 8(W_{12}^+)_4) \\
& +4\tau W_{12}^+(-2c\tau_1 - b\tau_2 + 2\tau_4 + 4(W_{12}^+)_1) - 16(W_{12}^+)^2\tau_1 \,.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Demostración. As condicións resultan de substituir f por $4\frac{W_{12}^+}{\tau}$ no teorema anterior. □

Teorema 3.10. *Ω é simpléctica se e só se $c+f$ non depende das coordenadas x_1 e x_2, i.e.*

$$c + f = \xi$$

onde ξ é unha función que só depende das coordenadas x_3 e x_4.

Demostración. Calculando a diferencial da 2-forma Ω a partir de (3.10), obtense que

$$d\Omega = -d(c + f)\, dx_3 \wedge dx_4 \,,$$

de onde se segue que $d\Omega = 0$ se e só se $(c + f)_1 = (c + f)_2 = 0$. □

Observación 3.11. É importante resaltar o feito de que a condición de ser simpléctica resulte de que a suma das funcións c e f non dependa das dúas primeiras coordenadas x_1 e x_2. Ademais no caso simpléctico a estructura J definida en (3.8) resulta ser

$$
\begin{aligned}
J\partial_1 &= \partial_1, \\
J\partial_2 &= \partial_2, \\
J\partial_3 &= a\partial_1 - (c + \xi)\partial_2 - \partial_3, \\
J\partial_4 &= (c + \xi)\partial_1 + b\partial_2 - \partial_4,
\end{aligned}
$$

con ξ unha función que só depende das coordenadas x_3 e x_4.

Corolario 3.12. *Se temos a estructura case para–hermítica asociada a unha variedade de Walker 4-dimensional, a súa 2-forma asociada* Ω *é simpléctica se e só se* $c + 4\frac{W_{12}^+}{\tau}$ *non dependen das coordenadas* x_1 *e* x_2*, i.e.*

$$c = -4\frac{W_{12}^+}{\tau} + \xi \,,$$

onde ξ *é función que só depende de* x_3 *e* x_4*.*

Demostración. A condición resulta de substituir f por $4\frac{W_{12}^+}{\tau}$ no teorema anterior. □

Lembremos agora que unha estructura J é *para–Kähler* se e só se é para–hermítica e $\nabla J = 0$.

Teorema 3.13. *A estructura* J *é para–Kähler se verifica as condicións*

$$c + f = \xi \,, \tag{3.17}$$

$$0 = ac_1 - ba_2 - 2ca_1 - f(a_1 + c_2) + 2a_4 - 4c_3 - 2f_3 \,, \tag{3.18}$$

$$0 = ab_1 - bc_2 - 2cc_1 - f(b_2 + c_1) - 2b_3 - 2f_4 \,, \tag{3.19}$$

sendo ξ *función só das coordenadas* x_3 *e* x_4*.*

Demostración. O resultado obtense como consecuencia de compaxinar os teoremas 3.8 e 3.10. □

Corolario 3.14. *A estructura case para–hermítica asociada á unha variedade de Walker 4-dimensional é para–Kähler se e só se verifica as condicións*

$$c + 4\frac{W_{12}^+}{\tau} = \xi \,, \tag{3.20}$$

$$0 = \tau^2(ac_1 - ba_2 - 2ca_1 + 2a_4 - 4c_3) - 4\tau(W_{12}^+(a_1 + c_2) + 2(W_{12}^+)_3) + 8W_{12}^+\tau_3 \,, \tag{3.21}$$

$$0 = \tau^2(-ab_1 + bc_2 + 2cc_1 + 2b_3) + \tau(4W_{12}^+(b_2 + c_1) + 8(W_{12}^+)_4) - 2W_{12}^+\tau_4 \,, \tag{3.22}$$

onde ξ *é función só de* x_3 *e* x_4*.*

Demostración. As condicións resultan de substituir f por $4\frac{W_{12}^+}{\tau}$ no teorema anterior. □

As condicións que debe cumprir J para ser para–Kähler non son sinxelas, aínda que obtemos unha condición interesante sobre c.

Capítulo 4

Métricas de Walker autoduais

4.1. Estructuras case para–hermíticas *-Einstein

O *tensor de Ricci estrela*, ρ^*, asociado a unha variedade case para–hermítica (M, g, J) defínese como

$$\rho^*(X,Y) = \frac{1}{2} tr\{Z \rightsquigarrow -JR(X,Z)Y\},$$

onde R é o tensor de curvatura asociado a (M, g). A *curvatura escalar estrela*, τ^*, defínese como a traza do tensor ρ^*

$$\tau^* = tr\rho^*.$$

O tensor ρ^* non é necesariamente simétrico como acontece co tensor de Ricci (véxase a observación 4.1). Sen embargo, $\rho^* = \rho$ no caso das variedades para–Kähler.

Unha variedade (M, g, J) dise que é *debilmente *-Einstein* se e só se verifica

$$\rho^* = \frac{\tau^*}{n} g.$$

Dise que é **–Einstein* se e só se é debilmente *–Einstein e τ^* é constante.

No noso caso particular, unha variedade de Walker 4-dimensional dotada dunha estructura case para–hermítica global J, os termos non nulos de ρ^* son

$$
\begin{aligned}
\rho^*_{13} = \rho^*_{31} &= \tfrac{1}{2}(c_{12} + a_{11}),\\
\rho^*_{14} = \rho^*_{41} &= \tfrac{1}{2}(b_{12} + c_{11}),\\
\rho^*_{23} = \rho^*_{32} &= \tfrac{1}{2}(c_{22} + a_{12}),\\
\rho^*_{24} = \rho^*_{42} &= \tfrac{1}{2}(b_{22} + c_{12}),\\
\rho^*_{33} &= -\tfrac{1}{2\tau}(4W^+_{12}(c_{22} + a_{12}) - a\tau(c_{12} + a_{11})),\\
\rho^*_{34} &= -\tfrac{1}{2\tau}(-4W^+_{12}(c_{12} + a_{11}) + \tau(c_{24} - b_{23} - bc_{22} + a_{14} - c_{13} - ba_{12} - 2cc_{12} - 2ca_{11})),\\
\rho^*_{43} &= -\tfrac{1}{2\tau}(4W^+_{12}(b_{22} + c_{12}) - \tau(c_{24} - b_{23} + a_{14} - c_{13} + ab_{12} + ac_{11})),\\
\rho^*_{44} &= \tfrac{1}{2\tau}(b\tau(b_{22} + c_{12}) + 2(c\tau + 2W^+_{12})(b_{12} + c_{11})),
\end{aligned}
$$

e τ^* vén dada por

$$\tau^* = a_{11} + b_{22} + 2c_{12}.$$

Observación 4.1. A diferencia do tensor de Ricci usual, o tensor Ricci estrela non ten porque ser simétrico, como se pon de manifesto nas compoñentes ρ^*_{34} e ρ^*_{43} anteriores. Ademais, a curvatura escalar estrela correspondente á estructura case para–hermítica asociada á métrica de Walker é igual á curvatura escalar usual dada en (2.6), i.e. $\tau^* = \tau$.

