

PABLO GONZÁLEZ SEQUEIROS

# LAMINACIONES AFABLES

**123**  
**2012**

Publicaciones  
del  
Departamento  
de Geometría y Topología

---

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



PABLO GONZÁLEZ SEQUEIROS

# LAMINACIÓNS AFABLES

Memoria realizada no Departamento de Xeometría e Topoloxía da Facultade de Matemáticas, baixo a dirección do profesor Fernando Alcalde Cuesta da USC e da profesora Marta Macho Stadler da UPV/EHU, para obter ao Grao de Doutor en Matemáticas pola Universidade de Santiago de Compostela.

Levouse a cabo a súa defensa o 28 de febreiro de 2012 na Facultade de Matemáticas da USC, obténdose a cualificación de Apto Cum Laude.

**IMPRIME:** Imprenta Universitaria  
Pavillón de Servicios  
Campus Universitario

**ISBN:** 978-84-89390-40-9

**Dep. Leg.:** C 1112-2012

*A Ana*



# Agradecementos

Lémbrome agora no instituto, logo de terme decidido a estudar Matemáticas, discutindo co meu por entón profesor Fran Caamaño as posicións relativas de rectas e planos no espazo. Dábame neses momentos por idealizar as futuras clases da Facultade, a bo seguro condicionado pola imaxe desas películas nas que un reputado profesor de parte co seu alumnado ao máis puro estilo socrático. E debo dicir que logo de que os meus comezos en Compostela deturparan esas ensoñacións, como cabería esperar, creo que comecei a revitalizalas, coa inxección que iso me supuxo, nas clases de Fernando Alcalde. E despois coas primeiras discusións sobre os mosaicos de Robinson. Non foi difícil apaixonarse polos temas que lle interesaban e pola súa forma de facer matemáticas. Probablemente o meu devir tería sido outro de non terme atopado con el e con Marta Macho, cuxo esforzo e altruísmo vital facían que voltara de cada unha das miñas estadías en Bilbao coa maleta a rebordar de moito máis ca matemáticas. Quixera agradecerlles profundamente terme dado a oportunidade de desenvolver o traballo que conduciu a esta memoria. A súa guía e axuda, o seu modelo e a súa estima *escribiron* a maior parte dela.

Todo isto é extensivo a Álvaro Lozano, que non puido ter exercido mellor de *irmán maior*, e cuxa colaboración nesta memoria é máis que patente. Coido que a súa amizade é un dos mellores resultados que obtiven na mesma.

Quixera mostrar tamén o meu agradecemento aos demais membros do tribunal, por ter aceptado a encomenda de ler e valorar este traballo.

Grazas aos meus colegas de promoción e aos *bolseiros*, vellos e novos, cos que tiveron a sorte de coincidir. Grazas polas inquedañas, risas e algunha que outra frustración que temos compartido.

Grazas aos membros do *Grupo de Foliaciones* e demais colegas da UPV/EHU, por facer das miñas estadías en Bilbao todo un pracer.

Grazas a aqueles compañeiros da Facultade de Formación de Profesorado de Lugo e do Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais que me tenderon a man nesta última etapa na que as miñas obrigas docentes implicaron unha merma

considerable no avance deste traballo. En especial, grazas ás profesoras M<sup>a</sup> de los Ángeles García Losada e M<sup>a</sup> Jesús Salinas Portugal, por facer coa súa axuda que a miña aterraxe na Didáctica da Matemática non fose forzosa.

Por último, un agradecemento moi especial á miña familia e aos meus amigos, aos que máis tempo lles roubou este traballo, pero que sempre me demostran o seu apoio incondicional. E grazas Ana, por todo.



# Índice

<b>Introdución</b>	<b>1</b>
<b>1 Laminacións e mosaicos</b>	<b>11</b>
1.1 Laminacións . . . . .	11
1.1.1 Bos atlas foliados e laminacións de clase $C^1$ . . . . .	13
1.1.2 Atlas con placas xeodesicamente convexas . . . . .	15
1.1.3 Atlas adaptados a unha métrica foliada . . . . .	17
1.1.4 Dinámica transversa e holonomía . . . . .	19
1.1.5 Relacións medibles discretas . . . . .	21
1.1.6 Medidas transversas invariantes e case-invariantes . . . . .	23
1.1.7 Relacións de equivalencia <i>étales</i> . . . . .	24
1.2 Laminacións definidas por mosaicos . . . . .	26
1.2.1 Mosaicos euclidianos . . . . .	26
1.2.2 Conxuntos de Delone e mosaicos de Voronoi . . . . .	32
1.2.3 Topoloxía de Gromov-Hausdorff . . . . .	34
1.2.4 A laminación do espazo de Gromov-Hausdorff . . . . .	36
1.2.5 Dinámica transversa . . . . .	38
1.2.6 Mosaicos aperiódicos e follas sen holonomía . . . . .	40
1.2.7 Envoltura dun mosaico repetitivo e aperiódico . . . . .	41
1.3 Exemplos . . . . .	45
1.3.1 Os mosaicos de Robinson . . . . .	45
1.3.2 Os mosaicos de Penrose por dardos e papaventos . . . . .	53
1.3.3 Os mosaicos de Penrose por poliomínos . . . . .	56
1.3.4 Un exemplo non unicamente ergódico . . . . .	62
<b>2 Afabilidade</b>	<b>65</b>
2.1 Laminacións transversalmente Cantor . . . . .	66
2.1.1 Definición e dinámica transversa . . . . .	66
2.1.2 Descomposición por caixas . . . . .	68
2.1.3 Inflación . . . . .	74

2.2	Relacións afables . . . . .	76
2.2.1	Relacións hiperfinitas . . . . .	76
2.2.2	Relacións <i>étale</i> compactas . . . . .	79
2.2.3	Relacións afables e diagramas de Bratteli . . . . .	80
2.2.4	Sistemas de Bratteli-Vershik . . . . .	83
2.3	Laminacións afables . . . . .	83
2.3.1	Laminacións transversalmente afables . . . . .	84
2.3.2	Relacións e laminacións AC . . . . .	85
2.4	Afabilidade da envoltura dun mosaico aperiódico e repetitivo do plano	87
2.4.1	Construción dunha subrelación AF mediante inflación . . . . .	88
2.4.2	Bordo da subrelación AF . . . . .	90
2.4.3	Absorción . . . . .	92
2.5	Inflación de Robinson . . . . .	93
2.5.1	Redución de Sadun-Williams . . . . .	93
2.5.2	Descomposición parcial . . . . .	94
2.5.3	Descomposicións completa e inflada . . . . .	96
2.5.4	Propiedades do bordo na inflación de Robinson . . . . .	99
2.5.5	Filtración do bordo . . . . .	106
2.5.6	Absorción do bordo . . . . .	111

**A Límites inversos de variedades ramificadas 113**

**B Laminacións transversalmente Cantor con crecemento polinomial 119**

# Introdución

Unha *foliación* é unha descomposición dunha variedade en subvariedades conexas que se chaman *follas* por estaren dispostas localmente como un produto. Non obstante, a súa topoloxía e comportamento global pode ser moito máis complexo. Dende o punto de vista da *dinámica topolóxica*, o estudo das foliacións pode reducirse ao caso dos subconxuntos *minimais*, é dicir, aqueles que son unión de follas densas. Ao seren saturados, estes conxuntos posúen unha estrutura foliada natural, mais en xeral carecen da regularidade transversa, pois o espazo ambiente xa non é en xeral unha variedade, senón un espazo métrico localmente compacto. Surxe así de maneira natural o concepto de *laminación*. A menor regularidade do espazo ambiente permite unha dinámica moito máis rica, impensable no caso de variedades foliadas. Unha maneira usual de construír exemplos é a partir de accións de grupos de Lie sobre espazos métricos. As laminacións definidas por mosaicos atópanse entre os exemplos obtidos desta maneira e o estudo das súas propiedades resulta relevante en física do estado sólido, na teoría de *case-cristais*.

**Mosaicos aperiódicos.** Un *mosaico* do plano é unha descomposición de  $\mathbb{R}^2$  en subconxuntos chamados *teselas*, que son xeralmente polígonos dispostos lado con lado, obtidos por translación (ou mediante un subgrupo de isometrías que conteña ás translacións) a partir dun conxunto de teselas modelo ou *prototeselas*. Dende o punto de vista das laminacións e os sistemas dinámicos, o interese polos mosaicos céntrase nos mosaicos *aperiódicos*, aqueles que non son conservados por ningunha translación (de igual maneira se denomina aos conxuntos de prototeselas que forzan a aperiodicidade, é dicir, os que só permiten construír mosaicos aperiódicos). En xeral, o interese por este tipo de mosaicos nace nos anos 60 dos traballos do lóxico H. Wang sobre as máquinas de Turing [77]. Wang preguntábase pola existencia dun algoritmo para decidir se un conxunto de cadrados coas arestas coloreadas a modo de regras de adxacencia, denominados *dominós*, pode teselar o plano de xeito coherente ou non. Probou que tal algoritmo existe se supoñemos que calquera conxunto de prototeselas dun mosaico aperiódico tamén o é dalgún periódico (tal e

como sucedía coas teselas dos mosaicos aperiódicos que J. Kepler ilustrara en [47]). É dicir, probou que o algoritmo existiría se non existisen conxuntos que teselan o plano só de forma aperiódica e conxecturou entón a inexistencia de prototeselas aperiódicas.

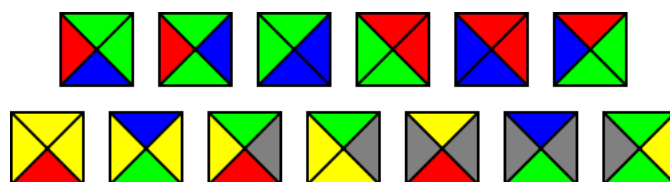


Figura 1: Conxunto aperiódico con 13 teselas de Wang.

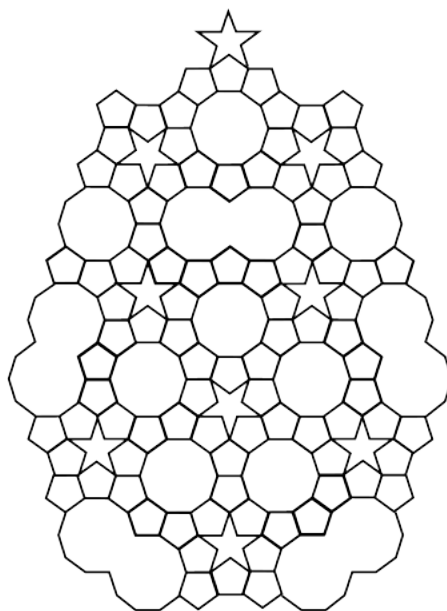
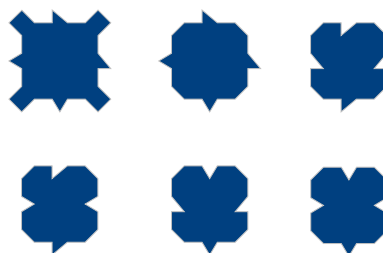


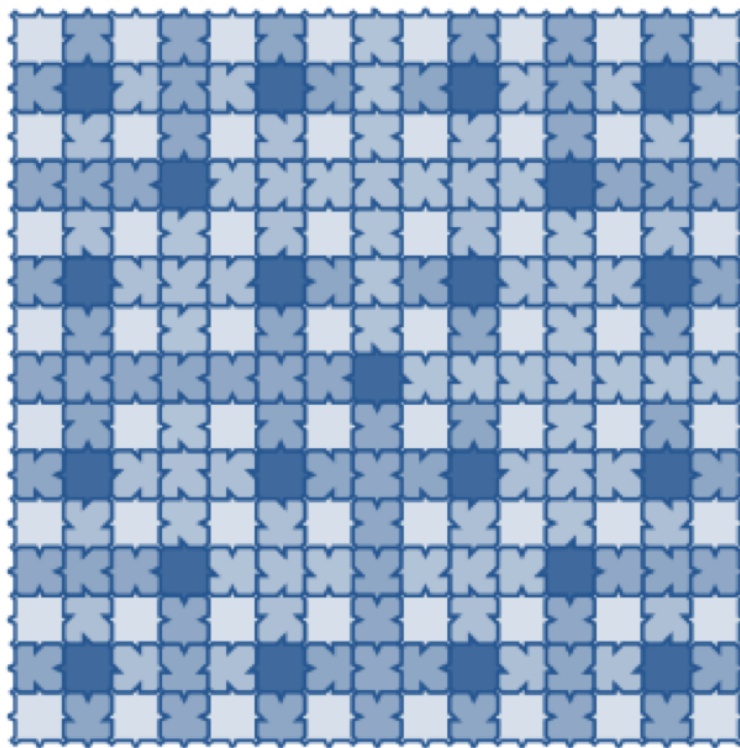
Figura 2: Mosaico aperiódico de Kepler.

Non obstante, en 1966, o seu alumno R. Berger demostraba na súa tese que o problema de Wang pode reducirse ao problema da detención para unha *máquina de Turing*, ao mostrar que toda máquina de Turing pode expresarse en función dun conxunto de teselas de Wang. Probaba daquela que non existe un algoritmo de decisión para ese problema, o que suxería que a conxectura de Wang era falsa. En efecto, o propio Berger atopou un conxunto con 20.426 prototeselas que teselaban o plano só de xeito aperiódico [11]. Máis tarde chegou a reducir o número a 104

e a raíz do seu traballo irían aparecendo novos conxuntos aperiódicos compostos dun número considerablemente menor de teselas. Moitos deles poden verse en [35]. R. M. Robinson fixou o número en 6 en [70] e, de maneira independente, R. Ammann atopou outro conxunto formado por seis teselas aperiódicas (descrito en [35]). En 1974, R. Penrose presenta por primeira vez o seu exemplo con dúas teselas aperiódicas, o dardo e o papaventos [60].



(a)



(b)

Figura 3: (a) Teselas de Robinson; (b) Mosaico de Robinson.

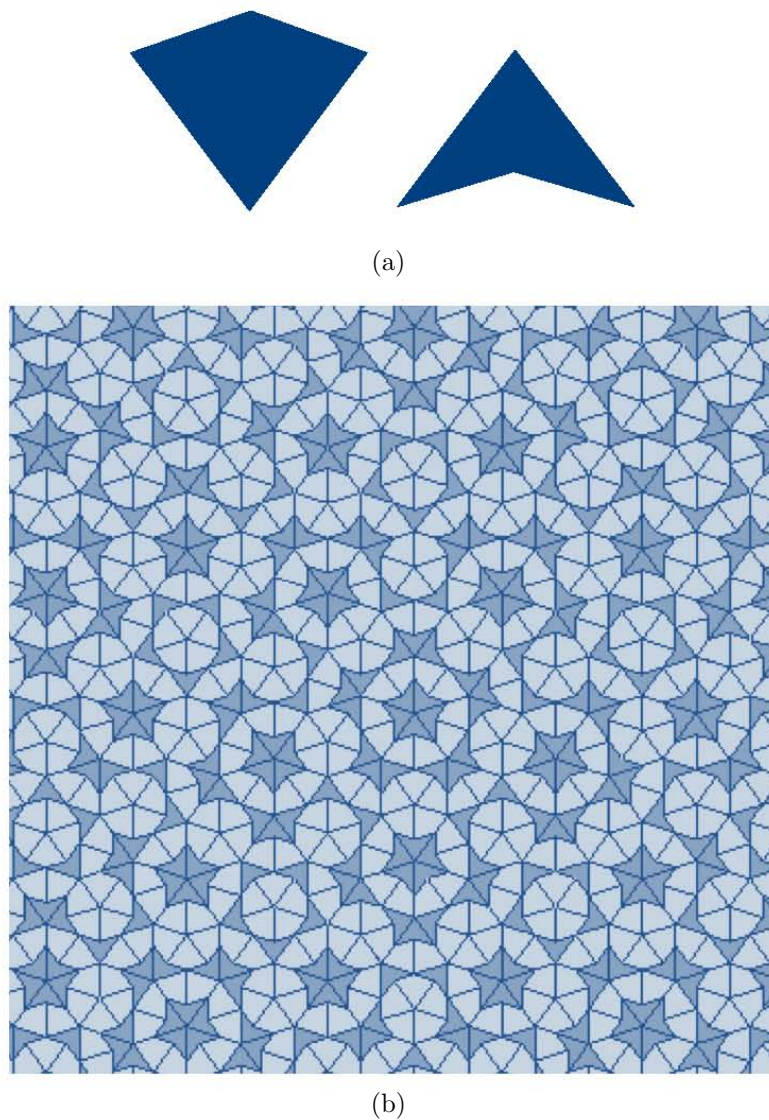


Figura 4: (a) O dardo e o papaventos; (b) Mosaico de Penrose.

A pesares de teren surxido no contexto das matemáticas recreativas, os mosaicos de Penrose cobrarían pronto celebridade por outro motivo. En 1982, o equipo do profesor D. Shechtman do Departamento de Enxeñaría de Materiais do Israel Institute of Technology-Technion descubriu unha aliaxe de aluminio e manganeso coas características físicas propias dun cristal, pero cun patrón de difracción icosaédrico que era imposible para un cristal [74], segundo o teorema de clasificación dos grupos cristalográficos demostrado por A. Bravais, E. S. Fedorov e A. M. Schönflies (véxase [49]). Tratábase do primeiro caso de *sólido case cristalino*, un tipo de

aleación metálica na que a disposición dos átomos é regular, coma nun cristal, pero aperiódica. E resultou que o seu patrón de difracción tiña como modelo a discretización dun mosaico de Penrose por dardos e papaventos. Dende entón ten tomado pulo o estudo teórico dos mosaicos aperiódicos como modelos para este novo tipo de sólidos, con boas propiedades físicas como baixa conductividade eléctrica ou excelente resistencia térmica.

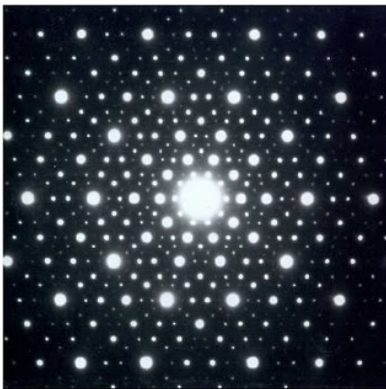


Figura 5: Patrón de difracción dunha aleación MnAl cunha simetría decagonal.

**Laminacións definidas por mosaicos.** O conxunto  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  de todos os mosaicos construídos a partir dun conxunto finito de prototeselas  $\mathcal{P}$  pode dotarse dunha topoloxía natural, chamada *topoloxía de Gromov-Hausdorff*, supoñendo que dous mosaicos son próximos cando coinciden nunha gran bóla centrada na orixe, agás pequenas translacións [9, 26]. Con esta topoloxía  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  é un espazo metrizable compacto, que pode dotarse dunha estrutura de laminación definida pola acción natural de  $\mathbb{R}^2$ . A folla dun mosaico  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$  está composta por todos os seus trasladados e resulta homeomorfa ao cociente de  $\mathbb{R}^2$  polo grupo das translacións que deixan invariante o mosaico  $\mathcal{T}$ . Esta construción pode facerse para calquera conxunto finito  $\mathcal{P}$ , aperiódico ou non. Se  $\mathcal{P}$  permite construír un mosaico periódico, entón a folla correspondente é compacta. Por exemplo, se consideramos o conxunto  $\mathcal{P}_0$  composto unicamente polo cadrado unidade, entón  $\mathbb{T}(\mathcal{P}_0)$  redúcese ao cociente  $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  como única folla. Pero se  $\mathcal{P}$  é un conxunto aperiódico, entón todas as follas son homeomorfas a  $\mathbb{R}^2$ .

A elección dun punto base en cada prototesela determina puntos distinguidos en cada unha das teselas de calquera mosaico, que conforman un *conxunto de Delone*  $D_{\mathcal{T}}$ , é dicir, un conxunto uniformemente discreto e relativamente denso do plano. Os mosaicos  $\mathcal{T}$  coa orixe do plano situada nalgún punto distinguido

dalgunha tesela forman un subconxunto pechado e totalmente disconexo  $T$  que corta a todas as follas e conforman polo tanto unha *transversal completa*. A laminación  $\mathcal{F} = \{L_{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})}$  induce sobre  $T$  unha relación de equivalencia *étale*  $\mathcal{R} = \{(\mathcal{T}, \mathcal{T} - v) \in X \times X \mid v \in D_{\mathcal{T}}\}$  que garda case toda a información dinámica (e de feito toda se os mosaicos considerados son aperiódicos). As clases de equivalencia de  $\mathcal{R}$  están dotadas dunha estrutura natural de grafo que, a efectos do estudo dinámico, permite substituír as laminacións definidas por mosaicos por espazos foliados por grafos.

Para cada mosaico  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$ , denomínase *envoltura de  $\mathcal{T}$*  á clausura  $\mathbb{X} = \overline{L_{\mathcal{T}}}$  da súa folla. Como no caso das variedades foliadas, o estudo dinámico dos mosaicos redúcese a aqueles con envolturas minimais. Trátase dos mosaicos *repetitivos*, nos que podemos atopar unha copia por translación de calquera motivo nunha bóla de radio uniforme centrada en calquera punto. Se  $\mathcal{T}$  é un mosaico repetitivo e aperiódico, a súa envoltura  $\mathbb{X}$  é unha laminación minimal e sen holonomía modelada transversalmente polo conxunto  $X = \mathbb{X} \cap T$  homeomorfo ao conxunto de Cantor. A trivialidade da holonomía garantízanos que a dinámica transversa está totalmente determinada por  $\mathcal{R}$ .

As propiedades dinámicas e ergódicas destas laminacións son fundamentais no estudo dos espazos non conmutativos asociados aos case-cristais, os análogos dos observables clásicos no caso dos cristais. O obxectivo principal desta memoria é caracterizar a súa dinámica transversa nun sentido medible e topolóxico.

**Antecedentes.** En [72], L. Sadun e R.F. Williams probaron que a envoltura dun mosaico repetitivo e aperiódico é un fibrado localmente trivial de fibra Cantor. De feito, J. Bellissard, R. Benedetti e J.-M. Gambaudo demostran en [9] que estas laminacións son límites inversos de variedades ramificadas planas (véxase [78]), un resultado que garda parte da información dinámica. A súa proba baséase nun proceso de *inflación* que permite substituír cada tesela por un motivo que a contén. Mais isto non é suficiente para determinar a dinámica transversa da laminación.

Para isto convén introducir outra perspectiva complementaria, que imos ilustrar con dous exemplos clásicos. Grazas a unha idea de R. M. Robinson [35], sábese que calquera mosaico de Penrose por dardos e papaventos pode codificarse por unha sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de 0 e 1 tal que  $x_n = 1 \Rightarrow x_{n+1} = 0$ . Unha idea similar permitiu ao propio Robinson mostrar que os mosaicos que levan o seu nome poden construírse a partir de sucesións formadas por 00, 01, 11 e 10. Estes exemplos ilustran os resultados citados, mais as ideas de Robinson permiten describir a súa dinámica medible. En efecto, nos dous casos, a modificación dos primeiros termos dunha sucesión de 0 e 1 tradúcese en mover a orixe dunha tesela a outra no mosaico. Isto



permite probar que a dinámica transversa medible da envoltura de calquera mosaico de Penrose e calquera mosaico de Robinson repetitivo está representada polo autómata de Fibonacci e unha máquina de sumar binaria respectivamente. Noutras palabras, a dinámica transversa medible dos dous exemplos está representada por un sistema dinámico clásico sobre o conxunto de Cantor.

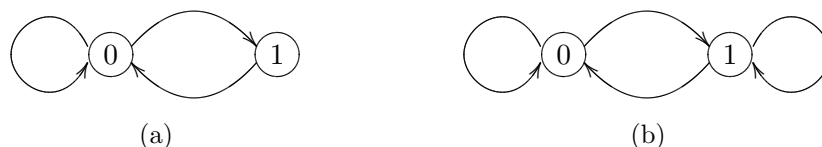


Figura 6: (a) Autómata de Fibonacci; (b) Máquina de sumar binaria.

