Esteban Calviño Louzao

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE OPERADORES DE CURVATURA Y GENERALIZACIONES DE ESPACIOS SIMÉTRICOS

120
2011
Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Esteban Calviño Louzao

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE OPERADORES DE CURVATURA Y GENERALIZACIONES DE ESPACIOS SIMÉTRICOS

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección dos profesores Eduardo García Río e Ramón Vázquez Lorenzo, para obter o Grao de Doutor en Ciencias Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Leveouse a cabo a súa defensa o día 22 de Xullo do 2011 na Facultade de Matemáticas de dita universidade, obtendo a cualificación de Sobresaliente cum laude.

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 978-84-89390-37-9

Dep. Leg.: C 2374-2011

A mi padre.

Agradecimientos

Esta página se queda pequeña para mostrar mi gratitud a todas aquellas personas que en mayor o menor medida influyeron positivamente en esta tesis.

Primero a mi familia, en especial a mis padres, porque gracias a su esfuerzo tuve todas las facilidades del mundo para poder estudiar.

Obviamente, no puedo dejar de agradecer a mis directores Eduardo García Río y Ramón Vázquez Lorenzo por volcarse en este trabajo del modo que lo hicieron. Sin ellos esta tesis no sería posible. Pero lo que les quiero agradecer más especialmente son todos esos momentos que no tuvieron que ver con las matemáticas y, gracias a los cuales, no los considero mis directores de tesis sino mis amigos.

Me gustaría también destacar aquí al profesor Luis Mª Hervella Torrón por confiar en mi desde el primer momento y a la profesora Mª Elena Vázquez Abal, por estar siempre dispuesta a escuchar y a ayudar en todo.

I would also like to thank Professor Peter B. Gilkey for his kind collaboration and the many discussions we have had during these years which have allowed me to see mathematics in a different way.

Finalmente me gustaría mencionar a Carlos, Miguel, Sandra, Paulo, Laura . . . y tantos otros amigos del doctorado y de la carrera que siempre estuvieron dispuestos a arrimar el hombro cuando fue necesario. A mis amigos de Lalín, en especial a Iván, por estar siempre dispuesto a ayudarme con mis "consultas". Y por supuesto a Cris por compartir conmigo este largo camino.

Índice general

Introducción

El estudio de la curvatura es un aspecto central en geometría. La curvatura constituye el invariante algebraico más simple de la estructura Riemanniana y proporciona no sólo información geométrica sobre la misma, sino también información de índole topológica sobre la variedad subyacente. La complejidad inherente al estudio de la curvatura en dimensiones superiores, como campo de tensores de tipo $(0, 4)$, ha motivado el análisis de distintos objetos asociados a la misma. Funciones con distintos dominios como la curvatura seccional o la curvatura escalar constituyen un buen ejemplo de objetos asociados a la curvatura que permiten, en algunos casos, determinar la estructura Riemanniana.

El operador de Jacobi proporciona una medida de la desviación geodésica, por lo que encierra un alto contenido geométrico. Una buena parte de la información codificada por el operador de Jacobi se pone de manifiesto al estudiar tanto sus autovalores como los autoespacios correspondientes. Además, el hecho de que los operadores de Jacobi determinan completamente la curvatura, constituye una motivación adicional para el estudio de las propiedades algebraicas de los mismos.

Es bien conocido que la existencia de estructuras adicionales sobre una variedad influye en la curvatura de la misma. Tal es el caso de las variedades Kähler, donde la curvatura está claramente influenciada por la estructura compleja. Sin embargo, esta interacción se presenta también en un sentido inverso, siendo posible recuperar la estructura Kähleriana a partir de la curvatura de la variedad. Este acercamiento a la curvatura en la línea del Teorema de Goldberg-Sachs resultará de interés en nuestro trabajo. Especialmente en dimensión cuatro, es posible construir estructuras adicionales sobre la variedad a partir de distintos operadores curvatura. Además, estas estructuras permitirán en cierta medida caracterizar los espacios estudiados.

Motivados por las consideraciones anteriores, esta memoria se estructura en dos partes diferenciadas en sus objetivos aunque centradas en el estudio de la curvatura y su influencia en la estructura de la variedad.

La Parte I de la memoria se centra en el estudio de la información subyacente al operador de Jacobi y al operador de curvatura antisimétrico. En ambos casos nos centramos en el análisis de propiedades tipo Osserman, donde se asume la constancia de los autovalores de los operadores estudiados en sus dominios de definición: el fibrado pseudo-unitario en el caso de los operadores de Jacobi y la Grassmanniana de 2-planos orientados no degenerados en el caso del operador de curvatura antisimétrico.

El estudio de la propiedad de Osserman para los operadores de Jacobi centra en buena medida el contenido de la primera parte de la memoria. Abordamos dicho problema primero en dimensión cuatro, proporcionando una descripción nueva de las soluciones ya conocidas para posteriormente centrarnos en la construcción de nuevos ejemplos en dimensiones superiores. Este estudio entroncará con la geometría de las estructuras de Walker y las extensiones de Riemann. Como consecuencia del trabajo desarrollado se obtendrá una nueva familia de variedades paracomplejas Osserman no conocida con anterioridad.

El estudio de la propiedad de Osserman para los operadores de curvatura antisimétricos, i.e., las variedades Ivanov-Petrova (IP), se centra en el análisis de la relación entre estas métricas y la geometría afín a través de las extensiones de Riemann. Esta relación permitirá construir nuevos ejemplos de variedades IP, obtener resultados de clasificación y, finalmente, extraer consecuencias sobre las estructuras afines subyacentes. En particular, el estudio de las superficies afines IP permite dar respuesta a una cuestión de Kowalski sobre la clasificación de las conexiones afines homogéneas.

La Parte II se centra en el análisis de distintas generalizaciones de los espacios simétricos. Desde un punto de vista algebraico, tanto los espacios simétricos Riemannianos como los Lorentzianos pueden caracterizarse en términos de los operadores de Jacobi. Así, un espacio es localmente simétrico si y sólo si los operadores de Jacobi tienen autovalores constantes y autoespacios paralelos a lo largo de cada geodésica temporal. El estudio separado de las condiciones anteriores da lugar a dos generalizaciones naturales de los espacios simétricos, las cuales pueden ser caracterizadas por ciertas propiedades de conmutación entre los operadores de Jacobi y de Szabó. En el Capítulo 6 se realiza un estudio pormenorizado de ambas clases de variedades bajo distintas condiciones de homogeneidad, mostrando un comportamiento Lorentziano completamente distinto a su análogo Riemanniano.

Desde un punto de vista más geométrico, los espacios simétricos fueron caracterizados por Cartan en términos del carácter isométrico de las simetrías geodésicas. Esta caracterización motivó el estudio de condiciones más débiles sobre las simetrías geodésicas así como la consideración de otros tipos de transformaciones que permitiesen codificar información geométrica. Centrándonos en las transformaciones locales alrededor de un punto fijo, el estudio se ha basado en el análisis de aplicaciones locales no necesariamente involutivas ($s_p^2 = \mathrm{Id}$), sino en la existencia e influencia geométrica de isometrías s_p para las que $s_p^k = \mathrm{Id}$ para algún natural k. El estudio de los llamados espacios simétricos generalizados surge en este contexto. Los espacios simétricos generalizados fueron clasificados en dimensiones bajas por Černý y Kowalski [45], quienes mostraron su carácter homogéneo y dieron una descripción explícita de los mismos. Es importante señalar que mientras que en dimensión tres todo espacio simétrico generalizado es de orden tres ($s_p^3 = \mathrm{Id}$), en dimensión cuatro existen espacios simétricos generalizados de orden infinito ($s_p^k \neq \mathrm{Id}$, para cualquier k).

Un análisis pormenorizado de los espacios descritos por Černý y Kowalski permite construir ciertas estructuras adicionales sobre los mismos a partir de su curvatura. Nuestro objetivo ha consistido no sólo en la construcción de dichas estructuras sino también en analizar la posible caracterización de los espacios simétricos generalizados en términos de las mismas. Mostramos que en dimensión tres el único espacio simétrico generalizado no trivial es una variedad IP cuyo tensor de Ricci determina una estructura producto, mostrando que dicha propiedad es característica de los espacios simétricos generalizados Riemannianos en dimensión tres.

El análisis en dimensión cuatro es más intrincado. En primer lugar hemos de señalar que una de las cuatro posibles clases de espacios simétricos generalizados descrita en [45] es en realidad un espacio simétrico, por lo que el estudio ha de restringirse a tres familias diferenciadas. Una de ellas está constituida por variedades conformemente simétricas, por lo que en su análisis será de utilidad el trabajo previo de Derdzinski y Roter [63, 72]. Las otras dos familias presentan la similitud de poseer una estructura subyacente de par simpléctico. Más explícitamente, se prueba que toda variedad simétrica generalizada de Tipo A posee una estructura casi Kähler y opuesta Kähler subyacente, mientras que toda variedad simétrica generalizada de Tipo D posee una estructura casi paraKähler y opuesta paraKähler inducida por su curvatura. Mostramos que los espacios simétricos generalizados de Tipo A se caracterizan por la existencia de la estructura anteriormente mencionada en el caso homogéneo, algo que, sin embargo, no es cierto en el Tipo D.

De una forma más precisa, a continuación reseñaremos los principales resultados de esta memoria.

El Capítulo 1 es esencialmente introductorio. Fijamos la notación utilizada y recordamos algunos de los resultados y nociones básicas necesarias a fin de que el trabajo presentado sea en cierto modo autocontenido. Hacemos especial énfasis en el estudio de las variedades de Walker, que desempeñarán un papel esencial a lo largo de la memoria. Introducimos las extensiones de Riemann como ejemplos de métricas de Walker y esbozamos algunas de sus propiedades que serán necesarias en capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 estudiamos las variedades de Osserman en dimensión cuatro, tanto en signatura Riemanniana como neutra. Mostramos que es posible obtener nuevas demostraciones de resultados conocidos obtenidos por Chi [49] y Blažić, Bokan y Rakić [12] mediante el uso del Teorema de Goldberg-Sachs generalizado y el carácter curvatura homogéneo de ciertas variedades de Osserman [40]. En la Sección 2.2 obtenemos una descripción de las variedades de Osserman cuyos operadores de Jacobi presentan una raíz doble no nula del polinomio mínimo:

Teorema 2.27 *Sea (M, g) una variedad de Osserman Tipo II con operadores de Jacobi no nilpotentes. Entonces (M, g) es localmente isométrica al fibrado cotangente $T^*\Sigma$ de una superficie afín (Σ, D), con tensor métrico*

$$g_{D,\Phi,\frac{\tau}{6}} = \frac{\tau}{6} \cdot \iota \operatorname{Id} \circ \iota \operatorname{Id} + g_D + \frac{24}{\tau}\, \sigma^* \Phi,$$

donde $\tau \neq 0$ denota la curvatura escalar de $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi,\frac{\tau}{6}})$, D es una conexión afín arbitraria no llana en Σ y Φ es la parte simétrica del tensor de Ricci de D.

El teorema anterior permite no sólo interpretar geométricamente los resultados obtenidos en [74] sino también comprender la posible generalización de los ejemplos construidos en [75] a dimensiones superiores, dando así respuesta a una cuestión planteada por Nikolayevski.

Los ejemplos anteriormente mencionados se construyen en el Capítulo 3 y pueden ser vistos como deformaciones de las variedades paraKähler de curvatura seccional paraholomorfa constante. Mostramos en primer lugar (Teorema 3.2) que toda variedad paraKähler de curvatura seccional paraholomorfa constante puede ser descrita como la extensión de Riemann modificada de una variedad afín llana. Teniendo en cuenta que las conexiones afines de Osserman representan una generalización natural de las conexiones llanas, los ejemplos buscados se obtienen como sigue:

Teorema 3.5 *Sea* $(\mathcal{M}, D)$ *una variedad afín.*

(1) Si $(\mathcal{M}, D)$ *es afín Osserman en* $p \in \mathcal{M}$, *entonces* $(T^*\mathcal{M}, g)$ *es Osserman en cualquier punto de la fibra sobre* p, $q \in \sigma^{-1}(p)$. *Los autovalores de* ${}^g\mathcal{J}(\cdot)$ *en* $S^{\pm}(T_qT^*\mathcal{M}, g)$ *son* $\pm(0, 1, \frac{1}{4})$ *con multiplicidades* $(1, 1, 2n-2)$, *respectivamente.*

(2) Si $(\mathcal{M}, D)$ *es afín Osserman, entonces* $(T^*\mathcal{M}, g)$ *es Osserman.*

Además, mostramos en el Teorema 3.6 la existencia de conexiones afines Osserman en cualquier dimensión que dan lugar a variedades de Osserman cuyos operadores de Jacobi presentan formas de Jordan arbitrariamente complicadas (véase el ejemplo detallado desarrollado en la Sección 3.4). Considerando la misma construcción anterior, se prueba en el Teorema 3.14 que toda extensión de Riemann modificada da lugar a una variedad semi paracompleja Osserman con operadores de Jacobi paracomplejos no nilpotentes ni diagonalizables.

El operador de curvatura antisimétrico presenta una información opuesta, en cierto sentido, a la proporcionada por los operadores de Jacobi. En particular toda variedad IP Riemanniana es localmente conformemente llana [100] en dimensión mayor que tres. Así, en el Capítulo 4 abordamos en primer lugar la posible existencia de variedades IP que no sean localmente conformemente llanas. En la Sección 4.1 construimos ejemplos de métricas IP sobre ciertas variedades de Walker no autoduales, lo que motiva el estudio de las variedades que verifican simultáneamente las condiciones de Osserman e IP. La resolución del problema se lleva a cabo en dos etapas: en primer lugar determinamos los posibles tensores curvatura algebraicos que verifican las condiciones Osserman e IP (Teorema 4.5), para posteriormente analizar la realizabilidad geométrica de los mismos. Así, mostramos en el Teorema 4.12 que una variedad Osserman e IP en dimensión cuatro ha de ser necesariamente de curvatura seccional constante o con operadores de Jacobi nilpotentes en dos pasos (y por tanto, en el caso Walker autodual, extensiones de Riemann deformadas de superficies afines llanas según se describen en el Teorema 2.26).

En el Capítulo 5 abordamos el estudio de las variedades IP, relacionando las geometrías IP pseudo-Riemanniana y afín en términos de extensiones de Riemann (cf. Teorema 5.3).

Realizamos un estudio sistemático en dimensión baja cuando la información afín procede de una superficie, mostrando que las superficies afines IP se caracterizan por tener tensor de Ricci simétrico y degenerado. Tras analizar las superficies afines recurrentes (Teorema 5.6) nos centramos en el análisis de las conexiones afines homogéneas. En [121, 122, 144] se obtiene una clasificación de las superficies afines homogéneas, mostrando que dichas conexiones se corresponden con la conexión de Levi-Civita de una superficie de curvatura seccional constante o, en coordenadas adecuadas (x_1, x_2), se expresan como

$$\text{Tipo A} \qquad D_{\partial_1}\partial_1 = a\partial_1 + b\partial_2, \quad D_{\partial_1}\partial_2 = c\partial_1 + d\partial_2, \quad D_{\partial_2}\partial_2 = e\partial_1 + f\partial_2,$$

$$\text{Tipo B} \qquad D_{\partial_1}\partial_1 = \tfrac{a}{x_1}\partial_1 + \tfrac{b}{x_1}\partial_2, \quad D_{\partial_1}\partial_2 = \tfrac{c}{x_1}\partial_1 + \tfrac{d}{x_1}\partial_2, \quad D_{\partial_2}\partial_2 = \tfrac{e}{x_1}\partial_1 + \tfrac{f}{x_1}\partial_2.$$

Mostramos en la Sección 5.3.1 que el carácter afín IP permite diferenciar geométricamente las dos familias anteriores:

Teorema 5.16 *Sea (Σ, D) una superficie afín con tensor de Ricci simétrico y degenerado, recurrente y proyectivamente llana. Entonces (Σ, D) es localmente homogénea si y sólo si en un entorno de cada punto existe un sistema de coordenadas (x_1, x_2) en el cual la única componente no nula de la conexión D viene dada por*

$$D_{\partial_1}\partial_1 = x_2 \frac{\mu}{(\alpha + \kappa x_1)^2}\partial_2, \tag{1}$$

para algunas constantes μ, α y κ. Además, tal conexión es localmente homogénea de Tipo A, y es además de Tipo B si y sólo si se verifica la desigualdad $\kappa^2 - 4\mu \geq 0$.

En el Capítulo 6 consideramos dos generalizaciones naturales al caso Lorentziano de los espacios simétricos introducidas en [9]. (M, g) es un $\mathfrak{C}$-espacio si para cada geodésica temporal γ el operador de Jacobi $\mathcal{J}(\gamma)$ tiene autovalores constantes a lo largo de γ. Se dice que (M, g) es un $\mathfrak{P}$-espacio si para cada geodésica temporal γ existe una base paralela a lo largo de γ de autovectores del operador $\mathcal{J}(\gamma)$. En la Sección 6.2 mostramos que los $\mathfrak{P}$-espacios Lorentzianos se caracterizan por la conmutación de los operadores de Jacobi y Szabó ($\mathcal{J}(\gamma) \circ \mathcal{S}(\gamma) = \mathcal{S}(\gamma) \circ \mathcal{J}(\gamma)$) para posteriormente analizar dichos espacios en el marco de las variedades homogéneas (Teorema 6.6) o 1-curvatura homogéneas (Teorema 6.10) en dimensión tres, obteniendo la caracterización siguiente:

Teorema 6.1 *Sea (M, g) una variedad de Lorentz de dimensión tres homogénea y no simétrica. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) (M, g) *es un $\mathfrak{P}$-espacio.*

(ii) (M, g) *es Ricci recurrente.*

(iii) (M, g) *es curvatura recurrente.*

(iv) El operador de Ricci de (M, g) es nilpotente en dos pasos.

Una primera consecuencia inmediata que se obtiene del resultado anterior es la existencia de $\mathfrak{P}$-espacios homogéneos. Además, el carácter recurrente de la curvatura permite asegurar que la estructura subyacente a dichos espacios es la de una pp-wave.

Caracterizamos los $\mathfrak{C}$-espacios por el hecho de que para cada geodésica γ existe un endomorfismo T_γ de forma que el operador de Jacobi y el operador de Szabó asociados verifican $\mathcal{S}(\gamma) = \mathcal{J}(\gamma) \circ T_\gamma - T_\gamma \circ \mathcal{J}(\gamma)$. Por tanto, toda variedad de Lorentz homogénea y naturalmente reductiva es un $\mathfrak{C}$-espacio. La situación Lorentziana es más rica que la Riemanniana puesto que existen ejemplos de $\mathfrak{C}$-espacios los cuales no son naturalmente reductivos (Teorema 6.9), ni siquiera localmente homogéneos (Teorema 6.11).

Teorema 6.11 *Sea (M, g) una variedad de Lorentz de dimensión tres curvatura homogénea. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) (M, g) es un $\mathfrak{C}$-espacio.

(ii) El tensor de Ricci (M, g) es cíclico paralelo.

(iii) (M, g) es 1-curvatura homogénea y por tanto es localmente isométrica a un espacio homogéneo de los obtenidos en el Teorema 6.9 o a un espacio M_{II} con $C = D$.

En la Sección 6.5 analizamos dos condiciones en cierto modo análogas a las anteriores y motivadas por la geometría del operador de curvatura antisimétrico. Sin embargo, aunque tales condiciones caracterizan las variedades Riemannianas localmente simétricas [111, 112], dichas condiciones no caracterizan las variedades Lorentzianas localmente simétricas (cf. Observación 6.17).

Finalmente, en el Capítulo 7 analizamos la geometría de los espacios simétricos generalizados en dimensiones tres y cuatro, construyendo estructuras adicionales sobre los mismos, con el objetivo de caracterizarlos en términos de dichas estructuras. Tras analizar el caso de dimensión tres en la Sección 7.1.1, consideramos los espacios simétricos generalizados en dimensión cuatro. Mostramos que una de las clases consideradas por Černý y Kowalski se reduce a un espacio simétrico (de hecho a un espacio simétrico Lorentziano de Cahen-Wallach), por lo que el estudio ha de restringirse a tres clases que, siguiendo la notación introducida en [45], denominaremos Tipo A, B y D. Probamos la existencia de una estructura de par simpléctico en todo espacio simétrico generalizado de Tipo A o Tipo D (Teoremas 7.6 y 7.11). Una consecuencia de la existencia de tales estructuras es que todo espacio simétrico generalizado de Tipo A o Tipo D admite dos foliaciones minimales complementarias. Para los espacios de Tipo B probaremos que se realizan sobre una variedad de Walker.

Mostramos que todo espacio simétrico generalizado de Tipo A posee una estructura casi Kähler y opuesta Kähler subyacente, y caracterizamos dichos espacios por la existencia de las estructuras anteriores entre los espacios homogéneos. Todo espacio generalizado de Tipo D posee una estructura subyacente casi paraKähler y opuesta paraKähler, si bien la existencia de dichas estructuras no permite caracterizar tales espacios, lo que proporciona ejemplos no conocidos de pares simplécticos homogéneos pseudo-Riemannianos. Señalar también que los espacios simétricos generalizados de Tipo B son conformemente simétricos, por lo que para su caracterización será de ayuda el trabajo previo de Derdzinski y Roter.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo fijaremos la notación que será utilizada a lo largo de la memoria y, al mismo tiempo, estableceremos las definiciones que motivan el estudio realizado en los capítulos posteriores. Las demostraciones de los resultados presentados a continuación se encuentran detalladas en monografías tanto de geometría Riemanniana como pseudo-Riemanniana [124, 129, 142], por lo que omitiremos los detalles de las mismas.

1.1. Variedades pseudo-Riemannianas

En esta sección fijaremos el contexto de nuestro trabajo junto con los convenios que serán empleados a lo largo de la memoria. El objeto principal de interés en nuestro estudio son las variedades pseudo-Riemannianas. Una *variedad pseudo-Riemanniana* es una variedad diferenciable M de dimensión n equipada con un tensor métrico g (i.e., simétrico y no degenerado) de signatura $(\nu, n-\nu)$. El par (M, g) denotará una variedad pseudo-Riemanniana de signatura $(\nu, n-\nu)$. Denotaremos por T_pM el espacio tangente a M en un punto $p \in M$ y por TM el fibrado tangente a la variedad. El fibrado cotangente, que desempeñará un papel esencial en nuestro estudio, se denotará por T^*M.

Consideraremos $\mathfrak{X}(M)$ el espacio de todos los campos de vectores tangentes a M. Como regla general, los campos de vectores vendrán representados por letras mayúsculas $X, Y, Z, \dots$ y los vectores tangentes en cada punto de la variedad por letras minúsculas $x, y, z, \dots$. Siguiendo la notación habitual en geometría pseudo-Riemanniana, un vector distinto de cero $z \in T_pM$ diremos que es *temporal* si $g(z, z) < 0$, *espacial* si $g(z, z) > 0$ y *nulo* o *luminoso* si $g(z, z) = 0$. Para vectores unitarios utilizaremos la notación $\varepsilon_z = g(z, z)$ y denotaremos la correspondiente pseudo-esfera en T_pM por

$$S_p(M) = \{v \in T_pM : |g(v, v)| = 1\}$$

y el fibrado pseudo-esférico en TM por $S(M) = \cup_{p \in M} S_p(M)$. En muchos casos necesitaremos enfatizar el carácter espacial o temporal de los vectores unitarios, utilizando la notación

$S_p^\pm(M) = \{v \in T_pM : g(v,v) = \pm 1\}$ para las pseudo-esferas y $S^\pm(M) = \cup_{p\in M} S_p^\pm(M)$ para los correspondientes subfibrados.

Para cada variedad pseudo-Riemanniana (M,g) tenemos determinada de modo único la *conexión de Levi-Civita* asociada a ella, como la única conexión simétrica que hace paralela a la métrica g. La *fórmula de Koszul* nos da la expresión de tal conexión:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad + g(X,[Z,Y]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]), \end{aligned}$$

donde X, Y, Z son campos de vectores sobre M y $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ representa el corchete de Lie.

Una vez obtenida la conexión de Levi-Civita nos apoyamos en ella para definir el *operador de curvatura* R (o tensor curvatura de tipo $(1,3)$), según el convenio

$$R(X,Y)Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z,$$

y definimos el *tensor curvatura* de tipo $(0,4)$ por

$$R(X,Y,Z,V) = g(R(X,Y)Z,V).$$

El tensor curvatura presenta las siguientes simetrías algebraicas:

$$\begin{aligned} &(a) \quad R(X,Y,Z,V) = -R(Y,X,Z,V) = -R(X,Y,V,Z), \\ &(b) \quad R(X,Y,Z,V) + R(Y,Z,X,V) + R(Z,X,Y,V) = 0, \\ &(c) \quad R(X,Y,Z,V) = R(Z,V,X,Y), \end{aligned} \tag{1.1}$$

y la identidad diferencial:

$$(d) \quad (\nabla_X R)(Y,Z,U,V) + (\nabla_Y R)(Z,X,U,V) + (\nabla_Z R)(X,Y,U,V) = 0. \tag{1.2}$$

Nos referiremos a las identidades (b) y (d) como primera y segunda identidad de Bianchi, respectivamente.

La resolución de un buen número de cuestiones relacionadas con el estudio de la curvatura requiere de un análisis previo de la estructura algebraica subyacente para, a posteriori, considerar la posibilidad de realizar geométricamente las distintas posibilidades algebraicas. Desde un punto de vista puramente algebraico, sea V un espacio vectorial real de dimensión n dotado con un producto interior $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ de signatura $(\nu, n-\nu)$. Un tensor A de tipo $(0,4)$ sobre $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ se dice que es un *tensor curvatura algebraico* si verifica las simetrías establecidas en la Ecuación (1.1). Esencialmente, todo tensor curvatura algebraico puede ser construido por uno de los siguientes métodos:

- Para cada forma bilineal simétrica ϕ en $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$,

  $$A^\phi(x,y,z,v) = \phi(x,z)\phi(y,v) - \phi(y,z)\phi(x,v)$$

  es un tensor curvatura algebraico. En [73] se prueba que el espacio de tensores curvatura algebraicos está generado por todos los tensores de esa forma.

- Para cada forma bilineal antisimétrica ψ en $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$,

$$A^\psi(x, y, z, v) = \psi(x, z)\psi(y, v) - \psi(y, z)\psi(x, v) + 2\psi(x, y)\psi(z, v)$$

  es un tensor curvatura algebraico. Además, el espacio de todos los tensores curvatura algebraicos está generado por todos los tensores anteriores.

Otra forma habitual de producir tensores curvatura algebraicos a partir de dos formas bilineales simétricas D y B es el *producto Kulkarni-Nomizu* definido como

$$\begin{aligned}(D \odot B)(X, Y, Z, V) &= D(X, Z)B(Y, V) + D(Y, V)B(X, Z)\\ &- D(X, V)B(Y, Z) - D(Y, Z)B(X, V).\end{aligned}$$

La *curvatura seccional* de una variedad Riemanniana (M, g) es una función real K definida sobre la Grassmanniana de 2-planos como

$$K(\pi) = \frac{R(x, y, x, y)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2},$$

para todo 2-plano $\pi = \langle\{x, y\}\rangle$ en T_pM. En el caso pseudo-Riemanniano, la definición anterior debe restringirse a la Grassmanniana de 2-planos no degenerados (i.e., donde $g(x, x)g(y, y)-g(x, y)^2 \neq 0$), lo que impide garantizar la acotación puntual de dicha función. La posibilidad de extender K con continuidad a toda la Grassmanniana es equivalente a la constancia de la misma [58]. En tal caso el tensor curvatura se escribe como

$$R(x, y, z, v) = \kappa R^0(x, y, z, v),$$

donde el tensor curvatura R^0 viene dado por

$$R^0(x, y, z, v) = \tfrac{1}{2}(g \odot g)(x, y, z, v) = g(x, z)g(y, v) - g(y, z)g(x, v).$$

1.2. Descomposición de la curvatura

En esta sección se introducen ciertos tensores que aparecen de forma natural a partir del tensor curvatura. Todos ellos se pueden definir puntualmente, es decir, en un punto p arbitrario de la variedad (M, g). Por ello todas estas definiciones se extienden automáticamente al contexto puramente algebraico de un espacio vectorial $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle, A)$.

El *tensor de Ricci* ρ y la *curvatura escalar* τ se definen como las trazas

$$\rho(x, y) = \text{traza}\,\{z \mapsto R(x, z)y\}, \qquad \tau = \text{traza}\ \rho.$$

En una base arbitraria $\{e_1, \dots, e_n\}$ de T_pM, denotando con $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, el tensor de Ricci y la curvatura escalar se expresan como

$$\rho(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R(x, e_i, y, e_j), \qquad \tau = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \rho(e_i, e_j),$$

donde (g^{ij}) denota la matriz inversa de la matriz de coeficientes de la métrica. Una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) se dice *Einstein* si su tensor de Ricci es un múltiplo escalar de la métrica. En tal caso se tiene que $\rho = \frac{\tau}{n} g$.

El *tensor de Schouten* de una variedad pseudo-Riemanniana n-dimensional se define como

$$C = \frac{1}{n-2}\left(\rho - \frac{\tau}{2(n-1)} g\right).$$

El significado geométrico del tensor de Schouten aparece en el estudio de la geometría conforme. Una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) se dice *localmente conformemente llana* si para cada punto $p \in M$ existe un entorno U, $p \in U$, y un cambio conforme e^{σ}, $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g = e^{\sigma} g_0$ donde g_0 es la métrica del espacio pseudo-Euclídeo $\mathbb{E}^n_\nu$. Las variedades 3-dimensionales localmente conformemente llanas están caracterizadas por el hecho de que su tensor de Schouten sea Codazzi, esto es $(\nabla_X C)(Y, Z) = (\nabla_Y C)(X, Z)$.

Se define el *tensor de Weyl* de una variedad pseudo-Riemanniana a partir del producto de Kulkarni-Nomizu del tensor de Schouten y del tensor métrico como $W = R - C \odot g$. Equivalentemente

$$\begin{aligned} W(x,y,z,v) = R(x,y,z,v) &+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\{g(x,z)g(y,v) - g(y,z)g(x,v)\} \\ &- \frac{1}{n-2}\{\rho(x,z)g(y,v) - \rho(y,z)g(x,v) \\ &\qquad + \rho(y,v)g(x,z) - \rho(x,v)g(y,z)\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

para todo $x, y, z, v \in T_pM$. El tensor de Weyl caracteriza los espacios localmente conformemente llanos en dimensión $n \geq 4$ en términos de su anulación (nótese que $W = 0$ en dimensión $n = 3$).

El siguiente resultado proporciona una descomposición de los tensores curvatura algebraicos que, a su vez, motiva los tensores introducidos anteriormente.

Teorema 1.1. [124] *Un tensor curvatura algebraico A en un espacio vectorial con producto interior $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ se descompone como*

$$A = \mathfrak{U}_A + \mathfrak{Z}_A + W_A,$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_A &= \tfrac{\tau_A}{2n(n-1)}\langle\cdot\,,\cdot\rangle \odot \langle\cdot\,,\cdot\rangle, \\ \mathfrak{Z}_A &= \tfrac{1}{n-2}\left(\rho_A - \tfrac{\tau_A}{n}\langle\cdot\,,\cdot\rangle\right) \odot \langle\cdot\,,\cdot\rangle, \\ W_A &= A - \mathfrak{U}_A - \mathfrak{Z}_A = A - C_A \odot \langle\cdot\,,\cdot\rangle, \end{aligned}$$

donde ρ_A, τ_A y C_A son el tensor de Ricci, la curvatura escalar y el tensor de Schouten asociados al tensor curvatura algebraico A, respectivamente.

Observación 1.2. Considerando el operador curvatura asociado a cada tensor curvatura algebraico A en $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$, dicho operador puede interpretarse como un endomorfismo A del espacio de 2-formas $\Lambda^2(V)$. Así, las componentes $\mathfrak{U}_A$, $\mathfrak{Z}_A$ y W_A del Teorema 1.1 se corresponden con las componentes ortogonales siguientes:

- La componente $\mathfrak{U}_A$ es la proyección ortogonal en el espacio de tensores curvatura algebraicos de curvatura seccional constante.
- La anulación de la componente $\mathfrak{Z}_A$ se corresponde con los tensores curvatura algebraicos de Einstein.
- En dimensión $n \geq 4$, la anulación de la componente W_A representa los tensores curvatura algebraicos localmente conformemente llanos (que están determinados por su correspondiente tensor de Ricci).

En algunos contextos será conveniente el uso de subíndices para las componentes de los diversos tensores en las correspondientes bases; así, por ejemplo, utilizaremos frecuentemente $\rho_{ij} = \rho(e_i, e_j)$, $R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l), \ldots$

1.3. Autodualidad y antiautodualidad en dimensión cuatro

La descomposición de los tensores curvatura establecida en el Teorema 1.1 presenta simplificaciones notables en dimensiones bajas. En dimensión $n = 2$ todo tensor curvatura algebraico es de la forma $A = \frac{\tau_A}{2}\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle \odot \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ y, en dimensión $n = 3$, todo tensor curvatura algebraico viene determinado por su tensor de Schouten como $A = C_A \odot \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. En dimensión $n = 4$ la situación es más compleja, pero las propiedades del operador estrella de Hodge permiten refinar la descomposición anterior de la curvatura.

Consideramos en esta sección $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espacio vectorial de dimensión cuatro y un producto interior de signatura arbitraria. Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de V y sea $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ su base dual asociada. Consideramos el espacio de 2-formas

$$\Lambda^2(V) = \langle\{e^i \wedge e^j : i, j \in \{1, 2, 3, 4\},\, i < j\}\rangle.$$

Se define el operador estrella de Hodge $\star$ actuando en $\Lambda^2(V)$ como

$$e^i \wedge e^j \wedge \star(\, e^k \wedge e^l) = (\delta^i_k \delta^j_l - \delta^i_l \delta^j_k)\, \varepsilon_i \varepsilon_j\, e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4,$$

donde $\varepsilon_i = \langle\, e_i, e_i\,\rangle$ y δ^i_j representa la delta de Kronecker. Las propiedades del operador de Hodge están influenciadas por las distintas signaturas del producto escalar $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Así, $\star$ define una estructura compleja (esto es $\star^2 = -\operatorname{Id}_{\Lambda^2(V)}$) en signatura Lorentziana, mientras que $\star$ define una estructura producto (esto es $\star^2 = \operatorname{Id}_{\Lambda^2(V)}$) en signatura Riemanniana o neutra. En esta última situación, el operador estrella de Hodge induce una descomposición del espacio de 2-formas $\Lambda^2(V) = \Lambda^2_+(V) \oplus \Lambda^2_-(V)$, donde $\Lambda^2_+(V)$ y $\Lambda^2_-(V)$ denotan los espacios de 2-formas autoduales y antiautoduales, respectivamente

$$\Lambda^2_+(V) = \{\alpha \in \Lambda^2(V) : \star\alpha = \alpha\}, \qquad \Lambda^2_-(V) = \{\alpha \in \Lambda^2(V) : \star\alpha = -\alpha\}.$$

En una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ los subespacios autodual y antiautodual están generados por

$$\Lambda^2_\pm = \langle\{E_1^\pm, E_2^\pm, E_3^\pm\}\rangle,$$

donde

$$\begin{aligned} E_1^\pm &= (e^1 \wedge e^2 \pm \varepsilon_3\varepsilon_4 e^3 \wedge e^4)/\sqrt{2}, \\ E_2^\pm &= (e^1 \wedge e^3 \mp \varepsilon_2\varepsilon_4 e^2 \wedge e^4)/\sqrt{2}, \\ E_3^\pm &= (e^1 \wedge e^4 \pm \varepsilon_2\varepsilon_3 e^2 \wedge e^3)/\sqrt{2}\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

La métrica inducida en $\Lambda^2(V)$ a partir del producto escalar, dada por

$$\langle\langle x \wedge y, z \wedge w\rangle\rangle = \langle x, z\rangle\langle y, w\rangle - \langle y, z\rangle\langle x, w\rangle$$

es Riemanniana si $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ es definido positivo y de signatura $(+ + - - --)$ si $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ es un producto escalar de signatura neutra $(2, 2)$. Además, en este último caso la restricción de la métrica a los subespacios $\Lambda^2_\pm$ es de signatura $(+ - -)$. En cualquier caso, $\{E_1^\pm, E_2^\pm, E_3^\pm\}$ es una base ortonormal, con $E_1^\pm$ espaciales y $E_i^\pm$ temporales para $i = 2, 3$. Usaremos estas bases a lo largo de la memoria, excepto donde indiquemos explícitamente lo contrario.

Interpretando un tensor curvatura algebraico A sobre V como un endomorfismo de $\Lambda^2(V)$, en dimensión cuatro la $O(4)$-descomposición ($O(2, 2)$-descomposición en el caso en que V tenga signatura neutra) establecida en el Teorema 1.1 resulta

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\tau}{12}\ \mathrm{Id}_{\Lambda^2} + \rho_0 + W :\ \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2, \tag{1.5}$$

donde W denota el tensor de Weyl y ρ_0 el tensor de Ricci sin traza,

$$\rho_0(x, y) = \rho(x, y) - \tfrac{\tau}{4}\,\langle x, y\rangle.$$

Denotando por $W^\pm$ la restricción del tensor de Weyl a los subespacios $\Lambda^2_\pm(V)$, se dice que un tensor curvatura es *autodual* (respectivamente *antiautodual*) si $W^- = 0$ (respectivamente $W^+ = 0$). Por lo tanto podemos extender la $O(4)$-descomposición, o bien la $O(2, 2)$-descomposición en el caso en que la variedad tenga signatura neutra, dada en la Ecuación (1.5) como

$$\mathcal{A} \equiv \frac{\tau}{12}\ \mathrm{Id}_{\Lambda^2} + \rho_0 + W^+ + W^- :\ \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2. \tag{1.6}$$

1.4. Estructuras adicionales sobre variedades

1.4.1. Estructuras casi Hermíticas

Sea M una variedad diferenciable $2m$-dimensional. Como es bien conocido, una tal variedad se dirá *compleja* cuando sea posible construir sobre ella un sistema de coordenadas complejas (esto es, un atlas constituido por funciones valuadas complejas cuyos cambios de coordenadas sean aplicaciones holomorfas). Tal condición supone una reducción del grupo estructural de la variedad real subyacente al grupo lineal complejo $GL(n, \mathbb{C})$. Así pues, una primera condición necesaria para que una variedad diferenciable (real) sea difeomorfa a una variedad compleja es la reducción del grupo estructural a $GL(n, \mathbb{C})$. Una tal reducción es equivalente a la existencia de un campo de tensores J de tipo $(1, 1)$ sobre la variedad verificando $J^2 = -\operatorname{Id}$, al que se llama *estructura casi compleja* sobre M. Denotaremos por (M, J) una *variedad casi compleja*, donde se considera la variedad M y una estructura casi compleja J fija sobre M.

Cuando la estructura casi compleja se corresponda realmente con la estructura subyacente a una variedad compleja, se dirá que la estructura es *integrable* (o *compleja*), lo que se establece en términos de la anulación del tensor de Nijenhuis

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] + J^2[X, Y].$$

La existencia de estructuras casi complejas sobre una variedad dada conlleva ciertas restricciones sobre la topología de la misma. En particular, toda variedad casi compleja es orientable.

Una métrica pseudo-Riemanniana g sobre M se dice que es *casi Hermítica* si la estructura casi compleja J es una isometría de cada espacio tangente T_pM, es decir $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para cualesquiera campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Llamaremos *variedad casi Hermítica* al triple (M, g, J).

Asociada a cada estructura casi Hermítica (g, J) existe siempre una 2-forma asociada $\Omega(X, Y) = g(JX, Y)$. La 2-forma Ω induce una orientación en M que coincide con la orientación de la estructura casi compleja cuando la métrica casi Hermítica es definida positiva. Sin embargo ambas orientaciones son opuestas cuando la métrica subyacente es de signatura neutra $(2, 2)$. La 2-forma Ω define una sección de $\Lambda^2(M)$ verificando $\|\Omega\|^2 = 2$ (independientemente de la signatura de la métrica). Recíprocamente, para cada sección Ω de $\Lambda^2(M)$ de norma $\|\Omega\|^2 = 2$ existe una estructura casi Hermítica asociada.

La derivada covariante de la estructura casi compleja se relaciona con la diferencial de la 2-forma Ω y el tensor de Nijenhuis mediante la expresión

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) + 3d\Omega(X, Y, Z) - 3d\Omega(X, JY, JZ) - g(JX, N_J(Y, Z)) = 0.$$

Estructuras Hermíticas

Una variedad casi Hermítica (M, g, J) se dirá *Hermítica* si la estructura casi compleja es integrable. La existencia de estructuras Hermíticas da lugar a nuevas identitades algebraicas para la curvatura. Gray mostró en [107] que el tensor curvatura de una variedad Hermítica verifica la identidad

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &+ R(JX, JY, JZ, JW) \\ &= R(JX, JY, Z, W) + R(X, Y, JZ, JW) + R(JX, Y, JZ, W) \\ &\quad + R(X, JY, Z, JW) + R(JX, Y, Z, JW) + R(X, JY, JZ, W). \end{aligned}$$

En [27] se prueba que la identidad anterior es la condición necesaria y suficiente para que un tensor curvatura algebraico definido en un espacio vectorial Hermítico sea realizable geométricamente por una variedad Hermítica. Este hecho pone de manifiesto que la identidad anterior, juntamente con las identidades dadas en la Ecuación (1.1), determinan todas las simetrías de la curvatura de una variedad Hermítica.

Estructuras casi Kähler

Una estructura casi Hermítica se llama *casi Kähler* si la 2-forma Ω es cerrada (i.e., $d\Omega = 0$). La existencia de estructuras casi Kähler conlleva ciertas restricciones sobre la curvatura de la variedad. La posibilidad de garantizar la integrabilidad de una estructura casi Kähler a partir de las propiedades de la curvatura ha sido abundantemente estudiada (estructuras casi Kähler Einstein, localmente conformemente llanas, etc.).

Es interesante notar que los resultados de integrabilidad conocidos son válidos tan solo en el ámbito Riemanniano. De hecho, la existencia de estructuras isotrópicas Kähler (esto es, $\|\nabla J\|^2 = 0$, pero $\nabla J \neq 0$) imposibilita la validez de dichos resultados en el caso pseudo-Riemanniano.

Estructuras Kähler

El caso más simple de variedad Hermítica viene dado por las variedades Kähler, caracterizadas por el paralelismo de la estructura compleja ($\nabla J = 0$). Un simple cálculo utilizando que $\nabla J = 0$ muestra que la identidad anterior de la curvatura se reduce en este caso a la forma más simple

$$R(X,Y,Z,W) = R(JX,JY,Z,W).$$

De nuevo esta identidad permite determinar todos los tensores curvatura algebraicos definidos en un espacio vectorial Hermítico que pueden ser realizados geométricamente sobre una variedad Kähler [28]. Una consecuencia inmediata de la identidad Kähler es que toda variedad Kähler de curvatura seccional constante es necesariamente llana. Por este motivo se introduce la *curvatura seccional holomorfa* como la restricción de la curvatura seccional a planos holomorfos (i.e., $J(\pi) \subset \pi$) no degenerados. Es importante señalar que la curvatura seccional holomorfa determina el tensor curvatura en geometría de Kähler y, además, una variedad Kähler es de curvatura seccional holomorfa constante c si y sólo si el tensor curvatura se expresa como

$$R = \frac{c}{4}\left(R^0 + R^J\right),$$

donde

$$\begin{aligned} R^0(X,Y,Z,W) &= g(X,Z)g(Y,W) - g(Y,Z)g(X,W), \\ R^J(X,Y,Z,W) &= g(JX,Z)g(JY,W) - g(JY,Z)g(JX,W) + 2g(JX,Y)g(JZ,W). \end{aligned}$$

1.4.2. Estructuras casi paraHermíticas

Una 2-forma Ω sobre una variedad $2m$-dimensional M se dice *casi simpléctica* si es no degenerada, es decir, si $\Omega^m \neq 0$, y el par (M, Ω) se denomina entonces *variedad casi simpléctica*. Se llama *subvariedad Lagrangiana* de una variedad casi simpléctica (M^{2m}, Ω) a una subvariedad inmersa m-dimensional sobre la que Ω induce la forma cero.

Se dice que una variedad casi simpléctica (M, Ω) es *casi paraHermítica* si su fibrado tangente se descompone en suma de Whitney de subfibrados Lagrangianos.

Inducido por la descomposición $TM = L \oplus L'$, el campo de tensores $\mathfrak{J}$ de tipo $(1,1)$ definido por $\mathfrak{J} = \sigma_L - \sigma_{L'}$ (siendo σ_L y $\sigma_{L'}$ las proyecciones de TM sobre L y L' respectivamente) determina una estructura casi producto en M, de tal forma que $\Omega(\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}Y) = -\Omega(X, Y)$ para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre la variedad. Dado que las dimensiones de las distribuciones correspondientes a los autovalores 1 y -1 asociados a $\mathfrak{J}$ coinciden, nos referiremos a $\mathfrak{J}$ como *estructura casi paracompleja*. Definiendo ahora $g(X, Y) = \Omega(\mathfrak{J}X, Y)$, g resulta ser un campo de tensores simétrico de tipo $(0, 2)$ no degenerado sobre M y, además, $g(\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}Y) = -g(X, Y)$ para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre M. Así, diremos que $(g, \mathfrak{J})$ define una *estructura casi paraHermítica* en M y nos referiremos a $(M, g, \mathfrak{J})$ como *variedad casi paraHermítica*.

La siguiente identidad muestra la relación existente entre la 2-forma Ω, la integrabilidad de la estructura casi paracompleja $\mathfrak{J}$ y la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica g:

$$2g((\nabla_X \mathfrak{J})Y, Z) + 3d\Omega(X, Y, Z) + 3d\Omega(X, \mathfrak{J}Y, \mathfrak{J}Z) + g(\mathfrak{J}X, N_{\mathfrak{J}}(Y, Z)) = 0 \tag{1.7}$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y, Z sobre M, donde $N_{\mathfrak{J}}$ denota el tensor de Nijenhuis de $\mathfrak{J}$, es decir, $N_{\mathfrak{J}}(X, Y) = [\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}Y] - \mathfrak{J}[\mathfrak{J}X, Y] - \mathfrak{J}[X, \mathfrak{J}Y] + \mathfrak{J}^2[X, Y]$. Tal ecuación permite caracterizar las variedades paraKähler por medio del paralelismo de la estructura casi paracompleja $\mathfrak{J}$ respecto a la conexión de Levi-Civita de la métrica, $\nabla \mathfrak{J} = 0$ y, al mismo tiempo, establece un cierto paralelismo formal entre el estudio de las estructuras casi Hermíticas y casi paraHermíticas. Al igual que en el caso casi Hermítico, la existencia de una estructura casi paraHermítica restringe la topología de la variedad subyacente que, en particular, ha de ser orientable (véase [57] para más información sobre geometría paraHermítica).

Existen, sin embargo, un buen número de diferencias entre las estructuras casi Hermíticas y casi paraHermíticas, algunas de las cuales son de especial interés en este trabajo. En primer lugar es importante señalar que mientras que las métricas casi Hermíticas pueden ocurrir en cualquier signatura $(2\mu, 2m - 2\mu)$, las métricas casi paraHermíticas han de ser necesariamente de signatura neutra (m, m). Para cada estructura casi paraHermítica $(g, \mathfrak{J})$ existe una 2-forma asociada $\Omega(X, Y) = g(\mathfrak{J}X, Y)$. La 2-forma Ω induce una orientación en M que coincide con la orientación de la estructura casi paracompleja. La 2-forma Ω define una sección de $\Lambda^2(M)$ verificando $\|\Omega\|^2 = -2$ y, recíprocamente, para cada sección Ω de $\Lambda^2(M)$ de norma $\|\Omega\|^2 = -2$ existe una estructura casi paraHermítica asociada.

Estructuras paraKähler

Una *variedad paraKähler* es una variedad simpléctica localmente difeomorfa a un producto de subvariedades Lagrangianas. Este hecho da lugar a una descomposición del fibrado tangente, TM, en suma de Whitney de subfibrados Lagrangianos, $TM = L \oplus L'$.

La Ecuación (1.7) muestra que las variedades paraKähler están caracterizadas por el paralelismo de la estructura casi paracompleja $\mathfrak{J}$. Como consecuencia, los subfibrados Lagrangianos L y L' en que se descompone el fibrado tangente son paralelos. Ese hecho no da lugar a una descomposición local de de Rham de la variedad como producto, dado que la restricción de la métrica a ambos subfibrados es degenerada. Sin embargo, la existencia de distribuciones nulas paralelas indica que la estructura subyacente es la de una variedad de Walker (véase la Sección 1.7 para más información).

El hecho de que la estructura paracompleja de una variedad paraKähler sea paralela ($\nabla\mathfrak{J} = 0$) conlleva una identidad tipo Kähler para la curvatura,

$$R(X, Y, Z, W) = -R(\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}Y, Z, W).$$

Se define la *curvatura seccional paraholomorfa* como la restricción de la curvatura seccional a planos paraholomorfos (i.e., $\mathfrak{J}(\pi) \subset \pi$) no degenerados. Al igual que en el ámbito Kähleriano, la curvatura seccional paraholomorfa determina la curvatura de una variedad paraKähler y esta es constantemente c si y sólo si el tensor curvatura verifica

$$R = -\frac{c}{4}\left(R^0 - R^{\mathfrak{J}}\right).$$

1.4.3. Estructuras nulas Kähler

Sea M una variedad diferenciable $2m$-dimensional. Un campo de tensores $\mathcal{N}$ de tipo $(1,1)$ sobre M se dice una *estructura casi tangente* si $\mathcal{N}^2 = 0$ y $\mathrm{Rango}(\mathcal{N}) = m$. Una métrica g en M se dirá *adaptada* si se verifica $g(\mathcal{N}X, Y) + g(X, \mathcal{N}Y) = 0$ para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre M [53] y, en tal caso, nos referiremos a $(\mathcal{N}, g)$ como *estructura casi tangente métrica*. Nótese que g ha de ser necesariamente de signatura neutra. Cuando además el campo de tensores $\mathcal{N}$ sea paralelo respecto a la conexión de Levi-Civita de (M, g), se dice que la estructura $(\mathcal{N}, g)$ es *nula Kähler* [79].

El carácter nilpotente de las estructuras casi tangentes muestra que $\mathrm{Im}\,\mathcal{N} \subset \ker\mathcal{N}$, por lo que al ser $\mathcal{N}$ de rango máximo, $\ker\mathcal{N}$ define una distribución m-dimensional sobre M que es completamente degenerada para cualquier métrica adaptada g. Si la estructura $(\mathcal{N}, g)$ es nula Kähler, entonces $\ker\mathcal{N}$ es una distribución paralela, por lo que (M, g) es una variedad de Walker (véase la Sección 1.7 para más información).

Asociada a cada estructura casi tangente métrica podemos definir una 2-forma Ω dada por $\Omega(X, Y) = g(\mathcal{N}X, Y)$, que resulta ser una sección nula del fibrado $\Lambda^2(M)$. Recíprocamente, cada 2-forma Ω sobre una variedad (M, g) de signatura neutra verificando $\|\Omega\| = 0$ define una estructura casi tangente métrica.

1.4.4. Pares simplécticos

En una variedad M de dimensión cuatro se llama *par simpléctico* a un par de formas simplécticas (Ω_+, Ω_-) compatibles con las orientaciones opuestas de M, de tal forma que

$$\Omega_+ \wedge \Omega_- = 0, \qquad \Omega_+ \wedge \Omega_+ = -\Omega_- \wedge \Omega_-. \tag{1.8}$$

Los pares simplécticos aparecen de forma natural asociados a un buen número de situaciones geométricas: métricas Riemannianas para las que los productos de formas armónicas son armónicas, la geometría de variedades de dimensión cuatro con foliaciones holomorfas, etc. (Ver [6] para más información sobre pares simplécticos).

La existencia de pares simplécticos viene caracterizada por la siguiente propiedad [7, 16]: sea (M, g) una variedad de dimensión cuatro dotada de dos 2-planos ortogonales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dados por 2-formas $\omega_{\mathcal{F}}$ y $\omega_{\mathcal{G}}$. Entonces $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ definen foliaciones minimales en (M, g) si y sólo si $\Omega_\pm = \frac{1}{2}(\omega_{\mathcal{F}} \pm \omega_{\mathcal{G}})$ es un par simpléctico.

1.5. Operadores asociados a la curvatura

La complejidad inherente al estudio de un campo de tensores de tipo $(0, 4)$ hace que el estudio de la curvatura haya derivado en el análisis de distintas funciones asociadas a la misma (como la curvatura seccional, la curvatura escalar, etc.) o de propiedades de operadores asociados a la misma (operador de Jacobi, de Szabó, etc.) [93].

Nuestro estudio de la geometría subyacente a los operadores curvatura se centra en el análisis de sus propiedades algebraicas, centrándonos en el estudio del espectro de los mismos y en sus propiedades de conmutación. El problema de Osserman es probablemente el ejemplo más conocido en el intento de determinar la geometría de una variedad a partir del espectro de sus operadores de Jacobi. La existencia de propiedades de conmutación entre distintos operadores curvatura está estrechamente relacionada con ciertas propiedades geométricas como es el carácter semisimétrico (conmutación entre operadores de curvatura antisimétricos y/o el operador de Ricci), o los denominados $\mathfrak{P}$-espacios (conmutación de los operadores de Jacobi y Szabó).

De nuevo recordamos que las definiciones que aquí se proporcionan a nivel algebraico se trasladan automáticamente a la situación geométrica.

1.5.1. El operador de Jacobi

El operador de Jacobi aparece de un modo natural en muchos problemas geométricos, como por ejemplo en el estudio de la desviación geodésica, y desempeña un papel esencial en la formulación geométrica de la Relatividad General (ver [129, 142] para más información). En esta memoria estudiaremos propiedades espectrales relacionadas con dicho operador.

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con un producto interior de signatura $(\nu, n-\nu)$ y sea A un tensor curvatura algebraico en V. Para cada vector no nulo $z \in V$ denotamos con $A(z, \cdot)z : V \longrightarrow V$ la aplicación lineal definida por $(A(z, \cdot)z)x = A(z, x)z$. Es inmediato ver que debido a las identidades del tensor curvatura se tiene que $A(z,\,\cdot\,)z : V \longrightarrow z^{\perp}$, donde $z^{\perp}$ es el espacio ortogonal a $\langle\{z\}\rangle$. Cuando $z \in S(V)$ entonces $z^{\perp}$ es un subespacio no degenerado de V, por lo que se define el operador de Jacobi asociado a $z \in V$ como

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J}_A(z) : z^{\perp} & \longrightarrow & z^{\perp} \\ x & \longmapsto & A(z,x)z\,. \end{array}$$

De nuevo usando las identidades del tensor curvatura se observa que el operador de Jacobi es un operador autoadjunto.

Variedades de Osserman

Sea A un tensor curvatura algebraico en un espacio vectorial con producto interior $(V,\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ de signatura $(\nu, n-\nu)$. Diremos que $(V,\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A)$ es *espacial Osserman* (respectivamente *temporal Osserman*) si los autovalores de $\mathcal{J}$ son constantes en $S^{+}(V)$ (respectivamente, en $S^{-}(V)$). Asumiendo $\nu > 0$ y $n-\nu > 0$, ambas condiciones son equivalentes [85, 93]. En lo que sigue cuando una de las anteriores condiciones se satisfaga diremos que $(V,\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A)$ es *Osserman.* El estudio de los operadores de Jacobi a lo largo de direcciones nulas es más complejo. Debido a la dificultad para normalizar los vectores nulos, se dice que $(V,\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A)$ es *nulo Osserman* si los operadores de Jacobi asociados a direcciones nulas son nilpotentes (esto es, los autovalores de los operadores de Jacobi son nulos).

Un proceso de paso al límite muestra que la condición Osserman conlleva la nula Osserman pero el recíproco tan solo se conoce en dimensión cuatro o si la signatura es Lorentziana [84, 87].

En un contexto puramente geométrico el estudio de las variedades Osserman pseudo-Riemannianas es más delicado. Debemos diferenciar en primer lugar entre las condiciones de Osserman puntual y global. Diremos que una variedad pseudo-Riemanniana (M,g) es *puntualmente Osserman* si los autovalores del operador de Jacobi $\mathcal{J}(x)$ no dependen de $x \in S_p^{+}(M)$ pero pueden cambiar de punto a punto. En el caso en que los autovalores de los operadores de Jacobi no varíen de un punto a otro diremos que (M,g) es *globalmente Osserman.*

Dado que el espectro de un operador autoadjunto no es suficiente para determinar éste en el ámbito pseudo-Riemanniano, se introducen las condiciones Jordan-Osserman, que asumen la constancia de la forma de Jordan de los operadores de Jacobi. Se dice que una variedad pseudo-Riemanniana (M,g) es *espacial Jordan-Osserman* (respectivamente *temporal Jordan-Osserman*) si la forma de Jordan del operador de Jacobi $\mathcal{J}(x)$ es constante en $S^{+}(M)$ (respectivamente, es constante en $S^{-}(M)$). De nuevo se presenta una distinción entre las condiciones puntual (cuando la forma de Jordan pueda variar de unos puntos a otros) y global. Sin embargo, la principal diferencia con las condiciones de Osserman es que el carácter espacial y temporal Jordan-Osserman no son equivalentes (véase por ejemplo [91]). Además, en cualquier signatura no neutra, un tensor curvatura algebraico es simultáneamente espacial y temporal Jordan-Osserman si y sólo si es diagonalizable [97]. Señalar finalmente que la condición nula Jordan-Osserman es mucho más restrictiva:

existen variedades de Osserman que son espaciales y temporales Jordan-Osserman pero no nulas Jordan-Osserman.

La nomenclatura de variedad de Osserman viene motivada por el artículo [145] donde R. Osserman conjeturó que toda variedad de Riemann globalmente Osserman es localmente isométrica a un espacio isotrópico. El recíproco es cierto teniendo en cuenta que el grupo de isometrías de cualquier variedad isotrópica actúa transitivamente en el fibrado esférico unitario. La conjetura ha sido resuelta en cualquier dimensión $n \neq 16$. Chi demostró que es cierta para dimensión 4 y para dimensiones $2k+1$ y $4k+2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ [49, 50]. Para dimensión $4k$, $k \neq 4$ Nikolayevski demostró que la conjetura también es cierta [138, 139]. En todos los casos anteriores el tensor curvatura puede ser expresado en términos de ciertos módulos de Clifford, algo que no es posible cuando se considera el plano de Cayley, donde radica la dificultad del caso excepcional de dimensión $n = 16$. En signatura Lorentziana se tiene que toda variedad de Osserman ha de ser necesariamente de curvatura seccional constante [10, 84]. En caso de signatura arbitraria la conjetura es falsa. El primer caso no trivial es en dimensión $n = 4$ y signatura neutra $(2, 2)$ donde se obtienen ejemplos de variedades Osserman que no son espacios simétricos de rango uno [92] y ni tan siquiera homogéneos.

El operador de Szabó: $\mathfrak{C}$-espacios y $\mathfrak{P}$-espacios

En 1991, Szabó [154] inicia el estudio de la derivada del operador de Jacobi, i.e. $\mathcal{S}(x) = (\nabla_x R)(x, \cdot)x$, mostrando que, en el caso Riemanniano, dicho operador tiene autovalores constantes si y sólo si la variedad es localmente simétrica. Este resultado dio lugar a un estudio pormenorizado de los autovalores de dicho operador. Se dice que una variedad es *puntualmente espacial* (respectivamente *puntualmente temporal*) *Szabó* si los autovalores de los operadores de Szabó son constantes en la pseudo-esfera unitaria $S_p^+(M)$ (respectivamente $S_p^-(M)$). Estas dos condiciones son equivalentes por lo que en lo que sigue hablaremos simplemente de variedades Szabó. Los conceptos *globalmente Szabó* y *Jordan-Szabó* se definen de un modo análogo al caso de las variedades de Osserman.

La condición de ser una variedad Szabó caracteriza a los espacios localmente simétricos en el caso de signatura Riemanniana [154] y Lorentziana [103]. En el caso de signatura arbitraria el resultado no es cierto [103].

Recordando que una variedad pseudo-Riemanniana es localmente simétrica si y sólo si el tensor curvatura es paralelo (i.e., $\nabla R = 0$), Berndt y Vanhecke [9] estudiaron esta propiedad a lo largo de geodésicas en el ámbito Riemanniano, probando que la condición anterior es equivalente a la constancia de los autovalores de los operadores de Jacobi a lo largo de cada geodésica y al carácter paralelo de los autoespacios asociados. Motivados por este hecho, plantearon el estudio de las dos propiedades anteriores de forma separada como generalización de los espacios localmente simétricos.

($\mathfrak{C}$) Una variedad de Riemann (M, g) se dice que es un $\mathfrak{C}$-*espacio* si los autovalores de los operadores de Jacobi son constantes a lo largo de geodésicas.

($\mathfrak{P}$) Una variedad de Riemann (M, g) se dice que es un $\mathfrak{P}$-*espacio* si los autoespacios de los operadores de Jacobi son paralelos a lo largo de geodésicas.

Las condiciones anteriores se generalizan de forma natural a la situación Lorentziana sin más que restringir el estudio a las geodésicas temporales, lo que ha motivado un estudio detallado de las mismas [42]. Sin embargo la situación es claramente distinta en otras signaturas, ya que es posible construir ejemplos no simétricos en signatura $(2, 2)$ que verifican las condiciones $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{P}$ simultáneamente [19].

El estudio de las propiedades de conmutación del operador de Jacobi y el operador de Szabó tiene especial relevancia en este estudio, ya que caracteriza los $\mathfrak{P}$-espacios.

1.5.2. El operador de Jacobi de orden superior

El *operador de Jacobi de orden superior* fue introducido por Stanilov y Videv [153] como un valor medio de los operadores de Jacobi sobre un cierto subespacio. Sea π un k-plano y $\{e_1, \ldots, e_k\}$ una base ortonormal de π. Se define el *operador de Jacobi de orden superior* asociado a π como

$$\mathcal{J}(\pi) = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \mathcal{J}(e_i)\,,$$

donde $\varepsilon_i = \langle\, e_i, e_i \,\rangle$. Este operador es independiente de la base ortonormal elegida para el k-plano π. Si $k = 1$, se recupera el operador de Jacobi mientras que si $k = n$ entonces el operador de Jacobi de orden superior se corresponde con el operador de Ricci.

