

Javier Seoane Bascoy

ESPINORES DE KILLING  
Y  
OPERADOR DE DIRAC  
EN  
VARIETADES DE RIEMANN:  
LA VARIETADE DE BERGER  $B^7$

119  
2011

Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA







Javier Seoane Bascoy

ESPINORES DE KILLING

Y

OPERADOR DE DIRAC

EN

VARIEDADES DE RIEMANN:

LA VARIEDAD DE BERGER  $B^7$

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas, bajo la dirección de los profesores Luis María Hervella Torrón y Antonio Martínez Naveira, para obtener el Diploma de Estudios Avanzados en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela.

Su defensa fue llevada a cabo el día 15 de Julio de 2010 en la Facultad de Matemáticas de dicha Universidad, obteniendo la calificación de Sobresaliente (10).

**IMPRIME:** Imprenta Universitaria  
Pavillón de Servicios  
Campus Universitario

**ISBN:** 978-84-89390-36-2

**Dep. Leg.:** C 864-2011

*A mi familia.*



# Agradecimientos

Al finalizar la elaboración de los diferentes capítulos que componen este trabajo y plantearme la escritura de este apartado siento que lo más difícil está por hacer. Me explico, al observar y hacer balance del camino que dejo detrás mía no puedo hacer más que sorprenderme por la gran cantidad de personas que estuvieron a lo largo de él ofreciéndome su ayuda desinteresada para llegar hasta este punto. Es por ello por lo que cargar sólo en palabras la responsabilidad de que representen toda mi gratitud me parece una tarea inalcanzable.

Quisiera comenzar agradeciendo a mis directores de tesis, Luis M. Hervella Torrón y Antonio Martínez Naveira todos sus ánimos, su dedicación y sus enseñanzas a lo largo de todo este tiempo. También quisiera agradecerle especialmente a Antonio todo su apoyo a lo largo de mis diversas estancias en Valencia en esos momentos en los que la “morriña” se acentúa y se vuelve todo más difícil.

Me gustaría hacer extensible este agradecimiento a todos los profesores del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Santiago de Compostela, muy especialmente al profesor José Antonio Oubiña Galiñanes por sus múltiples ayudas y comentarios a la hora de realizar este trabajo. También me gustaría agradecerle a todos los profesores del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Valencia el gran acogimiento con el que siempre fui recibido así como su ayuda y el inmejorable ambiente de trabajo que me ofrecieron.

No quisiera olvidarme en este apartado de mis compañeros doctorandos: Miguel Domínguez, Sandra, Miguel Vaquero, María José y Esteban por todas esas charlas educativas y todos esos momentos inolvidables que vivimos.

Finalmente, me gustaría que estas últimas palabras de agradecimiento fueran para los verdaderos artífices de este trabajo, mi familia, sin la cual nada de esto sería posible. Por eso desearía agradecerles a mis padres, José Manuel y María Esther, y a mis hermanos, Miguel Ángel y José Carlos, todo su apoyo incondicional, incalculable y completamente imprescindible.

Un abrazo muy fuerte para todos.



# Abstract

Spin geometry and the Dirac operator are two important examples of the links among Differential Geometry, Mathematical Analysis, Mathematical Physics and Topology developed during the 20<sup>th</sup> Century.

Dirac operators were introduced by P. A. M. Dirac in 1928 under some flatness assumptions on the underlying Riemannian structure. His aim was to obtain a quantum description for the electron, considering the new advances of the Special Theory of Relativity. The generalization of the Dirac operator to arbitrary Riemannian or Lorentzian manifolds was rather involved and indeed, in 1937 Élie Cartan wrote in his book “La théorie des spineurs” that there were enormous difficulties in implementing the techniques of the global calculus of spinors on these kind of manifolds:

*Les difficultés (rencontrées quand on a voulu étendre les équations de Dirac de la Relativité Restreinte à la Relativité Générale) sont insurmontables si l'on veut conserver la technique classique de la Géométrie Riemannienne: il est impossible, un système de coordonnées étant donné dans l'espace-temps, de représenter... un champ de spineurs par un nombre fini de composantes...*

In 1962 Atiyah and Singer managed to extend the definition of the Dirac operator into a global setting, thus avoiding any flatness assumption on the curvature. The use of the theory of principal fiber bundles and connections, previously developed by Ehresmann in the fifties was essential in achieving this generalization. Finally the Dirac operator was defined as an operator acting on sections, called spinors or spinors fields, of a certain vector bundle.

The aim of this work is to study the Dirac operator on the Berger manifold  $B^7$ ,  $D = \sum_{i=1}^7 e_i \nabla_{e_i}$ , and to study a special class of spinors, the Killing spinors; i.e., those spinors satisfying  $\nabla_X \psi = \lambda X \cdot \psi$ , for all vector fields  $X \in \mathfrak{X}(M)$  and some  $\lambda \in \mathbb{C}$ . More precisely, our purpose in this work is to make a study of Killing spinors and their properties for certain special classes of manifolds with an underlying homogeneous structure.

It is well known the nonexistence of such Killing spinors on manifolds like  $SU(2)/Sp(2) \times S^1$  and the family of manifolds  $U(n+2)/U(n) \times U(1) \times U(1)$ . Therefore it would be desirable to consider some natural generalizations of Killing spinors, that could have a similar

behavior on these manifolds. On the other hand, relations are known between the existence of Killing spinors and the underlying structure of the manifold (almost contact, almost complex structures, etc.) It would be, therefore of interest, to understand the possible relations among generalizations of Killing spinors and the manifold structure. Moreover, a similar study using the spinor connection associated to the canonical connection, which is a connection with torsion, instead of the Levi-Civita connection will be considered for comparing both results in subsequent work.

Clifford algebras and spinor bundles are introduced in Chapter 2. In Chapter 3 these manifolds and the operators defined on them, such as the spinor bundle and the spinor connection are introduced. The techniques previously introduced are used in Chapter 4 to obtain some results for the first eigenvalue of the Dirac operator. The expression of the uniquely associated Killing spinor is given and the relation with the value of the first eigenvalue of the Dirac operator is calculated. In doing this, the complex representation of the Clifford algebra associated to the tangent bundle, its unique spinor structure and associated spinor bundle are calculated in terms of the homogeneous structure and the isotropy representation. Finally, using the isomorphism  $\widetilde{Ad}_* : \mathfrak{spin}(7) \rightarrow \mathfrak{so}(7)$  the expression for the lifting of the Levi-Civita connection and its associated spinor connection is obtained.

# Introducción

El operador de Dirac y la Geometría Spin son dos de los principales lazos de unión entre la Geometría, el Análisis, la Física y la Topología desarrollados a lo largo del siglo XX.

En los espacios de curvatura nula el operador de Dirac clásico fue considerado en 1928 por el físico P. A. M. Dirac como una “raíz cuadrada” del laplaciano; es decir, su cuadrado debía ser el laplaciano. Su objetivo era dar una descripción cuántica de los electrones teniendo en cuenta los avances recientes de la Teoría de la Relatividad Especial.

No obstante, su generalización a variedades de Riemann o de Lorentz con curvatura no nula no fue una tarea sencilla e, incluso, Élie Cartan en 1937 escribió en su libro *La théorie des spineurs* que había dificultades insuperables a la hora de aplicar las técnicas del cálculo global de espinores sobre variedades de Riemann o de Lorentz:

*Les difficultés (rencontrées quand on a voulu étendre les équations de Dirac de la Relativité Restreinte à la Relativité Générale) sont insurmontables si l'on veut conserver la technique classique de la Géométrie Riemannienne: il est impossible, un système de coordonnées étant donné dans l'espace-temps, de représenter... un champ de spineurs par un nombre fini de composantes...*

En 1962 Atiyah y Singer consiguieron definir el operador de Dirac de forma global sobre determinadas variedades orientadas con curvatura no necesariamente nula, denominadas variedades espinoriales. Para ello tuvieron que hacer uso del lenguaje de fibrados principales y conexiones desarrollado por Ehresmann en los años cincuenta. Así, definieron el operador de Dirac como un operador que actúa sobre secciones, denominadas espinores o campos espinoriales, de un cierto fibrado vectorial.

El objetivo de este trabajo es estudiar sobre la variedad de Berger  $B^7$  el operador de Dirac,  $D = \sum_{i=1}^7 e_i \nabla_{e_i}$ , y los espinores de Killing; es decir, los espinores  $\psi$  verificando  $\nabla_X \psi = \lambda X \cdot \psi$ ,  $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Para ello, en el Capítulo 2 se hace una pequeña introducción a las álgebras de Clifford, fundamentales a la hora de definir el fibrado espinorial sobre estas variedades. En el Capítulo 3 se introducen dichas variedades y las estructuras y operadores que sobre ellas se definen, como por ejemplo: el fibrado espinorial, la derivada espinorial...

Finalmente en el Capítulo 4 se aplican todas las técnicas de la Geometría Spin vistas en los capítulos precedentes y se obtienen resultados para el primero de los autovalores del operador de Dirac, para la expresión de su único campo espinorial de Killing y para la relación existente entre ambos. Además, se obtiene la representación compleja del álgebra de Clifford asociada a su espacio tangente,  $k_n$ ; se construye sobre ella una estructura espinorial a partir de su estructura de espacio homogéneo y de su representación de isotropía y se obtiene su fibrado espinorial asociado. Posteriormente, mediante el isomorfismo  $\widetilde{Ad}_* : \mathfrak{spin}(7) \rightarrow \mathfrak{so}(7)$  se obtiene la expresión del levantamiento de la conexión de Levi-Civita y de la derivada espinorial asociada.

Con este trabajo se inicia el estudio de espinores de Killing y de sus aplicaciones para variedades particulares. No obstante, es bien conocido que existen variedades sobre las que no existen dichos espinores, como es el caso, por ejemplo, de las variedades  $SU(2)/Sp(2) \times S^1$ , de dimensión 13; y de la familia de variedades  $U(n+2)/U(n) \times U(1) \times U(1)$ . Por tanto, parece interesante intentar obtener generalizaciones para estos espinores que jueguen un papel análogo sobre estas variedades.

Son bien conocidas, también, relaciones entre la existencia de espinores de Killing y la existencia de determinadas estructuras casi contacto o casi complejas, dependiendo de la dimensión de la variedad con la que se esté a trabajar. Así, se abordará el estudio de relaciones de este tipo con las posibles generalizaciones de los espinores de Killing.

Además, se intentará realizar un estudio análogo a éste considerando una derivada espinor asociada a la conexión canónica, que es una conexión con torsión, en vez de a la conexión de Levi-Civita con el fin de comparar los resultados obtenidos en ambos casos.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos previos . . . . .	1
1.2. Grupos y álgebras de Lie . . . . .	3
1.3. Espacios homogéneos . . . . .	7
1.3.1. Representación de isotropía . . . . .	9
1.4. Espacios fibrados . . . . .	10
1.4.1. Espacios fibrados principales . . . . .	10
1.4.2. Fibrados asociados . . . . .	11
1.5. El operador de Dirac clásico . . . . .	11
<b>2. Álgebras de Clifford</b>	<b>17</b>
2.1. Cálculo de la dimensión del álgebra de Clifford . . . . .	22
2.2. Representación compleja de las álgebras de Clifford . . . . .	26
2.3. Los grupos Pin y Spin . . . . .	34
<b>3. Estructuras espin sobre variedades</b>	<b>49</b>
3.1. Estructuras espinoriales . . . . .	49
3.2. Variedades espinoriales . . . . .	51
3.3. Fibrado espinorial, derivada espinorial y curvatura espinorial . . . . .	51
3.4. Espinores de Killing . . . . .	53
3.5. El operador de Dirac . . . . .	55
3.6. Estructuras espinoriales sobre espacios homogéneos . . . . .	56
<b>4. Espinores de Killing sobre la variedad <math>B^7 = Sp(2)/SU(2)</math></b>	<b>63</b>



# Capítulo 1

## Preliminares

Se introducen en este capítulo los conceptos y resultados previos necesarios en el desarrollo de los sucesivos apartados.

### 1.1. Conceptos previos

Sea  $(M^n, g)$  una variedad de Riemann de dimensión  $n$  donde  $g$  es un tensor métrico de tipo  $(0, 2)$  (esto es, un campo de tensores simétrico y definido positivo). Sobre  $(M^n, g)$  se tiene determinada de forma única una conexión simétrica, que se denotará por  $\nabla$ , que hace paralela la métrica  $g$ ,  $\nabla g = 0$ . Dicha conexión recibe el nombre de *conexión de Levi-Civita* y está dada por la fórmula:

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\{Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])\},$$

donde  $[\cdot, \cdot]$  representa el corchete de Lie y  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ; es decir, son campos de vectores diferenciables sobre  $M$ .

Una vez definida la conexión de Levi-Civita sobre  $(M^n, g)$  y dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , se define el *tensor curvatura de Riemann de tipo (1,3)* usando el siguiente convenio de signos:

$$R_{XY} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ Z & \longmapsto & R_{XY}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z. \end{array}$$

Dicho tensor curvatura verifica las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (1.1) \quad & R_{XY}Z = -R_{YX}Z, \\ (1.2) \quad & R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0, \\ (1.3) \quad & (\nabla_X R_{YZ})W + (\nabla_Y R_{ZX})W + (\nabla_Z R_{XY})W = 0 \end{aligned}$$

para todo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ . Las igualdades 1.2 y 1.3 se conocen como *la primera y la segunda identidad de Bianchi* respectivamente. Ocasionalmente se denotará  $R_{XY}Z$  por

$R(X, Y)Z$ . A partir del tensor curvatura de tipo (1,3) se define el tensor curvatura de tipo (0,4) asociado, que también se denotará por  $R$ , como

$$R(X, Y, Z, W) = g(R_{XY}Z, W)$$

que verifica, además de las propiedades que se deducen de modo inmediato de las de  $R_{XY}Z$ , las dos siguientes:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= -R(X, Y, W, Z) \\ R(X, Y, Z, W) &= R(Z, W, X, Y) \end{aligned}$$

para cualesquiera  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Definición 1.1** Sea  $(M^n, g)$  una variedad de Riemann,  $p \in M$  y sea  $\Pi \subset T_p M$  un subespacio 2-dimensional de  $T_p M$ . Se llama curvatura seccional de  $(M^n, g)$  en  $p$  determinada por  $\Pi$  a

$$K(\Pi) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

para cualquier base  $\{X, Y\}$  del plano  $\Pi$ .

Mediante la contracción de tensores se pueden definir nuevos operadores asociados al tensor curvatura. Sea  $\{E_1, \dots, E_n\}$  una base ortonormal, el tensor de Ricci está dado por

$$\begin{aligned} Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n R(X, E_i, E_i, Y). \end{aligned}$$

A partir del tensor de Ricci se define la curvatura escalar,  $S_c$ , como

$$S_c = \sum_{i=1}^n Ric(E_i, E_i) = \sum_{i,j=1}^n R(E_i, E_j, E_j, E_i)$$

**Definición 1.2** Una variedad  $(M^n, g)$  verificando que

$$Ric = \lambda g$$

para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$  se denomina variedad de Einstein. Equivalentemente, como  $S_c = \lambda \dim(M)$ , una variedad es Einstein si se verifica

$$Ric = \frac{S_c}{\dim(M)} g.$$

## 1.2. Grupos y álgebras de Lie

**Definición 1.3** Un grupo de Lie  $G$  es una variedad diferenciable en la que hay definida una operación que la dota de una estructura de grupo y para la cual son diferenciables las aplicaciones producto,  $\mu$ , e inversa,  $\iota$ , definidas por:  $\mu(a, b) = ab$ ,  $(a, b) \in G$  y  $\iota(a) = a^{-1}$ ,  $(a \in G)$ , respectivamente.

**Ejemplo 1.4** Algunos ejemplos de grupos de Lie son

1. El espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^n$  con la suma de vectores usual.
2.  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/\{0\}$  con la multiplicación usual.
3.  $Gl(n, \mathbb{R}^n)$  con el producto de matrices usual.

**Definición 1.5** Sea  $G$  un grupo de Lie y sea  $H \subset G$ . Se dice que  $H$  es un subgrupo de Lie de  $G$  si

1.  $H$  es un grupo de Lie.
2.  $H$  es una subvariedad de  $G$ .

Asociadas a las aplicaciones producto e inversa existen otras tres aplicaciones fundamentales en el estudio de los grupos de Lie. Sea  $g \in G$ , y sean  $L_g : G \rightarrow G$ ,  $R_g : G \rightarrow G$  y  $I_g : G \rightarrow G$  dadas por

$$(1.4) \quad \begin{aligned} L_g(a) &= ga, \\ R_g(a) &= ag, \\ I_g(a) &= gag^{-1}. \end{aligned}$$

Dichas aplicaciones se denominan *traslación a la izquierda*, *traslación a la derecha* y *conjugación por  $g$*  respectivamente. No es difícil demostrar que las traslaciones son difeomorfismos de  $G$  en  $G$  mientras que  $I_g$  es un *homomorfismo de grupos de Lie*; es decir, un homomorfismo en el sentido abstracto de grupos que también es diferenciable. Además se puede comprobar que se trata de un homomorfismo biyectivo cuya inversa también es diferenciable, por lo que se dice que  $I_g$  es un *automorfismo de  $G$* .

Una herramienta poderosa en el estudio de los grupos de Lie es su álgebra de Lie asociada. No obstante, a pesar de que la motivación del estudio de las álgebras de Lie proviene de la teoría de grupos de Lie, es posible definirla de forma abstracta.

**Definición 1.6** Un álgebra de Lie sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  es un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{K}$  dotado con un producto  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ , llamado corchete de Lie, con las siguientes propiedades:

1. Antisimétrico

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

2. Bilineal

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$$

3. Verifica la identidad de Jacobi

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

para cualesquiera  $X, Y, Z \in V$  y  $a, b \in \mathbb{K}$

Es bien conocido que sobre toda variedad los campos de vectores diferenciables forman un álgebra de Lie de dimensión infinita, pero en el caso particular en el que la variedad además es un grupo de Lie existe un álgebra de Lie de dimensión finita íntimamente asociada a él y en la que se encuentran reflejadas las propiedades locales de dicho grupo.

Para obtener dicha álgebra de Lie es necesario definir los campos de vectores invariantes a la izquierda.

**Definición 1.7** *Un campo de vectores  $X$  sobre un grupo de Lie  $G$  verificando*

$$(L_g)_*X = X$$

*para cualquier  $g \in G$  se denomina campo de vectores invariante a la izquierda.*

La noción de invariancia a la izquierda conduce directamente a la definición de álgebra de Lie de un grupo de Lie.

**Definición 1.8** *Sea  $G$  un grupo de Lie. Entonces el álgebra de Lie de  $G$  es*

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{X}(G) \mid X \text{ invariante a la izquierda}\}$$

**Teorema 1.9** *[35, pag. 84 y ss.] Sea  $G$  un grupo de Lie y  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie. Entonces*

1.  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie real en el sentido de la definición 1.6
2. Existe una identificación canónica entre  $\mathfrak{g}$  y el espacio tangente en el elemento neutro,  $T_eG$ .
3.  $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(G)$ .
4. Cada  $X \in \mathfrak{g}$  es campo de vectores analítico sobre  $G$ .

Por ser el espacio tangente a una variedad diferenciable en un punto  $p$  una aproximación lineal a la variedad en dicho punto, resulta que el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es una aproximación lineal de  $G$  en el elemento neutro  $e$ . Además, como el corchete de Lie se define en un espacio vectorial, que se puede considerar llano, es más manejable que el producto del grupo de Lie, el cual está definido en el grupo de Lie que suele tratarse de un espacio con curvatura no nula.

**Definición 1.10** Sean  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  álgebras de Lie. Un homomorfismo de  $\mathfrak{g}$  en  $\mathfrak{h}$  es una aplicación lineal

$$\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$$

tal que

$$\phi[X, Y] = [\phi X, \phi Y].$$

Cuando  $\phi$  es un homomorfismo biyectivo de  $\mathfrak{g}$  en si mismo, entonces  $\phi$  se denomina automorfismo de  $\mathfrak{g}$

**Lema 1.11** [35, pag. 89] Sea  $\varphi : G \longrightarrow H$  un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces  $\varphi_{*e} : G_e \longrightarrow H_e$  puede considerarse como un homomorfismo

$$\varphi_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}.$$

El lazo de unión más fuerte entre un grupo de Lie,  $G$ , y su álgebra de Lie,  $\mathfrak{g}$ , es la aplicación  $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ , llamada *aplicación exponencial*, donde  $\exp(X)$  no es más que el valor para  $t = 1$  del único subgrupo uniparamétrico de  $G$ ; es decir, del único homomorfismo  $\exp_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$ , cuyo vector tangente en  $t = 0$  es  $X_e$ . El nombre de  $\exp$  viene motivado por el hecho de que para el grupo lineal general de un espacio vectorial dicha aplicación exponencial coincide con la exponencial de matrices usual.

Es bien conocido que si  $H$  y  $G$  son dos grupos de Lie y  $\varphi : H \longrightarrow G$  es un homomorfismo, entonces la aplicación exponencial hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{g} \end{array}$$

sea conmutativo.

Ahora bien, volviendo a las tres aplicaciones definidas anteriormente en 1.4, la conjugación  $I_g$  puede pensarse como una actuación a la izquierda de un grupo de Lie sobre si mismo por lo que induce la representación  $Ad : G \longrightarrow Aut(\mathfrak{g})$  dada por  $Ad(g) = (I_g)_{*e}$  y que se denomina *representación adjunta*. Por lo visto anteriormente el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{I_g} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{Ad_g} & \mathfrak{g} \end{array}$$

es conmutativo. Además, si se denota la diferencial de dicha representación en el elemento neutro por  $ad$

$$Ad_{*e} = ad$$

se obtiene también el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & Aut(\mathfrak{g}) \\ \uparrow \exp & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & End(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Esta nueva aplicación  $ad$  verifica el siguiente teorema

**Teorema 1.12** [35, pag. 115] Sea  $G$  un grupo de Lie y  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie. Sean  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Entonces

$$ad(X)(Y) \equiv ad_X Y = [X, Y]$$

**Definición 1.13** Sea  $H$  un subgrupo de Lie de un grupo de Lie  $G$ . Un objeto definido sobre el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  es  $Ad(H)$ -invariante si se conserva por  $Ad(h) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ,  $\forall h \in H$ .

**Proposición 1.14** [22, tomo II, pag. 201] Si una forma bilineal simétrica  $B$  sobre  $\mathfrak{g}$  es  $Ad(H)$ -invariante, entonces

$$B([X, Z], Y) = B(X, [Z, Y]), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall Z \in \mathfrak{h}$$

**Definición 1.15** Una métrica invariante a la izquierda sobre un grupo de Lie  $G$  es una métrica sobre  $G$  tal que las traslaciones a la izquierda  $L_g$  son isometrías para todo  $g \in G$ . Se denomina métrica invariante a la derecha si las traslaciones a la derecha  $R_g$  son isometrías para todo  $g \in G$ . Finalmente si una métrica es invariante a la izquierda y a la derecha simultáneamente se dice que es una métrica bi-invariante.

**Proposición 1.16** [2, pag. 59 y ss.] Sea  $G$  un grupo de Lie conexo y compacto dotado de un tensor métrico,  $g$ , invariante a la izquierda. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $g$  es invariante a la derecha (bi-invariante).
2.  $g$  es  $Ad(G)$ -invariante.
3. La aplicación  $\iota : G \rightarrow G$ , dada por  $\iota(a) = a^{-1}$  es una isometría.
4.  $\langle X, [Y, Z] \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle$ , para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .
5.  $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ , para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .
6. Las geodésicas de  $G$  partiendo de  $e$  son subgrupos uniparamétricos de  $G$ .

Sobre cada álgebra de Lie existe definida de forma natural una forma bilineal simétrica, llamada *forma de Killing*, y que viene dada únicamente en términos de la aplicación  $ad$ , por lo que por el Teorema (1.12) sólo dependerá del corchete de Lie del álgebra.

**Definición 1.17** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y sean  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ . Entonces la forma de Killing,  $B$ , está dada por*

$$B(X, Y) = \text{traza}(ad_X \circ ad_Y)$$

**Teorema 1.18** [20, pag. 20] *Sea  $G$  un grupo de Lie conexo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  semisimple; es decir, con forma de Killing  $B$  no degenerada. Entonces,  $G$  es compacto si y sólo si  $B$  es definida negativa.*

Algunas de las propiedades de la forma de Killing vienen recogidas en el siguiente lema

**Lema 1.19** [2, pag. 32 y ss.] *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie,  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  y  $B$  la forma de Killing. Entonces:*

1.  $B(\sigma X, \sigma Y) = B(X, Y)$  para cada  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ .
2.  $B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z])$ .
3. Si  $G$  es compacto, conexo y con álgebra de Lie semisimple, entonces  $-B$  es bi-invariante.