No noso caso, obtemos as seguintes condicións para que unha métrica de Walker (M, g) con estructura case para–hermítica asociada J sexa debilmente *–Einstein.

Teorema 4.2. *A métrica de Walker coa estructura case para–hermítica (M, g, J) é debilmente *–Einsten se e só se verifica as seguintes condicións*

$$a_{11} = b_{22}, \qquad c_{11} = -b_{12}, \qquad a_{12} = -c_{22}. \tag{4.1}$$

Demostración. Chamamos G ó tensor

$$G = \rho^* - \frac{\tau^*}{4}\, g\,.$$

A condición débilmente *–Einstein equivale á anulación do tensor G. Vexamos cales son as compoñentes non nulas do tensor G

$$
\begin{aligned}
G_{13} = -G_{24} = G_{31} = -G_{42} &= \tfrac{1}{4}\,(a_{11} - b_{22}),\\
G_{14} = G_{41} &= \tfrac{1}{2}\,(b_{12} + c_{11}),\\
G_{23} = G_{32} &= \tfrac{1}{2}\,(a_{12} + c_{22}),\\
G_{33} &= -\tfrac{1}{4\tau}\,(8W_{12}^{+}(a_{11} + c_{22}) + a\tau(a_{11} - b_{22}))\\
G_{34} &= -\tfrac{1}{4\tau}\,(-8W_{12}^{+}(a_{11} + c_{12}) + \tau(2a_{14} - 2b_{23} - 2c_{13} + 2c_{24}\\
&\quad -2b(a_{12} + c_{22}) + c(-3a_{11} + b_{22} - 2c_{12}))),\\
G_{43} &= -\tfrac{1}{4\tau}\,(8W_{12}^{+}(b_{22} + c_{12}) + \tau(-2a_{14} + b_{32} + 2c_{13} - 2c_{24}\\
&\quad -2a(b_{12} + c_{11}) + c(a_{11} + b_{22} + 2c_{12}))),\\
G_{44} &= -\tfrac{1}{4\tau}\,(b\tau(a_{11} - b_{22}) - 4(c\tau + 2W_{12}^{+})(b_{12} + c_{11})).
\end{aligned}
$$

Os termos G_{13}, G_{14}, G_{23} dannos as tres condicións

$$a_{11} = b_{22}, \qquad c_{11} = -b_{12}, \qquad a_{12} = -c_{22}.$$

Empregando estas tres condicións e as expresións de τ en (2.6) e W_{12}^{+} en (3.5), amósase que se anulan tamén os termos G_{33}, G_{34}, G_{43} e G_{44}. Vexamos como acontece isto

$$
\begin{aligned}
G_{33} &= -\tfrac{1}{4\tau}\,(8W_{12}^{+}(a_{11} + c_{22}) + a\tau(a_{11} - b_{22}))\\
&= -\tfrac{2}{\tau}\,W_{12}^{+}(a_{11} + c_{22})\\
&= -\tfrac{1}{2\tau}\,(a_{12} + c_{22})(-a(b_{12} + c_{11}) + b(a_{12} + c_{22}) + 2c(a_{11} + c_{12}) - 2a_{14} + 2b_{23} - c_{24})\\
&= 0\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{34} &= -\tfrac{1}{4\tau}\,(-8W_{12}^{+}(a_{11} + c_{12}) + \tau(2a_{14} - 2b_{23} - 2c_{13} + 2c_{24}\\
&\quad -2b(a_{12} + c_{22}) + c(-3a_{11} + b_{22} - 2c_{12})))\\
&= -\tfrac{1}{4\tau}\,(-8W_{12}^{+}(a_{11} + c_{12}) + \tau(2a_{14} - 2b_{23} - 2c_{13} + 2c_{24} + c(-2a_{11} - 2c_{12})))\\
&= -\tfrac{1}{4\tau}\,(-(8W_{12}^{+} + 2\tau c)(a_{11} + c_{12}) + \tau(2a_{14} - 2b_{23} - 2c_{13} + 2c_{24}))\\
&= -\tfrac{1}{4\tau}\,(2(a_{11} + b_{22})(-a_{14} + b_{23} + c_{13} - c_{24}) + c(a_{11} - b_{22})^{2}\\
&\quad -2(b_{12} + c_{11})a(a_{11} + c_{12}) - 2(a_{12} + c_{22})b(b_{22} + c_{12})) = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{43} &= -\tfrac{1}{4\tau}\,(8W_{12}^{+}(b_{22}+c_{12})+\tau(-2a_{14}+b_{32}+2c_{13}-2c_{24}\\
&\quad -2a(b_{12}+c_{11})+c(a_{11}+b_{22}+2c_{12})))\\
&= -\tfrac{1}{4\tau}\,(8W_{12}^{+}(b_{22}+c_{12})+\tau(-2a_{14}+b_{32}+2c_{13}-2c_{24}+c\tau))\\
&= -\tfrac{1}{4\tau}\,(2(a_{11}+b_{22})(-a_{14}+b_{23}+c_{13}-c_{24})+c(a_{11}-b_{22})^2\\
&\quad -2(b_{12}+c_{11})a(a_{11}+c_{12})-2(a_{12}+c_{22})b(b_{22}+c_{12}))=0\,,\\
G_{44} &= -\tfrac{1}{4\tau}\,(b\tau(a_{11}-b_{22})-4(c\tau+2W_{12}^{+})(b_{12}+c_{11}))=0\,.
\end{aligned}
$$

□

Observación 4.3. No caso máis xeral da estructura dada en (3.8) non acontece isto. As tres primeiras condicións (que coinciden coas dadas no teorema anterior) anulan G_{33} e G_{44}, pero non

$$G_{34}=-G_{43}=-(c+f)(a_{11}+c_{12})+a_{14}-b_{24}-c_{13}+c_{24}\,.$$

Teorema 4.4. *A métrica de Walker coa estructura case para–hermítica (M,g,J) é *–Einstein se e só se verifica as seguintes condicións*

$$a_{11}=b_{22}=-c_{12}+\kappa,\qquad a_{12}=-c_{22},\qquad b_{12}=-c_{11}\,, \tag{4.2}$$

onde κ é unha constante.