Se dice que $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A)$ es *k-Osserman* si los operadores $\mathcal{J}(\pi)$ tienen autovalores constantes sobre la Grassmaniana $Gr_k(V)$ de k-planos. En el caso pseudo-Riemanniano, las distintas condiciones correspondientes a las posibles signaturas de los k-planos son equivalentes [93]. Señalar asimismo que la condición de ser k-Osserman es muy restrictiva en el ámbito Riemanniano y Lorentziano, donde es equivalente a la constancia de la curvatura seccional [94, 103].

Variedades complejas y paracomplejas Osserman

Sea $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A)$ un espacio vectorial con un producto interior de signatura $(\nu, n-\nu)$ y un tensor curvatura algebraico A. Sea J una estructura compleja en $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ y denotemos por $\mathcal{H}(V)$ el espacio de 2-planos holomorfos no degenerados. Si $\pi \in \mathcal{H}(V)$, y $\xi \in \pi$ es un vector unitario, se define el *operador de Jacobi complejo* como:

$$\mathcal{J}(\pi) = \mathcal{J}(\xi) + \mathcal{J}(J\xi),$$

que resulta independiente de la elección del vector unitario ξ.

Así como el operador de Jacobi determina la curvatura en el caso pseudo-Riemanniano, el operador de Jacobi complejo no determina necesariamente la curvatura en la situación genérica casi Hermítica, incluso asumiendo un cierto grado de compatibilidad entre la estructura casi compleja y la curvatura $J^*A = A$ (i.e., $A(JX, JY, JZ, JU) = A(X, Y, Z, U)$), como se muestra en [20]. Por ello, es natural restringir el campo de estudio a aquellas clases de variedades casi Hermíticas donde la estructura casi compleja es compatible y el operador de Jacobi complejo determina la curvatura (como sucede, por ejemplo, en las variedades Hermíticas o en las Nearly Kähler) [20]. Se dice que $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A, J)$ es *compleja Osserman* si J y A son compatibles (es decir, $J^*A = A$) y los autovalores de $\mathcal{J}(\pi)$ son constantes en $\mathcal{H}(V)$.

Un primer paso natural hacia el estudio de las variedades complejas Osserman es el caso en el que la estructura compleja J sea Kähler sobre un espacio vectorial $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A)$ dotado de un producto interior definido positivo (i.e., $A(Jx, Jy) = A(x, y)$, para cualesquiera $x, y \in V$). En este caso, la estructura de autovalores es muy restrictiva.

De hecho, si un espacio vectorial de dimensión $n \geq 4$ $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A, J)$ dotado de un producto interior Riemanniano y un tensor curvatura algebraico A no nulo verificando la identidad de Kähler es complejo Osserman, entonces el operador de Jacobi complejo tiene dos autovalores con multiplicidades $(n-2, 2)$ o tres autovalores con multiplicidades $(n-4, 2, 2)$ con $n = 4k \geq 8$ [26].

Así se tiene que una variedad casi Hermítica (M, g, J) de dimensión cuatro verificando la identidad de Kähler es compleja Osserman si y sólo si tiene curvatura seccional holomorfa constante [26].

De modo análogo al caso complejo se define el operador de Jacobi paracomplejo. Sea $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A)$ un espacio vectorial dotado de un producto interior de signatura neutra (m, m) y un tensor curvatura algebraico A. Sea $\mathfrak{J}$ una estructura paracompleja en $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$. Denotamos por $\mathcal{P}(V)$ el espacio de 2-planos paraholomorfos (i.e., $\mathfrak{J}\pi \subset \pi$) no degenerados. Sea $\pi \in \mathcal{P}(V)$ y $\zeta \in \pi$ un vector unitario. Definimos el *operador de Jacobi paracomplejo* como:

$$\mathcal{J}(\pi) = \mathcal{J}(\zeta) - \mathcal{J}(\mathfrak{J}\zeta)\,.$$

En este contexto, decimos que V es *semi paracompleja Osserman* si el operador de Jacobi paracomplejo $\mathcal{J}(\cdot)$ tiene autovalores constantes en $\mathcal{P}(V)$. Si además $\mathcal{J}(\pi)$ conmuta con $\mathfrak{J}$ para todo plano $\pi \in \mathcal{P}(V)$ diremos que V es *paracompleja Osserman*.

1.5.3. El operador de curvatura antisimétrico

En el estudio de las propiedades del tensor curvatura a lo largo de círculos, el operador de curvatura antisimétrico juega un papel relevante [111, 112]. Geodésicas y círculos son objetos clásicos en Geometría y Física, siendo estos últimos preservados por transformaciones de Möbius por lo que están en relación con la estructura conforme de la variedad [126].

Sea $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A)$ un espacio vectorial dotado de un producto interior y un tensor curvatura algebraico A. Sea π un plano no degenerado, $\pi = \langle\{x, y\}\rangle$. El *operador de curvatura antisimétrico*

$$\mathcal{A}(\pi)z = |\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2|^{-\frac{1}{2}} A(x, y)z$$

es independiente de la base de π considerada [93].

Es importante señalar aquí que, a diferencia de los operadores curvatura considerados anteriormente, el operador de curvatura antisimétrico no es autoadjunto.

Variedades Ivanov-Petrova

Diremos que una variedad pseudo-Riemanniana es *puntualmente Ivanov-Petrova* (IP en lo que sigue) si los autovalores de $\mathcal{R}(\pi)$ dependen únicamente del punto base $p \in M$, pero no de la elección del plano $\pi \in Gr_2(T_pM)$ [113]. La variedad se dirá *globalmente IP* si los autovalores de $\mathcal{R}(\pi)$ son constantes en la Grassmanniana $Gr_2(TM)$. Un primer ejemplo de variedad IP viene dado por las variedades de curvatura seccional constante. Ahora bien, existen variedades de Riemann IP que no son de curvatura seccional constante [93, 100, 105].

En dimensión tres las variedades IP están totalmente clasificadas a nivel algebraico en signatura Riemanniana, correspondiéndose con aquellas cuyo operador de Ricci es un múltiplo de la identidad (tensores curvatura algebraicos de Einstein), o bien aquellas cuyo operador de Ricci es de rango uno [113]. En este último caso, el autovalor no nulo del operador de Ricci será una función diferenciable en el caso puntualmente IP y una constante en el caso globalmente IP. En el caso de dimensión tres Lorentziano, a mayores de los dos casos anteriores aparecen los tensores curvatura cuyo operador de Ricci es nilpotente en dos pasos [83]. En cualquiera de los casos, una descripción completa a nivel diferenciable no es todavía conocida.

Si nos ceñimos al caso Riemanniano las variedades IP están completamente clasificadas en dimensión $n \geq 4$. Ivanov y Petrova las determinaron para dimensión cuatro [113], y Gilkey, Leahy y Sadofsky completaron la clasificación en cualquier dimensión [100], obteniéndose que una variedad de Riemann (M, g) es puntualmente IP si y sólo si es localmente isométrica en casi todo punto (es decir en un abierto denso) a un espacio de curvatura seccional constante o a un producto warped de la forma $I \times_f F$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto, F una variedad de Riemann de dimensión $\dim F = n-1$ con curvatura seccional constante K, y la función de deformación viene dada por $f = \sqrt{Kt^2 + Ct + D}$ para C, D constantes reales verificando que $C^2 - 4KD \neq 0$.

Es fácil ver que todos los productos warped dados por la forma anterior son localmente conformemente llanos y por tanto no existen variedades de Riemann IP no localmente conformemente llanas.

$\mathfrak{O}$-espacios y $\mathfrak{T}$-espacios

Motivados por las propiedades del operador de Jacobi a lo largo de geodésicas, Ivanov y Petrova [111, 112] caracterizaron las variedades localmente simétricas en términos de las propiedades del operador de curvatura antisimétrico $\mathcal{R}_{c'}(X) = \mathcal{R}(c', \nabla_{c'}c')X$ a lo largo de círculos unitarios. Una variedad de Riemann (M, g) es localmente simétrica si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes: el operador de curvatura antisimétrico tiene autovalores constantes a lo largo de cada círculo unitario y existe una base de Jordan para el mismo que es paralela a lo largo del círculo. El análisis separado de ambas condiciones motivó las siguientes generalizaciones de los espacios simétricos:

($\mathfrak{O}$) Una variedad de Riemann (M, g) se dice $\mathfrak{O}$-*espacio* si los autovalores de los operadores de curvatura antisimétricos son constantes a lo largo de círculos unitarios.

($\mathfrak{T}$) Una variedad de Riemann (M, g) se dice un $\mathfrak{T}$-*espacio* si existe una base de Jordan del operador de curvatura antisimétrico paralela a lo largo de círculos unitarios.

De modo análogo a como ocurría con los $\mathfrak{P}$-espacios, los $\mathfrak{T}$-espacios están caracterizados por la conmutación del operador de curvatura antisimétrico y su derivada covariante a lo largo de círculos.

1.6. Geometría Afín

Una *variedad afín* es una variedad $\mathcal{M}$ equipada con una conexión afín sin torsión D. Denotando por R el tensor curvatura asociado, se dice que la variedad afín $(\mathcal{M}, D)$ es llana si $R = 0$, en cuyo caso siempre existen sistemas de coordenadas en los que los símbolos de Christoffel se anulan (i.e., $\Gamma_{ij}^k = 0$). Asociado al tensor curvatura de la conexión D, se define el *tensor de Ricci* como $\rho(X, Y) = \text{traza}\{Z \mapsto R(X, Z)Y\}$.

A diferencia de lo que ocurre con el tensor de Ricci asociado a la conexión de Levi-Civita de una variedad pseudo-Riemanniana, el tensor de Ricci de una conexión afín no es necesariamente simétrico, por lo que es conveniente descomponerlo en sus componentes simétrica y antisimétrica

$$\rho^{sim}(X, Y) = \frac{1}{2}\{\rho(X, Y) + \rho(Y, X)\}, \qquad \rho^{ant}(X, Y) = \frac{1}{2}\{\rho(X, Y) - \rho(Y, X)\}.$$

Dos conexiones afines D y $\overline{D}$ son *proyectivamente equivalentes* si existe una 1-forma ω de tal forma que

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \omega(X)Y + \omega(Y)X$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y en $\mathcal{M}$. Se dice que $(\mathcal{M}, D)$ es *proyectivamente llana* si D es proyectivamente equivalente a una conexión afín llana. Denotando por P el tensor proyectivo de Weyl,

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-1}\{\rho(X, Z)Y - \rho(Y, Z)X\},$$

se tiene que $(\mathcal{M}, D)$ es proyectivamente llana si y sólo si $P = 0$ cuando dim $\mathcal{M} \geq 3$. En dimensión dos, el tensor proyectivo de Weyl se anula (ya que la curvatura de toda conexión afín en dimensión dos verifica $R(X, Y)Z = \rho(X, Z)Y - \rho(Y, Z)X$), por lo que una superficie afín (Σ, D) es proyectivamente llana si y sólo si el tensor de Ricci es Codazzi (i.e., $(\nabla_X \rho)(Y, Z) = (\nabla_Y \rho)(X, Z)$).

Una variedad afín se dice *recurrente* (respectivamente *Ricci recurrente*) si $DR = \omega \otimes R$ (respectivamente $D\rho = \omega \otimes \rho$) para alguna 1-forma ω. Se dice que $(\mathcal{M}, D)$ es *localmente simétrica* si $DR = 0$. Las variedades afines recurrentes surgen de modo natural en el estudio de las conexiones afines con tensor de Ricci antisimétrico, dado que toda superficie afín (Σ, D) con tensor de Ricci antisimétrico tiene curvatura recurrente en un entorno de cada punto donde la curvatura es no nula.

Una variedad afín $(\mathcal{M}, D)$ se dirá que es *afín Osserman* si los operadores de Jacobi son nilpotentes [85] y se dice que $(\mathcal{M}, D)$ es *afín IP* si los operadores de curvatura antisimétricos son nilpotentes [41]. Ambas condiciones surgen de modo natural en el estudio de las condiciones de Osserman e IP para extensiones de Riemann.

1.6.1. Superficies afines

Sea (Σ, D) una superficie afín localmente simétrica. Si el tensor de Ricci es antisimétrico, entonces ρ define una 2-forma que es idénticamente nula (si D es llana) o define un elemento de volumen paralelo sobre Σ, en cuyo caso ρ ha de ser simétrico. Así pues, toda conexión afín localmente simétrica sobre Σ y no llana no puede tener tensor de Ricci antisimétrico.

El estudio de las superficies afines radica, en gran medida, en la posibilidad de expresar la curvatura de las mismas en términos de su tensor de Ricci. Así en la mayoría de los casos los resultados dependerán de la estructura del tensor de Ricci tanto en función de sus partes simétrica y antisimétrica como del rango de las mismas.

Un ejemplo ilustrativo sucede en el estudio de las superficies afines recurrentes. Si bien existe una clasificación completa, para este trabajo son especialmente relevantes los siguientes casos:

- Sea (Σ, D) una superficie afín recurrente con tensor de Ricci simétrico de rango uno. Entonces existen coordenadas (x_1, x_2) donde la única componente no nula de D viene dada por
$$D_{\partial_1}\partial_1 = a(x_1, x_2)\partial_2$$
para alguna función diferenciable $a(x_1, x_2)$ [159].

- Sea (Σ, D) una superficie afín recurrente con tensor de Ricci simétrico no degenerado. Entonces existe una métrica en Σ para la que D es su conexión de Levi-Civita [159].

- Sea (Σ, D) una superficie afín recurrente con tensor de Ricci antisimétrico. Entonces existen coordenadas (x_1, x_2) donde las únicas componentes no nulas de D vienen dadas por
$$D_{\partial_1}\partial_1 = -\partial_1\theta\partial_1, \qquad D_{\partial_2}\partial_2 = \partial_2\theta\partial_2$$
para alguna función diferenciable $\theta(x_1, x_2)$ [67, 159].

La condición de ser afín Osserman (respectivamente afín IP) para superficies afines (Σ, D) se establece en términos de las propiedades del tensor de Ricci, que ha de ser antisimétrico [85] (respectivamente simétrico de rango uno [41]).

1.7. Métricas de Walker

Es bien conocido que la existencia de una distribución paralela en una variedad Riemanniana da lugar a una descomposición local de de Rham como producto. Esta propiedad se mantiene en el caso pseudo-Riemanniano si la distribución paralela es no degenerada. El caso en el que la distribución $\mathfrak{D}$ sea degenerada fue estudiado por Walker [157] obteniendo una forma canónica para la métrica. Basándonos en este trabajo diremos que una variedad pseudo-Riemanniana es una *variedad de Walker* si admite una distribución paralela y degenerada $\mathfrak{D}$.

Las métricas de Walker son una clase especial de métricas pseudo-Riemannianas que no tienen análogo Riemanniano. Estas métricas son las responsables de muchas situaciones estrictamente pseudo-Riemannianas: holonomía indescomponible pero no irreducible [8], pp-waves y pr-waves [116], estructuras homogéneas pseudo-Riemannianas degeneradas [136], métricas de Einstein conformemente equivalentes [125], variedades estrictamente conformemente simétricas [72], métricas conformemente llanas con operador de Ricci nilpotente en dos pasos [110], hipersuperficies de Einstein en variedades con curvatura seccional constante y con operador de configuración nilpotente [131], estructuras paraKähler [57, 114], métricas de Osserman no localmente simétricas [17], etc. Nos referimos a [21] para más información sobre estructuras de Walker.

El siguiente teorema es central en nuestro trabajo.

Teorema 1.3. [157] *Sea M una variedad de Walker de dimensión n y $\mathfrak{D}$ una distribución paralela y degenerada r-dimensional. Entonces existen coordenadas adaptadas $(x_1, \dots, x_{n-r}, x_{n-r+1}, \dots, x_n)$ en M, de tal forma que la métrica viene dada por*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} B & H & \mathrm{Id}_r \\ {}^tH & A & 0 \\ \mathrm{Id}_r & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde Id_r es la matriz identidad de orden r y A, B, H son matrices cuyos coeficientes son funciones de las coordenadas verificando:

(1) A y B son matrices cuadradas simétricas de orden $n-2r$ y r respectivamente, H es una matriz de orden $r \times (n-2r)$ y ${}^tH$ su traspuesta.

(2) A y H son independientes de las coordenadas $(x_{n-r+1}, \dots, x_n)$.

Además la distribución paralela y nula r-dimensional $\mathfrak{D}$ está localmente generada por los campos de vectores coordenados $\{\partial_{n-r+1}, \dots, \partial_n\}$.

Observación 1.4. La forma canónica del teorema anterior resulta más sencilla si la distribución paralela tiene dimensión máxima y la variedad es de dimensión par $n = 2m$. En este caso existen coordenadas de Walker $(x_1, \dots, x_m, x_{1'}, \dots, x_{m'})$ de tal forma que la matriz de la métrica resulta (ver [21])

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} B & \mathrm{Id}_{\frac{n}{2}} \\ \mathrm{Id}_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

donde B es una matriz cuyas componentes son funciones de $(x_1, \ldots, x_m, x_{1'}, \ldots, x_{m'})$.

Las métricas dadas por la Ecuación (1.9) son especialmente interesantes para nuestro estudio. En este caso los símbolos de Christoffel y el operador de curvatura vienen determinados por

Lema 1.5. [37] *Sea $(M, g, \mathfrak{D})$ una variedad de Walker de dimensión $n = 2m$, siendo* $\dim \mathfrak{D} = m$. *Entonces los símbolos de Christoffel no nulos están determinados (salvo simetrías) por*

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^{k} &= -\tfrac{1}{2}\partial_{k'} g_{ij}, \\
\Gamma_{i'j}^{k'} &= \tfrac{1}{2}\partial_{i'} g_{jk}, \\
\Gamma_{ij}^{k'} &= \tfrac{1}{2}\left(-\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} + g_{ks}\partial_{s'} g_{ij}\right),
\end{aligned}$$

donde sumamos en $1 \leq s \leq m$.

Teniendo en cuenta el carácter paralelo de la distribución $\mathfrak{D}$, se prueba en [72] que el tensor curvatura de toda variedad de Walker satisface las condiciones

$$R(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp, \cdot, \cdot) = 0, \quad R(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \cdot, \cdot), \quad \text{y} \quad R(\mathfrak{D}^\perp, \mathfrak{D}^\perp, \mathfrak{D}, \cdot) = 0.$$

Lema 1.6. [37] *Sea $(M, g, \mathfrak{D})$ una variedad de Walker de dimensión $n = 2m$, siendo* $\dim \mathfrak{D} = m$. *Entonces las componentes no nulas del tensor curvatura tipo $(1, 3)$ son (salvo simetrías)*

$$\begin{aligned}
R_{jik}^{h} &= -\tfrac{1}{2}\left(\partial_i\partial_{h'} g_{jk} - \partial_j\partial_{h'} g_{ik}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\partial_{s'} g_{ik}\partial_{h'} g_{js} - \partial_{s'} g_{jk}\partial_{h'} g_{is}\right), \\
R_{jik}^{h'} &= -\tfrac{1}{2}\left(\partial_j\partial_k g_{ih} - \partial_j\partial_h g_{ik} + \partial_i\partial_h g_{jk} - \partial_i\partial_k g_{jh}\right) \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\left\{\partial_{s'} g_{ik}\left(\partial_h g_{js} - \partial_s g_{jh} - \partial_j g_{sh} - g_{ht}\partial_{t'} g_{js}\right)\right. \\
&\quad -\partial_{s'} g_{jk}\left(\partial_h g_{is} - \partial_s g_{ih} - \partial_i g_{sh} - g_{ht}\partial_{t'} g_{is}\right) \\
&\quad -\partial_{s'} g_{jh}\left(\partial_s g_{ik} - \partial_k g_{is} - \partial_i g_{ks} - g_{st}\partial_{t'} g_{ik}\right) \\
&\quad +\partial_{s'} g_{ih}\left(\partial_s g_{jk} - \partial_k g_{js} - \partial_j g_{ks} - g_{st}\partial_{t'} g_{jk}\right) \\
&\quad \left.+2\partial_j\left(g_{hs}\partial_{s'} g_{ik}\right) - 2\partial_i\left(g_{hs}\partial_{s'} g_{jk}\right)\right\}, \\
R_{ji'k}^{h} &= -\tfrac{1}{2}\partial_{i'}\partial_{h'} g_{jk}, \\
R_{ji'k}^{h'} &= -\tfrac{1}{2}\left(\partial_h\partial_{i'} g_{jk} - \partial_k\partial_{i'} g_{jh}\right) \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\left(\partial_{s'} g_{jk}\partial_{i'} g_{sh} + \partial_{s'} g_{jh}\partial_{i'} g_{sk} - 2\partial_{i'}(g_{hs}\partial_{s'} g_{jk})\right), \\
R_{jik'}^{h'} &= -\tfrac{1}{2}\left(\partial_j\partial_{k'} g_{ih} - \partial_i\partial_{k'} g_{jh}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\partial_{k'} g_{is}\partial_{s'} g_{jh} - \partial_{k'} g_{js}\partial_{s'} g_{ih}\right), \\
R_{ji'k'}^{h'} &= \tfrac{1}{2}\partial_{i'}\partial_{k'} g_{jh},
\end{aligned}$$

donde sumamos en $1 \leq s \leq m$ *y en* $1 \leq t \leq m$.

1.7.1. Métricas de Walker en dimensión cuatro: autodualidad

El estudio de la geometría en dimensión cuatro es uno de los ejes de nuestro trabajo. En esta situación tomaremos coordenadas $(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'})$ y escribiremos la métrica dada por la Ecuación (1.9) como

$$g = \begin{pmatrix} a & c & 1 & 0 \\ c & b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

donde a, b y c son funciones de las coordenadas $(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'})$.

La existencia de un campo de 2-planos en una variedad de dimensión cuatro conlleva una orientación natural sobre la misma (véase por ejemplo [69]), por lo que las condiciones de autodualidad y antiautodualidad poseen un significado claro. Una descripción local de las métricas de Walker autoduales fue dada en [74] como un paso previo en el estudio de la propiedad de Osserman. En coordenadas de Walker dichas métricas vienen dadas por la Ecuación (1.10), donde las funciones a, b y c verifican

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) &= x_{1'}^3 \mathcal{A} + x_{1'}^2 \mathcal{B} + x_{1'}^2 x_{2'} \mathcal{C} + x_{1'} x_{2'} \mathcal{D} + x_{1'} P + x_{2'} Q + \xi, \\ b(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) &= x_{2'}^3 \mathcal{C} + x_{2'}^2 \mathcal{E} + x_{1'} x_{2'}^2 \mathcal{A} + x_{1'} x_{2'} \mathcal{F} + x_{1'} S + x_{2'} T + \eta, \\ c(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) &= \tfrac{1}{2} x_{1'}^2 \mathcal{F} + \tfrac{1}{2} x_{2'}^2 \mathcal{D} + x_{1'}^2 x_{2'} \mathcal{A} + x_{1'} x_{2'}^2 \mathcal{C} + \tfrac{1}{2} x_{1'} x_{2'} (\mathcal{B} + \mathcal{E}) \\ &\quad + x_{1'} U + x_{2'} V + \gamma, \end{aligned} \tag{1.11}$$

donde todas las letras caligráficas, mayúsculas y griegas son funciones de las coordenadas (x_1, x_2).

La descripción de las métricas de Walker antiautoduales es un problema mucho más complejo que tan solo fue esbozado en [74].

1.8. Métricas de Walker especiales definidas en el fibrado cotangente

Una clase particular de variedades de Walker son las conocidas como extensiones de Riemann. Estas métricas tienen una gran importancia puesto que permiten trasladar problemas desde Geometría Afín a Geometría pseudo-Riemanniana y viceversa. Al mismo tiempo, son la estructura subyacente en un buen número de importantes situaciones geométricas. Estas variedades fueron introducidas por Patterson y Walker en [146] y estudiadas por diversos autores desde entonces, mostrando sus muchas aplicaciones en diferentes campos (ver [1, 78, 161]).

1.8.1. Geometría del fibrado cotangente

Consideremos $T^*\mathcal{M}$ el fibrado cotangente de una variedad $\mathcal{M}$ de dimensión n, y sea $\sigma : T^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ la proyección natural. Sea $\tilde{p} = (p, \omega)$ donde $p \in \mathcal{M}$ y $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$ un punto del fibrado cotangente $T^*\mathcal{M}$. Las coordenadas locales (x_i) en un entorno abierto U de $\mathcal{M}$ inducen coordenadas $(x_i, x_{i'})$ en $\sigma^{-1}(U)$, donde descomponemos

$$\omega = \sum x_{i'} dx_i \,.$$

Para cada campo de vectores X en $\mathcal{M}$, definimos una función $\iota X : T^*\mathcal{M} \to \mathbb{R}$ por

$$\iota X(p, \omega) = \omega(X_p) \,,$$

y escribiendo $X = X^j \partial_j$ expresamos

$$\iota X(x_i, x_{i'}) = \sum x_{i'} X^i \,.$$

Los campos de vectores en $T^*\mathcal{M}$ están caracterizados por su acción sobre las funciones de la forma ιX (véase [161] para más detalles): dos campos de vectores $\tilde{Y}, \tilde{Z}$ en $T^*\mathcal{M}$ son iguales si y sólo si $\tilde{Y}(\iota X) = \tilde{Z}(\iota X)$ para todo campo de vectores X en $\mathcal{M}$. Así, se define el *levantamiento completo* X^C de un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ como el campo de vectores en $T^*\mathcal{M}$ caracterizado por la identidad

$$X^C(\iota Z) = \iota[X, Z] \quad \text{para todo} \quad Z \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}) \,.$$

El espacio tangente a $T^*\mathcal{M}$ en cada punto $(p, \omega) \in T^*\mathcal{M}$ está generado por los levantamientos completos, y estos a su vez caracterizan los campos de tensores. De hecho un campo de tensores de tipo $(0, s)$ en $T^*\mathcal{M}$ está completamente caracterizado por su acción sobre los levantamientos completos de campos de vectores en $\mathcal{M}$ [161].

Sea T un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ en $\mathcal{M}$, es decir $T \in C^\infty(\mathrm{End}(T\mathcal{M}))$. Definimos una 1-forma $\iota T \in C^\infty(T^*(T^*\mathcal{M}))$ caracterizada por la identidad

$$\iota T(X^C) = \iota(TX) \,. \tag{1.12}$$

En las coordenadas inducidas de $T^*\mathcal{M}$ se tiene que $\iota T = x_{k'} T_i^k dx_i$.

1.8.2. Extensiones de Riemann

Considerando ahora una conexión libre de torsión D en $\mathcal{M}$, el fibrado cotangente $T^*\mathcal{M}$ puede equiparse con una métrica pseudo-Riemanniana g_D de signatura (n, n), a la cual llamaremos *extensión de Riemann* de D [146], que está determinada por

$$g_D(X^C, Y^C) = -\iota(D_X Y + D_Y X),$$

donde X^C, Y^C denotan los levantamientos completos a $T^*\mathcal{M}$ de campos de vectores X, Y en $\mathcal{M}$. En un sistema de coordenadas inducido $(x_i, x_{i'})$ en $T^*\mathcal{M}$, la extensión de Riemann se expresa como

$$g_D = \begin{pmatrix} -2x_{k'}\Gamma_{ij}^k & \mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix},$$

con respecto a $\{\partial_1, \ldots, \partial_n, \partial_{1'}, \ldots, \partial_{n'}\}$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$, donde Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel de la conexión D con respecto a las coordenadas (x_i) en $\mathcal{M}$.

La extensión de Riemann es una clase particular de métrica de Walker donde la distribución $\mathfrak{D}$ tiene dimensión máxima y viene dada por $\mathfrak{D} = \ker \sigma_*$. Como ya se mencionó las extensiones de Riemann proporcionan una conexión entre Geometría Afín y pseudo-Riemanniana. Algunas propiedades de la conexión afín D se pueden investigar a través de las correspondientes propiedades de la extensión de Riemann g_D. Por ejemplo, D es proyectivamente llana si y sólo si g_D es localmente conformemente llana [1] (ver [78, 85, 141, 158] para más ejemplos y más referencias).

Observación 1.7. Si la conexión D en $\mathcal{M}$ es la conexión de Levi-Civita de una métrica g en $\mathcal{M}$, entonces los isomorfismos musicales son isometrías entre $(T^*\mathcal{M}, g_D)$ y $(T\mathcal{M}, g^C)$, donde g^C denota el levantamiento completo de la métrica g al fibrado tangente [89]. Como se verá a lo largo de la memoria, las principales diferencias entre las situaciones definida positiva e indefinida estarán relacionadas con las extensiones de Riemann de conexiones no métricas.

1.8.3. Extensiones de Riemann deformadas

Para nuestro propósito resultará de gran utilidad considerar una ligera generalización de las extensiones de Riemann. Consideremos $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín de dimensión n, siendo D una conexión libre de torsión en $\mathcal{M}$. Sea Φ un tensor de tipo $(0, 2)$ simétrico en $\mathcal{M}$. El fibrado cotangente $T^*\mathcal{M}$ puede equiparse con una métrica pseudo-Riemanniana $g_{D,\Phi}$ de signatura (n, n), a la que denominaremos *extensión de Riemann deformada* [146], y que está dada por

$$g_{D,\Phi}(X^C, Y^C) = -\iota(D_X Y + D_Y X) + \sigma^* \Phi,$$

donde X^C, Y^C son los levantamientos completos a $T^*\mathcal{M}$ de campos de vectores en $\mathcal{M}$.

De modo análogo a las extensiones de Riemann, las extensiones de Riemann deformadas pueden expresarse en un sistema de coordenadas inducido $(x_i, x_{i'})$ en $T^*\mathcal{M}$ como

$$g_{D,\Phi} = \begin{pmatrix} -2x_{k'}\Gamma_{ij}^k + \Phi_{ij} & \mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Estas métricas fueron estudiadas exhaustivamente en [1] caracterizándolas entre las métricas de Walker por la condición $R(\,\cdot\,, \mathfrak{D})\mathfrak{D} = 0$. De forma más precisa,

Teorema 1.8. [1] *Sea (M, g) una variedad de Walker y $\mathfrak{D}$ la distribución nula y paralela. Entonces g se corresponde con la extensión de Riemann deformada de una variedad afín si y sólo si*

$$R(\cdot, X)Y = 0, \tag{1.13}$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y tangentes a la distribución $\mathfrak{D}$.

Una simple comparación con las expresiones en la Ecuación (1.11) muestra que

Teorema 1.9. *Sea $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi})$ la extensión de Riemann deformada de una superficie afín (Σ, D). Entonces $g_{D,\Phi}$ es autodual.*

Toda extensión de Riemann deformada tiene curvatura escalar nula y operador de Ricci nilpotente. Además, una tal métrica es Einstein si y sólo si es Ricci llana. Nótese que toda variedad de Walker 4-dimensional, autodual y Ricci llana es necesariamente una extensión de Riemann deformada [41], lo que establece un cierto recíproco del Teorema 1.9.

Observación 1.10. Es importante señalar la existencia de métricas de Walker con operador de Ricci nilpotente en dos pasos que no se corresponden con ninguna extensión de Riemann deformada. Por ejemplo, la métrica de Walker dada por

$$a = 0, \qquad b = x_{1'}x_{2'}\mathcal{A}(x_1, x_2), \qquad c = \frac{1}{2}x_{1'}^2\mathcal{A}(x_1, x_2), \tag{1.14}$$

no es Ricci llana, pero si tiene operador de Ricci nilpotente en dos pasos, y obviamente no se corresponde con una extensión de Riemann deformada.

1.8.4. Extensiones de Riemann modificadas

Una nueva generalización de las extensiones de Riemann será de interés especial para nuestro estudio: las llamadas extensiones de Riemann modificadas. Sea $\Phi \in C^\infty(S^2(T^*\mathcal{M}))$ un campo de tensores simétrico de tipo $(0, 2)$ en $\mathcal{M}$ y sean $T, S \in C^\infty(\mathrm{End}(T\mathcal{M}))$ campos de tensores de tipo $(1, 1)$ en $\mathcal{M}$. La *extensión de Riemann modificada* es la métrica de signatura neutra en $T^*\mathcal{M}$ definida por

$$g_{D,\Phi,T,S} = \iota T \circ \iota S + g_D + \sigma^* \Phi\,,$$

donde el producto simétrico $\circ$ está dado por $\xi_1 \circ \xi_2 := \frac{1}{2}(\xi_1 \otimes \xi_2 + \xi_2 \otimes \xi_1)$.

En un sistema de coordenadas locales la extensión de Riemann modificada se expresa como

$$g_{D,\Phi,T,S} = 2\, dx_i \circ dx_{i'} + \{\tfrac{1}{2}x_{r'}x_{s'}(T_i^r S_j^s + T_j^r S_i^s) + \Phi_{ij}(x) - 2x_{k'}{\Gamma_{ij}}^k\}dx_i \circ dx_j\,. \tag{1.15}$$

El caso en el que tomemos $T = c\,\mathrm{Id}$ y $S = \mathrm{Id}$ es importante y jugará un papel destacado en nuestro estudio. Más concretamente, si

$$g_{D,\Phi,c} = c \cdot \iota\,\mathrm{Id} \circ \iota\,\mathrm{Id} + g_D + \sigma^* \Phi,$$

entonces en un sistema de coordenadas locales

$$g_{D,\Phi,c} = 2\,dx_i \circ dx_{i'} + \{c\,x_{i'}x_{j'} + \Phi_{ij}(x) - 2x_{k'}\Gamma_{ij}{}^k\}dx_i \circ dx_j\,. \tag{1.16}$$

Estas métricas son métricas de Walker en $T^*\mathcal{M}$ donde el tensor $B_{ij}(x,x')$ en la Ecuación (1.9) es una función cuadrática en x' (y afín si $c=0$). La distribución paralela y degenerada viene dada por $\mathfrak{D} = \ker\sigma_*$ y la curvatura escalar es un múltiplo (dependiendo de la dimensión) del parámetro c.

Las extensiones de Riemann modificadas se caracterizan en términos de la derivada covariante de la curvatura por $\nabla_{\mathfrak{D}}R(\,\cdot\,,\mathfrak{D})\mathfrak{D} = 0$ [1]. Esto es, una variedad de Walker de dimensión $2m$, (M,g), con $\dim\mathfrak{D} = m$, es la extensión de Riemann modificada de una variedad afín si y sólo si

$$(\nabla_X R)(\cdot, Y)Z = 0, \tag{1.17}$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y, Z tangentes a la distribución $\mathfrak{D}$.

Observación 1.11. Una consecuencia inmediata del resultado anterior es que toda variedad de Walker de dimensión $n = 2m$ admitiendo una distribución paralela degenerada de dimensión $\dim\mathfrak{D} = m$ es localmente simétrica si y sólo si es una extensión de Riemann modificada.

Además, las extensiones de Riemann modificadas proporcionan una fuente importante de ejemplos de variedades de Einstein:

Teorema 1.12. *La extensión de Riemann modificada $g_{D,\Phi,c}$ en el fibrado cotangente $T^*\mathcal{M}$ de una variedad afín $(\mathcal{M}, D)$ de dimensión n es Einstein si y sólo si $\Phi = \frac{4}{c(n-1)}\,{}^D\rho^{sim}$ (supuesto $c \neq 0$).*

Demostración. Sea $g = g_{D,\Phi,c} = c \cdot \iota\,\mathrm{Id} \circ \iota\,\mathrm{Id} + g_D + \sigma^*\Phi$ y sea ${}^g\tau$ su curvatura escalar. El tensor de Ricci sin traza ${}^g\rho_0 = {}^g\rho - \frac{{}^g\tau}{2n}g$ viene determinado por

$${}^g\rho_0 = 2\;\sigma^*\;{}^D\rho^{sim} - \tfrac{1}{2}c(n-1)\,\sigma^*\,\Phi.$$

Y por lo tanto se obtiene el resultado de forma inmediata. □

Una pequeña variación de las extensiones de Riemann modificadas permite dar una descripción de las métricas de Walker autoduales más clara que la dada en la Ecuación (1.11).

Teorema 1.13. *Una métrica de Walker de dimensión cuatro es autodual si y sólo si es localmente isométrica al fibrado cotangente $T^*\Sigma$ de una superficie afín (Σ, D), con tensor métrico*

$$g = \iota X(\iota\,\mathrm{Id} \circ \iota\,\mathrm{Id}) + \iota\,\mathrm{Id} \circ \iota T + g_D + \sigma^*\,\Phi,$$

donde X, T, D y Φ son un campo de vectores, un tensor de tipo $(1,1)$, una conexión afín libre de torsión y un tensor simétrico de tipo $(0,2)$ en Σ, respectivamente.

Demostración. Recordemos que las métricas de Walker autoduales están caracterizadas por las Ecuaciones (1.10) y (1.11).

Para un campo de vectores $X = \mathcal{A}(x_1,x_2)\partial_1 + \mathcal{C}(x_1,x_2)\partial_2$ en Σ se tiene que

$$\iota X = x_{1'}\mathcal{A}(x_1,x_2) + x_{2'}\mathcal{C}(x_1,x_2),$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
(\iota X \cdot \iota\,\mathrm{Id} \circ \iota\,\mathrm{Id})_{11} &= x_{1'}^3\mathcal{A}(x_1,x_2) + x_{1'}^2 x_{2'}\mathcal{C}(x_1,x_2),\\
(\iota X \cdot \iota\,\mathrm{Id} \circ \iota\,\mathrm{Id})_{12} &= x_{1'}^2 x_{2'}\mathcal{A}(x_1,x_2) + x_{1'} x_{2'}^2\mathcal{C}(x_1,x_2),\\
(\iota X \cdot \iota\,\mathrm{Id} \circ \iota\,\mathrm{Id})_{22} &= x_{1'} x_{2'}^2\mathcal{A}(x_1,x_2) + x_{2'}^3\mathcal{C}(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

Ahora, tomamos T un campo de tensores de tipo $(1,1)$ en Σ con componentes

$$T_1^1 = \mathcal{B}(x_1,x_2), \quad T_1^2 = \mathcal{D}(x_1,x_2), \quad T_2^1 = \mathcal{F}(x_1,x_2), \quad T_2^2 = \mathcal{E}(x_1,x_2).$$

Se sigue de la definición de ιT en la Ecuación (1.12) que:

$$\begin{aligned}
(\iota T)_1 &= x_{1'}\mathcal{B}(x_1,x_2) + x_{2'}\mathcal{D}(x_1,x_2),\\
(\iota T)_2 &= x_{1'}\mathcal{F}(x_1,x_2) + x_{2'}\mathcal{E}(x_1,x_2)
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
(\iota T \circ \iota\,\mathrm{Id})_{11} &= x_{1'}^2\mathcal{B}(x_1,x_2) + x_{1'}x_{2'}\mathcal{D}(x_1,x_2),\\
(\iota T \circ \iota\,\mathrm{Id})_{12} &= \tfrac{1}{2}\left(x_{1'}^2\mathcal{F}(x_1,x_2) + x_{2'}^2\mathcal{D}(x_1,x_2)\right.\\
&\qquad \left.+ x_{1'}x_{2'}(\mathcal{B}(x_1,x_2) + \mathcal{E}(x_1,x_2))\right),\\
(\iota T \circ \iota\,\mathrm{Id})_{22} &= x_{1'}x_{2'}\mathcal{F}(x_1,x_2) + x_{2'}^2\mathcal{E}(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

Ahora el resultado se sigue de la Ecuación (1.11). $\square$

Parte I

Operadores Asociados a la Curvatura

Capítulo 2

El operador de Jacobi: variedades de Osserman en dimensión cuatro

Recordemos en primer lugar que una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) se dice Osserman si los operadores de Jacobi tienen autovalores constantes en las pseudo-esferas unitarias $S^{\pm}(M)$. Puesto que toda métrica de Osserman es Einstein y las métricas de Einstein en dimensión tres son de curvatura seccional constante, el primer caso no trivial a tener en cuenta en la investigación de las variedades de Osserman es el de dimensión cuatro.

En este capítulo estudiaremos las variedades de Osserman en signatura $(2, 2)$. Tras analizar la estructura algebraica de la curvatura de dichas variedades, daremos nuevas demostraciones de resultados de clasificación ya conocidos. Además, utilizaremos el formalismo de las extensiones de Riemann para realizar geométricamente ciertos tipos de variedades de Osserman en signatura $(2, 2)$. Los resultados obtenidos nos permitirán construir ejemplos de variedades de Osserman en signatura (n, n) con operadores de Jacobi no diagonalizables ni nilpotentes en el Capítulo 3.

2.1. Variedades de Osserman en dimensión cuatro

El propósito de esta sección es revisar los estudios realizados hasta la fecha sobre métricas de Osserman en dimensión cuatro, poniendo un especial énfasis en la conexión existente entre métricas de Osserman y métricas autoduales de Einstein tanto en el caso Riemanniano como en el de signatura neutra. Aunque la mayoría de los resultados mostrados en esta sección han sido probados con anterioridad por otros autores, aquí se proporcionarán demostraciones alternativas de todos ellos. Fijémonos que el caso de signatura Lorentziana se corresponde con métricas de curvatura seccional constante [86], por lo que lo omitiremos en lo que sigue.

La estrategia inicial para la clasificación de las métricas de Osserman sigue un proceso en dos etapas. En una primera etapa se trata de determinar todos los tensores curvatura algebraicos que verifican la condición de Osserman, dejando para una segunda etapa la realización geométrica de los mismos.

Es importante señalar aquí que los tensores curvatura algebraicos de Osserman están completamente caracterizados en dimensión cuatro a partir de ciertas estructuras de módulos de Clifford. Como veremos, el problema geométrico Riemanniano puede ser abordado desde la perspectiva del Teorema de Goldberg-Sachs Generalizado [64] el cual nos proporciona una aproximación al problema diferente a la desarrollada por Chi [49].

La situación es más compleja en signatura $(2,2)$ debido a las distintas posibilidades de la forma de Jordan de los operadores de Jacobi. El caso diagonalizable podrá ser abordado de nuevo a través de dos versiones del Teorema de Goldberg-Sachs Generalizado en signatura $(2,2)$. Es conocido que los operadores de Jacobi de una variedad de Osserman en dimensión cuatro no pueden tener autovalores complejos, algo que será posible demostrar utilizando el hecho de que tales espacios son necesariamente curvatura-homogéneos. Por último, las métricas de Osserman con operadores de Jacobi no diagonalizables se tratarán de forma separada según presenten una raíz doble o triple del polinomio mínimo.

Sea (M,g) una variedad pseudo-Riemanniana de signatura $(2,2)$. Entonces, para cada vector no nulo x, la métrica inducida en $x^\perp$ es de signatura Lorentziana y por tanto el operador de Jacobi $\mathcal{J}(x) = R(x,\cdot)x$, visto como un endomorfismo de $x^\perp$, presenta una de las siguientes formas canónicas de Jordan [12]:

$$\underset{\textit{Tipo Ia}}{\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}}, \quad \underset{\textit{Tipo Ib}}{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta & \\ \beta & \gamma & \\ & & \alpha \end{pmatrix}}, \quad \underset{\textit{Tipo II}}{\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & 1 & \beta \end{pmatrix}}, \quad \underset{\textit{Tipo III}}{\begin{pmatrix} \alpha & & \\ 1 & \alpha & \\ & 1 & \alpha \end{pmatrix}}. \tag{2.1}$$

En el caso Riemanniano los operadores de Jacobi son diagonalizables, de donde se sigue el siguiente resultado.

Teorema 2.1. [104] *Una variedad Riemanniana de dimensión cuatro es puntualmente Osserman si y sólo si es Einstein y autodual (o antiautodual).*

La relación entre métricas de Osserman y métricas autoduales Einstein también se mantiene en geometría pseudo-Riemanniana, lo que está en clara relación con el hecho de que todo tensor curvatura algebraico de Osserman es también espacial y temporal Jordan-Osserman en dimensión cuatro. Como se ha visto en la Sección 1.3, toda métrica de signatura $(2,2)$ induce una métrica Lorentziana en $\Lambda^2_\pm$, por lo que los operadores de Weyl (anti)autoduales presentan cuatro posibles formas de Jordan análogas a las de los operadores de Jacobi anteriormente descritas. En [24] se ha investigado la correspondencia existente a nivel algebraico entre las formas de Jordan de los operadores de Jacobi y de los operadores $W^\pm$ para un tensor curvatura algebraico de Osserman, mostrando que existe una correspondencia completa entre tensores curvatura algebraicos de Osserman y tensores curvatura algebraicos Einstein y autoduales. Además, tal correspondencia se establece como sigue (en función de las distintas formas de Jordan de los operadores de Jacobi dadas en la Ecuación (2.1)).

Lema 2.2. *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial dotado de un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de signatura $(2, 2)$ y sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de modo que e_1, e_2 son vectores temporales y e_3, e_4 son vectores espaciales. Sea A un tensor curvatura algebraico en V. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A es Osserman y el operador de Jacobi $\mathcal{J}(e_1)$ es diagonalizable con autovalores (α, β, γ):

$$\mathcal{J}(e_1) = \langle e_1, e_1 \rangle \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

(ii) El tensor curvatura algebraico A está dado por

$$\begin{array}{ll} A_{1212} = A_{3434} = \alpha, & A_{1234} = \frac{2\alpha-\beta-\gamma}{3}, \\ A_{1313} = A_{2424} = -\beta, & A_{1324} = -\frac{-\alpha+2\beta-\gamma}{3}, \\ A_{1414} = A_{2323} = -\gamma, & A_{1423} = \frac{-\alpha-\beta+2\gamma}{3}. \end{array}$$

(iii) A es Einstein y los operadores de Weyl autodual y antiautodual verifican $W^- = 0$ y

$$\begin{aligned} W^+ &= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2\alpha-\beta-\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha+2\beta-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha-\beta+2\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\alpha - \frac{\tau}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta - \frac{\tau}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -2(\alpha+\beta)+\frac{\tau}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lema 2.3. *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial dotado de un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de signatura $(2, 2)$ y sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de modo que e_1, e_2 son vectores temporales y e_3, e_4 son vectores espaciales. Sea A un tensor curvatura algebraico en V. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A es Osserman y el operador de Jacobi $\mathcal{J}(e_1)$ tiene un autovalor real y dos autovalores complejos $(\alpha, \gamma \pm \beta i)$:

$$\mathcal{J}(e_1) = \langle e_1, e_1 \rangle \begin{pmatrix} \gamma & -\beta & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(ii) El tensor curvatura algebraico A está dado por

$$\begin{array}{ll} A_{1212} = -A_{1313} = -A_{2424} = A_{3434} = \gamma\,, & A_{1414} = A_{2323} = -\alpha\,, \\ A_{1213} = A_{1224} = A_{1334} = A_{2434} = -\beta\,, & \\ A_{1234} = -A_{1324} = -\frac{\alpha-\gamma}{3}\,, & A_{1423} = \frac{2(\alpha-\gamma)}{3}\,. \end{array}$$

(iii) A es Einstein y los operadores de Weyl autodual y antiautodual verifican $W^- = 0$ *y*

$$W^+ = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}(\alpha-\gamma) & -2\beta & 0 \\ 2\beta & -\frac{2}{3}(\alpha-\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}(\alpha-\gamma) \end{pmatrix}.$$

Lema 2.4. *Sea* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio vectorial dotado de un producto interior* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *de signatura* $(2,2)$ *y sea* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *una base ortonormal de modo que* e_1, e_2 *son vectores temporales y* e_3, e_4 *son vectores espaciales. Sea* A *un tensor curvatura algebraico en* V*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A es Osserman y el operador de Jacobi $\mathcal{J}(e_1)$ *tiene un autovalor simple y otro doble* (α, β, β) *y con la siguiente matriz asociada*

$$\mathcal{J}(e_1) = \langle e_1, e_1\rangle \begin{pmatrix} \beta+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \beta-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(ii) El tensor curvatura algebraico A está dado por

$$\begin{aligned} &A_{1212} = A_{3434} = \beta + \tfrac{1}{2}, && A_{1234} = -\tfrac{\alpha-\beta}{3} + \tfrac{1}{2}, \\ &A_{1313} = A_{2424} = -\beta + \tfrac{1}{2}, && A_{1324} = \tfrac{\alpha-\beta}{3} + \tfrac{1}{2}, \\ &A_{1414} = A_{2323} = -\alpha, && A_{1423} = \tfrac{2(\alpha-\beta)}{3}, \\ &A_{1213} = A_{1224} = A_{1334} = A_{2434} = -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

(iii) A es Einstein y los operadores de Weyl autodual y antiautodual verifican $W^- = 0$ *y*

$$W^+ = \begin{pmatrix} -\frac{2(\alpha-\beta)}{3}+1 & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{2(\alpha-\beta)}{3}-1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4(\alpha-\beta)}{3} \end{pmatrix}.$$

Lema 2.5. *Sea* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio vectorial dotado de un producto interior* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *de signatura* $(2,2)$ *y sea* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *una base ortonormal de modo que* e_1, e_2 *son vectores temporales y* e_3, e_4 *son vectores espaciales. Sea* A *un tensor curvatura algebraico en* V*. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A es Osserman, el operador de Jacobi $\mathcal{J}(e_1)$ *tiene un autovalor triple* (α, α, α) *y la siguiente matriz asociada*

$$\mathcal{J}(e_1) = \langle e_1, e_1\rangle \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \alpha & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \alpha \end{pmatrix}.$$

(ii) El tensor curvatura algebraico A está dado por

$$\begin{aligned}&A_{1212} = -A_{1313} = -A_{1414} = -A_{2323} = -A_{2424} = A_{3434} = \alpha\,,\\ &A_{1214} = -A_{1223} = -A_{1314} = A_{1323} = -A_{1424} = A_{1434} = A_{2324} = -A_{2334} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

(iii) A es Einstein y los operadores de Weyl autodual y antiautodual verifican $W^- = 0$ y

$$W^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Variedades de Osserman en dimensión cuatro Riemannianas

Como ya se mencionó anteriormente, abordaremos el problema en dos pasos. Primeramente determinaremos todos los tensores curvatura algebraicos que verifican la condición de Osserman y posteriormente analizaremos la realización geométrica de los mismos.

El problema Riemanniano algebraico

Sea V un espacio vectorial real de dimensión cuatro equipado con una forma bilineal simétrica definida positiva $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sea $A \in \otimes^4(V^*)$ un tensor curvatura algebraico en V, es decir:

$$A(x,y,z,v) = -A(y,x,z,v) = A(z,v,x,y),$$

$$A(x,y,z,v) + A(y,z,x,v) + A(z,x,y,v) = 0\,.$$

Un modelo algebraico $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle,A)$ se dice *Osserman* si los autovalores del operador de Jacobi ${}^A\mathcal{J}(x) : y \to A(x,y)x$ son constantes en la esfera unitaria $S(V)$.

Como ya se ha visto en la Sección 1.1, los tensores curvatura algebraicos pueden ser generados por dos vías independientes partiendo de formas bilineales simétricas ϕ o de formas bilineales antisimétricas ψ en $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, siendo los generadores de la forma

$$\begin{aligned}&A^\phi(x,y,z,u) = \phi(x,z)\phi(y,u) - \phi(y,z)\phi(x,u),\\ &A^\psi(x,y,z,u) = \psi(x,z)\psi(y,u) - \psi(y,z)\psi(x,u) + 2\psi(x,y)\psi(z,u).\end{aligned}$$

Sea $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 = \Phi_2\Phi_1\}$ una estructura de módulo de Cliff(2) sobre $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, i.e., Φ_1, Φ_2, Φ_3 son operadores antisimétricos en V verificando

$$\Phi_i\Phi_j + \Phi_j\Phi_i = -2\delta_{ij}\,\mathrm{Id}, \qquad i,j = 1,2,3.$$

Asociados a una tal estructura consideramos los tensores curvatura algebraicos $R^0 = R^\phi$, para $\phi = \mathrm{Id}$, y $R^\Phi(x,y)z = \langle\Phi x, z\rangle\Phi y - \langle\Phi y, z\rangle\Phi x + 2\langle\Phi x, y\rangle\Phi z$. Entonces se tiene

Teorema 2.6. [13] *Una variedad Riemanniana de dimensión cuatro es Osserman si y sólo si para cada punto de la variedad existe localmente una* Cliff(2) *estructura* $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ *de tal forma que el tensor curvatura se expresa como*

$$R = \lambda_0 R^0 + \sum \lambda_i R^{\Phi_i},$$

para algunas constantes λ_i, $i = 0, \ldots, 3$.

El problema Riemanniano diferenciable

Recordemos que toda variedad puntualmente Osserman en dimensión cuatro es Einstein y (anti)autodual, por lo que la descomposición de la curvatura dada en la Ecuación (1.5) se reduce a

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\tau}{12}\ \mathrm{Id}_{\Lambda^2} + \begin{pmatrix} W^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, toda la información está codificada en el operador de Weyl autodual W^+.

Puesto que W^+ es un operador sin traza, los casos no triviales se corresponden con métricas Einstein autoduales cuyo operador autodual tiene exactamente dos o tres autovalores distintos. (En otro caso W^+ se anula idénticamente y por lo tanto la métrica es Einstein y localmente conformemente llana y por tanto de curvatura seccional constante).

El caso en que W^+ presenta dos autovalores distintos se aborda desde la perspectiva del Teorema de Goldberg-Sachs generalizado:

Teorema 2.7. [64] *Sea* (M, g) *una variedad de Riemann de dimensión cuatro tal que*

(i) (M, g) *es Einstein,*

(ii) W^+ *tiene a lo sumo dos autovalores distintos en cada punto.*

Entonces en el abierto donde $W^+ \neq 0$, *la métrica* $\overline{g} = (24\|W^+\|^2)^{1/3} g$ *es Kähler.*

Como ya se ha visto en el Lema 2.2 existe una correspondencia entre los autovalores de los operadores de Jacobi y del operador de Weyl autodual, por lo que en toda variedad de Osserman los autovalores de W^+ han de ser necesariamente constantes.

Si W^+ tiene exactamente dos autovalores distintos, existe una 2-forma distinguida Ω que se corresponde con el autovalor distinguido del operador W^+, la cual puede ser reescalada para tener norma $\langle \Omega, \Omega \rangle = 2$. En tal caso Ω es la forma de Kähler asociada a una estructura casi Hermítica (g, J) y, como consecuencia del Teorema 2.7, (g, J) es localmente conformemente Kähler con factor conforme dado por $(24\langle W^+, W^+\rangle)^{1/3}$. Además, puesto que los autovalores de W^+ son constantes, el factor conforme es constante, lo cual nos lleva a que la estructura casi Hermítica (g, J) es de hecho una estructura Kähler.

La anulación del operador de Weyl antiautodual en variedades Kähler tiene una especial significación, ya que resulta equivalente a la anulación del tensor de Bochner [29]. Entonces, de la condición de Einstein se sigue que (g, J) es Kähler de curvatura seccional holomorfa constante.

Resta por considerar el caso en que el operador de Weyl autodual presenta tres autovalores distintos; a continuación veremos que esta posibilidad no puede darse. Siguiendo las ideas de [64], sean Ω_i autovectores ortogonales de W^+ correspondientes a los diferentes autovalores μ_i. Entonces, puesto que $\Lambda^2_\pm$ son invariantes por desplazamientos paralelos, existen 1-formas a, b, c de modo que

$$\begin{aligned} \nabla\Omega_1 &= \qquad\qquad c\otimes\Omega_2 - b\otimes\Omega_3, \\ \nabla\Omega_2 &= -c\otimes\Omega_1 \qquad\qquad + a\otimes\Omega_3, \\ \nabla\Omega_3 &= b\otimes\Omega_1 - a\otimes\Omega_2. \end{aligned}$$

Ahora bien, la segunda identidad de Bianchi nos asegura que $\delta W^+ = 0$, lo cual es equivalente a que se verifiquen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} d\mu_1 &= (\mu_1 - \mu_2)\Omega_3 c + (\mu_1 - \mu_3)\Omega_2 b, \\ d\mu_2 &= (\mu_2 - \mu_1)\Omega_3 c + (\mu_2 - \mu_3)\Omega_1 a, \\ d\mu_3 &= (\mu_3 - \mu_1)\Omega_2 b + (\mu_3 - \mu_2)\Omega_1 a. \end{aligned}$$

Se sigue ahora de las ecuaciones anteriores que, o bien al menos dos de los autovalores μ_i son iguales (lo cual nos llevaría a una contradicción), o bien Ω_i es paralela para todo i y por tanto $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ define una estructura hiperKähler, lo cual también es una contradicción, ya que en dicho caso el operador de Weyl autodual se anula idénticamente.

Resumiendo todo lo anterior tenemos el siguiente resultado

Teorema 2.8. [49] *Sea (M, g) una variedad Riemanniana 4-dimensional de Osserman. Entonces es localmente isométrica a un espacio de curvatura seccional constante o a un espacio de curvatura seccional holomorfa constante.*

Observación 2.9. Es importante señalar la existencia de tensores curvatura algebraicos de Osserman que no se corresponden con ninguna variedad de Osserman, esto es, que no pueden realizarse geométricamente. De hecho, si $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, J)$ es un espacio vectorial Hermítico, entonces el tensor curvatura algebraico R^J es Osserman, pero no es geométricamente realizable.

2.1.2. Variedades de Osserman en dimensión cuatro de signatura neutra

La diferencia esencial entre el caso Riemanniano y el de signatura neutra radica en la no diagonalizabilidad de los operadores de Jacobi, lo que tiene consecuencias tanto a nivel algebraico como diferenciable.

El problema pseudo-Riemanniano algebraico

Denotamos por A un tensor curvatura algebraico en un espacio vectorial $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dotado con un producto interior de signatura $(2,2)$. Recordemos que $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ se dice *espacial* (respectivamente *temporal*) *Osserman* si los autovalores de los operadores de Jacobi son constantes en la pseudo-esfera unitaria espacial $S^+(V)$ (respectivamente en la pseudo-esfera unitaria temporal $S^-(V)$). Las condiciones espacial Osserman y temporal Osserman son condiciones equivalentes [85, 93]. Diremos que $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ es *nulo Osserman* si los autovalores de los operadores de Jacobi son constantes en el cono nulo $N(V)$; es decir, los operadores de Jacobi son nilpotentes. Nótese que un tensor curvatura algebraico espacial o temporal Osserman es necesariamente nulo Osserman.

Dado que en signatura neutra el espectro no determina un operador autoadjunto de forma completa, diremos que un tensor curvatura algebraico es *espacial* (respectivamente, *temporal*, *nulo*) *Jordan-Osserman* si la forma canónica de Jordan de los operadores de Jacobi es constante en $S^+(V)$ (respectivamente en $S^-(V)$, $N(V)$). En contraposición al caso Osserman, las condiciones espacial y temporal Jordan-Osserman no son equivalentes en general [86, 93] y además no implican la condición nula Jordan-Osserman. Sin embargo, en el caso particular de dimensión cuatro se tienen las siguientes equivalencias.

Teorema 2.10. [87] *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial de dimensión cuatro dotado de un producto interior de signatura neutra y sea A un tensor curvatura algebraico en V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ *es espacial Osserman.*
2. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ *es temporal Osserman.*
3. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ *es nulo Osserman.*
4. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ *es espacial Jordan-Osserman.*
5. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ *es temporal Jordan-Osserman.*
6. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ *es Einstein y autodual para una cierta orientación.*

Una descripción de los tensores curvatura algebraicos siguiendo el espíritu del Teorema 2.6 se sigue de [13]. Una estructura Cliff$(1,1)$ en $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ (de signatura $(2,2)$) es un triple de operadores antisimétricos $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 = \Phi_2\Phi_1\}$ verificando

- $\Phi_1^2 = -\operatorname{Id}, \Phi_2^2 = \Phi_3^2 = \operatorname{Id}$;
- $\Phi_i\Phi_j + \Phi_j\Phi_i = 0$ if $i \neq j$.

Un aspecto interesante de las estructuras Cliff$(1,1)$ (también llamadas hiperparacomplejas en la literatura [59, 115]) es que permite construir también operadores antisimétricos nilpotentes en dos pasos sin más que considerar $(\Phi_1 - \Phi_j)$ para $j = 2, 3$, y una estructura casi producto antisimétrica (después de reescalar) $(\Phi_2 - \Phi_3)$.

Una descripción completa de todos los tensores curvatura algebraicos de Osserman en signatura $(2, 2)$ viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 2.11. [13] *Sea A un tensor curvatura algebraico en un espacio vectorial $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dotado con un producto interior de signatura $(2, 2)$. A es Osserman si y sólo si existe una estructura* $\mathrm{Cliff}(1, 1)$ $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 = \Phi_2\Phi_1\}$ *de modo que*

$$A = \lambda_0 A^0 + \sum \lambda_i A^{\Phi_i} + \sum_{i<j} \lambda_{ij} [A^{\Phi_i} + A^{\Phi_j} - A^{(\Phi_i - \Phi_j)}],$$

para algunos $\lambda_i, \lambda_{ij} \in \mathbb{R}$.

Observación 2.12. El teorema anterior realiza todas las posibles formas de Jordan de los operadores de Jacobi en la Ecuación (2.1).

Un tensor curvatura algebraico nulo Jordan-Osserman en signatura $(2, 2)$ tiene necesariamente operadores de Jacobi diagonalizables. Una completa descripción de todos los tensores curvatura algebraicos que son nulos Jordan-Osserman está dada en el siguiente resultado.

Teorema 2.13. [87] *Sea A un tensor curvatura algebraico en un espacio vectorial $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ dotado con un producto interior de signatura $(2, 2)$. Entonces A es nulo Jordan-Osserman si y sólo si A es Osserman con operadores de Jacobi diagonalizables y una de las siguientes condiciones se verifica:*

(1) Existe una constante κ_0 tal que $A = \kappa_0 A^0$.

(2) Existen constantes κ_0 y κ_J con $\kappa_J \neq 0$ tal que $A = \kappa_0 A^0 + \kappa_J A^J$ donde J es una estructura compleja ortogonal en V.

(3) Existe una constante $\kappa_{\mathfrak{J}} \neq 0$ de modo que $A = \kappa_{\mathfrak{J}} A^{\mathfrak{J}}$ donde $\mathfrak{J}$ es una estructura paracompleja adaptada en V.

(4) Existen constantes $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ tales que $\kappa_2\kappa_3(\kappa_2 + \kappa_1)(\kappa_3 + \kappa_1) > 0$, de modo que los autovalores asociados $\{3\kappa_1, -3\kappa_2, -3\kappa_3\}$ son todos distintos, y de tal forma que $A = \kappa_1 A^{\Phi_1} + \kappa_2 A^{\Phi_2} + \kappa_3 A^{\Phi_3}$ donde $\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ es una estructura $\mathrm{Cliff}(1, 1)$ *en V.*

El problema pseudo-Riemanniano diferenciable

Antes de abordar el problema de las variedades de Osserman, como aplicación directa del Teorema 2.13 se tiene una descripción completa de las variedades nulas Jordan-Osserman de dimensión cuatro.