### 1.3. Espacios homogéneos

Una *variedad homogénea* es una variedad  $M$  sobre la que actúa a la izquierda un grupo de Lie  $G$  de forma transitiva; es decir, para cualesquiera  $p, q \in M$  existe un elemento  $g \in G$  tal que  $gp = q$ . Por tanto, una variedad homogénea puede identificarse con el espacio cociente  $G/H$ , donde  $H = \{g \in G | go = o\}$  es el *subgrupo de isotropía* de un punto  $o \in M$ , por ejemplo  $o = eH$ . Se deduce de su definición que el subgrupo  $H$  es un subgrupo cerrado pero no necesariamente conexo. Recíprocamente, cualquier subgrupo cerrado  $H$  de un grupo de Lie  $G$  define una variedad homogénea  $M = G/H$  tal que la proyección natural de  $G$  sobre  $G/H$  es diferenciable.

**Definición 1.20**  $M = G/H$  se dice

1. *espacio homogéneo reductivo si el álgebra de Lie de  $G$ ,  $\mathfrak{g}$ , admite una descomposición en subespacios vectoriales  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ , tal que  $Ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ . Derivando en esta última condición se deduce que  $ad_{\mathfrak{h}}\mathfrak{m} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$  donde  $\mathfrak{h}$  es el álgebra de Lie de  $H$ ; el recíproco es cierto si  $H$  es un subgrupo conexo.*

*Si el subgrupo  $H$  es compacto una descomposición de este tipo siempre existe ya que es posible tomar  $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$  con respecto a un producto interior  $Ad$ -invariante sobre  $\mathfrak{g}$ .*

2. espacio homogéneo de Riemann si  $M$  es una variedad de Riemann tal que la métrica,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , es invariante para la acción de  $G$  sobre  $G/H$  dada por  $T_r(sH) = rsH, \forall r, s \in G$ ; es decir, para cada  $r \in G$  el difeomorfismo  $T_r$  es una isometría, o equivalentemente,  $\langle X_o, Y_o \rangle = \langle T_r(X_o), T_r(Y_o) \rangle$  para cualesquiera  $X, Y \in T_o(G/H)$ . Una métrica con esta propiedad se denomina métrica  $G$ -invariante.

3. espacio homogéneo de Riemann naturalmente reductivo si  $G/H$ , con una métrica invariante por  $H$ , admite una descomposición  $Ad(H)$ -invariante  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$  verificando la igualdad

$$\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z \rangle + \langle Y, [X, Z]_{\mathfrak{m}} \rangle = 0$$

4. espacio homogéneo de Riemann normal si la métrica en  $G/H$  está inducida por la existencia de un producto interior definido positivo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en  $\mathfrak{g}$  verificando

$$\langle [X, Y], Z \rangle = \langle X, [Y, Z] \rangle$$

$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ , tal que si  $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  es el complemento ortogonal de  $\mathfrak{h}$ , entonces la descomposición  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  es reductiva. Dicha métrica resulta ser invariante por la acción de  $G$  y se denomina normal.

5. espacio homogéneo simétrico o, simplemente, espacio simétrico si es un espacio homogéneo naturalmente reductivo y además verifica que  $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ . Los espacios simétricos también se caracterizan por ser aquellos en los que las geodésicas generadas por un campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  son las mismas que las generadas por el campo  $-X$ .

6. espacio simétrico de rango 1 si es un espacio simétrico tal que la dimensión de la mayor subálgebra abeliana es 1; es decir, si  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$  es una subálgebra tal que  $[u, v] = 0, \forall u, v \in \mathfrak{p}$ ; entonces  $\dim \mathfrak{p} = 1$ .

En lo sucesivo los espacios objeto de estudio serán espacios homogéneos reductivos. En tales espacios es posible identificar  $\mathfrak{m}$  con el espacio tangente  $T_oM$  en el punto  $o = eH$  mediante

$$\mathfrak{m} \ni X \leftrightarrow X_o^* = \frac{d}{dt}|_{t=0} (\text{expt}X)_o$$

donde  $\text{expt}X$  es el subgrupo uniparamétrico de  $G$  generado por  $X$ .

Es bien conocido [22, tomo II, pag. 196] que en los espacios homogéneos reductivos  $M = G/H$  existe una correspondencia biyectiva entre las métricas  $G$ -invariantes,  $g$ , y los productos escalares no degenerados,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $Ad(H)$ -invariantes sobre  $\mathfrak{m}$ ; es decir, tales que  $\langle X, Y \rangle = \langle Ad(H)X, Ad(H)Y \rangle$  para cualesquiera  $X, Y \in \mathfrak{m}$ . Dicha correspondencia está dada por la siguiente expresión:

$$\langle X, Y \rangle = g_o(X_o^*, Y_o^*), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$$

A su vez, si dicha métrica definida sobre el espacio homogéneo es la restricción de la métrica bi-invariante existente en el grupo de Lie  $G$ , entonces  $M = G/H$  es un espacio homogéneo naturalmente reductivo.

Por otra parte, en virtud del diagrama 1.5 se tiene que para cada  $h \in H$  existe una correspondencia biyectiva entre las conexiones lineales  $G$ -invariantes,  $\nabla$ , sobre  $M$  y las aplicaciones lineales

$$\Lambda_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \longrightarrow \text{End}(\mathfrak{m})$$

tales que

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}(\text{Ad}_h(X)) = \text{Ad}(\text{Ad}_h)(\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)); \quad X \in \mathfrak{m}, h \in H.$$

Dicha relación está dada por la siguiente expresión:

$$(\nabla_{X^*} Y^*)_o = -([X, Y]_{\mathfrak{m}})_o^* + (\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Y)_o^*$$

Además, tomando la forma bilineal simétrica  $\text{Ad}(H)$ -invariante en  $\mathfrak{m}$  definida anteriormente, se tiene que si  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita de  $g$  y  $\Lambda_{\mathfrak{m}}$  su endomorfismo asociado, entonces:

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Y = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y); \quad X, Y \in \mathfrak{m}$$

donde  $U : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}$  es la forma bilineal simétrica dada por:

$$2\langle U(X, Y), Z \rangle = \langle X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}} \rangle + \langle [Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y \rangle \quad X, Y, Z \in \mathfrak{m}$$

de donde si  $U = 0$  entonces  $(M = G/H, g)$  es un espacio homogéneo naturalmente reductivo.

Haciendo uso de estos resultados es conocido que el tensor curvatura para la conexión de Levi-Civita en un espacio homogéneo naturalmente reductivo verifica la siguiente igualdad:

$$(R(X, Y)Z)_o = \frac{1}{4}[X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{4}[Y, [X, Z]_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[[X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z]_{\mathfrak{m}} - [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]$$

### 1.3.1. Representación de isotropía

La *representación de isotropía* de  $G/H$  (o simplemente de  $H$ ) es el homomorfismo  $\alpha : H \longrightarrow \text{Gl}(\mathfrak{m})$  dado por  $\alpha(h)(X) = \text{Ad}_h X$ ,  $X \in \mathfrak{m}$ . La aplicación

$$\begin{aligned} L : \mathfrak{m} &\longrightarrow T_{eH}(G/H) \\ X &\mapsto (\pi \circ \exp_X)'(0) = \pi_{*e}(X_e) \end{aligned}$$

convierte el diagrama

$$(1.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{m} & \xrightarrow{\text{Ad}_h} & \mathfrak{m} \\ \downarrow L & & \downarrow L \\ T_{eH}(G/H) & \xrightarrow{(T_h)_{*o}} & T_{eH}(G/H) \end{array}$$

en conmutativo; es decir

$$(T_h)_{*o} \circ L = L \circ \alpha(h) (= L \circ Ad_h),$$

por lo que ambas representaciones son equivalentes.

Por ser  $G$  conexo la acción de  $G$  conserva la orientación, por tanto la imagen de la representación de isotropía  $\alpha$  está contenida en  $SO(T_oM) \approx SO(\mathfrak{m})$ .

## 1.4. Espacios fibrados

### 1.4.1. Espacios fibrados principales

**Definición 1.21** Una variedad diferenciable  $P$  sobre la que actúa diferenciablemente a la derecha un grupo de Lie verificando las siguientes condiciones

1. Existe una aplicación diferenciable de  $P$  sobre una variedad diferenciable  $M$

$$\pi : P \longrightarrow M$$

tal que  $\forall p \in P$

$$\pi^{-1}(\pi(p)) = pG$$

2.  $\forall x_0 \in M$  existe un entorno  $U$  de  $x_0$  en  $M$  y un difeomorfismo

$$h : U \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

verificando  $\forall x \in U; a, b \in G$

$$i) h(x, ab) = h(x, a)b.$$

$$ii) \pi(h(x, a)) = x$$

se denomina espacio fibrado principal localmente trivial con grupo  $G$  o, simplemente, espacio fibrado principal con grupo  $G$ ; y se denota por  $P(M, G)$ . La variedad  $P$  se llama espacio total o espacio fibrado,  $M$  espacio base y  $G$  grupo de estructura. Además se verifica que

$$\dim(P) = \dim(M) + \dim(G).$$

**Ejemplo 1.22** Sea  $M$  una variedad diferenciable. El espacio

$$LM = \bigcup_{x \in M} L_x M$$

donde  $L_x M$  es el conjunto de referencias lineales de  $T_x M$ ; es decir, el conjunto de bases ordenadas de  $T_x M$ , es un espacio fibrado principal con grupo de estructura  $Gl(n, \mathbb{R})$  y espacio base  $M$ . Dicho fibrado principal se conoce como el fibrado principal de las referencias lineales de  $M$ .

### 1.4.2. Fibrados asociados

Sea  $P(M, G)$  un espacio fibrado principal y  $F$  una variedad diferenciable sobre la que  $G$  actúa diferenciablemente a la izquierda

$$\begin{aligned} G \times F &\longrightarrow F \\ (g, \xi) &\mapsto g\xi. \end{aligned}$$

Esta acción induce la acción diferenciable

$$\begin{aligned} (P \times F) \times G &\longrightarrow P \times F \\ ((p, \xi), g) &\mapsto (pg, g^{-1}\xi) \end{aligned}$$

En  $P \times F$  definimos la relación de equivalencia

$$(q, \eta) \sim (p, \xi) \iff \exists g \in G | (q, \eta) = (p, \xi)g = (pg, g^{-1}\xi)$$

es decir

$$(q, \eta) \sim (p, \xi) \iff g \in G \text{ tal que } \begin{cases} q = pg \\ \eta = g^{-1}\xi \end{cases}$$

**Definición 1.23** *El espacio cociente*

$$E = \frac{P \times F}{\sim} \equiv P \times_G F = \{[p, \xi] \in P \times F : p \in P, \xi \in F\}$$

donde  $[p, \xi] = \{(pg, g^{-1}\xi) | g \in G\}$  se denomina espacio fibrado asociado a  $P(M, G)$ .

**Ejemplo 1.24** *Sea  $LM$  el fibrado principal de las referencias lineales de  $M$  y sea la acción*

$$\begin{aligned} Gl(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, \xi) &\mapsto A\xi. \end{aligned}$$

*El fibrado asociado*

$$E = \frac{LM \times \mathbb{R}^n}{\sim} = LM \times_{Gl(n, \mathbb{R}^n)} \mathbb{R}^n$$

*es isomorfo al fibrado tangente.*

## 1.5. El operador de Dirac clásico

A principios del siglo veinte surgieron dos corrientes diferentes para intentar describir el comportamiento de los sistemas físicos a “pequeña escala”. Por una parte la mecánica cuántica, basada en la ecuación de Schrodinger

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi = 0, \quad \psi : \mathbb{R} \times O \longrightarrow \mathbb{C}$$

donde  $O \subset \mathbb{R}^3$  es un conjunto abierto dotado con las coordenadas  $x, y, z$ ; y  $\Delta$  es el Laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Y por otro lado la descripción relativista, que consiste en una versión de la ecuación de onda (aquí para masa nula)

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0, \quad u : \mathbb{R} \times O \longrightarrow \mathbb{R}.$$

A finales de la segunda década del siglo XX el físico inglés Paul Adrien Maurice Dirac quería obtener una forma de compatibilizar el carácter relativista de la ecuación de onda con el carácter cuántico de la ecuación de Schrodinger. Dirac observó que la principal característica de la ecuación de Schrodinger era ser de primer orden en tiempo, por lo que teniendo en cuenta una cierta equivalencia entre las coordenadas espaciales y las temporales proporcionada por la teoría de la relatividad especial de Einstein, definió una ecuación diferencial de primer orden en todas las variables similar a la de Schrodinger

$$\frac{i}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + D\psi = 0, \quad \psi : \mathbb{R} \times O \longrightarrow B$$

donde el operador  $D$  está dado por  $D\psi = \gamma_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial \psi}{\partial z}$ , los coeficientes  $\gamma_i$  son constantes y el espacio donde toman las imágenes las aplicaciones  $\psi$ ,  $B$ , en un principio es desconocido. El operador resultante se llama *operador de Dirac Euclídeo*.

Como el operador de Dirac Euclídeo es de primer orden consideró que el toque relativista que le faltaba a la ecuación lo conseguiría si garantizaba que al aplicar dos veces el operador

$$\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + D$$

es decir, si al calcular

$$\left\{ \left( \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + D \right) \circ \left( \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + D \right) \right\} (\psi)$$

sobre cada una de sus soluciones se obtenía la ecuación de onda. Se puede comprobar que esto es equivalente a pedir que el operador  $D$  satisfaga la igualdad  $D^2 = -\Delta$  y por tanto es equivalente a restringir los posibles valores para los coeficientes  $\gamma_i$ , resultando que han de verificar la relación

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = -2\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

También se puede comprobar que no existen números complejos verificando esta relación. No obstante, sí existen matrices cuadradas de diferentes órdenes que las verifican. Las más simples de tales matrices (aunque no son únicas) tienen orden dos,

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

y se denominan *matrices de Pauli*.

Con esta elección para los coeficientes  $\gamma_i$ , las funciones  $\psi$  sobre las que se aplica el operador de Dirac no pueden tomar valores reales ni complejos, sino que deben ser funciones con valores en  $\mathbb{C}^2$ . Dichas funciones se denominan *campos de espinores* o *campos espinoriales*, ya que fueran considerados previamente por Wolfgang Ernst Pauli con el fin de obtener un modelo para el *spin* del electrón, y el espacio complejo  $B = \mathbb{C}^2$  en el que toman valores es el *espacio de espinores de  $\mathbb{R}^3$* .

En lo sucesivo se considerarán los campos de espinores estáticos; es decir, las funciones definidas en un conjunto abierto  $O \subset \mathbb{R}^3$  tomando sus valores en  $\mathbb{C}^2$ ,  $\psi : O \rightarrow \mathbb{C}^2$ .

En la definición del operador de Dirac Euclídeo los tres ejes  $x, y, z$  no juegan un papel especial, por lo que es posible utilizar una referencia ortonormal arbitraria  $\{e_1, e_2, e_3\}$  y definir

$$D = \gamma(e_1)\nabla_{e_1} + \gamma(e_2)\nabla_{e_2} + \gamma(e_3)\nabla_{e_3}$$

donde  $\nabla$  denota la derivada direccional usual y  $\gamma$  representa una forma de asociar una matriz de Pauli a cada vector  $v \in \mathbb{R}^3$ ; es decir,  $\gamma : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{C})$  es la aplicación lineal dada por

$$\begin{aligned} \gamma(v) &= \gamma(v_1, v_2, v_3) \\ &= v_1\gamma_1 + v_2\gamma_2 + v_3\gamma_3 \\ &= \begin{pmatrix} iv_1 & v_2 + iv_3 \\ -v_2 + iv_3 & -iv_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto  $\gamma$  toma sus valores en el conjunto de matrices hermíticas  $2 \times 2$  de traza nula resultando un isomorfismo de espacios vectoriales entre  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathfrak{su}(2)$ . Además,  $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$  se tiene

$$\begin{aligned} \det\gamma(u) &= |u|^2 \\ \gamma(u)\gamma(v) &= -\langle u, v \rangle Id_{M_2(\mathbb{C})} + \gamma(u \wedge v) \end{aligned}$$

donde  $\wedge$  denota el producto vectorial usual de  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto la aplicación

$$\gamma : \mathbb{R}^3 (= [\mathfrak{o}(3), \wedge]) \rightarrow (\mathfrak{su}(2), \frac{1}{2}[\cdot, \cdot]),$$

donde  $\mathfrak{o}(3)$  es el álgebra de Lie de  $O(3)$ , es un isomorfismo de álgebras de Lie. Entonces  $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$

$$\gamma(u)\gamma(v) + \gamma(v)\gamma(u) = -2\langle u, v \rangle Id_{M_2(\mathbb{C})}$$

que es la misma relación de anticonmutatividad que verifican las matrices de Pauli.

Sea  $A \in SU(2)$ , entonces  $A\gamma(v)\bar{A}^t \in \mathfrak{su}(2)$  para cualquier vector  $v \in \mathbb{R}^3$ . Como  $\gamma$  es una biyección existirá una única matriz  $\rho(A) \in M_3(\mathbb{R})$  tal que  $\forall v \in \mathbb{R}^3$

$$\gamma(\rho(A)v) = A\gamma(v)\bar{A}^t$$

Se tiene así una aplicación  $\rho : SU(2) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$  que conserva el producto escalar

$$\begin{aligned} |\rho(A)v|^2 &= \det(A\gamma(v)\bar{A}^t) \\ &= \det(\gamma(v)) \\ &= |v|^2 \end{aligned}$$

y el producto vectorial

$$\begin{aligned}
\gamma(\rho(A)(u \wedge v)) &= A\gamma(u \wedge v)\overline{A}^t \\
&= \frac{1}{2}A[\gamma(u), \gamma(v)]\overline{A}^t \\
&= \frac{1}{2}[A\gamma(u)\overline{A}^t, A\gamma(v)\overline{A}^t] \\
&= \frac{1}{2}[\gamma(\rho(A)u), \gamma(\rho(A)v)] \\
&= \gamma((\rho(A)u) \wedge (\rho(A)v)).
\end{aligned}$$

Pero esto significa que  $\rho(A)$  es una transformación ortogonal que conserva la orientación del espacio Euclídeo, y por tanto  $\rho(A) \in SO(3)$ . Además como

$$\begin{aligned}
\gamma(\rho(AB)u) &= AB\gamma(u)\overline{AB}^t \\
&= AB\gamma(u)\overline{B}^t\overline{A}^t \\
&= A\gamma(\rho(B)u)\overline{A}^t \\
&= \gamma(\rho(A)\rho(B)u)
\end{aligned}$$

resulta que  $\gamma$  es un homomorfismo de grupos entre  $SU(2)$  y  $SO(3)$ .

Es bien conocido que cualquier rotación  $R \in SO(3)$  puede descomponerse como producto de dos simetrías ortogonales,  $R = s_1 \circ s_2$ . Sean  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  vectores unitarios perpendiculares a los planos de simetría de  $s_1$  y  $s_2$  respectivamente y  $A = \gamma(v_1)\gamma(v_2)$ . Entonces

$$\begin{aligned}
A\overline{A}^t &= \gamma(v_1)\gamma(v_2)\gamma(v_2)\gamma(v_1) \\
&= |v_1|^2|v_2|^2 Id_{M_2(\mathbb{C})} \\
&= Id_{M_2(\mathbb{C})}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\gamma(v_1)\det\gamma(v_2) \\
&= |v_1|^2|v_2|^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que  $A \in SU(2)$ . Por otra parte, para cualquier  $v \in \mathbb{R}^3$  se tiene que

$$\begin{aligned}
\gamma(\rho(\gamma(v_1))w) &= \gamma(v_1)\gamma(w)\overline{\gamma(v_1)}^t \\
&= -\gamma(v_1)\{-\gamma(v_1)\gamma(w) - 2\langle v_1, w \rangle Id_{M_2(\mathbb{C})}\} \\
&= \gamma(-w + \langle v_1, w \rangle v_1) \\
&= \gamma(-s_1(w))
\end{aligned}$$

Análogamente,  $\gamma(\rho(\gamma(v_2))w) = \gamma(-s_2(w))$ . Por tanto se tiene que

$$\rho(A) = s_1 \circ s_2 = R$$

resultando  $\rho$  sobreyectiva. Además  $\rho$  no puede ser biyectiva puesto que lleva a  $Id_{M_2(\mathbb{C})}$  y a  $-Id_{M_2(\mathbb{C})}$ , ambas en  $SU(2)$ , en  $Id_{M_3(\mathbb{R})}$ . A su vez, cualquier otra matriz  $A \in SU(2)$  en el núcleo de  $\rho$  conmuta con las matrices de Pauli ya que  $\forall v \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\gamma(v) &= \gamma(\rho(A)v) \\ &= A\gamma(v)\bar{A}^t,\end{aligned}$$

de donde se deduce que  $A = Id_{M_2(\mathbb{C})}$  ó  $A = -Id_{M_2(\mathbb{C})}$ . Entonces,  $\rho$  es un epimorfismo continuo dos a uno y por tanto un recubrimiento de dos hojas.

Sea  $B_\theta$  la rotación de ángulo  $\theta$  en torno al eje  $x$ . Variando el parámetro  $\theta$  se obtiene un camino continuo en el grupo ortogonal  $SO(3)$  que se supondrá que comienza en el elemento neutro; es decir,  $B_0 = Id_{M_3(\mathbb{R})}$ . El levantamiento de este camino a  $SU(2)$  por el recubrimiento anterior está dado por

$$A_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}.$$

Resulta entonces que cuando  $\theta$  toma los valores entre 0 y  $2\pi$ ,  $B_\theta$  completa una rotación en torno al eje  $x$ , mientras que el levantamiento  $A_\theta$  va de la identidad  $A_0 = Id_{M_2(\mathbb{C})}$  a su opuesto  $A_{2\pi} = -Id_{M_2(\mathbb{C})}$ . Es decir, cuando se rotan las coordenadas espaciales  $2\pi$  radianes los vectores también giran  $2\pi$  radianes quedando invariantes, mientras que los espinores se transforman en sus opuestos.

Cuando se quieren traducir todos estos conceptos a una variedad  $M$  arbitraria, de dimensión tres, no llana y que se supondrá orientada para poder hablar de su fibrado principal de las referencias ortonormales orientadas; los conjuntos abiertos  $O$  en el espacio Euclídeo  $\mathbb{R}^3$  donde los espinores estaban definidos son ahora considerados como los dominios donde las cartas de  $M$  toman sus valores. Como estos campos de espinores son funciones diferenciables de  $O$  en el espacio vectorial  $\mathbb{C}^2$ , se pueden considerar como las expresiones locales con estas cartas de las secciones de un fibrado vectorial complejo construido sobre  $M$  con fibra tipo  $\mathbb{C}^2$ , y que se denotará por  $S$ . Debido a la extraña forma en la que los espinores cambian cuando se realiza un cambio de coordenadas se deduce que no es posible asociarle al fibrado vectorial  $S$  el fibrado principal  $SO(M)$  de las referencias ortonormales orientadas positivas de  $M$ , el cual tiene como grupo de estructura el grupo  $SO(3)$ . No obstante, bajo ciertas restricciones topológicas (que en dimensión tres siempre se cumplen) sí es posible asociarle un fibrado principal con grupo de estructura  $SU(2)$ .

La posibilidad de asociar una matriz de Pauli a cualquier vector tangente a  $M$ , puede ser traducido en este nuevo lenguaje de fibrados como la existencia de una aplicación fibrada  $\gamma : TM \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(S)$  verificando las relaciones

$$\gamma(u)\gamma(v) + \gamma(v)\gamma(u) = -2\langle u, v \rangle Id_S$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto hermítico definido en el fibrado  $S$  inducido por el producto hermítico de  $\mathbb{C}^2$ .

El operador de Dirac  $D$  se define en este nuevo lenguaje como el operador diferencial de primer orden dado por

$$D = \sum_{i=1}^3 \gamma(e_i) \nabla_{e_i}$$

donde  $\{e_1, e_2, e_3\}$  es una base ortonormal cualquiera del espacio tangente a  $M$  y  $\nabla$  representa la derivada covariante en  $S$  inducida por el levantamiento de la conexión de Levi Civita al nuevo fibrado principal.

Análogamente, como se verá a lo largo de este trabajo, es posible extender de una forma más laboriosa todos estos conceptos a variedades de Riemann de dimensión arbitraria.

## Capítulo 2

# Álgebras de Clifford

Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo de característica distinta de 2, por ejemplo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ;  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{K}$ ,  $B$  una forma bilineal simétrica no degenerada sobre  $V$  y  $Q$  su forma cuadrática asociada,  $Q(x) = B(x, x)$ ,  $\forall x \in V$ .

**Definición 2.1** El par  $(Cl(V, Q), j)$  es un álgebra de Clifford para  $(V, Q)$  si verifica:

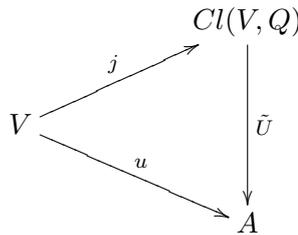
1.  $Cl(V, Q)$  es una  $\mathbb{K}$ -álgebra asociativa con elemento neutro 1.
2.  $j : V \rightarrow Cl(V, Q)$  es una aplicación lineal tal que

$$(2.1) \quad j(v)^2 = -Q(v) \cdot 1$$

para todo  $v \in V$ .