Demostración. Sabemos que no noso caso

$$\tau^*=\tau=a_{11}+2c_{12}+b_{22}.$$

Polo teorema anterior, temos que $\tau^*=2(a_{11}+c_{12})$. Engadindo a condición $\tau^*=\kappa$ constante ás tres do teorema anterior, obtemos o resultado. □

4.2. Métricas de Walker Einstein

As métricas de Walker Einstein foron estudiadas con anterioridade por Davidov e Muskarov, quenes probaron o seguinte

Teorema 4.5. [17] *Unha métrica de Walker 4-dimensional é de Einstein se e só se as funcións a, b y c verifican*

$$a_{11}=b_{22},\qquad a_{12}=-c_{22},\qquad b_{12}=-c_{11}\,, \tag{4.3}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= ac_{12}-ba_{22}-2ca_{12}-a_1c_2-a_2b_2+a_2c_1+c_2^2+2a_{24}-2c_{23}\,,\\
0 &= ab_{12}+ba_{12}+c(a_{11}-c_{12})+a_2b_1-c_1c_2-a_{14}-b_{23}+c_{13}+c_{24}\,, \qquad (4.4)\\
0 &= ab_{11}-bc_{12}+2cb_{12}+a_1b_1-b_1c_2+b_2c_1-c_1^2-2b_{13}+2c_{14}\,.
\end{aligned}
$$

Demostración. Chamamos G ó tensor

$$G = \rho - \frac{\tau}{4}\, g\,.$$

A condición Einstein equivale á anulación do tensor G. Vexamos pois cales son as compoñentes non nulas do tensor G

$$\begin{aligned}
&G_{13} = -G_{24} = G_{31} = -G_{42} = -\tfrac{1}{4}\,(a_{11} - b_{22}),\\
&G_{14} = G_{41} = -\tfrac{1}{2}\,(b_{12} + c_{11}),\\
&G_{23} = G_{32} = -\tfrac{1}{2}\,(a_{12} + c_{22}),\\
&G_{33} = \tfrac{1}{4}\,(ba_{22} + 2ca_{12} - ac_{12} - 2a_{24} + 2c_{23} + a_2b_2 + a_1c_2 - a_2c_1 - c_2^2),\\
&G_{34} = G_{43} = \tfrac{1}{4}\,(ab_{12} + ba_{12} + ca_{11} - cc_{12} - a_{14} - b_{23} + c_{24} + c_{13} + a_2b_1 - c_1c_2),\\
&G_{44} = \tfrac{1}{4}\,(ab_{11} + 2cb_{12} - bc_{12} - 2b_{13} + 2c_{14} + a_1b_1 - b_1c_2 + c_1b_2 - c_1^2).
\end{aligned}$$

As ecuacións resultantes da anulación dos termos non trivialmente nulos dannos as seis condicións. □

Observación 4.6. A diferencia da propiedade debilmente *–Einstein, as condicións (4.3) non determinan (4.4). Sen embargo, tense claramente que toda métrica Einstein é *-Einstein (o recíproco non é certo).

Lembremos que unha métrica de Walker é estricta se $\nabla_{x_i} = 0$ para $i = 1, 2$.

Corolario 4.7. *Toda métrica de Walker estricta é Ricci chá.*

Demostración. Por ser a métrica Walker estricta temos que $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ e $a_2 = b_2 = c_2 = 0$, co cal se ten o resultado. □

4.3. Métricas Einstein e *–Einstein autoduais

Nesta sección estudiaremos as condicións necesarias e suficientes para que unha métrica de Walker autodual 4-dimensional sexa debilmente *–Einstein e *–Einstein.

Como xa dixemos anteriormente, unha métrica (M, g) é autodual se e só se $W^- = 0$. En [15] temos caracterizadas as métricas de Walker autoduais no seguinte teorema que se obtén integrando as ecuacións (3.4).

Teorema 4.8. *Unha métrica de Walker (M,g) é autodual se e só se as funcións a, b e c veñen dadas por*

$$\begin{array}{rcl} a(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & x_1^3\mathcal{A}+x_1^2\mathcal{B}+x_1^2x_2\mathcal{C}+x_1x_2\mathcal{D}+x_1\mathcal{P}+x_2\mathcal{Q}+\xi\,, \\ b(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & x_2^3\mathcal{C}+x_2^2\mathcal{E}+x_1x_2^2\mathcal{A}+x_1x_2\mathcal{F}+x_1\mathcal{S}+x_2\mathcal{T}+\eta\,, \\ c(x_1,x_2,x_3,x_4) & = & \frac{1}{2}x_1^2\mathcal{F}+\frac{1}{2}x_2^2\mathcal{D}+x_1^2x_2\mathcal{A}+x_1x_2^2\mathcal{C}+\frac{1}{2}x_1x_2(\mathcal{B}+\mathcal{E}) \\ & & +x_1\mathcal{U}+x_2\mathcal{V}+\gamma\,, \end{array} \tag{4.5}$$

onde $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, ξ, η e γ son funcións arbitrarias que dependen só das coordenadas x_3 e x_4.

A curvatura escalar estrela neste caso é

$$\tau^*=\tau=12x_1\mathcal{A}+12x_2\mathcal{C}+3\mathcal{B}+3\mathcal{E}.$$

Teorema 4.9. *Unha métrica de Walker (M,g) autodual con estructura case para–hermítica asociada J é debilmente *–Einstein se e só se as funcións a, b e c veñen dadas por*

$$a(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2\mathcal{B}+x_1\mathcal{P}+x_2\mathcal{Q}+\xi,$$
$$b(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2^2\mathcal{B}+x_1\mathcal{S}+x_2\mathcal{T}+\eta,$$
$$c(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2\mathcal{B}+x_1\mathcal{U}+x_2\mathcal{V}+\gamma,$$

onde $\mathcal{B}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, ξ, η e γ son funcións arbitrarias que dependen só das coordenadas x_3 e x_4.