**Relacións afables.** En [30], T. Giordano, I. Putnam e C. Skau proban que calquera relación de equivalencia definida por un sistema dinámico deste tipo é afable. Unha relación de equivalencia sobre un espazo totalmente disconexo dise *afable* se é unión crecente dunha familia numerable de relacións de equivalencia compactas. A relación cofinal sobre o espazo de camiños infinitos dun determinado tipo de grafos, chamados *diagramas de Bratteli*, é o exemplo prototipo. De feito, segundo un resultado probado por T. Giordano, I. Putnam e C. Skau en [31] e J. Renault en [69], estes son os únicos exemplos, pois toda relación afable é isomorfa á relación cofinal sobre o espazo de camiños dun determinado diagrama de Bratteli. É máis, calquera relación afable está dada esencialmente por un sistema dinámico clásico, que se denomina sistema de Bratteli-Vershik, de maneira que a súa dinámica topolóxica está representada por unha acción minimal de  $\mathbb{Z}$ .

Nestes termos, o obxectivo preciso do noso traballo consiste en probar o seguinte resultado:

**Teorema 1.** *A envoltura de calquera mosaico repetitivo e aperiódico do plano é afable.*

En [33] xa probamos que a dinámica medible da envoltura dun mosaico repetitivo e aperiódico do plano está representada por un sistema dinámico de Bratteli-Vershik. A idea era empregar o proceso de inflación de [9] para definir unha subrelación afable  $\mathcal{R}_\infty$  de  $\mathcal{R}$  orbitalmente equivalente a esta en sentido medible. Continuando esa liña, o presente teorema foi anunciado en [4], aínda que a proba era incompleta. O resultado foi demostrado posteriormente nun contexto equivalente por T. Giordano, H. Matui, I. Putnam e C. Skau en [27], probando que toda acción libre e minimal de  $\mathbb{Z}^2$  sobre un conxunto de Cantor é afable (e estendendo así un resultado anterior de H. Matui para un tipo de mosaicos de substitución [54]). Na súa

demostración usan o *teorema de absorción* de [28], unha importante ferramenta de extensión de relacións afables, e para iso precisan empregar fortes argumentos de convexidade. En [29], os mesmos autores estenden o resultado ás accións de  $\mathbb{Z}^p$ , obtendo así unha extensión do teorema 1 para o caso dos mosaicos de  $\mathbb{R}^p$ .

O noso propósito é presentar unha demostración diferente, baseada no esquema de [4], que segue a usar o teorema de absorción. A vantaxe da nosa proba é que non vai precisar de ningún argumento de convexidade. Para isto, imos introducir un novo proceso de inflación que garanta as condicións que necesitamos e que denominaremos *inflación de Robinson*, por estar inspirado na inflación natural dos mosaicos de Robinson. A proba pode adaptarse ademais ao caso dos mosaicos de  $\mathbb{R}^p$  (aínda que os detalles aparecerán nun traballo posterior).

A pretensión é avanzar na extensión dos teoremas de T. Giordano, H. Matui, I. Putnam e C. Skau probando a seguinte conxectura formulada en [31]:

**Conxectura 1.** *Calquera acción libre e minimal dun grupo promediabile sobre un espazo totalmente disconexo compacto define unha relación afable.*

**Laminacións transversalmente Cantor.** Como no caso dos mosaicos, a noción de afabilidade é facilmente trasladable do contexto discreto das relacións de equivalencia definidas sobre o conxunto de Cantor ao contexto continuo das laminacións transversalmente Cantor. De feito, o enunciado literal do teorema 1 responde a esta definición se obviamos o paso (que en realidade é innecesario) da envoltura dun mosaico á súa discretización. Do mesmo xeito, a conxectura 1 admite unha tradución continua, que agora xa non é equivalente, mais parece razoable formular unha conxectura intermedia:

**Conxectura 2.** *Calquera laminación transversalmente Cantor con crecemento polinomial é afable.*

O esquema da proba do teorema 1 permítenos neste momento avanzar na proba da conxectura 2 describindo a dinámica transversa medible das laminacións transversalmente Cantor con crecemento polinomial:

**Teorema 2.** *Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación transversalmente Cantor, minimal e sen holonomía con crecemento polinomial. A súa dinámica transversa medible está representada por un sistema dinámico de Bratteli-Vershik.*

Como xa dixemos, en [9], próbase que a envoltura de calquera mosaico repetitivo e aperiódico do plano é un límite inverso de superficies ramificadas. O mesmo argumento permite despois estender en [10] a R. Benedetti e J.-M. Gambaudo ese resultado a  $\mathbb{G}$ -solenoides, isto é, a laminacións transversalmente Cantor minimais definidas por unha acción libre dun grupo de Lie  $\mathbb{G}$ . En [6], F. Alcalde, Á. Lozano

e M. Macho adaptan este proceso de inflación para mostrar que toda laminación transversalmente Cantor de clase  $C^1$ , minimal e sen holonomía é un límite inverso de variedades ramificadas compactas. Para isto demostran que calquera laminación transversalmente Cantor de clase  $C^1$  admite unha *descomposición simplicial*, o que fai posible “teselar” as follas a modo de mosaico e trasladar as ideas a este caso. Este resultado permite aplicar as primeiras etapas da proba do teorema de afabilidade ao caso das laminacións transversalmente Cantor minimais e axuda a describir a súa dinámica medible.

A memoria organízase da seguinte maneira:

No capítulo 1 sentamos as bases para a nosa investigación. En primeiro lugar, lembramos a definición de laminación e os tópicos máis relevantes que imos precisar: a existencia de bos atlas foliados con placas xeodésicamente convexas e os aspectos relacionados co estudo da dinámica transversa dunha laminación. A continuación particularizamos este estudo no caso das laminacións definidas por mosaicos euclidianos. Por último, analizamos algúns exemplos relevantes que motivan e ilustran a un tempo o noso resultado principal. Trátase concretamente dos citados exemplos de Penrose e Robinson, e dun exemplo menos coñecido de Penrose descrito en [62] (véxase a figura 7) e que presenta unha dinámica algo máis complexa.

O capítulo 2 céntrase na solución do problema plantexado. Comezamos lembrando o proceso de inflación das laminacións transversalmente Cantor descrito en [6], que é unha xeneralización do proceso empregado en [9] para as laminacións definidas por mosaicos. En segundo lugar, revisamos a noción de relación afable e as súas propiedades, para fixar a continuación a definición de *laminación afable*. Finalmente, ocupámonos da proba do resultado principal. Como vimos de dicir, consiste en introducir un novo proceso de inflación que garanta as condicións que precisamos para completar o esquema de [4].

No apéndice A ampliamos os contidos do capítulo 2 lembrando a construción dunha estrutura de límite inverso para calquera laminación transversalmente Cantor minimal e sen holonomía.

Por último, co ánimo de facer a lectura máis cómoda, a proba do teorema 2 inclúese no apéndice B.

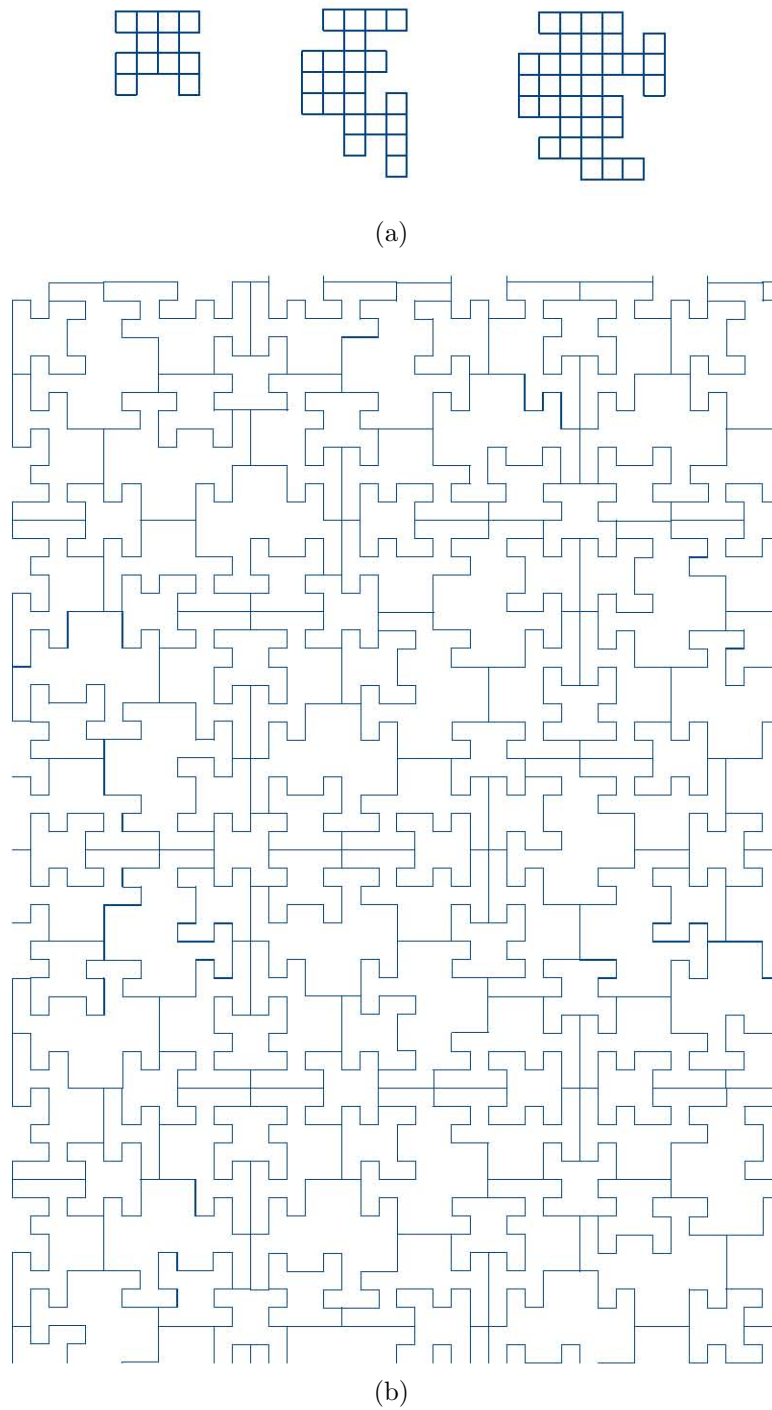


Figura 7: (a) Os poliomínos de Penrose; (b) Mosaico de Penrose por poliomínos.

# 1. Laminacións e mosaicos

Neste primeiro capítulo pretendemos introducir o contexto no que se aborda o noso traballo. Comezamos lembrando a definición de laminación e os tópicos máis relevantes que se empregarán, nomeadamente a existencia de bos atlas foliados con placas xeodésicamente convexas e os aspectos relacionados co estudo da dinámica transversa dunha laminación.

## 1.1 Laminacións

Unha *foliación* é unha descomposición dunha variedade en subvariedades conexas da mesma dimensión denominadas *folias*, que está modelada localmente por un produto  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  aínda que a súa topoloxía e disposición global poden ser moi complexas. A noción de *laminación* xeneraliza o concepto de foliación para espazos metrizable, localmente compactos e separables, substituíndo a parte transversa por un espazo do mesmo tipo.

Para unha revisión máis exhaustiva da teoría de foliacións poden verse [16, 40].

**Definición 1.1.1.** Sexan  $M$  e  $T$  dous espazos métricos localmente compactos e separables. Unha *laminación*  $\mathcal{F}$  de dimensión  $p$  e clase  $C^k$ ,  $0 \leq k \leq \infty$  ou  $k = \omega$ , sobre  $M$  modelada transversalmente por  $T$  está definida por medio dunha cobertura por abertos  $U_i$ , que chamaremos *abertos distinguidos*, dotados de homeomorfismos  $h_i : U_i \rightarrow P_i \times T_i$  onde  $P_i$  é un disco aberto de  $\mathbb{R}^p$  que contén á orixe e  $T_i$  un aberto de  $T$ . As fibras da proxección  $\pi_i = p_2 \circ h_i : U_i \rightarrow T_i$  denomínanse *placas* e dise que  $T_i$  (identificado con  $h_i^{-1}(\{0\} \times T_i)$ ) é unha transversal local. Os cambios de carta deben ser compatibles con esta estrutura, polo que se expresan como

$$h_j \circ h_i^{-1}(x, t) = (\varphi_{ij}^t(x), \gamma_{ij}(t)), \quad (1.1)$$

de xeito que as aplicacións  $\gamma_{ij}$  son homeomorfismos dun aberto de  $T_i$  nun de  $T_j$  e as  $\varphi_{ij}^t$  son  $C^k$ -difeomorfismos locais de placas de  $P_i$  en placas de  $P_j$  que dependen continuamente de  $t$  na topoloxía  $C^k$ .

Dise que  $\mathcal{A} = \{h_i : U_i \rightarrow P_i \times T_i\}_{i \in I}$  é un *atlas foliado* da laminación  $\mathcal{F}$ . Chámase *folla*  $L$  á unión dos camiños de placas  $P_1, \dots, P_n$  con  $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ . A unión disxunta  $\bigsqcup_i T_i$  é unha *transversal completa*, que corta a todas as follas, denominada *eixo* de  $\mathcal{A}$ .

Un subconxunto  $X \subset M$  é *saturado* se é unión de follas de  $\mathcal{F}$ . Dise que  $X \subset M$  é *minimal* se é un subconxunto pechado e saturado non trivial que é unión de follas densas.

**Observación 1.1.2.** A definición de atlas foliado garante que cada folla da laminación posúe unha estrutura natural de variedade de dimensión  $p$  e clase  $C^k$ .

**Exemplo 1.1.3.** O exemplo máis sinxelo é o dunha *laminación horizontal*. Se  $N$  é unha variedade de dimensión  $p$  e clase  $C^k$  e  $T$  un espazo métrico localmente compacto e separable, é obvio que  $\mathcal{H} = \{N \times \{t\}\}_{t \in T}$  é unha laminación de dimensión  $p$  e clase  $C^k$  de  $M = N \times T$  modelada transversalmente por  $T$ .

**Exemplo 1.1.4** (O *shift* de Bernoulli). Sexa  $\mathcal{C} = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  o espazo de sucesións binarias nas dúas direccións, que é un conxunto de Cantor dotado da topoloxía produto da discreta sobre  $\{0, 1\}$ . A aplicación  $\sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  que asocia a cada sucesión  $\alpha = (\alpha_i) \in \mathcal{C}$  a sucesión  $\sigma(\alpha)$  tal que  $\sigma(\alpha)_i = \alpha_{i+1}$  é así un homeomorfismo denominado *shift de Bernoulli*, que pode verse coma un desprazamento cara a dereita:

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ & & & \downarrow \sigma & & & \\ \cdots & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \end{array}$$

A laminación horizontal  $\mathcal{H}$  sobre  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$  induce unha laminación  $\mathcal{F}_\sigma$  sobre o conxunto cociente  $M = \mathbb{R} \times \mathcal{C} / (x, \alpha) \sim (x + 1, \sigma(\alpha))$  que está modelada transversalmente polo conxunto de Cantor  $\mathcal{C}$  (figura 1.1).

**Exemplo 1.1.5** (Suspensión dun homeomorfismo). O exemplo anterior pode xeneralizarse para calquera homeomorfismo dun espazo en si mesmo. En efecto, sexa  $f : X \rightarrow X$  un automorfismo dun espazo métrico localmente compacto e separable. Consideremos o espazo produto  $\mathbb{R} \times X$  xunto coa laminación horizontal  $\mathcal{H}$ . O grupo  $\mathbb{Z}$  actúa sobre  $\mathbb{R} \times X$  por medio da acción diagonal  $n \cdot (t, x) = (t + n, f^n(x))$ , que é libre e propiamente discontinua. A proxección  $q$  sobre o espazo cociente  $M = \mathbb{Z} \backslash (\mathbb{R} \times X)$  é logo un revestimento. Tense o seguinte cadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times X & \xrightarrow{p_1} & \mathbb{R} \\ q \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ M & \xrightarrow{\pi} & S^1 \end{array}$$

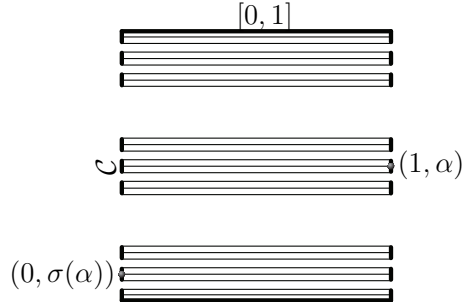


Figura 1.1: O espazo  $M = \mathbb{R} \times \mathcal{C}/\sim$ .

onde  $\pi$  é a aplicación inducida pola primeira proxección  $p_1$ . A terna  $(M, \pi, S^1)$  é un fibrado de fibra  $X$  sobre  $S^1$  con grupo estrutural o grupo de homeomorfismos xerado por  $f$ . A laminación horizontal  $\mathcal{H}$  presérvase pola acción de  $\mathbb{Z}$ , e induce así unha laminación  $\mathcal{F}$  de dimensión 1 sobre  $M$  modelada transversalmente por  $X$ .

Nos exemplos anteriores, para obter un atlas foliado chega con tomar un atlas do fibrado trivial e restrinxilo de maneira que poida proxectarse sobre  $M$  (trivializando as cubertas  $q$ ). Mais o feito de fixar o atlas non adoita ser relevante. En efecto, dise que dous atlas  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$  de dimensión  $p$  e clase  $C^k$  son *equivalentes*, é dicir, definen a mesma laminación, se  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  é tamén un atlas de dimensión  $p$  e clase  $C^k$ . Como no caso clásico das variedades diferenciables, calquera atlas foliado  $\mathcal{A}$  está contido nun único *atlas maximal*  $\mathcal{A}'$  equivalente a  $\mathcal{A}$ .

Neste contexto, chámase *función diferenciable de clase  $C^k$*  a unha familia de funcións diferenciables sobre as placas dos abertos  $U_i$  que dependen continuamente do parametro transversal  $t$  e que son compatibles sobre as interseccións destes abertos. Trátase dunha aplicación continua definida sobre  $M$  que é diferenciable de clase  $C^k$  en restricción a cada folla.

### 1.1.1 Bos atlas foliados e laminacións de clase $C^1$

Non obstante, na maioría dos casos vai interesar considerar atlas con boas propiedades de finitude local (véxase a figura 1.2(a)). É doado probar que para calquera atlas foliado existe un equivalente que cumpre as condicións da seguinte definición (véxanse [40, 52]):

**Definición 1.1.6.** Dise que un atlas foliado  $\mathcal{A}$  é un *bo atlas foliado* se:

- B1. A cobertura  $\{U_i\}_{i \in I}$  é localmente finita (e daquela finita se  $M$  é compacto);

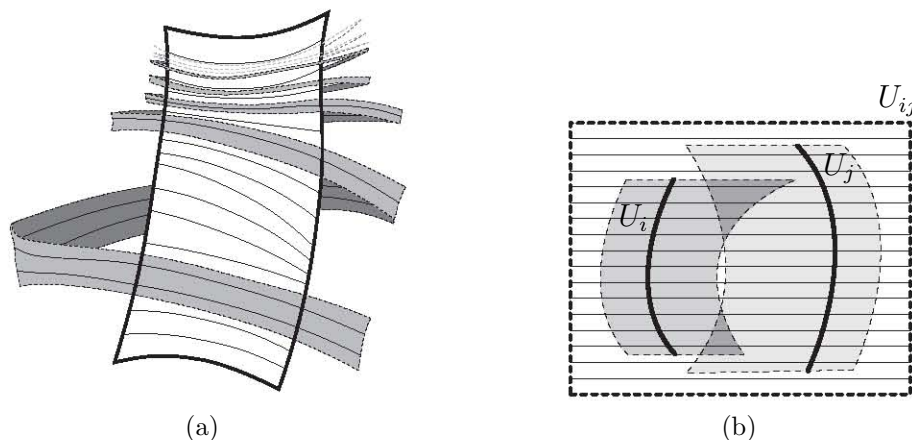


Figura 1.2: (a) Unha placa pode cortar a outra unha infinidade de veces; (b) Nun bo atlas foliado unha placa de  $U_i$  corta ao sumo a unha de  $U_j$ .

- B2. O atlas  $\mathcal{A}$  é un refinamento doutro atlas  $\mathcal{A}'$  de maneira que  $\overline{U_i} \subset U'_i$ , para cada  $i \in I$ ;
- B3. Para cada par de abertos distinguidos  $U_i, U_j \in \mathcal{A}$  non disxuntos, existe un aberto foliado en produto  $U_{ij}$  (non necesariamente en  $\mathcal{A}$ ) tal que  $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} \subseteq U_{ij}$  (véxase a figura 1.2(b)). Isto implica que unha placa de  $U_i$  corta ao sumo a unha de  $U_j$ .

Mais a maiores destas propiedades os bos atlas non engaden ningunha restrición sobre a xeometría das placas. Porén, coma no caso das variedades, vai ser posible definir atlas con placas xeodesicamente convexas tomando métricas de Riemann sobre as follas [6, 52]. Supoñamos que  $(M, \mathcal{F})$  é unha laminación de clase  $C^k$ . Cada aberto distinguido  $U_i$  admite unha métrica de Riemann  $g_i = h_i^* g_0$  de clase  $C^\infty$  ao longo das follas inducida pola métrica usual  $g_0$  sobre  $\mathbb{R}^p$ . Sexa  $T\mathcal{F}$  o fibrado tanxente á laminación, definido localmente por  $T\mathcal{F}|_{U_i} \cong TP_i \times T_i$  de maneira que  $T\mathcal{F}|_L \cong TL$  para cada folla  $L$  de  $\mathcal{F}$ . Segundo a Proposición 2.8 de [56], podemos empregar particións da unidade  $C^k$ -diferenciáveis para pegar as métricas locais  $g_i$  e obter unha *métrica de Riemann foliada* sobre  $M$ , isto é, unha aplicación continua  $g : T\mathcal{F} \times T\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(M)$  tal que cada unha das aplicacións restrinxidas  $g|_{TL}$  é unha métrica de Riemann no sentido clásico. Cada folla é así unha variedade de Riemann completa.

De querermos asegurar a existencia e unicidade de xeodésicas ao longo das follas, a priori necesitaríamos supoñer que a laminación en cuestión é de clase  $C^2$ . Non obstante, grazas ao seguinte teorema de [6], no noso contexto será suficiente para isto con clase  $C^1$ :



**Teorema 1.1.7** ([6]). *Se  $(M, \mathcal{F})$  é unha laminación de clase  $C^1$  equipada cun atlas foliado  $\mathcal{A}$ , entón existe un atlas foliado de clase  $C^\infty$  que é  $C^1$ -equivalente a  $\mathcal{A}$ .*

**Proba.** Polo lema de Zorn, existe un subconxunto aberto  $V \subset M$  xunto cun atlas foliado  $\mathcal{A}_V$  de clase  $C^\infty$  que induce unha laminación  $C^1$ -equivalente a  $\mathcal{F}|_V$ , e tal que o par  $(V, \mathcal{A}_V)$  é maximal. Noutros termos, as cartas da laminación  $\mathcal{F}|_V$  de clase  $C^\infty$  son cartas da laminación  $\mathcal{F}$  de clase  $C^1$ . Queremos probar que  $V = M$ . Se  $V \neq M$ , existe unha carta  $h : U \rightarrow P \times T$  de  $(M, \mathcal{F})$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$  e  $U \not\subseteq V$ . Sexa  $W = U \cap V$  e  $W' = h(W)$ . Temos entón definidas sobre  $W$  dúas estruturas foliadas: a de clase  $C^\infty$  inducida por  $V$  e a de clase  $C^1$  inducida por  $h$ . De podermos substituír a carta  $h : U \rightarrow P \times T$  por outra carta  $\tilde{h} : U \rightarrow P \times T$  tal que  $\tilde{h}|_W : W \rightarrow W'$  sexa un difeomorfismo foliado de clase  $C^\infty$ , poderíamos engadila ao atlas  $\mathcal{A}_V$  e  $(V, \mathcal{A}_V)$  non sería entón maximal.