Teorema 2.14. [87] *Sea* (M, g) *una variedad conexa pseudo-Riemanniana de signatura neutra* $(2, 2)$. *Entonces* (M, g) *es nula Jordan-Osserman si y sólo si es una variedad de curvatura seccional constante o es localmente una variedad Kähler de curvatura seccional holomorfa constante.*

Observación 2.15. Los espacios de curvatura seccional holomorfa y paraholomorfa constante presentan muchas similitudes formales. Por ejemplo, ambos tienen la misma estructura de autovalores para sus operadores de Jacobi y además todos los invariantes escalares de la curvatura de primer, segundo y tercer orden son exactamente los mismos para ambos espacios. El Teorema 2.14 nos proporciona un criterio geométrico para distinguir las geometrías compleja y paracompleja.

Volviendo a las variedades de Osserman, el Teorema 2.11 muestra que todas las posibles formas de Jordan para los operadores de Jacobi ocurren a nivel algebraico. Ahora bien, no todas son realizables a nivel geométrico. Un primer paso hacia la resolución geométrica general consiste en estudiar como caso particular aquellos tensores curvatura algebraicos que pueden ser realizados como espacios simétricos. La respuesta viene dada por la semisimetría de los tensores curvatura algebraicos (es decir, $A(x, y) \circ A = 0$ para todos los vectores x, y, donde $A(x, y)$ actúa como una derivación en A) [160]. Un cálculo directo a partir del Teorema 2.11 nos muestra que:

Teorema 2.16. *Un tensor curvatura algebraico de Osserman* A *en un espacio vectorial de signatura* $(2, 2)$ *es semisimétrico si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones:*

(1) los operadores de Jacobi son diagonalizables y además
  - *(1.a)* $A = \kappa A^0$,
  - *(1.b)* $A = \kappa \left(A^0 + A^J\right)$ *para alguna estructura compleja ortogonal* J,
  - *(1.c)* $A = \kappa \left(A^0 - A^{\mathfrak{J}}\right)$ *para alguna estructura paracompleja adaptada* $\mathfrak{J}$, *o*

(2) los operadores de Jacobi son nilpotentes en dos pasos y $A = \kappa A^{\Phi}$, *donde* $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ *para alguna estructura* $\mathrm{Cliff}(1, 1)$ *adaptada.*

Del resultado anterior se deriva la descripción completa de las métricas de Osserman localmente simétricas en dimensión cuatro:

Teorema 2.17. [92] *Sea* (M, g) *una variedad pseudo-Riemanniana de Osserman de signatura* $(2, 2)$ *y localmente simétrica. Entonces:*

(i) (M, g) *es de Tipo Ia, es decir, un espacio de curvatura seccional constante, o un espacio de curvatura seccional holomorfa constante, o un espacio de curvatura seccional paraholomorfa constante, o*

(ii) (M, g) *es localmente isométrica a* $\mathbb{R}^4$ *con la métrica*

$$g = 2dx_1 \circ dx_2 + 2dx_{1'} \circ dx_{2'} \pm x_1^2 dx_{2'} \circ dx_{2'},$$

donde se toman coordenadas $(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'})$.

Además, en el caso (ii) los operadores de Jacobi son nilpotentes en dos pasos.

Observación 2.18. Los espacios simétricos de Osserman con operador de Jacobi nilpotente en dos pasos dados en (ii) son variedades de Walker que se corresponden con extensiones de Riemann deformadas, según se han descrito en la Sección 1.8.

En lo que sigue analizaremos de forma separada la realización geométrica de los tensores curvatura algebraicos de Osserman correspondientes a los distintos tipos Ia–III que se dan a nivel algebraico.

Tipo Ia: el caso diagonalizable

Este primer caso es el más parecido a la situación Riemanniana. Procediendo del mismo modo, tan solo hemos de considerar los casos en que el operador de Weyl autodual presente dos o tres autovalores distintos.

Asumamos que el operador autodual tiene exactamente dos autovalores distintos y sea Ω un autovector correspondiente al autovalor distinguido. Debido al hecho de que la métrica inducida en Λ^2_+ tiene signatura Lorentziana, se puede reescalar Ω de modo que $\langle\Omega,\Omega\rangle = \pm 2$. Observemos que si Ω es espacial dará lugar a una estructura casi Hermítica (g, J) opuesta (dado que en signatura $(2,2)$ la estructura casi compleja y la correspondiente forma de Kähler inducen orientaciones opuestas), mientras que si Ω es temporal dará lugar a una estructura casi paraHermítica $(g, \mathfrak{J})$.

Las generalizaciones del Teorema de Goldberg-Sachs desarrolladas por Apostolov [3] en el caso casi Hermítico y por Ivanov y Zamkovoy [114] en el caso casi paraHermítico permiten asegurar que las estructuras anteriores son Kähler o paraKähler, dependiendo del carácter causal de Ω. Finalmente un análisis de los correspondientes tensores de Bochner (véase [29]) permite asegurar la constancia de la curvatura seccional (para)holomorfa.

Observación 2.19. Una hipótesis crucial en las generalizaciones del Teorema de Goldberg-Sachs en [3, 114] es la diagonalizabilidad del operador de Weyl autodual W^+ [55]. Este hecho está garantizado en virtud de la correspondencia esbozada en el Lema 2.2.

Procediendo de modo análogo a lo hecho en el caso Riemanniano, utilizando que los fibrados $\Lambda^2_\pm$ son invariantes por desplazamientos paralelos y la segunda identidad de Bianchi $\delta W^+ = 0$, la existencia de tres autovalores distintos para W^+ daría lugar a una estructura hiperparaKähler (esto es, una estructura $\mathrm{Cliff}(1,1)$ paralela), lo que estaría en contradicción con la existencia de tres autovalores distintos.

Observación 2.20. Sea (M, g, J) una variedad Kähler 4-dimensional de signatura neutra. Entonces el operador de Weyl autodual W^+ representa el tensor de Bochner y el operador de Weyl antiautodual W^- viene dado por

$$W^- = \frac{\tau}{12}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

Si reemplazamos la estructura Kähler por una paraKähler se obtiene una descripción análoga intercambiando el operador de Weyl autodual por el antiautodual.

Como consecuencia de lo anterior se tiene:

Teorema 2.21. [12] *Sea* (M, g) *una variedad Osserman de signatura* $(2, 2)$ *con operadores de Jacobi diagonalizables. Entonces* (M, g) *es localmente isométrica a un espacio de curvatura seccional constante, a un espacio de curvatura seccional holomorfa constante o a un espacio de curvatura seccional paraholomorfa constante.*

Tipo Ib: autovalores complejos

Una variedad pseudo-Riemanniana es *curvatura homogénea de orden* k si para cada par de puntos $p, q \in M$, existe un isomorfismo lineal $\varphi : T_pM \to T_qM$ tal que $\varphi^* g_q = g_p$ y $\varphi^* \nabla^k R_q = \nabla^k R_p$. Toda variedad homogénea es curvatura homogénea de cualquier orden y, recíprocamente, para valores suficientemente grandes de k, toda variedad curvatura homogénea de orden k es localmente homogénea [149].

Observemos que las variedades de Osserman de dimensión cuatro no son necesariamente curvatura homogéneas puesto que, aunque la forma de Jordan de los operadores de Jacobi es constante en cada punto, puede variar de un punto a otro [17, 86]. Ahora bien, si los operadores de Jacobi de una métrica de Osserman de signatura $(2, 2)$ tienen un autovalor complejo, entonces la forma canónica de Jordan debe permanecer constante en toda la variedad, y por tanto (M, g) es curvatura homogénea de orden 0.

Las variedades de dimensión cuatro Einstein y curvatura homogéneas de orden 0 cuyo operador autodual tiene un autovalor complejo han sido completamente clasificadas por Derdzinski [66], quien mostró que todas ellas son localmente homogéneas. De hecho, son localmente simétricas, o localmente isométricas a un grupo de Lie equipado con una métrica invariante a la izquierda de un tipo específico. Una tal métrica, en coordenadas $(x_1, \dots, x_4)$, viene dada por

$$\begin{aligned} g \;=\; & e^{kx_2} \cos kx_2\sqrt{3}(dx_1 \circ dx_1 - dx_4 \circ dx_4) + dx_2 \circ dx_2 - e^{-2kx_2} dx_3 \circ dx_3 \\ & -2e^{kx_2} \sin kx_2\sqrt{3} dx_1 \circ dx_4, \end{aligned}$$

de donde se sigue que los operadores curvatura $\mathcal{R}^\pm : \Lambda^2_\pm \to \Lambda^2_\pm$ tienen autovalores constantes $\{-k^2, \frac{1}{2}(k^2 \pm i\sqrt{3}k^2)\}$, $k \neq 0$, por lo que dichas métricas no pueden ser autoduales ni antiautoduales. Este hecho, conjuntamente con el Teorema 2.17, muestra el siguiente resultado:

Teorema 2.22. [12] *Sea* (M, g) *una variedad Osserman de signatura* $(2, 2)$*. Entonces los operadores de Jacobi no pueden tener autovalores complejos.*

Tipo II: raíz doble del polinomio mínimo

Blažić, Bokan y Rakić han probado en [12] que la realización geométrica de este tipo de tensores curvatura algebraicos de Osserman conlleva una restricción adicional sobre los autovalores de los operadores de Jacobi dados en la Ecuación (2.1): $\alpha = 4\beta$, ó $\alpha = \beta = 0$. Ejemplos de métricas de Osserman Tipo II con operadores de Jacobi nilpotentes en dos pasos se conocen desde [91], pero una completa descripción de estas métricas aún permanece abierta. Para el caso en que los operadores de Jacobi son no nilpotentes existe una descripción completa [74]. De hecho, se muestra en [12] que una tal métrica es necesariamente de Walker (es decir, admite un campo de 2-planos paralelos y degenerados). Un análisis sistemático de la condición de autodualidad para métricas de Walker realizado en [74] (ver también [62]), ha llevado a una descripción en coordenadas de Walker como sigue:

Teorema 2.23. [74] *Sea (M,g) una variedad de Osserman Tipo II. Entonces los operadores de Jacobi son nilpotentes en dos pasos o, en otro caso, existen coordenadas locales $(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'})$ donde la métrica está dada por*

$$g = 2dx_1 \circ dx_{1'} + 2dx_2 \circ dx_{2'} + a dx_1 \circ dx_1 + b dx_2 \circ dx_2 + 2c dx_1 \circ dx_2 \tag{2.2}$$

para funciones a, b y c dadas por

$$\begin{aligned} a &= x_{1'}^2 \tfrac{\tau}{6} + x_{1'} P + x_{2'} Q + \tfrac{6}{\tau} \left\{ Q(T-U) + V(P-V) - 2(Q_2 - V_1) \right\}, \\ b &= x_{2'}^2 \tfrac{\tau}{6} + x_{1'} S + x_{2'} T + \tfrac{6}{\tau} \left\{ S(P-V) + U(T-U) - 2(S_1 - U_2) \right\}, \\ c &= x_{1'} x_{2'} \tfrac{\tau}{6} + x_{1'} U + x_{2'} V + \tfrac{6}{\tau} \left\{ -QS + UV + T_1 - U_1 + P_2 - V_2 \right\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde la curvatura escalar τ es no nula y P, Q, S, T, U, V son funciones arbitrarias de las coordenadas (x_1, x_2).

Como ya hemos mencionado, la situación correspondiente a operadores de Jacobi nilpotentes no está tan clara. Los resultados conocidos se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 2.24. *Una variedad de Walker (M,g) es Osserman autodual con curvatura escalar nula si y sólo si la métrica está dada por la Ecuación (2.2) para funciones s_{ij} de las coordenadas $(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'})$ dadas por*

$$\begin{aligned} a &= x_{1'} P + x_{2'} Q + \xi, \\ b &= x_{1'} S + x_{2'} T + \eta, \\ c &= x_{1'} U + x_{2'} V + \nu, \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde P, Q, S, T, U, V, ξ, η y ν son funciones de las coordenadas (x_1, x_2) verificando

$$\begin{aligned} 2(Q_2 - V_1) &= Q(T-U) + V(P-V), \\ 2(S_1 - U_2) &= S(P-V) + U(T-U), \\ T_1 - U_1 + P_2 - V_2 &= QS - UV. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Observación 2.25. El operador de Weyl autodual correspondiente a las métricas dadas por las Ecuaciones (2.2) y (2.3) tiene un autovalor distinguido cuyo autoespacio asociado es temporal. Un autovector Ω asociado a dicho autovalor permite definir una estructura casi paraHermítica $(g, \mathfrak{J})$ que no es integrable. Se prueba en [55] que tal estructura es simpléctica (por tanto $(g, \mathfrak{J})$ es una estructura casi paraKähler) de curvatura seccional paraholomorfa constante.

Posteriormente daremos una completa descripción de las métricas dadas por las Ecuaciones (2.2) y (2.3), y de las métricas dadas por las Ecuaciones (2.4) y (2.5), descripción libre de coordenadas en términos de extensiones de Riemann, lo que a su vez permitirá dar significado a la Ecuación (2.5).

Tipo III: raíz triple del polinomio mínimo

La clasificación de las métricas de Osserman Tipo III ha sido finalizada recientemente por Derdzinski [68]. Existe una abundante lista de ejemplos de métricas de Osserman con operadores de Jacobi nilpotentes en tres pasos [15, 46, 85, 91]. Sin embargo, la existencia de métricas de Osserman Tipo III con operadores de Jacobi no nilpotentes ha sido un problema abierto hasta su reciente resolución en [68] (ver también [51, 52]).

Las métricas de Osserman de Tipo III están foliadas por superficies degeneradas [11], las cuales son paralelas si y sólo si los operadores de Jacobi son nilpotentes. De hecho, esta es la situación que sustenta la existencia de métricas de Osserman Tipo III con operadores de Jacobi no nilpotentes, como se ve en [68]. Cualquier variedad de Osserman Tipo III es localmente el espacio total de un fibrado de planos afines sobre una superficie dotado con una "conexión no lineal" distinguida en la forma de una distribución horizontal $\mathcal{H}$ transversa a la distribución vertical $\mathcal{V}$ del fibrado, ambas formadas por vectores nulos. Referimos a [68] para un estudio detallado de esta construcción.

2.2. Métricas de Osserman Tipo II con operadores de Jacobi no nilpotentes

En esta sección daremos una descripción libre de coordenadas de las métricas correspondientes a los Teoremas 2.23 y 2.24, lo que será de gran utilidad para abordar la construcción de nuevos ejemplos de variedades de Osserman en dimensiones superiores.

Partiendo de la caracterización de las métricas de Walker autoduales en el Teorema 1.13 obtenemos la siguiente versión del Teorema 2.24 libre de coordenadas, lo que, además, permite dar una interpretación geométrica de la Ecuación (2.5).

Teorema 2.26. *Una métrica de Walker Ricci llana y autodual en dimensión cuatro es localmente isométrica al fibrado cotangente $T^*\Sigma$ de una superficie afín (Σ, D) equipado con la métrica dada por la extensión de Riemann deformada $g_{D,\Phi}$, donde D es una conexión libre de torsión con tensor de Ricci antisimétrico y Φ es un tensor arbitrario simétrico de tipo $(0, 2)$ en Σ.*

Además, el operador de Weyl autodual W^+ es nilpotente en tres pasos cuando la superficie afín (Σ, D) es no llana, en cuyo caso se puede expresar en coordenadas adaptadas (x_1, x_2) por

$$\Gamma_{11}^1 = -\partial_1\varphi, \qquad \Gamma_{22}^2 = \partial_2\varphi$$

para una función arbitraria φ verificando $\partial_{12}\varphi \neq 0$.

Si la superficie afín (Σ, D) es llana entonces el operador W^+ es nilpotente en dos pasos si y sólo si $\partial_{22}\Phi_{11} - 2\partial_{12}\Phi_{12} + \partial_{11}\Phi_{22} \neq 0$, y se anula cuando se da la igualdad.

Demostración. Como ya se ha mencionado en la Sección 1.8.3, toda métrica de Walker autodual y Ricci llana es necesariamente la extensión de Riemann deformada de una superficie afín (Σ, D), lo que también se sigue de forma inmediata de la expresión local de la métrica determinada por la Ecuación (2.4). Un cálculo sencillo permite interpretar ahora la Ecuación (2.5) en términos del tensor de Ricci de D que ha de ser antisimétrico, independientemente del campo de tensores Φ.

Procediendo como en [85], en un entorno de cada punto donde la curvatura no se anule el tensor de Ricci define una forma de volumen, por lo que es recurrente y, por tanto, la conexión D ha de ser recurrente en un entorno de cada punto donde la curvatura no se anule. La existencia de coordenadas (x_1, x_2) donde la conexión viene dada por $\Gamma_{11}^1 = -\partial_1\varphi$, $\Gamma_{22}^2 = \partial_2\varphi$ se sigue ahora de [67, 159]. Finalmente, un cálculo sencillo muestra que el operador de Weyl autodual es nilpotente en tres pasos (independientemente del campo de tensores Φ) si y sólo si la curvatura de D es no nula. Además, $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi})$ es llana si y sólo si D es llana y $\partial_{22}\Phi_{11} - 2\partial_{12}\Phi_{12} + \partial_{11}\Phi_{22} = 0$, de donde se sigue el resultado. $\square$

Las variedades de Osserman Tipo II con operadores de Jacobi no nilpotentes se corresponden con variedades de Walker [12]. La condición de que una variedad de Walker de Osserman sea antiautodual, es decir $W^+ \equiv 0$, implica que la curvatura escalar, τ, sea idénticamente nula y por tanto necesariamente ha de tener operadores de Jacobi nilpotentes [74]. Por tanto las métricas de Osserman Tipo II con operadores de Jacobi no nilpotentes han de ser variedades de Walker autoduales de Einstein, es decir, las métricas de Walker dadas por las Ecuaciones (2.2) y (2.3). Como se vio en el Teorema 1.13 las métricas de Walker autoduales se pueden expresar en términos de extensiones de Riemann modificadas. Por lo tanto, particularizando las métricas vistas en el Teorema 1.13 para métricas Einstein y no Ricci llanas se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.27. *Sea (M, g) una variedad de Osserman Tipo II con operadores de Jacobi no nilpotentes. Entonces (M, g) es localmente isométrica al fibrado cotangente $T^*\Sigma$ de una superficie afín (Σ, D), con tensor métrico*

$$g_{D,\Phi,\frac{\tau}{6}} = \frac{\tau}{6} \cdot \iota \,\mathrm{Id} \circ \iota \,\mathrm{Id} + g_D + \frac{24}{\tau}\,\sigma^*\Phi,$$

donde $\tau \neq 0$ denota la curvatura escalar de $(T^*\Sigma, g_{D,\Phi,\frac{\tau}{6}})$, D es una conexión afín arbitraria no llana en Σ y Φ es la parte simétrica del tensor de Ricci de D.

Demostración. Procediendo como en el Teorema 1.13, una métrica de Osserman Tipo II de curvatura escalar no nula τ se obtiene como la extensión de Riemann modificada de una conexión libre de torsión D dada por

$$\begin{array}{lll} {}^D\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2}P(x_1,x_2), & {}^D\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}Q(x_1,x_2), & {}^D\Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{2}U(x_1,x_2), \\ {}^D\Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2}V(x_1,x_2), & {}^D\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}S(x_1,x_2), & {}^D\Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{2}T(x_1,x_2), \end{array}$$

manteniendo la notación establecida en [74, Teorema 3.1]. □

Observación 2.28. Los primeros ejemplos de métricas de Osserman Tipo II no Ricci llanas fueron dados en [75] como sigue. Sea $M = \mathbb{R}^4$ con las coordenadas usuales (x_1, x_2, x_3, x_4) y consideremos la métrica dada por

$$\begin{aligned} g = {} & 2(dx_1 \circ dx_3 + dx_2 \circ dx_4) + (4kx_1^2 - \tfrac{1}{4k}f(x_4)^2)dx_3 \circ dx_3 \\ & +4kx_2^2 dx_4 \circ dx_4 + 2(4kx_1x_2 + x_2 f(x_4) - \tfrac{1}{4k}f'(x_4))dx_3 \circ dx_4, \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde k es una constante no nula y $f(x_4)$ es una función arbitraria.

Ahora, un cálculo sencillo nos muestra que la Ecuación (2.6) no es más que la extensión de Riemann modificada $g = 4k \cdot \iota\,\mathrm{Id} \circ \iota\,\mathrm{Id} + g_D + \frac{1}{k}\,\sigma^*\,\Phi$ de una conexión libre de torsión D dada por ${}^D\Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2}f(x_2)$, cuyo tensor de Ricci viene dado del siguiente modo

$${}^D\rho = -\tfrac{1}{4}f(x_2)^2 dx_1 \otimes dx_1 - \tfrac{1}{2}f'(x_2)dx_1 \otimes dx_2\,.$$

El tensor de Ricci de dicha conexión no es ni simétrico ni antisimétrico. Si consideramos su simetrizado tenemos

$$\Phi = -\tfrac{1}{4}f(x_2)^2 dx_1 \circ dx_1 - \tfrac{1}{2}f'(x_2)dx_1 \circ dx_2\,.$$

Capítulo 3

El operador de Jacobi: nuevos ejemplos de variedades de Osserman

El estudio de las variedades de Osserman en dimensiones mayores que cuatro presenta grandes diferencias respecto al caso estudiado en el capítulo anterior.

A nivel algebraico es importante señalar la existencia de tensores curvatura algebraicos de Osserman que, sin embargo, no son Jordan-Osserman [86]. Además, la condición Jordan-Osserman es especialmente restrictiva en signatura no neutra, donde conlleva la diagonalizabilidad de los operadores de Jacobi [97]. En signatura neutra, sin embargo, para cada operador autoadjunto dado existen tensores curvatura algebraicos de Osserman cuyos operadores de Jacobi reflejan dicho operador.

A pesar de la infinidad de tensores curvatura algebraicos de Osserman, las únicas variedades de Osserman conocidas tienen operadores de Jacobi diagonalizables o nilpotentes, por lo que se plantea el problema de construir nuevos ejemplos cuyos operadores de Jacobi no se correspondan con las situaciones conocidas. Motivados por la descripción de las variedades de Osserman en el Teorema 2.27, en este capítulo se aborda la construcción de nuevos ejemplos de variedades de Osserman con operadores de Jacobi no diagonalizables ni nilpotentes en signatura neutra arbitraria.

En la Sección 3.1 se prueba que toda variedad paraKähler de curvatura seccional paraholomorfa constante se puede describir localmente en términos de la extensión de Riemann modificada de una conexión llana. Así, los ejemplos buscados se obtendrán en la Sección 3.2, al considerar extensiones de Riemann modificadas de conexiones afines Osserman, lo que en cierto modo puede interpretarse como una deformación de las variedades paraKähler de curvatura seccional paraholomorfa constante. En la Sección 3.3 se muestra que todas las extensiones de Riemann modificadas son semi paracomplejas Osserman, lo que constituye una diferencia esencial en el estudio del operador de Jacobi paracomplejo con respecto al operador de Jacobi usual. Finalmente en la Sección 3.4 mostramos un ejemplo sencillo donde la estructura subyacente a la base es la de una superficie afín con tensor de Ricci antisimétrico. Haremos un estudio detallado de la forma de Jordan de los operadores de

Jacobi, mostrando que los ejemplos obtenidos no son Jordan-Osserman.

3.1. Variedades paraKähler de curvatura seccional paraholomorfa constante

Recordemos que una variedad paraKähler es una variedad simpléctica localmente difeomorfa a un producto de subvariedades Lagrangianas. Tal condición (véase la Sección 1.4.2) es equivalente a la existencia de un campo de tensores $\mathfrak{J}$ de tipo $(1,1)$ verificando

$$\mathfrak{J}^2 = \mathrm{Id}, \qquad g(\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}Y) = -g(X,Y), \qquad \nabla\mathfrak{J} = 0,$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de la métrica g [57]. Una consecuencia inmediata de las propiedades anteriores es que los ± 1-autoespacios $\mathfrak{D}_\pm$ de la estructura paracompleja $\mathfrak{J}$ son distribuciones nulas y además, puesto que $\mathfrak{J}$ es paralela, las distribuciones $\mathfrak{D}_\pm$ son paralelas. Esto muestra que cualquier variedad paraKähler $(M, g, \mathfrak{J})$ tiene necesariamente una métrica de Walker como estructura subyacente.

La condición $\nabla\mathfrak{J} = 0$ tiene implicaciones en la curvatura: el tensor curvatura de toda variedad paraKähler verifica $R(\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}Y) = -R(X,Y)$, para cualesquiera campos de vectores X, Y en M. Así, de igual modo a como sucede en geometría Kähleriana, toda variedad paraKähler de curvatura seccional constante es necesariamente llana, por lo que el estudio se centra en la curvatura seccional paraholomorfa. Un plano $\pi \subset T_pM$ es paraholomorfo si $\mathfrak{J}\pi \subset \pi$ y la curvatura seccional paraholomorfa se define como la restricción de la curvatura seccional a planos paraholomorfos no degenerados. Es importante señalar que la curvatura seccional paraholomorfa determina la curvatura en el ámbito paraKähleriano. La constancia de la curvatura seccional paraholomorfa se caracteriza por la existencia de autovectores distinguidos para los operadores de Jacobi:

Lema 3.1. [18] *Sea $(M, g, \mathfrak{J})$ una variedad paraKähler. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $(M, g, \mathfrak{J})$ tiene curvatura seccional paraholomorfa constante.

(2) $R(X, \mathfrak{J}X)X \sim \mathfrak{J}X$, para todo campo de vectores espacial X,

(3) $R(Y, \mathfrak{J}Y)Y \sim \mathfrak{J}Y$, para todo campo de vectores temporal Y,

(4) $R(U, \mathfrak{J}U)U = 0$, para todo campo de vectores nulo U,

donde $\sim$ significa "es proporcional a".

El siguiente resultado muestra que la estructura de Walker subyacente a las variedades paraKähler es una extensión de Riemann modificada cuando la curvatura seccional paraholomorfa es constante.

Teorema 3.2. [37] *Una variedad paraKähler de curvatura seccional paraholomorfa constante no nula c es localmente isométrica al fibrado cotangente de una variedad afín equipado con la extensión de Riemann modificada $g_{D,c}$ donde D es una conexión afín libre de torsión llana.*

Demostración. Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín, con D una conexión llana en $\mathcal{M}$. Normalizamos la elección del sistema de coordenadas de modo que los símbolos de Christoffel sean todos nulos. Consideramos la extensión de Riemann modificada

$$g_{D,c} = 2\,dx_i \circ dx_{i'} + c\,x_{i'}x_{j'}dx_i \circ dx_j\,.$$

Sea $\Omega = dx_i \wedge dx_{i'}$ la forma simpléctica canónica de $T^*\mathcal{M}$. Ahora, la estructura casi paraHermítica asociada $\mathfrak{J}$, definida por $\Omega(X,Y) = g_{D,c}(\mathfrak{J}X, Y)$, viene dada por (sumando en j)

$$\mathfrak{J}\partial_i = \partial_i - c\,x_{i'}x_{j'}\partial_{j'}, \qquad \mathfrak{J}\partial_{i'} = -\partial_{i'},$$

para $i = 1, \dots, n$, y un cálculo directo nos muestra que el tensor de Nijenhuis

$$N_{\mathfrak{J}}(X,Y) = [\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}Y] - \mathfrak{J}[\mathfrak{J}X, Y] - \mathfrak{J}[X, \mathfrak{J}Y] + [X,Y] = 0\,.$$

Como $\mathfrak{J}$ es integrable, y puesto que Ω es cerrada, $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ es una variedad paraKähler.

Acabaremos la demostración viendo que $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ tiene curvatura seccional paraholomorfa constante c. En primer lugar, a partir de las expresiones de la curvatura dadas en el Lema 1.6 se obtiene que las componentes no nulas del tensor curvatura de la conexión de Levi-Civita vienen dadas por (no sumamos en los índices repetidos)

$$\begin{array}{llll}
R_{ji\alpha}^{i} = \frac{c^2}{4}x_{j'}x_{\alpha'}, & R_{ii'i}^{i} = -c, & R_{ii'k}^{k} = \frac{-c}{2}, & R_{ji'i}^{j} = \frac{-c}{2}, \\
R_{ii'i}^{i'} = c^2 x_{i'}^2, & R_{ii'k}^{k'} = \frac{c^2}{2}x_{k'}^2, & R_{ii'i}^{h'} = \frac{3c^2}{4}x_{i'}x_{h'}, & R_{ii'k}^{i'} = \frac{3c^2}{4}x_{i'}x_{k'}, \\
R_{ii'k}^{h'} = \frac{c^2}{2}x_{k'}x_{h'}, & R_{ji'i}^{i'} = \frac{c^2}{2}x_{i'}x_{j'}, & R_{\alpha i'i}^{h'} = \frac{c^2}{4}x_{\alpha'}x_{h'}, & R_{\alpha i'k}^{i'} = \frac{c^2}{4}x_{\alpha'}x_{k'}, \\
R_{jii'}^{\alpha'} = \frac{-c^2}{4}x_{j'}x_{\alpha'}, & R_{ii'i'}^{i'} = c, & R_{ii'k'}^{k'} = \frac{c}{2}, & R_{ji'j'}^{i'} = \frac{c}{2},
\end{array}$$

añadiendo la condición de simetría $R_{abc}^{d} = -R_{bac}^{d}$, y donde i, j, k, h son índices diferentes en $\{1, \dots, n\}$, mientras que $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ puede coincidir con los anteriores.

Ahora, para cualquier campo de vectores $X = \lambda_i\partial_i + \lambda_{i'}\partial_{i'}$, las anteriores relaciones nos muestran que (sumando en i y j)

$$\begin{aligned}
R(X, \mathfrak{J}X)X &= -\varepsilon_X \left(\lambda_i R_{i'ii}^{i}\partial_i + 2\lambda_i R_{i'ji}^{i'}\partial_{j'} - \lambda_i R_{i'ii}^{i'}\partial_{i'} - \lambda_{i'} R_{i'ii}^{i}\partial_{i'}\right) \\
&= c\,\varepsilon_X \left(\lambda_i\partial_i - \lambda_i c\,x_{i'}x_{j'}\partial_{j'} - \lambda_{i'}\partial_{i'}\right) \\
&= c\,\varepsilon_X \left(\lambda_i\mathfrak{J}\partial_i + \lambda_{i'}\mathfrak{J}\partial_{i'}\right).
\end{aligned}$$

Por tanto, $R(X, \mathfrak{J}X)X = c\,g(X,X)\,\mathfrak{J}X$, lo que demuestra que $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ tiene curvatura seccional paraholomorfa constante c obteniendo así el resultado. $\square$

Observación 3.3. Es posible describir las variedades paraKähler de curvatura seccional paraholomorfa constante en términos de extensiones de Riemann modificadas de conexiones no llanas. De hecho, *la extensión de Riemann modificada de la conexión de Levi-Civita de una variedad de curvatura seccional constante define una estructura paraKähler de curvatura seccional paraholomorfa constante.*

3.2. Variedades de Osserman en signatura (n, n)

Motivados por la descripción de las variedades paraKähler de curvatura seccional paraholomorfa constante obtenida en la sección anterior y la descripción dada en el Teorema 2.27 para variedades de Osserman Tipo II con operadores de Jacobi no nilpotentes, el objetivo de esta sección es construir nuevos ejemplos de variedades de Osserman con operadores de Jacobi no nilpotentes en signatura neutra y cualquier dimensión. Para ello consideraremos extensiones de Riemann modificadas en $T^*\mathcal{M}$ de la forma

$$g = \iota \operatorname{Id} \circ \iota \operatorname{Id} + g_D \,,$$

donde D es una conexión afín en $\mathcal{M}$. En un sistema de coordenadas locales dicha métrica viene dada por

$$g = 2\, dx_i \circ dx_{i'} + \{x_{i'}x_{j'} - 2x_{k'}\,{}^D\Gamma_{ij}^k\} dx_i \circ dx_j \,. \tag{3.1}$$

$(T^*\mathcal{M}, g)$ es una variedad de Walker donde la distribución paralela y degenerada está dada por $\mathfrak{D} = \ker \sigma_* = \langle\{\partial_{1'}, \dots, \partial_{n'}\}\rangle$, donde $\sigma : T^*\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ denota la proyección natural (véase la Sección 1.8.4).

Dado que la métrica g se realiza en el fibrado cotangente, existe por tanto una estructura canónica casi paraHermítica $\mathfrak{J}$, es decir, una aplicación lineal en el fibrado tangente $TT^*\mathcal{M}$ tal que $\mathfrak{J}^2 = \operatorname{Id}$ y $\mathfrak{J}^*g = -g$, la cual jugará un papel crucial en nuestro análisis. En coordenadas locales, $\mathfrak{J}$ está dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(\partial_i) &= \partial_i - \{x_{i'}x_{j'} - 2x_{k'}\,{}^D\Gamma_{ij}^k\}\partial_{j'} \\ \mathfrak{J}(\partial_{i'}) &= -\partial_{i'} \,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Observación 3.4. En el caso particular que D sea llana $(T^*\mathcal{M}, g)$ es localmente isométrico a una variedad paraKähler de curvatura seccional paraholomorfa constante $+1$, que denotaremos por $\tilde{\mathbb{C}}P$.

Recordamos aquí que el espacio proyectivo paracomplejo $\tilde{\mathbb{C}}P$ es Jordan-Osserman con operadores de Jacobi diagonalizables. Para cada vector unitario ξ los autovalores de los operadores de Jacobi ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi)$ son $\pm(0, 1, \frac{1}{4})$ con multiplicidades $(1, 1, 2n{-}2)$, respectivamente. Además, el signo de los autovalores depende del carácter causal del vector ξ.

En esta sección veremos que si $(\mathcal{M}, D)$ es afín Osserman entonces g puede ser vista como una deformación de $g_{\tilde{\mathbb{C}}P}$. Dicha deformación modificará la forma de Jordan de los operadores de Jacobi (que ya no serán diagonalizables), pero no cambiará la estructura de autovalores, proporcionando así los ejemplos deseados

Teorema 3.5. [38] *Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín.*

(1) Si $(\mathcal{M}, D)$ es afín Osserman en $p \in \mathcal{M}$, entonces $(T^*\mathcal{M}, g)$ es Osserman en cualquier punto de la fibra sobre p, $q \in \sigma^{-1}(p)$. Los autovalores de ${}^g\mathcal{J}(\cdot)$ en $S^\pm(T_qT^*\mathcal{M}, g)$ son $\pm(0, 1, \frac{1}{4})$ con multiplicidades $(1, 1, 2n-2)$, respectivamente.

(2) Si $(\mathcal{M}, D)$ es afín Osserman, entonces $(T^*\mathcal{M}, g)$ es Osserman.

Los ejemplos del Teorema 3.5 son esencialmente distintos de todos los conocidos previamente, ya que presentan operadores de Jacobi no diagonalizables con autovalores no nulos. Dado que la construcción de los mismos depende de la existencia de conexiones afines Osserman, el siguiente resultado muestra, en primer lugar, la existencia de variedades afines Osserman $(\mathcal{M}, D)$ en cualquier dimensión, lo que dará lugar a los ejemplos del teorema anterior. En segundo lugar, nos muestra que la forma de Jordan de ${}^g\mathcal{J}$ es muy complicada y que, en particular, $(T^*\mathcal{M}, g)$ no es Jordan-Osserman.

Teorema 3.6. [38] *Sea $r \geq 2$ y sea U una matriz triangular inferior de dimensión $r \times r$. Existe una variedad afín Osserman $(\mathcal{M}, D)$ de dimensión $r+1$, existe $q \in \mathcal{Z}(T^*\mathcal{M})$, y existen $\xi_i \in S^+(T_qT^*\mathcal{M}, g)$ para $i = 1, 2$ de modo que:*

(1) ${}^g\mathcal{J}(\xi_1)$ es diagonalizable.

(2) Con respecto a una base adecuada de $T_qT^*\mathcal{M}$,

$${}^g\mathcal{J}(\xi_2) = 0 \cdot \mathrm{Id}_1 \oplus 1 \cdot \mathrm{Id}_1 \oplus (\tfrac{1}{4} \cdot \mathrm{Id}_r + U) \oplus (\tfrac{1}{4} \cdot \mathrm{Id}_r + U^t)\,.$$

3.2.1. La estructura de autovalores

Sea D una conexión arbitraria en $\mathcal{M}$ y $\mathcal{T}(X, Y) = D_XY - D_YX - [X, Y]$ su *tensor de torsión*.

Lema 3.7. *Sea D una conexión arbitraria en $T\mathcal{M}$. Sea $p \in \mathcal{M}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existen coordenadas locales $x = (x_1, \ldots, x_n)$ centradas en p de modo que ${}^D\Gamma(p) = 0$.*
2. *El tensor de torsión $\mathcal{T}$ se anula en p.*

Demostración. Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un sistema de coordenadas locales en $\mathcal{M}$. El tensor de torsión $\mathcal{T}$ se anula en p si y sólo si ${}^D\Gamma_{ij}^k(p) = {}^D\Gamma_{ji}^k(p)$. En particular, si existe un sistema de coordenadas donde ${}^D\Gamma(p) = 0$, entonces necesariamente $\mathcal{T}$ se anula en p. Por tanto la Condición (1) implica la Condición (2). Recíprocamente, supongamos que la Condición (2) se verifica. Definimos un nuevo sistema de coordenadas como:

$$z_i = x_i + \tfrac{1}{2} a_{ijk} x_j x_k$$

donde $a_{ijk} = a_{ikj}$ deben ser fijadas. Como $\partial_{x_j} = \partial_{z_j} + a_{lji} x_i \partial_{z_l}$,

$$D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}(0) = D_{\partial_{z_i}} \partial_{z_j}(0) + a_{lji} \partial_{z_l}(0) \, .$$

La Condición (1) se sigue sin más que elegir $a_{lij} = {}^D\Gamma_{ij}^l$; el hecho de que $a_{lij} = a_{lji}$ es exactamente la condición para que D sea libre de torsión en el punto p. $\square$

Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín, sea $q \in T^*\mathcal{M}$, y sea $p = \sigma(q) \in \mathcal{M}$. Como D es libre de torsión, aplicamos el Lema 3.7 para hacer un cambio de coordenadas en $\mathcal{M}$ de modo que ${}^D\Gamma(p) = 0$. Sea ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R$ el tensor curvatura de la métrica

$$g_{\tilde{\mathbb{C}}P} = 2dx_i \circ dx_{i'} + x_{i'} x_{j'} dx_i \circ dx_j \, .$$

Observación 3.8. Denotando con $\mathcal{U}$ el abierto en $\mathcal{M}$ donde existen coordenadas verificando ${}^D\Gamma(p) = 0$, la métrica $g_{\tilde{\mathbb{C}}P}$ está definida en el abierto $\sigma^{-1}(\mathcal{U})$. Esta métrica **no** está definida de forma invariante dado que depende de las coordenadas elegidas. Sin embargo, en la fibra sobre p se tiene que $g(q) = g_{\tilde{\mathbb{C}}P}(q)$ para cualquier $q \in \sigma^{-1}(p)$.

Con el objetivo de medir la diferencia entre la curvatura de g y la curvatura del espacio paracomplejo introducimos un tensor curvatura auxiliar ${}^2R$ definido como ${}^2R = {}^gR - {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R$. Sean ahora ${}^g\mathcal{J}$, ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}$ y ${}^2\mathcal{J}$ los operadores de Jacobi correspondientes a la métrica g, al espacio proyectivo paracomplejo $\tilde{\mathbb{C}}P$ y al tensor curvatura diferencia ${}^2R$. Asimismo, sean ${}^D\mathcal{J}$ y ${}^{g_D}\mathcal{J}$ los operadores de Jacobi correspondientes a la variedad afín $(\mathcal{M}, D)$ y a la extensión de Riemann g_D de $(\mathcal{M}, D)$, respectivamente. Entonces se tiene:

Lema 3.9. *Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín y $q \in T^*\mathcal{M}$ un punto en la fibra sobre $p \in \mathcal{M}$. Para cada $\xi \in T_qT^*\mathcal{M}$, el operador de Jacobi ${}^2\mathcal{J}(\xi)$ se expresa en el sistema coordenado natural $\{\partial_1, \ldots, \partial_n, \partial_{1'}, \ldots, \partial_{n'}\}$ de $TT^*\mathcal{M}$ como*

$$^2\mathcal{J}(\xi) = \begin{pmatrix} {}^D\mathcal{J}(a) & 0 \\ \star & {}^D\mathcal{J}(a)^t \end{pmatrix} ,$$

donde $a = \sigma_*(\xi) \in T_p\mathcal{M}$.

Demostración. Descomponemos ${}^gR = {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R + {}^{g_D}R + {}^{\mathcal{E}}R$, donde ${}^{\mathcal{E}}R$ es un término adicional que mide las interacciones entre las métricas $g_{\tilde{\mathbb{C}}P}$ y g_D en la métrica combinada g dada en la Ecuación (3.1). Por [21] (página 54 Ecuación (3.6)), ${}^{g_D}\mathcal{J}(\xi)$ tiene la forma dada en el Lema. La demostración se completa mostrando que los términos adicionales de interacción permiten definir un operador de Jacobi ${}^{\mathcal{E}}\mathcal{J}(\xi) : \langle\{\partial_i\}\rangle \to \mathfrak{D}$, es decir

$$^{\mathcal{E}}\mathcal{J}(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \star & 0 \end{pmatrix} .$$

Para esto se ha de verificar que las siguientes componentes del tensor ${}^{\mathcal{E}}R$ se anulen:

$$\begin{array}{cccc} {}^{\mathcal{E}}R_{ijk}^l & {}^{\mathcal{E}}R_{ijk'}^l & {}^{\mathcal{E}}R_{i'jk}^l & {}^{\mathcal{E}}R_{i'jk'}^l \\ {}^{\mathcal{E}}R_{ij'k}^l & {}^{\mathcal{E}}R_{ij'k'}^l & {}^{\mathcal{E}}R_{i'j'k}^l & {}^{\mathcal{E}}R_{i'j'k'}^l \\ {}^{\mathcal{E}}R_{ij'k}^{l'} & {}^{\mathcal{E}}R_{ij'k'}^{l'} & {}^{\mathcal{E}}R_{i'j'k}^{l'} & {}^{\mathcal{E}}R_{i'j'k'}^{l'} \end{array}$$

Por la descomposición anterior de la curvatura se tiene que ${}^{\mathcal{E}}R = {}^{g}R - {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R - {}^{g_D}R$. Ahora bien, como las métricas g, $g_{\tilde{\mathbb{C}}P}$ y g_D son métricas de Walker, el Lema 1.6 implica que las únicas componentes de la lista anterior que a priori podrían ser no nulas son

$$ {}^{\mathcal{E}}R_{ij'k}^{l} \qquad {}^{\mathcal{E}}R_{ij'k'}^{l'} \qquad {}^{\mathcal{E}}R_{ijk}^{l} \qquad {}^{\mathcal{E}}R_{ij'k}^{l'} $$

A continuación veremos que estas cuatro componentes se anulan. Analizamos en primer lugar ${}^{\mathcal{E}}R_{ij'k}^{l}$. Por el Lema 1.6 se tiene que

$$ {}^{g}R_{ij'k}^{l} = {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R_{ij'k}^{l} = -\tfrac{1}{2}\{\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{kl}\}, \qquad {}^{g_D}R_{ij'k}^{l} = 0, $$

de donde se sigue que ${}^{\mathcal{E}}R_{ij'k}^{l} = 0$.

De forma análoga obtenemos la anulación de ${}^{\mathcal{E}}R_{ij'k'}^{l'}$. De hecho, utilizando el Lema 1.6 calculamos

$$ {}^{g}R_{ij'k'}^{l'} = {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R_{ij'k'}^{l'} = \tfrac{1}{2}\{\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ij}\delta_{kl}\}, \qquad {}^{g_D}R_{ij'k'}^{l'} = 0, $$

lo que demuestra que ${}^{\mathcal{E}}R_{ij'k'}^{l'} = 0$.

Analizamos en tercer lugar la componente ${}^{\mathcal{E}}R_{ijk}^{l}$. En este caso, un cálculo más largo pero en todo caso directo a partir del Lema 1.6 nos muestra que

$$ \begin{aligned} {}^{g}R_{ijk}^{l} &= \partial_j {}^{D}\Gamma_{ik}^{l} - \partial_i {}^{D}\Gamma_{jk}^{l} \\ &\quad -\tfrac{1}{4}\{(\partial_{s'}(x_{j'}x_{k'}) - 2{}^{D}\Gamma_{jk}^{s})(\partial_{l'}(x_{i'}x_{s'}) - 2{}^{D}\Gamma_{is}^{l}) \\ &\qquad - (\partial_{s'}(x_{i'}x_{k'}) - 2{}^{D}\Gamma_{ik}^{s})(\partial_{l'}(x_{j'}x_{s'}) - 2{}^{D}\Gamma_{js}^{l})\}, \\ {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R_{ijk}^{l} &= -\tfrac{1}{4}\{\partial_{s'}(x_{j'}x_{k'})\partial_{l'}(x_{i'}x_{s'}) - \partial_{s'}(x_{i'}x_{k'})\partial_{l'}(x_{j'}x_{s'})\}, \\ {}^{g_D}R_{ijk}^{l} &= \partial_j {}^{D}\Gamma_{ik}^{l} - \partial_i {}^{D}\Gamma_{jk}^{l} - {}^{D}\Gamma_{jk}^{s}\,{}^{D}\Gamma_{is}^{l} + {}^{D}\Gamma_{ik}^{s}\,{}^{D}\Gamma_{js}^{l} \end{aligned} $$

y, teniendo en cuenta que ${}^{D}\Gamma(p) = 0$, se sigue que

$$ {}^{g}R_{ijk}^{l} = {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R_{ijk}^{l} + {}^{g_D}R_{ijk}^{l}, $$

o lo que es lo mismo, ${}^{\mathcal{E}}R_{ijk}^{l} = 0$.

Por último, analizamos la componente ${}^{\mathcal{E}}R_{ij'k}^{l'}$. Un cálculo similar al utilizado en el caso anterior teniendo en cuenta el Lema 1.6 nos permite obtener que

$$ \begin{aligned} {}^{g}R_{ij'k}^{l'} &= \partial_l {}^{D}\Gamma_{ik}^{j} - \partial_k {}^{D}\Gamma_{il}^{j} \\ &\quad +2{}^{D}\Gamma_{ls}^{j}\,{}^{D}\Gamma_{ik}^{s} - {}^{D}\Gamma_{ik}^{s}\partial_{j'}(x_{l'}x_{s'}) - {}^{D}\Gamma_{ls}^{r}\partial_{j'}(x_{r'}\partial_{s'}(x_{i'}x_{k'})) \\ &\quad -\tfrac{1}{4}\{(\partial_{s'}(x_{i'}x_{k'}) - 2{}^{D}\Gamma_{ik}^{s})(\partial_{j'}(x_{s'}x_{l'}) - 2{}^{D}\Gamma_{sl}^{j}) \\ &\qquad + (\partial_{s'}(x_{i'}x_{l'}) - 2{}^{D}\Gamma_{il}^{s})(\partial_{j'}(x_{s'}x_{k'}) - 2{}^{D}\Gamma_{sk}^{j}) - 2\partial_{j'}(x_{l'}x_{s'}\partial_{s'}(x_{i'}x_{k'}))\}, \\ {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R_{ij'k}^{l'} &= -\tfrac{1}{4}\{\partial_{s'}(x_{i'}x_{k'})\partial_{j'}(x_{s'}x_{l'}) + \partial_{s'}(x_{i'}x_{l'})\partial_{j'}(x_{s'}x_{k'}) - 2\partial_{j'}(x_{l'}x_{s'}\partial_{s'}(x_{i'}x_{k'}))\}, \\ {}^{g_D}R_{ij'k}^{l'} &= \partial_l {}^{D}\Gamma_{ik}^{j} - \partial_k {}^{D}\Gamma_{il}^{j} + {}^{D}\Gamma_{ik}^{s}\,{}^{D}\Gamma_{sl}^{j} - {}^{D}\Gamma_{il}^{s}\,{}^{D}\Gamma_{sk}^{j}, \end{aligned} $$

y de nuevo teniendo en cuenta que ${}^{D}\Gamma(p) = 0$ se sigue que

$$ {}^{g}R_{ij'k}^{l'} = {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R_{ij'k}^{l'} + {}^{g_D}R_{ij'k}^{l'}, $$

es decir, ${}^{\mathcal{E}}R_{ij'k}^{l'} = 0$. □

Sea $\xi \in S^+(T_qT^*\mathcal{M}, g)$ y sea $\xi_1 = \mathfrak{J}\xi \in S^-(T_qT^*\mathcal{M}, g)$. Sea $E_\lambda(\xi)$ (respectivamente $E_\lambda(\xi_1)$) el autoespacio de ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi)$ (respectivamente ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi_1)$) para el autovalor $\lambda \in \{0, 1, \frac{1}{4}\}$ (respectivamente para $\lambda \in \{0, -1, -\frac{1}{4}\}$). Fijamos

$$ \begin{aligned} &E_0(\xi) = \xi \cdot \mathbb{R} = E_{-1}(\xi_1), \qquad && E_1(\xi) = \xi_1 \cdot \mathbb{R} = E_0(\xi_1), \\ &E_{\frac{1}{4}}(\xi) = \{E_0(\xi) \oplus E_1(\xi)\}^\perp = \{E_{-1}(\xi_1) \oplus E_0(\xi_1)\}^\perp = E_{-\frac{1}{4}}(\xi_1), && \\ &\mathcal{S}(\xi) = \mathfrak{D} \cap E_{\frac{1}{4}}(\xi), && \mathcal{U}(\xi) = E_0(\xi) \oplus \mathfrak{D}\,. \end{aligned} \tag{3.3} $$

Entonces se tiene que $T_qT^*\mathcal{M} = E_0(\xi) \oplus E_1(\xi) \oplus E_{\frac{1}{4}}(\xi)$.

Lema 3.10. *Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín. Sea $q \in T^*\mathcal{M}$. Sea $\xi \in S^+(T_qT^*\mathcal{M}, g)$.*

1. *$\mathfrak{D} = (\xi_1 - \xi) \cdot \mathbb{R} + \mathcal{S}(\xi)$.*
2. *${}^2\mathcal{J}(\xi)\mathfrak{D} \subset \mathcal{S}(\xi)$.*
3. *${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi)\mathcal{U}(\xi) \subset \mathcal{U}(\xi)$, ${}^2\mathcal{J}(\xi)\mathcal{U}(\xi) \subset \mathcal{U}(\xi)$.*

Demostración. La Ecuación (3.2) implica $\xi_1 - \xi \in \mathfrak{D}$. Elegimos una base ortonormal para $E_{\frac{1}{4}}(\xi)$ de la forma

$$ \{e_1^+, \ldots, e_{n-1}^+, \mathfrak{J}e_1^+, \ldots, \mathfrak{J}e_{n-1}^+\} $$

donde e_i^+ son espaciales y $\mathfrak{J}e_i^+$ temporales. Probamos la Condición (1) sin más que tomar la siguiente base para $\mathfrak{D}$:

$$ \{\xi - \xi_1, e_1^+ - \mathfrak{J}e_1^+, \ldots, e_{n-1}^+ - \mathfrak{J}e_{n-1}^+\}\,. $$

Para demostrar la Condición (2) supongamos que falla. Elegimos $\eta \in \mathfrak{D}$ de tal forma que ${}^2\mathcal{J}(\xi)\eta \notin \mathcal{S}(\xi)$. Por el Lema 3.9, ${}^2\mathcal{J}(\xi)\eta \in \mathfrak{D}$. Por la Condición (1), existe $c \neq 0$ tal que

$$ {}^2\mathcal{J}(\xi)\eta = c(\xi - \xi_1) + \eta_1 \quad \text{para} \quad \eta_1 \in \mathcal{S}(\xi)\,. $$

Por tanto $c\xi \in E_1(\xi) + \text{Rango}({}^2\mathcal{J}(\xi)) + E_{\frac{1}{4}}(\xi) \subset E_0(\xi)^\perp$ lo cual es falso; esta contradicción prueba la Condición (2). Para probar la Condición (3), expresamos:

$$ \mathcal{U}(\xi) = E_0(\xi) \oplus \mathfrak{D} = \xi \cdot \mathbb{R} \oplus (\xi_1 - \xi) \cdot \mathbb{R} \oplus \mathcal{S}(\xi) = \xi \cdot \mathbb{R} \oplus \xi_1 \cdot \mathbb{R} \oplus \mathcal{S}(\xi)\,. \tag{3.4} $$

Como ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi)\xi = 0$, como ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi)\xi_1 = \xi_1$, y como $S(\xi) \subset E_{\frac{1}{4}}(\xi)$, ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi)$ preserva $\mathcal{U}(\xi)$. Como ${}^2\mathcal{J}(\xi)\xi = 0$ y como ${}^2\mathcal{J}(\xi)\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$, ${}^2\mathcal{J}(\xi)$ preserva también $\mathcal{U}(\xi)$. □

Examinaremos ahora la estructura de autovalores:

Lema 3.11. *Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín. Sea $q \in T^*\mathcal{M}$. Sea $\xi \in S^+(T_qT^*\mathcal{M}, g)$. Supongamos que $(\mathcal{M}, D)$ es afín Osserman en $p = \sigma(q)$. Si existe $0 \neq \eta \in T_qT^*\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ con ${}^g\mathcal{J}(\xi)\eta = \mu\eta$, entonces:*

1. *Si $\eta \notin \mathcal{U}(\xi) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, entonces $\mu = \frac{1}{4}$.*
2. *Si $\eta \in \mathcal{U}(\xi) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y si $\eta \notin \mathcal{S}(\xi) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, entonces $\mu = 0$ o $\mu = 1$.*
3. *Si $\eta \in \mathcal{S}(\xi) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, entonces $\mu = \frac{1}{4}$.*
4. Espectro$\{{}^g\mathcal{J}(\xi)\} \subset \{0, 1, \frac{1}{4}\}$.

Demostración. Por el Lema 3.9, ${}^2\mathcal{J}(\xi)$ es nilpotente puesto que $(\mathcal{M}, D)$ es afín Osserman en p. Por el Lema 3.10, $\mathcal{U}(\xi)$ se preserva por ${}^{g_{\tilde{c}P}}\mathcal{J}(\xi)$ y por ${}^2\mathcal{J}(\xi)$. Por tanto, existen operadores ${}^{g_{\tilde{c}P}}\tilde{\mathcal{J}}(\xi)$, ${}^2\tilde{\mathcal{J}}(\xi)$, y ${}^g\tilde{\mathcal{J}}(\xi) = {}^{g_{\tilde{c}P}}\tilde{\mathcal{J}}(\xi) + {}^2\tilde{\mathcal{J}}(\xi)$ inducidos en el espacio cociente:

$$\mathcal{V}(\xi) = \{T_qT^*\mathcal{M}/\mathcal{U}(\xi)\} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\,.$$

Si $\eta \notin \mathcal{U}(\xi) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, entonces $\tilde{\eta} \in \mathcal{V}(\xi)$, $\tilde{\eta} \neq 0$ y ${}^g\tilde{\mathcal{J}}(\xi)\tilde{\eta} = \mu\tilde{\eta}$. Por la Ecuación (3.4),

$$\mathcal{V}(\xi) = \{E_{\frac{1}{4}}(\xi)/\mathcal{S}(\xi)\} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\,.$$

Consecuentemente, ${}^{g_{\tilde{c}P}}\tilde{\mathcal{J}}(\xi) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Id}$. Puesto que ${}^2\tilde{\mathcal{J}}(\xi)$ es nilpotente y ${}^g\tilde{\mathcal{J}}(\xi) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Id} + {}^2\tilde{\mathcal{J}}(\xi)$, ${}^g\tilde{\mathcal{J}}(\xi)$ tiene como único autovalor $\frac{1}{4}$. Entonces $\mu = \frac{1}{4}$. Con esto terminamos la demostración de la Condición (1).

Para probar la Condición (2), supongamos que existe $0 \neq \eta \in \mathcal{U}(\xi) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ tal que $\eta \notin \mathcal{S}(\xi) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y ${}^g\mathcal{J}(\xi)\eta = \mu\eta$. Por el Lema 3.10, $\mathcal{S}(\xi)$ se preserva por ${}^{g_{\tilde{c}P}}\mathcal{J}(\xi)$ y ${}^2\mathcal{J}(\xi)$. Esto de nuevo induce operadores ${}^{g_{\tilde{c}P}}\tilde{\mathcal{J}}(\xi)$, ${}^2\tilde{\mathcal{J}}(\xi)$, y ${}^g\tilde{\mathcal{J}}(\xi) = {}^{g_{\tilde{c}P}}\tilde{\mathcal{J}}(\xi) + {}^2\tilde{\mathcal{J}}(\xi)$ en el espacio cociente:

$$\mathcal{W}(\xi) = \{\mathcal{U}(\xi)/\mathcal{S}(\xi)\} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\,.$$

Puesto que $\tilde{\eta} \neq 0$, μ es un autovalor de ${}^g\tilde{\mathcal{J}}(\xi)$. Por la Ecuación (3.4), $\mathcal{W}(\xi) = \tilde{\xi} \cdot \mathbb{R} \oplus \tilde{\xi}_1 \cdot \mathbb{R}$. Por el Lema 3.10, ${}^2\mathcal{J}(\xi)\xi = 0$ y ${}^2\mathcal{J}(\xi)\xi_1 = {}^2\mathcal{J}(\xi)(\xi_1 - \xi) \in \mathcal{S}(\xi)$ y entonces ${}^2\tilde{\mathcal{J}}(\xi) = 0$. Puesto que ${}^{g_{\tilde{c}P}}\tilde{\mathcal{J}}(\xi)\tilde{\xi} = 0$ y ${}^{g_{\tilde{c}P}}\tilde{\mathcal{J}}(\xi)\tilde{\xi}_1 = \tilde{\xi}_1$ se tiene que ${}^g\tilde{\mathcal{J}}(\xi)\tilde{\xi} = 0$ y ${}^g\tilde{\mathcal{J}}(\xi)\tilde{\xi}_1 = \tilde{\xi}_1$. Por lo tanto $\mu \in \{0, 1\}$, lo que prueba la Condición (2).

Para demostrar la Condición (3), fijémonos que ${}^{g_{\tilde{c}P}}\mathcal{J}(\xi) = \frac{1}{4}\,\mathrm{Id}$ en $\mathcal{S}(\xi)$ y que ${}^2\mathcal{J}(\xi)$ es nilpotente y preserva $\mathcal{S}(\xi)$. La Condición (4) se sigue de forma inmediata de las Condiciones (1)–(3). $\square$

Demostración del Teorema 3.5

Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín que es afín Osserman en $p \in \mathcal{M}$. Elegimos coordenadas locales en $\mathcal{M}$ de modo que ${}^{D}\Gamma(p) = 0$. Sea D_0 una conexión llana libre de torsión definida en un entorno de p cuyos símbolos de Christoffel se anulan en estas coordenadas. Fijamos

$$D^\varepsilon = \varepsilon D + (1 - \varepsilon) D_0$$

para definir una familia 1-paramétrica de métricas g^ε interpolando entre $g^1 = g$ y $g^0 = g_{\tilde{\mathbb{C}}P}$. Puesto que ${}^{D^\varepsilon}R(p) = \varepsilon \cdot {}^{D}R(p)$, todas las conexiones D^ε son afín Osserman en p. Entonces el Lema 3.11 implica que Espectro$\{{}^{g^\varepsilon}\mathcal{J}(\xi)\} \subset \{0, 1, \frac{1}{4}\}$ para todo ε, y por tanto las multiplicidades de los autovalores permanecen constantes durante esta perturbación. Tomando $\varepsilon = 0$ se obtienen las multiplicidades deseadas y con ello probamos la Condición (1) del Teorema 3.5 para ξ espacial. Los resultados en [86] muestran que la condición espacial Osserman es equivalente a la temporal Osserman, y además se relaciona la estructura de autovalores y sus multiplicidades en $S^+(T_qT^*\mathcal{M}, g)$ con los autovalores y sus multiplicidades en $S^-(T_qT^*\mathcal{M}, g)$. Esto prueba la Condición (1) del Teorema 3.5; la Condición (2) se sigue ahora de la Condición (1). $\square$

3.2.2. Ejemplos

A lo largo de esta sección consideraremos $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{Z}(T^*\mathcal{M})$ la sección cero del fibrado cotangente y un punto $q \in \mathcal{Z}(T^*\mathcal{M})$ de modo que ${}^{D}\Gamma(p) = 0$, donde $p = \sigma(q)$. Esto simplificará los cálculos de manera notable. Primero mostraremos las posibles componentes no nulas de varios tensores salvo las obvias $\mathbb{Z}_2$-simetrías.