Demostración. Sustituindo en (4.1) a definición das funcións a, b e c de (4.5) obtemos

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 4x_1\mathcal{A}-4x_2\mathcal{C}+2\mathcal{B}-2\mathcal{E}\,, \\ 0 & = & 4x_2\mathcal{A}+2\mathcal{F}\,, \\ 0 & = & 4x_1\mathcal{C}+2\mathcal{D}\,, \end{array}$$

polo que $\mathcal{A}=\mathcal{C}=\mathcal{D}=\mathcal{F}=0$ e $\mathcal{E}=\mathcal{B}$. □

Denotamos por $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{P}_i$, $\mathcal{Q}_i$, $\mathcal{S}_i$, $\mathcal{T}_i$, $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{V}_i$, ξ_i, η_i, γ_i, $\mathcal{A}_{ij}$, $\mathcal{B}_{ij}$, $\mathcal{C}_{ij}$, $\mathcal{D}_{ij}$, $\mathcal{E}_{ij}$, $\mathcal{F}_{ij}$, $\mathcal{P}_{ij}$, $\mathcal{Q}_{ij}$, $\mathcal{S}_{ij}$, $\mathcal{T}_{ij}$, $\mathcal{U}_{ij}$, $\mathcal{V}_{ij}$, ξ_{ij}, η_{ij} e γ_{ij} $(i,j=3,4)$ ás derivadas parciais e derivadas parciais segundas das funcións $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, ξ, η e γ con respecto ás variables i e ij, respectivamente.

Observación 4.10. Nas condicións do teorema anterior (autodual e debilmente *–Einstein), τ e W_{12}^+ resultan ser

$$\begin{aligned} \tau &= 6\mathcal{B}, \\ W_{12}^+ &= \tfrac{1}{2}\left(-3x_1x_2\mathcal{B}^2 - 3x_1(\mathcal{B}\mathcal{U} - \mathcal{B}_4) - 3x_2(\mathcal{B}\mathcal{V} + \mathcal{B}_3) - 3\mathcal{B}\gamma - \mathcal{T}_3 - \mathcal{U}_3 + \mathcal{P}_4 + \mathcal{V}_4\right). \end{aligned}$$

Teorema 4.11. *Unha métrica de Walker (M, g) autodual con estructura case para–hermítica asociada J é *–Einstein se e só se as funcións a, b e c veñen dadas por*

$$a(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2\kappa + x_1\mathcal{P} + x_2\mathcal{Q} + \xi,$$

$$b(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2\kappa + x_1\mathcal{S} + x_2\mathcal{T} + \eta,$$

$$c(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2\kappa + x_1\mathcal{U} + x_2\mathcal{V} + \gamma,$$

onde $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, ξ, η e γ son funcións arbitrarias que dependen só das coordenadas x_3 e x_4, e κ é unha constante arbitraria.

Demostración. A curvatura escalar estrela no caso autodual é $\tau^* = 12x_1\mathcal{A}+12x_2\mathcal{C}+3\mathcal{B}+3\mathcal{E}$. Como vimos no teorema anterior, para ser debilmente *–Einstein, $\mathcal{A} = \mathcal{C} = 0$ e $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ de onde resulta que $\tau^* = 6\mathcal{B}$. Como τ^* ten que ser constante, $\mathcal{B} = \kappa$. □

Observación 4.12. Nas condicións do teorema anterior (autodual e *–Einstein), τ e W_{12}^+ resultan ser

$$\begin{aligned} \tau &= 6\kappa, \\ W_{12}^+ &= \tfrac{1}{2}\left(-3x_1x_2\kappa^2 - 3\kappa x_1\mathcal{U} - 3\kappa x_2\mathcal{V} - 3\kappa\gamma - \mathcal{T}_3 - \mathcal{U}_3 + \mathcal{P}_4 + \mathcal{V}_4\right). \end{aligned}$$

Vexamos agora cando as variedades autoduais *-Einstein son simplécticas, integrables e para–Kähler.

Teorema 4.13. *Unha métrica autodual (M, g) debilmente *–Einstein é simpléctica se e só se ten curvatura escalar constante.*

Demostración. A condición de ser simpléctica no caso xeral é que a función $c + 4\frac{W_{12}^+}{\tau}$ non dependa das dúas primeiras coordenadas (x_1, x_2). Empregando as expresións de c, τ e W_{12}^+ no teorema 4.9 e na observación 4.10, temos que

$$c + 4\frac{W_{12}^+}{\tau} = \frac{1}{3\mathcal{B}}\left(3x_1\mathcal{B}_4 - 3x_3\mathcal{B}_3 - \mathcal{T}_3 - \mathcal{U}_3 + \mathcal{P}_4 + \mathcal{V}_4\right).$$

Para que a expresión non dependa de x_1 e x_2 ten que ser $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_4 = 0$ (i.e. $\mathcal{B}$ constante) e, por tanto, $\tau = 6\mathcal{B}$ constante. □

Corolario 4.14. *Toda métrica de Walker autodual (M, g) con J *–Einstein é simpléctica.*

Observación 4.15. Este último corolario implica que no caso das métricas de Walker 4-dimensionais con estructura case para–hermítica asociada J que son autoduais e *–Einstein, coinciden a clase das integrables e a clase das para–Kähler.

Teorema 4.16. *Unha métrica de Walker autodual (M, g) é *-Einstein e integrable se e só se as funcións a, b e c son da forma*

$$\begin{aligned} a(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1^2\kappa + x_1\mathcal{P} + x_2\mathcal{Q} + \tfrac{1}{\kappa}(\mathcal{Q}(\mathcal{T}-\mathcal{U}) + \mathcal{V}(\mathcal{P}-\mathcal{V}) + 2\mathcal{V}_3 - 2\mathcal{Q}_4)\,, \\ b(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_2^2\kappa + x_1\mathcal{S} + x_2\mathcal{T} + \tfrac{1}{\kappa}(\mathcal{S}(\mathcal{P}-\mathcal{V}) - \mathcal{U}(\mathcal{U}-\mathcal{T}) + 2\mathcal{S}_3 - \mathcal{U}_4)\,, \\ c(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1x_2\kappa + x_1\mathcal{U} + x_2\mathcal{V} + \tfrac{1}{\kappa}(\mathcal{U}\mathcal{V} - \mathcal{Q}\mathcal{S} + \mathcal{T}_3 - \mathcal{U}_3 + \mathcal{P}_4 - \mathcal{V}_4)\,, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ verifican as condicións