Para definir  $\tilde{h}$ , comecemos indicando como obter unha veciñanza  $\mathcal{N}$  de  $\tilde{h}|_W$  en  $C^1(W, W')$ . Por paracompacidade, existe unha cobertura localmente finita  $\{K_i\}$  de  $W$  por compactos foliados en produto. A compacidade de  $K_i$  implica que existe  $\varepsilon_i > 0$  tal que  $d(y, U - W) > \varepsilon_i$  para cada  $y \in K_i$ , onde  $d$  é unha distancia sobre  $U$ . Sexa entón  $\mathcal{N}$  o conxunto de funcións  $f \in C^1(W, W')$  tales que, para cada  $y \in K_i$ ,  $\|f(y) - h|_W(y)\| < \varepsilon_i$  e  $\|df(y) - d(h|_W)(y)\| < \varepsilon_i$ . É dicir,  $f$  é próxima a  $h|_W$  en cada compacto. Ademais, cada  $f \in \mathcal{N}$  pode estenderse a unha función  $T(f) : U \rightarrow P \times T$  definida como

$$T(f) = \begin{cases} f & \text{sobre } W, \\ h & \text{sobre } U - W, \end{cases}$$

e a correspondente función  $T : \mathcal{N} \rightarrow C^1(U, P \times T)$  é continua (véxase o lema 2.8 de [42]). E como  $T(h|_W) = h$  é un difeomorfismo foliado de clase  $C^1$ , existe unha veciñanza  $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$  de  $h|_W$  cuxas imaxes son difeomorfismos de clase  $C^1$  de  $U$  en  $P \times T$ . Finalmente, polo teorema 2.11 de [56], existe un difeomorfismo foliado  $\tilde{h}_0 : W \rightarrow W'$  de clase  $C^\infty$  e a carta requerida será  $T(\tilde{h}_0)$ .  $\square$

## 1.1.2 Atlas con placas xeodesicamente convexas

Como vimos de dicir, para ter un control sobre a xeometría das placas podemos tomar unha métrica de Riemann foliada e definir atlas con placas xeodesicamente convexas. Supoñamos que  $(M, \mathcal{F})$  é unha laminación de clase  $C^1$  e tomemos  $g$  unha métrica de Riemann foliada.

Cada folla é entón unha variedade de Riemann completa, e podemos definir para cada  $x \in M$  a aplicación  $\exp_x : T_x L = T_x \mathcal{F} \rightarrow L$ , que é un difeomorfismo en

restrición a unha bóla suficientemente pequena arredor de  $\vec{0} \in T_x L$ . Defínese entón o *radio de inxectividade* en  $x$  como

$$\text{inx}(x) = \sup\{\varepsilon > 0 \mid \exp_x : B_{T_x L}(\vec{0}, \varepsilon) \rightarrow B_L(x, \varepsilon) \text{ é un difeomorfismo}\}$$

que é obviamente positivo e pode tomar o valor  $+\infty$ . Pódese asegurar tamén que as bólas suficientemente pequenas nas follas sexan *convexas xeodésicas*, isto é, que dous puntos da bóla poidan unirse por un único segmento xeodésico (unha xeodésica que minimiza a distancia) contido na bóla. E de forma análoga ao radio de inxectividade defínese o *radio de convexidade* en  $x$  como

$$\text{conv}(x) = \sup\{\varepsilon > 0 \mid B_L(x, \varepsilon) \text{ é un convexo xeodésico}\}.$$

Poden definirse así de maneira natural os *radio de inxectividade e convexidade dunha laminación* como

$$\begin{aligned} \text{inx}(\mathcal{F}) &= \inf\{\text{inx}(L) \mid L \in \mathcal{F}\} = \inf\{\text{inx}(x) \mid x \in M\}, \\ \text{conv}(\mathcal{F}) &= \inf\{\text{conv}(L) \mid L \in \mathcal{F}\} = \inf\{\text{conv}(x) \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

As aplicacións  $\text{inx}: M \rightarrow (0, +\infty]$  e  $\text{conv}: M \rightarrow (0, +\infty]$  non son continuas, mais se  $M$  é compacto é posible acotalas inferiormente a fin de obter atlas con placas xeodesicamente convexas. En efecto, para cada  $x \in M$ , podemos tomar, como dixemos, veciñanzas nas follas que sexan bólas xeodesicamente convexas e por continuidade da métrica podemos levantalas en abertos distinguidos con placas xeodesicamente convexas. Non obstante, vexamos como fixar cotas explicitamente (véxase [52]):

**Proposición 1.1.8** ([52]). *Se  $M$  é compacto,  $\text{inx}(\mathcal{F})$  e  $\text{conv}(\mathcal{F})$  son positivos.*

**Proba.** Para toda variedade de Riemann  $N$  coñécense as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \text{inx}(N) &\geq \min\left\{\frac{\pi}{\sqrt{K}}, \frac{l}{2}\right\}, \\ \text{conv}(N) &\geq \min\left\{\frac{\pi}{2\sqrt{K}}, \frac{\text{inx}(N)}{2}\right\}, \end{aligned}$$

onde  $K > 0$  é unha cota superior para a curvatura seccional de  $N$  e  $l$  a lonxitude do lazo xeodésico máis curto. Bastará probar entón que a curvatura seccional está limitada superiormente e a lonxitude dos lazos xeodésicos inferiormente.

Para o segundo, lembremos que  $\sec(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  só depende do plano xerado polos vectores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ . Se denotamos  $T^1\mathcal{F} = \{\vec{w} \in T\mathcal{F} \mid \|\vec{w}\| = 1\}$  o fibrado tanxente unitario, entón a aplicación curvatura seccional é unha aplicación continua definida sobre a suma de Whitney  $T^1\mathcal{F} \oplus T^1\mathcal{F}$ . Como a base  $M$  e a fibra  $S^p \times S^p$  son compactas, existe  $K > 0$  tal que  $\sec(\vec{v}, \vec{w}) < K$ .

Para ver que a lonxitude das xeodésicas pechadas está limitada inferiormente, supoñamos por redución ao absurdo que existe unha familia de xeodésicas  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \text{lonx}(\gamma_n) = 0$ . Denotemos  $x_n = \gamma_n(0)$  e  $\vec{v}_n = \gamma'_n(0)$ , e supoñamos que as xeodésicas están parametrizadas pola lonxitude de arco, logo  $\|\vec{v}_n\| = 1$  e pola compacidade de  $T^1\mathcal{F}$  podemos supoñer que  $\{(x_n, \vec{v}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é converxente. Mais por outra franxa sabemos que as xeodésicas son solucións de ecuacións diferenzais que dependen continuamente da métrica. Polo tanto, a xeodésica por  $x$  na dirección de  $\vec{v}$  é  $\gamma(t) = x$ , co que temos unha contradición.  $\square$

Isto permite asegurar a existencia de atlas foliados con placas xeodesicamente convexas:

**Proposición 1.1.9** ([52]). *Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación compacta. Existe un bo atlas foliado para  $\mathcal{F}$  tal que as placas son bólas xeodesicamente convexas.*

**Proba.** Dado  $x \in M$ , podemos tomar unha transversal  $T_x$  que pasa por  $x$  e tal que  $0 < \varepsilon < \inf_{y \in T_x} \{\text{conv}(y)\}$ , de xeito que o aberto  $U_x = \bigcup_{y \in T_x} B_{L_y}(y, \varepsilon)$  sexa un aberto foliado en produto. Temos entón un atlas  $\mathcal{A} = \{h_x : U_x \rightarrow P_x \times T_x\}$  cuxas placas son convexas xeodésicas. A partir de  $\mathcal{A}$  podemos construír agora de maneira habitual un bo atlas que siga tendo placas xeodesicamente convexas.  $\square$

**Observación 1.1.10.** Podemos esixir a maiores que o aberto  $U_{ij}$  da condición B3 da definición 1.1.6 teña placas xeodesicamente convexas. En efecto, neste caso a intersección de dúas placas é un aberto xeodesicamente convexo na folla, e polo tanto contráctil. Por outra banda, se modificamos o argumento da proba anterior e tomamos  $\varepsilon < \frac{1}{8} \inf_{y \in T_x} \{\text{conv}(y)\}$ , obtemos un bo atlas foliado  $\mathcal{A}$  con placas xeodesicamente convexas que cumpre ademais que, para cada  $x \in M$ , a unión de todas as placas de  $\mathcal{A}$  que conteñen a  $x$ , que se denomina *estrela de  $x$*  e denota  $\text{Star}(x, \mathcal{A})$ , está contido nun aberto xeodesicamente convexo da folla que pasa por  $x$ .

### 1.1.3 Atlas adaptados a unha métrica foliada

As laminacións que nos van interesar principalmente son as definidas por mosaicos aperiódicos. Son un tipo particular das laminacións modelas transversalmente por un conxunto de Cantor. Neste caso interesará definir atlas con transversais locais compacto-abertas. Para isto debe evitarse que placas disxuntas contidas en dous

abertos distinguidos poidan cortarse de repente ao seren desprazadas transversalmente. Con este propósito poden refinarse os bos atlas proporcionados pola proposición e a observación anteriores [6, 52]:

**Lema 1.1.11** ([6, 52]). *Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación compacta dotada dunha métrica de Riemann foliada  $g$ . Existe un bo atlas foliado  $\mathcal{A}$  tal que:*

*A1. Para cada  $x \in M$ ,  $\text{Star}(x, \mathcal{A})$  está contida nun convexo xeodésico;*

*A2. As placas que se intersecan fano de maneira transversa dúas a dúas.*

**Proba.** Seguindo os argumentos da observación 1.1.10 podemos tomar un bo atlas foliado  $\mathcal{A} = \{h_i : U_i \rightarrow P_i \times X_i\}_{i=1}^m$  que satisfaga a condición (A1). A idea para obter entón o atlas desexado consiste en eliminar os puntos de tanxencia. Para isto poden substituírse as placas por outras maiores (véxase a figura 1.3(a)) seguindo o método descrito por A. Phillips e D. Sullivan na proba da proposición 4.1 de [64]. Sen perda de xeneralidade, podemos supoñer que  $\mathcal{A}$  é un refinamento dun atlas do mesmo tipo co mesmo número de cartas  $h'_i : U'_i \rightarrow P'_i \times X'_i$  tal que  $\overline{U}_i \subset U'_i$ ,  $h'_i|_{U_i} = h_i$ ,  $\overline{X}_i \subset X'_i$ , e  $P'_i$  é un disco concéntrico a  $P_i$  de radio  $2r$ . Como o atlas  $\mathcal{A}$  satisfai a condición (A1), deberemos modificar por recorrencia os abertos distinguidos  $U_i$  ata que cumpran a condición (A2). Evidentemente o atlas parcial  $\mathcal{A}_1 = \{U_1\}$  satisfai ambas condicións. Supoñamos logo que hai un atlas foliado  $\mathcal{A}_{n-1} = \{W_1, \dots, W_{l_{n-1}}\}$  coas propiedades do enunciado e que cubre o conxunto  $\bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$ . Vexamos que existe un atlas que cumpre os mesmos requisitos e que cubre ao conxunto  $\bigcup_{i=1}^n U_i$ .

Para cada  $y \in X_n$ , existe unha bóla  $P^y$  contida na placa de  $U'_i$  que pasa por  $y$  cuxo bordo interseca transversalmente ao das placas de  $\mathcal{A}_{n-1}$ . En efecto, se o bordo da placa de  $U_n$  que pasa por  $y$  interseca de forma transversa aos bordos das restantes placas de  $\mathcal{A}_{n-1}$ , definimos  $P^y = \varphi_n^{-1}(P_n \times \{y\})$ . En caso contrario, podemos eliminar a tanxencia expandindo  $P_n \times \{y\}$  nunha bóla de radio  $r < r' < 2r$ , contida en  $P'_n \times \{y\}$ . Tomemos agora  $C_y \subset \overline{C}_y \subset X'_n$  unha veciñanza de  $y$  tal que os bordos dos discos  $\varphi_n^{-1}(P^y \times \{z\})$  intersecan transversalmente aos bordos das placas de  $\mathcal{A}_{n-1}$  para cada  $z \in C_y$ . Como  $X_n$  é relativamente compacto en  $X'_n$ , podemos recubrilo cun número finito de tales abertos  $C_{y_1}, C_{y_2}, \dots, C_{y_l}$  e temos entón unha familia de abertos foliados en produto  $A_{l_{n-1}+j} = h_n^{-1}(P^{y_j} \times C_{y_j})$ , con  $j = 1, 2, \dots, l$ . Os bordos das placas destes abertos poderían intersecarse tanxencialmente, pero neste caso necesariamente  $P^{y_j} = P^{y_k}$  e  $C_{y_j} \cap C_{y_k} \neq \emptyset$  para  $j \neq k$ , e poderíamos eliminar novamente as tanxencias expandindo  $P^{y_j}$  lixeiramente. Polo tanto, o atlas foliado  $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n-1} \cup \{A_{l_{n-1}+1}, A_{l_{n-1}+2}, \dots, A_{l_{n-1}+l}\}$  cubre  $\bigcup_{i=1}^n U_i$  e a intersección dos bordos das súas placas é sempre transverso. Como as placas están contidas en bólas xeodésicas de radio  $2r$ , entón calquera estrela  $\text{Star}(x, \mathcal{A}_r)$  está contido nunha

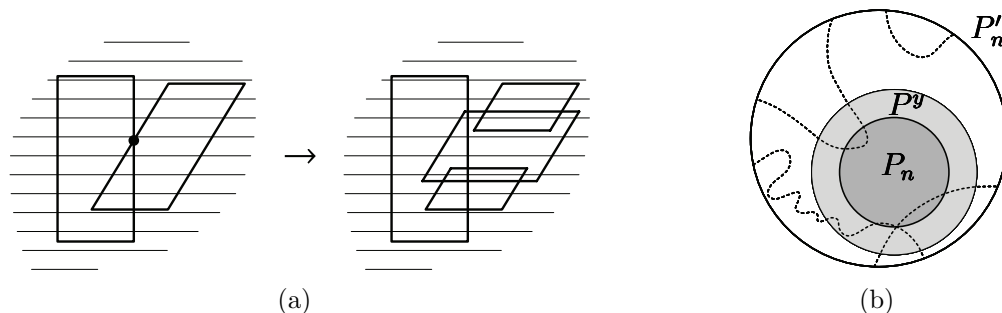


Figura 1.3: (a) Supresión das tanxencias; (b) Elección de  $P^y$ .

bóla xeodésica de radio  $\leq 8r < \text{conv}(\mathcal{F})$ . Nun número finito de pasos obtemos o atlas buscado.  $\square$

Se na proba anterior tomamos bólas de radio  $r < \frac{1}{16}\text{conv}(\mathcal{F})$ , podemos substituír a condición (A1) pola condición (A1') do seguinte lema, máis forte. E no caso de laminacións modeladas transversalmente por un conxunto de Cantor (cuxas particularidades comentaremos no capítulo 2) isto asegurará ademais que as transversais locais poidan tomarse compactas:

**Lema 1.1.12** ([6, 52]). *Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación modelada transversalmente por un conxunto de Cantor, dotada dunha métrica de Riemann foliada  $g$ . Existe un bo atlas foliado  $\mathcal{A}$  tal que*

- A1'. Para cada  $x \in M$ ,  $\text{Star}(\text{Star}(x, \mathcal{A}), \mathcal{A})$  está contida nun convezo xeodésico;*
- A2'. As placas que se intersecan fano de maneira transversa dúas a dúas;*
- A3'. As transversais locais son espazos compactos;*
- A4'. As transformacións de holonomía  $\gamma_{ij}$  están definidas sobre compacto-abertos.*

Nas condicións do lema anterior, dirase que  $\mathcal{A}$  é un *atlas foliado de  $(M, \mathcal{F})$  adaptado a  $g$* .

### 1.1.4 Dinámica transversa e holonomía

A pesares de estar modelada localmente por un produto, a disposición global das follas dunha foliación ou laminación pode ser moi complicada. A noción de *holonomía* aporta información sobre esta complexidade. Pode dicirse que informa sobre como se enrolan unhas follas con outras, de forma similar á aplicación de primeira volta para fluxos. Todo isto exprésase por medio do pseudogrupo de

holonomía, que permite precisar o concepto de *dinámica transversa* da laminación.

**Definición 1.1.13.** Un *pseudogrupo de transformacións*  $\Gamma$  sobre un espazo topolóxico  $X$  é unha familia de homeomorfismos de abertos de  $X$  en abertos de  $X$  que é pechada para a composición, a restrición e a inversión, e que contén á identidade e a calquera homeomorfismo que pertenza localmente.

**Definición 1.1.14.** Sexa  $\mathcal{A} = \{h_i : U_i \rightarrow P_i \times T_i\}_{i \in I}$  un bo atlas foliado dunha laminación  $(M, \mathcal{F})$ . Os homeomorfismos  $\gamma_{ij}$  entre abertos das transversais locais asociados aos cambios de carta definen por restrición, composición e inversión un pseudogrupo de transformacións do eixo do atlas que se denomina *pseudogrupo de holonomía de  $\mathcal{F}$* . É dicir, o pseudogrupo de holonomía é o menor pseudogrupo  $\Gamma$  que contén á familia de homeomorfismos  $\{\gamma_{ij}\}$ . Dise que  $\Gamma$  é o pseudogrupo de holonomía de  $\mathcal{F}$  reducido á transversal completa  $T = \bigsqcup_i T_i$  e os seus elementos son *transformacións de holonomía*.

Se  $M$  é compacto, a familia  $\{\gamma_{ij}\}$  constitúe un sistema finito de xeradores  $\Gamma_1 \subset \Gamma$  que permite realizar as órbitas do pseudogrupo coma o conxunto de vértices dun grafo localmente finito e conexo por camiños. En efecto, de xeito análogo á construción dos grafos de Cayley, o conxunto de vértices será a propia órbita  $\Gamma(x) = \{\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma, x \in \text{dom } \gamma\}$  e dous vértices  $y, z \in \Gamma(x)$  estarán unidos por unha aresta orientada se existe  $\gamma \in \Gamma_1$  tal que  $z = \gamma(y)$ . Se a lonxitude  $\text{lonx}_\Gamma(\gamma)$  dun elemento  $\gamma \in \Gamma$  é o número mínimo de xeradores necesarios para escribir  $\gamma$ , a métrica natural sobre o grafo defínese como

$$d_\Gamma(y, z) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists \gamma \in \Gamma_n : \gamma(y) = z\}$$

onde  $\Gamma_n$  denota o conxunto dos elementos de lonxitude  $\leq n$ . Dise así que  $(\Gamma, \Gamma_1)$  é un *pseudogrupo grafado*.

**Observación 1.1.15.** Dado que cada punto de  $T$  é un vértice dun grafo, é natural considerar a *aplicación de valencia*,  $\text{val}_{\Gamma_1}$ , que asocia a cada vértice o número de arestas que inciden nel. Podemos escribir así a valencia dun punto como

$$\text{val}_{\Gamma_1}(t) = \#\{\gamma \in \Gamma_1 \mid t \in \text{dom } \gamma\} + \#\{\gamma \in \Gamma_1 \mid t \in \text{im } \gamma\}$$

ou de maneira máis práctica como

$$\text{val}_{\Gamma_1}(t) = \sum_{\gamma \in \Gamma_1} (\chi_{\text{dom } \gamma}(t) + \chi_{\text{im } \gamma}(t)). \quad (1.2)$$

Posto que o dominio e a imaxe de cada homeomorfismo  $\gamma$  son abertos en  $T$ , as aplicacións características correspondentes son semicontinuas inferiormente. Logo  $\text{val}_{\Gamma_1}$  é semicontinua inferiormente. Obviamente será continua se e só se os dominios e as imaxes dos homeomorfismos pertencentes a  $\Gamma_1$  son abertos pechados de  $T$ .

Nos termos anteriores, defínese a *dinámica transversa* da laminación como a clase de equivalencia do seu pseudogrupo de holonomía. A equivalencia de pseudogrupos, introducida por A. Haefliger en [37, 38], está modelada polo exemplo seguinte: se  $\Gamma$  é un pseudogrupo de transformacións dun espazo topolóxico  $X$  e  $Y$  un aberto de  $X$  que corta a todas as órbitas de  $\Gamma$ , o pseudogrupo  $\Gamma|_Y$  reducido a  $Y$  é equivalente a  $\Gamma$ . En efecto, todo punto  $x \in X$  pertence ao dominio dun elemento  $\gamma \in \Gamma$  con imaxe contida en  $Y$ . Denotando  $\Gamma_x^Y$  ao conxunto de todos estes elementos de  $\Gamma$  e  $\Gamma_X^Y = \bigcup_{x \in X} \Gamma_x^Y$ , o conxunto  $\Phi = \Gamma_X^Y \cup \Gamma_X^{Y^{-1}}$  define unha equivalencia de pseudogrupos entre  $\Gamma$  e  $\Gamma|_Y$ . En xeral, dous pseudogrupos reducidos  $\Gamma|_Y$  e  $\Gamma|_{Y'}$  dun mesmo pseudogrupo  $\Gamma$  son equivalentes.

**Definición 1.1.16.** Dous pseudogrupos  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  sobre  $X$  e  $X'$  son *equivalentes no sentido de Haefliger* se  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  son a restrición a  $X$  e  $X'$  dun pseudogrupo  $\Gamma''$  que opera sobre a súa suma topolóxica de maneira que  $X$  e  $X'$  cortan a todas as órbitas de  $\Gamma''$ .

**Proposición 1.1.17** ([36]). *Se  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  son dous pseudogrupos de holonomía de dous atlas foliados  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$  dunha laminación  $(M, \mathcal{F})$ , entón  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  son equivalentes.*

Rematemos a sección lembrando a noción de grupo de holonomía dunha folla. Sexa  $L$  unha folla de  $\mathcal{F}$  que pasa por  $x \in L \cap T$ . Consideremos o subgrupo de isotropía  $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) = x\}$ . Chámase *grupo de holonomía de  $L$*  ao grupo de xermes  $\mathcal{H}_L$  dos elementos de  $\Gamma_x$  en  $x$ , que non depende de  $x$  senón só de  $L$ . En efecto, para calquera outro punto  $y \in L \cap T$ , existe un homeomorfismo  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma(x) = y$ , que define por conxugación un isomorfismo entre os grupos de xermes correspondentes  $\mathcal{H}_x$  e  $\mathcal{H}_y$ . Se  $\mathcal{H}_L$  é trivial, dise que a folla  $L$  non ten holonomía.

### 1.1.5 Relacións medibles discretas

As relacións de equivalencia medibles discretas xurden de maneira natural se consideramos a relación que induce unha foliación ao restrinxírmonos a unha transversal completa. No caso particular de foliacións sen holonomía, a dinámica transversa está fielmente representada por medio desta relación de equivalencia, xa sexa en sentido medible ou topolóxico. O propósito das seguintes seccións é precisar isto.

Sexa  $X$  un espazo boreliano estándar, é dicir, dotado dunha  $\sigma$ -álgebra isomorfa á  $\sigma$ -álgebra dos borelianos dun espazo polaco (i.e., completamente metrizable e separable). Unha relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  sobre  $X$  dise *medible* se o grafo de  $\mathcal{R}$  é un subconxunto boreliano de  $X \times X$  e *discreta* se as clases de equivalencia son numerables. Denomínase *transformación parcial* de  $\mathcal{R}$  a un isomorfismo boreliano  $\varphi : A \rightarrow B$  entre subconxuntos borelianos de  $X$  tal que o seu grafo

$$G(\varphi) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = \varphi(x)\} \subset \mathcal{R}.$$

Unha medida boreliana  $\mu$  sobre  $X$  dise *invariante por  $\mathcal{R}$*  se é invariante por calquera transformación parcial de  $\mathcal{R}$ , é dicir, se  $\varphi_*\mu(B') = \mu(\varphi^{-1}(B')) = \mu(B')$  para cada boreliano  $B' \subset B$ . Dise *case-invariante* se calquera transformación parcial de  $\mathcal{R}$  conserva alomenos os conxuntos de medida nula. Unha medida case-invariante  $\mu$  é *ergódica* se calquera conxunto boreliano saturado por  $\mathcal{R}$  ten medida nula ou total.