Lema 3.12. *Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín, sea $q \in \mathcal{Z}(T^*\mathcal{M})$, y sea $p = \sigma(q)$. Asumamos que ${}^{D}\Gamma(p) = 0$.*

1. *Las posibles componentes no nulas de la curvatura de ${}^{g_D}R(q)$ son las dadas por ${}^{g_D}R_{ijkl'}(q) = {}^{D}R_{ijk}{}^{l}(p)$.*
2. *Las componentes no nulas de la curvatura de ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R(q)$ son:*

$$\begin{aligned} &{}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R_{i',i,i',i}(q) = -1, \\ &{}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R_{j',i,i',j}(q) = {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R_{i',i,j',j}(q) = -\tfrac{1}{2} \text{ para } i \neq j\,. \end{aligned}$$

3. *${}^{g}R(q) = {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R(q) + {}^{g_D}R(q)$.*

Demostración. Sean $(u_1, \ldots, u_n)$ las coordenadas en una variedad pseudo-Riemanniana (U, g_U). Expandimos $g_U = g_{ab}du^a \circ du^b$. Supongamos que los 1-jets de las funciones g_{ab} se anulan en un punto s de U. Entonces se tiene que

$${}^{g_U}R_{bacd}(s) = \tfrac{1}{2}\{\partial_{u_a}\partial_{u_c}g_{bd} + \partial_{u_b}\partial_{u_d}g_{ac} - \partial_{u_a}\partial_{u_d}g_{bc} - \partial_{u_b}\partial_{u_c}g_{ad}\}(s)\,.$$

Aplicaremos esta observación a nuestro caso. Puesto que x' y ${}^D\Gamma$ se anulan en q y p, respectivamente, los 1-jets de g_D, de $g_{\tilde{\mathbb{C}}P}$, y de g se anulan en q. La Condición (1) se demuestra a partir del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} {}^{g_D}R_{jikl'}(q) &= \tfrac{1}{2}\{\partial_j\partial_{l'}(-2x_{h'}{}^D\Gamma_{ik}^h) - \partial_i\partial_{l'}(-2x_{h'}{}^D\Gamma_{jk}^h)\}(q) \\ &= \{\partial_i{}^D\Gamma_{jk}^l - \partial_j{}^D\Gamma_{ik}^l\}(p) = {}^DR_{jik}^l(p)\,. \end{aligned}$$

La demostración de las Condiciones (2) y (3) es similar. □

Demostración del Teorema 3.6

Sea $r \geq 2$ y sea $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{r+1}$. Sean $\{x_0, \ldots, x_r\}$ las coordenadas usuales en $\mathcal{M}$ y $\{x_{0'}, \ldots, x_{r'}\}$ las coordenadas duales en $T^*\mathcal{M}$. Consideramos los índices a, b, c, d variando desde 1 hasta r y los índices i, j, k, l variando desde 0 hasta r. Sea ${U_a}^b$ una matriz triangular inferior, es decir, ${U_a}^b = 0$ para $b \leq a$. Sea $\theta = \theta(x_0)$ una función diferenciable en una variable. Definimos una conexión libre de torsión D en $T\mathcal{M}$ con símbolos de Christoffel no nulos:

$${}^D\Gamma_{0a}^b = {}^D\Gamma_{a0}^b = \theta U_a^b\,.$$

La curvatura viene dada por

$${}^DR_{jik}^l = \partial_i\{{}^D\Gamma_{jk}^l\} - \partial_j\{{}^D\Gamma_{ik}^l\} + \{{}^D\Gamma_{ic}^l\}\{{}^D\Gamma_{jk}^c\} - \{{}^D\Gamma_{jc}^l\}\{{}^D\Gamma_{ik}^c\}\,.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$. El primer término juega algún papel sólo si $i = k = 0$. El segundo término no interviene. El tercero puede intervenir si $i = k = 0$. El último término no interviene. Entonces las posibles componentes no nulas de la curvatura son:

$${}^DR_{a00}^b = \partial_0\{{}^D\Gamma_{a0}^b\} + \{{}^D\Gamma_{0c}^b\}\{{}^D\Gamma_{a0}^c\} = \partial_0\theta \cdot U_a^b + \theta^2 \cdot U_c^b U_a^c.$$

Sea $x \in T_p\mathcal{M}$. Como tenemos $0 < a < b$ en la anterior relación,

$${}^D\mathcal{J}(x)\partial_i \in \langle\{\partial_{i+1}, \ldots, \partial_r\}\rangle\,.$$

Como consecuencia $(\mathcal{M}, D)$ es afín Osserman. Supongamos que $\theta(0) = 0$ y $\partial_0\theta(0) = -1$. Tomamos $p = 0$, $q = (0, 0)$. Entonces aplicando el Lema 3.12 se observa que:

$$\begin{aligned} &{}^gR(q) = {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}R(q) + {}^{g_D}R(q), \\ &{}^gR(\partial_{i'}, \partial_i, \partial_{i'}, \partial_i)(q) = -1, \\ &{}^gR(\partial_{j'}, \partial_i, \partial_{i'}, \partial_j)(q) = {}^gR(\partial_{i'}, \partial_i, \partial_{j'}, \partial_j)(q) = -\tfrac{1}{2} \quad (i \neq j), \\ &{}^gR(\partial_j, \partial_i, \partial_k, \partial_{d'})(q) = {}^DR_{jik}^d(p)\,. \end{aligned}$$

Primero, tomemos $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + \partial_{1'})$. Entonces ${}^g\mathcal{J}(\xi_1) = {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi_1)$ es diagonalizable y por lo tanto tiene forma canónica de Jordan trivial; la curvatura de la conexión D no juega ningún papel. Si ahora consideramos $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 + \partial_{0'})$ y $\mathfrak{J}\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 - \partial_{0'})$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
{}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi_2)\xi_2 &= 0, & {}^{g_D}\mathcal{J}(\xi_2)\xi_2 &= 0,\\
{}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi_2)\partial_a &= \tfrac{1}{4}\partial_a, & {}^{g_D}\mathcal{J}(\xi_2)\partial_a &= U_a{}^b\partial_b,\\
{}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi_2)\mathfrak{J}\xi_2 &= \mathfrak{J}\xi_2, & {}^{g_D}\mathcal{J}(\xi_2)\mathfrak{J}\xi_2 &= 0,\\
{}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi_2)\partial_{a'} &= \tfrac{1}{4}\partial_{a'}, & {}^{g_D}\mathcal{J}(\xi_2)\partial_{a'} &= U_b{}^a\partial_{b'}.
\end{aligned}
$$
□

3.3. Variedades paracomplejas Osserman

Sea $\mathcal{P}(T^*\mathcal{M})$ el fibrado sobre $T^*\mathcal{M}$ de 2-planos tangentes no degenerados, paracomplejos y $\mathfrak{J}$-invariantes. Sea $\pi \in \mathcal{P}(T^*\mathcal{M})$; para cada vector espacial unitario $\xi \in S^+(\pi, g)$ se define el *operador de Jacobi paracomplejo* como:

$$
{}^g\mathcal{J}(\pi) = {}^g\mathcal{J}(\xi) - {}^g\mathcal{J}(\mathfrak{J}\xi).
$$

Este operador es independiente de la elección particular de ξ (véase [153] para más información sobre los operadores de Jacobi de orden superior en el caso real). Se dice que $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ es *semi paracompleja Osserman* si ${}^g\mathcal{J}(\cdot)$ tiene autovalores constantes en $\mathcal{P}(T^*\mathcal{M})$.

A diferencia de lo que ocurre con el operador de Jacobi, el operador de Jacobi paracomplejo no determina, en general, el tensor curvatura. Esta propiedad dependerá del grado de compatibilidad entre la curvatura y la estructura paracompleja $\mathfrak{J}$. Se dice que $(g, \mathfrak{J})$ es compatible si ${}^g\mathcal{J}(\pi)$ conmuta con $\mathfrak{J}$ para todo plano paraholomorfo no degenerado. La anterior propiedad de conmutación es equivalente a la denominada *tercera identidad de Gray*

$$
R(X,Y,Z,W) = R(\mathfrak{J}X, \mathfrak{J}Y, \mathfrak{J}Z, \mathfrak{J}W) \quad \text{para todos} \quad X,Y,Z,W\,. \tag{3.5}
$$

Así se dirá que $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ es *paracompleja Osserman* si es semi paracompleja Osserman y $(g, \mathfrak{J})$ es compatible.

Observación 3.13. Procediendo de forma completamente análoga al estudio desarrollado en [20], se tiene que el operador de Jacobi paracomplejo determina la curvatura en variedades paraHermíticas o Nearly paraKähler, pero no lo hace en general en la situación casi paraKähler.

En esta sección mostraremos que $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ es una variedad semi paracompleja Osserman para cualquier variedad afín $(\mathcal{M}, D)$, si bien no es semi paracompleja Jordan-Osserman en general.

Teorema 3.14. [38] *Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín. Sea $\pi \in \mathcal{P}(T^*\mathcal{M})$. Los autovalores ${}^g\mathcal{J}(\pi)$ son $(1, \frac{1}{2})$ con multiplicidades $(2, 2n-2)$, respectivamente, y cualquier bloque de Jordan para ${}^g\mathcal{J}(\pi)$ tiene al menos tamaño 2×2; $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ es semi paracompleja Osserman.*

Teorema 3.15. [38] *Sea $n \geq 3$. Existe una variedad afín Osserman $(\mathcal{M}, D)$ de dimensión n tal que $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ no es semi paracompleja Jordan-Osserman, y los operadores de Jacobi paracomplejos no son siempre diagonalizables.*

Sin embargo, $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ no es paracompleja Osserman, dado que cualquier condición de compatibilidaden $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ es extremadamente restrictiva.

Teorema 3.16. [38] *Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $(\mathcal{M}, D)$ *es llana.*

(ii) $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ *es integrable.*

(iii) $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ *verifica la tercera identidad de Gray.*

(iv) $\mathfrak{J}\,{}^g\!\mathcal{J}(\pi) = {}^g\!\mathcal{J}(\pi)\mathfrak{J}$ *para todo* $\pi \in \mathcal{P}(T^*\mathcal{M})$.

Demostración del Teorema 3.14

Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín. Para cada punto $q \in T^*\mathcal{M}$, sea $\pi \in \mathcal{P}_q(T^*\mathcal{M})$ un plano paraholomorfo no degenerado y denotemos con $\xi \in S^+(\pi, g)$ un vector espacial unitario en π. Se sigue entonces directamente de la Ecuación (3.2) que $\sigma_*\xi = \sigma_*\mathfrak{J}(\xi)$, que denotaremos como $a = \sigma_*\xi = \sigma_*\mathfrak{J}(\xi)$. Por el Lema 3.9,

$$
\begin{aligned}
{}^2\mathcal{J}(\xi) &= \begin{pmatrix} {}^D\mathcal{J}(a) & 0 \\ \star & {}^D\mathcal{J}(a)^t \end{pmatrix}, \\
{}^2\mathcal{J}(\mathfrak{J}\xi) &= \begin{pmatrix} {}^D\mathcal{J}(a) & 0 \\ \star_1 & {}^D\mathcal{J}(a)^t \end{pmatrix}, \\
{}^2\mathcal{J}(\pi) = {}^2\mathcal{J}(\xi) - {}^2\mathcal{J}(\mathfrak{J}\xi) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \star_\pi & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\mathrm{Im}\{{}^2\mathcal{J}(\pi)\} \subset \mathfrak{D}$, ${}^2\mathcal{J}(\pi)\mathfrak{D} = 0$, y ${}^2\mathcal{J}(\pi)$ es nilpotente.

Consideremos una base $\{e_1, e_2, f_1, \ldots, f_{2n-2}\}$ de $T_qT^*\mathcal{M}$ de modo que $\langle\{e_1, e_2\}\rangle$ se corresponde con el autoespacio asociado al autovalor $+1$ de ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\pi)$ y $\langle\{f_1, \ldots, f_{2n-2}\}\rangle$ se corresponde con el autoespacio asociado al autovalor $+\frac{1}{2}$ de ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\pi)$. Entonces:

$$({}^g\mathcal{J}(\pi) - \mathrm{Id})e_i = {}^2\mathcal{J}(\pi)e_i \in \mathfrak{D} \quad \text{y} \quad ({}^g\mathcal{J}(\pi) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Id})f_i = {}^2\mathcal{J}(\pi)f_i \in \mathfrak{D}\,.$$

Por la Ecuación (3.3),

$${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\pi) = \mathrm{Id} \text{ en } (\xi - \mathfrak{J}\xi)\cdot\mathbb{R} \quad \text{y} \quad {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\pi) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Id} \text{ en } \mathcal{S}(\xi)\,.$$

Consecuentemente por el Lema 3.10, ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\pi)\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$. Dado que ${}^2\mathcal{J}(\pi) = 0$ en $\mathfrak{D}$, se tiene que ${}^g\mathcal{J}(\pi)\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$. Con lo cual podemos concluir:

$$\mathrm{Im}\{({}^g\mathcal{J}(\pi) - \mathrm{Id})\cdot({}^g\mathcal{J}(\pi) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Id})\} \subset \mathfrak{D}\,.$$

Teniendo en cuenta que ${}^2\mathcal{J}(\pi) = 0$ en $\mathfrak{D}$ y ${}^g\mathcal{J}(\pi) = {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\pi)$ en $\mathfrak{D}$, se sigue de la Ecuación (3.3) y el Lema 3.10 que

$$({}^g\mathcal{J}(\pi) - \mathrm{Id}) \cdot ({}^g\mathcal{J}(\pi) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Id})\mathfrak{D} = \{0\}$$

y por tanto

$$({}^g\mathcal{J}(\pi) - \mathrm{Id})^2 \cdot ({}^g\mathcal{J}(\pi) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Id})^2 = \{0\}\,.$$

Como consecuencia Espectro$\{{}^g\mathcal{J}(\pi)\} \subset \{\frac{1}{2}, 1\}$ y ${}^g\mathcal{J}(\pi)$ tiene sólo bloques de Jordan de orden 1×1 ó 2×2. Del mismo modo que en la demostración del Teorema 3.5, consideramos $D^\varepsilon = \varepsilon D + (1-\varepsilon)D_0$ para construir una familia 1-paramétrica de métricas semi paracomplejas Osserman g^ε interpolando entre $g^1 = g$ y $g^0 = g_{\tilde{\mathbb{C}}P}$. Puesto que los autovalores permanecen constantes, las multiplicidades de los autovalores también y, por tanto $\frac{1}{2}$ es un autovalor de multiplicidad $2n-2$ y 1 es un autovalor de multiplicidad 2. □

Demostración del Teorema 3.15

Sean $n \geq 3$, $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ y fijemos $p = 0$ y $q = (0,0) \in T^*\mathcal{M}$. Sea $\theta = \theta(x_1)$ una función diferenciable de una variable verificando $\theta(0) = 0$ y $\theta_1(0) \neq 0$, donde $\theta_1 = \partial_1\theta$. Sea ahora D la conexión afín cuyo único símbolo de Christoffel no nulo viene dado por ${}^D\Gamma_{22}^3 = \theta(x_1)$. Un cálculo rutinario muestra que la única derivada covariante no nula viene dada por $D_{\partial_2}\partial_2 = \theta(x_1)\partial_3$. Así el operador de Jacobi ${}^D\mathcal{J}$ es nilpotente y $(\mathcal{M}, D)$ es afín Osserman pues la única componente no nula de la curvatura viene dada por

$${}^D R(\partial_2, \partial_1)\partial_2 = \theta_1\partial_3\,.$$

Por el Lema 3.12,

$$\begin{aligned}
&{}^g R(\partial_{i'}, \partial_i, \partial_{i'}, \partial_i)(q) = -1,\\
&{}^g R(\partial_{j'}, \partial_i, \partial_{i'}, \partial_j)(q) = {}^g R(\partial_{i'}, \partial_i, \partial_{j'}, \partial_j)(q) = -\tfrac{1}{2} \quad (i \neq j),\\
&{}^g R(\partial_2, \partial_{3'}, \partial_2, \partial_1)(q) = \theta_1\,.
\end{aligned}$$

Sean ahora $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + \partial_{1'}) \in S^+(T_qT^*\mathcal{M}, g)$ y $\mathfrak{J}\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 - \partial_{1'})$. Teniendo en cuenta que ${}^2\mathcal{J}(\xi) = {}^2\mathcal{J}(\mathfrak{J}\xi) = 0$, entonces los operadores de Jacobi asociados verifican ${}^g\mathcal{J}(\xi) = {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\xi)$ y por tanto los operadores de Jacobi paracomplejos ${}^g\mathcal{J}(\pi_\xi) = {}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\pi_\xi)$ son diagonalizables.

Ahora consideramos

$$\begin{aligned}
\eta &= \tfrac{1}{2}(\partial_1 + \partial_3 + \partial_{1'} + \partial_{3'}) \in S^+(T_qT^*\mathcal{M}, g),\\
\mathfrak{J}\eta &= \tfrac{1}{2}(\partial_1 + \partial_3 - \partial_{1'} - \partial_{3'}) \in S^-(T_qT^*\mathcal{M}, g)\,.
\end{aligned}$$

Las únicas componentes no triviales de los correspondientes operadores de Jacobi vienen dadas por

$${}^{g_D}\mathcal{J}(\eta)\partial_2 = \tfrac{1}{2}\theta_1\partial_{2'}, \quad {}^{g_D}\mathcal{J}(\mathfrak{J}\eta)\partial_2 = -\tfrac{1}{2}\theta_1\partial_{2'}, \quad {}^{g_D}\mathcal{J}(\pi_\eta)\partial_2 = \theta_1\partial_{2'}\,.$$

Puesto que $\pi_2 = \langle\{\partial_2, \partial_{2'}\}\rangle$ está contenido en el autoespacio asociado al autovalor $\frac{1}{4}$ del operador de Jacobi ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\eta)$ y en el autoespacio asociado al autovalor $\frac{1}{2}$ del operador de Jacobi paracomplejo ${}^{g_{\tilde{\mathbb{C}}P}}\mathcal{J}(\pi_\eta)$, se sigue que ${}^{g}\mathcal{J}(\eta)$ y ${}^{g}\mathcal{J}(\pi_\eta)$ tienen forma canónica de Jordan no trivial. □

Demostración del Teorema 3.16

Veremos en primer lugar que si $(\mathcal{M}, D)$ es llana entonces $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ es integrable y verifica la tercera identidad de Gray. Después probaremos que el carácter integrable de $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ implica que $(\mathcal{M}, D)$ es llana. Finalmente mostraremos que si $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ verifica la tercera identidad de Gray entonces $(\mathcal{M}, D)$ es llana, y que $\mathfrak{J}\,{}^{g}\mathcal{J}(\pi) = {}^{g}\mathcal{J}(\pi)\mathfrak{J}$ para todo $\pi \in \mathcal{P}(T^*\mathcal{M})$ si y sólo si $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ verifica la tercera identidad de Gray, lo que completará la demostración del Teorema 3.16.

Si $(\mathcal{M}, D)$ es llana, entonces $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$ es isomorfo a $\tilde{\mathbb{C}}P$ por el Teorema 3.2 de donde se sigue trivialmente que la estructura casi paracompleja es integrable y se verifica la tercera identidad de Gray.

Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín y supongamos que la estructura casi paracompleja $\mathfrak{J}$ es integrable. Fijemos un punto $p \in \mathcal{M}$ y tomemos coordenadas locales de modo que ${}^{D}\Gamma(p) = 0$. Sea ahora $q \in \sigma^{-1}(p)$. Entonces en el punto q se tiene que la estructura casi paracompleja dada en la Ecuación (3.2) verifica

$$\begin{aligned}
\mathfrak{J}\partial_i &= \partial_i - \{x_{i'}x_{a'} - 2x_{b'}{}^{D}\Gamma_{ia}^{b}\}\partial_{a'},\\
\mathfrak{J}\partial_j &= \partial_j - \{x_{j'}x_{c'} - 2x_{d'}{}^{D}\Gamma_{jc}^{d}\}\partial_{c'},
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
[\partial_i, \partial_j] &= 0,\\
\mathfrak{J}[\mathfrak{J}\partial_i, \partial_j] &= 2x_{b'}\partial_j{}^{D}\Gamma_{ia}^{b}\partial_{a'},\\
\mathfrak{J}[\partial_i, \mathfrak{J}\partial_j] &= -2x_{b'}\partial_i{}^{D}\Gamma_{ja}^{b}\partial_{a'},\\
[\mathfrak{J}\partial_i, \mathfrak{J}\partial_j] &= \{2x_{b'}\partial_i{}^{D}\Gamma_{ja}^{b} - 2x_{b'}\partial_j{}^{D}\Gamma_{ia}^{b}\}\partial_{a'}\\
&\quad +\{x_{i'}x_{a'}\partial_{a'}(x_{j'}x_{c'}) - x_{j'}x_{a'}\partial_{a'}(x_{i'}x_{c'})\}\partial_{c'}.
\end{aligned}$$

Así se tiene que

$$N_{\mathfrak{J}}(\partial_i, \partial_j)(q) = 4x_{b'}{}^{D}R_{jia}^{b}(p)\partial_{a'}$$

lo que prueba que la integrabilidad de $\mathfrak{J}$ sólo es posible si $(\mathcal{M}, D)$ es llana.

Supongamos ahora que $(T^*\mathcal{M}, g, \mathfrak{J})$. verifica la tercera identidad de Gray dada en la Ecuación (3.5). Sea q un punto en la sección cero de $T^*\mathcal{M}$ y tomemos coordenadas en $\mathcal{M}$ de modo que los símbolos de Christoffel de D se anulen en el punto $p = \sigma(q)$. Por el Lema 3.12, y dado que $\tilde{\mathbb{C}}P$ verifica la tercera identidad de Gray, concluimos que ${}^{g_D}R$ verifica la tercera identidad de Gray en q. Por lo tanto, teniendo en cuenta la expresión de $\mathfrak{J}$ en la

Ecuación (3.2),

$$\begin{aligned} {}^{g_D}R(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_{l'})(q) &= {}^{g_D}R(\mathfrak{J}\partial_i,\mathfrak{J}\partial_j,\mathfrak{J}\partial_k,\mathfrak{J}\partial_{l'})(q)\\ &= {}^{g_D}R(\partial_i,\partial_j,\partial_k,-\partial_{l'})(q)\\ &= -{}^{g_D}R(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_{l'})(q)\,, \end{aligned}$$

de donde se sigue que ${}^{g_D}R(q)=0$. Por el Lema 3.12, esto implica ${}^{D}R(p)=0$ y por lo tanto que $(\mathcal{M},D)$ es llana.

La equivalencia entre la tercera identidad de Gray dada en la Ecuación (3.5) y la conmutación del operador de Jacobi paracomplejo ${}^{g}\mathcal{J}(\pi)$ con la estructura casi paracompleja ${}^{g}\mathcal{J}(\pi)\mathfrak{J}=\mathfrak{J}\,{}^{g}\mathcal{J}(\pi)$ es un hecho puramente algebraico. De hecho un total paralelismo con el estudio realizado en [20] muestra que para toda variedad casi paraHermítica $(M,g,\mathfrak{J})$ se verifica la tercera identidad de Gray si y sólo si ${}^{g}\mathcal{J}(\pi)\mathfrak{J}=\mathfrak{J}\,{}^{g}\mathcal{J}(\pi)$ para todo $\pi\in\mathcal{P}(M)$. Esto completa la demostración del Teorema 3.16. □

3.4. Un ejemplo explícito con superficies afines Osserman

En esta sección se mostrará un ejemplo explícito de variedades de Osserman y semi paracompleja Osserman cuyos operadores de Jacobi tienen una forma canónica de Jordan en general no trivial. Veremos que la curvatura de este ejemplo no es sencilla. Siguiendo [67, 85], denotamos por D una conexión libre de torsión en $\Sigma=\mathbb{R}^2$ cuyos símbolos de Christoffel no nulos vienen dados por

$${}^{D}\Gamma_{11}^{1}=-\partial_1\theta \quad \text{y} \quad {}^{D}\Gamma_{22}^{2}=\partial_2\theta\,,$$

donde $\theta(x_1,x_2)$ es una función real diferenciable verificando $\partial_2\partial_1\theta(x_1,x_2)\equiv\theta_{12}\neq 0$. Denotamos por $\mathcal{M}=\Sigma\times\mathbb{R}^{n-2}$ con la conexión trivial en $\mathbb{R}^{n-2}$; es por tanto una variedad no llana de dimensión n con operadores de Jacobi nilpotentes, es decir, afín Osserman. Puesto que el tensor de Ricci de $\mathcal{M}$ es antisimétrico, consideramos en $T^*\mathcal{M}=T^*(\Sigma\times\mathbb{R}^{n-2})$ la extensión de Riemann modificada dada por

$$g=g_{2n}=\iota\,\mathrm{Id}\circ\iota\,\mathrm{Id}+g_D\,.$$

Entonces el tensor curvatura R de g está determinado por las siguientes expresiones sin más que particularizar las expresiones dadas en el Lema 1.6:

$R_{121}^{1}=-\frac{1}{4}x_{1'}x_{2'}-\theta_{12},\quad R_{122}^{2}=\frac{1}{4}x_{1'}x_{2'}-\theta_{12},$

$R_{1i1}^{i}=\frac{1}{4}x_{1'}(x_{1'}+2\theta_1),\ i>1,\quad R_{2i2}^{i}=\frac{1}{4}x_{2'}(x_{2'}-2\theta_2),\ i\neq 2,$

$R_{ji\gamma}^{i}=\frac{1}{4}x_{j'}x_{\gamma'},\ j=\gamma>2$ o, en otro caso, $j\neq\gamma$, y $i>2$ o $j>2$ o $\gamma>2$,

$R_{121}^{1'}=x_{1'}(x_{1'}+2\theta_1)\theta_{12},\quad R_{122}^{2'}=x_{2'}(x_{2'}-2\theta_2)\theta_{12},$

$R_{121}^{2'} = x_{2'}\theta_{112} - x_{1'}\theta_{122} + (x_{1'}\theta_2 + x_{2'}(x_{1'} + \theta_1))\theta_{12}$,

$R_{122}^{1'} = x_{1'}\theta_{122} - x_{2'}\theta_{112} - (x_{1'}\theta_2 - x_{2'}(x_{1'} - \theta_1))\theta_{12}$,

$R_{1i1}^{2'} = -x_{1'}x_{i'}\theta_{12}$, $i > 2$, $R_{2i2}^{1'} = x_{2'}x_{i'}\theta_{12}$, $i > 2$, $R_{1i2}^{1'} = x_{1'}x_{i'}\theta_{12}$, $i > 2$,

$R_{2i1}^{2'} = -x_{2'}x_{i'}\theta_{12}$, $i > 2$, $R_{12k}^{1'} = x_{1'}x_{k'}\theta_{12}$, $k > 2$, $R_{12k}^{2'} = x_{2'}x_{k'}\theta_{12}$, $k > 2$,

$R_{ii'i}^{i} = -1$, $R_{ii'k}^{k} = -\frac{1}{2}$, $R_{ji'i}^{j} = -\frac{1}{2}$,

$R_{11'1}^{1'} = x_{1'}(x_{1'} + 2\theta_1)$, $R_{11'1}^{2'} = \frac{3}{4}x_{1'}x_{2'} - \theta_{12}$, $R_{22'2}^{2'} = x_{2'}(x_{2'} - 2\theta_2)$,

$R_{22'2}^{1'} = \frac{3}{4}x_{1'}x_{2'} + \theta_{12}$, $R_{11'2}^{1'} = \frac{3}{4}x_{1'}x_{2'} + \theta_{12}$, $R_{22'1}^{2'} = \frac{3}{4}x_{1'}x_{2'} - \theta_{12}$,

$R_{1i'1}^{i'} = \frac{1}{4}x_{1'}(x_{1'} + 2\theta_1)$, $i > 1$, $R_{2i'2}^{i'} = \frac{1}{4}x_{2'}(x_{2'} - 2\theta_2)$, $i \neq 2$,

$R_{ii'i}^{i'} = x_{i'}^2$, $i > 2$, $R_{ii'1}^{1'} = \frac{1}{2}x_{1'}(x_{1'} + 2\theta_1)$, $i > 1$,

$R_{ii'2}^{2'} = \frac{1}{2}x_{2'}(x_{2'} - 2\theta_2)$, $i \neq 2$, $R_{ii'k}^{k'} = \frac{1}{2}x_{k'}^2$, $k > 2$,

$R_{1i'i}^{1'} = \frac{1}{4}x_{1'}(x_{1'} + 2\theta_1)$, $i > 1$, $R_{2i'i}^{2'} = \frac{1}{4}x_{2'}(x_{2'} - 2\theta_2)$, $i \neq 2$,

$R_{\beta i'i}^{\delta'} = \frac{1}{4}x_{\beta'}x_{\delta'}$, $i \neq \beta = \delta > 2$ o, en otro caso, $\beta \neq \delta \neq i \neq \beta$, y $i > 2$ o $\beta > 2$ o $\delta > 2$,

$R_{ii'i}^{h'} = \frac{3}{4}x_{i'}x_{h'}$, $i > 2$ ó $h > 2$, $R_{ii'k}^{i'} = \frac{3}{4}x_{i'}x_{k'}$, $i > 2$ ó $k > 2$,

$R_{ii'k}^{h'} = \frac{1}{2}x_{k'}x_{h'}$, $R_{ji'i}^{i'} = \frac{1}{2}x_{i'}x_{j'}$,

$R_{\beta i'\gamma}^{i'} = \frac{1}{4}x_{\beta'}x_{\gamma'}$, $i \neq \beta = \gamma > 2$ o, en otro caso, $\beta \neq \gamma \neq i \neq \beta$, y $\beta \neq 2$ o $\gamma \neq 2$,

$R_{121'}^{1'} = \frac{1}{4}x_{1'}x_{2'} + \theta_{12}$, $R_{121'}^{2'} = \frac{1}{4}x_{2'}(x_{2'} - 2\theta_2)$, $R_{122'}^{2'} = -\frac{1}{4}x_{1'}x_{2'} + \theta_{12}$,

$R_{1ii'}^{1'} = -\frac{1}{4}x_{1'}(x_{1'} + 2\theta_1)$, $i > 1$, $R_{2ii'}^{2'} = -\frac{1}{4}x_{2'}(x_{2'} - 2\theta_2)$, $i > 2$,

$R_{jii'}^{\delta'} = -\frac{1}{4}x_{j'}x_{\delta'}$, $j = \delta > 2$ o, en otro caso, $j \neq \delta$, y $i > 2$ o $j > 2$ o $\delta > 2$,

$R_{ii'i'}^{i'} = 1$, $R_{ii'k'}^{k'} = \frac{1}{2}$, $R_{ji'j'}^{i'} = \frac{1}{2}$,

añadiendo las simetrías $R_{abc}^{d} = -R_{bac}^{d}$, y donde i, j, k, h son índices diferentes en $\{1, \ldots, n\}$.

Fijémonos que el Teorema 3.5 asegura que $(T^*\mathcal{M}, g)$ es Osserman con autovalores $\{0, 1, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}\}$. Ahora bien, para estudiar la forma canónica de Jordan de los operadores de Jacobi en esta familia concreta de ejemplos, necesitamos más información sobre la estructura de los operadores de Jacobi. El análisis de las interacciones entre las componentes del tensor curvatura anterior nos permite concluir que la información de los operadores de Jacobi se encuentra codificada en el caso $n = 5$. Este es el hecho que mostraremos a continuación:

Lema 3.17.

(1) Sea $p \in T^*\mathcal{M}$. Existe una isometría Θ de $T^*\mathcal{M}$ tal que

$$\Theta p = (a_1, a_2, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, b_3, 0, \ldots, 0)\,.$$

(2) Normalizamos la elección de p como en (1). Sea $\xi \in T_pT^*\mathcal{M}$. Entonces existe una isometría Θ de $T^*\mathcal{M}$ tal que $\Theta p = p$ y tal que

$$\Theta\xi = (c_1, c_2, c_3, c_4, 0, \ldots, 0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, 0, \ldots, 0)\,.$$

(3) Sea (p, ξ) normalizado como en (1) y (2), con ξ espacial. Sea $\mathcal{J}$ el operador de Jacobi definido por (p, ξ). Existe una base $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ de $T_pT^*\mathcal{M}$ tal que si $i \geq 6$, entonces $\mathcal{J}e_i = \frac{1}{4}e_i$ y $\mathcal{J}f_i = \frac{1}{4}f_i$.

Demostración. Consideremos $T^*\mathcal{M} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; si $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ es la base canónica para $\mathbb{R}^{2n}$, entonces se puede expandir $p \in T^*\mathcal{M}$ de la forma $p = x_ie_i + x_{i'}f_i$ para definir coordenadas canónicas (x, x') en $\mathbb{R}^{2n}$ donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $x' = (x_{1'}, \ldots, x_{n'})$. Sea $\Xi \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ una transformación lineal. Expresamos $\Xi = \Xi_{ij}$. Sea $\tilde{\Xi} = \tilde{\Xi}_{ij}$ la transformación lineal inversa. Por tanto $\Xi_{ij}\tilde{\Xi}_{ki} = \delta_{jk}$. Definimos la transformación lineal inducida Θ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ por:

$$\Theta^* x_i = \Xi_{ij}x_j \quad \text{y} \quad \Theta^* x_{i'} = \tilde{\Xi}_{ki}x_{k'}\,.$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Theta^*(dx_i \circ dx_{i'}) &= \Xi_{ij}\tilde{\Xi}_{ki}dx_j \circ dx_{k'} = \delta_{jk}dx_j \circ dx_{k'},\\
\Theta^*(x_{i'}x_{j'}dx_i \circ dx_j) &= \Xi_{ik}\Xi_{j\ell}\tilde{\Xi}_{ui}\tilde{\Xi}_{vj}x_{u'}x_{v'}dx_k \circ dx_\ell\\
&= \delta_{ku}\delta_{\ell v}x_{u'}x_{v'}dx_k \circ dx_\ell = x_{k'}x_{\ell'}dx_k \circ dx_\ell.
\end{aligned}$$

Embebemos $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^{n-2}) \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ sin más que considerar la aplicación

$$\Xi_{n-2} \to \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_2 & 0 \\ 0 & \Xi_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Es entonces inmediato que Ξ_{n-2} define una isometría Θ de la métrica g_{2n}.

Como (1) no tiene sentido para $n < 3$, suponemos $n \geq 3$ en la prueba de (1). Expandimos $p = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$. La transformación afín

$$\Theta(x, x') = (x_1, x_2, x_3 - a_3, \ldots, x_n - a_n, x_{1'}, \ldots, x_{n'})$$

claramente es una isometría de la métrica g y por tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_3 = \cdots = a_n = 0$. Elegimos un vector no nulo $f \in 0 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$ tal que $(x_{3'}, \ldots, x_{n'}) = cf$. Elegimos $\tilde{\Xi}$ de modo que $\tilde{\Xi}f = f_3$. La aplicación resultante Θ tiene las propiedades requeridas en (1).

Supongamos que $n \geq 5$ en la prueba de (2). Expandimos $\xi = (c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n)$. Elegimos un vector no nulo $e \in \mathbb{R}^{n-3}$ tal que $(0, 0, 0, c_4, \ldots, c_n) = c{\cdot}e$ para alguna constante c (pudiendo ser nula). Eligiendo $\Xi \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^{n-4})$ tal que $\Xi e = e_4$ obtenemos una isometría que tiene a p por punto fijo y asegurando que

$$\xi = (c_1, c_2, c_3, c_4, 0, \ldots, 0, d_1, \ldots, d_n)\,.$$

Una elección similar para $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^{n-5})$ asegura que ξ tiene la forma requerida en (2).

Supongamos $n \geq 6$ en la prueba de (3). Supongamos que $i \geq 6$. Expandimos

$$\mathcal{J} e_i = \mathcal{J}_{ki}^{11} e_k + \mathcal{J}_{ki}^{12} f_k \quad \text{y} \quad \mathcal{J} f_i = \mathcal{J}_{ki}^{21} e_k + \mathcal{J}_{ki}^{22} f_k.$$

Definimos $\Xi \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^{n-5})$ tal que

$$\Xi(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{if} \quad j \neq i, \\ -e_j & \text{if} \quad j = i\,. \end{cases}$$

Entonces $\tilde{\Xi} = \Xi$. Puesto que Θ es una isometría fijando el punto p y ξ, conmuta con $\mathcal{J}$. Se sigue entonces que $\mathcal{J}_{ki}^{uv} = 0$ para $k \neq i$. Esto muestra la existencia de los bloques 2×2 requeridos donde los coeficientes pueden depender del índice i. Sin embargo, eligiendo Ξ para que permute los índices i_1 y i_2 se comprueba que los bloques son independientes de i y j. Finalmente, como la variedad es Osserman con autovalores $\{0, 1, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}\}$, estos bloques 2×2 deben tener autovalores constantes $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$, y por tanto la base puede ser elegida de forma que se cumpla la Condición (3). □

El Lema 3.17 muestra que la parte no trivial de la forma canónica de Jordan de los operadores de Jacobi de $(T^*\mathcal{M}, g)$ está codificada en el caso $n = 5$. Más concretamente, sea (p, ξ) normalizado como en (1) y (2) del Lema 3.17, con ξ unitario y espacial, y sea $\mathcal{J}_{2n}$ el operador de Jacobi definido por (p, ξ); entonces, suponiendo $n \geq 6$, existe una base tal que

$$\mathcal{J}_{2n} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{J}_{10} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4}\,\mathrm{Id}_{2n-10} \end{array} \right).$$

Por tanto, el análisis de la forma canónica de Jordan del operador de Jacobi para $(T^*\mathcal{M}, g)$ coincide con el análisis en el caso $n = 5$. Esto nos lleva al siguiente resultado

Teorema 3.18. *$(T^*\mathcal{M}, g)$ es una métrica de Osserman de signatura (n, n) con autovalores $\{0, 1, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}\}$, la cual no es nunca espacial ni temporal Jordan-Osserman en ningún punto.*

Demostración. Como mencionamos anteriormente, es suficiente analizar el caso $n = 5$. Fijémonos además que es suficiente probar el resultado para puntos p normalizados como en (1) del Lema 3.17. Sea $\mathcal{J}_{10}(\xi)$ el operador de Jacobi definido por (p, ξ) y sea

$$\mathcal{A}(\xi) = \mathcal{J}_{10}(\xi) \cdot (\mathcal{J}_{10}(\xi) - g_{10}(\xi, \xi)\,\mathrm{Id}) \cdot \left(\mathcal{J}_{10}(\xi) - \tfrac{g_{10}(\xi,\xi)}{4}\,\mathrm{Id}\right).$$

Para la elección particular de vectores unitarios

$$\tilde{\xi} = (0,0,0,\varepsilon,0,0,0,0,\tfrac{1}{2},0), \quad \bar{\xi} = (1,0,0,1,0,\tfrac{1}{2}(\varepsilon - b_1^2 - 2b_1\theta_1(a_1,a_2)),0,0,0,0),$$

tenemos $g_{10}(\tilde{\xi},\tilde{\xi}) = g_{10}(\bar{\xi},\bar{\xi}) = \varepsilon$, y un cálculo muy largo pero directo usando las expresiones para el tensor curvatura R dadas anteriormente nos permite calcular $\mathcal{J}_{10}(\tilde{\xi})$ y $\mathcal{J}_{10}(\bar{\xi})$ y comprobar que $\mathcal{A}(\tilde{\xi}) = 0$, mientras que $(\mathcal{A}(\bar{\xi}))_{42} = -\frac{3}{16}\theta_{12}(a_1,a_2) \neq 0$. Por tanto, en cada punto $\mathcal{J}_{10}(\tilde{\xi})$ diagonaliza mientras que $\mathcal{J}_{10}(\bar{\xi})$ no es diagonalizable, y así la métrica no es nunca espacial ni temporal Jordan-Osserman en ningún punto. □

Observación 3.19. Mostraremos información adicional sobre la forma canónica de Jordan de los operadores de Jacobi de la variedad $(T^*\mathcal{M}, g)$. Omitiremos los detalles de la prueba de los resultados mostrados en esta observación pues son consecuencia de largos cálculos asistidos por ordenador.

En la demostración del Teorema anterior mostramos que, en cada punto, los operadores de Jacobi pueden diagonalizar o no. Investigaremos más detalladamente la forma canónica de Jordan de los operadores de Jacobi para las direcciones en que no diagonalizan. Para este propósito, consideraremos otra vez el caso $n = 5$. Sean (p,ξ) normalizados como en (1) y (2) del Lema 3.17 y sea

$$\mathcal{A}^r(\xi) = \mathcal{J}_{10}(\xi)\cdot(\mathcal{J}_{10}(\xi) - g_{10}(\xi,\xi)\,\mathrm{Id})\cdot\left(\mathcal{J}_{10}(\xi) - \tfrac{g_{10}(\xi,\xi)}{4}\,\mathrm{Id}\right)^r, \quad r \geq 1.$$

Analizamos a continuación $\mathcal{A}^r(\xi)$, $r = 1,2,3$. De aquí en adelante supondremos que las derivadas parciales de θ se evalúan en (a_1,a_2). Además, sea $\varepsilon_\xi = g_{10}(\xi,\xi)$. En primer lugar, tenemos

$$\mathcal{A}(\xi) = \tfrac{3}{16}\varepsilon_\xi\theta_{12}\left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline T & S^t \end{array}\right),$$

donde, denotando por

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= b_1b_3c_1c_3 + b_2b_3c_2c_3 + b_3^2c_3^2 + 2c_3d_3 + 2c_4d_4 - \varepsilon_\xi,\\
\sigma_2 &= b_1b_3c_1 + b_2b_3c_2 + b_3^2c_3 + d_3,\\
\sigma &= \theta_{12}(3b_1\theta_2 + 3b_2\theta_1 + 4\theta_{12}) - 3b_1\theta_{122} + 3b_2\theta_{112},
\end{aligned}$$

las matrices 5×5 S y T vienen dadas por

$$S = \begin{pmatrix} -c_1c_2(\sigma_1+\varepsilon_\xi) & c_1^2(\sigma_1+\varepsilon_\xi) & 0 & 0 & 0\\ -c_2^2(\sigma_1+\varepsilon_\xi) & c_1c_2(\sigma_1+\varepsilon_\xi) & 0 & 0 & 0\\ -c_2c_3\sigma_1 & c_1c_3\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ -c_2c_4\sigma_1 & c_1c_4\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$T = \begin{pmatrix} \frac{-c_2 t_{11}}{3\varepsilon_\xi \theta_{12}} & \frac{t_{12}}{3\varepsilon_\xi \theta_{12}} & c_2(d_3\sigma_1 + (b_3^2 c_3 + d_3 - \sigma_2)\varepsilon_\xi) & c_2 d_4 \sigma_1 & c_2 d_5 \sigma_1 \\ \frac{t_{21}}{3\varepsilon_\xi \theta_{12}} & \frac{-c_1 t_{22}}{3\varepsilon_\xi \theta_{12}} & -c_1(d_3\sigma_1 + (b_3^2 c_3 + d_3 - \sigma_2)\varepsilon_\xi) & -c_1 d_4 \sigma_1 & -c_1 d_5 \sigma_1 \\ c_2\sigma_1\sigma_2 & -c_1\sigma_1\sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 d_4 \sigma_1 & -c_1 d_4 \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 d_5 \sigma_1 & -c_1 d_5 \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} t_{11} = {} & c_2\sigma + 4c_2\theta_{12}^2\{1 + 3\sigma_1^2 + 2\varepsilon_\xi(b_3^2 c_3^2 - 2c_4 d_4 + 2\sigma_1 - 2c_3\sigma_2)\} \\ & - 3\theta_{12}\{b_1(b_1c_1 + b_2c_2 + 2b_3c_3) + \varepsilon_\xi\sigma_1(b_1(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) + 2d_1) \\ & \qquad + 2d_1 + 2b_1c_1(1 + \varepsilon_\xi\sigma_1)\theta_1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{22} = {} & c_1\sigma + 4c_1\theta_{12}^2\{1 + 3\sigma_1^2 + 2\varepsilon_\xi(b_3^2 c_3^2 - 2c_4 d_4 + 2\sigma_1 - 2c_3\sigma_2)\} \\ & + 3\theta_{12}\{b_2(b_1c_1 + b_2c_2 + 2b_3c_3) + \varepsilon_\xi\sigma_1(b_2(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) + 2d_2) \\ & \qquad + 2d_2 - 2b_2c_2(1 + \varepsilon_\xi\sigma_1)\theta_2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{12} = {} & c_1c_2\sigma + 4c_1c_2\theta_{12}^2\{1 + 3\sigma_1^2 + 2\varepsilon_\xi(b_3^2 c_3^2 - 2c_4 d_4 + 2\sigma_1 - 2c_3\sigma_2)\} \\ & + 3\theta_{12}\{b_1b_2c_1c_2 + \varepsilon_\xi\sigma_1(b_1b_2c_1c_2 + c_1d_1 + c_2(b_2^2c_2 + b_2b_3c_3 + 3d_2) + \sigma_1) \\ & \qquad + c_1d_1 + c_2(b_2^2c_2 + 2b_2b_3c_3 + 3d_2) + \sigma_1 - 2b_2c_2^2(1 + \varepsilon_\xi\sigma_1)\theta_2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_{21} = {} & t_{12} + 3\theta_{12}\{b_3^2c_3^2 - 2(c_1d_1 + c_2d_2 + c_4d_4 + c_3\sigma_2) \\ & \qquad - \varepsilon_\xi(\sigma_1(2c_1d_1 + 2c_2d_2 + \sigma_1) - 1)\}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\mathcal{A}^2(\xi) = \tfrac{3}{8}\varepsilon_\xi\,\theta_{12}^2\,\psi \left(\begin{array}{ccccc|c} & & 0 & & & 0 \\ \hline c_2^2 & -c_1c_2 & 0 & 0 & 0 & \\ -c_1c_2 & c_1^2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right),$$

donde

$$\begin{aligned} \psi = {} & b_3^2c_3^2\{c_1d_1 + c_2d_2 - c_3d_3 - c_4d_4 + b_1c_1^2\theta_1 - b_2c_2^2\theta_2\} \\ & - (2c_3d_3 + 2c_4d_4 - \varepsilon_\xi)\{b_3c_3(b_1c_1 + b_2c_2) + (c_3d_3 + c_4d_4)\}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\mathcal{A}^3(\xi) = 0.$$

Por lo tanto, vemos que $\mathcal{A}^3(\xi) = 0$, Rango$(\mathcal{A}(\xi)^2) \leq 1$, y Rango$(\mathcal{A}(\xi)) \leq 2$. Entonces, el operador de Jacobi asociado a un vector unitario es o bien diagonalizable, o bien tiene un sólo bloque de Jordan 2×2, o bien tiene un bloque de Jordan 3×3, o bien tiene dos bloques de Jordan 2×2 dependiendo del punto y del vector considerados. Además, todas las posibilidades pueden darse; de hecho, todas las posibilidades excepto el caso de un único bloque de Jordan 2×2 puede darse en cada punto. En particular, suponiendo que los puntos y los vectores considerados están normalizados como en (1) y (2) del Lema 3.17, suponiendo que las derivadas parciales de θ se evalúan en (a_1, a_2), y denotando por

$$\begin{aligned}\psi = b_3^2 c_3^2 \{c_1 d_1 + c_2 d_2 - c_3 d_3 - c_4 d_4 + b_1 c_1^2 \theta_1 - b_2 c_2^2 \theta_2\} \\ - (2c_3 d_3 + 2c_4 d_4 - \varepsilon_\xi)\{b_3 c_3 (b_1 c_1 + b_2 c_2) + (c_3 d_3 + c_4 d_4)\},\end{aligned}$$

tenemos:

(i) Si $\psi \neq 0$ y $c_1 = c_2 = 0$ no se cumple, entonces el operador de Jacobi asociado tiene un bloque de Jordan 3×3. Este es, por ejemplo, el caso para el vector unitario $\xi = (1, 0, 0, 1, 0, \frac{1}{2}(\varepsilon - b_1^2 - 2b_1\theta_1 - 2), 0, 0, 1, 0)$, $g_{10}(\xi, \xi) = \varepsilon$, en cualquier punto.

(ii) Si $c_1 = c_2 = 0$, entonces el operador de Jacobi asociado es diagonalizable. Este es el caso para $\xi = (0, 0, 0, \varepsilon, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0)$, $g_{10}(\xi, \xi) = \varepsilon$, en cualquier punto.

(iii) Si $\psi = 0$ y, además, $c_1 = c_2 = 0$ no se verifica, entonces para los vectores unitarios de la forma $\xi = (c_1, c_2, 0, 0, 0, d_1, d_2, -b_3(b_1 c_1 + b_2 c_2), 0, 0)$ el operador de Jacobi asociado es diagonalizable o tiene un único bloque de Jordan 2×2, dependiendo de que

$$\sigma = \theta_{12}(3b_1\theta_2 + 3b_2\theta_1 + 4\theta_{12}) - 3b_1\theta_{122} + 3b_2\theta_{112}$$

se anule o no, respectivamente. El operador de Jacobi asociado a cualquier otro vector unitario tiene siempre dos bloques de Jordan 2×2; este es el caso para el vector unitario $\xi = (1, 0, 0, 1, 0, \frac{1}{2}(\varepsilon - b_1^2 - 2b_1\theta_1), 0, 0, 0, 0)$, $g_{10}(\xi, \xi) = \varepsilon$, en cualquier punto. Finalmente, en cualquier punto con $\sigma = 0$ el operador de Jacobi no tiene nunca un único bloque de Jordan 2×2.

Capítulo 4

El operador de curvatura antisimétrico: variedades Ivanov-Petrova

Recordamos que una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) se dice *espacial* (respectivamente, *temporal* o *mixta*) *Ivanov-Petrova* (IP) en un punto $p \in M$ [112, 113] si los autovalores del operador de curvatura antisimétrico son constantes en la Grassmaniana de 2-planos orientados, no degenerados, espaciales $Gr_2^{(++)}(T_pM)$ (respectivamente, temporales $Gr_2^{(--)}(T_pM)$ o mixtos $Gr_2^{(+-)}(T_pM)$). Teniendo en cuenta que las tres condiciones anteriores son equivalentes [93], simplemente nos referiremos a ellas diciendo que la variedad (M, g) es IP en el punto $p \in M$. (M, g) se dice que es IP si verifica tal condición en cada punto, pudiendo los autovalores de los operadores de curvatura antisimétricos variar con el punto.

Toda variedad Riemanniana IP es localmente conformemente llana, por lo que una primera cuestión natural a abordar es si un resultado análogo sigue siendo cierto en otras signaturas. La existencia de tensores curvatura algebraicos IP no localmente conformemente llanos es conocida [93], pero la realización geométrica de los mismos es una cuestión abierta. En la primera parte de este capítulo mostraremos la existencia de variedades IP que no son localmente conformemente llanas en dimensión cuatro. De hecho existen ejemplos que no son autoduales ni antiautoduales como veremos en la Sección 4.1.

Motivados por estos ejemplos analizaremos las variedades IP autoduales en signatura $(2, 2)$, al menos en dos situaciones particulares: cuando la métrica sea Einstein y cuando la estructura subyacente sea la de una variedad de Walker. El primero de estos casos será el objetivo de la segunda parte de este capítulo, donde realizamos un estudio sistemático de las variedades que verifican simultáneamente las condiciones IP y puntual Osserman en signatura $(2, 2)$ en la Sección 4.2.

4.1. Nuevos ejemplos de variedades IP en dimensión cuatro

El objetivo de esta sección es poner de manifiesto la existencia de variedades IP en signatura $(2,2)$ cuyos operadores de curvatura antisimétricos son nilpotentes. Además, los ejemplos construidos mostrarán la existencia de variedades IP que no son autoduales ni antiautoduales. Dichos ejemplos tendrán como estructura subyacente la de una variedad de Walker, por lo que haremos uso de la expresión local dada en el Teorema 1.3.

4.1.1. Caracterización algebraica

El siguiente resultado proporciona un criterio sencillo para determinar cuando un tensor curvatura algebraico es IP en dimensión cuatro.

Lema 4.1. [39] *Sea $(V, \langle\, , \,\rangle)$ un espacio vectorial de dimensión cuatro con un producto interior de signatura $(2,2)$ y sea A un tensor curvatura algebraico en V. Entonces, A es IP si y sólo si $\det \mathcal{A}(\pi)$ y $\operatorname{traza}(\mathcal{A}(\pi)^2)$ no dependen del 2-plano orientado no degenerado espacial (respectivamente mixto o temporal) π.*

Demostración. Tomando un 2-plano orientado no degenerado π se puede ver fácilmente que el operador de curvatura antisimétrico $\mathcal{A}(\pi)$, cuando se expresa con respecto a una base ortonormal, toma la forma

$$\mathcal{A}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}(\pi) & a_{13}(\pi) & a_{14}(\pi) \\ -a_{12}(\pi) & 0 & a_{23}(\pi) & a_{24}(\pi) \\ a_{13}(\pi) & a_{23}(\pi) & 0 & a_{34}(\pi) \\ a_{14}(\pi) & a_{24}(\pi) & -a_{34}(\pi) & 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto mediante un cálculo simple se obtiene que

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A}(\pi) &= \left(a_{12}(\pi)a_{34}(\pi) + a_{13}(\pi)a_{24}(\pi) - a_{14}(\pi)a_{23}(\pi)\right)^2, \\ \operatorname{traza}(A(\pi)^2) &= 2\left(-a_{12}(\pi)^2 + a_{13}(\pi)^2 + a_{14}(\pi)^2 + a_{23}(\pi)^2 + a_{24}(\pi)^2 - a_{34}(\pi)^2\right) \end{aligned}$$

por lo que el polinomio característico $p_\lambda(\mathcal{A}(\pi))$ de $\mathcal{A}(\pi)$ está dado por

$$p_\lambda(\mathcal{A}(\pi)) = \lambda^4 - \frac{1}{2}\operatorname{traza}(\mathcal{A}(\pi)^2)\ \lambda^2 + \det \mathcal{A}(\pi), \tag{4.1}$$

de donde se sigue el resultado. □

4.1.2. Métricas de Walker IP en dimensión cuatro

Sea (M, g) una variedad de Walker de dimensión cuatro y donde la dimensión de la distribución $\mathfrak{D}$ es máxima, en este caso dos. De acuerdo con la Observación 1.4, la matriz de la métrica viene dada por

$$(4.2)\qquad g = \begin{pmatrix} a & c & 1 & 0 \\ c & b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde a, b y c son funciones de las coordenadas $(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'})$. Consideramos el caso particular en el que $c \equiv 0$ y por tanto la métrica toma la forma

$$(4.3)\qquad g = a\, dx_1 \circ dx_1 + b\, dx_2 \circ dx_2 + 2dx_1 \circ dx_{1'} + 2dx_2 \circ dx_{2'}.$$

la cual nos proporcionará los ejemplos deseados (más información sobre la geometría de este tipo de métricas puede verse en [46]).

Lema 4.2. *Si una métrica de Walker de signatura $(2,2)$ del tipo dado en la Ecuación (4.3) es IP entonces es nilpotente IP y las funciones a, b vienen dadas por*

$$a(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) = x_{1'} S(x_1, x_2) + A(x_1, x_2, x_{2'}),$$
$$b(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) = x_{2'} V(x_1, x_2) + B(x_1, x_2, x_{1'}),$$

donde $A_{2'2'}(x_1, x_2, x_{2'}) B_{1'1'}(x_1, x_2, x_{1'}) = 0$.

Demostración. Denotemos con h_i la derivada parcial $\frac{\partial h}{\partial x_i}$, $i \in \{1, 2, 1', 2'\}$, de una función $h(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'})$. El tensor curvatura de la métrica dada por la Ecuación (4.3) está determinado del siguiente modo sin más que particularizar lo visto en el Lema 1.6:

$$R_{11'1'} = \tfrac{1}{2} a_{1'1'} \partial_{1'},$$

$$R_{11'2'} = \tfrac{1}{2} a_{1'2'} \partial_{1'},$$

$$R_{11'2} = \tfrac{1}{4} \{2a_{1'2} - a_{2'} b_{1'}\} \partial_{1'},$$

$$R_{11'1} = \tfrac{1}{2} a a_{1'1'} \partial_{1'} + \tfrac{1}{4} \{a_{2'} b_{1'} - 2a_{1'2} + 2b a_{1'2'}\} \partial_{2'} - \tfrac{1}{2} a_{1'1'} \partial_1 - \tfrac{1}{2} a_{1'2'} \partial_2,$$

$$R_{21'1'} = \tfrac{1}{2} b_{1'1'} \partial_{2'},$$

$$R_{21'2'} = \tfrac{1}{2} b_{1'2'} \partial_{2'},$$

$$R_{21'1} = \tfrac{1}{4} \{2b_{1'1} - a_{1'} b_{1'}\} \partial_{2'},$$

$$R_{21'2} = \tfrac{1}{4} \{2a b_{1'1'} - 2b_{1'1} + a_{1'} b_{1'}\} \partial_{1'} + \tfrac{1}{2} b b_{1'2'} \partial_{2'} - \tfrac{1}{2} b_{1'1'} \partial_1 - \tfrac{1}{2} b_{1'2'} \partial_2,$$

$$R_{12'1'} = \tfrac{1}{2} a_{1'2'} \partial_{1'},$$

$$R_{12'2'} = \tfrac{1}{2} a_{2'2'} \partial_{1'},$$

$$R_{12'2} = \tfrac{1}{4} \{2a_{2'2} - a_{2'} b_{2'}\} \partial_{1'},$$

$$R_{12'1} = \tfrac{1}{2} a a_{1'2'} \partial_{1'} + \tfrac{1}{4} \{a_{2'} b_{2'} - 2a_{2'2} + 2b a_{2'2'}\} \partial_{2'} - \tfrac{1}{2} a_{1'2'} \partial_1 - \tfrac{1}{2} a_{2'2'} \partial_2,$$

$$
\begin{aligned}
R_{22'1'} &= \tfrac{1}{2} b_{1'2'} \partial_{2'}, \\
R_{22'2'} &= \tfrac{1}{2} b_{2'2'} \partial_{2'}, \\
R_{22'1} &= \tfrac{1}{4}\{2b_{2'1} - a_{2'} b_{1'}\}\partial_{2'}, \\
R_{22'2} &= \tfrac{1}{4}\{2ab_{1'2'} - 2b_{2'1} + a_{2'}b_{1'}\}\partial_{1'} + \tfrac{1}{2} b b_{2'2'}\partial_{2'} - \tfrac{1}{2} b_{1'2'}\partial_1 - \tfrac{1}{2} b_{2'2'}\partial_2, \\
R_{211'} &= \tfrac{1}{4}\{a_{2'}b_{1'} - 2a_{1'2}\}\partial_{1'} + \tfrac{1}{4}\{2b_{1'1} - a_{1'}b_{1'}\}\partial_{2'}, \\
R_{212'} &= \tfrac{1}{4}\{a_{2'}b_{2'} - 2a_{2'2}\}\partial_{1'} + \tfrac{1}{4}\{2b_{2'1} - a_{2'}b_{1'}\}\partial_{2'}, \\
R_{211} &= \tfrac{1}{4} a\{a_{2'}b_{1'} - 2a_{1'2}\}\partial_{1'} + \tfrac{1}{4}\{a_2 b_{2'} + 2a_{22} + 2b_{11} - b_2 a_{2'} - 2ba_{2'2} \\
&\qquad + b_1 a_{1'} - a_1 b_{1'} - a a_{1'} b_{1'}\}\partial_{2'} + \tfrac{1}{4}\{2a_{1'2} - a_{2'}b_{1'}\}\partial_1 \\
&\qquad + \tfrac{1}{4}\{2a_{2'2} - a_{2'}b_{2'}\}\partial_2, \\
R_{212} &= \tfrac{1}{4}\{2ab_{1'1} + a_1 b_{1'} - 2a_{22} - 2b_{11} + b_2 a_{2'} - a_2 b_{2'} + b a_{2'} b_{2'} - b_1 a_{1'}\}\partial_{1'} \\
&\qquad + \tfrac{1}{4} b\{2b_{2'1} - a_{2'}b_{1'}\}\partial_{2'} + \tfrac{1}{4}\{a_{1'}b_{1'} - 2b_{1'1}\}\partial_1 + \tfrac{1}{4}\{a_{2'}b_{1'} - 2b_{2'1}\}\partial_2,
\end{aligned}
$$

donde $R_{ijk} = R(\partial_i, \partial_j)\partial_k$, $i, j, k \in \{1, 2, 1', 2'\}$, con $\{\partial_1, \partial_2, \partial_{1'}, \partial_{2'}\}$ campos coordenados.

A partir de las expresiones anteriores obtenemos que el operador de curvatura antisimétrico $\mathcal{R}(\pi)$ asociado a un 2-plano orientado no degenerado π, cuando se expresa con respecto a la base de campos coordenados, tiene la forma

$$
\mathcal{R}(\pi) = \begin{pmatrix} F(\pi) & 0 \\ G(\pi) & -{}^tF(\pi) \end{pmatrix},
$$

para ciertas matrices cuadradas de orden 2, $F(\pi)$ y $G(\pi)$. Entonces, para usar el Lema 4.1, nótese que $\det \mathcal{R}(\pi) = (\det F(\pi))^2$, mientras que $\mathrm{traza}(\mathcal{R}(\pi)^2) = 2\,\mathrm{traza}(F(\pi)^2)$, con lo que una métrica del tipo dado por la Ecuación (4.3) es IP si y sólo si $\det F(\pi)$ y $\mathrm{traza}(F(\pi)^2)$ no dependen del 2-plano orientado no degenerado espacial (respectivamente, temporal o mixto) π. De aquí en adelante, sea

$$
F(\pi) = \begin{pmatrix} f_{11}(\pi) & f_{12}(\pi) \\ f_{21}(\pi) & f_{22}(\pi) \end{pmatrix}.
$$

Para imponer la condición IP analizaremos algunos casos particulares de 2-planos no degenerados mixtos. Empezando con $\pi_1 = \langle\{\partial_{1'} + \lambda\partial_{2'}, \partial_1\}\rangle$, tenemos que

$$
f_{11}(\pi_1) = \tfrac{1}{2}(\lambda a_{1'2'} + a_{1'1'}),\ f_{21}(\pi_1) = \tfrac{1}{2}(\lambda a_{2'2'} + a_{1'2'}),\ f_{12}(\pi_1) = f_{22}(\pi_1) = 0,
$$

con lo que,

$$
\det F(\pi_1) = 0, \qquad \mathrm{traza}(F(\pi_1)^2) = \tfrac{1}{4}(\lambda a_{1'2'} + a_{1'1'})^2,
$$

de donde obtenemos que $a_{1'2'} = 0$ y esto se traduce en que

$$a(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) = \bar{A}(x_1, x_2, x_{1'}) + A(x_1, x_2, x_{2'}).$$

Por tanto, traza$(F(\pi_1)^2) = \frac{1}{4}\bar{A}^2_{1'1'}$, lo que implica que $\bar{A}_{1'1'}$ ha de ser constante, digamos κ_1, y

$$a(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) = x_{1'}^2\tfrac{\kappa_1}{2} + x_{1'}S(x_1, x_2) + A(x_1, x_2, x_{2'}). \tag{4.4}$$

Usando el mismo argumento con $\pi_2 = \langle\{\lambda\partial_{1'} + \partial_{2'}, \partial_2\}\rangle$ tenemos que

$$b(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) = x_{2'}^2\tfrac{\kappa_2}{2} + x_{2'}V(x_1, x_2) + B(x_1, x_2, x_{1'}), \tag{4.5}$$

con traza$(F(\pi_2)^2) = \frac{1}{4}\kappa_2^2$.
Tomando ahora el plano $\pi_3 = \langle\{\partial_{1'} - \partial_{2'}, \partial_{2'} - \partial_1 + \partial_2\}\rangle$ obtenemos

$$f_{11}(\pi_3) = -\tfrac{1}{4}\kappa_1,\ f_{21}(\pi_3) = \tfrac{1}{4}A_{2'2'},\ f_{12}(\pi_3) = \tfrac{1}{4}B_{1'1'},\ f_{22}(\pi_3) = -\tfrac{1}{4}\kappa_2,$$

con lo que $\det F(\pi_3) = \frac{1}{16}(\kappa_1\kappa_2 - A_{2'2'}B_{1'1'})$. Como $\det F(\pi_3)$ tiene que ser nulo obtenemos

$$A_{2'2'}(x_1, x_2, x_{2'})B_{1'1'}(x_1, x_2, x_{1'}) = \kappa_1\kappa_2. \tag{4.6}$$

Demostraremos a continuación que $\kappa_1\kappa_2 = 0$. Para ello utilizaremos un argumento de reducción al absurdo, suponiendo que $\kappa_1\kappa_2 \neq 0$. Si $\kappa_1\kappa_2 \neq 0$, entonces la Ecuación (4.6) implica que $A_{2'2'2'} = B_{1'1'1'} = 0$ y por tanto

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_{2'}) &= x_{2'}^2P(x_1, x_2) + x_{2'}T(x_1, x_2) + \xi(x_1, x_2),\\ B(x_1, x_2, x_{1'}) &= x_{1'}^2Q(x_1, x_2) + x_{1'}U(x_1, x_2) + \eta(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{4.7}$$

con $PQ \neq 0$. Teniendo en cuenta la información obtenida en las Ecuaciones (4.4), (4.5) y (4.7), un cálculo largo pero directo muestra que para $\pi_4 = \langle\{\frac{1-a}{2}\partial_{1'} + \partial_1, -\frac{1+b}{2}\partial_{2'} + \partial_2\}\rangle$ se tiene

$$\begin{aligned} f_{11}(\pi_4) &= \tfrac{1}{4}\{(2x_{2'}P + T)(2x_{1'}Q + U) - 2S_2\},\\ f_{12}(\pi_4) &= -\tfrac{1}{4}\{U(x_{1'}\kappa_1 + S) - 2(2x_{1'}Q_1 + U_1)\\ &\qquad + Q(3x_{1'}^2\kappa_1 + 2x_{2'}(T + x_{2'}P) + 4x_{1'}S + 2\xi - 2)\},\\ f_{21}(\pi_4) &= \tfrac{1}{4}\{T(x_{2'}\kappa_2 + V) - 2(2x_{2'}P_2 + T_2)\\ &\qquad + P(3x_{2'}^2\kappa_2 + 2x_{1'}(U + x_{1'}Q) + 4x_{2'}V + 2\eta + 2)\},\\ f_{22}(\pi_4) &= -\tfrac{1}{4}\{(2x_{2'}P + T)(2x_{1'}Q + U) - 2V_1\}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

de donde se sigue que $\partial_{1'}\partial_{1'}\partial_{1'}\partial_{1'}(\text{traza}(F(\pi_4)^2)) = -18PQ^2\kappa_1$; así, $PQ\kappa_1 = 0$, lo cual es una contradicción puesto que $PQ \neq 0$.