$$\begin{aligned} 0 &= (2\mathcal{V}-\mathcal{P})(\mathcal{T}_3 - 2\mathcal{U}_3 + 2\mathcal{P}_4 - 4\mathcal{V}_4) + 3\mathcal{Q}(2\mathcal{S}_3 - 2\mathcal{U}_4 + \mathcal{T}_4) \\ &\quad + \mathcal{S}\mathcal{Q}_3 + 3(\mathcal{T}-2\mathcal{U})\mathcal{Q}_4 + 4\mathcal{U}_{33} - 2\mathcal{T}_{33} - 4\mathcal{P}_{34} + 8\mathcal{V}_{34} - 6\mathcal{Q}_{44}\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (2\mathcal{U}-\mathcal{T})(2\mathcal{T}_3 - 4\mathcal{U}_3 + \mathcal{P}_4 - 2\mathcal{V}_4)) + 3\mathcal{S}(\mathcal{P}_3 - 2\mathcal{V}_3 + 2\mathcal{Q}_4) \\ &\quad + 3(\mathcal{P}-2\mathcal{V})\mathcal{S}_3 + 3\mathcal{Q}\mathcal{S}_4 - 6\mathcal{S}_{33} - 4\mathcal{T}_{34} + 8\mathcal{U}_{34} - 2\mathcal{P}_{44} + 4\mathcal{V}_{44}\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Demostración. A expresión do tensor de Nijenhuis da estructura (3.8) está dada en (3.12). No caso particular de que a estrutura sexa *–Einstein e autodual (teorema 4.11) os termos do tensor de Nijenhuis que non se anulan trivialmente son

$$\begin{aligned} (N_J)^4_{13} = -(N_J)^3_{14} &= -2x_1(\mathcal{Q}\mathcal{S} - \mathcal{U}\mathcal{V} + \mathcal{U}_3 - \mathcal{T}_3 + \mathcal{V}_4 - \mathcal{P}_4 + \kappa\gamma) \\ &\quad -2x_2(\mathcal{Q}(\mathcal{T}-\mathcal{U}) + \mathcal{V}(\mathcal{P}-\mathcal{V}) + 2\mathcal{V}_3 - 2\mathcal{Q}_4 - \kappa\xi) \\ &\quad -3\kappa\gamma(\mathcal{P}-\mathcal{V}) - 3\kappa\eta\mathcal{Q} + 3\kappa\xi\mathcal{U} + \tfrac{2}{3\kappa}((\mathcal{P}+\mathcal{V})(\mathcal{U}_3 + \mathcal{T}_3 - \mathcal{P}_4 - \mathcal{V}_4) \\ &\quad -6\kappa\gamma_3 + 2\mathcal{U}_{33} + 2\mathcal{T}_{33} - 2\mathcal{P}_{34} - 2\mathcal{V}_{34})\,, \\ (N_J)^4_{23} = -(N_J)^3_{24} &= 2x_1(\mathcal{S}(\mathcal{P}-\mathcal{V}) - \mathcal{U}(\mathcal{U}-\mathcal{T}) + 2\mathcal{S}_3 - \mathcal{U}_4 - \kappa\eta) \\ &\quad +2x_2(\mathcal{Q}\mathcal{S} - \mathcal{U}\mathcal{V} + \mathcal{U}_3 - \mathcal{T}_3 + \mathcal{V}_4 - \mathcal{P}_4 + \kappa\gamma) \\ &\quad +3\kappa\gamma(\mathcal{T}-\mathcal{U}) - 3\kappa\eta\mathcal{V} + 3\kappa\xi\mathcal{S} + \tfrac{2}{3\kappa}(\mathcal{U}+\mathcal{T})(\mathcal{U}_3 + \mathcal{T}_3 - \mathcal{P}_4 - \mathcal{V}_4) \\ &\quad -6\kappa\eta_3 + 2\mathcal{U}_{34} + 2\mathcal{T}_{34} - 2\mathcal{P}_{44} - 2\mathcal{V}_{44})\,. \end{aligned}$$

Das ecuacións que resultan ó igualar ambos termos a cero e tendo en conta que que $\kappa \neq 0$, obtemos as expresións que sustitúen a ξ, η e γ no teorema 4.11 e as dúas condicións deste teorema. □

Proposición 4.17. *Unha métrica de Walker* 4*-dimensional autodual é Einstein se e só se as funcións a, b e c veñen dadas por*

$$a(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2\kappa + x_1\mathcal{P} + x_2\mathcal{Q} + \xi,$$

$$b(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2\kappa + x_1\mathcal{S} + x_2\mathcal{T} + \eta,$$

$$c(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2\kappa + x_1\mathcal{U} + x_2\mathcal{V} + \gamma,$$

onde $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, ξ, η e γ son funcións de x_3 e x_4, e κ é unha constante verificando as condicións

$$\mathcal{Q}(\mathcal{T} - \mathcal{U}) + \mathcal{V}(\mathcal{P} - \mathcal{V}) + 2\mathcal{V}_3 - 2\mathcal{Q}_4 - \kappa\xi = 0\,, \tag{4.8}$$

$$\mathcal{S}(\mathcal{P} - \mathcal{V}) - \mathcal{U}(\mathcal{U} - \mathcal{T}) + 2\mathcal{S}_3 - \mathcal{U}_4 - \kappa\eta = 0\,, \tag{4.9}$$

$$\mathcal{Q}\mathcal{S} - \mathcal{U}\mathcal{V} + \mathcal{U}_3 - \mathcal{T}_3 + \mathcal{V}_4 - \mathcal{P}_4 + \kappa\gamma = 0\,. \tag{4.10}$$

Observación 4.18. No caso autodual, o carácter Einstein implica que a curvatura escalar é constante, $\tau = 6\kappa$, e por tanto implica o carácter *–Einsten para a estructura case para–hermítica asociada a unha métrica de Walker 4-dimensional. Basta comparar esta última proposición co teorema 4.11.

Ademais temos que ser *–Einstein e integrable (ou para–Kähler, xa que son equivalentes neste caso) implica ser Einstein, xa que as tres condicións do teorema anterior coinciden coas tres primeiras condicións do teorema 4.16. Neste caso non podemos despexar ξ, η e γ xa que podemos ter $\kappa = 0$.