**Exemplo 1.1.18.** 1) Toda acción libre  $\Gamma \times (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$  dun pseudogrupo numerable sobre un espazo de probabilidade induce unha relación de equivalencia medible discreta sobre  $X$ . En xeral, toda relación de equivalencia medible discreta está definida pola acción dun pseudogrupo medible [24].

2) *Relación de equivalencia inducida por unha laminación boreliana.* A relación inducida por unha laminación sobre unha transversal completa é unha relación de equivalencia medible discreta e, como imos lembrar, pode dotarse ademais dunha estrutura de grupoide topolóxico. En xeral, a relación inducida por unha *laminación boreliana* ao restrinxírmonos a unha transversal completa é unha relación medible discreta. As laminacións borelianas xeneralizan o concepto de laminación esixindo unicamente medibilidade transversa no lugar de continuidade [12]. Defínese un atlas foliado boreliano de dimensión  $p$  sobre  $M$  por medio dunha familia numerable de cartas  $\mathcal{A} = \{h_i : U_i \rightarrow P_i \times T_i\}$  onde os  $U_i$  forman unha cobertura localmente finita de  $M$ , cada  $P_i$  é un aberto de  $\mathbb{R}^p$  contendo á orixe e cada  $T_i$  un boreliano do intervalo  $[0, 1]$ . Os cambios de cartas  $h_i \circ h_j^{-1}$  supóñense medibles e as súas restricións ás placas  $f_{ij}^t$  homeomorfismos locais. Dise igualmente que  $\mathcal{A}$  é un *atlas de clase  $C^k$*  se os cambios de placa son homeomorfismos de clase  $C^k$ . Deste xeito, o atlas boreliano induce de maneira natural sobre  $M$ , vía identificación dos  $U_i$  coas súas imaxes  $h_i(U_i) \subset \mathbb{R}^p \times T_i$ , unha estrutura boreliana estándar, a produto das de  $\mathbb{R}^p$  e  $T_i$ , e unha estrutura topolóxica, a inducida por  $\mathbb{R}^p$ , nas follas. A relación  $\mathcal{R}$  que definen as follas é deste xeito un conxunto boreliano de  $M \times M$ . Unha transversal para  $(M, \mathcal{F})$  é neste caso un subconxunto boreliano que corta a cada folla nun conxunto discreto e pechado. A traza dunha transversal  $T$  sobre as follas de  $M$  induce así unha relación de equivalencia medible discreta  $\mathcal{R}|_T = \mathcal{R} \cap (T \times T)$ .

O concepto de *dinámica medible* pode precisarse neste contexto por medio das nocións de *equivalencia orbital* e *equivalencia orbital estable* [30]:

**Definición 1.1.19.** Sexan  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  dúas relacións de equivalencia medibles discretas definidas sobre dous espazos borelianos estándar  $X$  e  $X'$ . Sexan  $\mu$  e  $\mu'$  dúas medidas finitas sobre  $X$  e  $X'$  invariantes por  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$ . As relacións de equivalencia  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  dinse:



- i) *orbitalmente equivalentes* se  $X$  e  $X'$  conteñen subconxuntos borelianos  $Y$  e  $Y'$ , saturados por  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  e de medida total, para os que existe un isomorfismo boreliano  $\varphi : Y \rightarrow Y'$  tal que  $\varphi(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}'[\varphi(x)]$  para  $\mu$ -casi todo  $x \in Y$  e  $\varphi_*\mu \sim \mu'$ ;
- ii) *establemente orbitalmente equivalentes* se  $X$  e  $X'$  conteñen subconxuntos borelianos  $Y$  e  $Y'$  tales que as súas saturacións por  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  son de medida total e de xeito que as relacións de equivalencia inducidas  $\mathcal{R}|_Y$  e  $\mathcal{R}'|_{Y'}$  son orbitalmente equivalentes.

En particular, se  $X'$  é un boreliano de  $X$  que corta a  $\mu$ -case toda clase de equivalencia  $\mathcal{R}[x]$ , a inclusión natural de  $X'$  en  $X$  define unha equivalencia orbital estable entre a relación de equivalencia inducida  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}|_{X'}$  e  $\mathcal{R}$ . Dirase que  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  representan a mesma *dinámica medible* se son establemente orbitalmente equivalentes.

Se as relacións de equivalencia medibles discretas consideradas están definidas sobre dous espazos polacos, pode darse unha versión puramente boreliana, cf.[20]:

**Definición 1.1.20.** Sexan  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  dúas relacións de equivalencia medibles discretas definidas sobre dous espazos topolóxicos polacos  $X$  e  $X'$ . Dise que  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  son:

- i) *orbitalmente equivalentes* se  $X$  e  $X'$  conteñen subconxuntos  $G_\delta$  densos  $Y$  e  $Y'$ , saturados por  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$ , e tales que existe un isomorfismo boreliano  $\varphi : Y \rightarrow Y'$  compatible con  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  ;
- ii) *establemente orbitalmente equivalentes* se  $X$  e  $X'$  conteñen subconxuntos borelianos  $Y$  e  $Y'$  tales que as súas saturacións por  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  son conxuntos  $G_\delta$  densos e as relacións de equivalencia inducidas  $\mathcal{R}|_Y$  e  $\mathcal{R}'|_{Y'}$  son orbitalmente equivalentes.

Neste caso, dirase que  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  representan a mesma *dinámica boreliana*.

### 1.1.6 Medidas transversas invariantes e case-invariantes

Vimos de lembrar a definición de medida invariante e case-invariante para unha relación de equivalencia medible discreta. En función disto, denomínase *medida transversa invariante ou case-invariante* dunha laminación  $(M, \mathcal{F})$  a unha medida  $\mu$  sobre unha transversal completa  $T$  que é invariante ou case-invariante para a relación de equivalencia inducida  $\mathcal{R}$ , ou equivalentementemente invariante ou case-invariante pola acción do pseudogrupo de holonomía  $\Gamma$ .

Se  $\mu$  é unha medida sobre  $T$ , podemos integrar a medida de contar respecto de  $\mu$  para definir unha medida sobre  $\mathcal{R}$ . Integrando a medida de contar sobre as fibras da proxección  $\beta : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto x \in T$  contra a medida  $\mu$ , obtemos unha

medida  $d\tilde{\mu}(x, y) = d\mu(x)$ . Analogamente, usando a segunda proxección obtemos a medida  $d\tilde{\mu}^{-1}(x, y) = d\tilde{\mu}(y, x) = d\mu(y)$ . As medidas  $\tilde{\mu}$  e  $\tilde{\mu}^{-1}$  son equivalentes se e só se a medida  $\mu$  é case-invariante, e neste caso a derivada de Radon-Nikodym  $\delta(x, y) = d\tilde{\mu}/d\tilde{\mu}^{-1}(x, y)$  dise o *cociclo de Radon-Nikodym* de  $(T, \mu, \mathcal{R})$ . Para cada boreliano  $B \subset \mathcal{R}$ , esta medida  $\tilde{\mu}$  exprésase logo como

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(B) &= \int |B_x| d\mu(x) \\ &= \int \chi_B(x, y) d\tilde{\mu}(x, y) \\ &= \int \chi_B(x, y) \delta(x, y) d\tilde{\mu}(y, x) \\ &= \int |B^y|_y d\mu(y)\end{aligned}$$

onde  $B_x = \{y \in T \mid (x, y) \in B\}$ ,  $B^y = \{x \in T \mid (x, y) \in B\}$  e  $|\cdot|_x$  denota a medida sobre  $\mathcal{R}[x]$  definida como  $|y|_x = \delta(y, x)$ .

**Exemplo 1.1.21.** É claro que unha medida  $\mu$  é invariante se e só se o cociclo de Radon-Nykodym é trivial,  $\delta = 1$ . Esta é unha condición forte, e non sempre existen medidas invariantes. No caso de codimensión 1, a existencia de medidas invariantes non triviais sobre conxuntos minimais equivale á trivialidade da holonomía (véxase o teorema 2.3.7 de [41]). En xeral, como lembraremos brevemente na sección 2.2.1, un método habitual para construír medidas invariantes é empregar sucesións de Følner (véxase [34]).

### 1.1.7 Relacións de equivalencia *étales*

Toda relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  definida sobre un espazo boreliano ou topolóxico  $X$  pode dotarse dunha estrutura natural de grupoide, caracterizada por:

- i) a inclusión  $\varepsilon : x \in X \mapsto (x, x) \in \mathcal{R}$  do conxunto das unidades  $X$  en  $\mathcal{R}$ ;
- ii) as proxeccións  $\beta : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto x \in X$  e  $\alpha : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto y \in X$ ;
- iii) o conxunto das parellas *compoñibles*

$$\mathcal{R} * \mathcal{R} = \{((x, y), (x', y')) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \mid \alpha(x, y) = y = x' = \beta(x', y')\}$$

e a multiplicación parcial  $\mu : ((x, y), (x', y')) \in \mathcal{R} * \mathcal{R} \mapsto (x, y') \in \mathcal{R}$ ;

- iv) a inversión  $\iota : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto (y, x) \in \mathcal{R}$ ;

que verifican os axiomas análogos aos de grupo: asociatividade, existencia de unidades e existencia de inversos.

**Definición 1.1.22.** Supoñamos que  $\mathcal{R}$  está definida sobre un espazo topolóxico  $X$ . Dise entón *topolóxico* se o é como grupoide, isto é, se o grafo de  $\mathcal{R}$  está dotado dunha topoloxía coa que as proxeccións  $\alpha, \beta : \mathcal{R} \mapsto X$  e a multiplicación parcial  $\mu : \mathcal{R} * \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$  son continuas e a inversión  $\iota : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$  é un homeomorfismo. Como é habitual,  $X$  e  $\mathcal{R}$  supóñense sempre localmente compactos e Hausdorff. Unha relación de equivalencia topolóxico  $\mathcal{R}$  dise  *$\beta$ -discreta* se o espazo de unidades  $X$  é aberto en  $\mathcal{R}$ . Se  $\mathcal{R}$  é Hausdorff, tamén é pechado. Isto equivale a supoñer que  $\mathcal{R}$  é *étale*, é dicir, as proxección  $\alpha, \beta : \mathcal{R} \mapsto X$  son homeomorfismos locais [66].

A noción de *dinámica topolóxico* fórmulase nestes termos de xeito evidente:

**Definición 1.1.23.** Sexan  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  dúas relacións de equivalencia  $\beta$ -discretas sobre  $X$  e  $X'$ .

i)  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  dinse *orbitalmente equivalentes* se existe un homeomorfismo  $\varphi : X \rightarrow X'$  tal que  $\varphi(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}'[\varphi(x)]$ , para todo  $x \in X$ , e daquela  $\varphi \times \varphi$  define un isomorfismo de relacións de equivalencia entre  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$ . Se o isomorfismo  $\varphi \times \varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  é un homeomorfismo de relacións de equivalencia topolóxicas, dirase que  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  son *isomorfas*.

ii)  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  son *establemente orbitalmente equivalentes (establemente isomorfas)*, se  $X$  e  $X'$  conteñen abertos  $Y$  e  $Y'$  que cortan a todas as clases de equivalencia de  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  e tales que as relacións de equivalencia inducidas  $\mathcal{R}|_Y$  e  $\mathcal{R}'|_{Y'}$  son orbitalmente equivalentes (respectivamente isomorfas).

Dirase entón que  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$  representan a mesma *dinámica topolóxico*.

A relación inducida por unha laminación sen holonomía sobre unha transversal completa pode dotarse dunha topoloxía *étale* formada polos grafos dos elementos do pseudogrupo de holonomía. Trátase dunha topoloxía máis fina que a inducida pola topoloxía produto sobre  $T \times T$ , que fai de  $\mathcal{R}$  un espazo polaco localmente compacto.

Analogamente, o *grupoide de holonomía de  $\mathcal{F}$  reducido a  $T$* , isto é, o conxunto de xermes de  $\Gamma$

$$\mathcal{H} = \{ \langle \gamma \rangle_x \mid \gamma \in \Gamma, x \in \text{dom } \gamma \}$$

dotado da estrutura de grupoide definida pola inclusión  $\varepsilon(x) = \langle \text{id}_T \rangle_x$ , as proxeccións  $\alpha(\langle \gamma \rangle_x) = x$  e  $\beta(\langle \gamma \rangle_x) = \gamma(x)$ , o conxunto das parellas compondibles

$$\mathcal{H} * \mathcal{H} = \{ (\langle \gamma \rangle_x, \langle \gamma' \rangle_{x'}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mid \gamma(x) = x' \}$$

coa multiplicación parcial  $\mu(\langle \gamma \rangle_x, \langle \gamma' \rangle_{x'}) = \langle \gamma' \circ \gamma \rangle_x$  e a inversión  $\iota(\langle \gamma \rangle_x) = \langle \gamma^{-1} \rangle_{\gamma(x)}$ , é un grupoide topolóxico  $\beta$ -discreto ao dotalo da topoloxía natural correspondente.

A aplicación

$$\delta = (\alpha, \beta) : \langle \gamma \rangle_x \in \mathcal{H} \mapsto (x, \gamma(x)) \in \mathcal{R}$$

é deste xeito un homomorfismo de grupoides topolóxicos e o seu núcleo

$$\mathcal{I} = \{ \langle \gamma \rangle_x \in \mathcal{H} \mid \gamma(x) = x \}$$

é un fibrado de grupos no que a fibra de  $x$  é o grupo de isotropía  $\Gamma_x$ . É dicir, temos unha sucesión exacta curta de grupoides

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I} & \xrightarrow{i} & \mathcal{H} & \xrightarrow{\delta=(\alpha,\beta)} & \mathcal{R} \\ & \searrow \alpha & \downarrow \alpha & \swarrow \alpha & \\ & \beta & T & \swarrow \alpha & \\ & & & \searrow \beta & \end{array} \quad (1.3)$$

Segundo un resultado de G. Hector (véxase [39]), obtido independentemente por D.B.A. Epstein, K.C. Millet e D. Tischler en [23], o conxunto das follas sen holonomía dunha laminación é un  $F_\delta$  de interior baleiro. Como consecuencia disto, o grupoide de holonomía  $\mathcal{H}$  é esencialmente principal, pois o morfismo  $\delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}$  é un isomorfismo en restrición a un  $G_\delta$  denso. En particular temos:

**Proposición 1.1.24.** *Se  $(M, \mathcal{F})$  é unha laminación sen holonomía, a súa dinámica transversa topolóxica está representada pola relación de equivalencia inducida sobre calquera transversal completa.*

Non obstante, a *equivalencia de grupoides*, introducida para grupoides de holonomía transversos por A. Haefliger [36] e de maneira xeral por J.Renault [67] (véxase tamén P.S. Muhly, J.Renault e D.P. Williams [57]), permite definir a noción de dinámica transversa no contexto dos grupoides.

## 1.2 Laminacións definidas por mosaicos

Centramos agora o contexto nun tipo particular de laminacións que serán obxecto do noso estudo, as laminacións definidas por mosaicos. Comezamos lembrando brevemente algunhas propiedades básicas dos mosaicos de  $\mathbb{R}^p$ , describindo a relación entre elas e mostrando a súa tradución discreta (véxanse [9], [35], [75]).

### 1.2.1 Mosaicos euclidianos

Denomínase *prototesela* a calquera subconxunto de  $\mathbb{R}^p$  homeomorfo ao disco pechado  $D^p$  e defínese así un mosaico de  $\mathbb{R}^p$  do seguinte xeito:

**Definición 1.2.1.** Un *mosaico*  $\mathcal{T}$  é unha familia numerable de subconxuntos de  $\mathbb{R}^p$ , chamados *teselas*, que verifican as seguintes condicións:

- i) existe unha subfamilia  $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$  tal que cada tesela  $\mathbb{P} \in \mathcal{T}$  é isométrica a unha prototesela de  $\mathcal{P}$ ,
- ii) a familia  $\mathcal{T}$  é unha cobertura de  $\mathbb{R}^p$ ,
- iii) dúas teselas distintas teñen interiores disxuntos.

Neste caso, dise que  $\mathcal{T}$  é un *mosaico de tipo*  $\mathcal{P}$  e escíbese  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$ . As prototeselas de  $\mathcal{P}$  chámanse tamén *teselas modelo*.

Cada prototesela  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$  define unha *clase de tesela salvo isometría* e unha *clase de tesela salvo translación*. De maneira explícita, dúas teselas  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}'$  son equivalentes salvo isometría, e denotamos  $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}'$ , se existe unha isometría de  $\mathbb{R}^p$  que envía unha na outra. Analogamente, a clase salvo translación dunha tesela  $\mathbb{P}$  está formado polas teselas  $\mathbb{P}'$  tales que  $\mathbb{P} \sim_t \mathbb{P}' \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^p \mid \mathbb{P}' = \mathbb{P} + v$ . Tense así o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{P}/\sim \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{P}/\sim_t & & \end{array}$$

Sen perda de xeneralidade, podemos supoñer que prototeselas distintas representan distintas clases salvo translación, o que permite identificar  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}/\sim_t$  (cf. [9]). Chamaremos *motivo* dun mosaico  $\mathcal{T}$  a calquera subfamilia finita de  $\mathcal{T}$ , que identificaremos acotío coa súa unión, e *patrón* á súa clase salvo translación. Aínda que un motivo non ten que ser necesariamente conexo, será suficiente para os nosos propósitos considerar motivos conexos.

Imos introducir agora unha restrición importante que verificarán todos os mosaicos considerados nesta memoria agás nesta subsección e na seguinte:

**Definición 1.2.2.** Un mosaico  $\mathcal{T}$  de  $\mathbb{R}^p$  é *poliédrico* se as prototeselas son poliedros en  $\mathbb{R}^p$ . Os seus bordos descompóñense logo en poliedros convexos de dimensión  $n - 1$ , chamados *lados*. Por outra banda, denomínase *aresta* á intersección de dúas teselas e dise que  $\mathcal{T}$  é *lado a lado* se verifica as dúas condicións seguintes:

- i) calquera lado está contido nunha aresta e calquera aresta é unión de lados,
- ii) a intersección de dúas teselas é un conxunto conexo.

En [35], defínense mosaicos do plano *aresta a aresta* impondo unha condición algo máis forte cá condición (i): calquera lado dunha tesela é aresta do mosaico e viceversa. A condición (ii) adoita esixirse na definición de mosaico *normal* [35]. O mosaico da figura 1.4 é un mosaico poliédrico e verifica (i), pero non (ii).

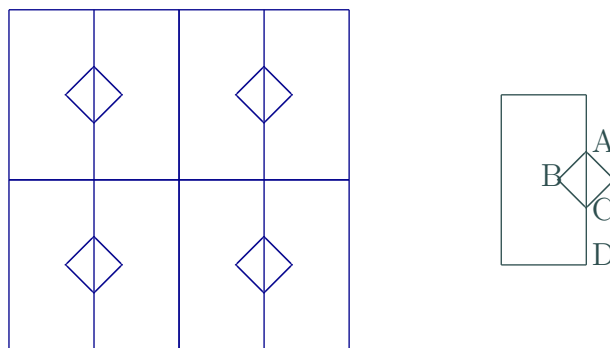


Figura 1.4

Este exemplo permite aclarar a *diferenza entre lado e aresta*. Obsérvese que  $AB$  e  $BC$  son lados de dúas teselas distintas contidos nunha mesma aresta do mosaico,  $ABC$ , que non é lado de ningunha tesela.

**Definición 1.2.3** ([9], [35]). Un mosaico  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$  é de *tipo finito* se só ten un número finito de prototeselas salvo translación, o que significa que  $\mathcal{P}$  é finito, pois supuxemos que  $\mathcal{P}$  se identifica con  $\mathcal{P}/\sim_t$ .

**Definición 1.2.4** ([9]). Un mosaico  $\mathcal{T}$  ten un *número finito de patróns locais* se para cada  $r > 0$  só hai un número finito de motivos de diámetro  $< r$  salvo translación, é dicir, un número finito de patróns de diámetro  $< r$ .

Se supoñemos que  $\mathcal{T}$  é un mosaico lado a lado, entón  $\mathcal{T}$  ten un número finito de patróns locais se para cada  $r > 0$  só hai un número finito de prototeselas de diámetro  $< r$ , xa que as teselas son motivos e calquera motivo de diámetro  $< r$  é unha unión finita de teselas de diámetro  $< r$ . É evidente logo a xerarquía entre as dúas definicións:

**Proposición 1.2.5.** *Un mosaico lado a lado de tipo finito ten un número finito de patróns locais.*  $\square$

Logo nun mosaico cun número finito de patróns locais o diámetro das teselas está limitado inferiormente. Non obstante, pode non estar superiormente e polo tanto non ser de tipo finito, coma no exemplo da figura 1.5, no que a medida que nos afastamos da orixe as teselas son cada vez maiores.

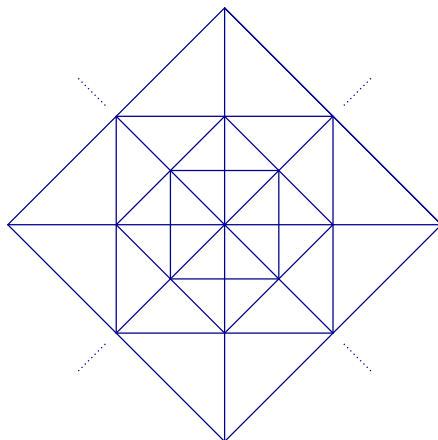


Figura 1.5

Necesitamos engadir esa condición para termos o recíproco:

**Proposición 1.2.6.** *Se un mosaico ten un número finito de patróns locais e o diámetro das teselas está limitado superiormente, entón é de tipo finito.*  $\square$

**Definición 1.2.7** ([35]). Un mosaico  $\mathcal{T}$  de  $\mathbb{R}^p$  dise *localmente finito en  $x$*  se existe  $\varepsilon > 0$  tal que a bóla  $B(x, \varepsilon)$  só corta a un número finito de teselas de  $\mathcal{T}$ . En tal caso, dise que  $x$  é un *punto regular* de  $\mathcal{T}$  e chámase *puntos singulares* aos que non son regulares. Dise que  $\mathcal{T}$  é *localmente finito* se todos os puntos  $x \in \mathbb{R}^p$  son regulares.

**Exemplo 1.2.8.** O mosaico da figura 1.6, descrito en [35], ten un único punto singular na orixe. Calquera bóla centrada na orixe corta a infinitas teselas.

En xeral, para cada  $x \in \mathbb{R}^p$ , cada número real  $\varepsilon > 0$  e cada prototesela  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ , o número de teselas coa mesma clase salvo translación que  $\mathbb{P}$  que cortan á bóla  $B(x, \varepsilon)$  é finito. As seguintes condicións garanten que o número de clases salvo translación dun mosaico é finito [32]:

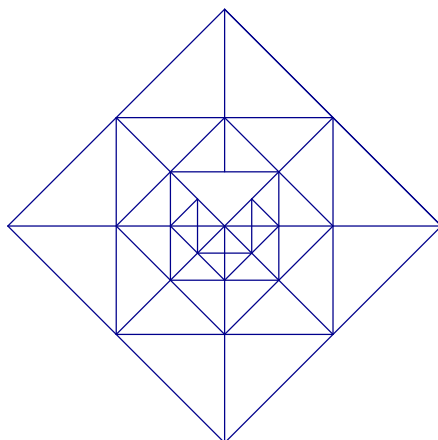


Figura 1.6

**Proposición 1.2.9.** *Un mosaico cun número finito de patróns locais e diámetro das teselas limitado superiormente é localmente finito.*  $\square$

Se suprimimos a segunda condición, é dicir, se o diámetro das teselas non está limitado superiormente, a implicación non é certa, véxase a figura 1.7.

A pesares de que ningún dos exemplos anteriores é lado a lado, esta non é unha condición suficiente para que un mosaico sexa localmente finito, véxase a figura 1.8.