El anterior argumento muestra que si la métrica dada por la Ecuación (4.3) es IP, entonces tiene que ser nilpotente IP y, además,

$$\begin{aligned} a(x_1,x_2,x_{1'},x_{2'}) &= x_{1'}S(x_1,x_2)+A(x_1,x_2,x_{2'}),\\ b(x_1,x_2,x_{1'},x_{2'}) &= x_{2'}V(x_1,x_2)+B(x_1,x_2,x_{1'}), \end{aligned} \tag{4.9}$$

con

$$A_{2'2'}(x_1,x_2,x_{2'})B_{1'1'}(x_1,x_2,x_{1'})=0. \tag{4.10}$$

□

Observación 4.3. Con la intención de conseguir los ejemplos buscados, consideraremos soluciones particulares de las Ecuaciones (4.9) y (4.10). Sean

$$\begin{aligned} a(x_1,x_2,x_{1'},x_{2'}) &= x_{2'}^2P(x_1,x_2)+x_{1'}S(x_1,x_2)+x_{2'}T(x_1,x_2)+\xi(x_1,x_2),\\ b(x_1,x_2,x_{1'},x_{2'}) &= x_{1'}^2Q(x_1,x_2)+x_{1'}U(x_1,x_2)+x_{2'}V(x_1,x_2)+\eta(x_1,x_2), \end{aligned} \tag{4.11}$$

con $P\neq 0$ y $Q=0$ (un estudio similar se puede realizar suponiendo $P=0$ y $Q\neq 0$).

En primer lugar, nótese que estas métricas no son *nunca autoduales* (comparando la Ecuación (4.11) con las expresiones dadas en la Ecuación (1.11)).

Por otro lado, para cualquier 2-plano $\pi=\langle\{u,v\}\rangle$, con

$$\{u=u_1\partial_1+u_2\partial_2+u_3\partial_{1'}+u_4\partial_{2'},v=v_1\partial_1+v_2\partial_2+v_3\partial_{1'}+v_4\partial_{2'}\}$$

una base ortonormal, se puede calcular

$$\begin{aligned} f_{11}(\pi) &= -\tfrac14(u_2v_1-u_1v_2)\{(2x_{2'}P+T)U-2S_2\},\\ f_{12}(\pi) &= -\tfrac14(u_2v_1-u_1v_2)(2U_1-SU),\\ f_{21}(\pi) &= -\tfrac14\{(u_2v_1-u_1v_2)(2x_{2'}PV-2(2x_{2'}P_2+T_2)+TV)\\ &\qquad +4P(u_1v_4-u_4v_1)\},\\ f_{22}(\pi) &= \tfrac14(u_2v_1-u_1v_2)\{(2x_{2'}P+T)U-2V_1\}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

obteniéndose que $\partial_{2'}\partial_{2'}(\mathrm{traza}(F(\pi)^2))=(u_2v_1-u_1v_2)^2P^2U^2$. Así $U=0$, y bajo esta última condición se comprueba que

$$\det F(\pi)=-\tfrac14(u_2v_1-u_1v_2)^2S_2V_1,\quad \mathrm{traza}(F(\pi)^2)=\tfrac14(u_2v_1-u_1v_2)^2(S_2^2+V_1^2),$$

con lo que la condición de ser IP es equivalente a $S_2=V_1=0$.

Con lo cual, asumiendo $Q=0$, hemos probado que la métrica determinada por la Ecuación (4.11) es IP si y sólo si

$$\begin{aligned} a(x_1,x_2,x_{1'},x_{2'}) &= x_{2'}^2P(x_1,x_2)+x_{1'}S(x_1)+x_{2'}T(x_1,x_2)+\xi(x_1,x_2),\\ b(x_1,x_2,x_{1'},x_{2'}) &= x_{2'}V(x_2)+\eta(x_1,x_2), \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $P \neq 0$ es una función diferenciable y S, T, V, ξ y η son funciones diferenciables arbitrarias.

Un cálculo directo muestra que la métrica determinada por la Ecuación (4.13) es Einstein si y sólo si $\eta(x_1, x_2) = \frac{2T_2 - TV}{2P}$ y $P_2 = PV$.

Las métricas determinadas por la Ecuación (4.13) proporcionan una familia de métricas IP 4-dimensionales que no son nunca localmente conformemente llanas en contraposición con lo que ocurre en el caso Riemanniano; además de no ser en general Einstein y nunca autoduales.

Observación 4.4. El análisis de la condición antiautodual es mucho más complicado (ver [74]). Aún así, es posible obtener casos particulares de las métricas dadas por las Ecuaciones (4.9) y (4.10) que sean IP pero nunca Einstein, ni autoduales ni antiautoduales.

Un cálculo directo, usando la caracterización de métricas de Walker autoduales en [74], muestra que tomando

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) &= x_{2'}^2 P(x_1) + x_{1'} S(x_1) + x_{2'} T(x_1, x_2) + \xi(x_1, x_2), \\ b(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) &= x_{2'} \kappa + \eta(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{4.14}$$

donde $P \neq 0$ es una función diferenciable, $\kappa \neq 0$ es un número real y S, T, ξ y η son funciones arbitrarias diferenciables, obtenemos métricas 4-dimensionales *IP que no son nunca Einstein ni autoduales y, además, no son antiautoduales.*

4.2. Variedades Osserman-IP en signatura $(2,2)$

Es evidente que todo espacio de curvatura seccional constante es Osserman-IP. Se conoce la existencia de métricas IP que son Osserman con operadores de Jacobi nilpotentes en dos pasos (ver por ejemplo [99]), y además se conocen variedades 4-dimensionales de Osserman que no son IP [74, 75].

En primer lugar abordaremos el problema a nivel algebraico, dando una descripción completa de todos los tensores curvatura algebraicos que verifican las condiciones de ser IP, Einstein y autoduales. Posteriormente, la segunda identidad de Bianchi nos permitirá dar una descripción de tales variedades, como se recoge en el Teorema 4.12.

4.2.1. Tensores curvatura algebraicos Osserman-IP en signatura $(2,2)$

En lo que sigue aplicaremos reiteradamente el Lema 4.1 a los distintos tensores curvatura algebraicos correspondientes a las formas de Jordan de los operadores de Jacobi descritos en la Ecuación (2.1), obteniendo el siguiente resultado:

Teorema 4.5. *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión cuatro dotado de un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de signatura $(2,2)$, y sea A un tensor curvatura algebraico en V. Entonces, A es Osserman-IP si y sólo se cumple una de las siguientes condiciones:*

(1) Los operadores de Jacobi son diagonalizables y

(1.i) $A = \kappa A^0$ *para cualquier constante* κ*, es decir, la curvatura seccional de* A *es constante.*

(1.ii) Existe una estructura compleja ortogonal J *en* $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *que permite expresar* $A = \kappa(A^0 - \frac{1}{2}A^J)$*, siendo* $\kappa \neq 0$ *constante.*

(1.iii) Existe una estructura adaptada paracompleja $\mathfrak{J}$ *en* $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *de tal forma que* $A = \kappa(A^0 + \frac{1}{2}A^{\mathfrak{J}})$*, siendo* $\kappa \neq 0$ *constante.*

(2) Los operadores de Jacobi son nilpotentes en dos pasos. En tal caso existe una estructura nula $\mathcal{N}$ *antisimétrica (i.e.,* $\mathcal{N}^2 = 0$ *y* $\langle \mathcal{N}x, y \rangle + \langle x, \mathcal{N}y \rangle = 0$*) de tal forma que* $A = \kappa A^{\mathcal{N}}$*, siendo* $\kappa \neq 0$ *constante.*

Operadores de Jacobi diagonalizables: Tipo Ia

Comenzaremos el estudio de los tensores curvatura algebraicos con el caso en el que el operador de Jacobi es de Tipo Ia. En este apartado tomaremos x un vector unitario temporal, con operador de Jacobi asociado

$$\mathcal{J}_A(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

y supondremos que el autoespacio $\ker(\mathcal{J}_A(x) - \alpha \,\mathrm{Id})$ es temporal. En lo que sigue probaremos el siguiente resultado.

Teorema 4.6. *Sea* $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *un espacio vectorial de dimensión cuatro dotado de un producto interior* $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ *de signatura* $(2, 2)$*, y sea* A *un tensor curvatura algebraico en* V*. Entonces,* A *es Osserman-IP con operadores de Jacobi diagonalizables si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones:*

(i) $A = \kappa A^0$ *siendo* κ *constante, es decir, la curvatura seccional de* A *es constante.*

(ii) Existe una estructura compleja ortogonal J *en* $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *de modo que* $A = \kappa(A^0 - \frac{1}{2}A^J)$*, siendo* $\kappa \neq 0$ *constante.*

(iii) Existe una estructura paracompleja adaptada $\mathfrak{J}$ *en* $(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ *tal que* $A = \kappa(A^0 + \frac{1}{2}A^{\mathfrak{J}})$*, siendo* $\kappa \neq 0$ *constante.*

Demostración. Para probar este resultado, distinguiremos varios casos dependiendo del número de diferentes autovalores de los operadores de Jacobi diagonalizables.

Todos los autovalores son iguales. Si los tres autovalores son iguales ($\alpha = \beta = \gamma$), entonces $A = \kappa A^0$ para alguna constante κ. Además, para cualquier 2-plano orientado no degenerado temporal π, $\mathcal{A}(\pi)$ tiene autovalores constantes $\{0, 0, \pm\kappa\, i\}$, lo que demuestra que A es IP, probando el caso (i).

Dos autovalores distintos. En este caso existen dos posibilidades dependiendo de la causalidad del autoespacio $\ker(\mathcal{J}_A(x) - \alpha \operatorname{Id})$. Empezamos con el caso $\beta = \gamma$. Como el autoespacio $\ker(\mathcal{J}_A(x) - \alpha \operatorname{Id})$ tiene la misma causalidad que x podemos definir una estructura compleja J que nos lleva a expresar el tensor curvatura algebraico A como

$$A = \kappa_1 A^0 + \kappa_2 A^J, \quad \kappa_2 \neq 0. \tag{4.15}$$

Destacar que para definir la estructura compleja J, es suficiente fijar $\{x, x_\alpha, x_\beta, \bar{x}_\beta\}$ una base ortonormal del espacio vectorial V, donde $x_\nu, \bar{x}_\nu \in \ker(\mathcal{J}_A(x) - \nu \operatorname{Id})$, $\nu = \alpha, \beta$, y considerar la estructura compleja definida por $Jx = x_\alpha$, $Jx_\beta = \bar{x}_\beta$.

Analizaremos ahora las condiciones para que el tensor curvatura algebraico, A, definido por la Ecuación (4.15) sea IP. Para ello, consideramos un 2-plano orientado no degenerado y mixto π y tomamos una base ortonormal $\{x, y\}$ para este plano. En lo que sigue fijamos la base ortonormal $\{e_1 = x, e_2 = Jx, e_3, e_4 = Je_3\}$ para el espacio V de tal forma que $y = (\sinh \varphi_0)Jx + (\cosh \varphi_0)e_3$ para alguna constante φ_0. Tomando la familia de 2-planos no degenerados, orientados y mixtos $\pi_\varphi = \langle\{x, (\sinh \varphi)Jx + (\cosh \varphi)e_3\}\rangle$, un cálculo directo usando la Ecuación (4.15) muestra que $\mathcal{A}(\pi_\varphi)$, cuando se expresa con respecto a la base ortonormal fijada, toma la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & (\kappa_1 + 3\kappa_2)\sinh \varphi & -\kappa_1 \cosh \varphi & 0 \\ -(\kappa_1 + 3\kappa_2)\sinh \varphi & 0 & 0 & -\kappa_2 \cosh \varphi \\ -\kappa_1 \cosh \varphi & 0 & 0 & 2\kappa_2 \sinh \varphi \\ 0 & -\kappa_2 \cosh \varphi & -2\kappa_2 \sinh \varphi & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Por tanto se sigue que $\partial_\varphi \left(\operatorname{traza}(\mathcal{A}(\pi_\varphi)^2)\right) = -12\kappa_2(\kappa_1 + 2\kappa_2)\sinh(2\varphi)$, y como se debe anular y $\kappa_2 \neq 0$, concluimos que $\kappa_1 = -2\kappa_2$. Finalmente, bajo esta condición, podemos calcular los autovalores de $\mathcal{A}(\pi)$, obteniendo $\{\pm\kappa_2, \pm 2\kappa_2\}$. Puesto que el plano π fue elegido arbitrariamente, hemos demostrado que el tensor curvatura algebraico A es IP cuando tiene la forma $A = -2\kappa_2(A^0 - \frac{1}{2}A^J)$.

Una situación diferente ocurre cuando $\alpha = \beta$ (equivalentemente, $\alpha = \gamma$) pues en este caso el autoespacio distinguido $\ker(\mathcal{J}_A(x) - \gamma \operatorname{Id})$ tiene causalidad opuesta a la de x. Entonces, existe una estructura paracompleja adaptada $\mathfrak{J}$ que permite expresar el tensor curvatura algebraico como

$$A = \kappa_1 A^0 + \kappa_2 A^{\mathfrak{J}}, \qquad \kappa_2 \neq 0. \tag{4.17}$$

Para definir $\mathfrak{J}$ fijamos $\{x, x_\alpha, \bar{x}_\alpha, x_\gamma\}$ una base ortonormal del espacio vectorial V, donde $x_\nu, \bar{x}_\nu \in \ker(\mathcal{J}_A(x) - \nu \operatorname{Id})$, $\nu = \alpha, \gamma$, y consideramos la estructura paracompleja definida por $\mathfrak{J}x = x_\gamma$, $\mathfrak{J}x_\alpha = \bar{x}_\alpha$. A continuación analizaremos la condición de ser IP para los tensores curvatura algebraicos A de la forma dada en la Ecuación (4.17). Para ello tomaremos un 2-plano orientado, no degenerado y temporal π y una base ortonormal $\{x, y\}$ para dicho plano. Fijamos una base ortonormal $\{e_1 = x, e_2, e_3 = \mathfrak{J}e_2, e_4 = \mathfrak{J}x\}$ para el espacio vectorial V de modo que $y = (\cosh \varphi_0)e_2 + (\sinh \varphi_0)\mathfrak{J}x$, para alguna constante φ_0, y procedemos como en el caso anterior. Un cálculo directo desde la Ecuación (4.17) nos lleva a la siguiente expresión para $\mathcal{A}(\pi_\varphi)$, donde π_φ es el 2-plano temporal $\langle\{x, (\cosh\varphi)e_2 + (\sinh\varphi)\mathfrak{J}x\}\rangle$,

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa_1\cosh\varphi & 0 & -(\kappa_1-3\kappa_2)\sinh\varphi \\ -\kappa_1\cosh\varphi & 0 & 2\kappa_2\sinh\varphi & 0 \\ 0 & 2\kappa_2\sinh\varphi & 0 & \kappa_2\cosh\varphi \\ -(\kappa_1-3\kappa_2)\sinh\varphi & 0 & -\kappa_2\cosh\varphi & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Ahora, se sigue que $\partial_\varphi\left(\mathrm{traza}(\mathcal{A}(\pi_\varphi)^2)\right) = -12\kappa_2(\kappa_1-2\kappa_2)\sinh(2\varphi)$ y por tanto $\kappa_1 = 2\kappa_2$. Además, bajo esta condición $\mathcal{A}(\pi)$ tiene autovalores $\{\pm\kappa_2\, i, \pm 2\kappa_2\, i\}$ y, puesto que π era arbitrario, esto demuestra que A es IP cuando $A = 2\kappa_2(A^0 + \frac{1}{2}A^{\mathfrak{J}})$.

Tres autovalores distintos. Para este caso, fijamos $\{x, x_\alpha, x_\beta, x_\gamma\}$ una base ortonormal de V, donde $x_\nu \in \ker(\mathcal{J}_A(x) - \nu\,\mathrm{Id})$, $\nu = \alpha, \beta, \gamma$, y definimos una estructura hiperparacompleja adaptada $\{J, \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2\}$ fijando $Jx = x_\alpha$, $\mathfrak{J}_1 x = x_\beta$, $\mathfrak{J}_2 x = x_\gamma$ y usando las relaciones paracuaterniónicas $J^2 = -\mathrm{Id}$, $\mathfrak{J}_1^2 = \mathrm{Id}$, $\mathfrak{J}_2^2 = \mathrm{Id}$ y $J\mathfrak{J}_1 = -\mathfrak{J}_1 J = \mathfrak{J}_2$. Entonces el tensor curvatura algebraico A verifica

$$A = \kappa_1 A^J - \kappa_2 A^{\mathfrak{J}}_1 - \kappa_3 A^{\mathfrak{J}}_2, \quad \kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \kappa_3 \neq \kappa_1. \tag{4.19}$$

En lo que sigue demostraremos que A no puede ser IP. Para esto, fijamos una base ortonormal $\{e_1 = x, e_2 = Jx, e_3 = \mathfrak{J}_1 x, e_4 = \mathfrak{J}_2 x\}$ y consideramos la familia de 2-planos orientados, no degenerados y mixtos de la forma $\pi = \langle\{x, \lambda_1 Jx + \lambda_2\mathfrak{J}_1 x + \lambda_3\mathfrak{J}_2 x\}\rangle$, con $-\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 = 1$. Un cálculo largo pero directo desde la Ecuación (4.19) muestra que $\mathcal{A}(\pi)$, cuando se expresa con respecto a la base ortonormal fijada anteriormente $\{e_1, \dots, e_4\}$, toma la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 3\kappa_1\lambda_1 & -3\kappa_2\lambda_2 & -3\kappa_3\lambda_3 \\ -3\kappa_1\lambda_1 & 0 & (\kappa_1+\kappa_2-2\kappa_3)\lambda_3 & -(\kappa_1-2\kappa_2+\kappa_3)\lambda_2 \\ -3\kappa_2\lambda_2 & (\kappa_1+\kappa_2-2\kappa_3)\lambda_3 & 0 & (2\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3)\lambda_1 \\ -3\kappa_3\lambda_3 & -(\kappa_1-2\kappa_2+\kappa_3)\lambda_2 & -(2\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3)\lambda_1 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde, usando que $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 1$, se obtiene tras un cálculo sencillo que

$$\partial_{\lambda_2}\partial_{\lambda_2}\partial_{\lambda_2}\partial_{\lambda_2}\left(\det\mathcal{A}(\pi)\right) = 216(\kappa_1-\kappa_2)^2(2\kappa_1+2\kappa_2-\kappa_3)^2,$$

$$\partial_{\lambda_3}\partial_{\lambda_3}\partial_{\lambda_3}\partial_{\lambda_3}\left(\det\mathcal{A}(\pi)\right) = 216(\kappa_1-\kappa_3)^2(2\kappa_1-\kappa_2+2\kappa_3)^2.$$

Ahora bien, estas expresiones no se anulan a un mismo tiempo nunca puesto que, por hipótesis, $\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \kappa_3 \neq \kappa_1$, y por lo tanto A no es IP. □

Observación 4.7. Un cálculo directo muestra que para los tres casos obtenidos previamente la forma canónica de Jordan del operador de curvatura antisimétrico asociado a cualquier 2-plano no degenerado, orientado espacial (respectivamente temporal o mixto) es también constante y por lo tanto son Jordan-IP. Entonces los tensores curvatura algebraicos obtenidos en el Teorema 4.6 son Jordan-Osserman-IP. Además, para un tensor curvatura algebraico con curvatura seccional constante no nula el operador de curvatura antisimétrico asociado tienen rango dos, mientras que en los otros dos casos el operador de curvatura antisimétrico tiene rango máximo, es decir, cuatro.

Operadores de Jacobi no diagonalizables: Tipo Ib

Lema 4.8. *Ningún tensor curvatura algebraico de Osserman Tipo Ib puede ser IP.*

Demostración. Usando las componentes de un tensor curvatura algebraico dadas en el Lema 2.3, para un 2-plano no degenerado, orientado y mixto $\pi = \langle\{e_1, \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3 + \lambda_3 e_4\}\rangle$ con $-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, se tiene que $\mathcal{A}(\pi)$ se expresa con respecto a la base ortonormal fijada como

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma\lambda_1 - \beta\lambda_2 & -\beta\lambda_1 - \gamma\lambda_2 & -\alpha\lambda_3 \\ -\gamma\lambda_1 + \beta\lambda_2 & 0 & \frac{2(\alpha-\gamma)}{3}\lambda_3 & -\beta\lambda_1 + \frac{\alpha-\gamma}{3}\lambda_2 \\ -\beta\lambda_1 - \gamma\lambda_2 & \frac{2(\alpha-\gamma)}{3}\lambda_3 & 0 & \frac{\alpha-\gamma}{3}\lambda_1 + \beta\lambda_2 \\ -\alpha\lambda_3 & -\beta\lambda_1 + \frac{\alpha-\gamma}{3}\lambda_2 & -\frac{\alpha-\gamma}{3}\lambda_1 - \beta\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, usando que $\lambda_3^2 = 1 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2$, obtenemos que $\partial_{\lambda_1}\partial_{\lambda_2}\left(\text{traza}(\mathcal{A}(\pi)^2)\right) = -\frac{8}{3}\beta(\alpha - 4\gamma)$; esto nos lleva a que $\alpha = 4\gamma$, puesto que $\beta \neq 0$. Finalmente, bajo tal condición, se obtiene que $\partial_{\lambda_1}\partial_{\lambda_1}\left(\text{traza}(\mathcal{A}(\pi)^2)\right) = 8(\beta^2 + 9\gamma^2) \neq 0$, lo cual implica que A no puede ser IP. □

Operadores de Jacobi no diagonalizables: Tipo II

Teorema 4.9. *Sea $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ un espacio vectorial de dimensión cuatro con un producto interior de signatura neutra y A un tensor curvatura algebraico de Osserman Tipo II en V. Entonces A es IP si y sólo si los operadores de Jacobi son nilpotentes en dos pasos.*

Demostración. Usando las componentes del tensor curvatura algebraico dadas en el Lema 2.4, para los 2-planos no degenerados, orientados y mixtos $\pi = \langle\{e_1, \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_3 + \lambda_3 e_4\}\rangle$, con $-\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, se tiene que $\mathcal{A}(\pi)$ se expresa, con respecto a la base ortonormal fijada, tal como sigue:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{(1+2\beta)\lambda_1 - \lambda_2}{2} & \frac{-\lambda_1 + (1-2\beta)\lambda_2}{2} & -\alpha\lambda_3 \\ \frac{-(1+2\beta)\lambda_1 + \lambda_2}{2} & 0 & \frac{2(\alpha-\beta)}{3}\lambda_3 & \frac{-3\lambda_1 + (3+2\alpha-2\beta)\lambda_2}{6} \\ \frac{-\lambda_1 + (1-2\beta)\lambda_2}{2} & \frac{2(\alpha-\beta)}{3}\lambda_3 & 0 & \frac{(-3+2\alpha-2\beta)\lambda_1 + 3\lambda_2}{6} \\ -\alpha\lambda_3 & \frac{-3\lambda_1 + (3+2\alpha-2\beta)\lambda_2}{6} & \frac{(3-2\alpha+2\beta)\lambda_1 - 3\lambda_2}{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando esta expresión, un cálculo directo teniendo en cuenta que $\lambda_3^2 = 1 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2$ muestra que $\partial_{\lambda_1}\partial_{\lambda_2}\left(\text{traza}(\mathcal{A}(\pi)^2)\right) = -\frac{4}{3}(\alpha - 4\beta)$ y por tanto $\alpha = 4\beta$. Bajo tal condición obtenemos que $\partial_{\lambda_1}\partial_{\lambda_1}\left(\text{traza}(\mathcal{A}(\pi)^2)\right) = 72\beta^2$, concluyendo así que A debe ser Osserman nilpotente, es decir, $\alpha = \beta = 0$. Finalmente, en el caso Osserman nilpotente, dado cualquier 2-plano orientado no degenerado π, si $\{u, v\}$ denota una base arbitraria para el 2-plano π con $u = \sum_i u_i e_i$ y $v = \sum_i v_i e_i$, se tiene que

$$\mathcal{A}(\pi) = \frac{\zeta(\pi)}{|\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2|^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.20}$$

donde $\zeta(\pi) = \frac{1}{2}\left((u_1+u_4)(v_2-v_3)-(u_2-u_3)(v_1+v_4)\right)$. Como una consecuencia directa se obtiene que $\mathcal{A}(\pi)$ tiene siempre el cero como su único autovalor. $\square$

Observación 4.10. Fijémonos que para un tensor curvatura algebraico con operadores de Jacobi nilpotentes en dos pasos, las condiciones de ser espacial, temporal o mixto Jordan-IP están determinadas por la Ecuación (4.20). A continuación analizamos detalladamente la anulación de la expresión $\zeta(\pi)$ en la Ecuación (4.20). Para ello, dado un 2-plano orientado no degenerado $\pi = \langle\{u,v\}\rangle$, donde $\{u,v\}$ denota una base para π con $u = \sum_i u_i e_i$ y $v = \sum_i v_i e_i$, claramente $\zeta(\pi)$ se anula si y sólo si una de las siguientes condiciones se verifica:

- $v_2 = v_3$ y $v_1 = -v_4$.
- $v_2 = v_3$, $v_1 \neq -v_4$ y $u_2 = u_3$.
- $v_2 \neq v_3$ y $u_1 = \frac{-u_4(v_2-v_3)+(u_2-u_3)(v_1+v_4)}{v_2-v_3}$.

Ahora, es sencillo comprobar que en todos los casos anteriores $\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2 < 0$, lo cual implica que $\zeta(\pi)$ nunca se anula para 2-planos orientados no degenerados espaciales o temporales. Sin embargo, para 2-planos orientados no degenerados y mixtos, tomando $\pi_1 = \langle\{e_1,e_3\}\rangle$ y $\pi_2 = \langle\{e_2,e_3\}\rangle$ tenemos que $\zeta(\pi_1) = -\frac{1}{2} \neq 0$, mientras $\zeta(\pi_2) = 0$. Por tanto, el rango del operador de curvatura antisimétrico asociado a 2-planos orientados, no degenerados mixtos cambia de 0 a 2. Como consecuencia, concluimos que un tensor curvatura algebraico con operadores de Jacobi nilpotentes en dos pasos es Jordan-Osserman y espacial y temporal Jordan-IP pero nunca mixto Jordan-IP (ver también [99, Teorema 1.3 (1)]).

Operadores de Jacobi no diagonalizables: Tipo III

Lema 4.11. *Ningún tensor curvatura algebraico de Osserman Tipo III puede ser IP.*

Demostración. $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle, A)$ es Osserman de Tipo III si y sólo si existe una base ortonormal $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ para V tal que las componentes no nulas del tensor curvatura algebraico A son las dadas en el Lema 2.5. De esas componentes, y tomando 2-planos orientados, no degenerados y mixtos $\pi_1 = \langle\{e_1,e_3\}\rangle$ and $\pi_2 = \langle\{e_1,e_4\}\rangle$, obtenemos que

$$\mathcal{A}(\pi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\alpha & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}(\pi_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & -\alpha \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ -\alpha & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene que $\det \mathcal{A}(\pi_1) = \frac{1}{4}$, mientras que $\det \mathcal{A}(\pi_2) = 0$. Por tanto, A no es IP. $\square$

4.2.2. Contexto diferenciable

En esta sección veremos cuales de los tensores curvatura algebraicos Osserman-IP obtenidos en el Teorema 4.5 se corresponden con el tensor curvatura de una variedad pseudo-Riemanniana.

Teorema 4.12. *Una variedad pseudo-Riemanniana de dimensión cuatro (M, g) es puntualmente Osserman-IP si y sólo si es un espacio de curvatura seccional constante o, en otro caso, en cada punto de la variedad los operadores de Jacobi se anulan o son nilpotentes en dos pasos. Además, (M, g) es Jordan-Osserman-IP sólo en el primero de los casos.*

Demostración. Para comenzar fijémonos que, por los Lemas 4.8 y 4.11, los tensores curvatura algebraicos de Osserman correspondientes a los Tipos Ib y III no son nunca IP. Además los tensores curvatura algebraicos que son Osserman Tipo II y que son a su vez IP se corresponden con aquellos en los que los operadores de Jacobi son nilpotentes en dos pasos. Por otro lado, las métricas puntualmente Osserman con operadores de Jacobi diagonalizables deben corresponderse con los casos (i)–(iii) en el Teorema 4.6. Veremos que los casos (ii)–(iii), donde el tensor curvatura verifica $R = \kappa(R^0 \mp \frac{1}{2}R^\psi)$ para alguna función real κ, no se pueden dar.

A continuación consideraremos el caso en que el tensor curvatura viene dado por la expresión $R = \kappa(R^0 - \frac{1}{2}R^J)$ para alguna función real κ, donde (g, J) es una estructura casi Hermítica sobre M. El caso $R = \kappa(R^0 + \frac{1}{2}R^{\mathfrak{J}})$ para alguna función real κ, donde $(g, \mathfrak{J})$ es una estructura casi paraHermítica sobre M, es completamente análogo. Nótese en primer lugar que el tensor curvatura R^0 es paralelo, mientras que

$$
\begin{aligned}
\left(\nabla_A R^J\right)(B, C)D &= g(B, JD)(\nabla_A J)C + g(B, (\nabla_A J)D)JC \\
&\quad -g(C, JD)(\nabla_A J)B - g(C, (\nabla_A J)D)JB \\
&\quad +2g(B, JC)(\nabla_A J)D + 2g(B, (\nabla_A J)C)JD.
\end{aligned}
$$

Por tanto, la segunda identidad de Bianchi (teniendo en cuenta que κ ha de ser constante por ser la variedad Einstein) resulta

$$
\begin{aligned}
0 &= g((\nabla_Y J)X, X)g(Y, Y) - g(Y, (\nabla_X J)X)g(Y, Y) - 2g(Y, Y)g((\nabla_X J)X, Y) \\
&= -3g(Y, Y)g((\nabla_X J)X, Y).
\end{aligned}
$$

Por tanto la variedad ha de ser Nearly Kähler, y dado que toda variedad Nearly Kähler de dimensión cuatro es Kähler, (M, g, J) es una variedad Kähler. Ahora se sigue de forma inmediata que para cada campo de vectores no nulo X, $R(X, JX)X \sim JX$, por lo que la curvatura seccional holomorfa ha de ser constante, lo que es una contradicción con la expresión del tensor curvatura (véase la Sección 1.4). En consecuencia, el tensor curvatura algebraico $R = \kappa(R^0 - \frac{1}{2}R^J)$ no es geométricamente realizable.

Finalmente recordamos que los tensores curvatura algebraicos de Osserman en signatura Lorentziana se corresponden con espacios de curvatura seccional constante [86] y por tanto las variedades de Lorentz puntualmente Osserman-IP son localmente espacios de curvatura seccional constante. En signatura Riemanniana, una descripción completa de los tensores curvatura algebraicos 4-dimensionales, Osserman-IP es la dada por (i)–(ii) en Teorema 4.6, y así el resultado se obtiene como consecuencia de lo anterior. □

Observación 4.13. En vista del Teorema 4.12 se sigue que los operadores de curvatura antisimétricos de rango cuatro dados por (ii)–(iii) en Teorema 4.6 no se pueden realizar geométricamente y por tanto sólo son realizables a nivel algebraico. Los operadores de curvatura antisimétricos correspondientes al Teorema 4.6-(ii) fueron estudiados previamente en [113] en signatura Riemanniana y en [162] para signatura $(2, 2)$ (ver también [93]).

Observación 4.14. Fijémonos que en el caso particular de que (M, g) sea una variedad de Walker 4-dimensional autodual la única posibilidad de que sea Osserman-IP es que se corresponda con la extensión de Riemann de una superficie llana. Esto se debe a que en tal caso la variedad es una extensión de Riemann de una superficie con tensor de Ricci simétrico y degenerado por ser IP (ver Teorema 5.4) y por ser Osserman dicha extensión de Riemann se corresponde con la extensión de Riemann de una superficie afín con tensor de Ricci antisimétrico [85]. Por tanto la superficie ha de ser llana.

Capítulo 5

Variedades Ivanov-Petrova y geometría afín

El primer objetivo de este capítulo es abordar el estudio de las métricas de Walker en signatura $(2, 2)$ autoduales y que verifican la condición IP. Tras probar que tales métricas han de ser extensiones de Riemann (Teorema 5.1), se plantea de forma natural el estudio de la relación existente entre las condiciones IP pseudo-Riemanniana y afín. Sea $(\mathcal{M}, D)$ una variedad afín donde D es una conexión libre de torsión en $T\mathcal{M}$. Sea $\mathcal{R}(\pi) = R(X, Y)$ el operador de curvatura antisimétrico asociado a la conexión D y donde $\pi = \langle\{X, Y\}\rangle$. Fijémonos que en una variedad afín, si reescalamos la base del plano π obtenemos que $R(cX, cY) = c^2 R(X, Y)$. Teniendo esto en cuenta, diremos que $(\mathcal{M}, D)$ es *afín Ivanov-Petrova* (afín IP) si $\mathcal{R}(\pi)$ es nilpotente para todo 2-plano [41]. Así, se mostrará que las variedades IP autoduales de Walker son localmente extensiones de Riemann de conexiones afines cuyo tensor de Ricci es simétrico de rango uno (Teorema 5.4).

El segundo objetivo se centra en el estudio de superficies afines localmente simétricas y localmente homogéneas con tensor de Ricci simétrico y degenerado mostrando la estrecha relación que mantienen con las variedades IP. Las superficies localmente homogéneas fueron descritas por Opozda [144] (ver también [121, 122]). Se muestra en [144] que tales conexiones se corresponden con la conexión de Levi-Civita de una superficie de curvatura seccional constante o bien se corresponden con una de las dos familias A y B donde todos los símbolos de Christoffel vienen dados explícitamente por las Ecuaciones (5.11) y (5.12), respectivamente. La posible intersección entre las dos clases de conexiones afines dadas por las Ecuaciones (5.11) y (5.12) es un problema abierto en [144], al que finalmente damos respuesta como aplicación del estudio realizado de las conexiones afines IP en la Sección 5.3.

5.1. Métricas de Walker IP autoduales

Teorema 5.1. [41] *Una variedad de Walker de dimensión cuatro y signatura* $(2,2)$ *autodual e IP es necesariamente una extensión de Riemann deformada.*

Demostración. Para una variedad 4-dimensional pseudo-Riemanniana (M,g) con tensor métrico de signatura $(2,2)$ se tiene por el Lema 4.1 que el polinomio característico $p_\lambda(\mathcal{R}(\pi))$ de $\mathcal{R}(\pi)$ viene dado por

$$p_\lambda(\mathcal{R}(\pi)) = \lambda^4 - \frac{1}{2}\,\mathrm{traza}(\mathcal{R}(\pi)^2)\ \lambda^2 + \det(\mathcal{R}(\pi)), \tag{5.1}$$

y por tanto como una consecuencia directa se observa que la variedad es IP si y sólo si $\det(\mathcal{R}(\pi))$ y $\mathrm{traza}(\mathcal{R}(\pi)^2)$ no dependen del 2-plano orientado no degenerado espacial (respectivamente mixto o temporal) elegido.

Si consideramos el caso particular de una métrica de Walker donde la dimensión de la distribución paralela y degenerada es máxima, en este caso dos, dada por la Ecuación (4.2), un cálculo directo nos muestra que el operador de curvatura antisimétrico $\mathcal{R}(\pi)$ asociado a un 2-plano no degenerado π, cuando es expresado con respecto a la base de campos coordenados $\{\partial_i, \partial_{i'}\}$, $i = 1, 2$, tiene esta forma matricial particular:

$$\mathcal{R}(\pi) = \begin{pmatrix} F(\pi) & 0 \\ G(\pi) & -\,{}^tF(\pi) \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

donde $F(\pi)$ y $G(\pi)$ son ciertas matrices cuadradas de orden dos. Se sigue que el determinante del operador de curvatura antisimétrico $\mathcal{R}(\pi)$ y la traza de su cuadrado $\mathcal{R}(\pi)^2$ están completamente determinados por los de $F(\pi)$ y $F(\pi)^2$, respectivamente. Además se tiene que

$$\det(\mathcal{R}(\pi)) = (\,\det(F(\pi)))^2 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{traza}(\mathcal{R}(\pi)^2) = 2\,\mathrm{traza}(F(\pi)^2).$$

Por ello, teniendo en cuenta lo anterior, una variedad de Walker de dimensión cuatro y signatura $(2,2)$ de la forma dada por la Ecuación (4.2) es IP si y sólo si $\det(F(\pi))$ y $\mathrm{traza}(F(\pi)^2)$ no dependen de la elección del 2-plano orientado y no degenerado espacial (respectivamente temporal o mixto) π elegido. Usaremos esta caracterización repetidamente a lo largo de la demostración. Para fijar la notación consideremos

$$F(\pi) = \begin{pmatrix} f_{11}(\pi) & f_{12}(\pi) \\ f_{21}(\pi) & f_{22}(\pi) \end{pmatrix}.$$

Una vez hecha esta observación técnica, supongamos que la métrica g está dada por las Ecuaciones (1.10) y (1.11), y a mayores supongamos que es IP. Empezamos nuestro análisis considerando el 2-plano no degenerado π_1 dado por $\pi_1 = \langle\{\partial_1, \partial_{1'} + \lambda\partial_{2'}\}\rangle$. Entonces un cálculo largo pero totalmente directo nos permite obtener que

$$
\begin{aligned}
f_{11}(\pi_1) &= -x_{1'}(\lambda\mathcal{C}+3\mathcal{A}) - x_{2'}\mathcal{C} - \tfrac{1}{2}(\lambda\mathcal{D}+2\mathcal{B}),\\
f_{12}(\pi_1) &= -x_{1'}\lambda\mathcal{A} - x_{2'}(\lambda\mathcal{C}+\mathcal{A}) - \tfrac{1}{4}(\lambda(\mathcal{B}+\mathcal{E})+2\mathcal{F}),\\
f_{21}(\pi_1) &= -x_{1'}\mathcal{C} - \tfrac{1}{2}\mathcal{D},\\
f_{22}(\pi_1) &= -x_{1'}(\lambda\mathcal{C}+\mathcal{A}) - x_{2'}\mathcal{C} - \tfrac{1}{4}(2\lambda\mathcal{D}+\mathcal{B}+\mathcal{E}).
\end{aligned}
$$

Como consecuencia se sigue que $\partial_{1'}\partial_{1'}(\det(F(\pi_1)) = 2\lambda^2\mathcal{C}^2 + 6\lambda\mathcal{A}\mathcal{C} + 6\mathcal{A}^2$, y por lo tanto $\mathcal{A} = \mathcal{C} = 0$. Teniendo esto en cuenta se tiene que

$$
\det(F(\pi_1)) = \frac{1}{4}\lambda^2\mathcal{D}^2 + \frac{1}{2}\lambda\mathcal{B}\mathcal{D} + \frac{1}{4}(\mathcal{B}^2 + \mathcal{B}\mathcal{E} - \mathcal{D}\mathcal{F}),
$$

de donde $\mathcal{D} = 0$. Una vez hecha esta primera aproximación obtenemos que la métrica dada por la Ecuación (1.11) queda reducida a

$$
\begin{aligned}
a &= x_{1'}^2\mathcal{B} + x_{1'}P + x_{2'}Q + \xi,\\
b &= x_{2'}^2\mathcal{E} + x_{1'}x_{2'}\mathcal{F} + x_{1'}S + x_{2'}T + \eta,\\
c &= \tfrac{1}{2}x_{1'}^2\mathcal{F} + \tfrac{1}{2}x_{1'}x_{2'}(\mathcal{B}+\mathcal{E}) + x_{1'}U + x_{2'}V + \gamma.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Consideremos ahora el 2-plano π_2 dado por $\pi_2 = \langle\{\partial_1 + \lambda\partial_2, \partial_{1'}\}\rangle$. En este caso y, de nuevo haciendo un cálculo tedioso pero directo, obtenemos que la matriz $F(\pi_2)$ tiene las siguientes componentes

$$
\begin{aligned}
f_{11}(\pi_2) &= -\tfrac{1}{2}(\lambda\mathcal{F}+2\mathcal{B}), & f_{12}(\pi_2) &= -\tfrac{1}{2}\mathcal{F},\\
f_{21}(\pi_2) &= -\tfrac{1}{4}\lambda(\mathcal{B}+\mathcal{E}), & f_{22}(\pi_2) &= -\tfrac{1}{4}(2\lambda\mathcal{F}+\mathcal{B}+\mathcal{E}),
\end{aligned}
$$

y por tanto su determinante verifica $\det(F(\pi_2)) = \frac{1}{4}\lambda^2\mathcal{F}^2 + \frac{1}{2}\lambda\mathcal{B}\mathcal{F} + \frac{1}{4}\mathcal{B}(\mathcal{B}+\mathcal{E})$. A la vista de esto se sigue que $\mathcal{F} = 0$ y por tanto la métrica dada por la Ecuación (5.3) queda reducida a

$$
\begin{aligned}
a &= x_{1'}^2\mathcal{B} + x_{1'}P + x_{2'}Q + \xi,\\
b &= x_{2'}^2\mathcal{E} + x_{1'}S + x_{2'}T + \eta,\\
c &= \tfrac{1}{2}x_{1'}x_{2'}(\mathcal{B}+\mathcal{E}) + x_{1'}U + x_{2'}V + \gamma
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

de tal modo que

$$
\det(F(\pi_2)) = \tfrac{1}{4}\mathcal{B}(\mathcal{B}+\mathcal{E}), \qquad \operatorname{traza}(F(\pi_2)^2) = \mathcal{B}^2 + \tfrac{1}{16}(\mathcal{B}+\mathcal{E})^2. \tag{5.5}
$$

Para continuar, elegimos el plano π_3 dado por $\pi_3 = \langle\{\partial_{1'} - \partial_{2'}, \partial_{2'} - \partial_1 + \partial_2\}\rangle$, para el cual se obtiene

$$
f_{11}(\pi_3) = -\tfrac{1}{8}(5\mathcal{B}+\mathcal{E}),\ \ f_{12}(\pi_3) = f_{21}(\pi_3) = \tfrac{1}{8}(\mathcal{B}+\mathcal{E}),\ \ f_{22}(\pi_3) = -\tfrac{1}{8}(\mathcal{B}+5\mathcal{E})
$$

y por tanto

$$\det(F(\pi_3)) = \tfrac{1}{16}(\mathcal{B}^2 + \mathcal{E}^2 + 6\mathcal{B}\mathcal{E}), \quad \mathrm{traza}(F(\pi_3)^2) = \tfrac{1}{16}(7\mathcal{B}^2 + 7\mathcal{E}^2 + 6\mathcal{B}\mathcal{E}). \tag{5.6}$$

Si comparamos lo obtenido en las Ecuaciones (5.5) y (5.6), se concluye la igualdad $\mathcal{E} = \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\det(F(\pi_3)) = \frac{1}{2}\mathcal{B}^2$, lo cual implica la constancia de $\mathcal{B} = \kappa$ y por tanto la métrica dada por la Ecuación (5.4) se expresa como

$$\begin{aligned} a &= x_{1'}^2\kappa + x_{1'}P + x_{2'}Q + \xi, \\ b &= x_{2'}^2\kappa + x_{1'}S + x_{2'}T + \eta, \\ c &= x_{1'}x_{2'}\kappa + x_{1'}U + x_{2'}V + \gamma. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Para obtener el resultado necesitamos que la constante κ se anule. Eso es lo que probamos en el último paso de la demostración. Para ello consideremos el 2-plano no degenerado π_4 dado por $\pi_4 = \langle\{\partial_2 - c\partial_{1'} - \frac{1+b}{2}\partial_{2'}, \partial_1 + \frac{1-a}{2}\partial_{1'}\}\rangle$. Un largo cálculo, pero de nuevo totalmente directo, nos permite ver que las componentes de la matriz $F(\pi)$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} f_{11}(\pi_4) &= -\tfrac{1}{4}\left(x_{1'}x_{2'}3\kappa^2 + (x_{1'}U + x_{2'}V)3\kappa + QS - UV + 4\kappa\gamma - 2P_2 + 2U_1\right), \\ f_{12}(\pi_4) &= -\tfrac{1}{4}\left(\kappa + \kappa\eta + S(V-P) - TU + U^2 + 2S_1 - 2U_2\right), \\ f_{21}(\pi_4) &= -\tfrac{1}{4}\left(\kappa - \kappa\xi + Q(T-U) + PV - V^2 - 2Q_2 + 2V_1\right), \\ f_{22}(\pi_4) &= -\tfrac{1}{4}\left(x_{1'}x_{2'}3\kappa^2 + (x_{1'}U + x_{2'}V)3\kappa - QS + UV + 2\kappa\gamma + 2T_1 - 2V_2\right), \end{aligned}$$

expresiones que permiten comprobar que $\partial_{1'}\partial_{1'}\partial_{2'}\partial_{2'}(\det(F(\pi_4))) = \frac{9}{4}\kappa^4$, de donde se sigue que necesariamente $\kappa = 0$. Esto reduce la métrica dada por la Ecuación (5.7) a

$$a = x_{1'}P + x_{2'}Q + \xi, \quad b = x_{1'}S + x_{2'}T + \eta, \quad c = x_{1'}U + x_{2'}V + \gamma, \tag{5.8}$$

y por lo tanto la métrica se corresponde con una extensión de Riemann deformada como queríamos demostrar. □

Observación 5.2. El estudio de las variedades de Osserman presenta un cierto análogo al Teorema 5.1, dado que toda variedad de Walker autodual Ricci llana es una extensión de Riemann. Sin embargo, el estudio de las superficies afines subyacentes presentará notables diferencias, como se verá a lo largo de este capítulo.

5.2. Variedades afines IP y extensiones de Riemann

En lo que sigue, usaremos la deformación de las extensiones de Riemann usuales dada por $g_{D,\phi}$ (véase la Sección 1.8.3). Esta métrica nos permitirá construir ejemplos de variedades IP en una variedad pseudo-Riemanniana M de signatura (n,n) con $n \geq 2$.

Teorema 5.3. [41] *Sea* $(T^*\mathcal{M}, g_{D,\phi})$ *el fibrado cotangente de una variedad afín* $(\mathcal{M}, D)$ *equipada con la extensión de Riemann deformada. Entonces* $(T^*\mathcal{M}, g_{D,\phi})$ *es una variedad pseudo-Riemanniana IP si y sólo si* $(\mathcal{M}, D)$ *es afín IP, para cualquier tensor simétrico* ϕ *de tipo* $(0,2)$.

Demostración. Sea $\tilde{g} = g_{D,\phi}$ la extensión de Riemann deformada en $T^*\mathcal{M}$. Un cálculo largo pero directo muestra que los símbolos de Christoffel no nulos $\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ de la conexión de Levi-Civita vienen dados por

$$\tilde{\Gamma}^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ij}\,, \qquad \tilde{\Gamma}^{k'}_{i'j} = -\Gamma^{i}_{jk}\,, \qquad \tilde{\Gamma}^{k'}_{ij'} = -\Gamma^{j}_{ik}\,,$$
$$\tilde{\Gamma}^{k'}_{ij} = \sum_{r=1}^{n} x_{r'}\left(\partial_k\Gamma^{r}_{ij} - \partial_i\Gamma^{r}_{jk} - \partial_j\Gamma^{r}_{ik} + 2\sum_{l=1}^{n}\Gamma^{r}_{kl}\Gamma^{l}_{ij}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\partial_i\phi_{jk} + \partial_j\phi_{ik} - \partial_k\phi_{ij}\right) - \sum_{l=1}^{n}\phi_{kl}\Gamma^{l}_{ij},$$

donde Γ^{k}_{ij} son los símbolos de Christoffel de D y ϕ_{ij} denotan las componentes locales de ϕ. Usando las expresiones anteriores obtenemos que las componentes no nulas del tensor curvatura de $(T^*\mathcal{M}, g_{D,\phi})$ están determinadas (salvo las simetrías propias del tensor curvatura) por

$$\tilde{R}^{h}_{kji} = R^{h}_{kji}, \qquad \tilde{R}^{h'}_{kji}, \qquad \tilde{R}^{h'}_{kji'} = -R^{i}_{kjh}, \qquad \tilde{R}^{h'}_{k'ji} = R^{k}_{hij}, \tag{5.9}$$

siendo R^{h}_{kji} las componentes del tensor curvatura de $(\mathcal{M}, D)$. Omitimos aquí la expresión de $\tilde{R}^{h'}_{kji}$, puesto que no es necesaria para nuestros propósitos (ver la Ecuación (5.10)).

Sea $\tilde{\pi} = \langle\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}\rangle$ un 2-plano orientado y no degenerado en $T^*\mathcal{M}$, con $\tilde{X} = \alpha_i\partial_i + \alpha_{i'}\partial_{i'}$ e $\tilde{Y} = \beta_i\partial_i + \beta_{i'}\partial_{i'}$ una base ortonormal de $\tilde{\pi}$. Se sigue de la Ecuación (5.9) que la matriz del operador de curvatura antisimétrico $\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{\pi})$ con respecto a la base $\{\partial_i, \partial_{i'}\}$ es de la forma

$$\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{\pi}) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(\pi) & 0 \\ * & -{}^{t}\mathcal{R}(\pi) \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

donde $\mathcal{R}(\pi)$ es la matriz del operador de curvatura antisimétrico asociado a la conexión D y correspondiente al plano $\pi = \langle\{X, Y\}\rangle$, con $X = \alpha_i\partial_i$ e $Y = \beta_i\partial_i$ en $\mathcal{M}$, con respecto a la base $\{\partial_i\}$. Fijémonos ahora que los polinomios característicos $p_\lambda(\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{\pi}))$ de $\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{\pi})$ y $p_\lambda(\mathcal{R}(\pi))$ de $\mathcal{R}(\pi)$ están relacionados por $p_\lambda(\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{\pi})) = p_\lambda(\mathcal{R}(\pi)) \cdot p_\lambda(-\mathcal{R}(\pi))$.

Supongamos que $(T^*\mathcal{M}, g_{D,\phi})$ es IP. Si π es un 2-plano en $\mathcal{M}$, podemos considerar un 2-plano orientado y no degenerado $\tilde{\pi}$ en $T^*\mathcal{M}$, de una signatura prefijada, tal que la Ecuación (5.10) se mantiene para una base ortonormal adecuada. Puesto que $p_\lambda(\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{\pi}))$ tiene que ser constante para todos los planos $\tilde{\pi}$ de la signatura prefijada, la Ecuación (5.10) implica que $p_\lambda(\mathcal{R}(\pi))$ es independiente del 2-plano π elegido. Entonces, si $\pi = \langle\{X, Y\}\rangle$ y $p_\lambda(\mathcal{R}(\pi)) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$, para $\pi_\alpha = \langle\{\alpha X, \alpha Y\}\rangle$, $\alpha \neq 0$, se tiene que

$$p_\lambda(\mathcal{R}(\pi_\alpha)) = \lambda^n + \alpha^2 a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha^{2n} a_0.$$

Entonces, puesto que $p_\lambda(\mathcal{R}(\pi_\alpha)) = p_\lambda(\mathcal{R}(\pi))$, se sigue que $a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$ y por tanto el operador de curvatura antisimétrico asociado a la conexión D es necesariamente nilpotente y por lo tanto $(\mathcal{M}, D)$ es afín IP.

Recíprocamente, si la variedad afín $(\mathcal{M}, D)$ se supone afín IP, entonces $\mathcal{R}(\pi)$ tiene al cero como único autovalor para cada π en $\mathcal{M}$. Por lo tanto, se sigue de la Ecuación (5.10) que los autovalores de $\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{\pi})$ se anulan para todo 2-plano orientado y no degenerado $\tilde{\pi}$ en $T^*\mathcal{M}$. Concluimos entonces que $(T^*\mathcal{M}, g_{D,\phi})$ es IP. □

5.3. Superficies afines IP

La curvatura de una superficie afín está completamente determinada por su tensor de Ricci. Es por ello natural estudiar superficies afines cuyo tensor de Ricci comparte alguna característica pseudo-Riemanniana, es decir, es simétrico. En tal caso (lo que se conoce como geometría equiafín) el tensor de Ricci define una métrica pseudo-Riemanniana cuando no es degenerado, y por lo tanto el caso de conexiones afines cuyo tensor de Ricci es simétrico y degenerado constituye una situación de interés especial y será motivo de un estudio más detallado a continuación.

Recordemos aquí que una variedad afín $(\mathcal{M}, D)$ es afín IP si el operador de curvatura antisimétrico asociado, $\mathcal{R}(\pi)$, es nilpotente con independencia del 2-plano π elegido o, equivalentemente, el único autovalor del operador de curvatura antisimétrico $\mathcal{R}(\pi)$ es el 0. El siguiente teorema pone de manifiesto el reflejo que provoca la condición de ser afín IP en el tensor de Ricci de una superficie afín (Σ, D).

Teorema 5.4. [41] *Sea (Σ, D) una superficie afín. Entonces (Σ, D) es afín IP si y sólo si su tensor de Ricci es simétrico y degenerado.*

Demostración. Comenzaremos fijando coordenadas (x_1, x_2) y consideramos un 2-plano π dado por $\pi = \langle\{X, Y\}\rangle$ en Σ, con $X = a_1\partial_1 + a_2\partial_2$ e $Y = b_1\partial_1 + b_2\partial_2$. Un sencillo cálculo nos muestra que el operador de curvatura antisimétrico asociado a la conexión D, $\mathcal{R}(\pi)$, se expresa con respecto a la base $\{\partial_1, \partial_2\}$ como

$$\mathcal{R}(\pi) = (a_1b_2 - a_2b_1)\begin{pmatrix} -\rho_{21} & -\rho_{22} \\ \rho_{11} & \rho_{12} \end{pmatrix},$$

donde $\rho_{ij} = \rho(\partial_i, \partial_j)$ son las componentes del tensor de Ricci. Se sigue entonces que el polinomio característico de $\mathcal{R}(\pi)$ está dado por

$$p_\lambda(\mathcal{R}(\pi)) = \lambda^2 + \lambda(a_1b_2 - a_2b_1)(\rho_{21} - \rho_{12}) + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \det\rho.$$

En vista de esta expresión se obtiene que el operador de curvatura antisimétrico $\mathcal{R}(\pi)$ es nilpotente si y sólo si $\rho_{12} = \rho_{21}$ y $\det\rho = 0$, lo que concluye la demostración. □

Observación 5.5. Este resultado deja claramente a la vista las propiedades, prácticamente opuestas, que tienen el operador de Jacobi y el operador de curvatura antisimétrico. Recordamos que una variedad afín $(\mathcal{M}, D)$ es afín Osserman si y sólo si el operador de Jacobi es nilpotente para toda dirección, además se prueba en [85] que para el caso particular de superficies afines (Σ, D) esta condición es equivalente a que el tensor de Ricci sea antisimétrico.

A continuación estudiaremos la propiedad de ser afín IP sobre superficies afines (Σ, D) con ciertas propiedades sobre su curvatura. Empezaremos por aquellas superficies con curvatura recurrente. Recordemos que un tensor K es *recurrente* si existe una 1-forma σ de modo que $D_X K = \sigma(X)K$ para cada campo de vectores X. Puesto que la curvatura de una superficie afín (Σ, D) está completamente determinada por su tensor de Ricci, diremos que (Σ, D) es recurrente si su tensor de Ricci es recurrente. Las conexiones libres de torsión con curvatura recurrente están completamente determinadas [159] (ver también [67] para el caso de las conexiones libres de torsión con tensor de Ricci antisimétrico).

Teorema 5.6. [41] *Sea (Σ, D) una superficie afín IP. Entonces (Σ, D) es recurrente si y sólo si en un entorno de cada punto existe un sistema de coordenadas (x_1, x_2) en el cual la única componente no nula de la conexión D está dada por*

$$D_{\partial_1}\partial_1 = a(x_1, x_2)\partial_2,$$

para alguna función diferenciable $a(x_1, x_2)$. Además, (Σ, D) es localmente simétrica si y sólo si $a(x_1, x_2) = \alpha\, x_2 + \xi(x_1)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y ξ es una función diferenciable que depende únicamente de la coordenada x_1, y (Σ, D) es llana si y sólo si $\partial_2 a(x_1, x_2) = 0$.

Demostración. Descompongamos el tensor de Ricci en su parte simétrica y antisimétrica $\rho = \rho^{sim} + \rho^{ant}$. Por el Teorema 5.4 se sigue que (Σ, D) es afín IP si y sólo si $\rho^{ant} = 0$ y $\det \rho^{sim} = 0$. Ahora, usando la clasificación de las conexiones simétricas con curvatura recurrente hecha por Wong [159], vemos que la única posibilidad para una superficie afín no llana y con curvatura recurrente es aquella en la que en un entorno de cada punto existe un sistema de coordenadas (x_1, x_2) donde la única componente no nula de la conexión D viene dada por

$$D_{\partial_1}\partial_1 = a(x_1, x_2)\partial_2,$$

con $\partial_2 a(x_1, x_2) \neq 0$. Ahora es fácil comprobar que la única componente no nula del tensor de Ricci es $\rho_{11} = \partial_2 a(x_1, x_2)$ y por tanto se sigue que (Σ, D) es localmente simétrica si y sólo si $a(x_1, x_2) = \alpha\, x_2 + \xi(x_1)$. □

Observación 5.7. Es interesante destacar que todas las conexiones localmente simétricas en el Teorema 5.6 son proyectivamente llanas. Esta observación será útil más adelante en este capítulo.

5.3.1. Conexiones afines localmente homogéneas

Como ya se mencionó anteriormente la condición de ser afín IP supone importantes restricciones en la geometría de una superficie afín. En lo que sigue estudiaremos esta condición sobre conexiones homogéneas libres de torsión en superficies afines.

En [122, 144] se demuestra que si una superficie afín (Σ, D) es localmente homogénea entonces o bien D es la conexión de Levi-Civita de una superficie con curvatura seccional constante o, en un entorno de cada punto, existen coordenadas (x_1, x_2) y constantes a, b, c, d e, f de modo que D se expresa de una de las siguientes maneras:

$$D_{\partial_1}\partial_1 = a\partial_1 + b\partial_2, \quad D_{\partial_1}\partial_2 = c\partial_1 + d\partial_2, \quad D_{\partial_2}\partial_2 = e\partial_1 + f\partial_2, \tag{5.11}$$

$$D_{\partial_1}\partial_1 = \tfrac{a}{x_1}\partial_1 + \tfrac{b}{x_1}\partial_2, \quad D_{\partial_1}\partial_2 = \tfrac{c}{x_1}\partial_1 + \tfrac{d}{x_1}\partial_2, \quad D_{\partial_2}\partial_2 = \tfrac{e}{x_1}\partial_1 + \tfrac{f}{x_1}\partial_2. \tag{5.12}$$

Seguiremos la terminología usada en [122, 144], y de aquí en adelante nos referiremos a los casos anteriores como conexiones afines localmente homogéneas *Tipo A* y *Tipo B*. Es interesante recordar que una superficie afín (Σ, D) se dice equiafín si en un entorno de cada punto existe una 2-forma de volumen paralela. En lo que sigue estudiaremos propiedades de estas dos familias con el objetivo último de poder establecer cuál es su intersección.

Conexiones afines localmente homogéneas de Tipo A

Comenzamos determinando el tensor de Ricci de una superficie afín localmente homogénea de Tipo A. Éste viene dado por

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= -d^2 + ad + (f-c)b, \\ \rho_{12} = \rho_{21} &= cd - eb, \\ \rho_{22} &= -c^2 + fc + (a-d)e, \end{aligned} \tag{5.13}$$

lo cual muestra que es simétrico. Como una consecuencia inmediata de la Ecuación (5.13) se sigue el siguiente resultado

Teorema 5.8. [41] *Sea (Σ, D) una superficie afín localmente homogénea de Tipo A. Entonces o bien el tensor de Ricci define una métrica llana en Σ, o bien (Σ, D) es afín IP.*

Un cálculo directo a partir de la Ecuación (5.13) muestra que las componentes de la derivada covariante del tensor de Ricci están dadas por

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\rho_{11;1} &= -da^2 + (d^2 - bf + cb)a + (be - cd)b, \\ \tfrac{1}{2}\rho_{11;2} = \tfrac{1}{2}\rho_{12;1} &= -acd + (c^2 - fc + de)b, \\ \tfrac{1}{2}\rho_{12;2} = \tfrac{1}{2}\rho_{22;1} &= bce - (ae + cf - de)d, \\ \tfrac{1}{2}\rho_{22;2} &= fc^2 - (de + f^2)c - (af - be - df)e, \end{aligned} \tag{5.14}$$

con $\rho_{ij;k} = (D_{\partial_k}\rho)(\partial_i, \partial_j)$.