Capítulo 5

Métricas de Osserman con operador de Jacobi non diagonalizable

5.1. Variedades para–Kähler de Osserman

Sexa (M, g, J) una variedade para–Kähler. Considerando a descomposición do operador curvatura dada por (3.1), onde a orientación está definida pola 2-forma de Kähler Ω (que induce a mesma orientación que a estructura case paracomplexa), W^- representa o tensor curvatura de Bochner da estructura (g, J) (véxase [8])

$$B = R + \frac{\tau}{4(n+1)(n+2)} F_0 - \frac{1}{2(n+2)} F_1 \,,$$

onde F_0 e F_1 son as funcións curvatura definidas por

$$\begin{aligned} F_0(x,y,z,w) &= g(y,z)g(x,w) - g(x,z)g(y,w) + g(Jx,z)g(Jy,w) \\ &\quad -g(Jy,z)g(Jx,w) + 2g(Jx,y)g(Jz,w), \\ F_1(x,y,z,w) &= g(y,z)\rho(x,w) - g(x,z)\rho(y,w) + g(Jx,z)\rho(Jy,w) \\ &\quad -g(Jy,z)\rho(Jx,w) + 2g(Jx,y)\rho(Jz,w) \\ &\quad +\rho(y,z)g(x,w) - \rho(x,z)g(y,w) + \rho(Jx,z)g(Jy,w) \\ &\quad -\rho(Jy,z)g(Jx,w) + 2\rho(Jx,y)g(Jz,w)\,. \end{aligned}$$

Así tense que

Teorema 5.1. *Unha variedade para–Kähler 4-dimensional é Osserman se e só se é de curvatura seccional paraholomorfa constante ou Ricci chá, caso non cal os operadores de Jacobi son nilpotentes.*

Demostración. Dado que unha variedade 4-dimensional é puntualmente Osserman se e só se é Einstein e autodual ou anti-autodual, consideraremos as dúas posibilidades sobre o tensor curvatura de Weyl. Se a variedade é autodual ($W^- = 0$), o tensor curvatura de Bochner é identicamente cero e, do feito de ser a variedade Einstein, séguese que a curvatura seccional paraholomorfa ten que ser necesariamente constante.

Supoñamos agora que a estructura é anti-autodual. Como a métrica subxacente a toda estructura para–Kähler é necesariamente de Walker, a anulación de W^+ conleva a anulación da curvatura escalar τ e, por tanto, o carácter Ricci chá das métricas para–Kähler Osserman anti-autoduais. Agora ben, considerando as distintas posibilidades para os operadores de Jacobi, séguese do traballo [3] que estes non poden ser diagonalizables (en tal caso a estructura tería que ser autodual) nin presentar raíces complexas. Polo tanto, as únicas posibilidades a considerar son aquelas en que os operadores de Jacobi presenten unha raíz dobre ou triple do polinomio mínimo. No último caso, tal raíz ten que ser necesariamente cero como consecuencia do carácter Ricci chá, de onde se segue que os operadores de Jacobi son nilpotentes en tres pasos.

As variedades de Osserman tales que os seus operadores de Jacobi posúen unha raíz dobre do seu polinomio mínimo foron caracterizadas recentemente en [15], amosándose que tales operadores son necesariamente nilpotentes no caso Ricci chá, o que completa a proba. □

Observación 5.2. Localmente, toda variedade para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constate α pode describirse como unha métrica de Walker tal que as súas funcións componentes a, b e c veñen dadas por [15]

$$a(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha x_1^2, \qquad b(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_2^2, \qquad c(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha x_1 x_2,$$

e a estructura paracomplexa é a considerada neste traballo

$$J\partial_1 = \partial_1, \qquad J\partial_2 = \partial_2, \qquad J\partial_3 = a\partial_1 + c\partial_2 - \partial_3, \qquad J\partial_4 = c\partial_1 + b\partial_2 - \partial_4.$$

Observación 5.3. Variedades para-Kähler de Osserman con operadores de Jacobi nilpotentes en dous pasos foron construidas en [5].

5.2. Estructura simpléctica das variedades de Osserman tipo II

Estamos interesados nas métricas de Osserman con operador de Jacobi non diagonizable e, ademais, que non sexa nilpotente.

Observación 5.4. Se o operador de Jacobi fose nilpotente, entón a curvatura escalar sería cero, $\tau = 0$. No noso caso partimos de $\tau \neq 0$ para poder construir a estructura paracomplexa globalmente.

Teorema 5.5. *Toda variedade 4-dimensional Osserman de tipo II con curvatura escalar non nula é simpléctica.*

Demostración. Compre salientar que toda variedade 4-dimensional de Osserman tal que os seus operadores de Jacobi teñen unha raíz dobre do seu polinomio característico (i.e., de tipo II) é Ricci cha ou a súa estructura subxacente correspóndese cunha métrica de Walker. Neste último caso, a súa estructura case para–hermítica asociada é simpléctica xa que unha métrica tal ven dada por

$$\begin{aligned}
a &= x_1^2\tfrac{\tau}{6} + x_1 P + x_2 Q + \tfrac{6}{\tau}\{Q(T-U) + V(P-V) - 2(Q_4 - V_3)\},\\
b &= x_2^2\tfrac{\tau}{6} + x_1 S + x_2 T + \tfrac{6}{\tau}\{S(P-V) + U(T-U) - 2(S_3 - U_4)\},\\
c &= x_1 x_2\tfrac{\tau}{6} + x_1 U + x_2 V + \tfrac{6}{\tau}\{-QS + UV + T_3 - U_3 + P_4 - V_4\}.
\end{aligned}$$

Tense así que $W_{12}^{+} = -\frac{1}{24}\,x_1x_2\tau^2 - \frac{1}{4}\,x_2\tau\mathcal{V} + \frac{3}{2}\,\mathcal{QS} - \frac{3}{2}\,\mathcal{UV} + \mathcal{U}_3 - 2\mathcal{T}_3 - \mathcal{P}_4 + 2\mathcal{V}_4$ e por tanto a estructura case para–hermítica asociada ven dada por (3.8) onde $f = 4\frac{W_{12}^{+}}{\tau}$, o que proba que é simpléctica sen mais que utilizar o teorema 4.13. □

Observación 5.6. Lembremos que a condición Einstein implica *–Einstein.

Observación 5.7. A existencia de estructuras simplécticas sobre variedades 4-dimensionais e a posible ïntegrabilidade"das mesmas é un aspecto de gran interese polas súas posibles aplicacións na clasificación das 4-variedades [1].

É coñecido que toda estructura simpléctica se pode considerar como a forma de Kähler dunha estructura case hermítica e a chamada "conxetura de Goldberg"establece a integrabilidade (i.e., o carácter kähleriano) de tales estructuras no caso compacto cando a métrica case hermítica asociada sexa Einstein. A situación a nivel local é máis complexa, pero aínda así coñécense resultados que permiten garantir tal integrabilidade (por exemplo, se a métrica case hermítica asociada é Einstein e *–Einstein). Cando a métrica case hermítica asociada á estructura simpléctica sexa indefinida, os resultados anteriores perden a súa validez, incluso a nivel local [16].

É interesante sinalar que tódolos contraexemplos (a nivel local e global) coñecidos ata a actualidade para a conxetura de Goldberg realízanse sobre métricas Ricci chás. Sen embargo, cando sexa posible asociar a unha forma simpléctica Ω unha estructura case para–hermítica, a situación non é tan ríxida como poñen de manifesto as métricas de Osserman tipo II que son Einstein e *-Einstein con curvatura escalar non nula.