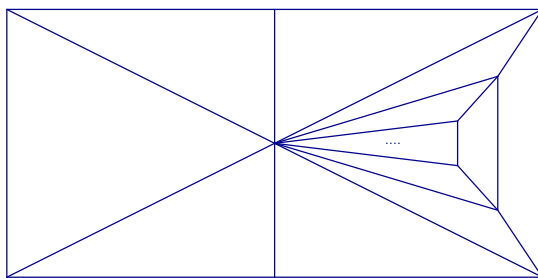


Figura 1.8

Se engadimos a condición de que o mosaico teña un número finito de patróns locais, entón si é necesariamente localmente finito:



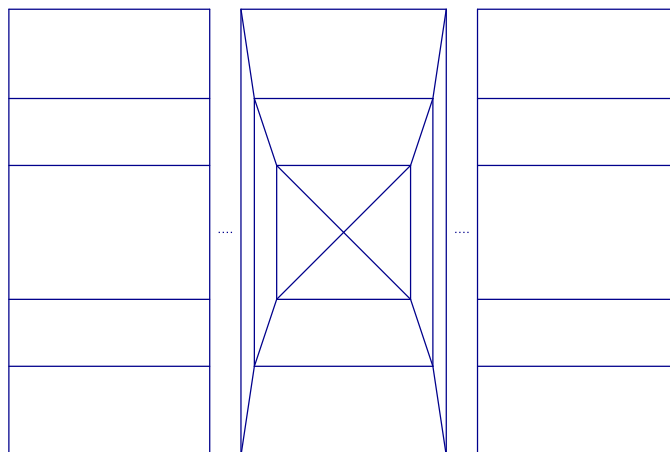


Figura 1.7

**Proposición 1.2.10.** *Todo mosaico lado a lado con un número finito de patrones locais é localmente finito.*

**Proba.** Supoñamos por redución ao absurdo que, dado  $\mathcal{T}$  un mosaico lado a lado con un número finito de patrones locais, existen  $x \in \mathbb{R}^p$  e  $r > 0$  tales que o conxunto  $\{\mathbb{P} \in \mathcal{T} \mid \mathbb{P} \cap B(x, r) \neq \emptyset\}$  é infinito e posúe unha enumeración  $\{\mathbb{P}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  con  $\mathbb{P}_n \neq \mathbb{P}_m$  se  $n \neq m$ . Tomando unha sucesión de puntos  $x_n \in \mathbb{P}_n \cap \overline{B}(x, r)$  e substituíndo  $\{x_n\}$  por unha subsucesión se é preciso, temos que  $x_n \rightarrow y \in \overline{B}(x, r)$ . Temos agora tres casos posibles:

- 1) Se  $y$  pertence ao interior dunha tesela  $\mathbb{P}$ , existe un enteiro  $N \geq 0$  tal que  $\mathbb{P}_n \cap \mathring{\mathbb{P}} \neq \emptyset$  e polo tanto  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}$  para  $n \geq N$ , o que contradí a suposición.
- 2) Se  $y$  pertence ao interior dunha aresta do mosaico, por hipótese, trátase da unión dalgúñas caras dunha tesela  $\mathbb{P}$ . Existe entón outra tesela  $\mathbb{P}'$  tal que  $\mathbb{P} \cup \mathbb{P}'$  é unha veciñanza de  $y$ . Logo ten que verificarse que  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}'$  ou  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}$  para unha infinidade de naturais, polo que chegamos novamente a contradición.
- 3) Por último, supoñamos que  $y$  é un vértice do mosaico e denotemos  $U$  á unión de todas as teselas que conteñen a  $y$ . Para cada tesela  $\mathbb{P} \in U$ , cada aresta de  $\mathbb{P}$  que non contén a  $y$  é aresta doutra tesela  $\mathbb{P}'$  contida na clausura de  $\mathbb{R}^p - U$ . No caso contrario, a súa intersección con  $\mathbb{P}$  non sería conexa, pois contería un vértice e un lado disxuntos, e o mosaico non sería lado a lado. A aresta común separa  $\mathbb{P} \cup \mathbb{P}'$  en dúas compoñentes conexas e a clausura da unión de todas esas arestas é un pechado conexo  $F$  contido na fronteira de  $U$ . O punto  $y \notin F$  pois non pode ser un punto fronteira, xa que se o mosaico ten un número finito de patrones locais e

é lado a lado, a lonxitude das arestas está limitada inferiormente e  $y$  pertence ao interior de  $U$ .

Consideremos agora un enteiro  $N \geq 0$  tal que  $x_n \in U$  para cada  $n \geq N$ . Daquela a tesela  $\mathbb{P}_n$  está contida en  $U$  e contén a  $y$  como vértice. Fixemos  $\varepsilon > 0$  tal que  $\overline{B}(y, \varepsilon)$  está contida no interior de  $U$ . Para cada  $n \geq N$ , sexa  $y_n$  o punto de intersección de  $\partial\overline{B}(y, \varepsilon)$  cunha das arestas de  $\mathbb{P}_n$  que saen de  $y$ . A existencia do punto  $y_n$  provén de que  $\mathbb{P}_n \not\subset \overline{B}(y, \varepsilon)$ . Pola compacidade de  $\partial\overline{B}(y, \varepsilon)$ , podemos supoñer que  $y_n \rightarrow z \in \partial\overline{B}(y, \varepsilon)$ . Logo  $z$  pertence ao interior ou a algunha aresta dunha tesela de  $U$  e reducimos así o caso (3) aos casos (1) e (2). En particular, temos probado que  $U$  é unha unión finita de teselas.  $\square$

### 1.2.2 Conxuntos de Delone e mosaicos de Voronoi

Dado  $\mathcal{P}$  un conxunto de prototeselas, a elección dun punto base en cada prototesela de  $\mathcal{P}$  determina por translación en cada mosaico  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$  unha familia  $D_{\mathcal{T}}$  de puntos base  $x_{\mathbb{P}}$  das teselas  $\mathbb{P} \in \mathcal{T}$ . Diremos que  $D_{\mathcal{T}}$  é un *conxunto de puntos base de  $\mathcal{T}$*  ou *conxunto base de  $\mathcal{T}$* . As condicións anteriores sobre os mosaicos teñen evidentemente a súa tradución ao conxunto base (como pode verse en [32]):

**Proposición 1.2.11.** *Un mosaico  $\mathcal{T}$  é localmente finito se e só se calquera conxunto de puntos base  $D_{\mathcal{T}}$  é discreto e pechado.*  $\square$

**Definición 1.2.12** ([48]). Un *conxunto de Delone* é un subconxunto  $D \subset \mathbb{R}^p$  que verifica as dúas condicións seguintes:

- i)  $D$  é *uniformemente discreto*, i.e. existe  $r > 0$  tal que calquera bóla  $B(x, r)$  contén ao sumo un punto de  $D$ ;
- ii)  $D$  é *relativamente denso*, i.e. existe  $R > 0$  tal que calquera bóla  $B(x, R)$  contén alomenos un punto de  $D$ .

**Proposición 1.2.13.** *Calquera mosaico de tipo finito posúe un conxunto base que é un conxunto de Delone.*  $\square$

Nótese que condición da proposición 1.2.13 non é unha condición necesaria, véxase a figura 1.9.

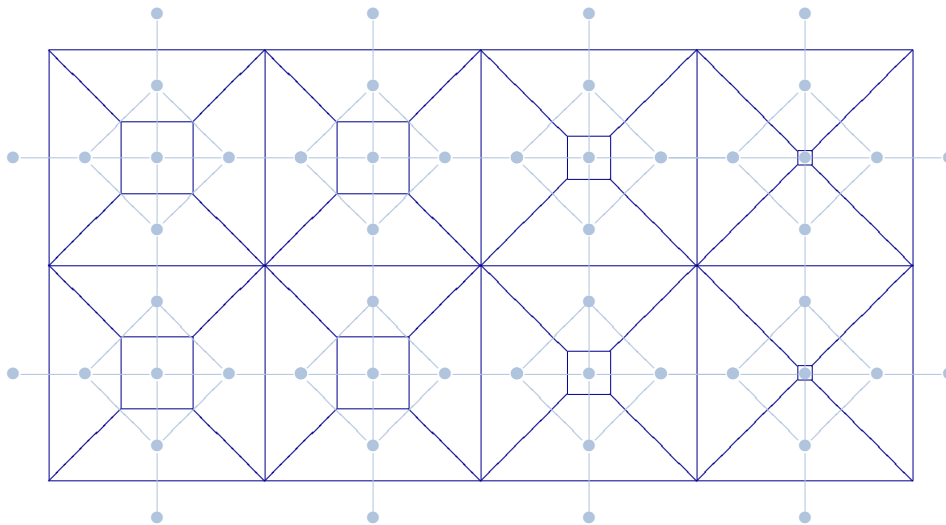


Figura 1.9

De feito, neste exemplo, o conxunto  $D - D = \{x_{\mathbb{P}} - x_{\mathbb{P}'} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbb{P}, \mathbb{P}' \in \mathcal{T}\}$  dos vectores de  $\mathbb{R}^2$  entre puntos de  $D$  é tamén un conxunto discreto e pechado, xa que calquera bóla só contén a un número finito de elementos de  $D - D$ . Aínda máis, é uniformemente discreto e relativamente denso, é dicir, un conxunto de Delone.

**Definición 1.2.14** ([48]). Sexan  $D$  un conxunto de Delone,  $D - D$  o conxunto dos vectores interpuntuais de  $D$  e  $\langle D - D \rangle$  o grupo aditivo xerado polos elementos de  $D - D$ . Dise que:

- i)  $D$  é *finitamente xerado* se  $\langle D - D \rangle$  é finitamente xerado;
- ii)  $D$  é *de tipo finito* se  $D - D$  é localmente finito ou de maneira equivalente pechado e discreto;
- iii)  $D$  é un *conxunto de Meyer* se  $D - D$  é conxunto de Delone.

É claro que todo conxunto de Meyer é de tipo finito e todo conxunto de tipo finito é finitamente xerado.

Para rematar este breve repaso ás principais propiedades dos mosaicos euclidianos que se terán en conta, lembramos a noción de mosaico de Voronoi:

**Definición 1.2.15.** Sexa  $D$  un conxunto de Delone de  $\mathbb{R}^p$ . Para cada punto  $x \in D$  defínese a *celda de Voronoi* de  $x$  como

$$\mathbb{V}_x = \{y \in \mathbb{R}^p \mid d(y, x) \leq d(y, x'), \forall x' \in D - \{x\}\}.$$

É evidente que  $\mathbb{V}_x$  é un polítopo convexo, pois é intersección de semiespazos que conteñen a  $x$  limitados por hiperplanos que equidistan de  $x$  e doutro punto de  $D$ . É claro tamén que dúas celdas de Voronoi de dous puntos distintos do conxunto de Delone se intersecan ao sumo nun dos seus lados. Pode definirse entón o *mosaico de Voronoi*  $\mathcal{V}$  dun conxunto de Delone  $D$  como o mosaico que ten por teselas as celdas de Voronoi  $\mathbb{V}_x$  dos puntos  $x \in D$ .

**Proposición 1.2.16** ([9]). *Se  $D$  é un conxunto de Delone de tipo finito, o mosaico de Voronoi correspondente segue sendo de tipo finito.*  $\square$

A partir deste momento, todos os mosaicos considerados nesta memoria suporáranse poliédricos e lado a lado, de maneira que calquera mosaico de tipo finito terá un número finito de patróns locais.

### 1.2.3 Topoloxía de Gromov-Hausdorff

O conxunto  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  de todos os mosaicos de tipo  $\mathcal{P}$  pode dotarse dunha topoloxía natural, chamada *topoloxía de Gromov-Hausdorff*, na que dous mosaicos son próximos se coinciden nunha gran bóla centrada na orixe, agás pequenas translacións (véxanse [9] e [26]). O propósito agora é describir esta topoloxía:

Antes de nada, insistamos no feito de que dous mosaicos de  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  que se diferencian nunha translación son distintos a priori. Para ilustrar o que queremos dicir con isto, consideremos o caso trivial no plano no que o conxunto de prototeselas  $\mathcal{P}$  consta unicamente dun cadrado unidade. Dados un mosaico regular por cadrados  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$  e un vector  $v \in \mathbb{R}^2$ , entón  $\mathcal{T} + v$  é distinto de  $\mathcal{T}$  agás no caso  $v \in \mathbb{Z}^2$ . Neste exemplo,  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  é o conxunto cociente  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{T}^2$ .

**Definición 1.2.17.** Dados dous mosaicos  $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$ , consideramos o conxunto  $A = \{R > 0 : B_{\mathcal{T}}(0, R) = B_{\mathcal{T}'}(0, R)\}$ , onde  $B_{\mathcal{T}}(0, R)$  é a traza do mosaico  $\mathcal{T}$  na bóla  $B(0, R)$  en  $\mathbb{R}^p$ , e definimos

$$R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \begin{cases} \sup A & \text{se } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } A = \emptyset. \end{cases}$$

Obsérvese que  $R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = +\infty$  se e só se  $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ . Agora, para cada  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$ , cada par  $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$  e cada  $R \geq 0$ , podemos definir o seguinte conxunto:

$$U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{T}' \in \mathbb{T}(\mathcal{P}) \mid \exists v, v' \in \mathbb{R}^p : \|v\| < \varepsilon, \|v'\| < \varepsilon', R(\mathcal{T} + v, \mathcal{T}' + v') > R\}.$$

Estes conxuntos forman base dunha topoloxía metrizable. En efecto, a topoloxía de Gromov-Hausdorff pode definirse directamente a partir dunha métrica (véxase [9]): para cada par  $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$ , denotando

$$B = \left\{ \varepsilon \in (0, 1) \mid \exists v, v' \in B(0, \varepsilon) : B_{\mathcal{T}+v}(0, \frac{1}{\varepsilon}) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, \frac{1}{\varepsilon}) \right\}$$

defínese a distancia

$$d(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \begin{cases} \inf B & \text{se } B \neq \emptyset, \\ 1 & \text{se } B = \emptyset. \end{cases}$$

**Exemplo 1.2.18.** O mosaico regular por cadrados  $\mathcal{T}$  e o seu trasladado  $\mathcal{T}' = \mathcal{T} + u$  polo vector  $u = (\frac{1}{2}, 0)$  están a distancia  $\frac{1}{4}$ .



Figura 1.10: Os puntos distinguidos sinalan a orixe do plano.

En efecto, para cada  $\frac{1}{4} < \varepsilon < 1$  os vectores  $v = (\frac{1}{4}, 0)$  e  $v' = (-\frac{1}{4}, 0)$  cumpren que  $B_{\mathcal{T}+v}(0, \frac{1}{\varepsilon}) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, \frac{1}{\varepsilon})$ . Pero se  $w, w'$  son tales que  $\|w\|, \|w'\| < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , entón en calquera caso  $B_{\mathcal{T}+w}(0, \frac{1}{\varepsilon}) \neq B_{\mathcal{T}'+w'}(0, \frac{1}{\varepsilon})$ .

**Proposición 1.2.19.** Para cada  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$ , cada par  $0 < \varepsilon, \varepsilon' < 1$  e cada  $R > 1$ , o conxunto  $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$  é un aberto da topoloxía definida pola métrica  $d$ . Ademais, calquera bóla  $B_d(\mathcal{T}, \varepsilon)$  é igual ao conxunto  $U_{\varepsilon, \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}}(\mathcal{T})$ .

**Proba.** A segunda afirmación é evidente, logo basta probar que para calquera mosaico  $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$  hai unha bóla centrada en  $\mathcal{T}'$  contida en  $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$ . Por definición, existen  $v, v'$  con  $\|v\| < \varepsilon, \|v'\| < \varepsilon'$  tales que  $B_{\mathcal{T}+v}(0, R) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, R)$ . Se  $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon' - \|v'\|}{2}$  e  $R' = R + \varepsilon'' + \|v'\|$ , entón  $U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}') \subset U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$ . En efecto, se  $\mathcal{T}'' \in U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}')$ , existen vectores  $w', w''$  con  $\|w'\|, \|w''\| < \varepsilon''$  tales que  $B_{\mathcal{T}'+w'}(0, R') = B_{\mathcal{T}''+w''}(0, R')$ . Isto implica que

$$B_{\mathcal{T}+v}(0, R) = B_{\mathcal{T}'+v'}(0, R) = B_{\mathcal{T}''+w''-w'+v'}(0, R)$$

onde  $\|w'' - w' + v'\| < 2\varepsilon'' + \|v'\| = \varepsilon'$ . Tomando  $r < \min\{\varepsilon'', \frac{1}{R'}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ , temos que  $B_d(\mathcal{T}', r) \subset U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}') \subset U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T})$ .  $\square$

Máis notoria é a seguinte propiedade:

**Teorema 1.2.20.** *Se o conxunto de prototeselas  $\mathcal{P}$  é finito, entón  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  é compacto.*

**Proba.** Imos comprobar que  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  é secuencialmente compacto empregando un argumento diagonal clásico. Sexa  $\{\mathcal{T}_n\}$  unha sucesión en  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$ . Fixemos un número  $\delta > \max\{\delta(\mathbb{P}) \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\}$  e observemos que a bóla  $B(0, \delta)$  só contén un número finito de patróns, isto é, de motivos agás translación. Logo  $\{\mathcal{T}_n\}$  contén unha subsucesión  $\{\mathcal{T}_{n,1}\}$  tal que as bólas  $B_{\mathcal{T}_{n,1}}(0, \delta)$  conteñen algún trasladado dun mesmo motivo  $M_1$ . É dicir, para cada  $\mathcal{T}_{n,1}$  hai un vector  $v_n$  con  $\|v_n\| < \delta$  tal que a bóla  $B_{\mathcal{T}_{n,1}}(0, \delta)$  contén ao motivo  $M_1 + v_n$  e polo tanto a imaxe pola translación  $v_n$  dunha mesma bóla  $B_{M_1}(0, \varepsilon)$  para algún  $\varepsilon > 0$ . Ademais, por compacidade da bóla  $B(0, \delta)$ , a sucesión dos  $v_n$  converge a un vector  $v$ . Por recorrencia, obtemos unha subsucesión  $\{\mathcal{T}_{n,m}\}$  de  $\{\mathcal{T}_{n,m-1}\}$  tal que as bólas  $B_{\mathcal{T}_{n,m}}(0, m\delta)$  conteñen aos trasladados  $M_m + v_n$  dun mesmo motivo  $M_m$  e polo tanto as imaxes polas translacións  $v_n$  dunha mesma bóla  $B_{M_m}(0, \varepsilon_m)$ , onde  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \varepsilon_m = +\infty$ . Construimos así unha sucesión exhaustiva de motivos

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{m-1} \subset M_m \subset \cdots \subset \bigcup_{m \geq 1} M_m = \mathbb{R}^p$$

que define un mosaico  $\mathcal{T}$  de  $\mathbb{R}^p$ . Agora a subsucesión  $\{\mathcal{T}_{m,m}\}$  de  $\{\mathcal{T}_n\}$  converge a  $\mathcal{T} + v$ , xa que por construción  $R(\mathcal{T}_{m,m} + v - v_m, \mathcal{T} + v) \geq \varepsilon_m$  e  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|v - v_m\| = 0$ , para todo  $m \geq 1$ .  $\square$

Na literatura sobre mosaicos, adoita afirmarse que a envoltura dun mosaico cun número finito de patróns locais é compacta. Agora ben, segundo probamos en § 1.2.1, para que un mosaico con esa propiedade sexa necesariamente localmente finito é preciso engadir a hipótese de que sexa lado a lado.

## 1.2.4 A laminación do espazo de Gromov-Hausdorff

O grupo de translacións  $\mathbb{R}^p$  actúa de forma natural como grupo de transformacións de  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$ . Por definición, a acción natural

$$(v, \mathcal{T}) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{T}(\mathcal{P}) \longmapsto \mathcal{T} + v \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$$

é continua. Ademais, se o conxunto de prototeselas  $\mathcal{P}$  é finito, entón a acción é *localmente libre*, é dicir, calquera grupo de isotropía  $Iso(\mathcal{T}) = \{v \in \mathbb{R}^p \mid \mathcal{T} + v = \mathcal{T}\}$

é discreto. Isto implica que a acción define unha foliación de  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  de maneira que as follas son as órbitas da acción.

Polo seu interese, imos probar directamente a existencia dunha estrutura foliada sobre  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  no caso de mosaicos de  $\mathbb{R}^p$ . Para iso, comezamos construíndo o que será unha transversal completa. Como xa dixemos, un conxunto de puntos base  $D$  das prototeselas de  $\mathcal{P}$  determina un conxunto de puntos base  $D_{\mathcal{T}} = \{x_{\mathbb{P}} \mid \mathbb{P} \in \mathcal{T}\}$  para calquera mosaico  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$ .

**Definición 1.2.21.** Fixado un conxunto  $D$  de puntos base das prototeselas de  $\mathcal{P}$ , chamaremos *transversal canónica* ao conxunto  $T = T(D)$  formado por todos os mosaicos  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$  tales que  $0 \in D_{\mathcal{T}}$ .

**Proposición 1.2.22.** *Se o conxunto de prototeselas  $\mathcal{P}$  é finito,  $T$  é un subespazo compacto e totalmente disconexo de  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$ .*

**Proba.** Para probar que  $T$  é un subespazo compacto, procédese coma no caso de  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$ . Para amosar que é totalmente disconexo, basta comprobar que a topoloxía inducida está definida por unha ultramétrica. Ante todo, é sinxelo mostrar que a expresión:

$$d_T(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = e^{-R(\mathcal{T}, \mathcal{T}')}$$

define unha ultramétrica sobre  $T$ . O seguinte é verificar que a topoloxía inducida sobre  $T$  pola topoloxía de  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  está xerada polas bólas métricas

$$B_{d_T}(\mathcal{T}, e^{-R}) = \{\mathcal{T}' \in T \mid d_T(\mathcal{T}, \mathcal{T}') < e^{-R}\} = \{\mathcal{T}' \in T \mid R(\mathcal{T}, \mathcal{T}') > R\}.$$

Para probar que calquera aberto básico  $U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) \cap T$  é un aberto da topoloxía definida por  $d_T$ , consideramos  $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}) \cap T$  e tomamos  $\varepsilon''$  y  $R'$  como na proposición 1.2.19. Deste xeito:

$$\mathcal{T}' \in B_{d_T}(\mathcal{T}', e^{-R'}) \subset U_{\varepsilon'', \varepsilon'', R'}(\mathcal{T}') \subset U_{\varepsilon, \varepsilon', R}(\mathcal{T}).$$

Reciprocamente,  $B_{d_T}(\mathcal{T}, e^{-R}) = U_{\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, R}(\mathcal{T}) \cap T$ , sendo  $r > 0$  unha constante tal que toda bóla con ese radio contén ao sumo un punto do conxunto de Delone  $D_{\mathcal{T}}$ .  $\square$

**Teorema 1.2.23.** *A acción do grupo de translacións  $\mathbb{R}^p$  induce unha estrutura de laminación sobre  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$ .*

**Proba.** A idea é simple, xa que a topoloxía de Gromov-Hausdorff fai precisamente que os interiores das teselas se apilen en abertos foliados en produto. De maneira explícita, comecemos observando que a topoloxía de  $T$  está xerada polos conxuntos

abertos e pechados  $B_M$  formados polos mosaicos  $\mathcal{T}$  que conteñen a un determinado motivo  $M$  arredor da orixe. Para cada prototesela  $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ , a aplicación

$$\varphi : (v, \mathcal{T}') \in \mathbb{P} \times B_{\mathbb{P}} \longmapsto \mathcal{T}' + v \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$$

é unha identificación sobre a súa imaxe. Agora ben, a súa restrición a  $\overset{\circ}{\mathbb{P}} \times B_{\mathbb{P}}$  é inxectiva e define un homeomorfismo

$$\varphi : \overset{\circ}{\mathbb{P}} \times B_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{T}(\mathcal{P})$$

sobre a súa imaxe, un aberto distinguido de  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$ . Do mesmo xeito, para un punto que pertenza á intersección de dúas ou máis teselas, se chamamos  $M$  ao motivo obtido unindo todas estas teselas, a aplicación

$$\varphi : (v, \mathcal{T}') \in M \times B_M \longmapsto \mathcal{T}' + v \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$$

é unha identificación sobre a súa imaxe. Neste caso, non basta con substituír  $M$  polo seu interior para facela inxectiva. Non obstante, sabemos que a isotropía  $Iso(\mathcal{T})$  de calquera mosaico  $\mathcal{T}$  é discreta de maneira uniforme, é dicir, existe  $r > 0$  tal que calquera mosaico  $\mathcal{T}$  verifica  $\mathcal{T} + v \neq \mathcal{T}$  se  $0 < \|v\| < r$ . Agora, se  $x$  pertence á intersección de dúas ou máis teselas, podemos substituír  $T$  por unha nova transversal  $T_x$  para que  $x$  pertenza ao conxunto de Delone dalgún elemento de  $T_x$ . Denotemos  $B_M^x$  ao subconxunto aberto e pechado de  $T_x$  determinado por  $M$ . Se ademais substituímos  $M$  por  $B(0, r)$ , entón a aplicación

$$\varphi : (v, \mathcal{T}') \in B(0, r) \times B_M^x \longmapsto \mathcal{T}' + v \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$$

é un homeomorfismo sobre un aberto distinguido de  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$ . Por último, cada cambio de carta está dado por unha translación.  $\square$

### 1.2.5 Dinámica transversa

Explicitamos agora no caso da *laminación de Gromov-Hausdorff* a descripción xeral da dinámica transversa dunha laminación feita en § 1.1.5 e § 1.1.7:

A acción natural de  $\mathbb{R}^p$  induce sobre a transversal canónica  $T$  unha relación de equivalencia medible discreta  $\mathcal{R}$ , que como adoita ser habitual identificaremos co seu grafo  $\mathcal{R} = \{(\mathcal{T}, \mathcal{T} - v) \in T \times T \mid v \in D_{\mathcal{T}}\}$ . En efecto, as clases de equivalencia son numerables, pois cada conxunto de Delone  $D_{\mathcal{T}}$  é numerable. Por outra banda,  $T$  é a unión dun número finito de abertos-pechados  $B_{d_T}(\mathcal{T}, e^{-R})$  para  $R > 0$  calquera. Se tomamos

$$R > 2 \max\{\delta(\mathbb{P}) \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}\}$$



onde  $\delta(\mathbb{P})$  é o diámetro da prototesela  $\mathbb{P}$ , entón cada  $v \in B_{\mathcal{T}}(0, R) \cap D_{\mathcal{T}}$  define un homeomorfismo local

$$\mathcal{T}' \in B_{d_T}(\mathcal{T}, e^{-R}) \mapsto \mathcal{T}' - v \in T$$

O seu grafo é un subconxunto pechado de  $T \times T$  contido en  $\mathcal{R}$ . Polo tanto,  $\mathcal{R}$  é un boreliano de  $T \times T$  en tanto que é unión de grafos destas transformacións parciais e das súas composicións.