(Por polarización  $j(x)j(y) + j(y)j(x) = -2B(x, y) \cdot 1$ ;  $\forall x, y \in V$ )

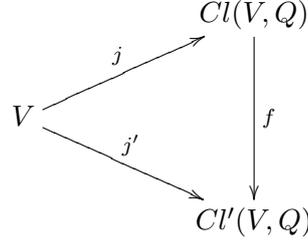
3. Si  $A$  es otra  $\mathbb{K}$ -álgebra asociativa unitaria y  $u : V \rightarrow A$  es una aplicación lineal verificando  $u(v)^2 = -Q(v) \cdot 1$ , entonces existe un único homomorfismo de álgebras  $\tilde{U} : Cl(V, Q) \rightarrow A$  tal que  $u = \tilde{U} \circ j$ .



**Proposición 2.2**

1. Para cualquier par  $(V, Q)$  existe su álgebra de Clifford  $(Cl(V, Q), j)$  asociada.

2. Si  $(Cl(V, Q), j)$  y  $(Cl'(V, Q), j')$  son álgebras de Clifford para el mismo par  $(V, Q)$ , entonces existe un isomorfismo de álgebras  $f : Cl(V, Q) \rightarrow Cl'(V, Q)$  verificando  $f \circ j = j'$



### Demostración:

1. Todo espacio vectorial  $V$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  genera un álgebra asociativa unitaria denominada *álgebra tensorial de  $V$* ,  $T(V)$ , que está dada por la siguiente expresión

$$T(V) = \sum_{r=0}^{\infty} \otimes^r V$$

donde  $\otimes^0 V = \mathbb{K}$  y  $\otimes^r V$  es el  $r$ -ésimo producto tensorial de  $V$  consigo mismo. Sean  $X = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x_r$ ,  $c_r \in \mathbb{K}$ ,  $x_r = v_1 \otimes \dots \otimes v_r$ ,  $v_s \in V$ ; y  $Y = \sum_{r=0}^{\infty} d_r y_r$ ,  $d_r \in \mathbb{K}$ ,  $y_r = w_1 \otimes \dots \otimes w_r$ ,  $w_s \in V$ . El producto en  $T(V)$ ,  $\bar{\otimes}$ , que es asociativo pero no conmutativo, está dado por

$$X \bar{\otimes} Y = \left( \sum_{r=0}^{\infty} c_r x_r \right) \bar{\otimes} \left( \sum_{r=0}^{\infty} d_r y_r \right) = \sum_{\substack{p=0 \\ r+s=p}}^{\infty} c_r d_s x_r \otimes y_s$$

Los elementos  $\psi \in T(V)$  tales que  $\psi \in \otimes^s V$  se denominan *elementos propios o homogéneos de grado  $s$* . En general, para todo  $s \geq 0$  existe una aplicación lineal inyectiva  $i_s : \otimes^s V \rightarrow T(V)$  y por lo tanto en particular existirá una inyección  $i_0 : \mathbb{K} \rightarrow T(V)$ . La unidad para el producto en  $T(V)$ ,  $1$ , es entonces la image  $i_0(1)$ , siendo en este caso  $1$  el elemento neutro de  $\mathbb{K}$ . Es importante destacar que aunque se está denotando de igual forma la unidad para el álgebra  $T(V)$  y para el cuerpo  $\mathbb{K}$ , en realidad no son lo mismo aunque si son identificables en virtud de la inyección  $i_0$ . Más generalmente, a raíz de las inyecciones  $i_s$  se puede identificar los elementos de  $\otimes^s V$  con sus imágenes en  $T(V)$ .

Sea el ideal bilátero

$$I(Q) = \langle \{v \otimes v + Q(v) \cdot 1 : v \in V\} \rangle$$

y se considera el álgebra cociente  $T(V)/I(Q)$  que también es un álgebra asociativa unitaria. Sea  $\pi : T(V) \rightarrow T(V)/I(Q)$  la proyección en el cociente e  $i_1 : V \rightarrow T(V)$  el embebimiento natural anterior de un espacio vectorial en su álgebra tensorial. Componiendo estas dos aplicaciones,  $\pi \circ i_1$ , se obtiene la aplicación lineal

$$j : V \xrightarrow{i_1} T(V) \xrightarrow{\pi} \frac{T(V)}{I(Q)}$$

que, por construcción, verifica  $j(v)^2 = -Q(v) \cdot 1$

Por otra parte, toda aplicación lineal  $u : V \rightarrow A$ , donde  $A$  es un álgebra cualquiera, se puede extender a un homomorfismo de álgebras  $U : T(V) \rightarrow A$  considerando

$$U(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = u(v_1) \cdot \dots \cdot u(v_k)$$

Si ahora  $u(v)^2 = -Q(v) \cdot 1$ , resulta que  $I(Q) \subset \text{Ker}(U)$  con lo que  $u$  induce un homomorfismo de álgebras  $\bar{U} = T(V)/I(Q) \rightarrow A$  tal que  $u = \bar{U} \circ j$ . Si existiese otro homomorfismo de álgebras  $\bar{U}_1 : T(V)/I(Q) \rightarrow A$  tal que  $u = \bar{U}_1 \circ j$  entonces resultaría que  $u = \bar{U} \circ j = \bar{U}_1 \circ j$  con lo que  $\bar{U}$  y  $\bar{U}_1$  coincidirían en  $j(V) \subset T(V)/I(Q)$ . Como los vectores de  $V$  generan multiplicativamente el álgebra tensorial  $T(V)$ , y por lo tanto también el álgebra  $T(V)/I(Q)$ , las aplicaciones  $\bar{U}$  y  $\bar{U}_1$ , que coinciden en los generadores, resultarían ser iguales.

2. Es consecuencia directa de la propiedad universal de las álgebras de Clifford. □

**Corolario 2.3** *La aplicación lineal  $j : V \rightarrow Cl(V, Q)$  es inyectiva. Además el conjunto  $j(V) \subset Cl(V, Q)$  genera el álgebra de Clifford.*

**Demostración:**

Sea  $j(v) = v + I(Q) \in I(Q)$ ; es decir, que  $v \in I(Q) \cap V$  y se verá que entonces  $v$  ha de ser el vector 0. Como todo elemento  $\varphi \in I(Q)$  puede escribirse como una suma finita de la siguiente forma

$$\varphi = \sum a_i \otimes (v_i \otimes v_i + Q(v_i)) \otimes b_i$$

donde es posible considerar el caso en que los  $a_i$ 's y los  $b_i$ 's son elementos propios arbitrarios no necesariamente del mismo grado. Sea  $n = \max\{\text{grad } a_i + \text{grad } b_i\}$ . Por tratarse de una suma finita de términos es posible reordenarlos de tal forma que se obtenga la siguiente expresión:

$$\varphi = \sum_{k=0}^n \sum_{\text{grad } a_i + \text{grad } b_i = k} a_i \otimes (v_i \otimes v_i + Q(v_i)) \otimes b_i$$

donde es posible que para algún valor  $0 \leq j < n$  no existan términos en la suma tal que  $\text{grad } a_i + \text{grad } b_i = j$ , en cuyo caso se tomará el valor 0 para ese sumando. Procediendo

ahora por inducción en  $\text{grad } a_i + \text{grad } b_i$  se obtendrá el carácter inyectivo: para  $\text{grad } a_i + \text{grad } b_i = 0$  resulta que  $a_i, b_i \in \mathbb{K}$  por lo que

$$\varphi = \sum a_i b_i (v_i \otimes v_i + Q(v_i))$$

es decir, es suma de términos de orden cero y de orden dos, lo cual únicamente es posible si  $\varphi = 0$  por ser un elemento de  $V$ . Por hipótesis de inducción se supone que el resultado es cierto para  $\text{grad } a_i + \text{grad } b_i = n > 0$  y se tiene que si  $\text{grad } a_i + \text{grad } b_i = n + 1$  entonces es posible expresar  $\varphi$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{\text{grad } a_i + \text{grad } b_i = k} a_i \otimes (v_i \otimes v_i + Q(v_i)) \otimes b_i \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ \sum_{\text{grad } a_i + \text{grad } b_i = k} a_i \otimes v_i \otimes v_i \otimes b_i + \sum_{\text{grad } a_i + \text{grad } b_i = k} a_i \otimes Q(v_i) \otimes b_i \right\} \end{aligned}$$

Cuando  $k = n + 1$  el sumando correspondiente a la primera serie interior tiene orden  $n + 3 > 1$  con lo que ha de ser necesariamente nulo, ahora bien, si es nulo quiere decir que o bien  $a_i$  o bien  $b_i$  es nulo, por lo que el término de la segunda serie también ha de ser nulo. Finalmente aplicando la hipótesis de inducción sobre el resto de los sumandos se obtiene el carácter inyectivo.

El hecho de que  $j(V) \subset Cl(V, Q)$  genere el álgebra de Clifford se deduce de forma directa de su construcción.  $\square$

**Observación 2.4** *En lo sucesivo se denotará el álgebra de Clifford asociada al par  $(V, Q)$  por  $Cl(V, Q)$ . En general se considerará el espacio vectorial  $V$  como subespacio de  $Cl(V, Q)$  por lo que los elementos  $j(v) \in Cl(V, Q)$  se denotarán simplemente por  $v$ . También se escribirá frecuentemente la ecuación  $xy + yx = -2B(x, y)$  omitiendo en el término de la derecha la unidad del álgebra. Finalmente cuando se trabaje con productos de Clifford también se omitirá frecuentemente el signo “ $\cdot$ ”.*

Sea  $Cl(V, Q)$  un álgebra de Clifford cualquiera y sea  $u : V \rightarrow Cl(V, Q)$  definida por  $u(v) = -j(v)$ ,  $\forall v \in V$ . Dicha aplicación verifica  $u(v)^2 = (-j(v))^2 = j(v)^2 = -Q(v) \cdot 1$  por lo que aplicando la propiedad universal de las álgebras de Clifford se sabe que existe un único homomorfismo de  $\mathbb{K}$ -álgebras  $\alpha : Cl(V, Q) \rightarrow Cl(V, Q)$  tal que  $(\alpha \circ j)(v) = -j(v)$ ,  $\forall v \in V$ .

$$\begin{array}{ccc} & & Cl(V, Q) \\ & \nearrow j & \downarrow \exists \cdot \alpha \\ V & & \\ & \searrow u & \\ & & Cl(V, Q) \end{array}$$

Además, dicho homomorfismo verifica que  $\alpha^2(j(v)) = \alpha\{(\alpha \circ j)(v)\} = -\alpha(j(v)) = j(v)$ , por lo que  $\alpha^2 = Id$ ; es decir,  $\alpha$  es una involución de  $Cl(V, Q)$ . Ahora bien, por ser  $\alpha^2 = Id$  se sabe que  $\alpha$  tiene asociados los autovalores 1 y  $-1$  con lo que se pueden definir los conjuntos  $Cl^0(V, Q) = \{x \in Cl(V, Q) : \alpha(x) = x\}$  y  $Cl^1(V, Q) = \{x \in Cl(V, Q) : \alpha(x) = -x\}$ , denominados *parte par* y *parte impar* de  $Cl(V, Q)$  respectivamente, verificando:

$$(2.2) \quad Cl(V, Q) = Cl^0(V, Q) \oplus Cl^1(V, Q).$$

Además dichos conjuntos respetan las siguientes relaciones con respecto al producto

	$Cl^0(V, Q)$	$Cl^1(V, Q)$
$Cl^0(V, Q)$	$Cl^0(V, Q)$	$Cl^1(V, Q)$
$Cl^1(V, Q)$	$Cl^1(V, Q)$	$Cl^0(V, Q)$

Un álgebra dotada de una descomposición análoga a la dada en (2.2) y que con respecto al producto verifique las relaciones equivalentes a la tabla anterior se denomina *álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada*. Por lo tanto el homomorfismo  $\alpha$ , denominado *automorfismo principal* de  $Cl(V, Q)$ , dota de una estructura de álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada al álgebra de Clifford  $Cl(V, Q)$ .

Por otra parte, si  $A$  es una  $\mathbb{K}$ -álgebra se puede definir de forma general una nueva álgebra  $\hat{A}$ , que como conjunto es la misma que  $A$ , pero dotada con el producto  $*$  dado por

$$x * y := y \cdot x$$

Sea  $Cl(V, Q)$  el álgebra de Clifford asociada al par  $(V, Q)$  y se considera el álgebra  $A = \widehat{Cl(V, Q)}$ . Para la aplicación lineal

$$V \xrightarrow{j} A = \widehat{Cl(V, Q)}$$

la relación  $j(v) * j(v) = j(v) \cdot j(v) = -Q(v) \cdot 1$  se tiene también en el álgebra  $A$ . Por lo tanto, por la propiedad universal de las álgebras de Clifford existe un único homomorfismo de álgebras

$$t : Cl(V, Q) \longrightarrow \widehat{Cl(V, Q)}$$

tal que

$$(2.3) \quad j(v) = t(j(v)), \quad v \in V$$

El homomorfismo  $t$  de  $Cl(V, Q)$  en si mismo tiene las siguientes propiedades:

**Proposición 2.5** *La aplicación  $t : Cl(V, Q) \rightarrow Cl(V, Q)$  verifica:*

1.  $t$  es lineal.
2.  $t \circ t = Id$ , ( $t$  es una involución).
3.  $t(v) = v; \forall v \in V \subset Cl(V, Q)$

$$4. t(x \cdot y) = t(y)t(x); \forall x, y \in Cl(V, Q)$$

**Demostración:**

Los apartados 1., 2. y 3. son consecuencia directa de la igualdad (2.3). En cuanto al apartado 4. si tomamos  $x, y \in Cl(V, Q)$  resulta que por ser  $t$  homomorfismo

$$t(x \cdot y) = t(x) * t(y) = t(y) \cdot t(x).$$

□

Es decir, toda álgebra de Clifford está dotada de un involución  $\alpha$  y de una anti-involución  $t$ .

## 2.1. Cálculo de la dimensión del álgebra de Clifford

El objetivo ahora es calcular la dimensión del álgebra de Clifford  $Cl(V, Q)$  asociada a un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{K}$  y a una forma cuadrática arbitraria  $Q$ .

Un resultado de la teoría de álgebras nos dice que si se tienen dos álgebras  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas  $A = A^0 \oplus A^1$  y  $B = B^0 \oplus B^1$  existe una tercera álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada denominada *producto tensorial graduado*  $A \hat{\otimes} B$  que como conjunto coincide con  $A \otimes B$  y donde

$$\begin{aligned} (A \hat{\otimes} B)^0 &= (A^0 \otimes B^0) \oplus (A^1 \otimes B^1) \\ (A \hat{\otimes} B)^1 &= (A^0 \otimes B^1) \oplus (A^1 \otimes B^0). \end{aligned}$$

El producto en esta nueva álgebra está dado por:

$$(a \otimes b^j) \hat{\otimes} (a^i \otimes b) = (-1)^{ij} (aa^i) \otimes (b^j b)$$

con  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $a^i \in A^i$  y  $b^j \in B^j$ .

Se utilizará este resultado para resolver el cálculo de la dimensión. Sean  $(V_1, B_1)$  y  $(V_2, B_2)$  dos espacios vectoriales arbitrarios dotados con sendas formas bilineales simétricas arbitrarias. Se define su *suma directa* como el par  $(V, B)$  donde

$$V = V_1 \oplus V_2 \quad B(V_1, V_2) = 0 \quad B|_{V_1 \times V_1} = B_1 \quad B|_{V_2 \times V_2} = B_2$$

y, por tanto, se puede tomar en  $V$  la forma cuadrática  $Q$  asociada a la forma bilineal simétrica  $B$  y con ella el par  $(V, Q)$ .

**Proposición 2.6** *El álgebra de Clifford  $Cl(V, Q)$  es isomorfa al producto tensor  $Cl(V_1, Q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, Q_2)$ , donde  $Q_1$  y  $Q_2$  son las formas cuadráticas asociadas a las formas bilineales simétricas  $B_1$  y  $B_2$  respectivamente.*

**Demostración:**

Si es posible encontrar una aplicación  $u : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow C(Q_1) \hat{\otimes} C(Q_2)$  tal que  $u(v_1 + v_2) =$

$-Q(v_1 + v_2) \cdot 1$ , aplicando el apartado 2 de la Proposición (2.2), se tendrá demostrado la existencia del isomorfismo.

Considerando la aplicación

$$\begin{aligned} u : V_1 \oplus V_2 &\longrightarrow C(Q_1) \hat{\otimes} C(Q_2) \\ v_1 + v_2 &\mapsto v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2 \end{aligned}$$

se puede ver que se verifica dicha propiedad:

$$\begin{aligned} \{u(v_1 + v_2)\}^2 &= (v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2)^2 \\ &= v_1^2 \otimes 1 + v_1 \otimes v_2 - v_1 \otimes v_2 + 1 \otimes v_2^2 \\ &= -(Q_1(v_1) + Q_2(v_2))1 \otimes 1 \\ &= -Q(v_1 + v_2)1 \otimes 1 \end{aligned}$$

por ser  $B(v_1, v_2) = 0$ . Finalmente, como  $1 \otimes 1$  es la unidad para el álgebra  $C(Q_1) \hat{\otimes} C(Q_2)$  se concluye la demostración.  $\square$

Una vez hechas estas consideraciones se demuestra el siguiente resultado.

**Proposición 2.7** *Sea  $V$  un espacio vectorial  $n$  dimensional sobre  $\mathbb{K}$  y  $Q$  una forma cuadrática definida en él. Entonces el espacio vectorial  $Cl(V, Q)$  tiene dimensión  $2^n$  sobre  $\mathbb{K}$ .*

**Demostración:**

Sea  $B$  la forma bilineal simétrica asociada a la forma cuadrática  $Q$ . Por el teorema de Lagrange se sabe que existe una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  para el espacio vectorial  $V$  verificando que su matriz de Gram,  $Gr$ , asociada a  $B$  es una matriz diagonal con la siguiente expresión

$$Gr = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \text{rango}(Gr)$$

En el caso particular en el que se está trabajando; es decir, cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  es posible refinar más la expresión de la matriz de Gram. Para el caso en que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  el teorema de



$$\dim(Cl(V, Q)) = \dim(Cl(V_1, Q_1) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} Cl(V_n, Q_n)) = \prod_{i=1}^n \dim(Cl(V_i, Q_i)) = 2^n.$$

□

Una vez calculada la dimensión del álgebra de Clifford  $Cl(V, Q)$  para poder trabajar con ella ya sólo falta encontrar una base de sus generadores. Para ello se puede establecer el siguiente resultado.

**Proposición 2.8** *Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{K}$ ,  $Q$  una forma cuadrática con  $B$  su forma bilineal simétrica asociada y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  tal que*

$$B(v_i, v_j) = 0, \quad i \neq j.$$

*Entonces el álgebra de Clifford  $Cl(V, Q)$  está generada multiplicativamente por los vectores  $v_1, \dots, v_n \in V \subset Cl(V, Q)$  verificando*

$$v_i^2 = -Q(v_i) \cdot 1, \quad v_i v_j + v_j v_i = 0, \quad i \neq j$$

*En particular, una base para  $Cl(V, Q)$  está formado por los elementos  $v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_s}$ , donde  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq n$  con  $1 \leq s \leq n$ .*

**Demostración:**

Por ser  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V \subset Cl(V, Q)$  generan multiplicativamente  $Cl(V, Q)$ . Además, por tratarse de un álgebra de Clifford, verifican  $v_i^2 = -Q(v_i)$ ; de donde

$$(v_i + v_j)^2 = \begin{cases} v_i^2 + v_i v_j + v_j v_i + v_j^2 \\ -Q(v_i + v_j) = -\{Q(v_i) + Q(v_j) + 2B(v_i, v_j)\} = -\{Q(v_i) + Q(v_j)\} \end{cases}$$

por lo que también verifican la relación  $v_i v_j + v_j v_i = 0$ ,  $i \neq j$ .

Finalmente, los  $2^n$  elementos linealmente independientes  $v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_s}$ ,  $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq n$ ,  $1 \leq s \leq n$  generan  $Cl(V, Q)$  linealmente y como  $\dim(Cl(V, Q)) = 2^n$  han de ser una base. □

**Ejemplo 2.9** *Sea  $V = \mathbb{R}$ ,  $e_1 = 1$  y la forma cuadrática  $Q(xe_1) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces,  $Cl(V, Q)$  está generada como espacio vectorial por la base  $\{1, e_1\}$ , donde*

$$e_1^2 = -1.$$

*Considerando el homomorfismo biyectivo*

$$\begin{array}{ccc} \mu : Cl(V, Q) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ 1 & \mapsto & \mu(1) = 1 \\ e_1 & \mapsto & \mu(e_1) = i \end{array}$$

y aplicando la propiedad de universalidad de las álgebras de Clifford resulta que  $Cl(\mathbb{R}, Q)$  es isomorfa al álgebra de los números complejos  $\mathbb{C}$ .

**Ejemplo 2.10** Sea  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $Q(x) = \|x\|^2$  la norma usual de  $\mathbb{R}^2$  y  $\{e_1, e_2\}$  su base canónica. Entonces  $Cl(V, Q) \approx \mathbb{H}$  es el álgebra de los cuaterniones. Para ello, se sabe que  $Cl(V, Q)$  como espacio vectorial está generada por los elementos  $\{1, e_1, e_2, e_1 \cdot e_2\}$  verificando las relaciones

$$e_1^2 = e_2^2 = -1, \quad e_1 e_2 = -e_2 e_1.$$

Si ahora se representa por

$$i := e_1, \quad j := e_2, \quad k := e_1 \cdot e_2$$

las relaciones entre ellos tienen las siguientes expresiones

$$i \cdot j = k, \quad j \cdot k = i, \quad k \cdot i = j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Como a su vez  $\dim_{\mathbb{R}}(Cl(V, Q)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$  aplicando nuevamente la propiedad de universalidad de las álgebras de Clifford se obtiene que  $Cl(\mathbb{R}^2, Q)$  es isomorfa al álgebra de los cuaternios  $\mathbb{H}$ .

## 2.2. Representación compleja de las álgebras de Clifford

Las álgebras matriciales son las álgebras más fáciles con las que uno puede trabajar o por lo menos con las que uno está más acostumbrado a hacerlo. Por ello, en esta sección el objetivo será describir un método general de asociar a determinadas álgebras de Clifford una subálgebra matricial de los endomorfismos de un cierto espacio vectorial  $\Delta_n$ .

En los resultados vistos hasta ahora se han estudiado propiedades de las álgebras de Clifford en espacios vectoriales arbitrarios dotados con formas cuadráticas también arbitrarias, pero en esta sección se estudiarán las tres álgebras de Clifford siguientes

$$\begin{aligned} Cl(n) &= Cl(\mathbb{R}^n, x_1^2 + \dots + x_n^2) && \text{Álgebra de Clifford sobre } \mathbb{R}^n \text{ asociada a la} \\ &&& \text{forma cuadrática definida positiva.} \\ Cl'(n) &= Cl(\mathbb{R}^n, -x_1^2 - \dots - x_n^2) && \text{Álgebra de Clifford sobre } \mathbb{R}^n \text{ asociada a la} \\ &&& \text{forma cuadrática definida negativa.} \\ Cl^c(n) &= Cl(\mathbb{C}^n, z_1^2 + \dots + z_n^2) && \text{Álgebra de Clifford sobre } \mathbb{C}^n \text{ asociada a la} \\ &&& \text{forma cuadrática compleja.} \end{aligned}$$

Obsérvese que dentro de las álgebras de Clifford sobre el cuerpo  $\mathbb{C}$  no se hacen distinciones entre la forma cuadrática definida positiva  $(\mathbb{C}, z_1^2 + \dots + z_n^2)$  y la forma cuadrática definida negativa  $(\mathbb{C}, -z_1^2 - \dots - z_n^2)$  debido a que ambas son equivalentes.

En la línea de asociarle álgebras matriciales a estas álgebras de Clifford se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 2.11**

1. Si  $n = 2k$  entonces

$$Cl^c(n) \approx \underbrace{M_2(\mathbb{C}) \otimes \dots \otimes M_2(\mathbb{C})}_{k \text{ veces}} = End(\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}_{k \text{ veces}}) = End(\mathbb{C}^{2^k})$$

Explícitamente el isomorfismo está dado por:

$$e_j \mapsto E \otimes \dots \otimes E \otimes g_{\alpha(j)} \otimes \underbrace{T \otimes \dots \otimes T}_{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor \text{ veces}}$$

donde

$$\alpha(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ es impar} \\ 2 & \text{si } j \text{ es par} \end{cases}$$

2. Si  $n = 2k + 1$  entonces

$$Cl^c(n) \approx \underbrace{\{M_2(\mathbb{C}) \otimes \dots \otimes M_2(\mathbb{C})\}}_{k \text{ veces}} \oplus \underbrace{\{M_2(\mathbb{C}) \otimes \dots \otimes M_2(\mathbb{C})\}}_{k \text{ veces}} = End(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus End(\mathbb{C}^{2^k})$$

De forma explícita el isomorfismo está dado por:

$$e_j \mapsto (E \otimes \dots \otimes E \otimes g_{\alpha(j)} \otimes \underbrace{T \otimes \dots \otimes T}_{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor \text{ veces}}, E \otimes \dots \otimes E \otimes g_{\alpha(j)} \otimes \underbrace{T \otimes \dots \otimes T}_{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor \text{ veces}})$$

para  $1 \leq j \leq 2k$ , y

$$e_{2k+1} \mapsto (iT \otimes \dots \otimes T, -iT \otimes \dots \otimes T).$$

La demostración de esta proposición vendrá dada como conclusión de una sucesión de resultados que se verán a continuación.