Una primera propiedad interesante de las conexiones afines localmente homogéneas del Tipo A es la siguiente:

Teorema 5.9. *Toda superficie afín localmente homogénea de Tipo A es proyectivamente llana.*

Demostración. Es obvio que toda superficie afín localmente homogénea de Tipo A (Σ, D) es equiafín y en un entorno de cada punto existe un sistema de coordenadas (x_1, x_2) tal que

$$\rho_{22;1} = \rho_{12;2} = 2(bce - (ae + cf - de)d),$$

$$\rho_{11;2} = \rho_{12;1} = 2(-acd + (c^2 - fc + de)b).$$

Se sigue entonces que (Σ, D) es proyectivamente llana. $\square$

El siguiente resultado proporciona una caracterización geométrica de las superficies afines que son localmente homogéneas de Tipo A y que son afines IP.

Teorema 5.10. *Sea (Σ, D) una superficie afín localmente homogénea de Tipo A. Entonces (Σ, D) es afín IP si y sólo si es recurrente.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que una superficie afín localmente homogénea de Tipo A (Σ, D) es afín IP, es decir, el operador de Ricci es simétrico y degenerado (ver el Teorema 5.4). Fijémonos que la Ecuación (5.13) implica que el tensor de Ricci ρ es siempre simétrico y es además degenerado si y sólo si

$$\begin{aligned} b^2e^2 - \left\{d^3 - 2ad^2 + (a^2 + 3bc - bf)d + (f - c)ab\right\} e \\ + \left\{fd^2 + a(c - f)d - b(c - f)^2\right\} c = 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Analizaremos las soluciones de la anterior ecuación y, combinándolas con las componentes de la derivada covariante del tensor de Ricci, dadas en la Ecuación (5.14), veremos que en todos los casos la conexión obtenida es recurrente.

Supongamos en primer lugar que $b = 0$; en este caso la Ecuación (5.15) se reduce a

$$d \cdot \left\{ac^2 - (a - d)fc - (a - d)^2e\right\} = 0, \tag{5.16}$$

y por tanto se obtienen las tres siguientes soluciones:

(A.1): $d = 0$ y, en este caso, $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = (-2f)dx_2$.

(A.2): $d \neq 0$ y $a = 0$. En este caso, $e = d^{-1}cf$ y $D\rho = 0$, con lo cual se obtiene una solución localmente simétrica.

(A.3): $d \neq 0 \neq a$. Por tanto, la Ecuación (5.16) se reduce a

$$ac^2 - (a-d)fc - (a-d)^2 e = 0$$

y por tanto $c = (2a)^{-1}(a-d)(f + \varepsilon(f^2 + 4ae)^{\frac{1}{2}})$, donde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ (siendo c una constante real).

Entonces, si $d = a$, se obtiene que $D\rho = 0$ y por tanto es localmente simétrica, mientras que para $d \neq a$ se sigue que $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = (-2a)dx_1 - (f + \varepsilon(f^2 + 4ae)^{\frac{1}{2}})dx_2$.

Ahora, para $b \neq 0$, viendo la Ecuación (5.15) como una ecuación cuadrática en e tenemos este último último caso:

(A.4): Se tiene

$$e = \frac{1}{2b^2}\left\{d^3 - 2ad^2 + (a^2 + 3bc - bf)d + (f-c)ab + \varepsilon(d^2 - ad + (c-f)b)\zeta^{\frac{1}{2}}\right\},$$

con $\zeta = (a-d)^2 + 4bc$ y $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ (siendo e siempre una constante real). Entonces un cálculo largo pero directo nos muestra que si $c = b^{-1}(-d^2 + ad + bf)$, entonces $D\rho = 0$ y por lo tanto es localmente simétrica. En otro caso, $D\rho = \omega \otimes \rho$, con

$$\omega = (-a - d - \varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}})dx_1 + b^{-1}(-d^2 + ad - 2bc - \varepsilon d\zeta^{\frac{1}{2}})dx_2.$$

Así, en todo caso, cualquier superficie afín localmente homogénea de Tipo A es recurrente.

Recíprocamente, cualquier superficie afín localmente homogénea Tipo A con curvatura recurrente tiene operador curvatura antisimétrico nilpotente con independencia del plano elegido, puesto que

$$\begin{aligned} \det\rho &= -\tfrac{1}{2}e(\rho_{11;1} - \omega_1\rho_{11}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(c-f)(\rho_{12;1} - \omega_1\rho_{12}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}d(\rho_{22;1} - \omega_1\rho_{22}), \end{aligned}$$

donde $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2$. □

Observación 5.11. No toda conexión afín localmente homogénea de Tipo A es necesariamente recurrente. Si suponemos $b = c = 0$ en la Ecuación (5.11), tenemos en este caso que $\rho_{12} = 0$ $\rho_{12;2} = 2de(d-a)$, lo que muestra que estas conexiones no son recurrentes en general.

Conexiones afines localmente homogéneas de Tipo B

En esta parte haremos un estudio para las conexiones afines localmente homogéneas de Tipo B análogo al hecho para las de Tipo A. En primer lugar, el tensor de Ricci de una superficie afín localmente homogénea de Tipo B está dado por

$$
\begin{aligned}
\rho_{11} &= \tfrac{1}{x_1^2}\{(a-d+1)d+(f-c)b\},\\
\rho_{12} &= \tfrac{1}{x_1^2}\{cd-be+f\},\\
\rho_{21} &= \tfrac{1}{x_1^2}\{cd-be-c\},\\
\rho_{22} &= \tfrac{1}{x_1^2}\{(a-d-1)e+(f-c)c\}.
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

A la vista de las expresiones de las componentes del tensor de Ricci se observa que no es necesariamente equiafín. De hecho la condición de ser equiafín es equivalente a que las constantes c y f satisfagan $f = -c$. El siguiente resultado muestra consecuencias interesantes en este último caso.

Teorema 5.12. [41] *Sea (Σ, D) una superficie afín localmente homogénea de Tipo B equiafín. Entonces el tensor de Ricci define una métrica de curvatura seccional constante, o (Σ, D) es afín IP.*

Demostración. Un cálculo directo muestra que si el tensor de Ricci define una métrica en Σ, entonces su curvatura de Gauss verifica que

$$K \;=\; \tfrac{-1}{x_1^2}\tfrac{\rho_{22}}{\det(\rho)} = \tfrac{2c^2+e(d-a+1)}{4bc^3+(d^2-2ad-1)c^2+2(2d-a)bec+e(((a-d)^2-1)d-b^2e)},$$

de donde se sigue el resultado. □

A continuación analizamos las superficies afines localmente homogéneas de Tipo B que son proyectivamente llanas. Este resultado pone de manifiesto el hecho de que estas conexiones no son en general proyectivamente llanas, al contrario de lo que ocurría en el Tipo A.

Teorema 5.13. [41] *Sea (Σ, D) una superficie afín localmente homogénea de Tipo B. Si (Σ, D) es proyectivamente llana, entonces en un entorno de cada punto existe un sistema de coordenadas (x_1, x_2) de modo que D se expresa de una de las siguientes maneras:*

(i) $e = f = c = 0$, *o*

(ii) $e \neq 0$, $f = -c$, $a = \frac{3c^2+2de+e}{e}$, $b = \frac{-c^3-ce}{e^2}$.

Demostración. De las expresiones de las componentes del tensor de Ricci en la Ecuación (5.17) obtenemos que las componentes de la derivada covariante del tensor de Ricci de una superficie equiafín localmente homogénea de Tipo B verifican

$$
\begin{aligned}
\tfrac{x_1^3}{2}\rho_{11;1} &= (a+1)(d-a-1)d+(2a-d+3)bc+b^2e,\\
\tfrac{x_1^3}{2}\rho_{11;2} &= 2bc^2-adc+bde,\\
x_1^3\rho_{12;1} &= (a+4bc-2(a+1)d+2)c+(2d+3)be,\\
\tfrac{x_1^3}{2}\rho_{12;2} &= c^2d+bec+(d-a)de,\\
\tfrac{x_1^3}{2}\rho_{22;1} &= (d+1)(d-a+1)e+(d+3)c^2+bce,\\
\tfrac{x_1^3}{2}\rho_{22;2} &= -2c^3+be^2+(a-2d)ce,
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

con $\rho_{ij;k}=(D_{\partial_k}\rho)(\partial_i,\partial_j)$.

Recordemos que (Σ, D) es proyectivamente llana si y sólo si $(T^*\Sigma, g_D)$ es localmente conformemente llana, lo cual es equivalente a que su tensor de Weyl, W, sea idénticamente nulo. Se sigue que si una superficie afín localmente homogénea de Tipo B es proyectivamente llana, necesariamente su tensor de Ricci ρ es simétrico, puesto que $W(\partial_1,\partial_2,\partial_1,\partial_{1'})=\frac{c+f}{2x_1^2}$, lo que muestra que $f=-c$, que es exactamente la condición necesaria y suficiente para que el tensor de Ricci ρ sea simétrico. Suponiendo entonces esta condición $f=-c$, y teniendo en cuenta las expresiones dadas en la Ecuación (5.18), se tiene que (Σ, D) es proyectivamente llana si y sólo si

$$
\begin{aligned}
\rho_{21;1}-\rho_{11;2} &= \tfrac{c(a-2d+2)+3be}{x_1^3}=0,\\
\rho_{22;1}-\rho_{12;2} &= \tfrac{2\left(3c^2-ae+2de+e\right)}{x_1^3}=0.
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

Finalmente, las condiciones (i) y (ii) se obtienen como las soluciones de la Ecuación (5.19). □

En la última parte de esta sección clasificaremos las superficies afines localmente homogéneas de Tipo B cuyo operador de curvatura antisimétrico es nilpotente. El siguiente resultado nos muestra que dichas conexiones no son recurrentes en general, al contrario de lo que pasa con las conexiones localmente homogéneas de Tipo A.

Teorema 5.14. [41] *Sea (Σ, D) una superficie afín localmente homogénea de Tipo B. Entonces (Σ, D) es una superficie afín IP si y sólo si (Σ, D) es recurrente, o bien en un entorno de cada punto existe un sistema de coordenadas (x_1,x_2) en el cual la conexión D se expresa como*

$$
D_{\partial_1}\partial_1=\tfrac{a}{x_1}\partial_1+\tfrac{b}{x_1}\partial_2,\quad D_{\partial_1}\partial_2=\tfrac{c}{x_1}\partial_1+\tfrac{d}{x_1}\partial_2,\quad D_{\partial_2}\partial_2=\tfrac{e}{x_1}\partial_1-\tfrac{c}{x_1}\partial_2,
\tag{5.20}
$$

para ciertas constantes reales a, b, c, d y e verificando una de las siguientes condiciones:

(i) $b = 0$ *y*

(i.1) $d \neq 0,\ e = 0,\ c \neq 0,\ a = \frac{d^2-1}{2d}$, *ó*

(i.2) $d \cdot e \neq 0,\ c = 0,\ a = d \pm 1$, *ó*

(i.3) $d \cdot e \neq 0,\ c \neq 0,\ e \neq -\frac{c^2}{d},\ a = \frac{d(c^2+de)\pm\zeta^{\frac{1}{2}}}{de}$, *con* $\zeta = d(c^2 d + e)(c^2 + de) \geq 0$,

ó

(ii) $b \neq 0$ *y*

(ii.1) $d = 0,\ c \neq 0,\ e = \frac{-abc\pm\left(b^2c^2(a^2+4bc-1)\right)^{\frac{1}{2}}}{b^2}$, *con* $a^2 + 4bc - 1 \geq 0$, *ó*

(ii.2) $d \neq 0,\ a \neq \pm(d-1),\ c = \frac{(a-d+1)d}{2b},\ e = \frac{(a-d+1)(d-1)d}{2b^2}$, *ó*

(ii.3) $d \neq 0,\ c \notin \{0, \frac{ad}{b}, \frac{(a-d+1)d}{2b}\},\ e = \frac{((d-a)^2+4bc-1)d-2abc\pm\zeta^{\frac{1}{2}}}{2b^2}$, *con* $\zeta = ((d-a+1)d+2bc)((d-a-1)d+2bc)((d-a)^2+4bc-1) \geq 0$, *ó*

(ii.4) $d \neq 0,\ c = 0,\ a \neq d-1,\ e = \frac{d^3-2ad^2+(a^2-1)d\pm|d||(a-d)^2-1|}{2b^2} \neq 0$, *ó*

(ii.5) $d \neq 0,\ c = \frac{ad}{b},\ a \neq 1-d,\ e = \frac{d^3+2ad^2-(a^2+1)d\pm|d||(a+d)^2-1|}{2b^2} \neq -\frac{a^2 d}{b^2}$.

Demostración. Primeramente, usando la Ecuación (5.17) vemos que ρ es simétrico si y sólo si

$$f = -c, \tag{5.21}$$

lo cual asumimos en el resto de la demostración, y por tanto ρ es degenerado si y sólo si

$$\begin{aligned} b^2e^2 - \left\{d^3 - 2ad^2 + (a^2+4bc-1)d - 2abc\right\} e \\ - \left\{d^2 - 2ad + 4bc - 1\right\} c^2 = 0. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Analizamos a continuación las soluciones de esta ecuación procediendo de forma análoga a lo hecho en el Teorema 5.10 y usando la Ecuación (5.18). En primer lugar, si $b = 0$, la Ecuación (5.22) queda reducida a

$$dea^2 - 2d(c^2+de)a + (d^2-1)(c^2+de) = 0, \tag{5.23}$$

y por lo tanto tenemos alguno de los siguientes casos:

(B.1): $d = 0$. En este caso, $c = 0$ y se tiene que $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = -\frac{2}{x_1}dx_1$.

(B.2): $d \neq 0$, $e = 0$, $c = 0$. En este caso, $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = -\frac{2+2a}{x_1}dx_1$.

(B.3): $d \neq 0$, $e = 0$, $c \neq 0$. Para este caso, necesariamente $a = (2d)^{-1}(d^2 - 1)$ y se sigue que la conexión afín obtenida no es nunca recurrente (caso $(i.1)$). De hecho, si $D\rho = \omega \otimes \rho$, donde $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2$, se tiene que

$$\rho_{22;2} - \omega_2 \rho_{22} = \frac{2c^2(x_1\omega_2 - 2c)}{x_1^3},$$

y por lo tanto $\omega_2 = \frac{2c}{x_1}$; pero, bajo esta condición, $\rho_{12;2} - \omega_2\rho_{12} = \frac{2c^2}{x_1^3}$, expresión que nunca se anula.

(B.4): $d \neq 0 \neq e$. Fijémonos que, para $d \neq 0 \neq e$, la Ecuación (5.23) puede ser vista como una ecuación cuadrática en a; por lo tanto, $a = (de)^{-1}(d(c^2 + de) + \varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}})$, con $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ y $\zeta = d(c^2 d + e)(c^2 + de) \geq 0$. Ahora, un cálculo directo nos muestra que tal conexión no es nunca recurrente y por lo tanto se obtienen los casos $(i.2)$ o $(i.3)$. De hecho, escribamos $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2$. Para $c = 0$, vemos que $\zeta = d^2 e^2 \geq 0$, mientras que $a = d \pm 1$, y calculando $\rho_{12;2} - \omega_2\rho_{12} = \frac{-2\varepsilon|d||e|}{x_1^3}$, vemos que siempre es no nulo (caso $(i.2)$). Ahora, para $c \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} x_1^3\left(\rho_{12;1} - \omega_1\rho_{12}\right) &= \tfrac{c^3 d(1-2d) - cde(2d^2+d-2) - \varepsilon c(2d-1)\zeta^{\frac{1}{2}}}{de} - c(d-1)x_1\omega_1, \\ x_1^3\left(\rho_{12;2} - \omega_2\rho_{12}\right) &= -2\varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}} - c(d-1)x_1\omega_2. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Para $d = 1$ la segunda expresión queda reducida a $\rho_{12;2} - \omega_2\rho_{12} = \frac{-2\varepsilon|c^2+e|}{x_1^3}$; por tanto, si $e \neq -c^2$ la conexión afín no es recurrente (caso $(i.3)$ con $d = 1$), mientras que si $e = -c^2$ se obtiene que la conexión es localmente simétrica, $D\rho = 0$. Ahora para $d \neq 1$, ω_1 y ω_2 quedan totalmente determinados por la Ecuación (5.24) y obtenemos

$$\begin{aligned} &d\, x_1^3\left(\rho_{22;1} - \omega_1\rho_{22}\right) = c^2 + de - \varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}}, \\ &\tfrac{1}{2}c(d-1)e x_1^3\left(\rho_{11;2} - \omega_2\rho_{11}\right) = (c^2 + de)(d(c^2 + e) + \varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}}), \\ &\tfrac{1}{2}c(d-1)d\, x_1^3\left(\rho_{22;2} - \omega_2\rho_{22}\right) = (c^2 + de)(d(c^2 + e) - \varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Fijémonos que las tres expresiones anteriores no se anulan nunca simultáneamente para $e \neq -\frac{c^2}{d}$ y por tanto, en tal caso, la conexión afín obtenida no es nunca recurrente (caso $(i.3)$ con $d \neq 1$); para $e = -\frac{c^2}{d}$ tenemos que $\omega = -\frac{2}{x_1}dx_1$ y un cálculo directo nos muestra que $D\rho = \omega \otimes \rho$.

Finalmente, para $b \neq 0$, tenemos los siguientes casos:

(B.5): Viendo la Ecuación (5.22) como una ecuación cuadrática en e podemos despejarla. Más concretamente,

$$e = \frac{1}{2b^2}\left\{((d-a)^2 + 4bc - 1)d - 2abc + \varepsilon\zeta^{\frac{1}{2}}\right\},$$

con $\zeta = ((d-a+1)d+2bc)((d-a-1)d+2bc)((d-a)^2+4bc-1) \geq 0$ y $\varepsilon \in \{-1,1\}$. Sea $D\rho = \omega \otimes \rho$, con $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2$. En primer lugar, para $d=0$, tenemos

$$\frac{1}{2b} x_1^3 (\rho_{11;2} - \omega_2 \rho_{11}) = c(2c + x_1 \omega_2).$$

Entonces, si $c \neq 0$, se sigue que $\omega_2 = -\frac{2c}{x_1}$ y, bajo tal condición, $\rho_{12;2} - \omega_2 \rho_{12} = -\frac{2c^2}{x_1^3}$, que es no nulo (caso $(ii.1)$); si $c=0$, la conexión es localmente simétrica ($D\rho = 0$).

Finalmente, estudiaremos el caso $d \neq 0$. En este caso calculamos

$$\begin{aligned} x_1^3 (\rho_{11;1} - \omega_1 \rho_{11}) &= (a+d+3)((d-a-1)d+2bc) + \varepsilon \zeta^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + ((d-a-1)d+2bc) x_1 \omega_1, \\ x_1^3 (\rho_{11;2} - \omega_2 \rho_{11}) &= b^{-1} \left\{ ((d-a-1)d+2bc)((d-a+1)d+2bc) + d\varepsilon \zeta^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\quad + ((d-a-1)d+2bc) x_1 \omega_2. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $(d-a-1)d + 2bc = 0$, es decir, $c = \frac{(a-d+1)d}{2b}$, las expresiones anteriores se anulan y, además, $\rho_{12;1} - \omega_1 \rho_{12} = \frac{(a^2-(d-1)^2)d}{2bx_1^3}$. Se sigue que para $a \neq \pm(d-1)$ la conexión afín nunca es recurrente (caso $(ii.2)$), mientras que para $a = \pm(d-1)$ la conexión es localmente simétrica ($D\rho = 0$). Por otro lado, si $c \neq \frac{(a-d+1)d}{2b}$ entonces ω_1 y ω_2 están determinadas por las expresiones anteriores y se prueba que

$$2b^{-1} d(\rho_{12;1} - \omega_1 \rho_{12}) - (\rho_{12;2} - \omega_2 \rho_{12}) = \frac{2c(bc-ad)}{bx_1^3}.$$

Entonces, si $c(bc-ad) \neq 0$ la conexión afín no es recurrente (caso $(ii.3)$). Si $c=0$, entonces $c \neq \frac{(a-d+1)d}{2b}$ lo que significa que $a \neq d-1$ y $D\rho = \omega \otimes \rho$ si y sólo si $e=0$ (caso $(ii.4)$). Si $bc - ad = 0$, entonces $c \neq \frac{(a-d+1)d}{2b}$ significa que $a \neq 1-d$, y $D\rho = \omega \otimes \rho$ si y sólo si $e = -\frac{a^2 d}{b^2}$ (caso $(ii.5)$). □

Observación 5.15. Las conexiones afines localmente homogéneas proyectivamente llanas de Tipo B están totalmente determinadas por el Teorema 5.13 de la siguiente forma:

- (i) $e = f = c = 0$, ó
- (ii) $e \neq 0$, $f = -c$, $a = \frac{3c^2+2de+e}{e}$, $b = \frac{-c^3-ce}{e^2}$.

Es interesante destacar que, en el caso (i), el tensor de Ricci es siempre degenerado y las conexiones son recurrentes (ver Teorema 5.14). En el caso (ii) con $c=0$, el tensor de Ricci es degenerado para los casos en que $d=0$ ó $d=-2$; $d=0$ implica automáticamente que la conexión es llana, mientras que para $d=-2$ la conexión no es recurrente (ver Teorema 5.14-$(i.2)$). A continuación analizamos el caso (ii) con $c \neq 0$. En este caso, el tensor de Ricci es degenerado si y sólo si $d = -\frac{c^2}{e}$ ó $d = -\frac{c^2}{e} - 2$. Para $d = -\frac{c^2}{e}$ se obtiene de nuevo que la conexión es llana. Si $d = -\frac{c^2}{e} - 2$ y $b = 0$ tenemos las condiciones $a = -4$, $b = 0$, $c \neq 0$, $d = -1$ y $e = -c^2 \neq 0$, con lo cual estamos en el caso (i.3) del Teorema 5.14 y la conexión no es recurrente. Finalmente, si $d = -\frac{c^2}{e} - 2$ y $b \neq 0$, un cálculo largo pero directo nos muestra que, para $d = 0$, estamos en el caso (ii.1) del Teorema 5.14, mientras que para $d \neq 0$, estamos en el caso (ii.5) ó (ii.3) del Teorema 5.14, dependiendo de si c es igual a $\frac{ad}{b}$ o no; en cualquier caso se obtiene que de nuevo la conexión no es recurrente.

Relación entre los Tipos A y B de conexiones afines localmente homogéneas

Como aplicación de los resultados vistos hasta el momento, daremos respuesta a un problema planteado por O. Kowalski sobre cuándo o no los Tipos A y B son afínmente equivalentes, viendo que el único caso afínmente equivalente, no llano, entre los Tipos A y B viene dado por

$$D_{\partial_1}\partial_1 = \frac{1}{x_1}(a\partial_1 + b\partial_2), \qquad D_{\partial_1}\partial_2 = \frac{1}{x_1}d\partial_2, \qquad D_{\partial_2}\partial_2 = 0. \tag{5.25}$$

Primeramente, recordemos que cualquier conexión afín localmente homogénea de Tipo A es proyectivamente llana (ver Teorema 5.9). Además el tensor de Ricci es siempre simétrico y define una métrica llana o, en otro caso es degenerado (ver Teorema 5.8). Debemos destacar que en este último caso el tensor de Ricci es siempre recurrente como ya vimos en el Teorema 5.10.

En lo que sigue usaremos las propiedades anteriores para analizar y diferenciar, cuando sea posible, los Tipos A y B. Fijémonos que las conexiones afines localmente homogéneas de Tipo B que son proyectivamente llanas han sido clasificadas en el Teorema 5.13 correspondiéndose con los casos:

(i) $e = f = c = 0$, ó

(ii) $e \neq 0$, $f = -c$, $a = \frac{3c^2+2de+e}{e}$, $b = \frac{-c^3-ce}{e^2}$.

En el caso (ii), si el tensor de Ricci es no degenerado entonces define una métrica de curvatura seccional no nula. Además, si el tensor de Ricci es degenerado y, suponiendo que la conexión es no llana, la Observación 5.15 muestra que tal conexión no puede ser proyectivamente llana y recurrente a un mismo tiempo y por tanto no puede ser afínmente equivalente, en ningún caso, a una conexión localmente homogénea de Tipo A.

Ahora veremos que la conexión (i) anterior es afínmente equivalente a una conexión afín localmente homogénea de Tipo A. Para ello usaremos un razonamiento similar al visto en [5, 122]. Cualquier conexión afín localmente homogénea de Tipo A admite un par de campos de vectores afines Killing linealmente independientes de modo que $[X, Y] = 0$ (simplemente tomando $X = \partial_1$, $Y = \partial_2$). Recíprocamente, si existen dos campos afines Killing linealmente independientes y que conmuten X, Y, entonces existe un sistema de coordenadas locales (x_1, x_2) tal que $X = \partial_1$, $Y = \partial_2$ y tal que todos los símbolos de Christoffel de la conexión son constantes (i.e., de Tipo A).

Un campo de vectores $X = A(x_1,x_2)\partial_1 + B(x_1,x_2)\partial_2$ en un entorno coordenado $\mathcal{U}(x_1,x_2)$ de la conexión (i) es afín Killing (es decir, $[X, D_Y Z] - D_Y[X,Z] - D_{[X,Y]}Z = 0$ para cualesquiera campos de vectores Y, Z) si y sólo si (ver ecuación (6) en [122])

$$\begin{aligned} &A_{11} + \frac{a}{x_1}A_1 - \frac{b}{x_1}A_2 - \frac{a}{x_1^2}A = 0, \quad A_{12} + \frac{a-d}{x_1}A_2 = 0, \quad A_{22} = 0, \\ &B_{11} + \frac{2b}{x_1}A_1 + \frac{2d-a}{x_1}B_1 - \frac{b}{x_1}B_2 - \frac{b}{x_1^2}A = 0, \\ &B_{12} + \frac{d}{x_1}A_1 + \frac{b}{x_1}A_2 - \frac{d}{x_1^2}A = 0, \quad B_{22} + \frac{2d}{x_1}A_2 = 0. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Ahora un cálculo directo nos muestra que

$$X = x_1\partial_2, \qquad Y = x_1\partial_1 + (x_1+x_2)\partial_2, \qquad a - 2d = 0,$$

y

$$X = \partial_2, \qquad Y = x_1\partial_1 + \frac{b}{a-2d}x_1\partial_2, \qquad a - 2d \neq 0,$$

son un par de campos de vectores afín Killing linealmente independientes y que conmutan y por lo tanto la conexión es de Tipo A independientemente de los valores de las constantes.

Conexiones afines localmente homogéneas recurrentes y proyectivamente llanas con tensor de Ricci degenerado

Fijémonos que como consecuencia de los Teoremas 5.13 y 5.14 las conexiones afines localmente homogéneas dadas por la Ecuación (5.25) son proyectivamente llanas y recurrentes con tensor de Ricci simétrico y degenerado. Sin embargo, no toda conexión afín localmente homogénea, proyectivamente llana y recurrente con tensor de Ricci simétrico y degenerado es necesariamente de Tipo B. En lo que sigue completaremos el análisis comenzado anteriormente dando una completa descripción de todas las conexiones afines localmente homogéneas proyectivamente llanas, recurrentes con tensor de Ricci simétrico degenerado. El siguiente resultado da algo de luz en este sentido.

Teorema 5.16. [41] *Sea (Σ, D) una superficie afín con tensor de Ricci simétrico y degenerado, recurrente y proyectivamente llana. Entonces (Σ, D) es localmente homogénea si y sólo si en un entorno de cada punto existe un sistema de coordenadas (x_1,x_2) en el cual la única componente no nula de la conexión D viene dada por*

$$D_{\partial_1}\partial_1 = x_2\frac{\mu}{(\alpha+\kappa x_1)^2}\partial_2, \tag{5.27}$$

para algunas constantes μ, α y κ. Además, tal conexión es localmente homogénea de Tipo A, y es además de Tipo B si y sólo si se verifica la desigualdad $\kappa^2 - 4\mu \geq 0$.

Demostración. Se sigue del Teorema 5.6 que una conexión afín con curvatura recurrente y con tensor de Ricci simétrico y degenerado se expresa, en un sistema de coordenadas apropiado (x_1, x_2), como

$$D_{\partial_1}\partial_1 = a(x_1, x_2)\partial_2, \tag{5.28}$$

para alguna función $a(x_1, x_2)$. Ahora, un cálculo directo nos muestra que la conexión dada por la Ecuación (5.28) es proyectivamente llana si y sólo si $a(x_1, x_2) = x_2\theta(x_1) + \gamma(x_1)$, para ciertas funciones θ y γ. Fijémonos que, sin pérdida alguna de generalidad, podemos suponer que $\gamma(x_1) \equiv 0$, usando el teorema de equivalencia en [117, Teorema 7.2] puesto que el tensor de Ricci y sus derivadas covariantes son independientes de γ.

Un campo de vectores X como $X = A(x_1, x_2)\partial_1 + B(x_1, x_2)\partial_2$ es afín Killing si y sólo si

$$\begin{aligned} &A_{12} = 0, \qquad A_{22} = 0, \qquad B_{22} = 0, \\ &A_{11} - x_2\theta(x_1)A_2 = 0, \qquad B_{12} + x_2\theta(x_1)A_2 = 0, \\ &B_{11} + 2x_2\theta(x_1)A_1 - x_2\theta(x_1)B_2 + x_2\theta'(x_1)A + \theta(x_1)B = 0. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Veremos ahora que la conexión debe ser de la forma dada en la Ecuación (5.27). Si integramos la anterior ecuación obtenemos que tal campo de vectores afín Killing debe ser de la forma

$$X(x_1, x_2) = (x_1\kappa + \alpha)\partial_1 + (x_2\beta + b(x_1))\partial_2 \tag{5.30}$$

para constantes κ, α, β y una función $b(x_1)$ la cual es solución de

$$b''(x_1) + b(x_1)\theta(x_1) + 2x_2\kappa\theta(x_1) + x_2(\alpha + x_1\kappa)\theta'(x_1) = 0. \tag{5.31}$$

Ahora derivando la Ecuación (5.31) con respecto a x_2, obtenemos

$$(x_1\kappa + \alpha)\theta'(x_1) + 2\kappa\theta(x_1) = 0, \tag{5.32}$$

lo que muestra que

$$\theta(x_1) = \frac{\mu}{(x_1\kappa + \alpha)^2}$$

para ciertas constantes μ, κ y α, donde κ y α no son nunca simultáneamente cero, demostrando la Ecuación (5.27). Fijémonos que para $\kappa = \alpha = 0$ cualquier campo de vectores afín Killing debe ser de la forma $X(x_1, x_2) = (x_2\beta + b(x_1))\partial_2$, y por tanto no existen dos campos de vectores afín Killing linealmente independientes, en contradicción con la homogeneidad local.

En lo que sigue, tomamos la conexión dada por la Ecuación (5.27). Fijémonos que tal conexión es de Tipo A, puesto que un cálculo directo nos muestra que

$$X(x_1, x_2) = (x_1\kappa + \alpha)\partial_1, \qquad Y(x_1, x_2) = x_2\partial_2$$

son dos campos de vectores afín Killing linealmente independientes que conmutan entre sí.

Finalmente, veremos que tal conexión dada por la Ecuación (5.27) es de Tipo B si y sólo si $\kappa^2 - 4\mu \geq 0$. De la Ecuación (5.29), y procediendo como anteriormente, se sigue que un campo afín Killing debe tener la forma

$$X(x_1, x_2) = (x_1\lambda + \nu)\partial_1 + (x_2\beta + b(x_1))\partial_2, \tag{5.33}$$

para ciertas constantes λ, ν y β, y una función $b(x_1)$, tal que

$$\lambda\alpha - \nu\kappa = 0, \qquad \mu b(x_1) + (x_1\kappa + \alpha)^2 b''(x_1) = 0. \tag{5.34}$$

Como consecuencia, suponiendo $\kappa \neq 0$ en la Ecuación (5.27), si dos campos de vectores afines Killing X, Y verifican $[X, Y] = X$, entonces

$$\begin{aligned} X(x_1, x_2) &= C(x_1\kappa + \alpha)^{\frac{\beta-1}{\lambda}}\partial_2, \\ Y(x_1, x_2) &= \lambda(x_1 + \tfrac{\alpha}{\kappa})\partial_1 + (x_2\beta + b(x_1))\partial_2, \end{aligned} \tag{5.35}$$

para ciertas constantes C, λ, β y alguna función $b(x_1)$ tales que

$$(\beta - 1)\kappa^2(\beta - \lambda - 1) + \lambda^2\mu = 0, \qquad \mu b(x_1) + (x_1\kappa + \alpha)^2 b''(x_1) = 0. \tag{5.36}$$

Además, la primera expresión en la Ecuación (5.36) tiene soluciones reales si y sólo si $\kappa^2 - 4\mu \geq 0$. En este caso eligiendo X e Y como

$$\begin{aligned} X(x_1, x_2) &= (x_1\kappa + \alpha)^{\frac{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 4\mu}}{2\kappa}}\partial_2, \\ Y(x_1, x_2) &= (x_1\kappa + \alpha)\partial_1 + x_2(1 + \tfrac{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 4\mu}}{2})\partial_2, \end{aligned}$$

se sigue que la conexión afín D es localmente homogénea de Tipo B.

Ahora, pongamos $\kappa = 0$ en la Ecuación (5.27). Si dos campos de vectores afín Killing X, Y verifican $[X, Y] = X$, entonces

$$\begin{aligned} X(x_1, x_2) &= Ce^{\frac{x_1(\beta-1)}{\nu}}\partial_2, \\ Y(x_1, x_2) &= \nu\partial_1 + (x_2\beta + b(x_1))\partial_2, \end{aligned} \tag{5.37}$$

para ciertas constantes C, ν, β y alguna función $b(x_1)$ tal que

$$\alpha^2(\beta - 1)^2 + \nu^2\mu = 0, \qquad \mu b(x_1) + \alpha^2 b''(x_1) = 0. \tag{5.38}$$

Entonces, la primera expresión en la Ecuación (5.38) tiene soluciones reales si y sólo si $\mu \leq 0$. Además, en este caso,

$$\begin{aligned} X(x_1, x_2) &= e^{-\frac{x_1\sqrt{-\mu}}{\alpha}}\partial_2, \\ Y(x_1, x_2) &= \alpha\partial_1 + x_2(1 - \sqrt{-\mu})\partial_2, \end{aligned}$$

son campos de vectores afín Killing verificando $[X, Y] = X$, lo que demuestra el resultado. $\square$

Observación 5.17. Una conexión dada por la Ecuación (5.27) es llana si y sólo si $\mu = 0$, y localmente simétrica si y sólo si $\kappa = 0$. Por tanto, una conexión afín localmente simétrica y proyectivamente llana con tensor de Ricci simétrico y degenerado es de Tipo B si y sólo si el único símbolo de Christoffel no nulo es $\Gamma_{11}^{2} = Kx_2$ con $K \leq 0$.

Parte II

Generalizaciones de Espacios Simétricos

Capítulo 6

$\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{P}$ espacios

Los espacios localmente simétricos Riemannianos están caracterizados por el hecho de que para cada geodésica γ el operador de Jacobi correspondiente, $\mathcal{J}(\gamma)$, tiene autovalores constantes y autoespacios paralelos a lo largo de γ [9]. Esta caracterización se puede extender al caso Lorentziano para geodésicas temporales como consecuencia del trabajo de [90] y, por tanto, una variedad Lorentziana es localmente simétrica si y sólo si para cada geodésica temporal γ el correspondiente operador de Jacobi $\mathcal{J}(\gamma)$ tiene autovalores constantes y autoespacios paralelos a lo largo de γ. Sin embargo, es importante señalar que dicha caracterización no es válida cuando se consideran variedades pseudo-Riemannianas de otras signaturas [19].

Motivados por las consideraciones anteriores, en [9] se inició un estudio de dichas condiciones de forma separada, como generalizaciones de los espacios simétricos. El objetivo de este capítulo es contribuir al estudio de los espacios Lorentzianos $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{P}$:

($\mathfrak{C}$) Una variedad de Lorentz (M, g) se dice que es un $\mathfrak{C}$-*espacio* si los autovalores de los operadores de Jacobi son constantes a lo largo de geodésicas temporales.

($\mathfrak{P}$) Una variedad de Lorentz (M, g) se dice que es un $\mathfrak{P}$-*espacio* si los autoespacios de los operadores de Jacobi son paralelos a lo largo de geodésicas temporales.

Estudiaremos estas dos clases de espacios en el contexto de los espacios Lorentzianos homogéneos y curvatura homogéneos de dimensión tres. Como consecuencia de nuestro estudio se pondrán de manifiesto algunas diferencias esenciales entre las situaciones Riemanniana y Lorentziana:

- *Existencia de $\mathfrak{C}$-espacios Lorentzianos no naturalmente reductivos, incluso no localmente homogéneos.*

- *Existencia de $\mathfrak{P}$-espacios Lorentzianos homogéneos.*

$\mathfrak{P}$-espacios

En geometría Lorentziana, el operador de Jacobi a lo largo de geodésicas temporales γ es diagonalizable (puesto que la métrica inducida en $\gamma^{\perp}$ es definida positiva). Este hecho, que no es cierto para métricas pseudo-Riemannianas de signatura arbitraria, tiene implicaciones importantes. En primer lugar, obsérvese que la condición de ser un $\mathfrak{P}$-espacio es equivalente a la existencia de una base de autovectores del operador de Jacobi $\mathcal{J}(\gamma)$ paralela a lo largo de γ y por lo tanto una variedad de Lorentz es un $\mathfrak{P}$-espacio si y sólo si el operador de Jacobi y el operador de Szabó conmutan para cualquier geodésica temporal, es decir

$$\mathcal{J}(\gamma) \circ \mathcal{S}(\gamma) = \mathcal{S}(\gamma) \circ \mathcal{J}(\gamma).$$

Un cálculo directo nos muestra que esta condición de conmutatividad es cierta para geodésicas temporales si y sólo si es cierta para cualquier geodésica, y por tanto *una variedad Lorentziana (M, g) es un $\mathfrak{P}$-espacio si y sólo si para cada geodésica los operadores de Jacobi y Szabó asociados conmutan.*

Una consecuencia inmediata de este hecho es que toda variedad de Lorentz con curvatura recurrente (i.e., $\nabla R = \omega \otimes R$ para alguna 1-forma ω) es un $\mathfrak{P}$-espacio. Centrándonos en las variedades homogéneas, en este capítulo obtendremos la siguiente caracterización de los $\mathfrak{P}$-espacios:

Teorema 6.1. [42] *Sea (M, g) una variedad de Lorentz de dimensión tres homogénea y no simétrica. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) (M, g) *es un $\mathfrak{P}$-espacio.*

(ii) (M, g) *es Ricci recurrente.*

(iii) (M, g) *es curvatura recurrente.*

(iv) El operador de Ricci de (M, g) es nilpotente en dos pasos.

Es de destacar que el anterior resultado sigue siendo cierto si reemplazamos la hipótesis de homogeneidad por la más débil de que la variedad (M, g) sea 1-curvatura homogénea (véase Teorema 6.10).

$\mathfrak{C}$-espacios

Puesto que los autovalores de los operadores de Jacobi están completamente determinados por sus correspondientes funciones simétricas elementales, una variedad de Lorentz es un $\mathfrak{C}$-espacio si y sólo si para cada geodésica γ, estas funciones son constantes a lo largo de γ, esto es

$$\nabla_{\gamma} \operatorname{traza} \mathcal{J}^{(k)}(\gamma) = 0, \quad \text{para todo } k = 1, \ldots, \dim M - 1.$$

Estas condiciones son conocidas en la literatura como las condiciones de Ledger impares. La primera de tales condiciones ($\nabla_{\gamma} \operatorname{traza} \mathcal{J}(\gamma) = 0$) implica que el tensor de Ricci es cíclico paralelo, y por lo tanto las variedades de Riemann de dimensión tres que son $\mathfrak{C}$-espacios son localmente isométricas a espacios homogéneos naturalmente reductivos (ver [9, 148]).

Procediendo como en [9], *una variedad de Lorentz* (M, g) *es un* $\mathfrak{C}$*-espacio si y sólo si para cada geodésica* γ *existe un endomorfismo* T_γ *tal que los operadores de Jacobi y Szabó asociados verifican* $\mathcal{S}(\gamma) = \mathcal{J}(\gamma) \circ T_\gamma - T_\gamma \circ \mathcal{J}(\gamma)$. Por tanto, toda variedad de Lorentz homogénea y naturalmente reductiva es un $\mathfrak{C}$-espacio. La situación Lorentziana es más rica que la Riemanniana puesto que existen ejemplos de $\mathfrak{C}$-espacios los cuales no son naturalmente reductivos ni localmente homogéneos.

Teorema 6.2. [42] *Sea* (M, g) *una variedad de Lorentz* 3*-dimensional homogénea. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) (M, g) *es un* $\mathfrak{C}$*-espacio.*

(ii) El tensor de Ricci de (M, g) *es cíclico paralelo.*

El anterior resultado sigue siendo válido si rebajamos la condición de homogeneidad por la más débil de que la variedad (M, g) sea curvatura homogénea (Teorema 6.11). Como una consecuencia existen $\mathfrak{C}$-espacios Lorentzianos de dimensión tres que no son localmente homogéneos.

Estructura del capítulo

Este capítulo se estructura de la siguiente manera. En la Sección 6.1 recordaremos algunos conceptos previos sobre grupos de Lie de dimensión tres que serán de utilidad posteriormente. Las Secciones 6.2 y 6.3 están dedicadas a la demostración de los Teoremas 6.1 y 6.2, respectivamente. Estos resultados se pueden generalizar al contexto de variedades que son curvatura homogénea como se mostrará en la Sección 6.4, donde se dará una respuesta completa para variedades de Lorentz de dimensión tres 1-curvatura homogéneas (ver Teoremas 6.10 y 6.11). Finalmente, en la Sección 6.5 se estudiarán ciertas clases de espacios que se definen de modo análogo a las clases de $\mathfrak{P}$-espacios y $\mathfrak{C}$-espacios en el contexto del operador de curvatura antisimétrico a lo largo de círculos. Los resultados principales serán expuestos en los Teoremas 6.13 y 6.14, omitiendo las demostraciones pues esencialmente se obtienen de modo análogo a las expuestas en los casos de los $\mathfrak{C}$-espacios y $\mathfrak{P}$-espacios. En lugar de ello, destacaremos algunas diferencias importantes entre las distintas clases de espacios Lorentzianos considerados.

6.1. Variedades de Lorentz homogéneas de dimensión tres

Es un hecho bien conocido que cualquier variedad homogénea de Lorentz de dimensión tres completa y simplemente conexa es un grupo de Lie [31]. De nuevo con el objetivo de que esta memoria sea lo más autocontenida posible incluimos una breve descripción de todos los grupos de Lie en dimensión tres unimodulares y no unimodulares.

Grupos de Lie unimodulares

Denotamos por $\times$ el producto vectorial Lorentziano en $\mathbb{R}^3_1$ inducido por el producto de los paracuaternios (es decir, $e_1 \times e_2 = -e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$, donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal de signatura $(++-)$). Entonces $[Z, Y] = L(Z \times Y)$ define un álgebra de Lie, la cual es unimodular si y sólo si L es un endomorfismo autoadjunto de $\mathfrak{g}$ [150]. Considerando las diferentes formas de Jordan de L, tenemos las cuatro clases siguientes de álgebras de Lie unimodulares de dimensión tres (en este capítulo seguiremos la notación establecida en [83]):

Tipo Ia. Si L es diagonalizable con autovalores $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ con respecto a una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de signatura $(++-)$, entonces la correspondiente álgebra de Lie viene dada por

$$(\mathfrak{g}_{Ia}): \qquad [e_1, e_2] = -\gamma e_3, \quad [e_1, e_3] = -\beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1.$$

En este caso el tensor curvatura viene dado, salvo las $\mathbb{Z}_2$-simetrías usuales, por

$$\begin{aligned} R_{1221} &= \tfrac{1}{4}\left(\alpha^2 + \beta^2 - 3\gamma^2 - 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma\right), \\ R_{1313} &= \tfrac{1}{4}\left(\alpha^2 - 3\beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma\right), \\ R_{2332} &= \tfrac{1}{4}\left(3\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma\right), \end{aligned}$$

y el operador de Ricci es diagonalizable con autovalores

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}((\beta-\gamma)^2 - \alpha^2), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}((\alpha-\gamma)^2 - \beta^2), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}((\alpha-\beta)^2 - \gamma^2).$$

Tipo Ib. Supongamos ahora que L tiene un autovalor complejo. Entonces, con respecto a una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de signatura $(++-)$, se expresa de la forma

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\beta \\ 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \beta \neq 0,$$

y la correspondiente álgebra de Lie se expresa con respecto a esta base como

$$(\mathfrak{g}_{Ib}): \qquad [e_1, e_2] = \beta e_2 - \gamma e_3, \quad [e_1, e_3] = -\gamma e_2 - \beta e_3, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1.$$

Las componentes no nulas del tensor curvatura (salvo las $\mathbb{Z}_2$-simetrías usuales) vienen dadas por

$$R_{1221} = R_{1313} = \tfrac{1}{4}\left(\alpha^2 + 4\beta^2\right), \quad R_{2332} = \tfrac{3}{4}\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\gamma, \quad R_{1231} = \beta(\alpha - 2\gamma),$$

y el operador de Ricci, cuando se expresa con respecto a dicha base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, se expresa como

$$Ric = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\alpha^2 + 4\beta^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\gamma) & -\beta(\alpha - 2\gamma) \\ 0 & \beta(\alpha - 2\gamma) & \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\gamma) \end{pmatrix}, \qquad \beta \neq 0.$$

Entonces, para $\alpha \neq 2\gamma$ el operador de Ricci tiene autovalores complejos, mientras que para el caso $\alpha = 2\gamma$ el operador de Ricci es diagonalizable con autovalores $\lambda_1 = -2(\beta^2 + \gamma^2)$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

<u>*Tipo II*</u>. Supongamos ahora que L tiene una raíz doble de su polinomio mínimo. Entonces, con respecto a una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de signatura $(++-)$, se expresa como

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \beta & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \beta \end{pmatrix}$$

y la correspondiente álgebra de Lie se expresa como

$$(\mathfrak{g}_{II}): \quad [e_1, e_2] = \tfrac{1}{2}e_2 - (\beta - \tfrac{1}{2})e_3, \quad [e_1, e_3] = -(\beta + \tfrac{1}{2})e_2 - \tfrac{1}{2}e_3, \quad [e_2, e_3] = \alpha e_1.$$

De nuevo las componentes no nulas del tensor curvatura, salvo las $\mathbb{Z}_2$-simetrías, vienen dadas como

$$R_{1221} = \tfrac{1}{4}\left(\alpha^2 - 2\alpha + 4\beta\right), \qquad R_{1313} = \tfrac{1}{4}\left(\alpha^2 + 2\alpha - 4\beta\right),$$
$$R_{2332} = \tfrac{1}{4}\alpha(3\alpha - 4\beta), \qquad R_{1231} = \tfrac{1}{2}\alpha - \beta,$$

y por tanto el operador de Ricci, cuando se expresa con respecto a la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, se expresa como

$$Ric = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha-2\beta) & -\frac{1}{2}\alpha + \beta \\ 0 & \frac{1}{2}(\alpha - 2\beta) & \frac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha-2\beta) \end{pmatrix},$$

con autovalores $-\frac{1}{2}\alpha^2$ y $\frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\beta)$, el último de multiplicidad dos.

<u>*Tipo III*</u>. Supongamos finalmente que L tiene una raíz triple de su polinomio mínimo. Entonces, con respecto a una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de signatura $(++-)$, se expresa como

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \alpha & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

y la correspondiente álgebra de Lie está dada por

$$(\mathfrak{g}_{III}): \begin{cases} [e_1, e_2] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \alpha e_3, & [e_1, e_3] = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \alpha e_2, \\ [e_2, e_3] = \alpha e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3. & \end{cases}$$

Por tanto las componentes no nulas del tensor curvatura vienen dadas por

$$R_{1221} = \tfrac{1}{4}\left(\alpha^2 + 4\right), \qquad R_{1331} = 1 - \tfrac{1}{4}\alpha^2, \qquad R_{2323} = \tfrac{1}{4}\alpha^2,$$
$$R_{1231} = 1, \qquad R_{1223} = R_{1323} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\alpha,$$

y el operador de Ricci, expresado en esta base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, está dado por

$$Ric = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha^2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha & -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha & -\frac{1}{2}(\alpha^2+2) & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha & 1 & 1-\frac{1}{2}\alpha^2 \end{pmatrix},$$

con un único autovalor $-\frac{1}{2}\alpha^2$, el cual es una raíz triple de su polinomio mínimo en el caso en el que $\alpha \neq 0$, mientras que el operador de Ricci es nilpotente en dos pasos en el caso $\alpha = 0$.

Grupos de Lie no unimodulares

Consideraremos ahora el caso no unimodular. Se sigue del trabajo de Cordero y Parker [54] que un álgebra de Lie Lorentziana no unimodular de curvatura seccional no constante viene dada, con respecto a una base adecuada $\{e_1, e_2, e_3\}$, por

$$(\mathfrak{g}_{IV}): \qquad [e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad [e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2,$$

donde $\alpha + \delta \neq 0$ y una de las siguientes condiciones se verifica:

IV.1 $\{e_1, e_2, e_3\}$ es ortonormal con $\langle e_1, e_1\rangle = -\langle e_2, e_2\rangle = -\langle e_3, e_3\rangle = -1$ y las constantes de estructura verifican $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$.

IV.2 $\{e_1, e_2, e_3\}$ es ortonormal con $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = -\langle e_3, e_3\rangle = 1$ y las constantes de estructura verifican $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

IV.3 $\{e_1, e_2, e_3\}$ es pseudo-ortonormal con

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y las constantes de estructura verifican $\alpha\gamma = 0$.

Ahora, consideramos $\mathfrak{g}_{IV}$ como en IV.1. Entonces las componentes no nulas del tensor curvatura vienen dadas por

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \tfrac{1}{4}\left(\beta^2 + \gamma^2 + 4\alpha\delta - 2\beta\gamma\right), \\ R_{1313} &= \tfrac{1}{4}\left(4\alpha^2 - 3\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\right), \\ R_{2332} &= \tfrac{1}{4}\left(\beta^2 - 3\gamma^2 + 4\delta^2 + 2\beta\gamma\right), \end{aligned}$$

y el operador de Ricci es diagonalizable con autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha(\alpha+\delta))$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2 + 2\delta(\alpha+\delta))$ y $\lambda_3 = \frac{1}{2}((\beta-\gamma)^2 - 2(\alpha^2+\delta^2))$.

Si suponemos ahora que $\mathfrak{g}_{IV}$ es de la forma IV.2, entonces un cálculo directo nos muestra que las componentes no nulas del tensor curvatura vienen dadas por

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \alpha\delta - \tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)^2, \\ R_{1331} &= \tfrac{1}{4}\left(4\alpha^2 + 3\beta^2 - \gamma^2 + 2\beta\gamma\right), \\ R_{2323} &= \tfrac{1}{4}\left(\beta^2 - 3\gamma^2 - 4\delta^2 - 2\beta\gamma\right), \end{aligned}$$

y el operador de Ricci es diagonalizable con autovalores $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha(\alpha+\delta))$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2 - 2\delta(\alpha+\delta))$ y $\lambda_3 = \frac{1}{2}((\beta+\gamma)^2 + 2(\alpha^2+\delta^2))$.

Finalmente, sea $\mathfrak{g}_{IV}$ como IV.3. En este caso las componentes no nulas del tensor curvatura vienen dadas con respecto a la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ por

$$R_{1213} = \tfrac{1}{4}\gamma^2, \qquad R_{1331} = \alpha^2 - \alpha\delta + \beta\gamma, \qquad R_{2332} = \tfrac{3}{4}\gamma^2,$$

y el operador de Ricci se expresa como

$$Ric = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma^2 & \alpha^2 - \alpha\delta + \beta\gamma \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma^2 \end{pmatrix}$$

con autovalores $\lambda_1 = -\lambda_2 = -\lambda_3 = -\frac{1}{2}\gamma^2$.

Grupos de Lie localmente simétricos

Los grupos de Lie de dimensión tres Lorentzianos localmente simétricos han sido estudiados por Calvaruso en [32]. A continuación expresaremos esta clasificación adaptada a nuestro contexto para mantener la notación usada hasta este momento.

Teorema 6.3. *Una variedad de Lorentz (M, g) de dimensión tres homogénea es localmente simétrica si y sólo si se cumple uno de los siguientes casos:*

(a) M es de Tipo Ia con $\alpha = \beta = \gamma$, o cualquier permutación cíclica de $\alpha = \beta$, $\gamma = 0$. En cualquiera de estos casos la variedad es de curvatura seccional constante.

(b) M es de Tipo II con $\alpha = \beta = 0$, y por tanto llana.

(c) M es de Tipo IV.1 con curvatura seccional constante o, en otro caso, se tiene que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y $\delta \neq 0$, o $\beta = \gamma = \delta = 0$ y $\alpha \neq 0$.

(d) M es de Tipo IV.2 con curvatura seccional constante o, en otro caso, se tiene que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y $\delta \neq 0$, o $\beta = \gamma = \delta = 0$ y $\alpha \neq 0$.

(e) M es de Tipo IV.3 con $\gamma = \delta = 0$ y $\alpha \neq 0$, o es llana.

Observación 6.4. En vista del anterior resultado, los espacios localmente simétricos de Lorentz de dimensión tres se corresponden con una de las siguientes subclases: (1) espacios de curvatura seccional constante, (2) productos de un intervalo real y una superficie de curvatura de Gauss constante, y (3) variedades de Walker localmente simétricas con operador de Ricci nilpotente en dos pasos. Esta última clase (Tipo IV.3 con $\gamma = \delta = 0$ y $\alpha \neq 0$) se puede describir localmente en coordenadas de Walker (t, x, y) por la métrica $g = 2\,dt \circ dy + \varepsilon\, dx \circ dx + \kappa\, x^2\, dy \circ dy$, donde $\varepsilon^2 = 1$, $\kappa \neq 0$ [21]. Por tanto, los grupos de Lie del Teorema 6.3–(e) son variedades de Walker.

6.2. $\mathfrak{P}$-espacios homogéneos

Al contrario de lo que ocurre en el caso Riemanniano, mostraremos que existen ejemplos de variedades de Lorentz 3-dimensionales homogéneas que son $\mathfrak{P}$-espacios (es decir, los autoespacios de los operadores de Jacobi son paralelos a lo largo de geodésicas temporales). El siguiente lema (el cual se prueba con un razonamiento análogo al utilizado en [9, 90]), nos proporciona una caracterización algebraica de los $\mathfrak{P}$-espacios.

Lema 6.5. [42] *Para una variedad de Lorentz (M, g) las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) (M, g) *es un $\mathfrak{P}$-espacio.*

(ii) Para cada punto $p \in M$ y para cada vector temporal $u \in T_pM$, el operador de Jacobi y el operador de Szabó conmutan, es decir, $\mathcal{S}(u) \circ \mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(u) \circ \mathcal{S}(u) = 0$.

(iii) Para cada punto $p \in M$ y para cada vector $u \in T_pM$, el operador de Jacobi y el operador de Szabó conmutan, es decir, $\mathcal{S}(u) \circ \mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(u) \circ \mathcal{S}(u) = 0$.

Teorema 6.6. [42] *Sea (M, g) una variedad de Lorentz de dimensión tres homogénea y no simétrica. M es un $\mathfrak{P}$-espacio si y sólo si el operador de Ricci es nilpotente en dos pasos. Además cualquier $\mathfrak{P}$-espacio de ese tipo es localmente isométrico a uno de los siguientes grupos de Lie:*

(a) Un grupo de Lie unimodular de Tipo II con $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$, o

(b) un grupo de Lie unimodular de Tipo III con $\alpha = 0$, o

(c) un grupo de Lie no unimodular de Tipo IV.3 con $\gamma = 0$ y $\alpha\delta(\alpha - \delta) \neq 0$.

Demostración. Para la demostración de este teorema usaremos la caracterización vista en el Lema 6.5–(*iii*). Para medir la falta de conmutatividad entre el operador de Jacobi y el operador de Szabó procedemos de la siguiente manera. Sea $u = \sum u_i e_i$ un vector arbitrario (donde $\{e_i\}$ es la base correspondiente vista en la Sección 6.1). Entonces, un cálculo directo nos muestra que para los grupos de Lie correspondientes a los Tipos Ia–IV.2, se tiene que

$$\mathcal{S}(u)\circ\mathcal{J}(u)-\mathcal{J}(u)\circ\mathcal{S}(u)=\tfrac{1}{2}\psi(u)\begin{pmatrix}0 & -u_3 & u_2\\ \varepsilon u_3 & 0 & -\varepsilon u_1\\ u_2 & -u_1 & 0\end{pmatrix},\qquad \varepsilon^2=1, \tag{6.1}$$

donde la función $\psi(u)$ es distinta para cada uno de los diferentes tipos de grupos de Lie considerados. Estudiaremos todas las posibilidades de forma separada.

<u>*Tipo Ia*</u>. En este caso $\varepsilon=1$ y la función ψ de la Ecuación (6.1) está dada por

$$\begin{aligned}\psi(u)=&-(\alpha-\beta-\gamma)^3(\beta-\gamma)^2u_1^4+(\alpha-\beta+\gamma)^3(\alpha-\gamma)^2u_2^4\\&+(\alpha+\beta-\gamma)^3(\alpha-\beta)^2u_3^4-2\gamma(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\Big((\alpha-\beta)^2-\gamma^2\Big)u_1^2u_2^2\\&-2\beta(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\Big((\alpha-\gamma)^2-\beta^2\Big)u_1^2u_3^2\\&+2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\Big((\beta-\gamma)^2-\alpha^2\Big)u_2^2u_3^2.\end{aligned}$$

Como consecuencia, un grupo de Lie Tipo Ia es un $\mathfrak{P}$-espacio si y sólo si la función ψ dada anteriormente se anula idénticamente. Fijémonos que $\psi(e_1)=-(\alpha-\beta-\gamma)^3(\beta-\gamma)^2$ y $\psi(e_2)=(\alpha-\beta+\gamma)^3(\alpha-\gamma)^2$, de donde se tiene que alguna de las siguientes condiciones necesarias debe de ser satisfecha:

$$\alpha=\beta,\ \gamma=0,\qquad \beta=\gamma,\ \alpha=0,\qquad \alpha=\gamma,\ \beta=0,\qquad \alpha=\beta=\gamma.$$

Ahora usando el Teorema 6.3 obtenemos que no existe ningún $\mathfrak{P}$-espacio no localmente simétrico de Tipo Ia.

<u>*Tipo Ib*</u>. En este caso $\varepsilon=1$ y la función ψ en la Ecuación (6.1) tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\psi(u)=&\,4\beta^2(\alpha-2\gamma)^3u_1^4+\left(\alpha^2+2\beta^2-\alpha\gamma\right)\left(\alpha^3-\alpha^2\gamma+4\beta^2\gamma\right)\left(u_2^4+u_3^4\right)\\&-4\beta^2(\alpha-2\gamma)\left(\alpha^2+2\beta^2-2\gamma^2\right)\left(u_1^2u_2^2-u_1^2u_3^2\right)\\&+2\Big(8\beta^4(\alpha-3\gamma)+2\beta^2\alpha\left(2\alpha^2-11\alpha\gamma+10\gamma^2\right)-\alpha^3(\alpha-\gamma)^2\Big)u_2^2u_3^2\\&+4\beta\left(4\beta^4+\beta^2\left(5\alpha^2-4\alpha\gamma-4\gamma^2\right)+\alpha^2(2\alpha-3\gamma)(\alpha-\gamma)\right)\left(u_2^3u_3-u_2u_3^3\right)\\&+8\beta(\alpha-2\gamma)\left(\alpha^2\gamma+4\beta^2\gamma-\alpha\left(\beta^2+\gamma^2\right)\right)u_1^2u_2u_3.\end{aligned}$$

Por tanto $\psi(e_1)=4\beta^2(\alpha-2\gamma)^3$ y $\psi(e_2)=\left(\alpha^2+2\beta^2-\alpha\gamma\right)\left(\alpha^3-\alpha^2\gamma+4\beta^2\gamma\right)$, obteniendo así que $\alpha=\gamma=0$. Entonces la función ψ se reduce a $\psi(u)=16\beta^5u_2u_3\left(u_2^2-u_3^2\right)$, la cual no se puede anular idénticamente puesto que $\beta\neq 0$. Esto nos muestra que ningún grupo de Lie de Tipo Ib puede ser un $\mathfrak{P}$-espacio.

<u>*Tipo II*</u>. La función ψ en la Ecuación (6.1) tiene la siguiente forma para este caso, donde $\varepsilon = 1$,

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \tfrac{1}{4}\alpha\,(3\alpha - 4\beta)\,(\alpha - 2\beta)\,(u_2 - u_3)^4 \\ &\quad - \big\{2\,(\alpha - 2\beta)\,\beta u_1^2 - \alpha\left(\alpha^2 + 3\beta - \alpha\,(2+\beta)\right) u_2^2 \\ &\qquad - \alpha\,(\alpha\,(2+\alpha) - (3+\alpha)\,\beta)\,u_3^2 - 2\alpha^2\,(\alpha - \beta)\,u_2 u_3\big\}\,\alpha\,(\alpha - \beta)\,(u_2 - u_3)^2 .\end{aligned}$$

Por tanto $\psi(e_1 + e_3) - \psi(e_2) = 4\alpha(\alpha - \beta)^3$, mientras que $\psi(e_2 - e_3) = 4\alpha(3\alpha - 4\beta)(\alpha - 2\beta)$. Esto nos muestra que la condición necesaria y suficiente para que un grupo de Lie de este tipo sea un $\mathfrak{P}$-espacio es $\alpha = 0$. Ahora, si $\beta = 0$, el grupo de Lie es llano como se muestra en el Teorema 6.3. Esto prueba el Teorema 6.6–(a). Además, fijémonos que cualquier grupo de Lie de Tipo II con $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$ tiene operador de Ricci nilpotente en dos pasos.

<u>*Tipo III*</u>. En este caso la función ψ en la Ecuación (6.1) se expresa de la forma

$$\psi(u) = \alpha^2 (u_2 + u_3)^3 \left(3\sqrt{2}u_1 + 2\alpha(u_3 - u_2)\right),$$

con $\varepsilon = 1$, lo cual muestra que es un $\mathfrak{P}$-espacio no localmente simétrico si y sólo si $\alpha = 0$, probando así el Teorema 6.6–(b). Además, observemos que como se mostró en la Sección 6.1, el operador de Ricci es nilpotente en dos pasos.