De feito, cada elemento  $v$  pertencente a un conxunto  $D_{\mathcal{T}}$  dun mosaico  $\mathcal{T}$ , define unha translación  $\tau_v : \mathcal{T} \in T \mapsto \mathcal{T} - v \in T$  sobre un aberto-pechado  $D_v = \{\mathcal{T} \in T \mid v \in D_{\mathcal{T}}\}$  de  $T$ . Os grafos

$$O(U, v) = \{ (\mathcal{T}, \mathcal{T} - v) \in \mathcal{R} \mid \mathcal{T} \in U \cap D_v \}$$

das translacións  $\tau_v$  restrinxidas a abertos  $U$  de  $T$  xeran unha topoloxía sobre  $\mathcal{R}$ , máis fina que a inducida pola topoloxía produto sobre  $T \times T$ , que fai de  $\mathcal{R}$  un espazo metrizable, separable e localmente compacto. As translacións  $\tau_v$  asociadas aos xeradores  $v$  dos conxuntos de Delone  $D_{\mathcal{T}}$  xeran de feito o pseudogrupe de holonomía de  $\mathcal{F}$  reducido a  $T$ .

**Proposición 1.2.24.**  $\mathcal{R}$  é unha relación de equivalencia étale.

**Proba.** Para todo aberto  $U$  de  $T$ , o conxunto

$$\beta^{-1}(U) = \{ (\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in \mathcal{R} \mid \mathcal{T} \in U \} = \bigcup_{v \in D_{\mathcal{T}}, \mathcal{T} \in U} O(U, v)$$

é a unión dos abertos  $O(U, v)$  onde  $v \in D_{\mathcal{T}}$  con  $\mathcal{T} \in U$ . Polo tanto,  $\beta^{-1}(U)$  é aberto en  $\mathcal{R}$  e a proxección  $\beta$  é continua. Por outra banda, a inversión  $\iota$  é un homeomorfismo, pois  $\iota^{-1}(O(U, v)) = \{ (\mathcal{T} - v, \mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \in U \} = O(U - v, -v)$  para todo aberto  $U$  de  $T$  e todo elemento  $v$  dun conxunto de Delone de  $D_{\mathcal{T}}$ . A proxección  $\alpha = \iota \circ \beta$  é entón continua. A continuidade de  $\mu : \mathcal{R} * \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  séguese da continuidade da aplicación  $(\beta, \alpha) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ . Por último, para todo par  $(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in \mathcal{R}$ , existe  $v \in D_{\mathcal{T}}$  tal que  $\mathcal{T}' = \mathcal{T} - v$ , e daquela  $(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in O(U, v)$  se  $\mathcal{T} \in U$ . A proxección  $\beta$  envía homeomorficamente o aberto básico  $O(U, v)$  sobre o aberto  $U$ .  $\square$

Analogamente, o grupoide de holonomía de  $\mathcal{F}$  reducido a  $T$  pode expresarse neste caso coma o conxunto

$$\mathcal{H} = \{ (\mathcal{T}, v, \mathcal{T}') \mid \mathcal{T}, \mathcal{T}' \in T, v \in D_{\mathcal{T}}, \mathcal{T}' = \mathcal{T} - v \}$$

dotado da estrutura de grupoide seguinte:

- i) a inclusión  $\varepsilon : T \rightarrow \mathcal{H}$  dada por  $\varepsilon(\mathcal{T}) = (\mathcal{T}, 0, \mathcal{T})$ ;
- ii) as proxeccións  $\alpha, \beta : \mathcal{H} \rightarrow T$  dadas por  $\alpha(\mathcal{T}, v, \mathcal{T}') = \mathcal{T}'$  e  $\beta(\mathcal{T}, v, \mathcal{T}') = \mathcal{T}$ ;
- iii) o conxunto das parellas *compoñibles*

$$\mathcal{H} * \mathcal{H} = \{ ((\mathcal{T}_1, v_1, \mathcal{T}'_1), (\mathcal{T}_2, v_2, \mathcal{T}'_2)) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mid \mathcal{T}'_1 = \mathcal{T}_2 \}$$

e a multiplicación parcial  $\mu : \mathcal{H} * \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , dada por:

$$\mu((\mathcal{T}_1, v_1, \mathcal{T}'_1), (\mathcal{T}_2, v_2, \mathcal{T}'_2)) = (\mathcal{T}_1, v_1 + v_2, \mathcal{T}'_2);$$

- iv) a inversión  $\iota : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dada por  $\iota(\mathcal{T}, v, \mathcal{T}') = (\mathcal{T}', -v, \mathcal{T})$ .

Tamén está dotado da topoloxía xerada polos abertos básicos

$$\mathcal{O}(U, v, U') = \{ (\mathcal{T}, v, \mathcal{T}') \in \mathcal{H} \mid (\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in U \times U', \mathcal{T}' = \mathcal{T} - v \},$$

onde  $U$  e  $U'$  son abertos de  $T$  e  $v$  pertence en cada caso ao conxunto base  $D_{\mathcal{T}}$  de  $\mathcal{T}$ . Cada un destes abertos é o grafo da translación  $\tau_v$  na que o dominio e o rango son restricións de  $U$  e  $U'$  respectivamente. Obtense así un isomorfismo entre o grupoide de holonomía  $\mathcal{H}$  e o grupoide dos xermes de  $\Gamma$ .

### 1.2.6 Mosaicos aperiódicos e follas sen holonomía

Interesémonos agora pola caracterización dos subconxuntos saturados sen holonomía:

**Definición 1.2.25.** Un mosaico  $\mathcal{T}$  dise:

- i) *periódico* se existen  $p$  vectores linealmente independentes  $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^p$  tales que  $\mathcal{T} + v_1 = \dots = \mathcal{T} + v_p = \mathcal{T}$ ;
- ii) *aperiódico* se  $\mathcal{T} + v \neq \mathcal{T}$  para todo  $v \in \mathbb{R}^p$  non nulo.

Evidentemente hai mosaicos que non son nin periódicos nin aperiódicos. Dende o punto de vista do tipo de follas que definen, resulta obvio que a órbita dun mosaico periódico é compacta, mentres que a dun aperiódico ten holonomía trivial. Os mosaicos que non son nin periódicos nin aperiódicos dan lugar a follas non compactas con holonomía non trivial. Como o conxunto das follas con holonomía trivial é un  $G_{\delta}$  denso, os mosaicos aperiódicos forman un subconxunto residual de  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$ .

Por outra banda, convén observar que as follas compactas poden ser illadas ou non. Consideremos por exemplo o conxunto  $\mathcal{P}$  formado polas tres prototeselas da figura 1.11.

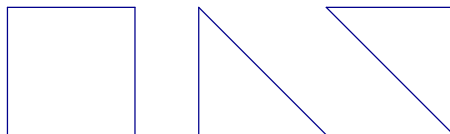


Figura 1.11

Sexa  $\mathcal{T}$  o mosaico periódico por cadrados e  $\mathcal{T}_n$  o mosaico obtido substituíndo cada cadrado pola unión dos dous triángulos fóra dun bloque de lado  $n$ . É evidente que a sucesión de mosaicos  $\mathcal{T}_n$  converge ao mosaico  $\mathcal{T}$ , e polo tanto  $\mathcal{T}$  é un punto de acumulación de calquera transversal  $T$  determinada pola elección dun punto base en cada prototesela. Mais se modificamos os tres lados dun dos triángulos con lingüetas e os do outro coas rañuras complementarias, obtemos un novo conxunto de tres prototeselas  $\mathcal{P}'$ , e agora  $\mathcal{T}$  é illado en calquera transversal  $T'$  (pois neste caso  $B_{d_{T'}}(\mathcal{T}, e^{-R}) = \mathcal{T}, \forall R \geq 1$ ).

En calquera caso, a periodicidade é unha condición necesaria para que o mosaico sexa illado:

**Lema 1.2.26.** *Calquera mosaico illado en  $T$  é periódico.*

**Proba.** Se  $\mathcal{T}$  é illado en  $T$ , entón  $L_{\mathcal{T}} \cap T$  é unión de mosaicos illados, polo que coincide coa súa clausura. Deste xeito  $L_{\mathcal{T}}$  ten que ser compacta, e para isto  $\mathcal{T}$  debe ser periódico.  $\square$

### 1.2.7 Envoltura dun mosaico repetitivo e aperiódico

A laminación de Gromov-Hausdorff  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  e a súa transversal completa  $T$  poden ser extremadamente grandes. Como é habitual, cómpre logo caracterizar os seus subconxuntos minimais. Lembremos que un subconxunto pechado e saturado dise minimal se todas as follas que contén son densas.

**Definición 1.2.27.** Dado un mosaico  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$ , chámase *envoltura de  $\mathcal{T}$*  á clausura  $\mathbb{X} = \overline{L_{\mathcal{T}}}$  da súa folla  $L_{\mathcal{T}} = \{\mathcal{T} - v \mid v \in \mathbb{R}^p\}$ .

**Definición 1.2.28.** Un mosaico  $\mathcal{T}$  dise:

i) *repetitivo* [9] (ou posúe a *propiedade de isomorfismo local* [65]) se para cada motivo  $M$ , existe unha constante  $R = R(M) > 0$  tal que calquera bóla no mosaico de radio  $R$  contén unha copia por translación de  $M$ , i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \exists v \in \mathbb{R}^p : M + v \subset B(x, R);$$

ii) *uniformemente repetitivo* se dado  $r > 0$ , existe unha constante  $R = R(r) > 0$  tal que calquera bóla de radio  $R$  contén unha copia por translación de calquera motivo  $M$  de diámetro  $< r$ .

**Teorema 1.2.29.** *Para calquera mosaico  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$ , as seguintes condicións son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{T}$  é repetitivo;
- ii)  $\mathcal{T}$  é uniformemente repetitivo;
- iii)  $\mathbb{X}$  é minimal.

**Proba.** Basta probar  $(i) \Leftrightarrow (iii)$  e  $(iii) \Rightarrow (ii)$ , pois  $(ii) \Rightarrow (i)$  é evidente:

$(i) \Rightarrow (iii)$  Debemos probar que a órbita de cada mosaico  $\mathcal{T}' \in \mathbb{X}$  é densa en  $\mathbb{X}$ , é dicir,  $\mathbb{X}' = \overline{L_{\mathcal{T}'}} = \mathbb{X}$ . Como  $\mathbb{X}' \subset \mathbb{X}$ , chega con probar  $\mathcal{T} \in \mathbb{X}'$  e polo tanto  $\mathbb{X} \subset \mathbb{X}'$ . Fixemos  $r > 0$  e tomemos un motivo  $M$  que conteña á bóla  $B_{\mathcal{T}}(0, r)$ . Por hipótese, existe  $R = R(M) \geq r > 0$  tal que para cada punto  $x \in \mathbb{R}^p$  existe un vector  $v \in \mathbb{R}^p$  tal que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}}(v, r) \subset M + v \subset B_{\mathcal{T}}(x, R).$$

Por outra banda, como  $\mathcal{T}' \subset \mathbb{X}$ , existe  $x \in \mathbb{R}^p$  tal que:

$$B_{\mathcal{T}'}(0, R) = B_{\mathcal{T}'-x}(0, R) = B_{\mathcal{T}}(x, R) - x.$$

En particular:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v - x = B_{\mathcal{T}}(v, r) - x \subset B_{\mathcal{T}}(x, R) - x = B_{\mathcal{T}'-x}(0, R) = B_{\mathcal{T}'}(0, R),$$

de onde se deduce:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v - x = B_{\mathcal{T}}(v, r) - x = B_{\mathcal{T}'-x}(v - x, r) = B_{\mathcal{T}'}(v - x, r).$$

Denotando  $w = v - x$ , podemos escribir:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) = B_{\mathcal{T}'}(w, r) - w = B_{\mathcal{T}'-w}(0, r).$$

Atopamos logo un mosaico  $\mathcal{T}' - w \in L_{\mathcal{T}'}$  tal que  $d(\mathcal{T}, \mathcal{T}' - w) \leq e^{-r}$ . Isto proba que  $\mathcal{T} \in \mathbb{X}' = \overline{L_{\mathcal{T}'}}$ .

$(iii) \Rightarrow (i)$  Fixado  $r > 0$ , definimos o conxunto

$$U_S = \{\mathcal{T}' \in \mathbb{X} \mid \exists v \in \mathbb{R}^p : B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}'}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S)\}$$

para cada  $S \geq r$ . Estes conxuntos forman unha cobertura aberta de  $\mathbb{X}$ . Antes de probar que os  $U_S$  son abertos, observemos que os conxuntos

$$U_{\varepsilon, R}(\mathcal{T}) = \{\mathcal{T}' \in \mathbb{T}(\mathcal{P}) \mid \exists v \in \mathbb{R}^p : \|v'\| < \varepsilon, R(\mathcal{T}, \mathcal{T}' + v) > R\}$$

forman unha base de veciñanzas de  $\mathcal{T}$ . Basta aplicar argumentos similares aos empregados en §1.2.3. Agora, se  $\mathcal{T}' \in U_S$ , existe  $v \in \mathbb{R}^p$  tal que

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}'}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, r + \|v\|) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S).$$

Tomando  $S' = r + \|v\|$  e  $\varepsilon \leq S - S'$ , temos que  $\mathcal{T}' \in U_{\varepsilon, S'}(\mathcal{T}')$  e  $\mathcal{T}'' \in U_{\varepsilon, S'}(\mathcal{T}')$ , existe  $v'' \in \mathbb{R}^p$  con  $\|v''\| < \varepsilon$  tal que

$$B_{\mathcal{T}'}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S') = B_{\mathcal{T}''+v''}(0, S').$$

Logo:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}'}(v, r) = B_{\mathcal{T}''+v''}(v, r) = B_{\mathcal{T}''}(v - v'', r) + v'' \subset B_{\mathcal{T}''+v''}(0, S')$$

e

$$B_{\mathcal{T}''}(v - v'', r) \subset B_{\mathcal{T}''+v''}(0, S') - v'' = B_{\mathcal{T}''}(-v'', S').$$

Así, se  $w = v - v''$ , temos que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + w = B_{\mathcal{T}''}(w, r) \subset B_{\mathcal{T}''}(-v'', S') \subset B_{\mathcal{T}''}(0, S'),$$

e deste xeito  $\mathcal{T}'' \in U_S$ . Por outra franxa, calquera mosaico  $\mathcal{T}'$  de  $\mathbb{X}$  pertence a algún aberto  $U_S$ . Por hipótese,  $\mathbb{X}$  é minimal, logo  $\mathcal{T} \in \mathbb{X}'$ . Polo tanto, para cada  $r > 0$ , existe  $x \in \mathbb{R}^p$  tal que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + x = B_{\mathcal{T}'}(x, r) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S),$$

para  $S = r + \|x\|$ , e temos que  $\mathcal{T}' \in U_S$ .

Observemos que a cobertura  $\{U_S\}_{S \geq r}$  é monótona crecente, así pois, por compacidade, existe  $R \geq r$  tal que  $U_R = \mathbb{X}$ . Para cada  $x \in \mathbb{R}^p$ , existe entón  $v \in \mathbb{R}^p$  tal que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v = B_{\mathcal{T}-x}(v, r) \subset B_{\mathcal{T}-x}(0, R).$$

Mediante a translación por  $x$  deducimos:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + v + x = B_{\mathcal{T}-x}(v, r) + x \subset B_{\mathcal{T}-x}(0, R) + x = B_{\mathcal{T}}(x, R).$$

O vector  $w = v + x \in \mathbb{R}^p$  verifica logo:

$$B_{\mathcal{T}}(0, r) + w \subset B_{\mathcal{T}}(x, R).$$

Como calquera motivo  $M$  está contido nunha bóla centrada na orixe de radio  $r > 0$  suficientemente grande, probamos que  $\mathcal{T}$  é repetitivo.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) Na proba de (iii)  $\Rightarrow$  (i) atopamos unha constante  $R = R(M) > 0$  que depende de cada motivo  $M$ . Intésanos agora unha constante válida para calquera motivo  $M$  de diámetro  $< r$ . Dados  $r > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^p$ , para cada  $S \geq \frac{r}{2}$  definimos o conxunto

$$U_{S,x} = \{\mathcal{T}' \in \mathbb{X} \mid \exists v \in \mathbb{R}^p : B_{\mathcal{T}}(x, \frac{r}{2}) + v = B_{\mathcal{T}'}(x + v, \frac{r}{2}) \subset B_{\mathcal{T}'}(0, S)\}.$$

Coma antes, deducimos que existe  $R = R(x)$  tal que para todo  $y \in \mathbb{R}^p$ , existe  $v \in \mathbb{R}^p$  verificando:

$$B_{\mathcal{T}}(x, \frac{r}{2}) + v \subset B_{\mathcal{T}}(y, R).$$

O mesmo ocorre para cada motivo  $M$  contido en  $B_{\mathcal{T}}(x, \frac{r}{2})$ . Agora ben, como  $\mathcal{T}$  é de tipo finito, sabemos que só hai un número finito de motivos de diámetro  $< r$  agás translación. Fixemos representantes de tales clases por translación  $M_1, \dots, M_n$  contidos en bólas de radio  $\frac{r}{2}$  centradas en puntos  $x_1, \dots, x_n$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  e cada punto  $y \in \mathbb{R}^p$ , existe  $v_i \in \mathbb{R}^p$  tal que  $M_i + v_i \subset B_{\mathcal{T}}(y, R(x_i))$ . Como calquera motivo  $M$  de diámetro  $< r$  pode obterse por translación a partir dalgún motivo  $M_i$ , tomando  $R = \max\{R(x_1), \dots, R(x_n)\}$ , temos:

$$M + v_i - v = M_i + v_i \subset B_{\mathcal{T}}(y, R(x_i)) \subset B_{\mathcal{T}}(y, R)$$

onde  $v \in \mathbb{R}^p$  é o vector tal que  $M = M_i + v$ . □

**Observación 1.2.30.** O enunciado da equivalencia (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) pode verse en [9] e [65]. Un resultado similar pode verse en [5], [13] e [50] nun contexto algo diferente.

Grazas á proposición 1.2.22, ó lema 1.2.26 e á proposición seguinte, se o conxunto de prototeselas  $\mathcal{P}$  non permite teselar o plano de maneira periódica, calquera transversal da laminación de Gromov-Hausdorff  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  é homeomorfa ao conxunto de Cantor. Dirase que a laminación é *transversalmente Cantor*.

**Proposición 1.2.31.** *A envoltura dun mosaico repetitivo e aperiódico só contén mosaicos aperiódicos.*

**Proba.** Razoemos por redución ao absurdo supoñendo que a envoltura  $\mathbb{X}$  dun mosaico aperiódico e repetitivo  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$  contén un mosaico  $\mathcal{T}'$  tal que  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}' + v$  para algún  $v \in \mathbb{R}^p$  non nulo. Como  $\mathbb{X}$  é minimal, entón  $\mathcal{T}' \in \mathbb{X}'$ . Logo, para cada  $R > \|v\| > 0$ , existe  $x \in \mathbb{R}^p$  tal que:

$$B_{\mathcal{T}}(0, R) = B_{\mathcal{T}'-x}(0, R) = B_{(\mathcal{T}'+v)-x}(0, R).$$

Mais entón:

$$B_{\mathcal{T}+v}(0, R - \|v\|) = B_{(\mathcal{T}+v)-x}(0, R - \|v\|) = B_{\mathcal{T}}(0, R - \|v\|).$$

Polo tanto, en contra do suposto,  $\mathcal{T}$  non sería aperiódico.  $\square$

Combinando isto co teorema 1.2.29, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 1.2.32.** *A envoltura de calquera mosaico repetitivo e aperiódico  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$  é un conxunto minimal, transversalmente Cantor e sen holonomía.*  $\square$

## 1.3 Exemplos

Nos exemplos máis relevantes de conxuntos de mosaicos aperiódicos, o proceso de construción dos mosaicos en cuestión permite describir de maneira directa a súa dinámica medible. Iremos analizar algúns destes exemplos co propósito en mente de obter un resultado xeral que permita describir a dinámica transversa das laminacións definidas por mosaicos.

### 1.3.1 Os mosaicos de Robinson

En [70], R. M. Robinson describiu un interesante conxunto de 6 teselas que forza a aperiodicidade. Trátase basicamente de cadrados con modificacións nos seus lados e esquinas que evitan a periodicidade, véxase a figura 1.12. As dúas primeiras teselas denomínanse *cruces*, respectivamente *con esquinas* e *sen esquinas*, e as restantes *brazos*.

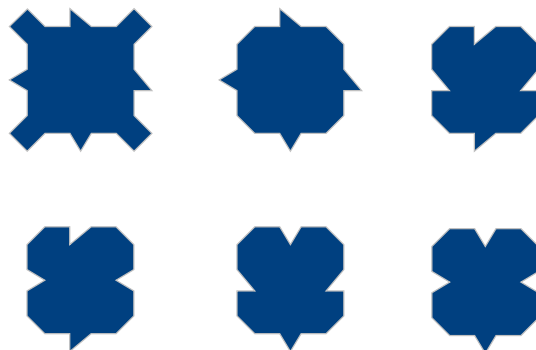


Figura 1.12: As seis teselas de Robinson

Para describir os *mosaicos de Robinson*, todos os que se constrúen a partir deste conxunto de teselas, hai outra representación máis cómoda por cadrados decorados [35, 70], véxase a figura 1.13.