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  dotado con una forma cuadrática  $Q$ . Sobre el complejo de  $V$ ,  $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ , se define la *forma cuadrática complejificada de  $Q$* ,  $Q_{\mathbb{C}}$ , como  $Q_{\mathbb{C}}(v_1 \otimes z) = Q(v_1)z^2$ . A su vez, si  $A$  es un álgebra real cualquiera entonces su complejificada  $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  vuelve a ser un álgebra, en este caso compleja, considerando para ello el producto

$$(a_1 \otimes z) \cdot (a_2 \otimes z_2) = (a_1 a_2) \otimes (z_1 z_2)$$

**Lema 2.12** Sea  $Q$  una forma real cuadrática sobre un espacio vectorial real  $V$  y sean  $Q_{\mathbb{C}}$  y  $V_{\mathbb{C}}$  sus complejificados. Entonces

$$Cl(V_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}}) \approx Cl(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

**Demostración:**

El álgebra  $Cl(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  es un álgebra asociativa pues es producto tensor de álgebras asociativas. Además se trata de un álgebra unitaria cuya unidad es  $1 \otimes 1$  donde el primer 1 representa la unidad del álgebra de Clifford  $Cl(V, Q)$  y el segundo 1 es la unidad de los números complejos. Se define la aplicación

$$\begin{aligned} u : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\longrightarrow Cl(V, Q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ v \otimes_{\mathbb{R}} z &\longmapsto v \otimes_{\mathbb{R}} z \end{aligned}$$

verificando  $u(v \otimes_{\mathbb{R}} z)^2 = -Q_{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) \cdot 1$ . En efecto

$$\begin{aligned} u(v \otimes_{\mathbb{R}} z)^2 &= (v \otimes_{\mathbb{R}} z)^2 \\ &= v^2 \otimes_{\mathbb{R}} z^2 \\ &= -Q(v) \otimes_{\mathbb{R}} z^2 \\ &= -Q(v)z^2 \cdot 1 \otimes_{\mathbb{R}} 1 \\ &= -Q_{\mathbb{C}}(v \otimes_{\mathbb{R}} z) \cdot 1 \end{aligned}$$

Ya que  $V_{\mathbb{C}}$  es un espacio vectorial complejo, aplicando la propiedad universal de las álgebras de Clifford, se concluye la demostración.  $\square$

**Corolario 2.13** *Se verifican los siguientes isomorfismos de álgebras*

$$Cl^c(n) \approx Cl(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \approx Cl'(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

**Proposición 2.14** *Las siguientes álgebras son isomorfas*

$$Cl(n+2) \approx Cl'(n) \otimes_{\mathbb{R}} Cl(2), \quad Cl'(n+2) \approx Cl(n) \otimes_{\mathbb{R}} Cl'(2)$$

*Siendo el producto tensor el producto tensor de álgebras usual.*

**Demostración:**

Se comprueba el primero de estos isomorfismos ya que el otro se demuestra de forma análoga. Sea  $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$  una base ortonormal del espacio vectorial  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Se identifican los  $n$  primeros vectores de esta base con los  $n$  vectores ortonormales  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  base de  $\mathbb{R}^n$ , los cuales generan multiplicativamente el álgebra  $Cl'(n)$ . La aplicación

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^{n+2} &\longrightarrow Cl'(n) \otimes_{\mathbb{R}} Cl(2) \\ e_1 &\longmapsto u(e_1) = 1 \otimes_{\mathbb{R}} e_1 \\ e_2 &\longmapsto u(e_2) = 1 \otimes_{\mathbb{R}} e_2 \\ e_i &\longmapsto u(e_i) = e'_{i-2} \otimes_{\mathbb{R}} e_1 e_2, \quad 3 \leq i \leq n+2. \end{aligned}$$

verifica las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} u(e_1)^2 &= (1 \otimes_{\mathbb{R}} e_1)(1 \otimes_{\mathbb{R}} e_1) = 1 \otimes_{\mathbb{R}} e_1^2 = -1 \\ u(e_2)^2 &= (1 \otimes_{\mathbb{R}} e_2)(1 \otimes_{\mathbb{R}} e_2) = 1 \otimes_{\mathbb{R}} e_2^2 = -1 \\ u(e_i)^2 &= (e'_{i-2} \otimes_{\mathbb{R}} e_1 e_2) \cdot (e'_{i-2} \otimes_{\mathbb{R}} e_1 e_2) = e'^2_{i-2} \otimes_{\mathbb{R}} e_1 e_2 e_1 e_2 = -1 \end{aligned}$$

y, además, si  $e_i \neq e_j$  se tiene

$$u(e_i)u(e_j) + u(e_j)u(e_i) = 0.$$

Aplicando el segundo apartado de la Proposición 2.2, existe un isomorfismo de álgebras

$$\tilde{u} : Cl(n+2) \longrightarrow Cl'(n) \otimes_{\mathbb{R}} Cl(2)$$

haciendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^{n+2} & \\ j \swarrow & & \searrow u \\ Cl(n+2) & \xrightarrow{\tilde{u}} & Cl'(n) \otimes_{\mathbb{R}} Cl(2) \end{array}$$

□

**Ejemplo 2.15** *El álgebra  $Cl^c(2)$  es la complejificada de  $Cl(2)$ . La última de estas álgebras está generada por los vectores  $e_1, e_2$  verificando*

$$e_1^2 = -1 = e_2^2, \quad e_1e_2 + e_2e_1 = 0$$

*Por otra parte, el espacio vectorial subyacente al álgebra de las matrices complejas  $2 \times 2$ ,  $M_2(\mathbb{C})$ , tiene como base sobre  $\mathbb{C}$  las matrices*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

*Estas cuatro matrices son las llamadas matrices de Pauli y son generadas multiplicativamente sólo con  $g_1$  y  $g_2$ . Además estas dos matrices verifican las relaciones*

$$g_1^2 = -Id = g_2^2, \quad g_1g_2 + g_2g_1 = 0.$$

*con lo que se obtiene los siguientes isomorfismos de álgebras*

$$Cl^c(2) \approx Cl(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \approx M_2(\mathbb{C})$$

Este ejemplo será utilizado para establecer nuevos isomorfismos entre álgebras de Clifford.

**Proposición 2.16** *Las siguientes álgebras son isomorfas*

$$Cl^c(n+2) \approx Cl^c(n) \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})$$

**Demostración:**

Se tiene la siguiente cadena de isomorfismos

$$\begin{aligned}
Cl^c(n+2) &\approx Cl(n+2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\
&\approx (Cl'(n) \otimes_{\mathbb{R}} Cl(2)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\
&\approx (Cl'(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (Cl(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \\
&\approx Cl^c(n) \otimes_{\mathbb{C}} Cl^c(2) \\
&\approx Cl^c(n) \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})
\end{aligned}$$

□

**Corolario 2.17** Sean  $e_1, \dots, e_{n+2}$  los elementos generadores del álgebra  $Cl^c(n+2)$  y  $e'_1, \dots, e'_n$  los  $n$  primeros pero pensados como los generadores del álgebra  $Cl^c(n)$ . Sean además,

$$g_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

los elementos generadores multiplicativamente del álgebra  $M_2(\mathbb{C})$ . El isomorfismo

$$Cl^c(n+2) \approx Cl^c(n) \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})$$

está dado por

$$e_1 \mapsto 1 \otimes_{\mathbb{C}} g_1, \quad e_2 \mapsto 1 \otimes_{\mathbb{C}} g_2, \quad e_j = (ie'_{j-2}) \otimes_{\mathbb{C}} g_1 g_2, \quad 3 \leq j \leq n+2$$

En virtud de estos resultados se está ya en condiciones de demostrar la Proposición 2.11.

**Demostración de la Proposición 2.11**

Se distinguen dos casos

1. Si  $n = 2k$ .

Es suficiente aplicar  $k$  veces el corolario anterior y el hecho de que  $T = ig_1 g_2$ .

2. Si  $n = 2k + 1$

Aplicando nuevamente  $k$  veces el corolario anterior se obtiene que

$$Cl^c(2k+1) = Cl^c(1) \otimes \underbrace{M_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \dots \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})}_{k \text{ veces}}$$

Ahora bien, por el Ejemplo 2.9 y la Proposición 2.12 se tiene que

$$Cl^c(1) \approx Cl(1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \approx \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \approx \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

resultando

$$\begin{aligned} Cl^c(2k+1) &= (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \underbrace{M_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \dots \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})}_{k \text{ veces}} \\ &= \underbrace{\{M_2(\mathbb{C}) \otimes \dots \otimes M_2(\mathbb{C})\}}_{k \text{ veces}} \oplus \underbrace{\{M_2(\mathbb{C}) \otimes \dots \otimes M_2(\mathbb{C})\}}_{k \text{ veces}}. \end{aligned}$$

Finalmente para obtener la expresión del isomorfismo basta componer dichos isomorfismos y usar nuevamente el hecho de que  $T = ig_1g_2$ .

□

**Definición 2.18** *El espacio vectorial complejo*

$$\Delta_n := \mathbb{C}^{2^k} = \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2, \quad \text{para } n = 2k, 2k+1$$

se denomina espacio vectorial complejo de  $n$ -espinores. Y los elementos de  $\Delta_n$  se llaman espinores complejos de Dirac o simplemente espinores.

Siguiendo las notaciones anteriores resulta que

$$\begin{aligned} Cl^c(n) &\approx End(\Delta_n), & \text{si } n = 2k \\ Cl^c(n) &\approx (End(\Delta_n)) \oplus (End(\Delta_n)), & \text{si } n = 2k+1 \end{aligned}$$

Además, resulta que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Cl^c(2k) & \longrightarrow & Cl^c(2k+1) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ End(\Delta_{2k}) & \xrightarrow{\phi} & End(\Delta_{2k+1}) \oplus End(\Delta_{2k+1}) \end{array}$$

donde  $\phi$  es la aplicación diagonal  $\phi(A) = (A, A)$  y los espacios vectoriales  $\Delta_{2k} = \Delta_{2k+1}$  coinciden.

De ahora en adelante se denotará por  $k_n$  la representación del álgebra de Clifford  $Cl^c(n)$  dada por

1. Si  $n = 2k$

$$k_n : Cl^c(n) \rightarrow End(\Delta_n)$$

es la dada por el isomorfismo anterior

2. Si  $n = 2k+1$  consiste en el isomorfismo anterior compuesto con la proyección en la primera componente

$$k_n : Cl^c(n) \longrightarrow End(\Delta_n) \oplus End(\Delta_n) \xrightarrow{pr_1} End(\Delta_n)$$

Resulta entonces que el espacio vectorial complejo de  $n$ -espinores es un módulo sobre el álgebra de Clifford  $Cl^c(n)$ .

Un vector  $x \in \mathbb{R}^n \subset Cl(n) \subset Cl^c(n) \xrightarrow{k_n} End(\Delta_n)$  puede considerarse como un endomorfismo de  $\Delta_n$ . Lo que nos permite definir la llamada *multiplicación de Clifford de vectores por espinores*, dada por la aplicación

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \Delta_n &\longrightarrow \Delta_n \\ x \otimes_{\mathbb{R}} \psi &\mapsto \mu(x \otimes_{\mathbb{R}} \psi) = x \cdot \psi = k_n(x)\psi \end{aligned}$$

Es posible extender dicha multiplicación de Clifford a un homomorfismo del álgebra exterior

$$\mu : \Lambda(\mathbb{R}^n) \otimes_{\mathbb{R}} \Delta_n \longrightarrow \Delta_n$$

de la siguiente forma. Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  y  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  su correspondiente base dual, cada elemento del álgebra exterior  $\Lambda(\mathbb{R}^n)$  puede escribirse como

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$$

y se define

$$\mu(\omega^k \otimes_{\mathbb{R}} \psi) = \omega^k \cdot \psi = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} \cdot \psi$$

donde  $e_{i_l} \cdot \psi$  denota la multiplicación de Clifford del vector  $e_{i_l}$  por el espinor  $\psi$ .

A partir de la definición de estas operaciones se demuestran de forma fácil las siguientes propiedades

**Proposición 2.19** [6, pag. 15]

1. Si  $\varphi \in \Gamma(S)$  es un campo espinor sin ceros y  $X \in \mathfrak{X}(M)$  verifica que  $X \cdot \varphi \equiv 0$  entonces  $X \equiv 0$ .
2. Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\omega$  una  $k$ -forma. Entonces se verifican las siguientes igualdades
  - a)  $X \cdot \omega = (X \wedge \omega) - (X \lrcorner \omega)$ .
  - b)  $\omega \cdot X = (-1)^k (X \wedge \omega + X \lrcorner \omega)$ .
  - c)  $\langle X \cdot \varphi, \psi \rangle = -\langle \varphi, X \cdot \psi \rangle$ .
  - d)  $\langle \omega \cdot \varphi, \psi \rangle = (-1)^{k(k+1)/2} \langle \varphi, \omega \cdot \psi \rangle$ .
  - e)  $\langle X \cdot \varphi, Y \cdot \varphi \rangle = g(X, Y) |\varphi|^2$ .

Donde  $X \lrcorner \omega$  denota la contracción del campo de vectores  $X$  con la forma  $\omega$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto escalar complejo en  $S$  inducido por el producto hermitico canónico en  $\Delta_n$  y  $(\cdot, \cdot) = Re \langle \cdot, \cdot \rangle$  el correspondiente producto escalar real en  $S$ .

En el caso particular en el que  $\mathbb{R}^n$  tenga dimensión par; es decir  $n=2k$ , es posible definir sobre el espacio de espinores de Dirac  $\Delta_{2k}$  el endomorfismo

$$f = i^k k_n(e_1 \cdot \dots \cdot e_n) : \Delta_{2k} \longrightarrow \Delta_{2k}$$

que resulta ser una involución,  $f^2 = Id_{\Delta_{2k}}$ , ya que  $(e_1 \cdot \dots \cdot e_{2k})^2 = (-1)^k$ . Es por este motivo por el que se dice que la representación del álgebra de Clifford divide el espacio de espinores  $\Delta_{2k}$  en los subespacios

$$\Delta_{2k} = \Delta_{2k}^+ \oplus \Delta_{2k}^-$$

donde

$$\Delta_{2k}^\pm = \{\psi \in \Delta_{2k} : f(\psi) = \pm\psi\}$$

**Definición 2.20** *Los espinores de los conjuntos  $\Delta_{2k}^\pm$  se denominan espinores de Weyl positivos o negativos respectivamente.*

### Proposición 2.21

1. Si  $x \in \mathbb{R}^{2k}$  es un vector y  $\psi \in \Delta_{2k}^\pm$ , entonces el espinor  $x \cdot \psi^\pm$  pertenece a  $\Delta_{2k}^\mp$ . Es decir, la multiplicación de Clifford induce un homomorfismo

$$\mu : \mathbb{R}^{2k} \otimes_{\mathbb{R}} \Delta_{2k}^\pm \longrightarrow \Delta_{2k}^\mp$$

2.  $\dim_{\mathbb{C}} \Delta_{2k}^+ = \dim_{\mathbb{C}} \Delta_{2k}^- = 2^{k-1}$

### Demostración:

1. Es suficiente demostrarlo para el caso en el que  $x = e_1$  puesto que la multiplicación de Clifford de un vector por un espinor es lineal. Entonces para el álgebra  $C_n$  se tiene la relación

$$x \cdot (e_1 \cdot \dots \cdot e_{2k}) = -(e_1 \cdot \dots \cdot e_{2k}) \cdot x$$

Es decir, dicha multiplicación anti-conmuta con la involución  $f$ , por lo que la multiplicación por un vector  $0 \neq x \in \mathbb{R}^{2k}$  lleva el espacio  $\Delta_{2k}^\mp$  de forma biyectiva en el espacio  $\Delta_{2k}^\pm$ .

2. Se deduce directamente del apartado anterior.

□

Finalmente, la manera de proceder cuando uno desea realizar cálculos haciendo uso de esta teoría es la siguiente. Se denota por  $u(\xi) \in \mathbb{C}^2$  el vector

$$u(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\xi i \end{pmatrix} \quad \xi = \pm 1$$

y por  $u(\xi_1, \dots, \xi_n)$  el elemento de  $\Delta_n$  dado por

$$u(\xi_1, \dots, \xi_n) = u(\xi_1) \otimes \dots \otimes u(\xi_n), \quad \xi_j = \pm 1.$$

El conjunto  $\{u(\xi_1, \dots, \xi_n) | \xi_j = \pm 1\}$  es una base para el espacio vectorial de los  $n$ -espinores de Dirac  $\Delta_n$ . Con lo que es posible asociarle a las matrices de la representación del álgebra de Clifford los endomorfismos de  $\Delta_n$  con respecto a esta base.

### 2.3. Los grupos Pin y Spin

Toda álgebra de Clifford  $Cl(V, Q)$  contiene dos grupos que juegan un papel fundamental tanto en la Geometría como en la Física, son los llamados *grupo Pin*( $V, Q$ ) y *grupo Spin*( $V, Q$ ). A lo largo de esta sección se verá como se definen estos subgrupos y por qué se llega a ellos.

De forma general, si  $A$  es un álgebra asociativa unitaria se puede considerar el grupo de sus elementos inversible,  $A^* \subset A$ . Este grupo, como conjunto, es un subconjunto abierto de  $A$  por lo que hereda su estructura diferenciable, siendo así  $A^*$  un grupo de Lie con  $\dim(A^*) = \dim(A)$ . Su álgebra de Lie  $\mathfrak{a}^*$ , que se identifica con  $T_1(A) \approx A$ , es isomorfa a  $A$  dotada con la operación corchete  $[x, y] = xy - yx, \forall x, y \in A$ . A su vez la aplicación exponencial se define como

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{a}^* \approx A &\longrightarrow A^* \\ a &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \end{aligned}$$

Volviendo a nuestro caso particular en el que  $A = Cl(V, Q)$ , el grupo multiplicativo de las unidades de  $Cl(V, Q)$ ,  $Cl^*(V, Q)$ , está definido por

$$Cl^*(V, Q) = \{\varphi \in Cl(V, Q) | \exists \varphi^{-1} \text{ con } \varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = 1\}$$

donde por la ecuación (2.1) es obvio que este grupo contiene a todos los elementos  $v \in V$ .

Este grupo actúa como automorfismo del álgebra; es decir, existe un homomorfismo

$$Ad : Cl^*(V, Q) \longrightarrow Aut(Cl(V, Q))$$

llamado *representación adjunta* que está dado por

$$\begin{array}{ccc} Ad : Cl^*(V, Q) & \rightarrow & \begin{array}{ccc} Cl(V, Q) & & x \\ & \downarrow & \downarrow \\ Cl(V, Q) & & \\ \varphi & \mapsto & Ad_\varphi(x) = \varphi \cdot x \cdot \varphi^{-1} \end{array} \end{array}$$

Tomando la derivada de éste en el elemento neutro, se obtiene el homomorfismo en el álgebra de las derivaciones

$$ad : \mathfrak{cl}^*(V, Q) \longrightarrow Der(Cl(V, Q))$$

está dado por

$$\begin{array}{ccc} ad : \mathfrak{cl}^*(V, Q) & \rightarrow & Cl^x(V, Q) & x \\ & & \downarrow & \downarrow \\ & & Cl(V, Q) & \\ \varphi & \mapsto & ad_x(y) & = [x, y] \end{array}$$

**Proposición 2.22** [23, pag. 13] *Sea  $v \in V \subset Cl(V, Q)$  tal que  $Q(v) \neq 0$ . Entonces  $Ad_v(V) = V$ . En realidad,  $\forall w \in V$  se tiene la igualdad:*

$$-Ad_v(w) = w - 2 \frac{Q(v, w)}{Q(v)} v.$$

**Demostración:**

Por la ecuación (2.1) se tiene que  $v^{-1} = -v/Q(v)$ . Entonces

$$\begin{aligned} -Q(v)Ad_v(w) &= -Q(v)v \cdot w \cdot v^{-1} \\ &= v \cdot w \cdot v \\ &= -v^2 \cdot w - 2B(v, w)v \\ &= Q(v)w - 2B(v, w)v. \end{aligned}$$

de donde

$$-Ad_v(w) = w - 2 \frac{B(v, w)}{Q(v)} v.$$

siendo  $B$  la forma bilineal simétrica asociada a  $Q$ . □

Se define el subgrupo  $P(V, Q) \subset Cl^*(V, Q)$  como el subgrupo generado multiplicativamente por los elementos  $v \in V$  tales que  $Q(v) \neq 0$ . Dado que  $Ad_v(V) = V$  y que  $Ad_{v_1 \cdot v_2}(\varphi) = (Ad_{v_1} \circ Ad_{v_2})(\varphi)$ ,  $\forall v_1, v_2 \in V$  y  $\forall \varphi \in Cl(V, Q)$ , la aplicación  $Ad_x$  deja invariante el subespacio vectorial  $V \subset Cl(V, Q)$ ,  $\forall x \in P(V, Q)$ .

Además, por la Proposición 2.22, o simplemente por su definición, se deduce que la transformación  $Ad_v$  conserva la forma cuadrática  $Q$ ; es decir,  $(Ad_v^*Q)(w) = Q(Ad_v(w)) = Q(w)$ ,  $\forall v, w \in V$ . Por tanto,  $Ad$  induce la representación

$$P(V, Q) \xrightarrow{Ad} O(V, Q)$$

donde

$$O(V, Q) = \{g \in Gl(V) : g^*Q = Q\}$$

es el grupo ortogonal de la forma  $Q$ .

Este grupo  $P(V, Q)$  contiene los dos grupos mencionados anteriormente, *Pin* y *Spin*.

**Definición 2.23** *Se define el grupo  $Pin(V, Q)$  como el subgrupo de  $P(V, Q)$  generado por los elementos  $v \in V$  tales que  $Q(v) = \pm 1$ . Mientras que se define el grupo  $Spin(V, Q)$  como*

$$Spin(V, Q) = Pin(V, Q) \cap Cl^0(V, Q)$$

*es decir, los elementos del grupo  $Spin(V, Q)$  son aquellos elementos del grupo  $Pin(V, Q)$  que están generados por un número par de productos.*



Ahora se considera el subgrupo

$$\tilde{P}(V, Q) = \{\varphi \in Cl^*(V, Q) : \tilde{Ad}_\varphi(V) = V\}$$

y es claro que  $P(V, Q) \subset \tilde{P}(V, Q)$ .

**Proposición 2.25** *Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $Q$  una forma cuadrática en  $V$ . Para todo elemento  $w \in V \subset \tilde{P}(V, Q)$  tal que  $Q(w) \neq 0$ , la aplicación  $\rho_w : V \rightarrow V$  dada por*

$$v \mapsto \alpha(w) \cdot v \cdot w^{-1}$$

*es la reflexión con respecto al hiperplano ortogonal al vector  $w$ ,  $w^\perp$ .*

**Demostración:**

La reflexión  $s$  con respecto al hiperplano  $w^\perp$  está dado por

$$s(v) = v - 2 \frac{B(v, w)}{Q(w)} w$$

de donde, haciendo uso de la ecuación (2.1)

$$\begin{aligned} s(v) &= v - 2 \frac{B(v, w)}{Q(w)} w \\ &= v - 2B(v, w) \left( \frac{w}{Q(w)} \right) \\ &= v - 2B(v, w) (-w^{-1}) \\ &= v - (-2B(v, w) \cdot 1) w^{-1} \\ &= v - (vw + wv) w^{-1} \\ &= -wvw^{-1} \\ &= \alpha(w)vw^{-1} \end{aligned}$$

□

En general se tiene la aplicación

$$\tilde{Ad}_{|\tilde{P}(V, Q)} : \tilde{P}(V, Q) \longrightarrow Gl(V)$$

y que también se denotará por  $\tilde{Ad}$ , definida por

$$\tilde{Ad}_x(v) = \alpha(x)vx^{-1}.$$

El siguiente paso es demostrar que  $\tilde{Ad}$  es un homomorfismo sobreyectivo de  $\tilde{P}(V, Q)$  en  $O(V, Q)$  y un homomorfismo sobreyectivo de  $\tilde{P}^+(V, Q) = \tilde{P}(V, Q) \cap Cl^0(V, Q)$  en  $SO(V, Q)$ .

**Proposición 2.26** [23, pag. 14] Sea  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita y sea  $Q$  una forma cuadrática no degenerada. Entonces el núcleo del homomorfismo

$$\tilde{P}(V, Q) \xrightarrow{\tilde{Ad}} GL(V)$$

es exactamente el grupo  $K^*$  de los múltiplos no nulos de la unidad 1.