<u>*Tipo IV.1*</u>. La función ψ en la Ecuación (6.1) es más complicada en este caso (donde $\varepsilon = -1$), pero si consideramos $u = e_1 + e_2$ y $v = e_1 - e_2$ se tiene que

$$\begin{aligned}\psi(u) &= (\alpha - \beta + \gamma - \delta)^2 (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\left\{(\beta + \gamma)\delta + (\beta - \gamma)^2 + \alpha(\beta + \gamma + 4\delta)\right\}, \\ \psi(v) &= (\alpha + \beta - \gamma - \delta)^2 (\alpha - \beta - \gamma + \delta)\left\{(\beta + \gamma)\delta - (\beta - \gamma)^2 + \alpha(\beta + \gamma - 4\delta)\right\}.\end{aligned}$$

Como consecuencia una de las siguientes condiciones tiene que verificarse:

$$\begin{array}{llll} (i) & \alpha = \delta,\ \beta = \gamma,\ \delta \neq 0, & & \\ (ii) & \alpha = -\beta,\ \gamma = -\delta,\ \delta \neq \beta, & (iii) & \alpha = \beta,\ \gamma = \delta,\ \delta \neq -\beta, \\ (iv) & \alpha = \beta = \gamma = 0,\ \delta \neq 0, & (v) & \beta = \gamma = \delta = 0,\ \alpha \neq 0. \end{array}$$

Las condiciones (i)–(iii) muestran que todas las curvaturas principales de Ricci coinciden entre sí, y por tanto como el operador de Ricci es diagonalizable (ver la Sección 6.1) la variedad es de curvatura seccional constante. Los restantes casos (iv)–(v) se verifican si y sólo si la variedad es localmente simétrica como se mostró en el Teorema 6.3. Por tanto no existe ningún $\mathfrak{P}$-espacio no localmente simétrico de Tipo IV.1.

<u>*Tipo IV.2*</u>. Procederemos como en los casos previos tomando $\varepsilon = 1$ y calculando

$$\begin{aligned}\psi(e_1) &= -\left(\alpha^2 - \alpha\delta + \beta(\beta + \gamma)\right)\left\{(\beta - \gamma)\alpha^2 + \beta(\beta + \gamma)^2 - \alpha\delta(3\beta + \gamma)\right\}, \\ \psi(e_2) &= \left(\delta^2 - \alpha\delta + \gamma(\beta + \gamma)\right)\left\{(\gamma - \beta)\delta^2 + \gamma(\beta + \gamma)^2 - \alpha\delta(\beta + 3\gamma)\right\},\end{aligned}$$

de donde se obtienen los dos grupos siguientes de condiciones necesarias:

$$(i)\ \beta=\gamma=0,\ \alpha+\delta\neq 0, \qquad (ii)\ \beta=-\gamma\neq 0,\ \alpha=\delta\neq 0.$$

En el caso (ii) se obtiene que la variedad tiene curvatura seccional constante. En el caso (i), calculamos $\psi(e_1+e_2)=-4\alpha\delta(\alpha-\delta)^3$. Ahora, para $\alpha=\delta$ la curvatura seccional de la variedad vuelve a ser constante; por otro lado, para $\alpha=0$ o $\delta=0$, la variedad es localmente simétrica por lo visto en el Teorema 6.3. Esto nos lleva a concluir que un grupo de Lie de Tipo IV.2 es un $\mathfrak{P}$-espacio si y sólo es localmente simétrico.

Tipo IV.3. Un cálculo directo nos muestra que

$$\mathcal{S}(u)\circ\mathcal{J}(u)-\mathcal{J}(u)\circ\mathcal{S}(u)=\psi(u)\begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_2 & -u_1 & 0 \\ -u_3 & 0 & u_1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}\psi(u)=&\ \tfrac{1}{2}\gamma\left(\alpha^4-\alpha^2\delta^2+3\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta\gamma\delta\right)u_3^4+2\alpha^2\gamma^3u_1^2u_3^2+2\gamma^5u_2^2u_3^2\\ &+2\gamma^2\left(\alpha^3+\alpha^2\delta-\alpha\delta^2-\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta\right)u_1u_3^3\\ &+2\gamma^3\left(\alpha^2+2\alpha\delta-2\beta\gamma\right)u_2u_3^3+4\alpha\gamma^4u_1u_2u_3^2.\end{aligned}$$

Ahora, si la función ψ (que depende de las variables (u_1,u_2,u_3)) se anula idénticamente, entonces $\partial_{u_2}\partial_{u_2}\partial_{u_3}\partial_{u_3}\psi=8\gamma^5$ debe ser cero. Por tanto $\gamma=0$ es una condición necesaria y suficiente para que los grupos de Lie de Tipo IV.3 sean un $\mathfrak{P}$-espacio, el cual no es localmente simétrico para $\alpha\delta(\alpha-\delta)\neq 0$, lo que prueba el Teorema 6.6–(c). Además fijémonos que el operador de Ricci de un grupo de Lie de Tipo IV.3 con $\gamma=0$ es nilpotente en dos pasos y no nulo cuando $\alpha(\alpha-\delta)\neq 0$. Esto termina la demostración. □

Recordamos aquí que una variedad pseudo-Riemanniana se dice que es *curvatura* (respectivamente, *Ricci*) *recurrente* si la derivada covariante del tensor curvatura (respectivamente, del tensor de Ricci) verifica que $\nabla R=\omega\otimes R$ (respectivamente, $\nabla\rho=\omega\otimes\rho$) para alguna 1-forma ω.

Teorema 6.7. [42] *Una variedad de dimensión tres Lorentziana y homogénea es un $\mathfrak{P}$-espacio si y sólo si su tensor de Ricci es recurrente.*

Demostración. En primer lugar, se obtiene del Lema 6.5–(iii) que cualquier variedad de Lorentz con curvatura recurrente es necesariamente un $\mathfrak{P}$-espacio. (Además cualquier variedad pseudo-Riemanniana con tensor de Weyl idénticamente nulo es curvatura recurrente si y sólo si es Ricci recurrente).

Recíprocamente, se tiene que una variedad de Lorentz de dimensión tres homogénea que es un $\mathfrak{P}$-espacio es Ricci recurrente. De hecho, un cálculo directo nos muestra que para los diferentes casos en el Teorema 6.6 se tiene que $\nabla\rho=\omega\otimes\rho$, donde:

(1) $\omega = -2\beta de_1$, si (M, g) es un grupo de Lie de Tipo II con $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$.

(2) $\omega = -\sqrt{2}(de_2 + de_3)$, si (M, g) es un grupo de Lie de Tipo III con $\alpha = 0$.

(3) $\omega = -2\delta de_3$, si (M, g) es de Tipo IV.3 con $\gamma = 0$ y $\alpha\delta(\alpha - \delta) \neq 0$.

□

En vista de todo lo anterior la demostración del Teorema 6.1 se sigue inmediatamente de los Teoremas 6.6 y 6.7.

6.3. $\mathfrak{C}$-espacios homogéneos

En contraste con el caso Riemanniano, veremos que existen ejemplos de variedades de Lorentz homogéneas de dimensión tres que son $\mathfrak{C}$-espacios (es decir, los autovalores de los operadores de Jacobi son constantes a lo largo de geodésicas temporales) pero no naturalmente reductivos. El siguiente lema (el cual se sigue inmediatamente de [9, 90]) será de gran utilidad para nuestro propósito.

Lema 6.8. [42] *Para una variedad de Lorentz (M, g) las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) (M, g) *es un $\mathfrak{C}$-espacio.*

(ii) Para cada punto $p \in M$ y cada vector temporal $u \in T_pM$, existe un endomorfismo $T(u)$ de T_pM de modo que $\mathcal{S}(u) = \mathcal{J}(u) \circ T(u) - T(u) \circ \mathcal{J}(u)$.

(iii) Para cada punto $p \in M$ y cada vector $u \in T_pM$, existe un endomorfismo $T(u)$ de T_pM tal que $\mathcal{S}(u) = \mathcal{J}(u) \circ T(u) - T(u) \circ \mathcal{J}(u)$.

Puesto que cualquier $\mathfrak{C}$-espacio tiene tensor de Ricci cíclico paralelo, recordaremos aquí la clasificación de las variedades de Lorentz homogéneas tipo Einstein dada por Calvaruso [32], la cual en la notación de la Sección 6.1 se expresa como sigue:

Teorema 6.9. [42] *Sea (M, g) una variedad de Lorentz de dimensión tres homogénea con tensor de Ricci cíclico paralelo. Entonces M es localmente isométrica a una de las siguientes posibilidades:*

(a) Un grupo de Lie localmente simétrico.

(b) Un grupo de Lie de Tipo Ia con $\alpha = \beta$ y $(\beta - \gamma)\gamma \neq 0$, o $\alpha = \gamma$ y $(\beta - \gamma)\beta \neq 0$, o $\beta = \gamma$ y $(\alpha - \gamma)\alpha \neq 0$.

(c) Un grupo de Lie de Tipo II con $\alpha = \beta \neq 0$.

(d) Un grupo de Lie de Tipo IV.1 con $\alpha = \beta = 0 \neq \delta$ y $\gamma(\gamma^2 - \delta^2) \neq 0$, o $\gamma = \delta = 0 \neq \alpha$ y $\beta(\beta^2 - \alpha^2) \neq 0$.

(e) Un grupo de Lie de Tipo IV.2 con $\alpha = \beta = 0$ *y* $\gamma\delta \neq 0$, *o* $\gamma = \delta = 0$ *y* $\alpha\beta \neq 0$.

(f) Un grupo de Lie de Tipo IV.3 con $\alpha = \beta = 0$ *y* $\gamma\delta \neq 0$.

A continuación veremos que en todos los casos (b)–(f) anteriormente descritos la variedad es de hecho un $\mathfrak{C}$-espacio, obteniendo así el Teorema 6.2. Obviamente cualquier espacio localmente simétrico es un $\mathfrak{C}$-espacio, así que omitiremos el Caso (a) de la Proposición anterior. En todos los casos aplicaremos el Lema 6.8 para mostrar que, con respecto a las correspondientes bases de la Sección 6.1, el endomorfismo

$$T(u) = \tfrac{1}{2}\mu \begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -\varepsilon u_3 & 0 & \varepsilon u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

verifica $\mathcal{S}(u) = \mathcal{J}(u) \circ T(u) - T(u) \circ \mathcal{J}(u)$ para cualquier vector $u = \sum u_i e_i$, donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon^2 = 1$.

Caso (b). Consideraremos primero el grupo de Lie de Tipo Ia con $\alpha = \beta$ (donde la condición $(\beta - \gamma)\gamma \neq 0$ en el Teorema 6.9–(b) asegura que el correspondiente grupo de Lie no es simétrico). Para cualquier vector $u = \sum u_i e_i$, los operadores de Jacobi y de Szabó vienen dados por

$$\mathcal{J}(u) = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} (3\gamma - 4\beta)\gamma u_2^2 + \gamma^2 u_3^2 & (4\beta - 3\gamma)\gamma u_1 u_2 & -\gamma^2 u_1 u_3 \\ (4\beta - 3\gamma)\gamma u_1 u_2 & (3\gamma - 4\beta)\gamma u_1^2 + \gamma^2 u_3^2 & -\gamma^2 u_2 u_3 \\ \gamma^2 u_1 u_3 & \gamma^2 u_2 u_3 & -\gamma^2 \left(u_1^2 + u_2^2\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S}(u) = \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)\gamma^2 \begin{pmatrix} -2u_1 u_2 u_3 & u_3\left(u_1^2 - u_2^2\right) & u_2\left(u_1^2 + u_2^2\right) \\ u_3\left(u_1^2 - u_2^2\right) & 2u_1 u_2 u_3 & -u_1\left(u_1^2 + u_2^2\right) \\ -u_2\left(u_1^2 + u_2^2\right) & u_1\left(u_1^2 + u_2^2\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, el endomorfismo T dado por la Ecuación (6.2) con $\mu = \gamma$ y $\varepsilon = 1$ verifica el Lema 6.8–(iii) y por tanto cualquier grupo de Lie de esta forma es un $\mathfrak{C}$-espacio. Procediendo del mismo modo, se construye el correspondiente endomorfismo T poniendo $\mu = \alpha$ y $\varepsilon = 1$ si $\beta = \gamma$ ($\mu = \beta$ y $\varepsilon = 1$ si $\alpha = \gamma$) demostrando así que cualquier grupo de Lie en el Caso (b) es un $\mathfrak{C}$-espacio.

Caso (c). Sea M un grupo de Lie de Tipo II con $\alpha = \beta$. El operador de Jacobi y el operador de Szabó asociados a cualquier vector u verifican

$$\mathcal{J}(u) = \frac{\beta}{4} \begin{pmatrix} 4u_2 u_3 - (\beta + 2)u_2^2 + (\beta - 2)u_3^2 & a_{21} & -a_{31} \\ a_{21} & \beta u_3^2 - (\beta + 2)u_1^2 & -a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & (2 - \beta)u_1^2 - \beta u_2^2 \end{pmatrix}$$

donde $a_{21} = u_1\left((\beta + 2)u_2 - 2u_3\right)$, $a_{31} = u_1\left(2u_2 + (\beta - 2)u_3\right)$, $a_{32} = \beta u_2 u_3 - 2u_1^2$, y

$$\mathcal{S}(u) = \frac{\beta^2}{4}\begin{pmatrix} 2u_1\,(u_2-u_3)^{\,2} & b_{21} & -b_{31} \\ b_{21} & 2u_1\left(u_1^2+(u_2-u_3)\,u_3\right) & -b_{32} \\ b_{31} & b_{32} & 2u_1\left(u_2\,(u_3-u_2)-u_1^2\right) \end{pmatrix},$$

donde se tiene $b_{21} = (u_3-u_2)\left(2u_1^2+(u_2-u_3)\,u_3\right)$, $b_{31} = (u_3-u_2)\left(2u_1^2+(u_2-u_3)\,u_2\right)$ y $b_{32} = u_1\left(2u_1^2+u_2^2-u_3^2\right)$. Ahora la Ecuación (6.2) con $\mu=\alpha$ y $\varepsilon=1$ nos muestra que cualquier grupo de Lie dado en el Caso (c) es un $\mathfrak{C}$-espacio.

Caso (d). Consideramos ahora un grupo de Lie de Tipo IV.1 con $\alpha=\beta=0$. Entonces para cada vector u los operadores de Jacobi y de Szabó asociados tienen la forma

$$\mathcal{J}(u) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -\gamma^2\left(u_2^2+u_3^2\right) & \gamma^2u_1u_2 & \gamma^2u_1u_3 \\ -\gamma^2u_1u_2 & \gamma^2\left(u_1^2+3u_3^2\right)-4\delta^2u_3^2 & \left(4\delta^2-3\gamma^2\right)u_2u_3 \\ -\gamma^2u_1u_3 & \left(4\delta^2-3\gamma^2\right)u_2u_3 & \gamma^2\left(u_1^2+3u_2^2\right)-4\delta^2u_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S}(u) = \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma^2-\delta^2)\begin{pmatrix} 0 & -u_3\left(u_2^2+u_3^2\right) & u_2\left(u_2^2+u_3^2\right) \\ u_3\left(u_2^2+u_3^2\right) & -2u_1u_2u_3 & u_1\left(u_2^2-u_3^2\right) \\ -u_2\left(u_2^2+u_3^2\right) & u_1\left(u_2^2-u_3^2\right) & 2u_1u_2u_3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el endomorfismo T dado por la Ecuación (6.2) con $\mu=\gamma$ y $\varepsilon=-1$ verifica el Lema 6.8–(iii). En el otro subcaso, correspondiente con $\gamma=\delta=0$, el endomorfismo T se obtiene sin más que considerar $\mu=\beta$ y $\varepsilon=-1$ en la Ecuación (6.2).

Caso (e). Sea M un grupo de Lie de Tipo IV.2 con $\alpha=\beta=0$. Entonces para cualquier vector u los operadores de Jacobi y de Szabó tienen la forma

$$\mathcal{J}(u) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} \gamma^2\left(u_3^2-u_2^2\right) & \gamma^2u_1u_2 & -\gamma^2u_1u_3 \\ \gamma^2u_1u_2 & -\gamma^2\left(u_1^2+3u_3^2\right)-4\delta^2u_3^2 & \left(3\gamma^2+4\delta^2\right)u_2u_3 \\ \gamma^2u_1u_3 & -\left(3\gamma^2+4\delta^2\right)u_2u_3 & \gamma^2(3u_2^2-u_1^2)+4\delta^2u_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S}(u) = \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma^2+\delta^2)\begin{pmatrix} 0 & -u_3(u_2^2-u_3^2) & u_2(u_2^2-u_3^2) \\ -u_3(u_2^2-u_3^2) & 2u_1u_2u_3 & -u_1\left(u_2^2+u_3^2\right) \\ -u_2(u_2^2-u_3^2) & u_1\left(u_2^2+u_3^2\right) & -2u_1u_2u_3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la Ecuación (6.2) se verifica con $\mu=\gamma$ y $\varepsilon=1$ mostrando que M es un $\mathfrak{C}$-espacio. (El otro subcaso cuando $\gamma=\delta=0$ se obtiene de un modo análogo tomando $\mu=-\beta$ y $\varepsilon=1$).

Caso (f). Finalmente, para un grupo de Lie de Tipo IV.3 con $\alpha=\beta=0$, se tiene que los operadores de Jacobi y de Szabó vienen dados por

$$\mathcal{J}(u) = \tfrac{1}{4}\gamma^2\begin{pmatrix} 2u_2u_3 & -u_1u_3 & -u_1u_2 \\ u_1u_2 & -u_1^2-3u_2u_3 & 3u_2^2 \\ u_1u_3 & 3u_3^2 & -u_1^2-3u_2u_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S}(u) = \gamma^3 \begin{pmatrix} 0 & u_2 u_3^2 & -u_2^2 u_3 \\ u_2^2 u_3 & 0 & -u_1 u_2^2 \\ -u_2 u_3^2 & u_1 u_3^2 & 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto el grupo de Lie dado de esta forma es un $\mathfrak{C}$-espacio considerando el endomorfismo

$$T(u) = \frac{1}{2}\gamma \begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_2 & u_1 & 0 \\ u_3 & 0 & -u_1 \end{pmatrix}.$$

Lo anterior demuestra que cualquier variedad de Lorentz de dimensión tres homogénea con tensor de Ricci cíclico paralelo es un $\mathfrak{C}$-espacio, lo cual finaliza la demostración del Teorema 6.2.

6.4. Variedades de Lorentz curvatura homogéneas

Recordemos que una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) se dice que es k-*curvatura homogénea* si dados dos puntos p, $q \in M$ existe una isometría lineal $\phi : T_pM \to T_qM$ tal que $\phi^*\nabla^i R_q = \nabla^i R_p$ para todo $1 \leq i \leq k$. Obviamente, una variedad pseudo-Riemanniana localmente homogénea es k-curvatura homogénea para todo k pero el recíproco es cierto si y sólo si el grado de homogeneidad en la curvatura es suficientemente grande. Las variedades de Riemann de dimensión tres que son 1-curvatura homogéneas son localmente homogéneas, pero esto no es cierto en el caso de signatura Lorentziana, donde se necesita homogeneidad de grado dos en la curvatura para garantizar homogeneidad local (ver por ejemplo [95] para más información y referencias sobre homogeneidad en la curvatura).

La clasificación completa de variedades de Lorentz de dimensión tres que son curvatura homogéneas hasta orden 1 ha sido obtenida por Bueken y Djorić en [30]. Probaron que existen exactamente dos clases de variedades 3-dimensionales de Lorentz 1-curvatura homogéneas que no son homogéneas cuyo operador de Ricci tiene forma canónica de Jordan de Tipo Ia (el operador de Ricci diagonaliza) y de Tipo II (el operador de Ricci tiene una raíz doble de su polinomio mínimo).

Las métricas de Lorentz no homogéneas y 1-curvatura homogéneas de dimensión tres con operador de Ricci diagonalizable corresponden (al menos localmente) a la siguiente construcción [30] (ver también [34]). Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$, con e_3 temporal, una base ortonormal local, G una constante real y ϕ una función arbitraria tales que

$$\begin{aligned} &[e_1, e_2] = -e_2 - (G+2)e_3, \\ &[e_1, e_3] = -Ge_2 + e_3, \\ &[e_2, e_3] = 2(G+1)e_1 - \phi e_2 - \phi e_3, \end{aligned} \tag{6.3}$$

donde

$$e_1(\phi) = (G+1)\phi. \tag{6.4}$$

La variedad de Lorentz M_{Ia} descrita por las Ecuaciones (6.3) y (6.4) es localmente homogénea si y sólo si ϕ es constante. Además, el operador de Ricci correspondiente es diagonalizable con autovalores $\lambda_1 = -2(G+1)^2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -(e_2+e_3)(\phi)$, y M_{Ia} nunca es localmente simétrica (a no ser que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$).

Una variedad de Lorentz no homogénea y 1-curvatura homogénea de dimensión tres cuyo operador de Ricci es de Tipo II está dada como sigue [30] (ver también [34]). Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal local, con e_3 temporal, sea θ una función y sean C y D dos constantes tales que

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= -(\theta + D)e_2 + \varepsilon(C - \theta)e_3, \\ [e_1, e_3] &= \varepsilon(C + \theta)e_2 + (\theta - D)e_3, \\ [e_2, e_3] &= 0, \end{aligned} \tag{6.5}$$

y

$$e_1(\theta) = \varepsilon - 2(C+D)\theta, \qquad (e_2 + \varepsilon e_3)(\theta) = 0, \tag{6.6}$$

con $\varepsilon^2 = 1$. La variedad de Lorentz M_{II} descrita por las Ecuaciones (6.5) y (6.6) es localmente homogénea si y sólo si o bien θ es constante, o $C = D = 0$ y por tanto θ verifica

$$e_1(\theta) = \varepsilon, \qquad (e_2 + \varepsilon e_3)(\theta) = 0.$$

Además, el operador de Ricci tiene un único autovalor $-2D^2$, el cual es una raíz doble de su polinomio mínimo. Además, M_{II} es localmente simétrica si y sólo si $C = D = 0$.

Teorema 6.10. [42] *Sea (M,g) una variedad de Lorentz 1-curvatura homogénea no homogénea de dimensión tres. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *(M,g) es un $\mathfrak{P}$-espacio.*

(ii) *(M,g) es Ricci recurrente.*

(iii) *El operador de Ricci de (M,g) es nilpotente en dos pasos.*

(iv) *(M,g) es localmente isométrica al espacio M_{II} con $D = 0$.*

Demostración. En primer lugar sea (M,g) el espacio M_{Ia} dado por las Ecuaciones (6.3) y (6.4). Para cualquier vector $u = \sum u_i e_i$, se tiene que

$$\mathcal{S}(u) \circ \mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(u) \circ \mathcal{S}(u) = \psi(u) \begin{pmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

donde $\psi(u) = -(\lambda_2 - \lambda_1)^2 (u_2 - u_3)^2 (u_2 + u_3)((2+G)u_2 + Gu_3)$. Esto muestra que M_{Ia} es un $\mathfrak{P}$-espacio si y sólo si $\lambda_1 = \lambda_2$, lo cual es una contradicción. Además, fijémonos que $(\nabla_{e_2}\rho)(e_1,e_2)=\lambda_1-\lambda_2$ y puesto que $\rho(e_1,e_2)=0$, la variedad M_{Ia} nunca es Ricci recurrente a no ser que $\lambda_1=\lambda_2$, lo cual implica curvatura seccional constante.

Ahora, para el espacio M_{II} dado por las Ecuaciones (6.5) y (6.6), un cálculo directo nos muestra que la Ecuación (6.7), con $\psi(u)=D\{\varepsilon(u_2^4+6u_2^2u_3^2+u_3^4)-4u_2u_3(u_2^2+u_3^2)\}$, se cumple para cualquier vector $u=\sum u_ie_i$. Por tanto M_{II} es un $\mathfrak{P}$-espacio si y sólo si $D=0$. En este caso, el espacio M_{II} es Ricci recurrente con $\nabla\rho=2Cde_1\otimes\rho$. Además, fijémonos que una variedad de Lorentz 1-curvatura homogénea no homogénea de dimensión tres es Ricci recurrente si y sólo si es localmente isométrica al espacio M_{II} con $D=0$ puesto que $(\nabla_{e_2}\rho)(e_1,e_2)=D\varepsilon$ y $\rho(e_1,e_2)=0$. □

Teorema 6.11. [42] *Sea (M,g) una variedad de Lorentz de dimensión tres curvatura homogénea. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) (M,g) *es un $\mathfrak{C}$-espacio.*

(ii) *El tensor de Ricci (M,g) es cíclico paralelo.*

(iii) (M,g) *es 1-curvatura homogénea y por tanto es localmente isométrica a un espacio homogéneo de los obtenidos en el Teorema 6.9 o a un espacio M_{II} con $C=D$.*

Demostración. En primer lugar, se obtiene de [33, 34] que una variedad de Lorentz curvatura homogénea de dimensión tres con tensor de Ricci cíclico paralelo es necesariamente 1-curvatura homogénea y por tanto localmente isométrica a un espacio homogéneo de los obtenidos en el Teorema 6.9 o a un espacio M_{II} con $C=D$. Ahora, para un espacio M_{II} con $C=D$, los operadores de Jacobi y de Szabó asociados a un vector $u=\sum u_ie_i$ vienen dados por

$$\mathcal{J}(u)=\begin{pmatrix} a_{11} & u_1\left(\left(C^2+\varepsilon\right)u_2-u_3\right) & -u_1\left(u_2+\left(C^2-\varepsilon\right)u_3\right) \\ u_1\left(\left(C^2+\varepsilon\right)u_2-u_3\right) & C^2u_3^2-\left(C^2+\varepsilon\right)u_1^2 & -C^2u_2u_3+u_1^2 \\ u_1\left(u_2+\left(C^2-\varepsilon\right)u_3\right) & C^2u_2u_3-u_1^2 & \varepsilon u_1^2-C^2\left(u_1^2+u_2^2\right) \end{pmatrix}$$

donde $a_{11}=\left(C^2-\varepsilon\right)u_3^2-\left(C^2+\varepsilon\right)u_2^2+2u_2u_3$, y

$$\mathcal{S}(u)=C\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & -b_{31} \\ b_{21} & -2u_1\left(u_2u_3+\varepsilon\left(u_1^2-u_3^2\right)\right) & u_1\left(2u_1^2+u_2^2-u_3^2\right) \\ b_{31} & -u_1\left(2u_1^2+u_2^2-u_3^2\right) & 2u_1\left(\varepsilon\left(u_1^2+u_2^2\right)-u_2u_3\right) \end{pmatrix},$$

donde se tiene $b_{11}=2u_1\left(2u_2u_3-\varepsilon\left(u_2^2+u_3^2\right)\right)$, $b_{21}=2\varepsilon u_2\left(u_1^2-u_3^2\right)-u_3\left(2u_1^2-u_2^2-u_3^2\right)$ y $b_{31}=2\left(u_2-\varepsilon u_3\right)u_1^2+u_2\left(u_2^2-2\varepsilon u_2u_3+u_3^2\right)$. Ahora por el Lema 6.8 se tiene que M_{II} con $C=D$ es un $\mathfrak{C}$-espacio, simplemente considerando el endomorfismo T dado por

$$T(u)=\mathrm{C}\varepsilon\begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

con respecto a la base ortonormal correspondiente. □

Observación 6.12. Las métricas de Walker juegan un papel destacado en el estudio de las variedades de Lorentz curvatura homogéneas. De hecho, la existencia de campos paralelos para esta clase de variedades fue investigado en [34] mostrando lo siguiente:

(i) Una variedad M_{Ia} descrita por las Ecuaciones (6.3) y (6.4) admite una distribución 1-dimensional paralela y degenerada si y sólo si $G = -1$.

(ii) La variedad M_{II} descrita por las Ecuaciones (6.5) y (6.6) admite una distribución 1-dimensional paralela y degenerada si y sólo si $D = 0$.

6.5. Geometría del operador de curvatura antisimétrico

Los *círculos unitarios* (es decir, curvas $c(t)$ de velocidad unitaria verificando la condición $\nabla_{c'}\nabla_{c'}c' + c' = 0$) juegan un papel muy importante en geometría pseudo-Riemanniana. El *operador de curvatura antisimétrico* $\mathcal{R}_{c'}$ está definido por la restricción del tensor curvatura a círculos unitarios $\mathcal{R}_{c'}(X) = R(c', \nabla_{c'}c')X$. Los espacios localmente simétricos Riemannianos están caracterizados en términos de las propiedades de los operadores de curvatura antisimétricos teniendo autovalores constantes ($\mathfrak{O}$) y bases de Jordan paralelas ($\mathfrak{T}$) a lo largo de círculos unitarios [111, 112], lo que llevó a Ivanov y Petrova a investigar variedades de Riemann verificando alguna de esas propiedades:

($\mathfrak{O}$) Una variedad de Riemann (M, g) se dice $\mathfrak{O}$-*espacio* si los autovalores de los operadores de curvatura antisimétricos son constantes a lo largo de círculos unitarios.

($\mathfrak{T}$) Una variedad de Riemann (M, g) se dice un $\mathfrak{T}$-*espacio* si existe una base de Jordan paralela del operador de curvatura antisimétrico a lo largo de círculos unitarios.

Los $\mathfrak{O}$-espacios están caracterizados por las condiciones algebraicas $\nabla_{c'}\,\mathrm{traza}\,\mathcal{R}_{c'}^{(k)} = 0$ para todo k. Generalizando esta condición al caso de signatura Lorentziana, se dice que *una variedad de Lorentz (M, g) es un $\mathfrak{O}$-espacio si y sólo si $\nabla_{c'}\,\mathrm{traza}\,\mathcal{R}_{c'}^{(k)} = 0$ para todo $k = 2, \dots, \dim M$*. Claramente cualquier variedad de Lorentz IP es un $\mathfrak{O}$-espacio [83]. El recíproco es cierto en el caso de variedades de dimensión tres homogéneas:

Teorema 6.13. [42] *Sea (M, g) una variedad de Lorentz no simétrica y homogénea de dimensión tres. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) (M, g) es un $\mathfrak{O}$-espacio.

(ii) (M, g) es una variedad IP.

(iii) El operador de Ricci de (M, g) es de rango uno o bien nilpotente en dos pasos.

Los $\mathfrak{T}$-espacios Riemannianos están caracterizados por la conmutatividad del operador de curvatura antisimétrico y su derivada covariante, es decir,

$$R(c', \nabla_{c'}c') \circ (\nabla_{c'}R)(c', \nabla_{c'}c') = (\nabla_{c'}R)(c', \nabla_{c'}c') \circ R(c', \nabla_{c'}c'). \tag{6.9}$$

Generalizando esta condición algebraica a signatura Lorentziana, se dice que *una variedad de Lorentz* (M, g) *es un* $\mathfrak{T}$*-espacio si y sólo si la Ecuación* (6.9) *se verifica.* Obviamente cualquier variedad de Lorentz curvatura recurrente es un $\mathfrak{T}$-espacio. El recíproco es cierto en el caso de que la variedad sea homogénea de dimensión tres.

Teorema 6.14. [42] *Sea* (M, g) *una variedad de Lorentz de dimensión tres homogénea no simétrica. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) (M, g) *es un* $\mathfrak{T}$*-espacio.*

(ii) (M, g) *es curvatura recurrente.*

(iii) (M, g) *es Ricci recurrente.*

(iv) El operador de Ricci de (M, g) *es nilpotente en dos pasos.*

Observación 6.15. Los Teoremas 6.13 y 6.14 se extienden de modo natural al contexto en el que la variedad sea 1-curvatura homogénea como sigue:

(i) Una variedad Lorentziana de dimensión tres no homogénea 1-curvatura homogénea es un $\mathfrak{O}$-espacio si y sólo si es una variedad IP (es decir, localmente un espacio M_{Ia} con $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$; o localmente un espacio M_{II} con $D = 0$).

(ii) Una variedad Lorentziana de dimensión tres no homogénea 1-curvatura homogénea es un $\mathfrak{T}$-espacio si y sólo si el tensor de Ricci es recurrente (es decir, localmente un espacio M_{II} con $D = 0$).

Observación 6.16. Las clases de $\mathfrak{P}$-espacios y $\mathfrak{T}$-espacios coinciden en el contexto de variedades 1-curvatura homogéneas de dimensión tres.

Observación 6.17. En el caso Riemanniano, una variedad es localmente simétrica si y sólo si es simultáneamente un $\mathfrak{O}$-espacio y un $\mathfrak{T}$-espacio. Esto no es cierto en el caso de signatura Lorentziana donde las variedades de dimensión tres 1-curvatura homogéneas con operador de Ricci nilpotente en dos pasos son a la vez $\mathfrak{O}$-espacios y $\mathfrak{T}$-espacios, pero no son necesariamente localmente simétricas (incluso no son localmente homogéneas).

Capítulo 7

Espacios simétricos generalizados

Los espacios simétricos fueron caracterizados geométricamente por Cartan por el hecho de que sus simetrías geodésicas son isometrías. Este resultado motivó el estudio de diversas condiciones sobre las simetrías geodésicas y otros tipos de transformaciones locales en un intento de generalizar los espacios simétricos. Así, D'Atri y Nickerson [61] iniciaron el estudio de las variedades cuyas simetrías geodésicas preservan el volumen. En [60] se planteó la investigación de una clase más amplia de transformaciones locales, las transformaciones geodésicas, que posteriormente fueron estudiadas en relación a los espacios armónicos [88]. Distintas propiedades de las reflexiones geodésicas con respecto a puntos y subvariedades fueron consideradas en [47, 48, 156].

Centrándonos en las transformaciones locales alrededor de un punto fijo, el estudio se ha basado en el análisis de aplicaciones locales no necesariamente involutivas ($s_p^2 = \mathrm{Id}$), sino en la existencia e influencia geométrica de isometrías s_p para las que $s_p^k = \mathrm{Id}$ para algún natural k. El estudio de los llamados espacios simétricos generalizados surge en este contexto. Dos ejemplos ilustrativos de estas transformaciones se construyen de la siguiente forma: sea (M, g, J) una variedad casi Hermítica y $p \in M$. La transformación local

$$s_{J,p} : \exp_p(ru) \mapsto \exp_p(rJu)$$

verifica $s_{J,p}^4 = \mathrm{Id}$ (véase [137] para más información). Más interesante para nuestro propósito es la siguiente familia. Asociada a una estructura casi Hermítica (g, J), consideramos una raíz de orden tres de la unidad $S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Id} + \frac{\sqrt{3}}{2}J$ y las transformaciones

$$s_{S,p} : \exp_p(ru) \mapsto \exp_p(rSu)$$

verifican $s_{S,p}^3 = \mathrm{Id}$, siendo el germen de la teoría de espacios 3-simétricos (véase [106] para más información).

Generalizando las construcciones anteriores, una *s-estructura* en una variedad pseudo-Riemanniana (M, g) es una familia $\{s_p, p \in M\}$ de isometrías de la variedad de modo que p es un punto fijo aislado, las cuales se llaman *simetrías en* p. (M, g) es un espacio simétrico si para cada punto $p \in M$ admite una simetría s_p la cual es una reflexión geodésica en p (es decir, $s_p^2 = \mathrm{Id}_M$ para todo $p \in M$). Una s-estructura se dice que es *regular* si la aplicación $(p,q) \in M \times M \to s_p(q)$ es diferenciable y además, para cada par de puntos $p, q \in M$ se tiene

$$s_p \circ s_q = s_{\overline{p}} \circ s_p, \quad \text{donde} \quad \overline{p} = s_p(q).$$

Una s-estructura $\{s_p\}$ se dice que es de *orden* k ($k \geq 2$) si para todo $p \in M$, $s_p^k = \mathrm{Id}_M$, y k es el mínimo de todos los naturales que verifican dicha propiedad. Además se dice que una s-estructura es de *orden infinito* si no existe ningún natural k para el que $s_p^k = \mathrm{Id}_M$.

Un *espacio simétrico generalizado* es una variedad pseudo-Riemanniana (M,g) con al menos una s–estructura regular. Kowalski ha probado que los espacios simétricos generalizados son necesariamente homogéneos y en [120] dio una clasificación de los mismos en dimensiones bajas.

Nuestro objetivo en este capítulo es mostrar la existencia de ciertas estructuras adicionales asociadas a la curvatura de los espacios simétricos generalizados y caracterizar estos espacios por la existencia de dichas estructuras. Para ello, nos centraremos en los casos de dimensión tres y cuatro, mostrando en primer lugar una descripción de los mismos y las estructuras subyacentes a su curvatura.

7.1. Estructuras subyacentes a los espacios simétricos generalizados

Es bien conocido que todo espacio 3-simétrico posee una estructura casi Hermítica subyacente inducida por la s-estructura. Nuestro acercamiento se basará en el estudio de la curvatura y la posibilidad de construir ciertas estructuras asociadas a la misma inspirados, de alguna manera, por el Teorema de Goldberg-Sachs.

7.1.1. Espacios simétricos generalizados en dimensión tres

En dimensión tres existe un único espacio simétrico generalizado que es de orden $k = 4$ y puede presentar signatura tanto Riemanniana como Lorentziana [45]. (M,g) es el espacio $\mathbb{R}^3$ con coordenadas (x,y,t) y métrica

$$g = \pm(e^{2t} dx \circ dx + e^{-2t} dy \circ dy) + \lambda dt \circ dt, \tag{7.1}$$

donde $\lambda \neq 0$ es una constante real cuyo signo determina la signatura.

Un cálculo directo muestra que el operador de Ricci del espacio simétrico generalizado dado por la Ecuación (7.1) se expresa, independientemente de la signatura considerada, como

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta [83, 113], todo espacio simétrico generalizado de dimensión tres, independientemente de su signatura, es una variedad IP. Además, el operador de Ricci define una estructura casi producto P, i.e., $P^2 = \mathrm{Id}$ y $g(PX, PY) = g(X, Y)$, sin más que considerar $P = \sigma|_{\ker Ric} - \sigma|_{(\ker Ric)^\perp}$; esta estructura es integrable pues tanto la distribución $\ker Ric$ como $(\ker Ric)^\perp$ son integrables, ya que $\ker Ric = \langle\{\partial_x, \partial_y\}\rangle$ y $(\ker Ric)^\perp = \langle\{\partial_t\}\rangle$.

A continuación estudiaremos la posibilidad de caracterizar los espacios simétricos generalizados 3-dimensionales entre los espacios homogéneos a partir de esas dos propiedades. Recordemos primero un resultado clásico de clasificación de las álgebras de Lie 3-dimensionales Riemannianas.

Teorema 7.1. [135] *Sea G un espacio homogéneo Riemanniano de dimensión tres y curvatura seccional no constante. Entonces G viene dado por una de las siguientes álgebras de Lie:*

1) Si $\mathfrak{g}$ es unimodular existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de modo que los corchetes se expresan como

$$[e_1, e_2] = \alpha\, e_3, \qquad [e_1, e_3] = -\beta\, e_2, \qquad [e_2, e_3] = \gamma\, e_1.$$

2) Si $\mathfrak{g}$ es no unimodular existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de modo que los corchetes se expresan como

$$[e_1, e_2] = \alpha\, e_2 + \beta\, e_3, \qquad [e_1, e_3] = \gamma\, e_2 + \delta\, e_3, \qquad [e_2, e_3] = 0,$$

donde $\alpha + \delta = 2$.

Para el caso Riemanniano obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 7.2. *Sea (M, g) un espacio homogéneo Riemanniano no simétrico de dimensión tres. Entonces, (M, g) es localmente isométrico al único espacio simétrico generalizado de dimensión tres si y sólo si (M, g) es IP y el operador de Ricci define una estructura casi producto P integrable.*

Demostración. Ivanov y Petrova demostraron que toda variedad de dimensión tres IP Riemanniana tiene dos curvaturas principales de Ricci cero y una no nula [113]. Milnor probó que todo grupo de Lie de dimensión tres no unimodular verifica que al menos dos de las curvaturas principales de Ricci son negativas [135], y por lo tanto nunca son IP. Analizando la condición de ser IP para los grupos de Lie unimodulares dados en el Teorema 7.1, teniendo en cuenta que

$$Ric = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\gamma^2 - (\alpha-\beta)^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\alpha^2 - (\beta-\gamma)^2) \end{pmatrix},$$

se tienen las tres posibilidades siguientes:

Caso 1: Las constantes de estructura verifican $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta\gamma \neq 0$. En este caso, el operador de Ricci se expresa como

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta\gamma \end{pmatrix},$$

y la estructura casi producto inducida por el operador de Ricci, $P = \sigma|_{\ker Ric} - \sigma|_{(\ker Ric)^\perp}$, está dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y un cálculo directo muestra que es integrable si y sólo si $\alpha = 0$, es decir, $\gamma = -\beta$.

Caso 2: Las constantes de estructura verifican $\alpha = \beta - \gamma$, $(\beta - \gamma)\gamma \neq 0$. El operador de Ricci y la estructura casi producto asociada están dadas por

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(\beta - \gamma)\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y se sigue que P es integrable si y sólo si $\beta = 0$, es decir, $\alpha = -\gamma$.

Caso 3: Las constantes de estructura en este último caso verifican $\alpha = \gamma - \beta$, $\beta(\gamma - \beta) \neq 0$. En este caso, el operador de Ricci y la estructura casi producto asociada se expresan como

$$Ric = \begin{pmatrix} 2\beta(\gamma - \beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto la estructura casi producto es integrable si y sólo si $\gamma = 0$, es decir, $\beta = -\alpha$.

Es inmediato comprobar que los casos obtenidos son isomorfos, lo que concluye la demostración. □

En lo que sigue veremos que un resultado análogo al anterior no es posible en signatura Lorentziana. Para ello usaremos el siguiente resultado (véase también la Sección 6.1).

Teorema 7.3. [83] *Un espacio homogéneo Lorentziano de dimensión tres no simétrico, conexo, completo y simplemente conexo es IP si y sólo si es un grupo de Lie G dado por una de las siguientes álgebras de Lie:*

1. *Si $\mathfrak{g}$ es unimodular entonces existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{g}$ de signatura $(++-)$ tal que se corresponde con una de las siguientes álgebras de Lie:*

$$(\mathfrak{g}_{Ia}): \begin{cases} [e_1, e_2] = -\gamma e_3, \qquad [e_1, e_3] = -\beta e_2, \qquad [e_2, e_3] = \alpha e_1, \\ \textit{donde} \quad \alpha = \gamma - \beta \neq 0,\ \beta \neq 0, \quad \textit{o} \quad \alpha = \beta - \gamma \neq 0,\ \gamma \neq 0, \\ \textit{o} \quad \alpha = \beta + \gamma,\ \beta\gamma \neq 0. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{g}_{Ib}): \begin{cases} [e_1, e_2] = \beta e_2 - \gamma e_3, \qquad [e_1, e_3] = -\gamma e_2 - \beta e_3, \qquad [e_2, e_3] = 2\gamma e_1, \\ \textit{donde} \quad \beta \neq 0. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{g}_{II}): \begin{cases} [e_1, e_2] = \frac{1}{2} e_2 - (\beta - \frac{1}{2}) e_3, \qquad [e_1, e_3] = -(\beta + \frac{1}{2}) e_2 - \frac{1}{2} e_3, \\ [e_2, e_3] = \alpha e_1, \qquad \textit{donde} \quad \alpha = 0 \neq \beta, \quad \textit{o} \quad \alpha = 2\beta \neq 0. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{g}_{III}): [e_1, e_2] = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} e_1, \qquad [e_1, e_3] = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} e_1, \qquad [e_2, e_3] = \tfrac{1}{\sqrt{2}} e_2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} e_3.$$

2. Si $\mathfrak{g}$ es no unimodular, entonces

2.a Existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de signatura $(-++)$ tal que

$$(\mathfrak{g}_{IV.a}): \begin{cases} [e_1, e_2] = 0, \qquad [e_1, e_3] = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \beta e_1 + \beta e_2, \qquad [e_2, e_3] = 0, \\ \textit{donde} \quad \beta \neq 0. \end{cases}$$

2.b Existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de signatura $(-++)$ tal que

$$(\mathfrak{g}_{IV.b}): \begin{cases} [e_1, e_2] = 0, \qquad [e_1, e_3] = 0, \qquad [e_2, e_3] = \gamma e_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma e_2, \\ \textit{donde} \quad \gamma \neq 0. \end{cases}$$

2.c Existe una base pseudo-ortonormal (los productos no nulos están dados por $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ y $\langle e_2, e_3 \rangle = -1$) tal que

$$(\mathfrak{g}_{IV.c}): \begin{cases} [e_1, e_2] = 0, \qquad [e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2, \qquad [e_2, e_3] = \delta e_2, \\ \textit{donde} \quad \alpha(\alpha - \delta) \neq 0,\ \alpha + \delta \neq 0. \end{cases}$$

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado para los espacios simétricos generalizados de dimensión tres Lorentzianos.

Teorema 7.4. *Sea (M, g) un espacio homogéneo Lorentziano no simétrico de dimensión tres. Entonces, (M, g) es IP con operador de Ricci diagonalizable y el operador de Ricci define una estructura casi producto P integrable si y sólo si es un grupo de Lie G dado por una de las siguientes álgebras de Lie:*

$$(\mathfrak{g}_{Ia}): \begin{cases} [e_1, e_2] = -\gamma e_3, \qquad [e_1, e_3] = -\beta e_2, \qquad [e_2, e_3] = \alpha e_1, \\ \textit{donde} \quad \alpha = -\beta \neq 0,\ \gamma = 0, \quad \textit{o} \quad \alpha = -\gamma \neq 0, \quad \beta = 0, \end{cases}$$

$$(\mathfrak{g}_{Ib}): \begin{cases} [e_1, e_2] = \beta e_2, \qquad [e_1, e_3] = -\beta e_3, \qquad [e_2, e_3] = 0, \\ \beta \neq 0, \end{cases}$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ *es una base ortonormal de signatura* $(++-)$.

Demostración. Analizaremos por separado los diferentes casos dados por el Teorema 7.3.

Tipo $\mathfrak{g}_{Ia}$. Consideremos en primer lugar el caso $\alpha = \gamma - \beta \neq 0$, $\beta \neq 0$. El operador de Ricci está dado por

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta(\beta-\gamma) \end{pmatrix}.$$

En este caso la estructura casi producto se expresa como

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y es integrable si y sólo si $\gamma = 0$.

Ahora, en el caso en que $\alpha = \beta - \gamma \neq 0$, $\gamma \neq 0$, se tiene que el operador de Ricci y la estructura casi producto que define se expresan como

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma(\gamma-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siendo P integrable si y sólo si $\beta = 0$.

Por último, consideremos el caso $\alpha = \beta + \gamma$, $\beta\gamma \neq 0$. En este caso, el operador de Ricci y la estructura casi producto P que define están dados por

$$Ric = \begin{pmatrix} -2\beta\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La estructura P es integrable si y sólo si $\alpha = 0$. Es inmediato comprobar que esta familia es isomorfa a la dada por $\alpha = -\gamma \neq 0$, $\beta = 0$.

Tipo $\mathfrak{g}_{Ib}$. En este caso el operador de Ricci y la estructura casi producto P asociada se expresan como

$$Ric = \begin{pmatrix} -2\left(\beta^2+\gamma^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y así P es integrable si y sólo si $\gamma = 0$.

Tipo $\mathfrak{g}_{II}$. En este caso, si $\alpha = 0 \neq \beta$ el operador de Ricci es nilpotente en dos pasos. En otro caso, si $\alpha = 2\beta \neq 0$ se tiene que el operador de Ricci y la estructura casi producto que define están dados por

$$Ric = \begin{pmatrix} -2\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y se comprueba que en este caso P no es integrable.

Tipo $\mathfrak{g}_{III}$. Un cálculo directo muestra que en este caso el operador de Ricci es nilpotente en dos pasos.

Tipo $\mathfrak{g}_{IV.a}$. Un cálculo directo muestra que el operador de Ricci y su estructura casi producto asociada se escriben como

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y se comprueba fácilmente que P no es integrable, pues $\beta \neq 0$.

Tipo $\mathfrak{g}_{IV.b}$. En este caso tenemos que el operador de Ricci y la estructura casi producto asociada se expresan como

$$Ric = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y se sigue que P no es integrable por ser $\gamma \neq 0$.

Tipo $\mathfrak{g}_{IV.c}$. En este caso se comprueba fácilmente que el operador de Ricci es nilpotente en dos pasos, lo que concluye la demostración. $\square$

Una estructura casi contacto en una variedad M de dimensión $2n+1$ es un triple (φ, ξ, η) formado por un campo de tensores de tipo $(1,1)$, φ, una 1-forma, η, y un campo de vectores, ξ, verificando

$$\begin{cases} \varphi^2 = -\operatorname{Id} + \eta \otimes \xi, & \eta(\xi) = 1, \\ \varphi(\xi) = 0, & \eta \circ \varphi = 0, \quad \operatorname{Rango}(\varphi) = 2n. \end{cases}$$

Una métrica pseudo-Riemanniana g se dirá adaptada si

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \varepsilon \eta(X)\eta(Y) \qquad \text{y} \qquad g(X,\xi) = \varepsilon \eta(X),$$

donde $\varepsilon \in \{-1, +1\}$. En tal caso se dirá que $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ es una variedad casi contacto métrica.

Denotando con $\times$ el producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ inducido por los cuaternios, para cada vector unitario ξ existe una estructura casi contacto asociada dada por

$$\varphi(X) = \xi \times X, \qquad \eta(X) = g(\xi, X).$$

Una estructura casi paracontacto en una variedad M de dimensión $2n+1$ es un triple (φ, ξ, η) formado por un campo de tensores de tipo $(1,1)$, φ, una 1-forma, η, y un campo de vectores, ξ, verificando

$$\begin{cases} \varphi^2 = \mathrm{Id} - \eta \otimes \xi, & \eta(\xi) = 1, \\ \varphi(\xi) = 0, & \eta \circ \varphi = 0, \quad \mathrm{Rango}(\varphi) = 2n. \end{cases}$$

Una métrica g se dirá adaptada si

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X,Y) + \varepsilon \eta(X)\eta(Y) \qquad \text{y} \qquad g(X,\xi) = \varepsilon \eta(X),$$

donde $\varepsilon \in \{-1,+1\}$. En tal caso se dirá que $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ es una variedad casi paracontacto métrica.

Denotando con $\times$ el producto vectorial en $\mathbb{L}^3$ inducido por los paracuaternios, para cada vector unitario ξ la estructura dada por

$$\varphi(X) = \xi \times X, \qquad \eta(X) = \varepsilon g(\xi, X),$$

es casi contacto si ξ es temporal y casi paracontacto si ξ es espacial.

Como consecuencia de lo anterior y del Teorema 7.4 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 7.5. *Sea (M,g) un espacio homogéneo Lorentziano no simétrico de dimensión tres. Entonces, (M,g) es localmente isométrico al único espacio simétrico generalizado Lorentziano de dimensión tres si y sólo si (M,g) es IP y es operador de Ricci define una estructura casi producto P integrable inducida por una estructura casi contacto métrica.*

7.1.2. Espacios simétricos generalizados en dimensión cuatro

La clasificación de los espacios simétricos generalizados en dimensión cuatro presenta una mayor riqueza. Es importante señalar que en el caso Riemanniano existe una única posibilidad no simétrica dada por un espacio 3-simétrico. Sin embargo, cuando la signatura es neutra se pueden presentar tanto espacios de orden tres como de orden infinito. Además, como veremos, no existe ningún espacio simétrico generalizado no trivial en signatura Lorentziana.

La clasificación de los espacios simétricos generalizados en dimensión cuatro fue dada por Černý y Kowalski en [45] (véase también [118, 119, 132]). Tales espacios se presentan en cuatro familias como sigue.

Espacios simétricos generalizados de Tipo A

Esta clase comprende dos familias donde la métrica o es definida o de signatura neutra. (M,g) es el espacio $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x,y,u,v) y métrica

$$\begin{aligned} g \;=\; & \pm[(-x+\sqrt{1+x^2+y^2})du \circ du + (x+\sqrt{1+x^2+y^2})dv \circ dv - 2y du \circ dv] \\ & + \lambda[(1+y^2)dx \circ dx + (1+x^2)dy \circ dy - 2xy dx \circ dy]/(1+x^2+y^2), \end{aligned} \tag{7.2}$$

donde λ es un número real no nulo. Las signaturas posibles para este espacio son $(4,0)$, $(0,4)$ y $(2,2)$. Los espacios simétricos generalizados de Tipo A son de orden 3.

Veremos que en cualquier caso la variedad está equipada de forma natural con un par simpléctico (y por tanto foliada por superficies minimales complementarias), de modo que una de las estructuras simplécticas es paralela. Los siguientes resultados resumen lo obtenido en esta sección.

Teorema 7.6. *Un espacio simétrico generalizado de Tipo A está equipado de forma natural con un par simpléctico (Ω_+,Ω_-) tal que (M,g,Ω_+,Ω_-) es una variedad casi Kähler y opuesta Kähler con tensor de Ricci $J_\pm$-invariante, tanto en el caso definido como en el de signatura neutra.*

Teorema 7.7. *Un espacio simétrico generalizado de Tipo A es una variedad casi Kähler y opuesta Kähler foliada por superficies minimales complementarias.*

En lo que sigue distinguiremos el caso definido positivo del caso de signatura neutra.

El caso definido positivo.

Supongamos que la signatura es Riemanniana $(++++)$. Entonces la métrica está dada por la Ecuación (7.2):

$$\begin{aligned} g &= (-x+\sqrt{1+x^2+y^2})du\circ du+(x+\sqrt{1+x^2+y^2})dv\circ dv-2ydu\circ dv \\ &\quad +\lambda[(1+y^2)dx\circ dx+(1+x^2)dy\circ dy-2xydx\circ dy]/(1+x^2+y^2). \end{aligned}$$

Consideramos la siguiente base local ortonormal (asumiendo $\lambda>0$):

$$\begin{aligned} e_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}}(-y\partial_x+x\partial_y), & e_2 &= \sqrt{\tfrac{x^2+y^2+1}{\lambda(x^2+y^2)}}(x\partial_x+y\partial_y), \\ e_3 &= \tfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}y\mu_{-1}}\partial_u+\tfrac{1}{\sqrt{2}\mu_{-1}}\partial_v, & e_4 &= \tfrac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}y\mu_1}\partial_u+\tfrac{1}{\sqrt{2}\mu_1}\partial_v, \end{aligned}$$

donde $\mu_\varepsilon(x,y)=\sqrt{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\varepsilon y^2+\left(x-\sqrt{x^2+y^2+1}\right)\left(x\varepsilon+\sqrt{x^2+y^2}\right)}}$. Puesto que la variedad es homogénea, trabajaremos en un entorno de un punto donde la construcción anterior esté bien definida y usaremos las isometrías locales para extender los objetos a toda la variedad.

Consideramos la orientación en M la dada por la base $\{e_1,\dots,e_4\}$. Entonces un cálculo largo pero directo muestra que los operadores de Weyl autodual y antiautodual se expresan con respecto a la base $\{E_i^\pm\}$ dada por la Ecuación (1.4) como

$$W^+=\begin{pmatrix} \frac{1}{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4\lambda} \end{pmatrix}, \qquad W^-=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4\lambda} \end{pmatrix}.$$

Observemos que ambos operadores tienen un autovalor distinguido, $\pm\frac{1}{2\lambda}$, cuyo autoespacio asociado está generado por E_1^+ y E_1^-, respectivamente.

Puesto que los espacios simétricos generalizados son homogéneos y asumimos simplemente conexos (en otro caso trabajaríamos sobre el recubrimiento universal) se tiene que $\ker(W^\pm \mp \frac{1}{2\lambda}\,\mathrm{Id}_{\Lambda^2_\pm})$ define 2-formas $\Omega_\pm = \sqrt{2}E_1^\pm$ globalmente en M. Además se tiene que

$$\Omega_+ \wedge \Omega_- = 0, \qquad \Omega_+ \wedge \Omega_+ = -\Omega_- \wedge \Omega_-,$$

y por tanto (Ω_+, Ω_-) definen un par simpléctico cuando $\Omega_\pm$ son cerradas. Estudiaremos sus propiedades de forma separada.

Empezamos con la 2-forma autodual $\Omega_+ = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$. La 2-forma Ω_+ induce una estructura casi Hermítica en la variedad M cuya estructura casi compleja J_+ (definida por la ecuación $g(J_+X, Y) = \Omega_+(X, Y)$) se expresa con respecto a la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ como

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces (g, J_+) es una estructura casi Hermítica en M, donde una descripción de la estructura casi compleja en coordenadas es como sigue

$$J_+ = \begin{pmatrix} -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & 0 & 0 \\ \frac{-y^2-1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & -x-\sqrt{x^2+y^2+1} \\ 0 & 0 & \sqrt{x^2+y^2+1}-x & -y \end{pmatrix}.$$

Análogamente Ω_+ se expresa en coordenadas locales como

$$\Omega_+ = \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dy \wedge dx + du \wedge dv.$$

Un cálculo directo muestra que Ω_+ es una forma simpléctica. Fijémonos que la construcción anterior se apoya únicamente en propiedades de la curvatura (y por tanto es invariante por isometrías locales). Puesto que M es homogénea se tiene que un espacio simétrico generalizado de Tipo A Riemanniano está equipado de forma natural con una estructura casi Kähler.

Procedemos de modo análogo con la 2-forma antiautodual $\Omega_- = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4$. La 2-forma Ω_- induce una estructura casi Hermítica en la variedad M cuya estructura casi compleja J_- (definida por $g(J_-X, Y) = \Omega_-(X, Y)$) se expresa con respecto a la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ como

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces (g, J_-) es una estructura casi Hermítica en M, donde una descripción de la estructura casi compleja en coordenadas es como sigue

$$J_- = \begin{pmatrix} -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & 0 & 0 \\ \frac{-y^2-1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y & x+\sqrt{x^2+y^2+1} \\ 0 & 0 & x-\sqrt{x^2+y^2+1} & y \end{pmatrix}.$$

Análogamente Ω_- se expresa en coordenadas locales como

$$\Omega_- = \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dy \wedge dx + dv \wedge du.$$

Un cálculo directo muestra que Ω_- es una forma simpléctica. Además, la 2-forma Ω_- es paralela y por tanto (g, J_-) es una estructura Kähler. De nuevo toda esta construcción se apoya únicamente en propiedades de la curvatura (y por tanto es invariante por isometrías locales). Puesto que M es homogénea se tiene que un espacio simétrico generalizado de Tipo A Riemanniano está equipado de forma natural con una estructura casi Kähler y opuesta Kähler.

Por último, el tensor de Ricci está dado por

$$\rho = \frac{3}{2(x^2+y^2+1)} \begin{pmatrix} -y^2-1 & xy & 0 & 0 \\ xy & -x^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto es J_+-invariante.

El caso de signatura neutra.

Sea (M, g) la variedad pseudo-Riemanniana de signatura neutra $(--++)$ con métrica dada por la Ecuación (7.2) en la forma

$$\begin{aligned} g &= (x-\sqrt{1+x^2+y^2})du \circ du - (x+\sqrt{1+x^2+y^2})dv \circ dv + 2ydu \circ dv \\ &\quad +\lambda[(1+y^2)dx \circ dx + (1+x^2)dy \circ dy - 2xydx \circ dy]/(1+x^2+y^2). \end{aligned}$$

Como los cálculos son análogos al caso anterior, omitiremos los detalles. Señalar que, al contrario de lo que ocurría en el caso definido positivo, la forma de Kähler y la estructura compleja inducen orientaciones opuestas en el caso de signatura $(2, 2)$. Por ello consideramos la siguiente base ortonormal (asumimos $\lambda > 0$):

$$\begin{aligned} e_1 &= \tfrac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}y\mu_1}\partial_u + \tfrac{1}{\sqrt{2}\mu_1}\partial_v, & e_2 &= \tfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}y\mu_{-1}}\partial_u + \tfrac{1}{\sqrt{2}\mu_{-1}}\partial_v, \\ e_3 &= \left(\tfrac{x^2+y^2+1}{\lambda(x^2+y^2)}\right)^{\frac{1}{2}} (x\partial_x + y\partial_y), & e_4 &= \tfrac{1}{\sqrt{\lambda(x^2+y^2)}}(-y\partial_x + x\partial_y), \end{aligned}$$

donde $\mu_\varepsilon(x,y) = \sqrt{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\varepsilon y^2+\left(x-\sqrt{x^2+y^2+1}\right)\left(x\varepsilon+\sqrt{x^2+y^2}\right)}}$. Aquí e_1 y e_2 son vectores temporales mientras que e_3 y e_4 son vectores espaciales.

Los operadores de curvatura de Weyl autodual y antiautodual se escriben del siguiente modo

$$W^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4\lambda} \end{pmatrix}, \qquad W^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4\lambda} \end{pmatrix}.$$

De nuevo se obtiene que los autoespacios distinguidos de los operadores de Weyl $W^\mp$ definen globalmente 2-formas simplécticas $\Omega_\mp = e^1 \wedge e^2 \mp e^3 \wedge e^4$ en M; en coordenadas locales están dadas por

$$\begin{aligned} \Omega_- &= \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dy \wedge dx + dv \wedge du, \\ \Omega_+ &= \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dx \wedge dy + dv \wedge du, \end{aligned}$$

de forma que (Ω_-, Ω_+) es un par simpléctico. Ahora, las estructuras J_- y J_+ asociadas se expresan, con respecto a la base ortonormal, como

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y en coordenadas locales están dadas por

$$J_- = \begin{pmatrix} -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & \frac{1+x^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & 0 & 0 \\ \frac{-y^2-1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & -x-\sqrt{x^2+y^2+1} \\ 0 & 0 & -x+\sqrt{x^2+y^2+1} & -y \end{pmatrix},$$

$$J_+ = \begin{pmatrix} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & \frac{-x^2-1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & 0 & 0 \\ \frac{y^2+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & -x-\sqrt{x^2+y^2+1} \\ 0 & 0 & \sqrt{x^2+y^2+1}-x & -y \end{pmatrix}.$$

Además Ω_+ es paralela, por lo que la estructura casi compleja asociada J_+ es integrable y por tanto (M, g, J_+) es una estructura indefinida Kähler.

Por último, el tensor de Ricci está dado por

$$\rho = \frac{3}{2(x^2+y^2+1)} \begin{pmatrix} -y^2-1 & xy & 0 & 0 \\ xy & -x^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto es J_--invariante.