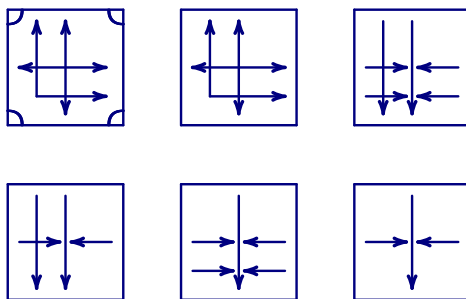
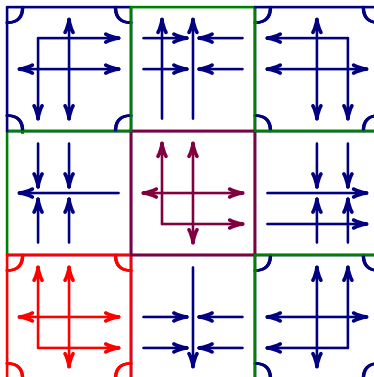


Figura 1.13: Representación por cadrados decorados (nomeados, de arriba cara abaixo e de esquerda a dereita, a, b, c, d, e, f).

Cómpre observar que as teselas dos mosaicos de Robinson poden obterse a partir destas 6 prototeselas por translación, pero tamén mediante xiros de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$  ou por reflexión respecto do eixo de ordenadas. É dicir, estamos falando dun conxunto  $\mathcal{P}$  con 32 clases de teselas salvo translación. Por outra banda, a maioría dos mosaicos de Robinson son repetitivos, pois poden construírse por medio do seguinte proceso (véxase [32]):

- Pártese dun cruce con esquinas, o que aparece na anterior figura ou algunha das súas imaxes polos xiros de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$ .
- Replícase a peza inicial mediante xiros de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$ .
- Engádese un motivo formado por 5 teselas en forma de cruz. Para isto elíxese a peza central, que debe ser un cruce sen esquinas, e as restantes, necesariamente brazos, quedan entón determinadas. Obtense así un bloque de  $3 \times 3$  teselas.



Figura 1.14: Bloque  $3 \times 3$ 

- De xeito análogo, constrúense bloques de lado  $2^{n+1} - 1$  a partir de bloques de lado  $2^n - 1$ .

A elección dos cruces sen esquinas determina a rexión do plano que se tesela. Obtemos un cuadrante se fixamos, salvo un número finito de cruces, as dúas orientacións: dereita ou esquerda e arriba ou abaixo. Se só fixamos unha orientación, cara a esquerda ou a dereita, ou cara arriba ou abaixo, e alternamos a outra unha infinidade de veces, obtemos un semiplano. E o plano completo se non fixamos ningunha orientación, e alternamos polo tanto as catro orientacións unha infinidade de veces. Nos dous primeiros casos tamén é posible teselar todo o plano “pegando” axeitadamente os cuadrantes e semiplanos obtidos cos seus replicados segundo imos indicar a continuación (véxase [32] para máis detalle).

Deste xeito, podemos codificar os mosaicos de Robinson repetitivos identificando cada cruce sen esquinas cunha parella de elementos do conxunto  $\{0, 1\}$ , como na figura 1.15. Cada sucesión  $\alpha = \{\alpha_n\} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  determina unha sucesión de bloques e polo tanto un mosaico de Robinson, agás no caso das sucesións periódicas de período 00, 01, 10, 11, que definen só un cuadrante, e doutras que definen só un semiplano. No primeiro caso, asociámoslle á sucesión  $\alpha$  o mosaico obtido pegando as réplicas do cuadrante mediante unha cruz infinita que ten como tesela central o mesmo cruce sen esquinas que corresponde ao período (véxase a figura 1.16). Por outra banda, se chamamos paridade de 00, 01, 10 e 11 á suma dos seus elementos, as sucesións que determinan só un semiplano son aquelas que conteñen unha infinidade de veces dúas parellas de distinta paridade e só un número finito de parellas coa mesma paridade. Neste caso, asociámoslle á sucesión  $\alpha$  un mosaico obtido pegando o semiplano e a súa réplica por medio dun brazo infinito formado por teselas coa mesma clase salvo isometría que (f) cunha determinada orientación. Se

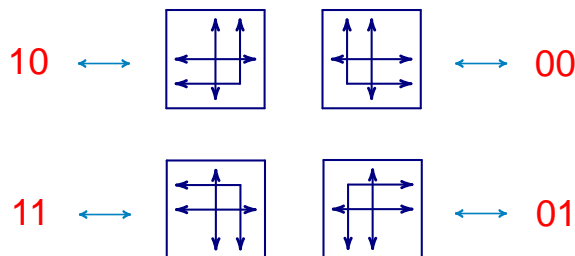


Figura 1.15: Codificación dos cruces

o semiplano codificado é o dereito (resp. o superior) asociámoslle o mosaico obtido pegando cun brazo infinito de teselas coa mesma clase que (f) apuntando cara arriba (resp. cara a dereita), e se é o esquerdo (resp. o inferior) asociámoslle o mosaico obtido pegando con teselas da mesma clase pero apuntando cara abaixo (resp. cara a esquerda); véxase a figura 1.17. Obtemos así unha aplicación inxectiva  $\Phi$  do conxunto  $\mathcal{S} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  no subespazo  $\mathbb{X}$  dos mosaicos de Robinson repetitivos. Como sempre, a elección dun punto base nas seis prototeselas de Robinson determina un conxunto de Delone en calquera dos mosaicos. Nos correspondentes aos elementos de  $\mathcal{S}$ , a orixe está situada no punto base dalgún cruce sen esquinas e pertence ao conxunto de Delone. Se chamamos  $T$  ao conxunto formado por estes mosaicos, temos que calquera elemento de  $\mathbb{X}$  é translación dun elemento de  $T$ , é dicir,  $T$  é unha transversal completa contida na transversal canónica definida polo conxunto de Delone. Temos daquela unha aplicación bixectiva

$$\Phi : \mathcal{S} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{X} \cap T.$$

Estes argumentos mostran a relación (descrita en [70]) entre os mosaicos de Robinson e os enteiros 2-ádicos, e permítenos precisala dende un punto de vista dinámico:

**Definición 1.3.1.** Sexa  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  o espazo das sucesión binarias dotado da topoloxía produto da discreta sobre  $\{0, 1\}$ , xerada polos cilindros

$$C_{\beta_0 \dots \beta_n} = \{\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \alpha_0 = \beta_0, \dots, \alpha_n = \beta_n\}$$

determinados polas sucesións finitas  $\beta_0 \dots \beta_n$ , coa que é un conxunto de Cantor. Dúas sucesións  $\alpha, \beta$  dinse *cofinais* se os seus termos coinciden a partir dun certo índice, é dicir, se existe  $m \geq 0$  tal que  $\alpha_n = \beta_n, \forall n \geq m$ . Coñécese como *máquina de sumar binaria* ao sistema dinámico clásico xerado pola transformación

$$T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

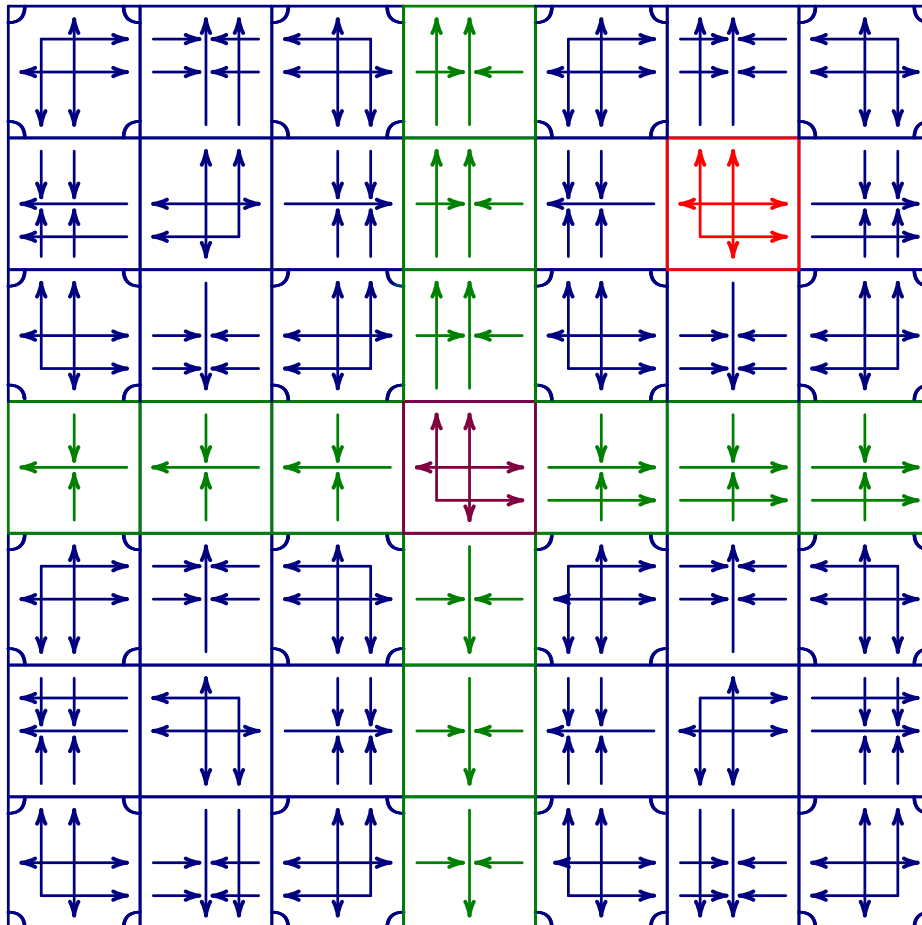


Figura 1.16: Mosaico obtido a partir dun cuadrante replicando e pegando por medio dunha cruz infinita.

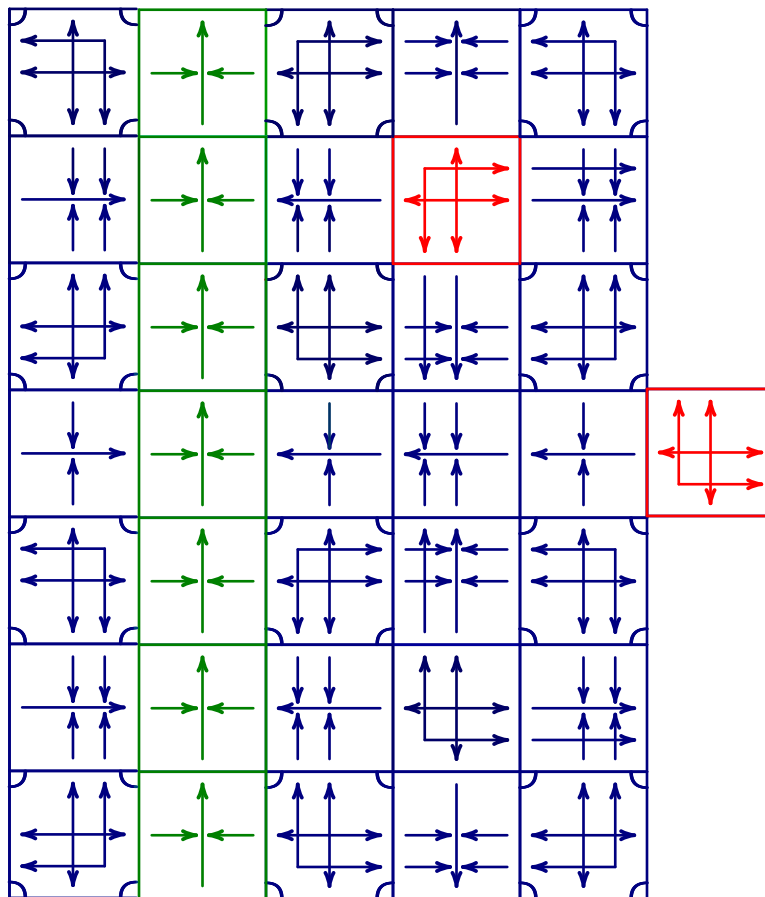


Figura 1.17: Mosaico obtido a partir dun semiplano replicando e pegando por medio dun brazo infinito.

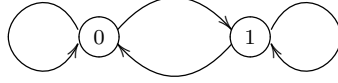


Figura 1.18: Autómata que representa á máquina de sumar binaria.

definida por

$$\begin{cases} T(\alpha)_0 = 1 ; T(\alpha)_n = \alpha_n & \text{se } \alpha_0 = 0 \\ T(\alpha)_0 = \dots = T(\alpha)_{m-1} = 0 , T(\alpha)_m = 1 ; T(\alpha)_n = \alpha_n & \text{se } \alpha_0 = 1 \end{cases},$$

onde  $\sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  é o shift de Bernoulli e  $m = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha_n = 0\}$ . A denominación de máquina de sumar binaria débese a que a transformación  $T$  coincide coa suma de 1

$$S : x \in \mathbb{Z}_2 \mapsto x + 1 \in \mathbb{Z}_2$$

no anel  $\mathbb{Z}_2$  dos enteiros 2-ádicos. A órbita por  $T$  dunha sucesión  $\alpha$  coincide coa súa clase de cofinalidade, agás no caso das clases de cofinalidade de  $000\dots$  e  $111\dots$ , contidas na mesma órbita. En particular, temos dúas relacións medibles discretas sobre  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  que son esencialmente orbitalmente equivalentes.

Nestes termos, satisfaise:

**Lema 1.3.2** ([32]). *Dous mosaicos codificados  $\Phi(\alpha)$  e  $\Phi(\beta)$  dan lugar á mesma órbita se e só se  $\alpha$  e  $\beta$  son cofinais.*

**Lema 1.3.3** ([32]). *A aplicación de codificación  $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{X} \cap T$  é unha bixección boreliana e aberta.*

**Lema 1.3.4** ([32]). *O mosaicos da imaxe de  $\Phi$  construídos sen pegar forman un subconxunto residual de  $\mathbb{X} \cap T$ .*

Podemos enunciar logo a seguinte proposición en termos borelianos (segundo a definición 1.1.20):

**Teorema 1.3.5** ([32]). *A dinámica transversa boreliana da envoltura dun mosaico de Robinson repetitivo está representada por unha máquina de sumar binaria, é dicir, hai unha equivalencia orbital estable entre a suma de 1 nos enteiros 2-ádicos e a relación de equivalencia inducida sobre a transversal completa  $T$ .*

Por outra banda, a relación cofinal  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$  sobre  $\mathcal{S}$  pode dotarse da medida  $\mu_2$  que fai equiprobables todos os cilindros da mesma lonxitude, isto é, a definida por  $\mu_2(C_{\beta_0 \dots \beta_n}) = \frac{1}{2^n}$ . Como as transformacións parciais de  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$  están xeradas polos homeomorfismos asociados a un par de sucesións cofinais que verifican  $\tau(\alpha) = \beta$ , definidos do seguinte xeito

$$\tau(\gamma)_i = \begin{cases} \beta_i & \text{se } i < n \\ \gamma_i & \text{se } i \geq n \end{cases},$$

onde  $n$  é o índice ao partir do cal  $\alpha$  e  $\beta$  coinciden, temos que  $\mu_2$  é invariante por  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$ . De feito,  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$  é *únicamente ergódica*, é dicir,  $\mu_2$  é a única medida de probabilidade invariante. En efecto, de existires outra  $\mu$ , dous cilindros da mesma lonxitude  $C_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}$  e  $C_{\beta_0 \dots \beta_{n-1}}$  deben ter a mesma medida, pois unha destas transformacións parciais leva un noutro. Da descomposición  $\mathcal{S} = \bigsqcup_{\alpha_i \in \{0,1\}} C_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}$  dedúcese entón que  $\mu(C_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}) = \frac{1}{2^n} = \mu_2(C_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}})$ , logo  $\mu = \mu_2$ .

Así mesmo, non é difícil probar o seguinte resultado (véxase [32]):

**Proposición 1.3.6** ([32]). *A relación de equivalencia inducida pola laminación do espazo dos mosaicos de Robinson repetitivos sobre a transversal  $\mathbb{X} \cap T$  é de tipo  $II_1$ , isto é, posúe unha medida de probabilidade invariante  $\mu$ .*

Como consecuencia da construción da aplicación  $\Phi$ , temos entón que:

**Proposición 1.3.7** ([32]). *A aplicación de codificación  $\Phi$  define unha equivalencia orbital estable entre a relación de equivalencia cofinal  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$  sobre o espazo  $\mathcal{S}$  dotado da medida  $\mu_2$  e a relación de equivalencia inducida pola laminación do espazo dos mosaicos de Robinson repetitivos sobre a transversal  $\mathbb{X} \cap T$  dotada da medida  $\mu$ .*

E daquela:

**Teorema 1.3.8** ([32]). *A dinámica transversa medible da envoltura de calquera mosaico de Robinson repetitivo está representada pola suma de 1 nos enteiros 2-ádicos.*

De feito, empregando as propiedades topolóxicas da aplicación de codificación  $\Phi$  podemos comprobar que:

**Corolario 1.3.9** ([32]). *A envoltura de calquera mosaico de Robinson repetitivo é unicamente ergódica.* □

### 1.3.2 Os mosaicos de Penrose por dardos e papaventos

O máis célebre conxunto aperiódico de prototeselas é o que compoñen o dardo e o papaventos de R. Penrose [61], véxase a figura 1.19.

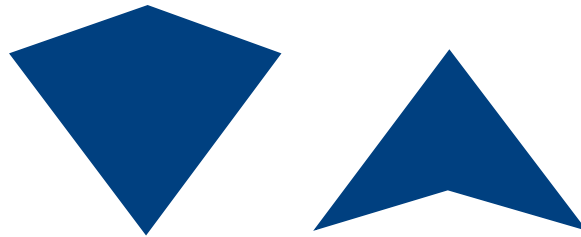


Figura 1.19: O dardo e o papaventos.

Aínda que a literatura sobre os mosaicos de Penrose é abundante, é precisamante unha idea de R. M. Robinson a que permite construílos de maneira explícita e describir a súa dinámica global [35]. Todo mosaico de Penrose por dardos e papaventos correspóndese cun mosaico construído a partir de dúas teselas triangulares, obtidas cortando o dardo e o papavento polos seus eixos de simetría, con certas regras de pegado (que se poden expresar por exemplo coloreando os vértices).

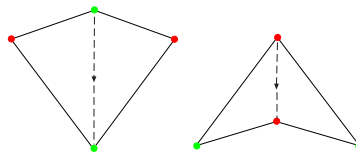


Figura 1.20: Descomposición en teselas triangulares.

Pegando os dous triángulos como se mostra na figura 1.21, obtense un triángulo semellante ao pequeno. Cada mosaico correspóndese así cun mosaico inflado que se constrúe a partir do novo triángulo e do grande (obtido eliminando no mosaico as arestas correspondentes a este pegado). Facendo agora que a nova tesela xogue o papel do triángulo grande, podemos repetir o proceso para obter un novo par de triángulos que definen un novo mosaico inflado, obtido eliminando as arestas correspondentes no mosaico inflado anterior.

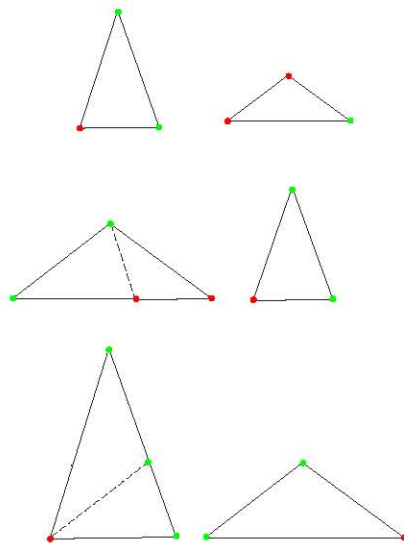
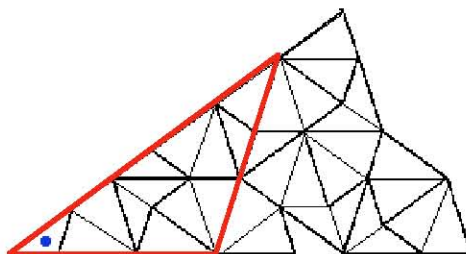


Figura 1.21: Inflación das teselas de Penrose.

Iterando este proceso, describimos un procedemento natural de inflación no que se obtén para cada mosaico  $\mathcal{T}$  unha sucesión  $\{\mathcal{T}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de mosaicos inflados por triángulos grandes e pequenos. Podemos asociar a cada mosaico unha sucesión binaria  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $x_n = 0$  se o triángulo que contén á orixe no mosaico  $\mathcal{T}_n$  é o triángulo grande ou  $x_n = 1$  se é o pequeno. É dicir, o termo  $n$ -ésimo da sucesión indica como está incluída a tesela de  $\mathcal{T}_n$  que contén á orixe na tesela de  $\mathcal{T}_{n+1}$  na que está contida. Como neste proceso recorrente un triángulo pequeno sempre forma parte dun triángulo grande na etapa seguinte, estas sucesións non pode conter dous termos consecutivos iguais a 1.



10001

Figura 1.22: Exemplo dos primeiros pasos da codificación.



Pode ser que algunha destas sucesións non determine un mosaico de todo o plano, senón simplemente dun sector, pero podemos obter un mosaico do plano reflexando e replicando por medio de xiros, véxase a figura 1.23.

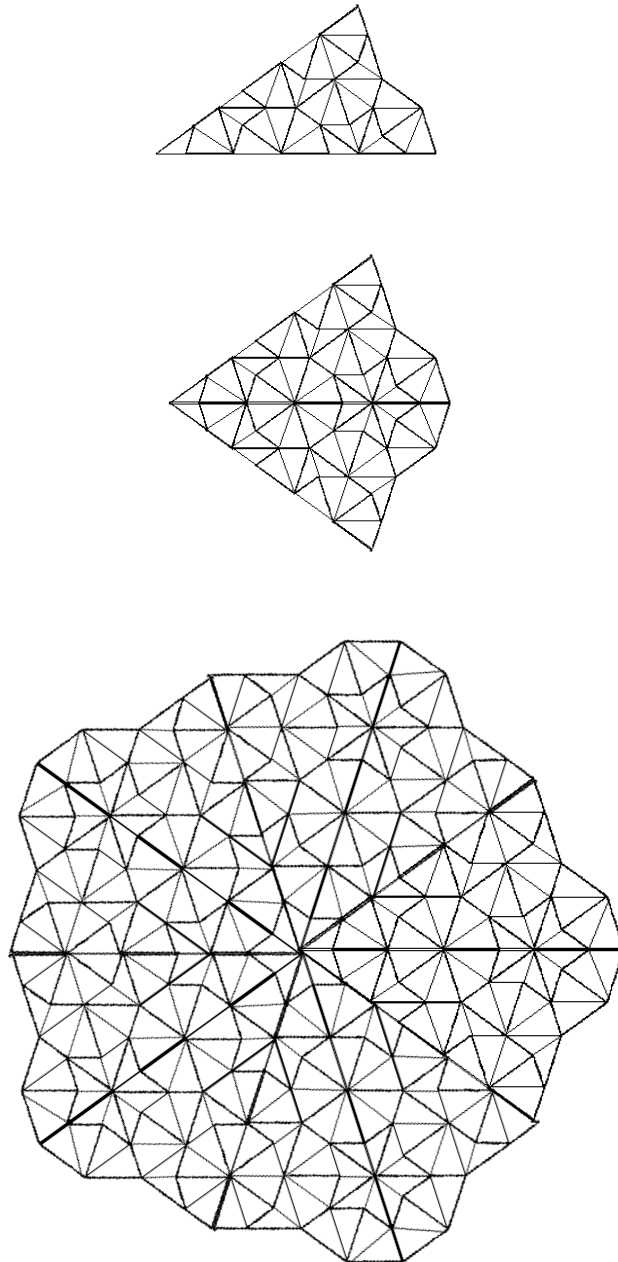


Figura 1.23: Mosaico de Penrose obtido replicando.