**Demostración:**

Sea  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base para  $V$  tal que  $Q(v_i) \neq 0$ . Sea  $\varphi \in Cl^*(V, Q)$  y supongamos que  $\varphi \in Ker(\tilde{Ad})$ ; es decir,  $\tilde{Ad}_\varphi = Id$ ; por lo que  $\alpha(\varphi)v\varphi^{-1} = v$  y así  $\alpha(\varphi)v = v\varphi$ . Sea  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ , donde  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  son las partes par e impar de  $\varphi$  respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi)v &= v\varphi & \Rightarrow \\ \alpha(\varphi_0 + \varphi_1)v &= v(\varphi_0 + \varphi_1) & \Rightarrow \\ \alpha(\varphi_0)v + \alpha(\varphi_1)v &= v\varphi_0 + v\varphi_1 & \Rightarrow \\ \begin{cases} \varphi_0v = v\varphi_0 \\ -\varphi_1v = v\varphi_1 \end{cases} & & \end{aligned}$$

para todo  $v \in V$ .

Los términos  $\varphi_0$  y  $\varphi_1$  pueden escribirse como expresiones polinomiales en productos de  $v_1, \dots, v_n$ . Aplicando sucesivamente las igualdades  $v_i v_j + v_j v_i = -2Q(v_i, v_j) \cdot 1$  se tiene  $\varphi_0 = a_0 + v_1 a_1$ , donde  $a_0$  y  $a_1$  son expresiones polinomiales en productos de  $v_1, \dots, v_n$  por lo que  $a_0$  es par y  $a_1$  es impar. Si ahora  $v = v_1$  se tiene que

$$\begin{aligned} (a_0 + v_1 a_1)v_1 &= v_1(a_0 + v_1 a_1) & \Rightarrow \\ a_0 v_1 + v_1 a_1 v_1 &= v_1 a_0 + v_1^2 a_1 & \Rightarrow \\ v_1 a_0 - v_1^2 a_1 &= v_1 a_0 + v_1^2 a_1 \end{aligned}$$

de donde se deduce que  $a_1 = 0$ .

Por tanto,  $\varphi_0$  no tiene ningún monomio con el factor  $v_1$ . Aplicando este argumento con  $v$  recorriendo el resto de elementos de la base,  $\{v_2, \dots, v_n\}$ , resulta que  $\varphi_0$  no tiene ningún monomio con factores los elementos de la base, y así  $\varphi_0 = t \cdot 1$ , para  $t \in K$ . Un argumento análogo puede aplicarse al sumando  $\varphi_1$ . Se escribe  $\varphi_1 = a_1 + v_1 a_0$  donde en este caso  $a_0$  y  $a_1$  no contienen monomios con el factor  $v_1$ . Obsérvese que  $a_1$  es impar y  $a_0$  es par. Por tanto, tomando  $v = v_1$  se tiene

$$\begin{aligned} -(a_1 + v_1 a_0)v_1 &= v_1(a_1 + v_1 a_0) & \Rightarrow \\ -a_1 v_1 - v_1 a_0 v_1 &= v_1 a_1 + v_1^2 a_0 & \Rightarrow \\ v_1 a_1 - v_1^2 a_0 &= v_1 a_1 + v_1^2 a_0 \end{aligned}$$

con lo que  $a_0 = 0$  y por tanto  $\varphi_1$  tampoco contiene monomios con el factor  $v_1$ . Nuevamente, aplicando el mismo razonamiento con los restantes elementos de la base  $v_2, \dots, v_n$  resulta que  $\varphi_1 = 0$  por ser impar.

Así se sigue que

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 = t \cdot 1 \in K$$

pero como  $\varphi \neq 0$  se tiene que  $\varphi \in K^*$ .  $\square$

**Observación 2.27** *En la Proposición 2.26 es necesario utilizar la representación adjunta retorcida ya que el signo menos que aporta es fundamental en la demostración.*

*El resultado anterior también es falso si no se considera que  $Q$  es una forma cuadrática no degenerada. Por ejemplo, si se considera el caso extremo en el que  $Q = 0$  y su álgebra de Clifford es  $Cl(V, 0) = \Lambda^*V$ , para todo  $v_1, v_2 \in V$ , se tiene que  $1 + v_1v_2 \in Cl^*(V, 0)$ . En realidad,  $(1 + v_1v_2)^{-1} = 1 - v_1v_2$ . Sin embargo, para cualesquiera  $v \in V$  resulta  $\alpha(1 + v_1v_2)v(1 + v_1v_2)^{-1} = 1 + v_1v_2$ . Con lo que el núcleo del homomorfismo contiene términos no escalares.*

Para poder obtener los homomorfismos sobreyectivos enunciados anteriormente se han de definir dos nuevas aplicaciones sobre un álgebra de Clifford cualquiera  $Cl(V, Q)$ . Se define la *aplicación conjugación* o simplemente *conjugación* en un álgebra de Clifford  $Cl(V, Q)$  por

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : Cl(V, Q) &\longrightarrow Cl(V, Q) \\ x &\mapsto \bar{x} := t(\alpha(x)) = \alpha(t(x)) \end{aligned}$$

Si  $V$  tiene dimensión finita  $n$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base de  $V$ , la conjugación está dada por

$$\begin{aligned} \bar{e}_i &= -e_i \\ e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k} &= (-1)^k(e_{i_k}\dots e_{i_2}e_{i_1}) \end{aligned}$$

donde  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  y  $\bar{1} = 1$ .

Se define también la aplicación *norma* por

$$\begin{aligned} N : Cl(V, Q) &\longrightarrow Cl(V, Q) \\ \varphi &\mapsto N(\varphi) = \varphi\bar{\varphi} \end{aligned}$$

**Proposición 2.28** *Suponiendo que  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita y que  $Q$  es no degenerada, la restricción de  $N$  a  $\tilde{P}(V, Q)$  genera el homomorfismo*

$$N : \tilde{P}(V, Q) \longrightarrow K^*$$

*en el grupo multiplicativo de los múltiplos no nulos de la unidad en  $Cl(V, Q)$*

**Demostración:**

Primero se comprobará que si  $\varphi \in \tilde{P}(V, Q)$  entonces  $(t \circ \alpha)(\varphi) \in \tilde{P}(V, Q)$

$$\begin{aligned} \alpha((t \circ \alpha)(\varphi))v[(t \circ \alpha)(\varphi)]^{-1} &= (t \circ \alpha \circ \alpha)(\varphi)v(t \circ \alpha)(\varphi^{-1}) \\ &= -(t \circ \alpha)(\alpha(\varphi)v\varphi^{-1}) \end{aligned}$$

y por ser  $V$  invariante por  $t \circ \alpha$  resulta trivialmente que  $(t \circ \alpha)(\varphi) \in \tilde{P}(V, Q)$ .

Sea  $\varphi \in \tilde{P}(V, Q)$ ; es decir,  $\alpha(\varphi)v\varphi^{-1} \in V$ . Entonces se tiene que  $t(\alpha(\varphi)v\varphi^{-1}) = \alpha(\varphi)v\varphi^{-1}$ . Ahora bien

$$t(\alpha(\varphi)v\varphi^{-1}) = t(\varphi^{-1})vt(\alpha(\varphi))$$

y por tanto

$$\alpha(\varphi)v\varphi^{-1} = t(\varphi^{-1})vt(\alpha(\varphi)).$$

Así,  $\forall v \in V$  se tiene

$$\begin{aligned} v &= t(\varphi)\alpha(\varphi)v\varphi^{-1}t(\alpha(\varphi))^{-1} \\ &= \alpha(\alpha(t(\varphi))\varphi)v[t(\alpha(\varphi))\varphi]^{-1} \\ &= \alpha(t(\alpha(\varphi))\varphi)v[t(\alpha(\varphi))\varphi] = -1 \\ &= Ad_{t(\alpha(\varphi))\varphi}v. \end{aligned}$$

Entonces, se sigue que  $\tilde{Ad}_{t(\alpha(\varphi))\varphi} = Id$  ó, equivalentemente,  $(t \circ \alpha)(\varphi)\varphi \in Ker(\tilde{Ad})$ .

Por la Proposición 2.26 se tiene que  $t(\alpha(\varphi))\varphi = (\alpha \circ t)(\varphi)\varphi \in K^*$ . Ahora, aplicando  $\alpha$  se tiene

$$\begin{aligned} \alpha(t(\alpha(\varphi))\alpha(\varphi)) &= t(\varphi)\alpha(\varphi) \\ &= t(\varphi)(\alpha \circ t)(\varphi) \\ &= N(t(\varphi)) \end{aligned}$$

y como el anti-automorfismo  $t$  conserva  $\tilde{P}(V, Q)$ , se sigue que  $N(\varphi) \in K^*$ ,  $\forall \varphi \in \tilde{P}(V, Q)$ .

Finalmente, sean  $\varphi, \psi \in \tilde{P}(V, Q)$ . Entonces

$$\begin{aligned} N(\varphi\psi) &= \varphi\psi \cdot \overline{\varphi\psi} \\ &= \varphi\psi \cdot (t \circ \alpha)(\varphi\psi) \\ &= \varphi\psi \cdot (t \circ \alpha)(\psi) \cdot (t \circ \alpha)(\varphi) \\ &= \varphi N(\psi)(t \circ \alpha)(\varphi) \\ &= N(\varphi)N(\psi) \end{aligned}$$

con lo que  $N$  es un homomorfismo de  $\tilde{P}(V, Q)$  en  $K^*$ . □

**Corolario 2.29** *La transformación  $\tilde{Ad}_\varphi : V \rightarrow V$ , donde  $\varphi \in \tilde{P}(V, Q)$  conserva la forma cuadrática  $Q$ . Así existe un homomorfismo*

$$\tilde{Ad} : \tilde{P}(V, Q) \rightarrow O(V, Q)$$

**Demostración:**

Veamos que  $N(\alpha(\varphi)) = N(\varphi)$ .

$$\begin{aligned} N(\alpha\varphi) &= \alpha(\varphi)\overline{\alpha(\varphi)} \\ &= \alpha(\varphi)t(\varphi) \\ &= \alpha(\varphi\alpha(t(\varphi))) \\ &= \alpha(N(\varphi)) \\ &= N(\varphi). \end{aligned}$$

Tomando

$$V^* = \{v \in V : Q(v) \neq 0\} \subset \tilde{P}(V, Q)$$

si  $v \in V^*$

$$\begin{aligned} N(\tilde{Ad}_\varphi(v)) &= N(\alpha(\varphi))N(v)N(\varphi^{-1}) \\ &= N(\varphi)Q(v)N(\varphi)^{-1} \\ &= Q(v) \end{aligned}$$

es decir,  $\tilde{Ad}_\varphi$  conserva las longitudes de los elementos de longitud no nula. Además  $\tilde{Ad}_{\varphi^{-1}} \circ \tilde{Ad}_\varphi = id = \tilde{Ad}_\varphi \circ \tilde{Ad}_{\varphi^{-1}}$ ; es decir,  $\tilde{Ad}_\varphi(V^*) = V^*$  y por tanto  $\tilde{Ad}_\varphi$  deja invariante el conjunto de vectores de longitud no nula; es decir,  $\tilde{Ad}_\varphi$  es  $Q$ -ortogonal.  $\square$

Por otra parte, teniendo en cuenta que  $P(V, Q) \subset \tilde{P}(V, Q)$ , donde  $P(V, Q)$  por definición está dado por

$$P(V, Q) = \{v_1 \cdots v_r \in Cl(V, Q) : v_1, \dots, v_r \text{ conjunto finito de elementos de } V\}$$

entonces la representación adjunta retorcida nos induce el homomorfismo

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \tilde{Ad}|_{P(V, Q)} : P(V, Q) &\longrightarrow O(V, Q) \\ v_1 \cdots v_r &\mapsto \tilde{Ad}_{v_1 \cdots v_r} = \rho(v_1) \circ \dots \circ \rho(v_r) \end{aligned}$$

donde

$$\rho_v(w) = w - 2 \frac{q(w, v)}{q(v)} v$$

es la reflexión con respecto al hiperplano ortogonal a  $v$ ,  $v^\perp$ .

Por tanto, la imagen de  $P(V, Q)$  por  $\tilde{Ad}$  es exactamente el grupo generado por las reflexiones, y aplicando el Teorema 2.24 resulta que es el grupo  $O(V, Q)$ . Así se deduce que el homomorfismo

$$\tilde{Ad}|_{P(V, Q)} : P(V, Q) \longrightarrow O(V, Q)$$

es sobreyectivo.

Ahora bien, se puede considerar el grupo  $SP(V, Q) = P(V, Q) \cap Cl^0(V, Q)$  y, puesto que  $V$  es de dimensión finita, el grupo ortogonal

$$SO(V, Q) = \{g \in O(V, Q) : \det(g) = 1\}$$

Del Teorema 2.24 también se deduce que el homomorfismo  $\tilde{Ad}|_{SP(V, Q)} : SP(V, Q) \longrightarrow SO(V, Q)$  es sobreyectivo. Para demostrar esto veamos que  $\det(\rho_v) = -1$  para cualquier  $v \in V$ . Tomando una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  tal que  $v_1 = v$  y  $Q(v, v_i) = 0, \forall i \geq 2$ , se obtiene directamente a partir de la definición que  $\rho_v(v_1) = -v_1$  y  $\rho_v(v_j) = v_j, j \geq 2$  y por tanto  $\det(\rho_v) = -1$  como queríamos demostrar. Es decir, por el Teorema 2.24 se tiene que

$$SO(V, Q) = \{\rho_{v_1} \circ \dots \circ \rho_{v_r} : Q(v_j) \neq 0 \text{ y } r \text{ es par}\}$$

Entonces por la definición de  $P(V, Q)$  se tiene  $SP(\widetilde{V}, Q) = \{v_1 \cdot \dots \cdot v_r \in P(V, Q) : r \text{ es par}\}$ . El carácter sobreyectivo de  $\widetilde{Ad}|_{SP(V, Q)} : SP(V, Q) \rightarrow SO(V, Q)$  se sigue inmediatamente de (2.4).

Volviendo ahora a los grupos  $Pin$  y  $Spin$ . Se vio que estos son grupos generados por la esfera unitaria generalizada  $S = \{v \in V : Q(v) = \pm 1\}$  en  $V$ ; es decir,

$$Pin(V, Q) = \{v_1 \cdot \dots \cdot v_r \in P(V, Q) : Q(v) = \pm 1\}$$

y

$$Spin(V, Q) = \{v_1 \cdot \dots \cdot v_r \in Pin(V, Q) : r \text{ es par}\}$$

Ahora cabe preguntarse si el homomorfismo  $\widetilde{Ad}$  restringido a  $Pin(V, Q)$  y  $Spin(V, Q)$  es sobreyectivo en los grupos  $O(V, Q)$  y en  $SO(V, Q)$  respectivamente. Plantearse esto tiene sentido ya que se comprueba fácilmente que  $\rho_{tv} = \rho_v$  para cualquier escalar no nulo  $t \in \mathbb{K}$  y por tanto es posible normalizar cualquier  $v \in V^*$  para tener  $Q$ -longitud  $\pm 1$ . Por supuesto, como  $Q$  es cuadrático,  $Q(tv) = t^2Q(v)$ , y la ecuación  $t^2Q(v) = \pm 1$  podría o no ser resoluble en un cuerpo  $\mathbb{K}$  general. En nuestro caso particular, que estamos considerando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ , dicha ecuación es trivialmente resoluble.

**Teorema 2.30** Sean  $V$  un espacio vectorial finito dimensional sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ , y  $Q$  una forma cuadrática no degenerada en  $V$ . Entonces existen las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \{-1, 1\} & \longrightarrow & Spin(V, Q) & \xrightarrow{\widetilde{Ad}} & SO(V, Q) \longrightarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & \{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\} & \longrightarrow & Pin(V, Q) & \xrightarrow{\widetilde{Ad}} & O(V, Q) \longrightarrow 1 \end{array}$$

**Demostración:**

Se puede suponer que  $\varphi = v_1 \cdot \dots \cdot v_r \in P(V, Q)$  y  $\varphi \in Ker(\widetilde{Ad})$ . Entonces  $\varphi \in K^*$  por la Proposición 2.26, y por ser  $\varphi^2 = N(\varphi) = N(v_1) \cdot \dots \cdot N(v_r) = \pm 1$ . Esto establece el núcleo en ambos casos. El carácter sobreyectivo del homomorfismo se sigue del Teorema 2.24 y del hecho de que  $\rho_v = \rho_{tv}$  por lo que cualquier vector  $v \in V^*$  puede normalizarse para tener  $Q$ -longitud 1.  $\square$

**Teorema 2.31**

1. Para  $n \geq 2$ ,  $Spin(V, Q)$  es un grupo conexo.
2. Si  $V \cong \mathbb{R}^n$  con  $n \geq 3$  y  $Q$  es el producto interior usual, entonces  $Spin(V, Q)$  es simplemente conexo y  $\widetilde{Ad}|_{Spin(V, Q)} : Spin(V, Q) \rightarrow SO(V, Q)$  es el recubrimiento universal del grupo  $SO(V, Q)$ .

**Demostración:**

1. Puesto que la aplicación  $\widetilde{Ad}_{Spin(V,Q)} : Spin(n) \rightarrow SO(n)$  es sobreyectiva verificando  $ker(\widetilde{Ad}_{Spin(V,Q)}) = \{-1, 1\}$ , es suficiente con encontrar un camino que conecte el elemento  $(-1) \in Spin(n)$  con el elemento neutro  $1 \in Spin(n)$ . En el caso  $n \neq 2$  uno puede construir el camino:

$$\begin{aligned} \beta : [0, 1] &\longrightarrow Spin(n) \\ t &\mapsto \beta(t) = \{q(e_2, e_2) - q(e_1, e_1)[1 + \cos(\pi t)]\} - \sin(\pi t)e_1e_2 \end{aligned}$$

Obviamente se tiene que  $\beta(0) = 1$  y que  $\beta(1) = -1$ . El hecho de que  $\beta(t) \in Spin(n)$  se debe a que  $\beta(t)$  se puede expresar como:

$$\beta(t) = [\cos(\frac{\pi t}{2})e_1 + \sin(\frac{\pi t}{2})e_2] \cdot [\cos(\frac{\pi t}{2})e_1 - \sin(\frac{\pi t}{2})e_2]$$

2. Se verá aquí un esquema de la demostración, para más detalles consultar [15]. Se considera la acción estándar del grupo  $Spin(n)$  sobre la esfera  $S^n$  dada por  $x \cdot v = xv x^{-1}$ . Dicha acción es transitiva por serlo la acción de  $SO(n)$  sobre  $S^n$  y ser  $\widetilde{Ad}_{Spin(V,Q)}$  una aplicación sobreyectiva. Además su estabilizador es el grupo  $Spin(n-1)$ . Se obtiene así la siguiente fibración

$$Spin(n-1) \longrightarrow Spin(n) \longrightarrow S^n.$$

De donde, haciendo uso de la teoría de homotopía se obtiene la siguiente sucesión

$$\pi_1(Spin(n-1)) \longrightarrow \pi_1(Spin(n)) \longrightarrow \pi_1(S^n).$$

Como  $\pi_1(S^{n-1}) = 0$  para  $n \geq 3$  se obtiene la aplicación sobreyectiva

$$\pi_1(Spin(n-1)) \longrightarrow \pi_1(Spin(n)).$$

Finalmente, como  $Spin(3) \cong SU(2) \cong S^3$  se concluye la demostración. □

En lo sucesivo se analizará el caso particular en que  $Q(x) = \|x\|^2$  de  $\mathbb{R}$  usual. El objetivo ahora es describir el álgebra de Clifford del grupo  $Spin(n)$ .

**Proposición 2.32** [11, pag. 18]

1. El subespacio vectorial  $\mathfrak{m}_2 \subset Cl(n)$

$$\mathfrak{m}_2 = Lin\{e_i e_j : 1 \leq i < j \leq n\}$$

dotado con el conmutador

$$[x, y] = xy - yx$$

es un álgebra de Lie que coincide con el álgebra de Lie del grupo  $Spin(n) \subset Cl(n)$ .

2. Si  $\sigma : Cl(n) \longrightarrow End(W)$  es una representación (real o compleja) del álgebra de Clifford y

$$\sigma|_{Spin(n)} : Spin(n) \longrightarrow Aut(W)$$

el homomorfismo de grupos definido por la restricción, entonces su diferencial

$$(\sigma|_{Spin(n)})_* : \mathfrak{spin}(n) = \mathfrak{m}_2 \longrightarrow End(W)$$

está dada por la fórmula  $(\sigma|_{Spin(n)})_* = \sigma|_{\mathfrak{m}_2}$ .

### Demostración:

1. Puesto que el grupo  $Spin(n)$  es un subgrupo de Lie de  $Cl^*(n)$ ,  $Spin(n) \subset Cl^*(n)$ , para describir el álgebra de Lie  $\mathfrak{m}_2$  basta determinar el espacio tangente a  $Spin(n)$  en su elemento neutro,  $T_1(Spin(n)) \subset Cl(n)$ . Para ello sea  $\beta(t) = x_1(t) \cdot \dots \cdot x_{2m}(t)$  un camino en  $Spin(n)$ , siendo  $x_i(t) \in S^{n-1}, \forall i$ , y  $\beta(0) = 1$ . El vector tangente a  $\beta$  en 0,  $\beta'(0)$ , viene dado por la expresión

$$\frac{d\beta}{dt}(0) = \frac{dx_1}{dt}(0) \cdot x_2(0) \cdot \dots \cdot x_{2m}(0) + \dots + x_1(0) \cdot \dots \cdot \frac{dx_{2m}}{dt}(0)$$

Veamos que  $\frac{d\beta}{dt}(0) \in \mathfrak{m}(2)$ . Puesto que  $\beta(0) = 1$  resulta

$$\frac{dx_1}{dt}(0) \cdot x_1^{-1}(0) = -\frac{dx_1}{dt}(0) \cdot x_1(0)$$

Ahora bien, como  $x_1(t) \cdot x_1(t) = -1$  resulta que

$$\frac{dx_1}{dt}(0) \cdot x_1(0) + x_1(0) \cdot \frac{dx_1}{dt}(0)$$

y haciendo uso de la ecuación (2.1) se tiene que  $\frac{dx_1}{dt}(0)$  y  $x_1(0)$  son vectores ortogonales. Así el primer sumando de  $\beta'(0)$  pertenece a  $\mathfrak{m}_2$  ya que al ser ortogonales en el producto no van a aparecer sumandos en  $e_i \cdot e_j$  con  $i = j$ . Para el segundo sumando se tiene

$$\begin{aligned} x_1(0) \frac{dx_2}{dt}(0) x_2^{-1}(0) x_1^{-1}(0) &= -x_1(0) \frac{dx_2}{dt}(0) x_2(0) x_1^{-1}(0) \\ &= -\{x_1(0) \cdot \frac{dx_2}{dt}(0) x_1^{-1}(0)\} \cdot \{x_1(0) x_2(0) x_1^{-1}(0)\} \end{aligned}$$

Igualmente  $\frac{dx_2}{dt}(0)$  y  $x_2$  son vectores perpendiculares. Los vectores  $x_1(0) \cdot \frac{dx_2}{dt}(0) x_1^{-1}(0)$  y  $x_1(0) x_2(0) x_1^{-1}(0)$  también lo son, y por lo tanto el segundo sumando de  $\beta'(0)$  también está en  $\mathfrak{m}(2)$ . Procediendo de forma análoga para el resto de sumandos de  $\beta'(0)$  se tiene que  $\beta'(0) \in \mathfrak{m}_2$ .

Ahora bien,

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_2) = \frac{n(n-1)}{2} = \dim(SO(n)) = \dim(Spin(n))$$

Por lo que los dos espacios tienen que coincidir.

2. Se sigue directamente de la teoría general. Sea  $f : H \rightarrow G$  entre dos grupos de Lie y sea  $f_* : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$  su diferencial, que es con la única aplicación con la que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{f_*} & \mathfrak{g} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ H & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

es conmutativo como homomorfismo de álgebras de Lie. Pero en nuestro caso el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{m}_2 & \xrightarrow{\sigma} & \text{End}(W) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ \text{Spin}(n) & \xrightarrow{\sigma} & \text{Aut}(W) \end{array}$$

conmuta, porque  $\sigma : \mathfrak{Cl}(n) \rightarrow \text{End}(W)$  es un homomorfismo de álgebras.  $\square$

**Corolario 2.33** *La aplicación exponencial está dada por*

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{m}_2 &\longrightarrow \text{Spin}(n) \\ x &\mapsto \exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \end{aligned}$$

Una vez que se tiene identificada el álgebra de Lie de  $\text{Spin}(n)$  se calcula la diferencial del recubrimiento universal de  $\text{SO}(n)$ :

$$\widetilde{\text{Ad}}_* : \mathfrak{spin}(n) \longrightarrow \mathfrak{so}(n).$$

**Teorema 2.34** [23, pag. 42] *El isomorfismo de álgebras de Lie  $\widetilde{\text{Ad}}_*$  inducido por la representación adjunta está dado explícitamente sobre los elementos básicos  $\{e_i \cdot e_j\}_{i < j}$  por*

$$\widetilde{\text{Ad}}_*(e_i \cdot e_j) = 2E_{ij}$$

donde  $E_{ij}$  denota la matriz con un -1 en la posición  $(ij)$  y un 1 en la  $(ji)$ , dichas matrices generan el álgebra de Lie de  $\mathfrak{so}(n)$ . En consecuencia, para  $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\widetilde{\text{Ad}}_*^{-1}(v \wedge w) = \frac{1}{4}[v, w]$$

donde el factor  $\frac{1}{4}$  es un factor importante para las aplicaciones geométricas

**Demostración:**

Se considera la curva

$$\gamma(t) = \cos(t) + \operatorname{sen}(t)e_i \cdot e_j \in \operatorname{Spin}(n)$$

Dicha curva verifica que  $\gamma(0) = 1$ ,  $\gamma'(0) = e_i \cdot e_j$ ,  $\gamma^{-1}(t) = \cos(t) - \operatorname{sen}(t)e_i \cdot e_j$ ,  $\gamma^{-1}(0) = 1$  y  $(\gamma^{-1})'(0) = -e_i \cdot e_j$ .