Teorema 5.8. *Sexa (M, g) unha variedade de Osserman 4-dimensional tal que os seus operadores de Jacobi posúan unha raíz dobre do seu polinomio mínimo. Se M é compacta, entón os operadores de Jacobi teñen que ser nilpotentes.*

Demostración. Os operadores de Jacobi teñen dous autovalores α e β, sendo o último unha raíz dobre do polinomio mínimo se e só se o operador curvatura de Weyl autodual satisfai

$$W^+ = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(\beta-\alpha)+1 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3}(\beta-\alpha)-1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}(\alpha-\beta) \end{pmatrix}.$$

Aínda máis, ou ben $\alpha = \beta$ ou ben $\alpha = 4\beta$.

Nótese que unha métrica 4-dimensional é Einstein se e só se a descomposición (3.1) se pode escribir $R \equiv \frac{\tau}{12}\, Id_{\Lambda^2} + W^+ + W^-$. Nese caso, a característica de Euler $\chi[M]$ e a signatura de Hirzebruch $\sigma[M]$ pódense expresar do seguinte xeito

$$\begin{aligned} \chi[M] &= -\frac{1}{8\pi^2}\int_M \{tr[(W^+)^2] + tr[(W^-)^2] + \frac{\tau^2}{24}\}\,, \\ \sigma[M] &= \frac{2}{3}\frac{1}{8\pi^2}\int_M \{tr[(W^+)^2] - tr[(W^-)^2]\}\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Unha variedade orientable 4-dimensional admite unha métrica $(--++)$ se e só se satisfai o seguinte par de condicións de Wu [27]

$$\begin{aligned} c_1^2[M] &= 3\sigma[M] + 2\chi[M]\,, \\ c_1^2[-M] &= 3\sigma[-M] + 2\chi[-M] = -3\sigma[M] + 2\chi[M]\,, \end{aligned}$$

onde $-M$ significa M coa orientación oposta.

Así, séguese de (5.1) que a primeira clase de Chern $c_1^2[M]$ e a primeira clase de Chern oposta $c_1^2[-M]$ veñen dadas por

$$\begin{aligned} c_1^2[M] &= -\frac{1}{2\pi^2}\int_M \{tr[(W^-)^2] + \frac{\tau^2}{48}\}v\,, \\ c_1^2[-M] &= -\frac{1}{2\pi^2}\int_M \{tr[(W^+)^2] + \frac{\tau^2}{48}\}v\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Entón, dado que supoñemos que $W^- = 0$, (5.2) amosa que

$$c_1^2[M] = -\frac{1}{2\pi^2}\int_M \{tr[(W^-)^2] + \frac{\tau^2}{48}\}v = -\frac{1}{2\pi^2}\int_M \frac{\tau^2}{48}v$$

e así $\tau = 0$, dado que a primeira clase de Chern é cero polo teorema 3.3, o que proba que (M, g) é Ricci chá. Esto amosa que os operadores de Jacobi son nilpotentes. (Véxase [33] para exemplos de métricas de Osserman con operadores de Jacobi nilpotentes sobre o toro). $\square$

Bibliografía

[1] V. Apostorov, T. Draghici; The curvature and the integrability of almost Kähler manifold: a survey. *Symplectic and contact topology: interactions and perspectives.* Toronto, ON/Montreal, QC, 2001), 25–53, Fields Inst. Commun., **35** Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[2] L. Bérard Bergery, A. Ikemakhen; Sur L'Holonomie des variétés pseudo-Riemanniennes de signature (n, n), *Bull. Soc. Math. France* **125** (1997), 93–114.

[3] D. N. Blăzić, N. Bokan, Rakić; Osserman pseudo-Riemannian manifolds of signature $(2, 2)$, *J. Aust. Math. Soc.* **71** (2001), 367-395.

[4] A. Bonome, R. Castro, E. García-Río, L. Hervella, Y. Matsushita; Pseudo-Chern classes and opposite Chern classes of indefinite almost Hermitian manifolds, *Acta Math. Hungar.* **75** (1997), 299–316.

[5] A. Bonome, R. Castro, E. García-Río, L. Hervella, R. Vázquez Lorenzo; Nonsymmetric Osserman indefinite Kähler manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126** (1998), 2763–2769.

[6] A. Borowiec, M. Francaviglia, I. Volovich; Anti-Kählerian manifolds, *Differential Geom. Appl.* **12** (2000), 281–289.

[7] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, R. Vázquez-Lorenzo; Conformally Osserman four-dimensional manifolds whose conformal Jacobi operators have complex eigenvalues, *Proc. R. Soc. A* **462** (2006), 1425–1441.

[8] R. L. Bryant; Bochner-Kähler metrics, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), 623–715.

[9] E. Calabi, L. Markus; Relativistic space forms, *Ann. Math.* **75** (1962), 63–76.

[10] L. A. Cordero, P. F. Parker; *Pseudoriemannian 2-step nilpotent Lie groups*, arXiv: math.DG/ 9906188, a aparecer.

[11] A. Cortés-Ayaso, J. C. Díaz-Ramos, E. García-Río; Four-dimensional manifolds with degenerate self-dual Weyl curvature operator, *Ann. Global Anal. Geom.* **34** (2008), 185–193.

[12] V. Cruceanu, P. Fortuny, P. M. Gadea; A survey on paracomplex geometry, *Rocky Mount. J. Math* **26** (1996), 83-115.

[13] A. Derdzinski, W. Roter; Walker's theorem without coordinates, *J. Math. Phys.* **47** (2006), 062504, 8 pp.

[14] J. C. Díaz Ramos, E. García Río, R. Vázquez Lorenzo; New examples of Osserman metrics with nondiagonalizable Jacobi operators, *Differential Geom. Appl.* **24** (2006), 433–442.

[15] J. C. Díaz Ramos, E. García Río, R. Vázquez Lorenzo; Four-dimensional Osserman metrics with nondiagonalizable Jacobi operators, *J. Geom. Anal.* **16** (2006), 39–52.

[16] J. Davidov, J. C. Díaz-Ramos, E. García-Río, Y. Matsushita, O. Muškarov, R. Vázquez-Lorenzo; Almost Kähler Walker four-manifolds, *J. Geom. Phys.* **57** (2007), 1075–1088.

[17] J. Davidov, O. Muškarov; Self-dual Walker metrics with a two-step nilpotent Ricci operator, *J. Geom. Phys.* **57** (2006), 157–165..