Espacios simétricos generalizados de Tipo B

Este espacio se corresponde con $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x, y, u, v) y métrica

$$g = \lambda(dx \circ dx + dy \circ dy + dx \circ dy) + e^{-y}(2dx + dy) \circ dv + e^{-x}(dx + 2dy) \circ du, \tag{7.3}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$. En este caso la única posibilidad para la signatura de la métrica es $(2, 2)$. Los espacios simétricos generalizados de Tipo B son de orden 3.

En el estudio de la geometría de los espacios simétricos generalizados de Tipo B la constante λ juega un papel fundamental. De hecho, un cálculo directo muestra que todo espacio simétrico generalizado de Tipo B tiene tensor de Weyl paralelo (esto es, es *conformemente simétrico*) y es localmente conformemente llano (i.e., $W = 0$) si y sólo si $\lambda = 0$. Así pues, distinguiremos dos casos en función del parámetro λ.

Caso $\lambda \neq 0$.

Como se mostró en [70], el operador de Ricci de toda variedad estrictamente conformemente simétrica (i.e., $\nabla W = 0$ pero $W \neq 0$ y $\nabla R \neq 0$) verifica Rango$(Ric) \leq 2$. Además el tensor de Weyl se obtiene a partir del tensor de Ricci como producto de Kulkarni-Nomizu, $-2FW = \rho \odot \rho$, para alguna función F que se anula en los puntos donde Rango$(Ric) \leq 1$. Si M es homogénea, entonces F debe de ser constante, y o bien $F = 0$, en cuyo caso se dirá que M es parabólica, o bien $F \neq 0$ (equivalentemente Rango$(Ric) = 2$); en este último caso, M se dirá elíptica o hiperbólica dependiendo de si ρ es semidefinido o no.

Ahora bien, se sigue de la Ecuación (7.3) que el operador de Ricci, Ric, y el tensor de Ricci, ρ, correspondiente a una métrica de Tipo B verifican

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}e^x & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3}e^y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto Ric es nilpotente en dos pasos y ρ es semidefinido negativo. Además, se sigue de la Ecuación (7.3) que el tensor de Ricci de todo espacio simétrico generalizado de Tipo B con $\lambda \neq 0$ verifica $-2FW = \rho \odot \rho$, donde $F = -\frac{8}{3\lambda}$. Derdzinski probó en [63] la existencia de un único espacio homogéneo elíptico conformemente simétrico no trivial cuyo operador de Ricci es de rango dos y con tensor de Ricci semidefinido negativo. Tal espacio en dimensión cuatro, $M^4_{E,2,-\frac{8}{3\lambda}}$, viene dado en coordenadas (x, y, u, v) por la métrica (para $F = -\frac{8}{3\lambda}$)

$$g_E = \begin{pmatrix} 2ve^{-\frac{1}{6}\log 4} + \frac{1}{2F}e^{\frac{4}{3}\log 4} & -2ue^{-\frac{1}{6}\log 4} & 0 & e^{\frac{1}{6}\log 4} \\ -2ue^{-\frac{1}{6}\log 4} & -2ve^{-\frac{1}{6}\log 4} + \frac{1}{2F}e^{\frac{4}{3}\log 4} & e^{\frac{1}{6}\log 4} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{6}\log 4} & 0 & 0 \\ e^{\frac{1}{6}\log 4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 7.8. *Sea (M,g) un espacio simétrico generalizado de Tipo B con $\lambda \neq 0$. Entonces (M,g) es localmente isométrico al espacio $M^4_{E,2,-\frac{8}{3\lambda}}$.*

Demostración. El espacio simétrico generalizado de Tipo B con $\lambda \neq 0$ es elíptico (el tensor de Ricci es semidefinido) y $F = -\frac{8}{3\lambda}$. Por tanto, de acuerdo con [63, Teorema 1, Corolario 1], (M,g) es localmente isométrico a $M^4_{E,2,-\frac{8}{3\lambda}}$, obteniéndose así el resultado. □

Caso $\lambda = 0$.

Fijémonos que un espacio simétrico generalizado de Tipo B es estrictamente conformemente simétrico si y sólo si $\lambda \neq 0$, y conformemente llano para el caso $\lambda = 0$. Además un espacio simétrico generalizado de Tipo B es semisimétrico si y sólo si es conformemente llano, es decir, $\lambda = 0$; por ello el tratamiento de este caso es completamente distinto al visto anteriormente. El resultado que obtenemos es el siguiente:

Teorema 7.9. *Todo espacio simétrico generalizado de Tipo B conformemente llano se corresponde con la extensión de Riemann $(T^*\Sigma, g_D)$ de una superficie afín (Σ, D), donde D es una conexión afín proyectivamente llana con tensor de Ricci simétrico y no degenerado.*

Demostración. Un cálculo directo muestra que la distribución $\mathfrak{D} = \langle\{\partial_u, \partial_v\}\rangle$ en el espacio simétrico generalizado Tipo B conformemente llano es nula y paralela, por lo que este espacio se corresponde con una variedad de Walker. Además, el Teorema 1.8 y los resultados obtenidos en [1] muestran que dicho espacio simétrico generalizado se corresponde con la extensión de Riemann de una superficie Σ dotada con una conexión proyectivamente llana D. Un cálculo largo pero directo muestra que $\mathcal{R}(a,b)\mathcal{R}(c,d) = \mathcal{R}(c,d)\mathcal{R}(a,b)$ para cualesquiera vectores a, b, c, d, y por lo tanto el tensor de Ricci de la superficie Σ es simétrico [22]. Por último, se comprueba fácilmente que $(T^*\Sigma, g_D)$ no es IP y por lo tanto el tensor de Ricci de la superficie (Σ, D) es no degenerado [41]. □

Espacios simétricos generalizados de Tipo C

Este espacio se corresponde con $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x,y,z,t) y métrica

$$g = \pm\left(e^{2t}dx \circ dx + e^{-2t}dy \circ dy + dz \circ dt\right), \tag{7.4}$$

siendo de signatura Lorentziana $(1,3)$ ó $(3,1)$. Las métricas dadas por la Ecuación (7.4) son métricas de un producto warped doble $N \times_{f_1} \mathbb{R} \times_{f_2} \mathbb{R}$ con base llana $N \equiv (\mathbb{R}^2(z,t), dz \circ dt)$ y funciones de deformación $f_1(z,t) = e^t$, $f_2(z,t) = e^{-t}$. Los espacios warped múltiples que son localmente conformemente llanos han sido estudiados en [25] donde se muestra que un producto warped doble $N \times_{f_1} \mathbb{R} \times_{f_2} \mathbb{R}$ como el anterior es localmente conformemente llano si y sólo si las siguientes condiciones se verifican:

(i) La métrica conforme $\overline{g}_i = f_i^{-2} dz \circ dt$ es de curvatura constante, $i = 1,2$.

(ii) Las funciones de deformación verifican la condición de compatibilidad

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} + \frac{\Delta f_2}{f_2} = 2\frac{\langle \nabla f_1, \nabla f_2 \rangle}{f_1 f_2}.$$

La condición (i) es inmediata. Por otra parte, para una función arbitraria $f(z,t)$ en N se tiene que $\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t}$ y $\nabla f = 2\frac{\partial f}{\partial t}\partial_z + 2\frac{\partial f}{\partial z}\partial_t$, de donde se sigue (ii), por lo que se concluye que las métricas dadas por la Ecuación (7.4) son localmente conformemente llanas. Además, se demostró en [35] que el tensor de Ricci de un espacio de Tipo C es paralelo, y por tanto *las métricas Lorentzianas de Tipo C son localmente simétricas.*

Espacios simétricos generalizados de Tipo D

(M,g) es el espacio $\mathbb{R}^4$ con coordenadas (x,y,u,v) y métrica

$$\begin{aligned} g \;=\; & (\operatorname{senh}(2u) - \cosh(2u)\operatorname{sen}(2v))dx \circ dx \\ & +(\operatorname{senh}(2u) + \cosh(2u)\operatorname{sen}(2v))dy \circ dy \\ & -2\cosh(2u)\cos(2v) dx \circ dy + \lambda(du \circ du - \cosh^2(2u) dv \circ dv), \end{aligned} \tag{7.5}$$

donde λ es una constante real no nula. La signatura es siempre $(2,2)$ y los espacios simétricos generalizados de Tipo D son siempre de orden infinito.

Consideremos la base local ortonormal dada por (asumimos $\lambda > 0$):

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}\cosh(2u)}\partial_v, & e_2 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2e^{-2u}}{1-\operatorname{sen}(2v)}}}\left((\sec(2v) + \tan(2v))\partial_x + \partial_y\right), \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\partial_u, & e_4 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2e^{2u}}{1+\operatorname{sen}(2v)}}}\left((\tan(2v) - \sec(2v))\partial_x) + \partial_y\right), \end{aligned}$$

donde e_1, e_2 son vectores temporales mientras que e_3 y e_4 son vectores espaciales. Con respecto a la base inducida dada por la Ecuación (1.4) los operadores de Weyl autodual y antiautodual se expresan como sigue

$$W^+ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \qquad W^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Ambos operadores tienen un autovalor distinguido, $\pm\frac{2}{\lambda}$, cuyos autoespacio asociado es unidimensional. Sean $\Omega_\pm = \sqrt{2}E_2^\pm$ las 2-formas definidas globalmente como secciones de $\ker\left(W^\pm \mp \frac{2}{\lambda}\operatorname{Id}_{\Lambda^2_\pm}\right)$. Puesto que la métrica dada en la Ecuación (7.5) es de signatura neutra, las métricas inducidas en $\Lambda^2_\pm$ tiene signatura Lorentziana y se obtiene que $\|\Omega_\pm\| = -2$. Por tanto, $\Omega_\pm$ son las formas de Kähler de dos estructuras casi paraHermíticas (es decir, $\mathfrak{J}_\pm^2 = \operatorname{Id}$ y $g(\mathfrak{J}_\pm X, Y) + g(X, \mathfrak{J}_\pm Y) = 0$) definidas por $g(\mathfrak{J}_\pm X, Y) = \Omega_\pm(X,Y)$, induciendo así orientaciones opuestas en M [114].

Comenzamos con el análisis de la 2-forma $\Omega_+ = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4$. Un cálculo directo muestra que la representación matricial de la estructura $\mathfrak{J}_+$ con respecto a la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es

$$\mathfrak{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces la estructura paracompleja $\mathfrak{J}_+$ se expresa en la base de campos coordenados como

$$\begin{pmatrix} -\cos(2v)\cosh(2u) & \cosh(2u)\operatorname{sen}(2v) + \operatorname{senh}(2u) & 0 & 0 \\ \cosh(2u)\operatorname{sen}(2v) - \operatorname{senh}(2u) & \cos(2v)\cosh(2u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh(2u) \\ 0 & 0 & \operatorname{sech}(2u) & 0 \end{pmatrix},$$

y la correspondiente 2-forma de Kähler

$$\Omega_+ = dx \wedge dy + \lambda \cosh(2u) dv \wedge du.$$

Ahora, un cálculo directo nos muestra que Ω_+ es cerrada y por tanto todo espacio simétrico generalizado de Tipo D está naturalmente equipado con una estructura casi paraKähler.

De forma análoga la 2-forma antiautodual $\Omega_- = e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4$ define una estructura casi paraHermítica $(g, \mathfrak{J}_-)$ cuya estructura casi paracompleja $\mathfrak{J}_-$ se expresa en la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ como

$$\mathfrak{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y en coordenadas como

$$\begin{pmatrix} \cos(2v)\cosh(2u) & -\cosh(2u)\operatorname{sen}(2v) - \operatorname{senh}(2u) & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}(2u) - \cosh(2u)\operatorname{sen}(2v) & -\cos(2v)\cosh(2u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cosh(2u) \\ 0 & 0 & \operatorname{sech}(2u) & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora la 2-forma de Kähler Ω_- se expresa en coordenadas como

$$\Omega_- = dy \wedge dx + \lambda \cosh(2u) dv \wedge du,$$

por lo que un cálculo directo muestra que Ω_- es una estructura simpléctica. Además se prueba que $\nabla \Omega_- = 0$ y por tanto todo espacio simétrico generalizado de Tipo D está dotado de forma natural con una estructura casi paraKähler y opuesta paraKähler.

Por último, el tensor de Ricci está dado por

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\cosh^2(2u) \end{pmatrix},$$

y por lo tanto es $\mathfrak{J}_+$-invariante.

Resumiendo todo lo anterior, tenemos los siguientes resultados:

Teorema 7.10. *Un espacio simétrico generalizado de Tipo D está equipado de forma natural con un par simpléctico* (Ω_+, Ω_-) *tal que* $(M, g, \Omega_+, \Omega_-)$ *es una variedad casi paraKähler y opuesta paraKähler con tensor de Ricci* $\mathfrak{J}_\pm$*-invariante.*

Teorema 7.11. *Cualquier espacio simétrico generalizado de Tipo D es una variedad estrictamente casi paraKähler foliada por superficies minimales complementarias.*

Observación 7.12. Los espacios simétricos generalizados de Tipo D tienen una estructura opuesta paraKähler y por tanto son métricas de Walker [21].

7.2. Caracterización de los espacios simétricos generalizados de Tipo A

Todo espacio homogéneo en dimensión cuatro es simétrico o un grupo de Lie. En lo que sigue estudiaremos la posibilidad de caracterizar los espacios simétricos generalizados de Tipo A de signatura neutra en términos de las estructuras subyacentes a los mismos construidas en la sección anterior. Para conseguir este objetivo será de utilidad el siguiente resultado (que caracteriza el espacio simétrico generalizado de Tipo A Riemanniano):

Teorema 7.13. [81] *Sea G un grupo de Lie real conexo de dimensión cuatro dotado de una estructura estrictamente casi Kähler* (g, J, Ω)*, de modo que g es una métrica de Riemann y tal que su tensor de Ricci es J-invariante. Entonces G es isométrico al único espacio* 3*-simétrico Riemanniano de dimensión cuatro.*

Un resultado clave para obtener la caracterización de los espacios simétricos generalizados de Tipo A de signatura neutra es el siguiente, que nos permitirá pasar del problema pseudo-Riemanniano al Riemanniano.

Lema 7.14. *Sea M una variedad de dimensión cuatro dotada de un par simpléctico* (Ω_-, Ω_+)*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe una métrica pseudo-Riemanniana de signatura neutra g de modo que las estructuras J_- y J_+ asociadas a (Ω_-, Ω_+) *son estructuras estrictamente casi Kähler y opuesta Kähler, respectivamente.*

(ii) Existe una métrica Riemanniana h de modo que las estructuras J_- y J_+ asociadas a (Ω_+, Ω_-) son estructuras estrictamente casi Kähler y opuesta Kähler, respectivamente.

Demostración. Sea (M, g) una variedad pseudo-Riemanniana de signatura $(2, 2)$ dotada de una estructura estrictamente casi Kähler J_- y una estructura opuesta Kähler J_+. Asociada a las estructuras J_- y J_+ consideramos la estructura $P = J_- J_+$. Por ser un par simpléctico, tenemos asegurada la conmutación de las estructuras casi complejas, $J_- J_+ = J_+ J_-$, y por lo tanto se tiene que (g, P) es una estructura casi producto métrica, i.e., $P^2 = \mathrm{Id}$ y además $g(PX, PY) = g(X, Y)$.

Teniendo en cuenta que g es una métrica de signatura $(2, 2)$ y que las distribuciones $\mathfrak{D}_\pm$ asociadas a P son $J_\pm$-invariantes, se tiene que la métrica h_P definida como

$$h_P(X, Y) = g(PX, Y)$$

es una métrica Riemanniana sobre M. Además, la métrica h_P sigue siendo Hermítica para las dos estructuras J_- y J_+, ya que

$$\begin{aligned} h_P(J_-X, J_-Y) &= g(PJ_-X, J_-Y) = g(J_-J_+J_-X, J_-Y) \\ &= g(J_+J_-X, Y) = g(J_-J_+X, Y) = g(PX, Y) \\ &= h_P(X, Y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_P(J_+X, J_+Y) &= g(PJ_+X, J_+Y) = g(J_-J_+J_+X, J_+Y) \\ &= g(J_-J_+X, Y) = g(PX, Y) \\ &= h_P(X, Y), \end{aligned}$$

por lo que (h_P, J_-, J_+) es una estructura casi Hermítica y opuesta casi Hermítica definida positiva. Ahora, las 2-formas de Kähler resultan

$$\Omega_-^P(X, Y) = h_P(J_-X, Y) = g(PJ_-X, Y) = -g(J_+X, Y) = -\Omega_+(X, Y)$$

y

$$\Omega_+^P(X, Y) = h_P(J_+X, Y) = g(PJ_+X, Y) = -g(J_-X, Y) = -\Omega_-(X, Y).$$

Entonces, teniendo en cuenta que el carácter cerrado de las 2-formas de Kähler $\Omega_\pm$ no depende de la métrica y que el carácter integrable de la estructura J_+ es también independiente de la métrica considerada, concluimos que (h_P, J_-, J_+) es una estructura estrictamente casi Kähler y opuesta Kähler. El recíproco se obtiene de forma totalmente análoga. □

El problema planteado en esta sección se resuelve ahora en el siguiente resultado.

Teorema 7.15. *Sea G un grupo de Lie de dimensión cuatro con una métrica invariante a la izquierda de signatura neutra. Sea (Ω_-, J_-) una estructura invariante estrictamente casi Kähler y sea (Ω_+, J_+) una estructura invariante opuesta Kähler, de tal forma que el tensor de Ricci sea J_--invariante. Entonces, el grupo de Lie G es isométrico al espacio pseudo-Riemanniano 3-simétrico dado en la Ecuación (7.2).*

Demostración. El hecho de que el grupo de Lie esté dotado de un par simpléctico garantiza la existencia de dos foliaciones minimales complementarias, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, dadas por 2-formas $\omega_{\mathcal{F}}$ y $\omega_{\mathcal{G}}$, y caracterizadas por $\Omega_\pm = \frac{1}{2}(\omega_{\mathcal{F}} \pm \omega_{\mathcal{G}})$; además una de ellas es integrable. Todo ello permite construir una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de modo que e_1 y e_2 son vectores temporales, e_3 y e_4 son vectores espaciales, con respecto a la cual $\Omega_\pm = e^1 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^4$, o equivalentemente las estructuras J_- y J_+ se pueden expresar con respecto a esa base como

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y de forma que con respecto a dicha base los corchetes se pueden escribir como

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = a_1 e_1 + b_1 e_2, \\ [e_1, e_3] = a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3 + d_2 e_4, \\ [e_1, e_4] = a_3 e_1 + b_3 e_2 + c_3 e_3 + d_3 e_4, \\ [e_2, e_3] = a_4 e_1 + b_4 e_2 + c_4 e_3 + d_4 e_4, \\ [e_2, e_4] = a_5 e_1 + b_5 e_2 + c_5 e_3 + d_5 e_4, \\ [e_3, e_4] = c_6 e_3 + d_6 e_4. \end{cases}$$

Dichos corchetes definen un álgebra de Lie si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

$$
(7.6)\qquad \begin{cases}
a_1b_4 - a_4(b_1 + c_2) + a_2c_4 - a_5d_2 + a_3d_4 = 0,\\
a_2b_1 - a_1b_2 - b_4c_2 + b_2c_4 - b_5d_2 + b_3d_4 = 0,\\
a_1c_2 + b_1c_4 + c_5d_2 - c_3d_4 = 0,\\
a_1d_2 - c_4d_2 + b_1d_4 + c_2d_4 - d_3d_4 + d_2d_5 = 0,\\
a_1b_5 - a_4c_3 + a_2c_5 - a_5(b_1 + d_3) + a_3d_5 = 0,\\
a_3b_1 - a_1b_3 - b_4c_3 + b_2c_5 - b_5d_3 + b_3d_5 = 0,\\
a_1c_3 + c_5(b_1 - c_2 + d_3) + c_3(c_4 - d_5) = 0,\\
a_1d_3 + c_3d_4 + b_1d_5 - c_5d_2 = 0,\\
a_4b_3 - a_5b_2 + a_2c_6 + a_3d_6 = 0,\\
a_3b_2 - a_2b_3 + b_3b_4 - b_2b_5 + b_2c_6 + b_3d_6 = 0,\\
a_2c_3 - a_3c_2 - b_3c_4 + b_2c_5 + c_6d_3 - c_3d_6 = 0,\\
a_2d_3 - a_3d_2 - c_6d_2 - b_3d_4 + b_2d_5 + c_2d_6 = 0,\\
a_2a_5 - a_3a_4 - a_5b_4 + a_4b_5 + a_4c_6 + a_5d_6 = 0,\\
a_5b_2 - a_4b_3 + b_4c_6 + b_5d_6 = 0,\\
a_4c_3 - a_5c_2 - b_5c_4 + b_4c_5 + c_6d_5 - c_5d_6 = 0,\\
a_4d_3 - a_5d_2 - b_5d_4 - c_6d_4 + b_4d_5 + c_4d_6 = 0.
\end{cases}
$$

Como ambas estructuras son casi Kähler entonces $\mathfrak{D}_1 = \langle\{e_1, e_2\}\rangle$ y $\mathfrak{D}_2 = \langle\{e_3, e_4\}\rangle$ definen foliaciones transversales minimales y por lo tanto se tiene que $\nabla_{e_1}e_1 + \nabla_{e_2}e_2 \in \mathfrak{D}_1$ y $\nabla_{e_3}e_3 + \nabla_{e_4}e_4 \in \mathfrak{D}_2$ [16]. Se sigue entonces que

$$
(7.7)\qquad b_4 = -a_2, \quad b_5 = -a_3, \quad d_3 = -c_2, \quad d_5 = -c_4.
$$

Además, como J_+ define una estructura opuesta Kähler, el carácter integrable es equivalente a

$$
(7.8)\qquad b_2 = 2a_3 - a_4, \quad b_3 = -2a_2 - a_5, \quad d_2 = -c_3 + 2c_4, \quad d_4 = -2c_2 - c_5,
$$

y como J_- es una estructura estrictamente casi Kähler se tiene que las constantes a_2, a_3, c_2 y c_4 no se pueden anular simultáneamente. Asumiendo, sin pérdida de generalidad, que al menos una de estas cuatro constantes es igual a 1, las posibles álgebras de Lie que verifican las Ecuaciones (7.6), (7.7) y (7.8) son las siguientes ($\varepsilon^2 = 1$ en todos los casos):

1) Para a_3 y a_4 verificando que $2a_3a_4 - a_4^2 + 1 \geq 0$,

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = 0, \\ [e_1, e_3] = e_1 + (2a_3 - a_4)e_2, \\ [e_1, e_4] = a_3e_1 + (-1 - \varepsilon\sqrt{2a_3a_4 - a_4^2 + 1})e_2, \\ [e_2, e_3] = a_4e_1 - e_2, \\ [e_2, e_4] = (-1 + \varepsilon\sqrt{2a_3a_4 - a_4^2 + 1})e_1 - a_3e_2, \\ [e_3, e_4] = -2(a_3 - a_4)e_3 + (2\varepsilon\sqrt{2a_3a_4 - a_4^2 + 1})e_4. \end{cases}$$

2) Para a_2 y a_4 tales que $a_2^2 - a_4^2 + 2a_4 \geq 0$,

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = 0, \\ [e_1, e_3] = a_2e_1 + (2 - a_4)e_2, \\ [e_1, e_4] = e_1 + (-a_2 - \varepsilon\sqrt{a_2^2 - a_4^2 + 2a_4})e_2, \\ [e_2, e_3] = a_4e_1 - a_2e_2, \\ [e_2, e_4] = (-a_2 + \varepsilon\sqrt{a_2^2 - a_4^2 + 2a_4})e_1 - e_2, \\ [e_3, e_4] = 2(a_4 - 1)e_3 + (2\varepsilon\sqrt{a_2^2 - a_4^2 + 2a_4})e_4. \end{cases}$$

3) Para a_1 y b_1 tales que $a_1^2 + b_1^2 - 4 \geq 0$,

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = a_1e_1 + b_1e_2, \\ [e_1, e_3] = e_3 + \frac{1}{2}(a_1 + \varepsilon\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 4})e_4, \\ [e_1, e_4] = \frac{1}{2}(-a_1 + \varepsilon\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 4})e_3 - e_4, \\ [e_2, e_3] = (\varepsilon\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 4})e_3 + \frac{1}{2}(b_1 - 2)e_4, \\ [e_2, e_4] = \frac{1}{2}(-b_1 - 2)e_3 - (\varepsilon\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 4})e_4, \\ [e_3, e_4] = 0. \end{cases}$$

4) Para a_1 y b_1 tales que $a_1^2 + b_1^2 - 4 \geq 0$,

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = a_1e_1 + b_1e_2, \\ [e_1, e_3] = (\varepsilon\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 4})e_3 + \frac{2+a_1}{2}e_4, \\ [e_1, e_4] = \frac{2-a_1}{2}e_3 - (\varepsilon\frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 4})e_4, \\ [e_2, e_3] = e_3 + \frac{1}{2}(b_1 - \varepsilon\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 4})e_4, \\ [e_2, e_4] = \frac{1}{2}(-b_1 - \varepsilon\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 4})e_3 - e_4, \\ [e_3, e_4] = 0. \end{cases}$$

Un cálculo largo pero directo muestra que en todos los casos el operador de Ricci diagonaliza y que el tensor de Ricci es J_--invariante. Por último, para la métrica Riemanniana asociada dada por el Lema 7.14 se comprueba de modo análogo que el tensor de Ricci es J_--invariante, y por lo tanto el Teorema 7.13 asegura que G se corresponde con el espacio 3-simétrico pseudo-Riemanniano dado por la Ecuación (7.2). □

7.3. Pares simplécticos casi paraKähler

En esta sección mostraremos que no existe una caracterización de los espacios simétricos generalizados de Tipo D similar a la obtenida para los de Tipo A en el Teorema 7.15. Además, estos ejemplos pondrán de manifiesto la existencia de estructuras casi paraKähler y opuesta paraKähler con operador de Ricci $\mathfrak{J}_+$-invariante que no se corresponden con los resultados de estructura obtenidos en [4].

Consideremos un grupo de Lie G de dimensión cuatro con una métrica invariante a la izquierda de signatura neutra. Sea $(\Omega_+, \mathfrak{J}_+)$ una estructura invariante estrictamente casi paraKähler y sea $(\Omega_-, \mathfrak{J}_-)$ una estructura invariante opuesta paraKähler, de tal forma que el tensor de Ricci sea $\mathfrak{J}_+$-invariante. El hecho de tener un par simpléctico garantiza la existencia de dos foliaciones minimales complementarias, $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, dadas por 2-formas $\omega_{\mathcal{F}}$ y $\omega_{\mathcal{G}}$, y caracterizadas por $\Omega_\pm = \frac{1}{2}(\omega_{\mathcal{F}} \pm \omega_{\mathcal{G}})$; además una de ellas es integrable. Todo ello permite construir una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de modo que e_1 y e_2 son vectores temporales, e_3 y e_4 son vectores espaciales, con respecto a la cual $\Omega_\pm = e^1 \wedge e^3 \pm e^2 \wedge e^4$, o equivalentemente las estructuras $\mathfrak{J}_-$ y $\mathfrak{J}_+$ se pueden expresar con respecto a esa base como

$$\mathfrak{J}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{J}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y de forma que con respecto a dicha base los corchetes se pueden escribir como

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3 + d_1 e_4, \\ [e_1, e_3] = a_2 e_1 + c_2 e_3, \\ [e_1, e_4] = a_3 e_1 + b_3 e_2 + c_3 e_3 + d_3 e_4, \\ [e_2, e_3] = a_4 e_1 + b_4 e_2 + c_4 e_3 + d_4 e_4, \\ [e_2, e_4] = b_5 e_2 + d_5 e_4, \\ [e_3, e_4] = a_6 e_1 + b_6 e_2 + c_6 e_3 + d_6 e_4. \end{cases}$$

A continuación mostraremos tres ejemplos de álgebras de Lie del tipo descrito. El primero de ellos es compatible con las propiedades geométricas obtenidas en la Sección

7.1.2 para los espacios simétricos generalizados de Tipo D. Esto no sucede en los otros dos ejemplos, pues en ambos el operador de Weyl autodual no diagonaliza.

Ejemplo 7.16. Consideremos el álgebra de Lie dada por los corchetes

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = a_1 e_1 + (-a_3 - \sqrt{a_3^2 - a_1^2}) e_3, \\ [e_1, e_3] = 0, \\ [e_1, e_4] = a_3 e_1 - a_1 e_3, \\ [e_2, e_3] = (-a_3 + \sqrt{a_3^2 - a_1^2}) e_1 + a_1 e_3, \\ [e_2, e_4] = -2\sqrt{a_3^2 - a_1^2}\, e_2, \\ [e_3, e_4] = a_1 e_1 - a_3 e_3, \end{cases}$$

donde $a_1 \neq 0$ y $a_3^2 - a_1^2 > 0$. El operador de Ricci se expresa como

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\left(a_1^2 - a_3^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\left(a_1^2 - a_3^2\right) \end{pmatrix},$$

y los operadores de Weyl autodual y antiautodual están dados por

$$W^+ = \begin{pmatrix} a_1^2 - a_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\left(a_3^2 - a_1^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & a_1^2 - a_3^2 \end{pmatrix}, \; W^- = \begin{pmatrix} a_3^2 - a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\left(a_1^2 - a_3^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 - a_1^2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, ambos operadores diagonalizan.

Ejemplo 7.17. Consideremos el álgebra de Lie dada por los corchetes

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = a_1 e_1 + a_1 e_3, \\ [e_1, e_3] = 0, \\ [e_1, e_4] = -a_1 e_1 + (a_6 - 2a_1) e_3, \\ [e_2, e_3] = a_1 e_1 + a_1 e_3, \\ [e_2, e_4] = -2(a_1 - a_6) e_2, \\ [e_3, e_4] = a_6 e_1 + a_1 e_3, \end{cases}$$

donde $a_1 \neq 0$ y $a_1 \neq a_6$. En este caso el operador de Ricci se expresa como

$$Ric = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4(a_1 - a_6)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4(a_1 - a_6)^2 \end{pmatrix},$$

y el operador W^+ está dado por

$$W^+ = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\left(5a_1^2 - 4a_6a_1 - a_6^2\right) & 0 & 4a_1(a_1 - a_6) \\ 0 & -\frac{4}{3}(a_1 - a_6)^2 & 0 \\ 4a_1(a_6 - a_1) & 0 & \frac{2}{3}\left(7a_1^2 - 8a_6a_1 + a_6^2\right) \end{pmatrix},$$

por lo que no es diagonalizable pues $a_1 \neq 0$ y $a_1 \neq a_6$. El operador W^- está dado por

$$W^- = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(a_1 - a_6)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}(a_1 - a_6)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}(a_1 - a_6)^2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 7.18. Consideremos el álgebra de Lie dada por los corchetes

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = a_1e_1 + (-2a_1 - a_4)e_3, \\ [e_1, e_3] = 0, \\ [e_1, e_4] = a_1e_1 + (-2a_1 - a_4)e_3, \\ [e_2, e_3] = a_4e_1 + a_1e_3, \\ [e_2, e_4] = 0, \\ [e_3, e_4] = -a_4e_1 - a_1e_3, \end{cases}$$

donde $a_1(a_1 + a_4) \neq 0$. Un cálculo directo muestra que el álgebra de Lie es Ricci llana y los operadores de Weyl autodual y antiautodual están dados por

$$W^+ = \begin{pmatrix} -4a_1(a_1 + a_4) & 0 & -4a_1(a_1 + a_4) \\ 0 & 0 & 0 \\ 4a_1(a_1 + a_4) & 0 & 4a_1(a_1 + a_4) \end{pmatrix}, \qquad W^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la variedad es autodual y el operador W^+ es nilpotente en dos pasos, por lo que es Osserman.

Observación 7.19. Los ejemplos anteriores muestran que la existencia de pares simplécticos donde una de las dos formas simplécticas es paralela es mucho menos rígida en el ámbito casi paraHermítico con respecto a la situación casi Hermítica [44].

Bibliografía

[1] Z. Afifi, Riemann extensions of affine connected spaces, *Quart. J. Math., Oxford Ser. (2)* **5** (1954), 312–320.

[2] D. V. Alekseevsky, V. Cortés, A. S. Galaev y T. Leistner, Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy, *J. Reine Angew. Math.* **635** (2009), 23–69.

[3] V. Apostolov, Generalized Golberg-Sachs theorems for pseudo-Riemannian four-manifolds, *J. Geom. Phys.* **27** (1998), 185–198.

[4] V. Apostolov, J. Armstrong y T. Draghici, Local rigidity of certain classes of almost Kähler 4-manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* **21** (2002), 151–176.

[5] T. Arias-Marco y O. Kowalski, Classification of locally homogeneous affine connections with arbitrary torsion on 2-dimensional manifolds, *Monatsh. Math* **153** (2008), 1–18.

[6] G. Bande y D. Kotschick, The geometry of symplectic pairs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), 1643–1655.

[7] G. Bande y D. Kotschick, The geometry of recursion operators, *Comm. Math. Phys.* **280** (2008), 737–749.

[8] L. Bérard Bergery y A. Ikemakhen, Sur L'holonomie des variétés pseudo-Riemanniennes de signature (n, n), *Bull. Soc. Math. France* **125** (1997), 93–114.

[9] J. Berndt y L. Vanhecke, Two natural generalizations of locally symmetric spaces, *Differential Geom. Appl.* **2** (1992), 57–80.

[10] N. Blažić, N. Bokan y P. Gilkey, A note on Osserman Lorentzian manifolds, *Bull. London Math. Soc.* **29** (1997), 227–230.

[11] N. Blažić, N. Bokan y Z. Rakić, Foliation of a dynamically homogeneous neutral manifold, *J. Math. Phys.* **39** (1998), 6118–6124.

[12] N. Blažić, N. Bokan y Z. Rakić, Osserman pseudo-Riemannian manifolds of signature $(2, 2)$, *J. Aust. Math. Soc.* **71** (2001), 367–395.

[13] N. Blažić, P. Gilkey, S. Nikčević e I. Stavrov, Curvature structure of self-dual 4-manifolds, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **5** (2008), 1191–1204.

[14] N. Bokan, On the complete decomposition of curvature tensors of Riemannian manifolds with symmetric connection, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **39** (1990), 331–380.

[15] A. Bonome, P. Castro y E. García-Río, Generalized Osserman four-dimensional manifolds, *Classical Quantum Gravity* **18** (2001), 4813–4822.

[16] A. Bonome, R. Castro, E. García-Río, L.M. Hervella y Y. Matsushita, Almost complex manifolds with holomorphic distributions, *Rend. Math. Appl. (7)* **14** (1994), 567–589.

[17] A. Bonome, R. Castro, E. García-Río, L. Hervella y R. Vázquez-Lorenzo, Nonsymmetric Osserman indefinite Kaehler manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 2763–2769.

[18] A. Bonome, R. Castro, E. García-Río, L. Hervella y R. Vázquez-Lorenzo, On the paraholomorphic sectional curvature of almost para-Hermitian manifolds, *Houston J. Math.* **24** (1998), 277–300.

[19] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río y S. Gavino-Fernández, Some generalizations of locally symmetric spaces, *XIX Fall Workshop on Geometry and Physics, Porto, Protugal 6–9 September 2010.* American Institute of Physics (AIP). AIP Conference Proceedings **1360** (2010), 121–126

[20] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río y P. Gilkey, Relating the curvature tensor and the complex Jacobi operator of an almost Hermitian manifold, *Adv. Geom.* **8** (2008), 353–365.

[21] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević y R. Vázquez-Lorenzo, *The geometry of Walker manifolds*, Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics **5**, Morgan & Claypool Publ., 2009.

[22] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey y R. Vázquez-Lorenzo, Examples of signature $(2,2)$ manifolds with commuting curvature operators, *J. Phys. A* **40** (2007), 13149–13159.

[23] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey y R. Vázquez-Lorenzo, Compact Osserman four-dimensional manifolds, *Results Math.* **59** (2011), 495–506.

[24] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río y R. Vázquez-Lorenzo, Conformally Osserman four-dimensional manifolds whose conformal Jacobi operators have complex eigenvalues, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **462** (2006), 1425–1441.

[25] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río y R. Vázquez-Lorenzo, Complete locally conformally flat manifolds of negative curvature, *Pacific J. Math.* **226** (2006), 201–219.

[26] M. Brozos-Vázquez y P. Gilkey, Complex Osserman Kaehler Manifolds, a aparecer en *Forum Math.* DOI: 10.1515/FORM.2011.119

[27] M. Brozos-Vázquez, P. Gilkey, H. Kang y S. Nikcevic, Geometric realizations of Hermitian curvature models, *J. Math. Soc. Japan* **62** (2010), 851–866.

[28] M. Brozos-Vázquez, P. Gilkey y E. Merino, Geometric realizations of Kahler and para-Kahler curvature models, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys* **7** (2010), 505–515.

[29] R. L. Bryant, Bochner-Kähler metrics, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), 623–715.

[30] P. Bueken y M. Djorić, Three-dimensional Lorentz metrics and curvature homogeneity of order one, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **18** (2000), 85–103.

[31] G. Calvaruso, Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds, *J. Geom. Phys.* **57** (2007), 1279–1291.

[32] G. Calvaruso, Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds, *Geom. Dedicata* **127** (2007), 99–119.

[33] G. Calvaruso, Einstein-like curvature homogeneous Lorentz three-manifolds, *Results Math.* **55** (2009), 295–310.

[34] G. Calvaruso, Einstein-like Lorentz metrics and three-dimensional curvature homogeneity of order one, *Canad. Math. Bull.* **53** (2010), 412–424.

[35] G. Calvaruso y B. de Leo, Curvature properties of four-dimensional generalized symmetric spaces, *J. Geom.* **90** (2008), 30–46.

[36] E. Calviño-Louzao, Variedades de Osserman e Ivanov-Petrova en dimensión cuatro, Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología **108**, Universidade de Santiago de Compostela, 2007.

[37] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, P. Gilkey y R. Vázquez-Lorenzo, The geometry of modified Riemannian extensions, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **465** (2009), 2023–2040.

[38] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, P. Gilkey y R. Vázquez-Lorenzo, Higher-dimensional Osserman metrics with non-nilpotent Jacobi operators, a aparecer en *Geom. Dedicata.* DOI: 10.1007/s10711-011-9595-y

[39] E. Calviño-Louzao, E. García Río y R. Vázquez Lorenzo, Four-dimensional Osserman–Ivanov–Petrova metrics of neutral signature, *Classical Quantum Gravity* **24** (2007), 2343–2355.

[40] E. Calviño-Louzao, E. García Río y R. Vázquez Lorenzo, Four-dimensional Osserman metrics revisited, *Special metrics and supersymmetry, Bilbao, Spain, 29–31 May 2008.* American Institute of Physics (AIP). AIP Conference Proceedings **1093** (2009), 35-47.

[41] E. Calviño-Louzao, E. García-Río y R. Vázquez-Lorenzo, Riemann extensions of torsion-free connections with degenerate Ricci tensor, *Canad. J. Math.*, **62** (5), (2010), 1037–1057.

[42] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, M.E. Vázquez-Abal y R. Vázquez-Lorenzo, Curvature operators and generalizations of symmetric spaces in Lorentzian geometry, a aparecer en *Adv. Geom.* DOI: 10.1515/ADVGEOM.2011.036

[43] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, M.E. Vázquez-Abal y R. Vázquez-Lorenzo, Geometric properties of generalized symmetric spaces, preprint.

[44] E. Calviño-Louzao, E. García-Río, M.E. Vázquez-Abal y R. Vázquez-Lorenzo, Local rigidity and nonrigidity of symplectic pairs, a aparecer en *Ann. Glob. Anal. Geom.* DOI: 10.1007/s10455-011-9279-8

[45] J. Černý y O. Kowalski, Classification of generalized symmetric pseudo-Riemannian spaces of dimension $n \leq 4$, *Tensor, N.S* **38** (1982), 256–267.

[46] M. Chaichi, E. García-Río y Y. Matsushita, Curvature properties of four-dimensional Walker metrics, *Classical Quantum Gravity* **22** (2005), 559–577.

[47] B. Y. Chen y L. Vanhecke, Isometric, holomorphic and symplectic reflections, *Geom. Dedicata* **29** (1989), 259–277.

[48] B. Y. Chen y L. Vanhecke, Symplectic reflections and complex space forms, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **9** (1991), 205–210.

[49] Q. S. Chi, A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces, *J. Differential Geom.* **28** (1988), 187–202.

[50] Q. S. Chi, Curvature characterization and classification of rank-one symmetric spaces, *Pacific J. Math.* **150** (1991), 31–42.

[51] A. Chudecki y M. Przanowski, From hyperheavenly spaces to Walker and Osserman spaces I, *Classical Quantum Gravity* **25** (2008), 145010.

[52] A. Chudecki y M. Przanowski, From hyperheavenly spaces to Walker and Osserman spaces II, *Classical Quantum Gravity* **25** (2008), 235019.

[53] M. P. Closs, On real almost hermitian structures subordinate to almost tangent structures, *Canad. Math. Bull.* **11** (1968), 115–133.

[54] L. A. Cordero y Ph. Parker, Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups, *Rend. Mat. Appl (7)* **17** (1997), 129–155.

[55] A. Cortés-Ayaso, J. C. Díaz-Ramos y E. García-Río, Four-dimensional manifolds with degenerate self-dual Weyl curvature operator, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **34** (2008), 185–193.

[56] V. Cortés, Ch. Mayer, Th. Mohaupt y F. Saueressig, Special geometry of Euclidean supersymmetry. I. Vector multiplets, *J. High Energy Phys.* (2004), no. 3, 028, 73 pp. (electronic).

[57] V.Cruceanu, P. Fortuny y P.M.Gadea, A survey on paracomplex geometry, *Rocky Mountain J. Math.* **26** (1996), 83–115.

[58] M. Dajczer y K. Nomizu, On sectional curvature of indefinite metrics II *Math. Ann.* **247** (1980), 279–282.

[59] A. Dancer y A. Swann, Toric hypersymplectic quotients, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 1265–1284.

[60] J. E. D'Atri, Geodesic conformal transformations and symmetric spaces, *Kodai Math. Sem. Rep.* **26** (1974/75), 201–203.

[61] J. E. D'Atri y H. K. Nickerson, Divergence-preserving geodesic symmetries, *J. Differential Geom.* **3** (1969), 467–476.

[62] J. Davidov y O. Muskarov, Self-dual Walker metrics with two-step nilpotent Ricci operator, *J. Geom. Phys.* **57** (2006), 157–165.

[63] A. Derdzinski, On homogeneous conformally symmetric pseudo-Riemannian manifolds, *Colloq. Math.* **40** (1978/79), 167–185.

[64] A. Derdzinski, Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four, *Compositio Math.* **49** (1983), 405–433.

[65] A. Derdzinski, Einstein metrics in dimension four, *Handbook of Differential Geometry, Volume 1*, Elsevier, Amsterdam 2000, pp. 419–707.

[66] A. Derdzinski, Curvature-homogeneous indefinite Einstein metrics in dimension four: the diagonalizable case, Recent advances in Riemannian and Lorentzian geometries (Baltimore, MD, 2003), 21–38, *Contemp. Math.*, **337**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[67] A. Derdzinski, Connections with skew-symmetric Ricci tensor on surfaces, *Results Math.* **52** (2008), 223–245.

[68] A. Derdzinski, Non-Walker Self-Dual Neutral Einstein Four-Manifolds of Petrov Type III, *J. Geom. Anal.* **19** (2009), 301–357.

[69] A. Derdzinski, Noncompactness and maximum mobility of type III Ricci-flat self-dual neutral Walker four-manifolds, *Q. J. Math.*, **62** (2011), 363–395.

[70] A. Derdzinski y W. Roter, Some properties of conformally symmetric manifolds which are not Ricci-recurrent, *Tensor (N.S.)* **34** (1980), 11–20.

[71] A. Derdzinski y W. Roter, Walker's theorem without coordinates, *J. Math. Phys.* **47** (2006), no. 6, 062504, 8 pp.

[72] A. Derdzinski y W. Roter, Projectively flat surfaces, null parallel distributions, and conformally symmetric manifolds, *Tohoku Math. J.* **59** (2007), 565–602.

[73] J. C. Díaz-Ramos y E. García-Río, A note on the structure of algebraic curvature tensors, *Linear Algebra Appl.* **382** (2004), 271–277.

[74] J. C. Díaz-Ramos, E. García-Río y R. Vázquez-Lorenzo, Four-dimensional Osserman metrics with nondiagonalizable Jacobi operators, *J. Geom. Anal.* **16** (2006), 39–52.

[75] J. C. Díaz-Ramos, E. García-Río y R. Vázquez-Lorenzo, New examples of Osserman metrics with nondiagonalizable Jacobi operators, *Differential Geom. Appl.* **24** (2006), 433–442.

[76] A. Di Scala y L. Vezzoni, Gray identities, canonical connection, and integrability, *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)* **53** (2010), 657–674.

[77] A. Di Scala, J. Lauret y L. Vezzoni, Quasi-Kaehler Chern-Flat manifolds and complex 2-step nilpotent Lie algebras, a aparecer en *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*

[78] V. Dryuma, The Riemann extensions in theory of differential equations and their applications, *Mat. Fiz. Anal. Geom.* **10** (2003), 307–325.

[79] M. Dunajski y M. Przanowski, Null-Kähler structures, symmetries and integrability, *Topics in mathematical physics, general relativity and cosmology in honor of Jerzy Plebański*, 147–155, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[80] B. Fiedler y P. Gilkey, Nilpotent Szabó, Osserman and Ivanov-Petrova pseudo-Riemannian manifolds, *Recent advances in Riemannian and Lorentzian geometries (Baltimore, MD, 2003)*, 53–63, Contemp. Math., **337**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[81] A. Fino, Almost Kähler 4-dimensional Lie groups with J-invariant Ricci tensor, *Differential Geom. Appl.* **23** (2005), 26–37.

[82] J. L. Flores y M. Sánchez, The causal boundary of wave-type spacetimes, *J. High Energy Phys.* (2008), no. 3, 036, 43 pp.

[83] E. García-Río, A. Haji-Badali y R. Vázquez-Lorenzo, Lorentzian 3-manifolds with special curvature operators, *Classical Quantum Gravity* **25** (2008), 015003 (13pp).

[84] E. García-Río, D. N. Kupeli y M. E. Vázquez-Abal, On a problem of Osserman in Lorentzian geometry, *Differential Geom. Appl.* **7** (1997), 85–100.

[85] E. García-Río, D. N. Kupeli, M. E. Vázquez-Abal y R. Vázquez-Lorenzo, Affine Osserman connections and their Riemann extensions, *Differential Geom. Appl.* **11** (1999), 145–153.

[86] E. García-Río, D. N. Kupeli y R. Vázquez-Lorenzo, *Osserman manifolds in semi-Riemannian geometry*, Lect. Notes Math. **1777**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.

[87] E. García-Río, P. Gilkey, M. E. Vázquez-Abal y R. Vázquez-Lorenzo, Four-dimensional Osserman metrics of neutral signature, *Pacific J. Math.* **244** (2010), 21–36.

[88] E. García-Río y L. Vanhecke, Divergence-preserving geodesic transformations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **128** (1998), 1309–1323.

[89] E. García-Río, L. Vanhecke y M. E. Vázquez-Abal, Notes on harmonic tensor fields, *New developments in differential geometry, Budapest 1996*, 123–142, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[90] E. García-Río y M. E. Vázquez-Abal, Geodesic reflections in semi-Riemannian geometry, *Czechoslovak Math. J.* **43 (118)** (1993), 583–597.

[91] E. García-Río, M. E. Vázquez-Abal y R. Vázquez-Lorenzo, Nonsymmetric Osserman pseudo-Riemannian manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 2771–2778.

[92] E. García-Río y R. Vázquez-Lorenzo, Four-dimensional Osserman symmetric spaces, *Geom. Dedicata* **88** (2001), 147–151.

[93] P. Gilkey, *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemannian Curvature Tensor*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.

[94] P. Gilkey, Algebraic curvature tensors which are p-Osserman, *Differential Geom. Appl.* **14** (2001), 297–311.

[95] P. Gilkey, *The geometry of curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds*, ICP Advanced Texts in Mathematics **2**, Imperial College Press, London, 2007.

[96] P. Gilkey y R. Ivanova, The Jordan normal form of Osserman algebraic curvature tensors, *Results Math.* **40** (2001), 192–204.

[97] P. Gilkey y R. Ivanova, Spacelike Jordan-Osserman algebraic curvature tensors in the higher signature setting, *Differential Geometry, Valencia, 2001*, 179–186, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

[98] P. Gilkey, R. Ivanova e I. Stavrov, Jordan Szabó algebraic covariant derivative curvature tensors, *Recent advances in Riemannian and Lorentzian geometries (Baltimore, MD, 2003)*, 65–75, Contemp. Math., **337**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[99] P. Gilkey, R. Ivanova y T. Zhang, Szabó Osserman IP pseudo-Riemannian manifolds, *Publ. Math. Debrecen* **62** (2003), 387–401.

[100] P. Gilkey, J. V. Leahy y H. Sadofsky, Riemannian manifolds whose skew-symmetric curvature operator has constant eigenvalues, *Indiana Univ. Math. J.* **48** (1999), 615–634.

[101] P. Gilkey y S. Nikčević, Complete k-curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds, *Ann. Global Anal. Geom* **27** (2005), 87–100.

[102] P. Gilkey, S. Nikčević y V. Videv, Manifolds which are Ivanov-Petrova or k-Stanilov, *J. Geom.* **80** (2004), 82–94.

[103] P. Gilkey e I. Stavrov, Curvature tensors whose Jacobi or Szabó operator is nilpotent on null vectors, *Bull. London Math. Soc.* **34** (2002), 650–658.

[104] P. Gilkey, A. Swan y L. Vanhecke, Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman regarding the Jacobi Operator, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **46** (1995), 299–320.

[105] P. Gilkey y T. Zhang, Algebraic curvature tensors for indefinite metrics whose skew-symmetric curvature operator has constant Jordan normal form, *Houston J. Math.* **28** (2002), 311–328.

[106] A. Gray, Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3, *J. Differential Geometry* **7** (1972), 343–369.

[107] A. Gray, Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds, *Tohoku Math. J.* **28** (1976), 601–612.

[108] A. Gray, Einstein-like manifolds which are not Einstein, *Geom. Dedicata* **7** (1978), 259–280.

[109] N.Hitchin, Hypersymplectic quotients, *Acta Acad. Sci. Tauriensis* **124** (1990), 169–180.

[110] K. Honda y K. Tsukada, Conformally flat semi-Riemannian manifolds with nilpotent Ricci operators and affine differential geometry, *Ann. Global Anal. Geom.* **25** (2004), 253–275.

[111] S. Ivanov e I. Petrova, Curvature operator with parallel Jordanian basis on circles, *Riv. Mat. Univ. Parma (5)* **5** (1996), 23–31.

[112] S. Ivanov e I. Petrova, Riemannian manifolds in which certain curvature operator has constant eigenvalues along each circle, *Ann. Global Anal. Geom.* **15** (1997), 157–171.

[113] S. Ivanov e I. Petrova, Riemannian manifold in which the skew-symmetric curvature operator has pointwise constant eigenvalues, *Geom. Dedicata* **70** (1998), 269–282.

[114] S. Ivanov y S. Zamkovoy, Parahermitian and paraquaternionic manifolds, *Differential Geom. Appl.* **23** (2005), 205–234.

[115] H. Kamada, *Self-dual Kähler metrics of neutral signature on complex surfaces.* Dissertation, Tohoku University, Sendai, 2002. *Tohoku Mathematical Publications*, **24**. Tohoku University, Mathematical Institute, Sendai, 2002. ii+94 pp.

[116] J. Kerimo, AdS pp-waves, *J. High Energy Phys.* (2005), 025, 18pp.

[117] S. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I*, Interscience Publ., New York, 1963.

[118] O. Kowalski, Riemannian manifolds with general symmetries, *Math. Z.* **136** (1974), 137–150.

[119] O. Kowalski, Classification of generalized symmetric Riemannian spaces of dimension $n \leq 5$, Rozpravy Československé Akad.Věd Řada Mat.Přírod. **8** (1975), 61 pp.

[120] O. Kowalski, *Generalized symmetric spaces*, Lectures Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, **805**, 1980.

[121] O. Kowalski, B. Opozda y Z. Vlášek, A Classification of Locally Homogeneous Affine Connections with Skew-Symmetric Ricci Tensor on 2-Dimensional Manifolds, *Monatsh. Math.* **130** (2000), 109–125.

[122] O. Kowalski, B. Opozda y Z. Vlášek, A classification of locally homogeneous connections on 2-dimensional manifolds via group-theoretical approach, *Cent. Eur. J. Math.* **2(1)** (2004), 87–102.

[123] O. Kowalski y M. Sekizawa, Natural lifts in Riemannian geometry, *Variations, geometry and physics*, 189–207, Nova Sci. Publ., New York, 2009.

[124] W. Kühnel, *Differential Geometry, Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library **16**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[125] W. Kühnel y H.-B. Rademacher, Einstein spaces with a conformal group, *Results Math.* **56** (2009), 421–444.

[126] J. Lafontaine, Conformal geometry from the Riemannian viewpoint, *Conformal geometry (Bonn, 1985/1986)* Aspects Math. **E12** Vieweg Braunschweig, 65–92.

[127] L. Hernández-Lamoneda, Curvature vs. almost Hermitian structures, *Geom. Dedicata* **79** (2000), 205–218.

[128] P. Law y Y. Matsushita, A spinor approach to Walker geometry, *Comm. Math. Phys.* **282** (2008), 577–623.

[129] J. M. Lee, *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*, Graduate Texts in Mathematics, **176**, Springer-Verlag, New York, 1997.

[130] A. Lichnerowicz y A. Medina, On Lie groups with left-invariant symplectic or Kählerian structures, *Lett. Math. Phys.* **16** (1988), 225–235.

[131] M.A. Magid, Indefinite Einstein hypersurfaces with nilpotent shape operators, *Hokkaido Math. J.* **13** (1984), 241–250.

[132] R. A. Marinosci, Generalized pointwise symmetric Riemannian spaces: a classification, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **104** (1988), 505–520.

[133] G. K. Martin y G. Thompson, Nonuniqueness of the metric in Lorentzian manifolds, *Pacific J. Math.* **158** (1993), 177–187.

[134] Y. Matsushita, Walker 4-manifolds with proper almost complex structure, *J. Geom. Phys.* **55** (2005), 385–398.

[135] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups *Advances in Math.* **21** (1976), 293–329.

[136] A. Montesinos-Amilibia, Degenerate homogeneous structures of type $\mathcal{S}_1$ on pseudo-Riemannian manifolds, *Rocky Mountain J. Math.* **31** (2001), 561–579.

[137] L. Nicolodi y L. Vanhecke, Rotations and Hermitian symmetric spaces, *Monatsh. Math.* **109** (1990), 279–291.

[138] Y. Nikolayevsky, Osserman manifolds of dimension 8, *Manuscripta Math.* **115** (2004), 31–53.

[139] Y. Nikolayevsky, Osserman conjecture in dimension $\neq 8, 16$, *Math. Ann.* **331** (2005), 505–522.

[140] K. Nomizu y T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[141] Z. Olszak, On conformally recurrent manifolds II. Riemann extensions, *Tensor (N.S.)* **49** (1990), 24–31.

[142] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, New York: Academic Press, 1983.

[143] H. Ooguri y C. Vafa, Geometry of $N = 2$ strings, *Nuclear Phys.* **B 361** (1991), 469–518.

[144] B. Opozda, A classification of locally homogeneous connections on 2-dimensional manifolds, *Differential Geom. Appl.* **21** (2004), 173–198.

[145] R. Osserman, Curvature in the eighties, *Amer. Math. Monthly*, **97** (1990), 731–756.

[146] E. M. Patterson y A. G. Walker, Riemann extensions, *Quart. J. Math., Oxford Ser. (2)* **3** (1952), 19–28.

[147] K. Pearson y T. Zhang, The nonexistence of rank 4 IP tensors in signature $(1, 3)$, *Int. J. Math. Math. Sci.* **31** (5) (2002), 259–269.

[148] H. Pedersen y P. Tod, The Ledger curvature conditions and D'Atri geometry, *Differential Geom. Appl.* **11** (1999), 155–162.

[149] F. Podesta y A. Spiro, *Introduzione ai gruppi di trasformazzione*, Preprint Series, Mathematics Department "V. Volterra", 1996, University of Ancona, Via delle Brecce Bianche, Ancona.

[150] S. Rahmani, Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires de dimension trois, *J. Geom. Phys.* **9** (1992), 295–302.

[151] Z. Rakić, An example of rank two symmetric Osserman space, *Bull. Austral. Math. Soc.* **56** (1997), 517–521.

[152] V. Sahni y Y. Shtanov, New vistas in braneworld cosmology, *Internat. J. Modern Phys. D*, **11** (2002), 1515–1521.

[153] G. Stanilov y V. Videv, On a generalization of the Jacobi operator in the Riemannian geometry, *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* **86** (1992), 27–34.

[154] Z. I. Szabó, A short topological proof for the symmetry of 2 point homogeneous spaces, *Invent. Math.* **106** (1991), 61–64.

[155] F. Tricerri y L. Vanhecke, Curvature tensors on almost Hermitian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **267** (1981), 365–398.

[156] L. Vanhecke y T. J. Willmore, Interaction of tubes and spheres, *Math. Ann.* **263** (1983), 31–42.

[157] A. G. Walker, Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, *Quart. J. Math., Oxford Ser. (2)* **1** (1950), 69–79.

[158] T. J. Willmore, Riemann extensions and affine differential geometry, *Results Math.* **13** (1988), 403–408.

[159] Y. C. Wong, Two Dimensional Linear Connexions with Zero Torsion and Recurrent Curvature, *Monatsh. Math.* **68** (1964), 175–184.

[160] H. Wu, Holonomy groups of indefinite metrics, *Pacific J. Math.* **20** (1967), 351–392.

[161] K. Yano y S. Ishihara, *Tangent and cotangent bundles*, Marcel Dekker, New York, 1973.

[162] T. Zhang, *Manifolds with indefinite metrics whose skew-symmetric curvature operator has constant eigenvalues*, Ph. D. Thesis, University of Oregon, 2000.

Publicacións do departamento de Xeometría e Topoloxía

95 A. RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ *Cohomoloxía das foliacións riemannianas con follas densas. Cohomoloxía de Alexander-Spanier de foliacións compactas Hausdorff.* Tesiña de Licenciatura (2001) ISBN: 84-89390-12-6

96 M. FERNÁNDEZ LÓPEZ *Resultados de descomposición asociados á ecuación de Möbius.* Tese de Doutoramento (2002) ISBN: 84-89390-13-4

97 J. C. DÍAZ RAMOS *Curvaturas totais de esferas xeodésicas.* Tesiña de Licenciatura (2002) ISBN: 84-89390-14-2

98 M. F. GONZÁLEZ LÁZARO *Resolución de singularidades en acciones polares.* DEA (2003) ISBN: 84-89390-16-9

99 A. SOTELO ARMESTO *El grupo de difeomorfismos del espacio de hojas de una foliación de Lie desde el punto de vistas difeológico.* Tesiña de Licenciatura (2003) ISBN: 84-89390-15-0

100 M. BROZOS VÁZQUEZ *Variedades semi-riemannianas con tensor de curvatura especial.* Tesiña de Licenciatura (2003) ISBN: 84-89390-18-5

101 J. C. DÍAZ RAMOS *Caracterización de variedades riemannianas mediante curvaturas escalares totais de esferas xeodésicas.* DEA (2003) ISBN: 84-89390-17-7

102 M. T. PÉREZ LÓPEZ *Campos de vectores harmónicos-Killing.* Tese de Doutoramento (2003) ISBN: 84-89390-19-3

103 I. GARCÍA RAMÍREZ *Aplicación de las formulas de Bochner al estudio de variedades 4-dimensionales doblemente casi-hermíticas.* DEA (2003) ISBN: 84-89390-20-7

104 A. MARTÍN MÉNDEZ *Álgebras de Lie graduadas y estructuras de segundo orden asociadas.* Tese de Doutoramento (2004) ISBN: 84-89390-21-5

105 M. BROZOS VÁZQUEZ *Propiedades conformes de productos deformados.* DEA (2004) ISBN: 84-89390-22-3

106 J. C. DÍAZ RAMOS *Geometric consequences of intrisic and extrinsic curvature conditions.* Tese de Doutoramento (2006) ISBN: 84-89390-23-1

107 P. GONZÁLEZ SEQUEIROS *A dinámica dos mosaicos de Robinson.* Tesiña de Licenciatura (2006) ISBN: 84-89390-24-X

108 E. CALVIÑO LOUZAO *Variedades de Osserman e Ivanov-Petrova en dimensión cuatro.* DEA (2007) ISBN 978-84-89390-25-6

109 M. BROZOS VÁZQUEZ *Geometric consequences of algebraic conditions on curvature operators.* Tese de Doutoramento (2007) ISBN 978-84-89390-26-3

110 M. PÉREZ FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA *Número de ramificación de un pseudogrupo.* DEA (2007) ISBN 978-84-89390-27-0

111 P. GONZÁLEZ SEQUEIROS *A dinámica dos mosaicos euclidianos.* DEA (2007) ISBN 84-89390-28-7

112 Á. LOZANO ROJO *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos.* Tese de Doutoramento (2008) ISBN 978-84-89390-29-4

113 M. J. PEREIRA SÁEZ *Aplicación traza, transformación de Cayley y categoría LS de los grupos de Lie clásicos.* DEA (2008) ISBN 978-84-89390-30-0

114 S. VILARIÑO FERNÁNDEZ *Nuevas aportaciones al estudio de los formalismos k-simpléctico y k-cosimpléctico.* Tese de Doutoramento (2009) ISBN 978-84-89390-31-7

115 S. GAVINO FERNÁNDEZ *Estudio do tensor de curvatura ó longo de xeodésicas e círculos en variedades de Walker.* DEA (2009) ISBN 978-84-89390-32-4

116 C. MENIÑO COTÓN *Categoría LS en espacios medibles foliados con medida transversa invariante.* DEA (2010) ISBN 978-84-89390-33-1

117 A. A. CORTÉS AYASO *Métricas de Walker: estructura simpléctica das variedades de Osserman.* DEA (2010) ISBN 978-84-89390-34-7

118 MIGUEL DOMÍNGUEZ VÁZQUEZ *Hipersuperficies con curvaturas principais constantes nos espazos proxectivo e hiperbólico complexos.* DEA (2010) ISBN 978-84-89390-35-5

119 JAVIER SEOANE BASCOY *Espinores de Killing y operador de Dirac en variedades de Riemann. La variedad de Berger B^7.* DEA (2011) ISBN 978-84-89390-36-2