Por tanto, se tiene que calcular

$$\widetilde{Ad}_*(e_i \cdot e_j) = \frac{d}{dt}[\widetilde{Ad}(\gamma(t))]_{t=0} = \frac{d}{dt}[Ad(\gamma(t))]_{t=0}$$

ya que las aplicaciones  $\widetilde{Ad}$  y  $Ad$  coinciden sobre  $\operatorname{Spin}(n)$ .

Para calcular esto basta aplicarla a un vector  $x \in \mathbb{R}^n$ . Como  $\lambda(\gamma(t))x = \gamma(t)x\gamma^{-1}(t)$  resulta que

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad}_*(e_i \cdot e_j)(x) &= e_i \cdot e_j \cdot x - x \cdot e_i \cdot e_j = \\ &= e_i \cdot e_j \cdot x + (e_i \cdot x + 2\langle e_i, x \rangle)e_j = \\ &= e_i \cdot e_j \cdot x + e_i \cdot x \cdot e_j + 2\langle e_i, x \rangle e_j = \\ &= e_i \cdot e_j \cdot x - e_i \cdot e_j \cdot x - 2\langle e_j, x \rangle e_i + 2\langle e_i, x \rangle e_j = \\ &= 2E_{ij} \end{aligned}$$

La segunda de las igualdades propuestas se deduce de la relación

$$\frac{1}{4}[e_i, e_j] = \frac{1}{4}(e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i) = \frac{1}{2}e_i \cdot e_j$$

□

Si ahora se vuelve un poco hacia atrás, el hecho de que  $\operatorname{Spin}(n) \subset \operatorname{Cl}(n) \subset \operatorname{Cl}^c(n) \xrightarrow{k_n} \operatorname{End}(\Delta_n)$  permite definir la siguiente representación del grupo  $\operatorname{Spin}(n)$

$$\phi_n = k_n|_{\operatorname{Spin}(n)} : \operatorname{Spin}(n) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\Delta_n)$$

que se denomina la *representación espinorial* del grupo  $\operatorname{Spin}(n)$ .

A continuación se demostrará que dicha representación es inyectiva, pero para ello se debe tener en cuenta que

**Lema 2.35**

$$\widetilde{Ad}^{-1}(SO(n)) = \operatorname{Spin}(n)$$

**Demostración:**

Sea  $\alpha : \operatorname{Cl}(n) \longrightarrow \operatorname{Cl}(n)$  la involución del álgebra de Clifford que define la descomposición  $\operatorname{Cl}(n) = \operatorname{Cl}^0(n) \oplus \operatorname{Cl}^1(n)$ .  $\forall v \in \mathbb{R}^n, \alpha(x) = -v$ , por lo que si  $x = v_1 \cdot \dots \cdot v_i$  resulta que  $\alpha(v_1 \cdot \dots \cdot v_n) = (-1)^n v_1 \cdot \dots \cdot v_n$ ; de donde si  $\|v_i\| = 1 \forall i$  se tiene que  $x \in \operatorname{Spin}(n) \Leftrightarrow n$  es par. Por otra parte,  $\widetilde{Ad}(x) = \widetilde{Ad}(v_1) \circ \dots \circ \widetilde{Ad}(v_n)$  es la superposición de  $n$  reflexiones, por lo que  $\widetilde{Ad} \in SO(n)$  si y sólo si  $n$  es par. □

**Proposición 2.36** [11, pag. 20] *La representación espinorial es una representación inyectiva del grupo  $Spin(n)$ .*

**Demostración:**

Se distinguen dos casos en la demostración. Por una parte si  $n = 2k$  se vio anteriormente que  $Cl^c(n) = End(\Delta_n)$  por lo que el resultado es trivial. No obstante, en el caso en el que  $n = 2k + 1$  el razonamiento no es tan directo. Como espacios vectoriales  $\Delta_{2k+1} = \Delta_{2k}$ , de donde  $Gl(\Delta_{2k+1}) = Gl(\Delta_{2k})$  obteniéndose así el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Spin(2k) & \xrightarrow{\phi_{2k}} & Gl(\Delta_{2k}) \\ \downarrow i & & \updownarrow \\ Spin(2k+1) & \xrightarrow{\phi_{2k+1}} & Gl(\Delta_{2k+1}) \end{array}$$

donde la aplicación  $i : Spin(2k) \rightarrow Spin(2k+1)$  representa la inclusión natural.

Por ser el diagrama conmutativo se deduce que el subgrupo normal  $H := Ker(\phi_{2k+1})$  es tal que  $H \cap i(Spin(2k)) = H \cap Spin(2k) = \{E\}$ , donde  $E$  es el elemento neutro del grupo  $Spin(2k)$ .

Sea  $h \in H$  y sean  $A, B \in SO(2k+1)$ . Por ser  $\widetilde{Ad} : Spin(2k+1) \rightarrow SO(2k+1)$  sobreyectiva han de existir  $a, b \in Spin(2k+1)$  tales que  $\widetilde{Ad}(a) = A$  y  $\widetilde{Ad}(b) = B$ . Resulta entonces que

$$\begin{aligned} A\widetilde{Ad}(h)B &= \widetilde{Ad}(a)\widetilde{Ad}(h)\widetilde{Ad}(b) \\ &= \widetilde{Ad}(ahb) \\ &= \widetilde{Ad}(h') \end{aligned}$$

donde  $h' \in H$  por ser  $H$  un subgrupo normal. Es decir, el subgrupo  $\widetilde{Ad}(H)$  es un subgrupo normal de  $SO(2k+1)$ .

Además se verifica que  $\widetilde{Ad}(H) \cap SO(2k) = \{Id\}$  ya que en caso contrario existiría al menos un elemento  $h \in H$  tal que  $\widetilde{Ad}(h) \in SO(2k)$  con lo que resultaría  $h \in \widetilde{Ad}^{-1}(SO(2k)) = Spin(2k)$  lo cual, como se vio, no puede suceder.

Por otra parte, si  $A \in \widetilde{Ad}(H) \subset SO(2k+1)$  su polinomio característico tiene grado impar, por lo que ha de existir un vector unitario  $v \in \mathbb{R}^{2k+1}$  tal que  $A(v) = v$ . Es decir, existe un elemento  $B \in SO(2k+1)$  para el cual

$$BAB^{-1} \in SO(2k)$$

Ahora bien, como  $\widetilde{Ad}(H)$  es un subgrupo normal resulta que  $BAB^{-1} \in \widetilde{Ad}(H) \cap SO(2k)$  de donde ha de ser  $BAB^{-1} = E$ .

Se tienen por tanto dos posibilidades para el subgrupo  $H$ , o bien  $H = \{E\}$  o bien  $H = \{-E, E\}$ . Pero como  $-E \in Spin(2k+1)$  es tal que  $-E \notin Ker(\phi_{2k+1})$  se obtiene finalmente que  $H = \{E\}$ .  $\square$



## Capítulo 3

# Estructuras espin sobre variedades

La Geometría Spin tiene sus raíces en la segunda década del siglo XX con el descubrimiento de los espinores en 1913 por parte de Cartan cuando estudiaba la teoría de las representaciones del grupo ortogonal. Seguidamente adquirieron un papel muy relevante en la Física por su relación con las matrices de Pauli y la teoría relativista de Dirac para el estudio del spin del electrón. El objetivo de este capítulo es hacer una pequeña introducción a esta geometría y a algunos de los conceptos que en ella se utilizan, como por ejemplo al de *variedad espinorial*, al de *fibrado espinorial* y al de *derivada espinorial* entre otros. También se realiza un breve estudio del *operador de Dirac*, el cual juega un papel fundamental en la Física. Finalmente se adaptan todos estos conceptos y operadores definidos en general al caso particular en el que las variedades objeto de estudio sean espacios homogéneos.

### 3.1. Estructuras espinoriales

El concepto de estructura espinorial se puede definir de forma general sobre un fibrado principal  $P(M, p, SO(n)) \equiv P_{SO(n)}M$  cualquiera de la siguiente forma

**Definición 3.1** Una estructura espinorial sobre el fibrado principal  $P(M, p, SO(n))$  es un par  $(Q(M, q, Spin(n)), \phi)$  donde:

- $Q(M, q, Spin(n))$  es un fibrado principal,
- $\phi : Q \rightarrow P$  es un recubrimiento de dos hojas para el cual el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Q \times Spin(n) & \longrightarrow & Q \\
 \downarrow \phi \times \tilde{Ad} & & \downarrow \phi \\
 P \times SO(n) & \longrightarrow & P
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow q \\
 \searrow p \\
 M
 \end{array}$$

conmuta.

El punto  $\cdot$  de las flechas horizontales representa la acción del grupo  $Spin(n)$  o del grupo  $SO(n)$  según corresponda en cada caso.

No obstante, y a pesar de este carácter general, históricamente para definir el concepto de estructura espinorial es habitual partir de un fibrado vectorial sobre una variedad diferenciable. Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado vectorial  $n$ -dimensional sobre la variedad  $M$  dotado de una estructura de Riemann; es decir, en cada punto de la variedad se tiene un producto interior definido positivo sobre la fibra y que varía diferenciablemente. Es conocido que este tipo de estructuras siempre existen. También se supone que dicho fibrado es orientable; es decir, que existe una orientación definida continuamente sobre las fibras, hecho que no siempre ocurre.

La existencia de una estructura de Riemann sobre  $E$  es equivalente a la existencia de una reducción de su fibrado principal de las referencias a un fibrado de las referencias ortonormales  $P_O E$ ; y la elección de una orientación es equivalente a la elección de un  $SO(n)$ -fibrado principal,  $P_{SO(n)} E \subset P_O E$ .

Haciendo uso del homomorfismo  $\widetilde{Ad} : Spin(n) \rightarrow SO(n)$  visto en el capítulo anterior se puede establecer la siguiente definición:

**Definición 3.2** Una estructura espinorial sobre  $E$  es un fibrado principal con grupo de estructura  $Spin(n)$ ,  $P_{Spin(n)} E$ , junto con un recubrimiento universal de dos hojas

$$\phi : P_{Spin(n)} E \rightarrow P_{SO(n)} E$$

tal que  $\phi(p \cdot x) = \phi(p) \widetilde{Ad}(x)$ ,  $\forall p \in P_{Spin(n)} E$  y  $\forall x \in Spin(n)$ .

De esta forma se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Spin(n) & \xrightarrow{\widetilde{Ad}} & SO(n) \\
 \nearrow & \downarrow & \downarrow \\
 \mathbb{Z}_2 & & \\
 \searrow & & \\
 P_{Spin(n)} E & \xrightarrow{\phi} & P_{SO(n)} E \\
 \searrow \pi' & & \swarrow \pi \\
 & M &
 \end{array}$$

**Teorema 3.3** Sea  $E$  un fibrado vectorial orientado; es decir, tal que su primera clase de Stiefel-Whitney es cero,  $\omega_1(E) = 0$ , sobre una variedad  $M$ . Una estructura espinorial sobre  $E$  existe si y sólo si su segunda clase de Stiefel-Whitney,  $\omega_2(E)$ , es nula. Si  $E$  es un

fibrado vectorial  $2n$ -dimensional induce un fibrado vectorial complejo  $n$ -dimensional,  $E_{\mathbb{C}}$ , en cuyo caso es un hecho conocido que se verifica

$$\omega_2(E) \equiv c_1(E_{\mathbb{C}}) \pmod{2}.$$

donde  $c_1(E_{\mathbb{C}})$  es la primera clase de Chern de  $E_{\mathbb{C}}$ .

### 3.2. Variedades espinoriales

Una vez analizados todos los conceptos anteriores se tienen los elementos necesarios para el estudio de las variedades espinoriales.

**Definición 3.4** Una variedad espinorial es una variedad de Riemann orientable y cuyo fibrado vectorial  $TM$  está dotado de una estructura espinorial. Es decir, sea  $(M^n, g)$  una variedad de Riemann  $n$ -dimensional orientable y sea  $P(M, p, SO(n))$  el fibrado de todas sus  $SO(n)$ -referencias. Una estructura espinorial de  $(M^n, g)$  es un par  $(Q(M, q, Spin(n)), \phi)$  donde  $Q(M, q, Spin(n))$  es un  $Spin(n)$ -fibrado principal y  $\phi : Q \rightarrow P$  es una aplicación sobreyectiva tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q \times Spin(n) & \xrightarrow{\quad} & Q \\ \downarrow \phi \times \widetilde{Ad} & & \downarrow \phi \\ P \times SO(n) & \xrightarrow{\quad} & P \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow q \\ \searrow p \\ M \end{array}$$

es conmutativo.

Se definen las clases de Stiefel-Whitney  $\omega_i(M)$  de una variedad  $M$  como las clases de Stiefel-Whitney de su fibrado tangente  $TM$ .

**Teorema 3.5** Una variedad de Riemann orientable  $M$  admite una estructura espinorial si y solo si su segunda clase de Stiefel-Whitney es cero.

### 3.3. Fibrado espinorial, derivada espinorial y curvatura espinorial

Se considera ahora el espacio vectorial de los espinores de Dirac,  $\Delta_n$ . Como se vio en el capítulo anterior el grupo  $Spin(n)$  actúa mediante la representación espinorial sobre dicho espacio vectorial, por lo que es posible definir el fibrado vectorial complejo

$$S := Q \times_{Spin(n)} \Delta_n$$

asociado al fibrado principal  $Q(M, q, Spin(n))$ . Dicho fibrado vectorial  $S$  se denomina el *fibrado espinorial* de  $(M, g)$ . Sea  $\Gamma(S)$  el conjunto de secciones diferenciables del fibrado  $S := Q \times_{Spin(n)} \Delta_n$ , a los elementos  $\psi \in \Gamma(S)$  se les denomina *campo espinorial* sobre  $(M, g)$ . En el caso de que la dimensión de  $M$  sea par,  $n = 2m$ , el fibrado espinorial  $S$  se divide en dos subfibrados  $S = S^+ \oplus S^-$  dados por

$$S^\pm := Q \times_{Spin(n)} \Delta_n^\pm$$

los cuales se denominan la *parte positiva* y *parte negativa* de  $S$  respectivamente.

La conexión de Levi-Civita  $\nabla^M$  sobre  $(M, g)$  define una derivada covariante  $\nabla^S$  en el fibrado  $S$

$$\nabla^S : \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(TM \otimes S)$$

llamada *derivada espinorial*. Localmente,  $\nabla^S$  está dada por la fórmula

$$(3.1) \quad \nabla_X^S \psi = X(\psi) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k < l \leq n} \omega_{kl}(X) e_k \cdot e_l \cdot \psi$$

donde  $\omega_{kl}(\cdot) = g(\nabla_\cdot^M e_k, e_l)$  son las formas de conexión de  $\nabla^M$  con respecto a la base local ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $TM$ . Para el caso de dimensión par la derivada espinorial respeta las partes positivas y negativas del fibrado espinorial  $S$ .

**Proposición 3.6** [6, pag. 16] *La derivada espinorial verifica las siguientes igualdades:*

1.  $X \langle \psi, \varphi \rangle = \langle \nabla_X^S \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \nabla_X^S \varphi \rangle$
2.  $\nabla_X^S (Y \cdot \psi) = \nabla_X^M Y \cdot \psi + Y \cdot \nabla_X^S \psi$
3.  $\nabla_X^S (\omega \cdot \psi) = \nabla_X^M \omega \cdot \psi + \omega \cdot \nabla_X^S \psi$

donde  $X, Y$  son campos de vectores,  $\omega$  es una  $k$ -forma y  $\psi, \varphi$  son campos espinoriales sobre  $M$ .

Asociada a esta derivada covariante se define el *tensor curvatura espinorial*

$$R^S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \text{End}(S)$$

como

$$R^S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \begin{array}{ccc} S & & \psi \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & & \\ (X, Y) & \mapsto & R^S(X, Y)(\psi) = \nabla_X^S \nabla_Y^S \psi - \nabla_Y^S \nabla_X^S \psi - \nabla_{[X, Y]}^S \psi. \end{array}$$

Es posible relacionar dicho tensor  $R^S(X, Y)$  con el tensor de curvatura de la conexión de Levi-Civita de  $(M^n, g)$ . Se considera localmente el tensor de curvatura de  $(M^n, g)$  como el homomorfismo de fibrados

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \Lambda^2 M \\ (e_i, e_j) &\longmapsto R(e_i, e_j) := \sum_{k < l} R_{ijkl} e_k^* \wedge e_l^* \end{aligned}$$

donde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base ortonormal del fibrado tangente,  $R_{ijkl} = g(R^M(e_i, e_j)e_k, e_l)$  son las componentes del tensor curvatura  $R^M$  de  $(M^n, g)$  y  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  es la base dual de la base ortonormal anterior. Entonces según [6, pag. 16] haciendo uso de la ecuación (3.1) y de la definición del tensor curvatura para la derivada espinorial  $\nabla^S$  se obtiene que

$$(3.2) \quad R^S(X, Y)\psi = \frac{1}{2}R(X, Y) \cdot \psi$$

donde el  $\frac{1}{2}$  viene motivado por el isomorfismo  $\widetilde{Ad}_* : \mathfrak{spin}(n) \longrightarrow \mathfrak{so}(n)$ .

Además, si ahora se define el homomorfismo

$$\begin{aligned} \widetilde{Ric} : TM &\longrightarrow TM \\ X &\longmapsto \widetilde{Ric}(X) := \sum_{k=1}^n Ric(X, e_k)e_k \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (3.2) y la primera identidad de Bianchi para el tensor curvatura  $R^M$  de  $(M^n, g)$  sucesivas veces, se obtiene

$$(3.3) \quad \sum_{k=1}^n e_k \cdot R^S(X, e_k)\psi = -\frac{1}{2}\widetilde{Ric}(X) \cdot \psi$$

### 3.4. Espinores de Killing

**Definición 3.7** *Un campo espinor  $\psi \in \Gamma(S)$  se llama espinor de Killing asociado al número de killing  $B \in \mathbb{C}$  si se verifica la ecuación diferencial*

$$\nabla_X \psi = BX \cdot \psi$$

para todo campo de vectores  $X$  sobre  $M$ .

Se denotará por  $\mathfrak{K}(M^n, g)_B$  el espacio de todos los espinores de Killing de  $(M^n, g)$  asociados al número de Killing  $B$ .

**Teorema 3.8** [6, pag. 31] *Sea  $(M^n, g)$  una variedad espinorial conexa con un espinor de Killing no trivial  $\psi \in \mathfrak{K}(M^n, g)_B$ . Entonces  $(M^n, g)$  es una variedad Einstein con curvatura escalar*

$$R = 4n(n-1)B^2.$$

**Demostración:**

Sean  $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  e  $Y = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \in \mathfrak{X}(M)$  y sea  $\psi \in \mathfrak{K}(M^n, g)_B$  un espinor de Killing no trivial; es decir,  $\nabla_X^S \psi = BX \cdot \psi, \forall X \in \mathfrak{X}(M)$ . Así

$$\begin{aligned}
R^S(X, Y)\psi &= \nabla_X^S \nabla_Y^S \psi - \nabla_Y^S \nabla_X^S \psi - \nabla_{[X, Y]}^S \psi \\
&= \nabla_X^S (BY \cdot \psi) - \nabla_Y^S (BX \cdot \psi) - B[X, Y] \cdot \psi \\
&= \nabla_X BY \cdot \psi + BY \cdot \nabla_X^S \psi - \nabla_Y BX \cdot \psi - BX \nabla_Y^S \psi - B[X, Y] \cdot \psi \\
&= B \underbrace{(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])}_0 \cdot \psi + B(Y \cdot \nabla_X^S \psi - X \cdot \nabla_Y^S \psi) \\
&= B(Y \cdot (BX \cdot \psi) - X(BY \cdot \psi)) \\
&= B^2((YX - XY) \cdot \psi) \\
&= 2B^2(YX + g(X, Y) \cdot 1)\psi
\end{aligned}$$

donde la última de las igualdades se obtiene aplicando la condición de las álgebras de Clifford.

Ahora bien, de la igualdad (3.3) se sigue

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ric}(X)\psi &= -2 \sum_{k=1}^n e_k \cdot R^S(X, e_k)\psi \\
&= -2 \sum_{k=1}^n s_k \cdot (2B^2(s_k \cdot X + g(X, s_k))) \cdot \psi \\
&= -4B^2 \sum_{k=1}^n e_k \cdot (e_k \cdot X + g(X, e_k)) \cdot \psi \\
&= -4B^2 \left( \sum_{k=1}^n (e_k \cdot e_k)X + \sum_{k=1}^n e_k \cdot g(X, e_k) \right) \psi \\
&= -4B^2 \left( -nX + \sum_{k=1}^n g(X, e_k) e_k \right) \psi \\
&= -4B^2(-nX + X)\psi = -4B^2(-n+1)X \cdot \psi \\
&= 4B^2(n-1)X \cdot \psi
\end{aligned}$$

pero como  $\psi$  no se anula en ningún punto se tiene que:

$$\widetilde{Ric}(X) = 4B^2(n-1)X$$

De donde

$$\begin{aligned}
 Ric(X, Y) &= Ric(X, \sum_{i=1}^n \mu_i e_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \mu_i (\widetilde{Ric}(X))_i \\
 &= 4B^2(n-1) \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i \\
 &= 4B^2(n-1)g(X, Y)
 \end{aligned}$$

Con lo que  $(M^n, g)$  es una variedad Einstein de curvatura escalar constante

$$R = 4B^2n(n-1)$$

□

Es decir, si se quiere comprobar si sobre una variedad existen espinores de Killing no triviales lo primero que ha de comprobarse es que la variedad está dotada de una métrica con la que es una variedad Einstein. También se concluye de este teorema que si  $\exists \psi \in \mathfrak{K}(M^n, g)_B$  entonces  $B$  ha de ser un número real o imaginario puro. Cuando  $B \in \mathbb{R} - \{0\}$  decimos que  $\psi$  es un *espinor de Killing real*; si  $B \in i\mathbb{R} - \{0\}$  decimos que  $\psi$  es un *espinor de Killing imaginario* y si  $B = 0$ , se dice que  $\psi$  es un *campo espinor  $\nabla^S$ -paralelo*.

### 3.5. El operador de Dirac

**Definición 3.9** Sea  $(M^n, g)$  una variedad de Riemann espinorial con fibrado espinor  $S$ . El operador de Dirac de  $(M^n, g)$  es el operador diferencial de primer orden

$$D : \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S)$$

que localmente puede expresarse como

$$D = \sum_{k=1}^n e_k \cdot \nabla_{e_k}^S$$

siendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormal de  $(M^n, g)$ .

**Teorema 3.10** [6, pag. 21] Sea  $(M^n, g)$  una variedad de Riemann espinorial compacta con curvatura escalar positiva,  $R > 0$ . Entonces

1. El primer autovalor positivo y el primer autovalor negativo,  $\lambda_+$  y  $\lambda_-$ , del operador de Dirac verifican la siguiente acotación

$$|\lambda_{\pm}| \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_0 n}{n-1}},$$

donde  $R_0$  es el mínimo de la curvatura escalar.

2. Si los valores extremos  $+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_0n}{n-1}}$  o  $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_0n}{n-1}}$  son autovalores de  $D$  y  $\psi$  es el correspondiente auto-espinor, entonces  $\psi$  verifican las ecuaciones diferenciales

$$\nabla_X \psi + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_0}{n(n-1)}} X \cdot \psi = 0$$

$$\nabla_X \psi - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_0}{n(n-1)}} X \cdot \psi = 0$$

respectivamente, para todos los campos de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Recíprocamente, si  $\psi$  es un espinor de Killing asociado al número de Killing  $B$ , por la ecuación

$$\nabla_X \psi = BX \cdot \psi, \quad 0 \neq B \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{X}(M)$$

resulta que

$$\begin{aligned} D\psi &= \sum_{i=1}^n s_i \cdot (\nabla_{s_i} \cdot \psi) \\ &= B \sum_{i=1}^n s_i \cdot s_i \cdot \psi \\ &= -nB\psi \end{aligned}$$

y, como por el Teorema 3.8 se tiene  $B^2 = \frac{R}{4n(n-1)}$ , resulta la igualdad

$$D\psi = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{nR}{n-1}} \psi$$

### 3.6. Estructuras espinoriales sobre espacios homogéneos

En el caso particular de que la variedad de Riemann con la que se desea trabajar sea un espacio homogéneo es posible expresar, haciendo uso de la representación de isotropía, todos estos conceptos generales mediante nuevas expresiones en las que intervienen solo las herramientas propias de este tipo de espacios. De hecho se verá que las estructuras espinoriales de un espacio homogéneo  $M = G/H$  pueden ser caracterizadas por los levantamientos de dicha representación de isotropía.