[18] F. Etayo, R. Santamaría, U. R. Trías; The geometry of a bi-Lagrangian manifold, *Differential Geom. Appl.* **24** (2006), 33–59.

[19] P. M. Gadea, A. Montesinos; Spaces of constant paraholomophic sectional curvature, *Pacific J. Math.* **136** (1989), 85–101.

[20] E. García Río, D. N. Kupeli, R. Vázquez Lorenzo; *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry*, Lecture Notes in Mathematics **1777**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2002.

[21] P. Gilkey; *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemann Curvature Tensor*, World Scientific(2001).

[22] N. Hitchin; Hypersymplectic quotients, *Acta Acad. Sci. Tauriensis* **124** (1990), 169-180.

[23] W. Kühnel; *Differential Geometry. Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library **16**, American Mathematical Society 2002.

[24] P. R. Law; Neutral Einstein metrics in four dimensions, *J. Math. Phys.* **32**, (1991) 3039-3042.

[25] M. A. Magid; Indefinite Einstein hypersurfaces with nilpotent shape operators, *Hokkaido Math. J.* **13** (1984), 241–250.

[26] M. A. Magid; Shape operators of Einstein hypersurfaces in indefinite space forms, *Proc. Amer. Math. Soc.* **84** (1982), 237-242.

[27] Y. Matsushita; Fields of 2-planes and two kinds of almost complex structures on compact 4-dimensional manifolds, *Math. Z.* **207** (1991), 281–291.

[28] Y. Matsushita; Four-dimensional Walker metrics and symplectic structures, *J. Geom. Phys.* **52** (2004), 89-99.

[29] Y. Matsushita; Walker 4-manifolds with proper almost complex structures, *J. Geom. Phys.* **55** (2005), 385-398.

[30] Y. Matsushita, P. Law; Hitchin-Thorpe-Type inequalities for pseudo-Riemannian 4-manifolds of metric signature $(++--)$, *Geom. Ded.* **87**, (2001) 65-89.

[31] R.Osserman; Curvature in the eighties, *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 731-756.

[32] G. Ovando; Invariant pseudo Kähler metrics in dimension four, *J. Lie Theory* **16** (2006), 371–391.

[33] Y. Petean; Indefinite Kähler-Einstein Metrics on compact complex surfaces, *Commun. Math. Phys.* **189**, (1997) 227-235.

[34] A. G. Walker; Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, *Quart. J. Math. Oxford* **(2) 1** (1950), 69–79.

[35] A. G. Walker; Canonical forms. II. Parallel partially null planes, *Quart. J. Math. Oxford* **(2) 1** (1950), 147–152.

Publicacións do departamento de Xeometría e Topoloxía

95 A. RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ *Cohomoloxía das foliacións riemannianas con follas densas. Cohomoloxía de Alexander-Spanier de foliacións compactas Hausdorff.* Tesiña de Licenciatura (2001) ISBN: 84-89390-12-6

96 M. FERNÁNDEZ LÓPEZ *Resultados de descomposición asociados á ecuación de Möbius.* Tese de Doutoramento (2002) ISBN: 84-89390-13-4

97 J. C. DÍAZ RAMOS *Curvaturas totais de esferas xeodésicas.* Tesiña de Licenciatura (2002) ISBN: 84-89390-14-2

98 M. F. GONZÁLEZ LÁZARO *Resolución de singularidades en acciones polares.* DEA (2003) ISBN: 84-89390-16-9

99 A. SOTELO ARMESTO *El grupo de difeomorfismos del espacio de hojas de una foliación de Lie desde el punto de vistas difeológico.* Tesiña de Licenciatura (2003) ISBN: 84-89390-15-0

100 M. BROZOS VÁZQUEZ *Variedades semi-riemannianas con tensor de curvatura especial.* Tesiña de Licenciatura (2003) ISBN: 84-89390-18-5

101 J. C. DÍAZ RAMOS *Caracterización de variedades riemannianas mediante curvaturas escalares totais de esferas xeodésicas.* DEA (2003) ISBN: 84-89390-17-7

102 M. T. PÉREZ LÓPEZ *Campos de vectores harmónicos-Killing.* Tese de Doutoramento (2003) ISBN: 84-89390-19-3

103 I. GARCÍA RAMÍREZ *Aplicación de las formulas de Bochner al estudio de variedades 4-dimensionales doblemente casi-hermíticas.* DEA (2003) ISBN: 84-89390-20-7

104 A. MARTÍN MÉNDEZ *Álgebras de Lie graduadas y estructuras de segundo orden asociadas.* Tese de Doutoramento (2004) ISBN: 84-89390-21-5

105 M. BROZOS VÁZQUEZ *Propiedades conformes de productos deformados.* DEA (2004) ISBN: 84-89390-22-3

106 J. C. DÍAZ RAMOS *Geometric consequences of intrisic and extrinsic curvature conditions.* Tese de Doutoramento (2006) ISBN: 84-89390-23-1

107 P. GONZÁLEZ SEQUEIROS *A dinámica dos mosaicos de Robinson.* Tesiña de Licenciatura (2006) ISBN: 84-89390-24-X

108 E. CALVIÑO LOUZAO *Variedades de Osserman e Ivanov-Petrova en dimensión cuatro.* DEA (2007) ISBN 978-84-89390-25-6

109 M. BROZOS VÁZQUEZ *Geometric consequences of algebraic conditions on curvature operators.* Tese de Doutoramento (2007) ISBN 978-84-89390-26-3

110 M. PÉREZ FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA *Número de ramificación de un pseudogrupo.* DEA (2007) ISBN 978-84-89390-27-0

111 P. GONZÁLEZ SEQUEIROS *A dinámica dos mosaicos euclidianos.* DEA (2007) ISBN 84-89390-28-7

112 Á. LOZANO ROJO *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos.* Tese de Doutoramento (2008) ISBN 978-84-89390-29-4

113 M. J. PEREIRA SÁEZ *Aplicación traza, transformación de Cayley y categoría LS de los grupos de Lie clásicos.* DEA (2008) ISBN 978-84-89390-30-0

114 S. VILARIÑO FERNÁNDEZ *Nuevas aportaciones al estudio de los formalismos k-simpléctico y k-cosimpléctico.* Tese de Doutoramento (2009) ISBN 978-84-89390-31-7

115 S. GAVINO FERNÁNDEZ *Estudio do tensor de curvatura ó longo de xeodésicas e círculos en variedades de Walker.* DEA (2009) ISBN 978-84-89390-32-4

116 C. MENIÑO COTÓN *Categoría LS en espacios medibles foliados con medida transversa invariante.* DEA (2010) ISBN 978-84-89390-33-1