Sea  $M = G/H$  un espacio homogéneo reductivo orientado de dimensión  $n$  donde  $G$  es conexo, compacto y simplemente conexo y  $H$  un subgrupo cerrado y conexo. Por tanto existe una descomposición del álgebra de Lie de  $G$ ,  $\mathfrak{g}$ , dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$  siendo  $\mathfrak{h}$  el álgebra de Lie de  $H$  y  $\mathfrak{m}$  un subespacio complementario de  $\mathfrak{h}$   $Ad_H$ -invariante. Se supone también que la métrica de Riemann corresponde a un producto interior  $Ad_H$ -invariante sobre  $\mathfrak{m}$ .

La proyección  $\pi : G \rightarrow M$  en el espacio cociente induce un isomorfismo  $\pi_* : \mathfrak{m} \rightarrow T_oM$  donde  $o$  es la imagen por  $\pi$  del elemento neutro de  $G$ ,  $o = \pi(e) = eH = H$ . Por ser  $G$  conexo la acción  $T : G \times G/H \rightarrow G/H$  dada por  $T(g, g'h) = g'gH$  conserva la orientación, por lo tanto la imagen de la representación de isotropía  $\alpha$  está contenida en  $SO(T_oM) \approx SO(\mathfrak{m})$ . Además, para cada  $g \in G$  la acción  $T$  induce el difeomorfismo  $T_g : G/H \rightarrow G/H$  dado por  $T_g(g'H) = T(g, g'H) = gg'H$ .

Tomando una base ortonormal orientada positiva  $b_o = (X_1, \dots, X_n)$  de  $\mathfrak{m}$ , las extensiones invariantes a la izquierda de los  $X_i$  sobre  $G$  se denotan con las mismas letras. Se escribirá  $\bar{b}_o = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) = (\pi_*X_1, \dots, \pi_*X_n)$  para la correspondiente base de  $T_{gH}M$  donde  $gH$  es un punto genérico de  $M$ . Como se vio en el primer capítulo, la elección de esta base permite considerar la representación de isotropía  $\alpha$  como una acción en  $\mathfrak{m}$  verificando  $(T_h)_*o \cdot \bar{b}_o = \bar{b}_o \cdot \alpha(h)$ .

**Lema 3.11** [4] *El fibrado principal  $SO(M)$  de las referencias ortonormales orientadas de  $TM$  puede identificarse con  $G \times_\alpha SO(n)$ ; es decir, con el conjunto de clases de equivalencia  $[g, A]$  donde  $g \in G, A \in SO(n)$  y la relación está dada por  $[g, A] = [gh, \alpha(h^{-1})A], h \in H$ . La operación del grupo de estructura  $SO(n)$  sobre  $SO(M)$  está dada por  $[g, A] = [g, A \cdot B]$ .*

**Demostración:**

Se considera el fibrado principal  $G_H(G/H)$  y la acción inducida por la representación de isotropía  $\alpha : H \rightarrow SO(\mathfrak{m})$  sobre  $SO(\mathfrak{m})$  dada por

$$\begin{array}{ccc} \rho : H & \longrightarrow & \begin{array}{ccc} SO(\mathfrak{m}) & & A \\ & \downarrow & \downarrow \\ SO(\mathfrak{m}) & & \end{array} \\ h & \mapsto & \rho(h) = \rho(h)(A) = \alpha(h^{-1}) \cdot A. \end{array}$$

Haciendo uso de esta acción se puede definir el fibrado asociado al fibrado principal  $G_H(G/H)$ ,  $G \times_\rho SO(\mathfrak{m})$ , de la forma habitual; es decir, definiendo la acción de  $H$  en  $G \times SO(\mathfrak{m})$  por

$$\begin{array}{ccc} \mu : \{G \times SO(\mathfrak{m})\} \times H & \longrightarrow & G \times SO(\mathfrak{m}) \\ ((g, A), h) & \mapsto & (gh, \alpha(h^{-1}) \cdot A). \end{array}$$

En  $G \times SO(\mathfrak{m})$  se toma la relación de equivalencia dada por

$$(g, A) \sim (g', B) \Leftrightarrow \exists h \in H \text{ tal que } \begin{cases} g = g'h \\ A = \alpha(h^{-1})B \end{cases}$$

por lo que se tiene el espacio cociente  $G \times_\alpha SO(\mathfrak{m}) \approx \frac{G \times SO(\mathfrak{m})}{H}$  donde

$$[g, A] = \{(gh, \alpha(h^{-1})A) : h \in H\}.$$

Además también es posible considerar este fibrado como un fibrado principal con grupo estructural  $SO(n)$  definiendo la acción por la derecha

$$\begin{aligned} \{G \times_{\alpha(H)} SO(\mathfrak{m})\} \times SO(\mathfrak{m}) &\longrightarrow G \times_{\alpha} SO(\mathfrak{m}) \\ ([gh, \alpha(h^{-1})A], B) &\mapsto [gh, \alpha(h^{-1})AB] \end{aligned}$$

Queda comprobar que este fibrado principal es equivalente al  $SO(n)$ -fibrado principal de las referencias ortogonales orientadas. Para ello se toma la aplicación

$$\begin{aligned} \varrho: G \times SO(\mathfrak{m}) &\longrightarrow SO(M) \\ (g, A) &\mapsto \varrho(g, A) = (T_g)_* \bar{b}_o \cdot A \end{aligned}$$

cuya inducida en el espacio cociente está bien definida; es decir, si tomamos otro representante de la clase de equivalencia  $[gh, \alpha(h^{-1})A]$  resulta que

$$\begin{aligned} [gh, \alpha(h^{-1})A] &\mapsto (T_{gh})_* \bar{b}_o \alpha(h^{-1})A \\ &= (T_g)_* (T_h)_* \bar{b}_o \alpha(h^{-1})A \\ &= (T_g)_* \bar{b}_o \alpha(h) \alpha(h^{-1})A \\ &= (T_g)_* \bar{b}_o A. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si  $B \in SO(M)_{gH}$ ; es decir, si es un elemento perteneciente a la fibra en el punto  $gH$ , existirá un único elemento  $C \in SO(\mathfrak{m})$  tal que  $(T_g)_* \bar{b}_o C = B$ . Se define la aplicación

$$\begin{aligned} \rho': SO(M) &\longrightarrow G \times_{\alpha} SO(\mathfrak{m}) \\ B = (T_g)_* \bar{b}_o C &\mapsto [g, C] \end{aligned}$$

y se prueba finalmente de forma directa que  $\rho$  y  $\rho'$  son inversas entre si.  $\square$

Obsérvese que en dicha demostración la identificación depende directamente de la elección de  $b_0$ .

**Lema 3.12** [4] *El conjunto de levantamientos  $\alpha'$  de la representación de isotropía  $\alpha$  está en correspondencia 1-1 con el conjunto de estructuras espinoriales sobre  $M$ .*

**Demostración:**

Sea  $\alpha': H \rightarrow Spin(n)$  un levantamiento del homomorfismo de grupos de Lie  $\alpha$ ; es decir, un homomorfismo tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & Spin(n) & \\ & \nearrow \alpha' & \downarrow \tilde{Ad} \\ H & \xrightarrow{\alpha} & SO(n) \end{array}$$

es conmutativo.

Siguiendo los pasos de la proposición anterior se define el fibrado principal  $Spin_{\alpha'}(M) = G \times_{\alpha'} Spin(n)$  cuyo grupo estructural en este caso es el grupo  $Spin(n)$  y cuya acción por la derecha está dada por

$$\begin{aligned} Spin_{\alpha'}(M) \times Spin(n) &\longrightarrow Spin_{\alpha'}(M) \\ ([g, \Lambda_1], \Lambda_2) &\mapsto [g, \Lambda_1 \cdot \Lambda_2] \end{aligned}$$

Se define la aplicación  $\varphi$  por

$$\begin{aligned} \varphi : Spin_{\alpha'}(M) &\longrightarrow SO(M) \\ [g, \Lambda] &\mapsto [g, \bar{b}_o \cdot \widetilde{Ad}(\Lambda)] \end{aligned}$$

que es una aplicación de recubrimiento (de dos hojas) con la que resulta conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Spin_{\alpha'}(M) \times Spin(n) &\xrightarrow{\cdot}& Spin_{\alpha'}(M) \\ \downarrow \varphi \times \widetilde{Ad} && \downarrow \varphi \\ SO(M) \times SO(n) &\xrightarrow{\cdot}& SO(M) \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ M \\ \end{array}$$

resultando así que  $Spin_{\alpha'}(M)$  es una estructura espinorial sobre  $M$ .

Recíprocamente, si se supone que se tiene definida una estructura espinorial sobre  $M$ ,  $Spin(M)$ , es posible definir a partir de ella un levantamiento de la representación de isotropía  $\alpha'$  de manera que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & Spin(n) \\ & \nearrow \alpha' & \downarrow \widetilde{Ad} \\ H & \xrightarrow{\alpha} & SO(n) \end{array}$$

sea conmutativo.

Por ser  $Spin(n)$  una estructura espinorial se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Spin(M) \times Spin(n) &\xrightarrow{\cdot}& Spin(M) \\ \downarrow \varphi \times \widetilde{Ad} && \downarrow \varphi \\ SO(M) \times SO(n) &\xrightarrow{\cdot}& SO(M) \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ M \\ \end{array}$$

Considerando la acción

$$\begin{aligned} \rho : G \times SO(M) &\longrightarrow SO(M) \\ (g, A) &\mapsto \rho(g, A) = (T_g)_* \cdot A \end{aligned}$$

que es compatible con la acción de  $SO(n)$  sobre  $SO(M)$ ; es decir

$$\rho(g, A \cdot B) = (T_g)_* \cdot A \cdot B = ((T_g)_* \cdot A) \cdot B = \rho(g, A) \cdot B$$

ya que el producto de matrices es asociativo.

Ahora bien, como  $G$  es simplemente conexo, es posible levantar esta acción por la izquierda a una nueva acción también por la izquierda de  $G$  sobre  $Spin(M)$ ,  $\rho'$ , de tal forma que sea compatible con la acción de  $Spin(n)$  y de forma que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times Spin(M) & \xrightarrow{\rho'} & Spin(M) \\ \downarrow id \times \varphi & & \downarrow \varphi \\ G \times SO(M) & \xrightarrow{\rho} & SO(M) \end{array}$$

conmute.

Además, como  $H$  deja invariante la fibra  $SO(M)_o$

$$\rho(h, A_o) \longrightarrow (T_h)_{*o} \cdot A_o = A_o$$

también la dejará  $\rho'$  para  $Spin(M)_o$ .

Sea  $b'_o \in Spin(M)_o$  tal que  $\varphi(b'_o) = \bar{b}_o$ . Para todo  $h \in H$  existe un único  $\Lambda_h \in Spin(n)$  tal que  $\rho'(h, b'_o) = b'_o \cdot \Lambda_h$  (ya que  $Spin(M)$  es un fibrado principal con grupo estructural  $Spin(n)$ ), definiendo  $\alpha'(h) = \Lambda_h$  se comprueba fácilmente que  $\Lambda$  es un homomorfismo de grupos de Lie continuo (y por lo tanto diferenciable)

$$\begin{aligned} \alpha'(hh') &= \Lambda(hh') \quad \text{tal que} & hh'b'_o &= b'_o \Lambda_{hh'} \\ & & hb'_o \Lambda_{h'} &= b'_o \Lambda_{hh'} \\ & & b'_o \Lambda_h \Lambda_{h'} &= b'_o \Lambda_{hh'} \end{aligned}$$

Ahora bien, para todo  $h \in H$  se tiene que

$$\varphi(b'_o) \cdot \lambda(\alpha'(h)) = \varphi(b'_o \cdot \alpha'(h)) = \varphi(\rho'(h, b'_o)) = \rho(h, \varphi(b'_o)) = \bar{b}_o \alpha(h)$$

y así  $\alpha = \lambda \circ \alpha'$ , y  $\alpha'$  es un levantamiento de  $\alpha$ .

Una vez visto como construir un levantamiento  $\alpha'$  de  $\alpha$  a partir de una estructura espinorial sobre  $M$  y viceversa, se puede ver que estas construcciones son inversas entre sí.

En efecto, se comienza con el levantamiento de  $\alpha'$  y se considera la estructura espinorial  $Spin_{\alpha'}(M)$ . Ahora se verá que aplicando la técnica anterior se obtiene un nuevo levantamiento  $\alpha''$  de  $\alpha$  que coincide con  $\alpha'$ .

Sea  $b'_o = [e, \pm 1_{Spin}]$ . Entonces para todo  $h \in H$  resulta que

$$b'_o \cdot \alpha''(h) = h \cdot b'_o = [h, \pm 1_{Spin}] = [e, \pm \alpha'(h)] = b'_o \cdot \alpha'(h)$$

y por lo tanto  $\alpha'' = \alpha'$ .

Recíprocamente, si se parte de una estructura  $Spin(M)$ , entonces para la correspondiente  $\alpha'$ , se comprueba de forma directa que la aplicación

$$\begin{aligned} \varepsilon : G \times Spin(n) &\longrightarrow Spin(M) \\ (g, \Lambda) &\mapsto \varepsilon(g, \Lambda) = \rho'(g, b'_o \cdot \Lambda) \end{aligned}$$

pasa al cociente  $G \times_{\alpha'} Spin(n)$  definiendo un isomorfismo.  $\square$

Sea  $\phi : Spin(n) \longrightarrow End(\Delta_n)$  la representación espinorial y  $\Sigma_{\alpha'} M$  el fibrado de espinores correspondiente a la estructura espinorial  $Spin_{\alpha'}(M)$ .

**Lema 3.13** [4]  $\Sigma_{\alpha'} M = G \times_{\phi \circ \alpha'} \Delta_n$

**Demostración:**

Por lo visto anteriormente  $\Sigma_{\alpha'} M = Spin_{\alpha'}(M) \times_{\phi} \Delta_n = (G \times_{\alpha'} Spin(n)) \times_{\phi} \Delta_n$ . Así, la aplicación

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha'} M &\longrightarrow G \times_{\phi \circ \alpha'} \Delta_n \\ [[g, \Lambda], v] &\mapsto [g, \phi(\Lambda)v] \end{aligned}$$

está bien definida

$$\begin{aligned} [[gh, \alpha'(h^{-1})\Lambda_1]\Lambda_2, \phi(\Lambda_2^{-1})v] &\mapsto [gh, \phi(\alpha'(h^{-1})\Lambda_1\Lambda_2)\phi(\Lambda_2^{-1})v] \\ &= [gh, \phi(\alpha'(h^{-1})\Lambda_1)v] \\ &= [gh, (\phi \circ \alpha')(h^{-1})\phi(\Lambda_1)v] \\ &= [g, \phi(\Lambda_1)v]. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} G \times_{\phi \circ \alpha'} \Delta_n &\longrightarrow \Sigma_{\alpha'} M = (G \times_{\alpha'} Spin(n)) \times_{\phi} \Delta_n \\ [g, v] &\mapsto [[g, 1], v] \end{aligned}$$

también está bien definida

$$\begin{aligned} [gh, (\phi \circ \alpha')(h^{-1})v] &\mapsto [[gh, 1], \phi(\alpha'(h)^{-1})v] \\ &= [[gh, \alpha'(h^{-1})]\alpha'(h), \phi(\alpha'(h)^{-1})v] \\ &= [[gh, \alpha'(h^{-1})], v] \\ &= [[g, 1], v]. \end{aligned}$$

Finalmente se comprueba que estas dos aplicaciones son inversas una de la otra. Por una parte se tiene que

$$\begin{aligned} [[g, \Lambda], v] &\mapsto [g, \phi(\Lambda)v] \mapsto [[g, 1], \phi(\Lambda)v] \\ &= [[g, \Lambda]\Lambda^{-1}, \phi(\Lambda)v] \\ &= [[g, \Lambda], v] \end{aligned}$$

y por la otra

$$\begin{aligned} [g, v] &\mapsto [[g, 1], v] \mapsto [g, \phi(1)v] \\ &= [g, v]. \end{aligned}$$

$\square$

**Corolario 3.14** *Los campos de espinores  $\psi \in \Gamma(S)$  se identifican con las funciones  $\psi : G \rightarrow \Delta_n$  que verifican la condición de invariancia*

$$\psi(gh) = (\phi \circ \alpha')(h^{-1})\psi(g)$$

## Capítulo 4

# Espinores de Killing sobre la variedad $B^7 = Sp(2)/SU(2)$

M. Berger ([7]) clasifica los espacios homogéneos Riemannianos simplemente conexos normales de rango uno, demostrando que todos ellos son difeomorfos o bien a espacios de Riemann simétricos compactos de rango uno o bien a uno de los dos espacios excepcionales siguientes:  $B^7 = Sp(2)/SU(2)$  o  $B^{13} = (SU(3) \times SO(3))/Sp(2) \times S^1$  donde

1.  $B^7 := Sp(2)/SU(2)$ , donde  $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sp}(2)$  está dado por:

$$\text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3}i \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}i & k \end{pmatrix} \right\}$$

2.  $B^{13} := SU(5)/H$ , donde el grupo  $H$  está dado por

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} zA & 0 \\ 0 & \bar{z}^4 \end{pmatrix} \mid A \in Sp(2) \subset SU(4), z \in S^1 \subset \mathbb{C} \right\} \subset U(4) \subset SU(5).$$

En particular  $H$  es isomorfo a  $(Sp(2) \times S^1)/\{\pm(id, 1)\}$ .

Posteriormente B. Wilking ([36]) demostró que este resultado era incompleto puesto que existe una tercera excepción

3.  $W^7 := (SU(3) \times SO(3))/U^\bullet(2)$ , donde  $U^\bullet(2)$  es la imagen bajo el embebimiento  $(\iota, \pi) : U(2) \hookrightarrow SU(3) \times SO(3)$  dado por la inclusión natural

$$\iota(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A^{-1} \end{pmatrix} \quad \forall A \in SU(2)$$

y la proyección  $\pi : U(2) \rightarrow U(2)/S^1 \cong SO(3)$ , donde  $S^1 \subset U(2)$  denota el centro de  $U(2)$ . En  $SU(3) \times SO(3)$  consideramos la familia de métricas bi-invariantes 1-paramétrica  $\tilde{g}_\lambda := (B_{\mathfrak{su}(3)} \times \lambda B_{\mathfrak{so}(3)})$  para  $\lambda > 0$ , donde  $B_{\mathfrak{su}(3)}$  y  $B_{\mathfrak{so}(3)}$  son las formas

de Killing de  $\mathfrak{su}(3)$  y  $\mathfrak{so}(3)$  respectivamente. La métrica inducida en el cociente  $V_3$  que hace que la proyección sea una submersión Riemanniana también se denotará por  $\tilde{g}_\lambda$ .

En [5] Bär considera esta variedad como el espacio  $SO(5)/SO(3)$ , donde la inclusión de  $SO(3) \subset SO(5)$  está inducida por la representación de  $SO(3)$  en el espacio de dimensión cinco de los polinomios armónicos homogéneos de grado dos en tres variables ([9], [37]) y demuestra que admite un único espinor de Killing. No obstante, no llega a calcular su expresión exacta. El objetivo de este capítulo es calcular de forma explícita la expresión de dicho espinor de Killing.

Para ello se considera la construcción dada por Berger para la variedad  $B^7$  y definida anteriormente. No obstante, una forma más explícita para su construcción está dada en los artículos de Chavel [10] y Naveira y Tarrío [29]. Un elemento del álgebra de Lie  $\mathfrak{sp}(2)$  del grupo simpléctico  $Sp(2)$  es una matriz antihermítica de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -\bar{a}_{12} & -a_{11} & \bar{a}_{14} & -\bar{a}_{13} \\ -\bar{a}_{13} & -a_{14} & a_{33} & a_{34} \\ -\bar{a}_{14} & a_{13} & -\bar{a}_{34} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

donde  $a_{11}$  y  $a_{33}$  son números imaginarios puros y el resto son números complejos arbitrarios. Sean  $S_i, i = 1, \dots, 10$ ; las matrices en  $\mathfrak{sp}(2)$  dadas por

$$\begin{aligned} S_1 : a_{11} &= -a_{22} = i, \\ S_2 : a_{33} &= -a_{44} = i, \\ S_3 : a_{12} &= -a_{21} = 1, \\ S_4 : a_{12} &= a_{21} = i, \\ S_5 : a_{34} &= -a_{43} = 1, \\ S_6 : a_{34} &= a_{43} = i, \\ S_7 : a_{13} &= -a_{31} = -a_{24} = a_{42} = 1, \\ S_8 : a_{13} &= a_{31} = a_{24} = a_{42} = i, \\ S_9 : a_{14} &= -a_{41} = a_{23} = -a_{32} = 1, \\ S_{10} : a_{14} &= a_{41} = -a_{23} = -a_{32} = i; \end{aligned}$$

siendo en cada una de ellas los elementos  $a_{ij}$  no mencionados iguales a 0. Estas matrices generan una base para  $\mathfrak{sp}(2)$ . Ahora bien, una base ortonormal para  $\mathfrak{sp}(2)$  con respecto al producto interior  $\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{5} \text{Traza}(XY)$  y adaptado a la descomposición reductiva  $\mathfrak{sp}(2) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{su}(2)$  está dada por las matrices

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2}(S_1 - 3S_2), & Q_2 &= \sqrt{\frac{5}{2}}S_3, \\ Q_3 &= \sqrt{\frac{5}{2}}S_4, & Q_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}S_5 - S_7) \\ Q_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}S_6 - S_8), & Q_6 &= \frac{\sqrt{5}}{2}S_9 \\ Q_7 &= \frac{\sqrt{5}}{2}S_{10}, & Q_8 &= \frac{1}{2}(3S_1 + S_2) \end{aligned}$$

$$Q_9 = S_5 + \frac{\sqrt{3}}{2}S_7 \quad Q_{10} = S_6 + \frac{\sqrt{3}}{2}S_8$$

Además los vectores  $\{Q_8, Q_9, Q_{10}\}$  generan el álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  mientras que los vectores  $\{Q_1, \dots, Q_7\}$  son una base para  $\mathfrak{m}$ . Los corchetes  $[Q_i, Q_j]$   $1 \leq i < j \leq 10$ , están dados por

$$\begin{aligned} [Q_1, Q_2] &= Q_3, & [Q_1, Q_3] &= -Q_2, \\ [Q_1, Q_4] &= -Q_5 - \sqrt{6}Q_{10}, & [Q_1, Q_5] &= Q_4 + \sqrt{6}Q_9, \\ [Q_1, Q_6] &= -Q_7, & [Q_1, Q_7] &= Q_6, \\ [Q_1, Q_8] &= 0, & [Q_1, Q_9] &= -\sqrt{6}Q_5, \\ [Q_1, Q_{10}] &= \sqrt{6}Q_4, & [Q_2, Q_3] &= Q_1 + 3Q_8, \\ [Q_2, Q_4] &= Q_6, & [Q_2, Q_5] &= -Q_7, \\ [Q_2, Q_6] &= -Q_4 + \sqrt{3/2}Q_9, & [Q_2, Q_7] &= Q_5 - \sqrt{3/2}Q_{10}, \\ [Q_2, Q_8] &= -3Q_3, & [Q_2, Q_9] &= -\sqrt{3/2}Q_6, \\ [Q_2, Q_{10}] &= \sqrt{3/2}Q_7, & [Q_3, Q_4] &= Q_7, \\ [Q_3, Q_5] &= Q_6, & [Q_3, Q_6] &= -Q_5 + \sqrt{3/2}Q_{10}, \\ [Q_3, Q_7] &= -Q_4 + \sqrt{3/2}Q_9, & [Q_3, Q_8] &= 3Q_2, \\ [Q_3, Q_9] &= -\sqrt{3/2}Q_7, & [Q_3, Q_{10}] &= -\sqrt{3/2}Q_6, \\ [Q_4, Q_5] &= -Q_1 + Q_8, & [Q_4, Q_6] &= Q_2 + \sqrt{5/2}Q_9, \\ [Q_4, Q_7] &= Q_3 + \sqrt{5/2}Q_{10}, & [Q_4, Q_8] &= -Q_5, \\ [Q_4, Q_9] &= -\sqrt{5/2}Q_6, & [Q_4, Q_{10}] &= -2\sqrt{3/2}Q_1 - \sqrt{5/2}Q_7, \\ [Q_5, Q_6] &= Q_3 - \sqrt{5/2}Q_{10}, & [Q_5, Q_7] &= -Q_2 + \sqrt{5/2}Q_9, \\ [Q_5, Q_8] &= Q_4, & [Q_5, Q_9] &= 2\sqrt{3/2}Q_1 - \sqrt{5/2}Q_7, \\ [Q_5, Q_{10}] &= \sqrt{5/2}Q_6, & [Q_6, Q_7] &= -Q_1 + 2Q_8, \\ [Q_6, Q_8] &= -2Q_7, & [Q_6, Q_9] &= \sqrt{3/2}Q_2 + \sqrt{5/2}Q_4, \\ [Q_6, Q_{10}] &= \sqrt{3/2}Q_3 - \sqrt{5/2}Q_5, & [Q_7, Q_8] &= 2Q_6, \\ [Q_7, Q_9] &= \sqrt{3/2}Q_3 + \sqrt{5/2}Q_5, & [Q_7, Q_{10}] &= -\sqrt{3/2}Q_2 + \sqrt{5/2}Q_4, \\ [Q_8, Q_9] &= Q_{10}, & [Q_8, Q_{10}] &= -Q_9, \\ [Q_9, Q_{10}] &= Q_8. \end{aligned}$$

Como se puede ver en el libro de Besse ([8, pag. 203]) la variedad  $B^7$  es una variedad Einstein con la métrica bi-invariante definida anteriormente, lo cual es una condición

necesaria para la existencia de espinores de Killing. La curvatura escalar para esta métrica es  $R = 189/2$ .

Otra de las condiciones necesarias para la existencia de espinores de Killing es la necesidad de que sobre  $B^7$  exista una estructura espinorial. Para ello, por lo visto en el Capítulo 3, se tiene que estudiar si la representación de isotropía,  $\alpha$ , admite un levantamiento,  $\alpha'$ , al grupo  $Spin(7)$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & Spin(7) \\ & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow \tilde{Ad} \\ H & \xrightarrow{\alpha} & SO(7) \end{array}$$

sea conmutativo.

Ahora bien, para tener garantizado que exista dicho levantamiento basta comprobar que  $\alpha^*(\pi_1(SU(2))) \subset \tilde{Ad}^*(\pi_1(Spin(7)))$ , pero, como  $SU(2)$  simplemente conexo y se está trabajando con homomorfismos de grupos, esta condición se verifica trivialmente.

Sea  $D_{ij}$  la matriz  $7 \times 7$  cuyos elementos son un  $-1$  en la  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna y 0 en el resto. Se denota a su vez por  $E_{ij} = D_{ij} - D_{ji}$  para  $i \neq j$ . Las matrices  $E_{ij}$  con  $i < j$  generan el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(n)$  y, por lo visto en el teorema 2.34, el isomorfismo de álgebras de Lie

$$\tilde{Ad}_* : \mathfrak{spin}(n) \longrightarrow \mathfrak{so}(n)$$

está dado por  $\tilde{Ad}_*(e_i e_j) = 2E_{ij}$ .

La diferencial de la representación de isotropía  $\alpha_* : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(7)$  de  $Sp(2)/SU(2)$  está dada por las fórmulas:

$$\begin{aligned} \alpha_*(Q_8) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3E_{23} + E_{45} + 2E_{67} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_*(Q_9) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \\ \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{6}E_{15} + \sqrt{\frac{3}{2}}E_{26} + \sqrt{\frac{3}{2}}E_{37} + \sqrt{\frac{5}{2}}E_{46} + \sqrt{\frac{5}{2}}E_{57} \\
\alpha_*(Q_{10}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & -\sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\sqrt{6}E_{14} - \sqrt{\frac{3}{2}}E_{27} + \sqrt{\frac{3}{2}}E_{36} + \sqrt{\frac{5}{2}}E_{47} - \sqrt{\frac{5}{2}}E_{56}
\end{aligned}$$

Por otra parte las matrices asociadas a la conexión  $\Lambda : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{so}(n)$  tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\Lambda(Q_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}E_{23} - \frac{1}{2}E_{45} - \frac{1}{2}E_{67} \\
\Lambda(Q_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}E_{13} + \frac{1}{2}E_{46} - \frac{1}{2}E_{57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda(Q_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}E_{12} + \frac{1}{2}E_{47} + \frac{1}{2}E_{56} \\
\Lambda(Q_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}E_{15} - \frac{1}{2}E_{26} - \frac{1}{2}E_{37} \\
\Lambda(Q_5) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}E_{14} + \frac{1}{2}E_{27} - \frac{1}{2}E_{36} \\
\Lambda(Q_6) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}E_{17} + \frac{1}{2}E_{24} + \frac{1}{2}E_{35} \\
\Lambda(Q_7) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}E_{16} - \frac{1}{2}E_{25} + \frac{1}{2}E_{34}
\end{aligned}$$

Para la dimensión 7 el  $\mathbb{C}$ -isomorfismo  $k_n : Cl^c(7) \longrightarrow End(\Delta_7)$ , como se vio en el capítulo anterior, puede realizarse tomando en  $\Delta_7 \approx \mathbb{C}^8$  la base obtenida mediante los

vectores  $u_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  y  $u_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ . Sean:

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = u_{\xi_1} \otimes u_{\xi_2} \otimes u_{\xi_3}, \quad \xi_i = \pm 1$$

y

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

las matrices de Pauli. Aplicando la Proposición 2.11 resulta

$$\begin{aligned} k_n(e_1) &= E \otimes E \otimes g_1, & k_n(e_2) &= E \otimes E \otimes g_2, \\ k_n(e_3) &= E \otimes g_1 \otimes T, & k_n(e_4) &= E \otimes g_2 \otimes T, \\ k_n(e_5) &= g_1 \otimes T \otimes T, & k_n(e_6) &= g_2 \otimes T \otimes T, \\ k_n(e_7) &= -iT \otimes T \otimes T, \end{aligned}$$

y como  $Cl^c(7)$  está generada multiplicativamente por los vectores  $e_1, \dots, e_7 \in \mathbb{R}^7$ , el isomorfismo  $k_n$  está completamente descrito. Además, como

$$\begin{aligned} g_1(u_{+1}) &= iu_{-1}, & g_1(u_{-1}) &= iu_{+1}, \\ g_2(u_{+1}) &= u_{-1}, & g_2(u_{-1}) &= -u_{+1}, \\ T(u_{+1}) &= -u_{+1}, & T(u_{-1}) &= u_{-1}, \end{aligned}$$

la acción de  $k_n$  sobre los  $u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  se calcula de forma inmediata.

Usando una ordenación para los  $u(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  se obtiene la siguiente base para los espinores de  $\Delta_7$

$$\Delta_7 = \langle \{u(1, 1, 1), u(1, -1, -1), u(-1, 1, -1), u(-1, -1, 1), \\ u(1, 1, -1), u(1, -1, 1), u(-1, 1, 1), u(-1, -1, -1)\} \rangle.$$

para la cual los elementos  $k_n(e_j)$  están descritos por las matrices

$$k_n(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_n(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_n(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_n(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_n(e_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_n(e_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k_n(e_7) = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Ahora se analiza el operador de Dirac para esta variedad.

**Proposición 4.1** *En el espacio Einstein  $(B^7, g)$  el operador de Dirac tiene el autovalor  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{nR}{n-1}} = \frac{21}{4}$*

**Demostración:**

Como se vio en el capítulo anterior, se identifican las secciones del fibrado espinorial  $S = Sp(2) \times_{\phi \circ \tilde{\alpha}} \Delta_7$  con las funciones  $\varphi : Sp(2) \rightarrow \Delta_7$  que verifican la relación

$$(4.1) \quad \varphi(gh) = (\phi \circ \tilde{\alpha})(h^{-1})\varphi(g), \quad \forall g \in Sp(2), h \in SU(2)$$

A continuación se prueba que para  $i = 8, 9, 10$  los homomorfismos  $(\phi \circ \tilde{\alpha}_*)(Q_i) \in \text{End}(\Delta_7)$  se anulan simultáneamente y de forma única para el espinor

$$\psi = (-1, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 1).$$

Procediendo caso por caso se tiene

1.  $i = 8$

$$\begin{aligned} (\phi \circ \tilde{\alpha}_*)(Q_8) &= \frac{1}{2}\phi\{3e_2e_3 + e_4e_5 + 2e_6e_7\} \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & \frac{3i}{2} & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & i & 0 \\ \frac{3i}{2} & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 & \frac{3i}{2} & i & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{3i}{2} & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & \frac{3i}{2} & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & i & \frac{3i}{2} & 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & \frac{3i}{2} \\ 0 & i & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & \frac{3i}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde

$$\ker \{(\phi \circ \tilde{\alpha}_*)(Q_8)\} = \langle \{(-1, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 1), (0, -1, 0, 1, -1, 0, 1, 0)\} \rangle .$$

2.  $i = 9$

$$\begin{aligned} (\phi \circ \tilde{\alpha}_*)(Q_9) &= \frac{1}{2}\phi\{\sqrt{6}e_1e_5 + \sqrt{\frac{3}{2}}e_2e_6 + \sqrt{\frac{3}{2}}e_3e_7 + \sqrt{\frac{5}{2}}e_4e_6 + \sqrt{\frac{5}{2}}e_5e_7\} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & b-a & c & 0 & a & -c & 0 \\ 0 & 0 & c & a+b & -a & 0 & 0 & -c \\ a-b & -c & 0 & 0 & c & 0 & 0 & -a \\ -c & -a-b & 0 & 0 & 0 & c & a & 0 \\ 0 & a & -c & 0 & 0 & 0 & -a-b & c \\ -a & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & c & a-b \\ c & 0 & 0 & -a & a+b & -c & 0 & 0 \\ 0 & c & a & 0 & -c & b-a & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

siendo  $a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $b = \frac{1}{2}\sqrt{6}$  y  $c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$ .

de donde

$$\ker \{(\phi \circ \tilde{\alpha}_*)(Q_9)\} = \langle \{(-1, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 1), (0, 1, -2\sqrt{\frac{3}{5}}, 1, 1, 2\sqrt{\frac{3}{5}}, 1, 0)\} \rangle .$$

3.  $i = 10$

$$\begin{aligned} (\phi \circ \tilde{\alpha}_*)(Q_{10}) &= \frac{1}{2}\phi\{-\sqrt{6}e_1e_4 - \sqrt{\frac{3}{2}}e_2e_7 + \sqrt{\frac{3}{2}}e_3e_6 + \sqrt{\frac{5}{2}}e_4e_7 - \sqrt{\frac{5}{2}}e_5e_6\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -b & 2a & 0 & -a & a & b & 0 & 0 \\ 2a & -b & a & 0 & b & -a & 0 & 0 \\ 0 & a & b & -2a & 0 & 0 & -a & -b \\ -a & 0 & 2a & b & 0 & 0 & -b & a \\ a & b & 0 & 0 & -b & -2a & 0 & -a \\ b & a & 0 & 0 & -2a & -b & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & -b & 0 & a & b & 2a \\ 0 & 0 & -b & a & -a & 0 & 2a & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

siendo  $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$  y  $b = \sqrt{\frac{5}{2}}$ .

De donde

$$\ker \{(\phi \circ \tilde{\alpha}_*)(Q_{10})\} = \langle (-1, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 1), (-2\sqrt{\frac{5}{3}}, -1, 0, -1, 1, -2\sqrt{\frac{5}{3}}, 1, 0) \rangle$$

Por tanto, para todo  $Q_i \in \mathfrak{su}(2)$  se tiene

$$(\phi \circ \tilde{\alpha}_*)(Q_i)[\psi] = 0$$

y, como  $SU(2)$  es conexo, se puede afirmar que para todo  $h \in SU(2)$

$$(\phi \circ \tilde{\alpha})(h^{-1})[\psi] = \psi$$

Así, la propiedad de invariancia (4.1) se verifica trivialmente para la función constante  $\varphi : Sp(2) \rightarrow \Delta_7$  dada por  $\varphi(x) = \psi$ , y  $\psi$  define una sección constante en el fibrado espinorial  $S = Sp(2) \times_{\phi \circ \tilde{\alpha}} \Delta_7$ .

Además, para tales funciones, el operador de Dirac está dado por la fórmula

$$D\varphi = \sum_{j=1}^7 k_n(Q_j)[Q_j(\varphi) + (\phi \circ \tilde{\Lambda})(Q_j)(\varphi)]$$

siendo  $Q_j(\varphi)$  la derivada de  $\varphi$  en la dirección del campo de vectores generado por  $Q_j$ . Así, para las secciones constantes su expresión se reduce a la fórmula:

$$D\varphi = \sum_{j=1}^7 k_n(Q_j)[(\phi \circ \tilde{\Lambda})(Q_j)(\varphi)]$$

Aplicando esta expresión al espinor constante  $\psi = (-1, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 1)$

$$D \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^7 \phi(e_j)[(\phi \circ \tilde{\Lambda})(e_j) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} -\frac{21}{4} \\ 0 \\ \frac{21}{4} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{21}{4} \\ 0 \\ \frac{21}{4} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} (\phi \circ \tilde{\Lambda})(e_1) &= \frac{1}{2}\phi\left(\frac{1}{2}e_2e_3 - \frac{1}{2}e_4e_5 - \frac{1}{2}e_6e_7\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{4} & 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 & \frac{i}{4} & 0 \\ -\frac{i}{4} & 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{4} \\ 0 & \frac{i}{4} & 0 & -\frac{i}{4} & \frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{4} & 0 & -\frac{i}{4} & 0 & 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 & -\frac{i}{4} & 0 & \frac{i}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i}{4} & -\frac{i}{4} & 0 & \frac{i}{4} & 0 \\ \frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{4} & 0 & -\frac{i}{4} \\ 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 & \frac{i}{4} & 0 & -\frac{i}{4} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \tilde{\Lambda})(e_2) &= \frac{1}{2}\phi(-\frac{1}{2}e_1e_3 + \frac{1}{2}e_4e_6 - \frac{1}{2}e_5e_7) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \tilde{\Lambda})(e_3) &= \frac{1}{2}\phi(\frac{1}{2}e_1e_2 + \frac{1}{2}e_4e_7 + \frac{1}{2}e_5e_6) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{4} & 0 \\ 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \tilde{\Lambda})(e_4) &= \frac{1}{2}\phi(\frac{1}{2}e_1e_5 - \frac{1}{2}e_2e_6 - \frac{1}{2}e_3e_7) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \tilde{\Lambda})(e_5) &= \frac{1}{2}\phi(-\frac{1}{2}e_1e_4 + \frac{1}{2}e_2e_7 - \frac{1}{2}e_3e_6) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{4} & 0 & \frac{i}{4} & -\frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{4} & 0 & -\frac{i}{4} & 0 & 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{4} & 0 & -\frac{i}{4} & 0 & 0 & \frac{i}{4} & 0 \\ \frac{i}{4} & 0 & -\frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{4} \\ -\frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{4} & 0 & \frac{i}{4} \\ 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 & -\frac{i}{4} & 0 & -\frac{i}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 & -\frac{i}{4} & 0 & \frac{i}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{4} & \frac{i}{4} & 0 & \frac{i}{4} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \tilde{\Lambda})(e_6) &= \frac{1}{2}\phi\left(\frac{1}{2}e_1e_7 + \frac{1}{2}e_2e_4 + \frac{1}{2}e_3e_5\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \\
(\phi \circ \tilde{\Lambda})(e_7) &= \frac{1}{2}\phi\left(-\frac{1}{2}e_1e_6 - \frac{1}{2}e_2e_5 + \frac{1}{2}e_3e_4\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{i}{4} & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{4} & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & -\frac{i}{4} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así  $\lambda = \frac{21}{4}$  es un autovalor del operador de Dirac.  $\square$

Además, dicho autovalor verifica la igualdad dada en el teorema 3.10,  $\frac{21}{4} = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Rn}{n-1}}$ . Ahora, aplicando el Teorema 3.8 se sigue que  $\psi$  es un espinor de Killing asociado al número de Killing  $B = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{n(n-1)}} = -\frac{3}{4}$ .



# Bibliografía

- [1] Agricola, Ilka. Connections on naturally reductive spaces, their Dirac operator and homogeneous models in string theory, *Commun. Math. Phys.* **232** (2003), 535-563.
- [2] Arvanitoyeorgos, Andreas. An introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces , *Student Mathematical Library, volumen 22, American Mathematical Society*, 2003.
- [3] Arvanitoyeorgos, Andreas. Geometry of flag manifolds, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **3** (2006), 957-974.
- [4] Bär, Christian. The Dirac operator on homogeneous spaces and its spectrum on 3-dimensional lens spaces, *Arch. Math* **59** (1992), 65-79.
- [5] Bär, Christian. Real Killing spinors and holonomy, *Commun. Math. Phys.* **154** (1993), 509-521.
- [6] Baum, H., Friedrich, T., Grunewald, R. y Kath, I. Twistors and Killing spinors on Riemannian manifolds, Teubner-Text, 1990.
- [7] Berger, M. Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **15** (1961), 179-246.
- [8] Besse, Arthur L. Einstein Manifolds, *Springer-Verlag*, 1987
- [9] Bryant, Robert L. Metrics with exceptional holonomy, *The Ann. of Math.* **126** (1987), 525-576.
- [10] Chavel, Isaac. On normal Riemannian homogeneous spaces of rank one, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 477-481.
- [11] Friedrich, Thomas. Dirac operators in Riemannian Geometry, *Graduate Studies in Mathematics, volumen 25, American Mathematical Society*, 2000.
- [12] Friedrich, Thomas. y Grunewald, Ralf. On the first eigenvalue of the Dirac operator on 6-dimensional manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* **3** (1985), 265-273.

- 
- [13] Friedrich, Thomas y Kath, Ines. 7-Dimensional compact Riemannian manifolds with Killing spinors, *Commun. Math. Phys.* **133** (1990), 543-561.
- [14] M. Gadea, Pedro y A. Oubiña, José. Reductive Homogeneous Pseudo-Riemannian Manifolds, *Monatshefte für Mathematik*, 1997.
- [15] Gallier, Jean H. Clifford algebras, Clifford groups, and a generalization of the quaternions: the Pin and Spin groups, *Recurso de internet* 2007.
- [16] Gavino Fernández, Sandra. Clasificación do tensor de curvatura ó longo de xeodésicas e círculos en variedades de Walker, *Publicaciones del departamento de Geometría y Topología, Univerisdad de Santiago de Compostela*, 2009.
- [17] Gray, Alfred. Lie Groups, No publicado.
- [18] Grunewald, Ralf. Six-dimensional Riemannian manifolds with a real Killing spinor, *Ann. Global Anal. Geom* **8** (1990), 43-59.
- [19] Helgasson, Sigurdur. Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, *Academic Press*, 1978.
- [20] Hermann, Robert. Lie groups for physicists, *Mathematical Physics Monograph series*, 1996.
- [21] Ikeda, A. Formally self adjointness for the Dirac operator on homogeneous spaces, *Osaka J. of Math.* **12** (1975), 173-185.
- [22] Kobayasi, S. y Nomizu, K. Foundations of Differential Geometry, Volumen I y II, *Interscience Publishers*, 1969
- [23] Lawson, H. B. y Michelsohn, M. L. Spin Geometry, *Princeton University press*, 1989.
- [24] Lee, John M. Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature, *Springer*, 1997.
- [25] Lounesto, Pretti. Clifford Algebras and Spinors, *London Mathematical Society, Lectures Note series 239, Cambridge University Press*, 1997.
- [26] Milnor, John. Spin structures on manifolds, *L'Enseignement Mathématique IX* (1963), 198-203.
- [27] Milnor, John W. y Stasheff, James D. Characteristics Classes, *Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press*, 1974.
- [28] Montesdeoca, Ángel. Apuntes de introducción a las variedades de Riemann, *Recurso de Internet* 1992.
- [29] Naveira, A. M. y Tarrío, A. A method for the resolution of the Jacobi equation  $Y'' + RY = 0$  on the manifold  $Sp(2)/SU(2)$ , *Monatsh. Math.* **154**, (2008) 231-246.

- 
- [30] Pereira Sáez, María José. Aplicación traza, transformación de Cayley y categoría LS de los grupos de Lie clásicos, *Publicaciones del departamento de Geometría y Topología, Universidad de Santiago de Compostela*, 2008.
- [31] Poor, Walter A. Differential Geometric Structures, *McGraw-Hill Book Company*, 1981.
- [32] Ramírez Fernández, Antonio J., Clasificación de los espacios homogéneos naturalmente reductivos: Ejemplos. Conexión característica, *Departamento de Geometría y Topología Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad de Valencia*, 1977.
- [33] Roldán López de Hierro, Antonio. Hipersuperficies y operador de Dirac *Tesis doctoral*, 2003.
- [34] Slebarski, Stephen. The Dirac operator on homogeneous spaces and representations of reductive Lie groups I, *Ame. Journal of Math.* **109** (1987), 283-301.
- [35] Warner, Frank W. Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups, *Editorial Series of I. M. Singer, Massachusetts Institute of Technology*, 1971.
- [36] Wilking, Burkhard. The normal homogeneous space  $(SU(3) \times SO(3))/U^\bullet(2)$  has positive sectional curvature, *Pro. of the Ame. Math. Society* **127** (1999), 1191-1194.
- [37] Wolff, Joseph A. The geometry and structure of isotropy and irreducible homogeneous spaces, *Acta Math.* **152** (1984), n°. 1-2, 141-142.



## Publicaciones del departamento de Geometría y Topología

- 95 A. RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ *Cohomología das foliaciones riemannianas con follas densas. Cohomología de Alexander-Spanier de foliaciones compactas Hausdorff.* Tesina de Licenciatura (2001) ISBN: 84-89390-12-6
- 96 M. FERNÁNDEZ LÓPEZ *Resultados de descomposición asociados á ecuación de Möbius.* Tese de Doutoramento (2002) ISBN: 84-89390-13-4
- 97 J.C. DÍAZ RAMOS *Curvaturas totais de esferas xeodésicas.* Tesina de Licenciatura (2002) ISBN: 84-89390-14-2
- 98 M. F. GONZÁLEZ LÁZARO *Resolución de singularidades en acciones polares.* DEA (2003) ISBN: 84-89390-16-9
- 99 A. SOTELO ARMESTO *El grupo de difeomorfismos del espacio de hojas de una foliación de Lie desde el punto de vistas difeológico.* Tesina de Licenciatura (2003) ISBN: 84-89390-15-0
- 100 M. BROZOS VÁZQUEZ *Variedades semi-riemannianas con tensor de curvatura especial.* Tesina de Licenciatura (2003) ISBN: 84-89390-18-5
- 101 J.C. DÍAZ RAMOS *Caracterización de variedades riemannianas mediante curvaturas escalares totais de esferas xeodésicas.* DEA (2003) ISBN: 84-89390-17-7
- 102 M.T. PÉREZ LÓPEZ *Campos de vectores harmónicos-Killing.* Tese de Doutoramento (2003) ISBN: 84-89390-19-3
- 103 I. GARCÍA RAMÍREZ *Aplicación de las formulas de Bochner al estudio de variedades 4-dimensionales doblemente casi-hermíticas.* DEA (2003) ISBN: 84-89390-20-7
- 104 A. MARTÍN MÉNDEZ *Álgebras de Lie graduadas y estructuras de segundo orden asociadas.* Tese de Doutoramento (2004) ISBN: 84-89390-21-5
- 105 M. BROZOS VÁZQUEZ *Propiedades conformes de productos deformados.* DEA (2004) ISBN: 84-89390-22-3
- 106 J.C. DÍAZ RAMOS *Geometric consequences of intrinsic and extrinsic curvature conditions.* Tese de Doutoramento (2006) ISBN: 84-89390-23-1
- 107 P. GONZÁLEZ SEQUEIROS *A dinámica dos mosaicos de Robinson.* Tesina de Licenciatura (2006) ISBN: 84-89390-24-X
- 108 E. CALVIÑO LOUZAO *Variedades de Osserman e Ivanov-Petrova en dimensión cuatro.* DEA (2007) ISBN 978-84-89390-25-6

- 109** M. BROZOS VÁZQUEZ *Geometric consequences of algebraic conditions on curvature operators*. Tese de Doutoramento (2007) ISBN 978-84-89390-26-3
- 110** M. PÉREZ FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA *Número de ramificación de un pseudogrupo*. DEA (2007) ISBN 978-84-89390-27-0
- 111** P. GONZÁLEZ SEQUEIROS *A dinámica dos mosaicos euclidianos*. DEA (2007) ISBN 84-89390-28-7
- 112** ÁLVARO LOZANO ROJO *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos*. Tese de Doutoramento (2008) ISBN 978-84-89390-29-4
- 113** M. J. PEREIRA SÁEZ *Aplicación traza, transformación de Cayley y categoría LS de los grupos de Lie clásicos*. DEA (2008) ISBN 978-84-89390-30-0
- 114** S. VILARIÑO FERNÁNDEZ *Nuevas aportaciones al estudio de los formalismos  $k$ -simplético y  $k$ -cosimplético*. Tese de Doutoramento (2009) ISBN 978-84-89390-31-7
- 115** S. GABINO FERNÁNDEZ *Estudo do tensor de curvatura ó longo de xeodésicas e círculos en variedades de Walker*. DEA (2009) ISBN 978-84-89390-32-4
- 116** C. MENIÑO COTÓN *Categoría LS en espacios medibles foliados con medida transversa invariante*. DEA (2010) ISBN 978-84-89390-33-1
- 117** A. A. CORTÉS AYASO *Métricas de Walker: estructura simpléctica das variedades de Osserman*. DEA (2010) ISBN 978-84-89390-34-8
- 118** M. DOMÍNGUEZ VÁZQUEZ *Hipersuperficies con curvaturas principais constantes nos espazos proxeectivo e hiperbólico complexos*. DEA (2010) ISBN 978-84-89390-35-5