Como no caso dos mosaicos de Robinson, os mosaicos construídos replicando forman un conxunto magro de medida nula. Polo tanto, a dinámica medible do espazo foliado dos mosaicos de Penrose por dardos e papaventos está representada pola relación cofinal sobre o espazo  $\mathcal{S}'$  de sucesións binarias  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  que satisfán  $x_n = 1 \Rightarrow x_{n+1} = 0$ , cf.[18, 35].

**Teorema 1.3.10.** *A dinámica transversa da envoltura dun mosaico de Penrose por dardos e papaventos está representada en sentido medible polo autómata de Fibonacci, é dicir, hai unha equivalencia orbital estable entre o espazo de sucesións  $\mathcal{S}'$  e a relación de equivalencia inducida sobre a transversal completa  $T$ .*

Equivalentemente, a dinámica medible da envoltura de calquera mosaico de Penrose está representada polo autómata da figura 1.24.

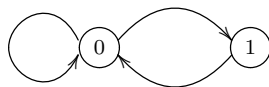


Figura 1.24: Autómata de Fibonacci

### 1.3.3 Os mosaicos de Penrose por poliominós

En [62], R. Penrose describe un conxunto de tres poliominós, pezas compostas por cadrados unidade pegados lado a lado, ideados a partir dun conxunto aperiódico de teselas descrito por R. Ammann (véxase [35], páxina 555), e que constitúen de igual maneira un conxunto aperiódico, véxase a figura 1.25. O seu propósito é mostrar que “*existen modelos de universo completamente deterministas, con regras precisas de evolución, que son imposibles de simular computacionalmente*”, como parte do seu argumento xeral para probar que “*a nosa mentalidade consciente non pode ser completamente entendida en termos de modelos computacionais*”.

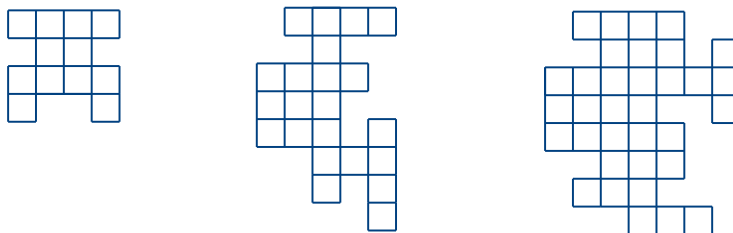


Figura 1.25: Os tres poliominós de Penrose, de clase A, B e C.

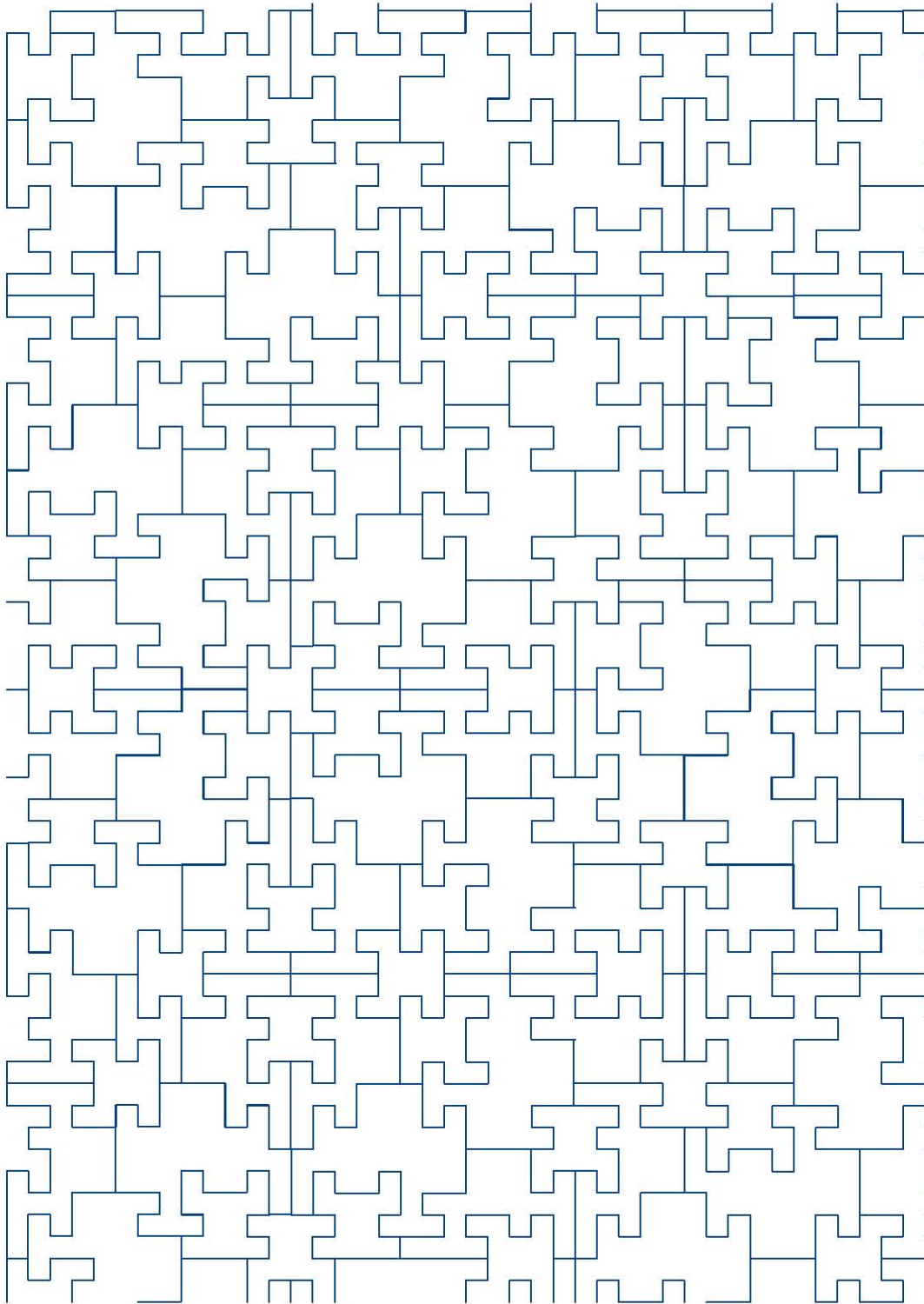


Figura 1.26: Mosaico de Penrose por poliominós.

É preciso aclarar novamante que se falamos de clases salvo translación, o conxunto aperiódico está composto por 20 prototeselas: as da figura 1.25, máis as súas imaxes por unha reflexión e as imaxes polos xiros de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$  de todas elas. Por outra banda, as teselas de clase  $A$  actúan unicamente a modo de “*grampa*”, é dicir, calquera mosaico construído con estas teselas queda determinado pola disposición das teselas de clase  $B$  e  $C$ . Podemos dicir en certo modo que o conxunto de teselas se reduce ás de clase  $B$  e  $C$ .

A forma de combinar os poliomínos de clase  $B$  e  $C$  para teselar o plano dá lugar a un conxunto de teselas infladas, que forman xunto coas de clase  $A$  un conxunto de prototeselas equivalente ao de partida.

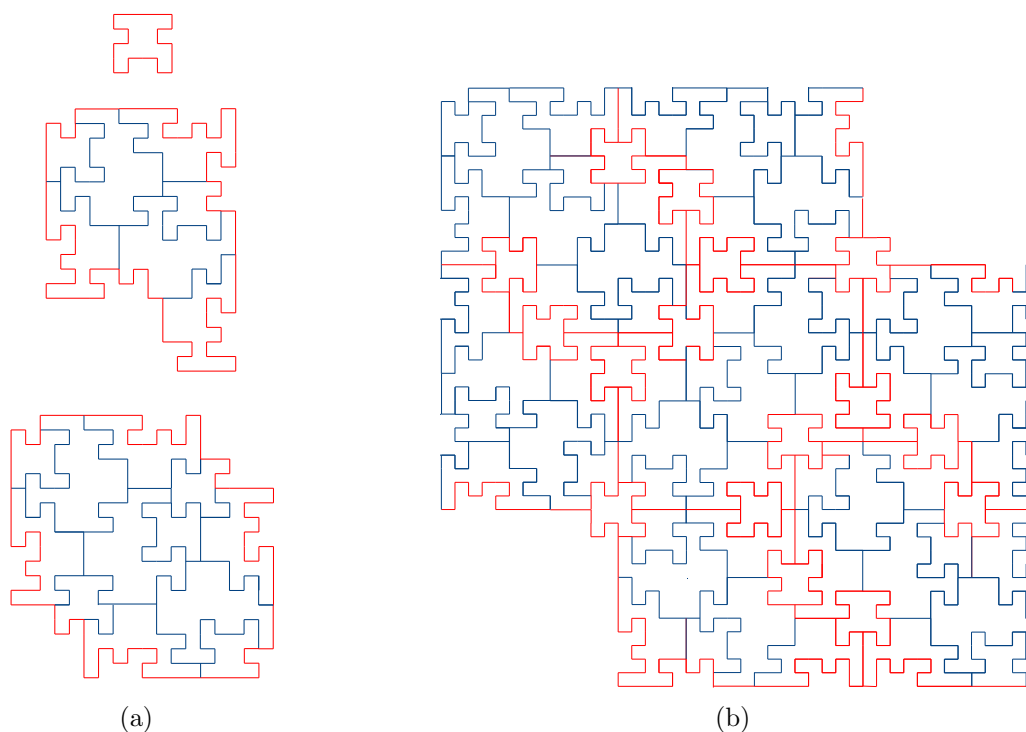


Figura 1.27: (a) Poliomínos inflados; (b) Tesela de clase  $C$  da segunda inflación.

Os poliomínos inflados de clase  $B$  e  $C$  combínanse de xeito recorrente, obténdose novas teselas infladas de clase  $B$  e  $C$  que conteñen ás anteriores e que constitúen novamante coas de clase  $A$  un conxunto de prototeselas equivalente. Iterando este proceso, podemos codificar cada mosaico de Penrose por poliomínos da seguinte maneira:

- En primeiro lugar, asociámoslle un 0 se a tesela que contén á orixe é de clase  $C$ , e un 1 se é de clase  $B$ .
- A continuación, indicamos como está incluída esta tesela na tesela inflada que a contén, segundo o esquema da figura 1.28

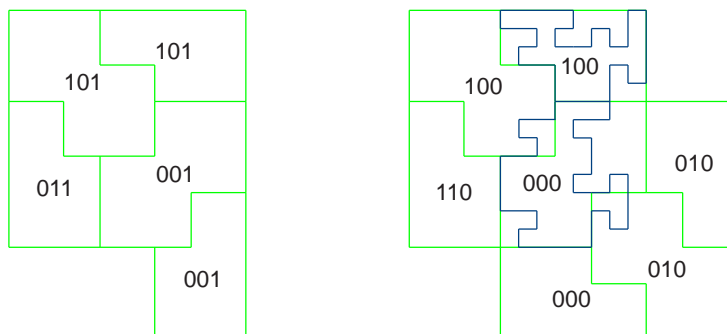


Figura 1.28: Esquema da codificación

Observarase que no caso do esquema de clase  $C$ , non hai ambigüidade posible se tomamos como referencia a orientación da peza central, pois nin os poliomínos inflados nin os de partida presentan simetrías. Por outra banda, a terceira das tres entradas de cada un destes códigos indica se a seguinte tesela é de clase  $B$  ou  $C$ .

- Dado que o proceso é recorrente, o mesmo esquema permite indicar como se inclúe a  $n$ -ésima tesela inflada na  $(n + 1)$ -ésima tesela inflada que a contén.

Coma no caso dos exemplos anteriores, se modificamos un número finito de termos da sucesión, estamos movendo o punto base no mosaico, véxase a figura 1.29. A dinámica medible está así representada pola relación cofinal no espazo  $\mathcal{S}''$  das sucesión binarias coas seguintes restricións:

$$x_{3n} = 1 \Rightarrow x_{3n+1}x_{3n+2}x_{3n+3} \neq 111$$

$$x_{3n} = 0 \Rightarrow x_{3n+1}x_{3n+2}x_{3n+3} \neq \begin{cases} 111 \\ 011 \\ 110 \end{cases}$$

Unha vez máis algunha destas sucesións podería non determinar directamente un mosaico de todo o plano. Por exemplo, a sucesión periódica 0000000000... si o

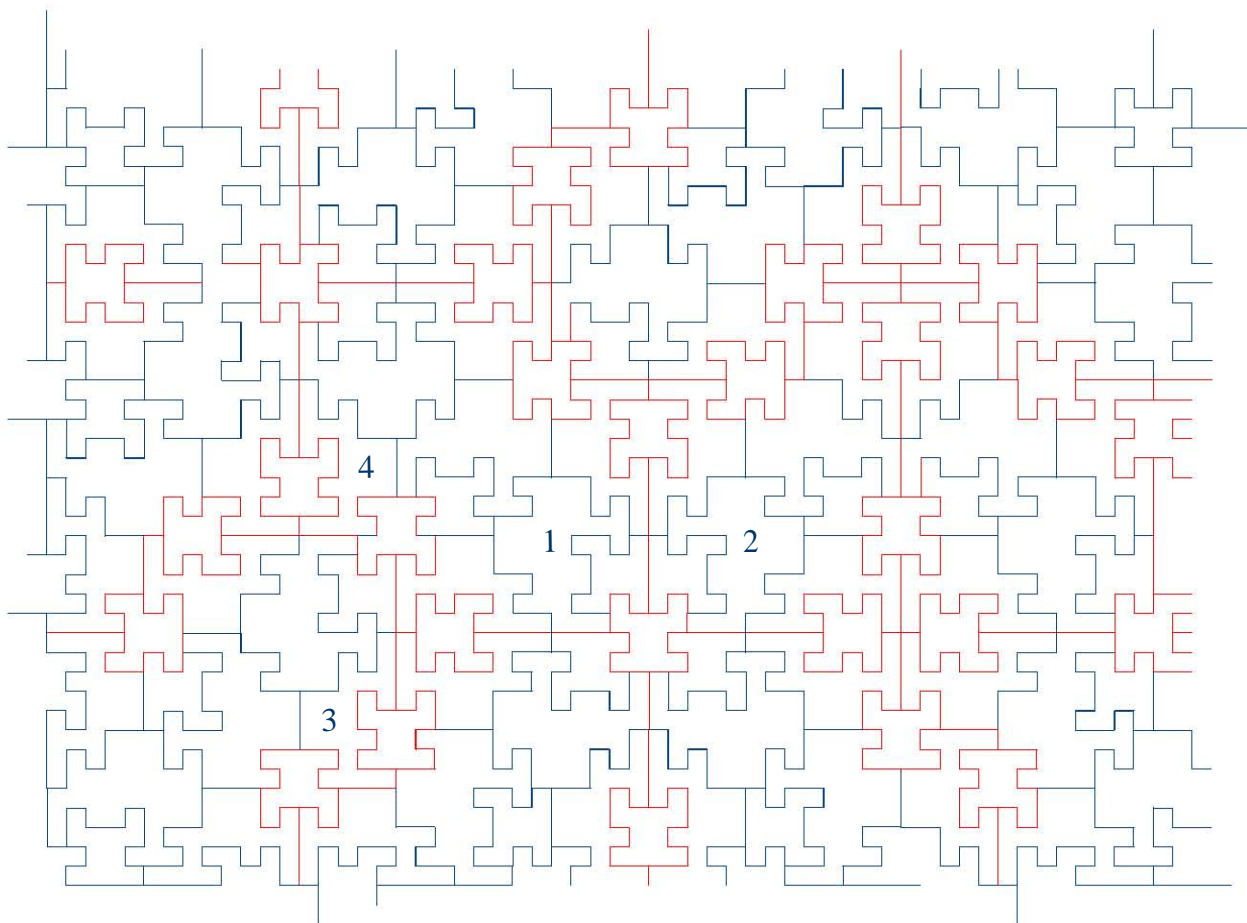


Figura 1.29: Os primeiros termos de código para os mosaicos con orixe nos puntos 1, 2, 3 e 4 serían 0101000, 0010000, 1110010 e 1100000 respectivamente.

fai, mais a 0010010010... só determinaría un cuadrante. Non obstante, reflexando este convenientemente e “grampando” con teselas de clase A onde fora necesario, podemos obter un mosaico de todo o plano, véxase a figura 1.30. En xeral, podemos proceder de maneira similar nestes casos para obter un mosaico de todo o plano.

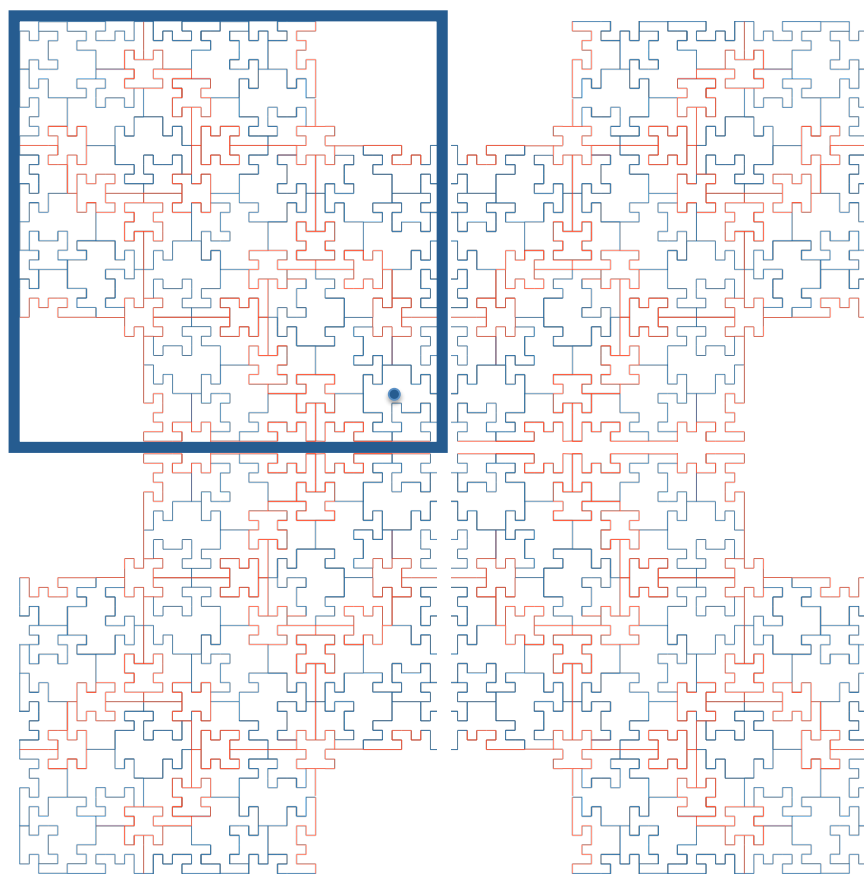


Figura 1.30: Mosaico obtido a partir dun cuadrante

**Teorema 1.3.11** ([33]). *A dinámica transversa medible da envoltura dun mosaico de Penrose por poliominós está representada polo espazo de sucesións  $\mathcal{S}''$  coa relación cofinal.*

Neste caso, a diferenza dos exemplos anteriores, non resulta inmediato asociarlle un sistema dinámico clásico que represente a dinámica medible. Non obstante, no capítulo 2 veremos que isto é posible para calquera mosaico repetitivo e aperiódico do plano.

### 1.3.4 Un exemplo non unicamente ergódico

A relación cofinal sobre o espazo  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  das sucesión binarias é unicamente ergódica. En consecuencia, en cada un dos casos ilustrados, a envoltura dun mosaico repetitivo e aperiódico admite unha única medida ergódica invariante por translación. Cabe preguntarse logo se isto sucede en xeral, é dicir, se a envoltura de calquera mosaico repetitivo e aperiódico do plano é unicamente ergódica.

En [58], J. C. Oxtoby constrúe unha sucesión de 0 e 1 nas dúas direccións aperiódica e repetitiva  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  que dá lugar a un minimal de  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  non unicamente ergódico. En [63], S. Petite define un mosaico do plano hiperbólico con envoltura non unicamente ergódica decorando un mosaico de Penrose do plano hiperbólico cunha xeneralización da sucesión de Oxtoby. Seguindo esta idea podemos definir un mosaico do plano repetitivo e aperiódico que cumpre a mesma condición:

Sexa  $\mathcal{T}_0$  un mosaico regular por cadrados e sexa  $\alpha \times \beta = (\alpha_n, \beta_m)_{n, m \in \mathbb{Z}}$  o produto de dúas sucesións binarias nas dúas direccións do minimal de Oxtoby. Identificando un conxunto de Delone  $D_{\mathcal{T}_0}$  con  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  podemos decorar  $\mathcal{T}_0$  cos elementos  $(\alpha_n, \beta_m)$  do produto  $\alpha \times \beta$ . O mosaico  $\mathcal{T}$  así obtido é repetitivo e aperiódico. En efecto, se  $\mathcal{T}_0$  non fose aperiódico, existiría entón  $v = (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tal que  $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_0 + (n, m)$ . Pero isto implicaría que  $\sigma^n(\alpha) = \alpha$  e  $\sigma^m(\beta) = \beta$ , polo que as sucesións  $\alpha$  e  $\beta$  non serían aperiódicas e temos unha contradición.

Para probar que é repetitivo, tomemos un motivo cadrado  $M$  de radio  $< r$  e vexamos que existe  $R = R(r)$  tal que calquera motivo cadrado de radio  $< R$  centrado en calquera punto  $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  contén unha copia de  $M$  por translación. Supoñamos sen perda de xeneralidade que  $M$  está centrado na orixe, logo pode representarse como

$$\overline{B}_{\alpha \times \beta}((0, 0), r) = (\alpha_i, \beta_j)_{i, j = -r, \dots, r}.$$

Como  $\alpha$  é repetitiva, sabemos que existe  $R_1 = R_1(r)$  tal que a bóla  $\overline{B}_{\alpha}(\alpha_n, R_1)$  contén unha copia por translación de  $\overline{B}_{\alpha}(0, r) = \alpha_{-r} \cdots \alpha_0 \cdots \alpha_r$  centrada nalgún  $n'$  tal que  $|n - n'| \leq R_1$ . Analogamente, existe  $R_2 = R_2(r)$  tal que a bóla  $\overline{B}_{\beta}(\beta_m, R_2)$  contén unha copia por translación de  $\overline{B}_{\beta}(0, r) = \beta_{-r} \cdots \beta_0 \cdots \beta_r$  centrada en  $m'$  tal que  $|m - m'| \leq R_2$ . Tomando agora  $R = \max\{R_1, R_2\}$ , temos que  $\overline{B}_{\alpha \times \beta}((n, m), R)$  contén unha copia por translación de  $\overline{B}_{\alpha \times \beta}((0, 0), r)$  centrada en  $(n', m')$ . Logo  $\mathcal{T}$  é un mosaico repetitivo e aperiódico do plano e a súa envoltura admite máis dunha medida invariante: calquera das medidas obtidas como medida produto das distintas medidas invariantes do minimal de Oxtoby.



$\alpha_{-2}\beta_2$	$\alpha_{-1}\beta_2$	$\alpha_0\beta_2$	$\alpha_1\beta_2$	$\alpha_2\beta_2$
$\alpha_{-2}\beta_1$	$\alpha_{-1}\beta_1$	$\alpha_0\beta_1$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_1$
$\alpha_{-2}\beta_0$	$\alpha_{-1}\beta_0$	$\alpha_0\beta_0$	$\alpha_1\beta_0$	$\alpha_2\beta_0$
$\alpha_{-2}\beta_{-1}$	$\alpha_{-1}\beta_{-1}$	$\alpha_0\beta_{-1}$	$\alpha_1\beta_{-1}$	$\alpha_2\beta_{-1}$
$\alpha_{-2}\beta_{-2}$	$\alpha_{-1}\beta_{-2}$	$\alpha_0\beta_{-2}$	$\alpha_1\beta_{-2}$	$\alpha_2\beta_{-2}$

Figura 1.31: O mosaico decorado con dúas sucesións de Oxtoby arredor da orixe



## 2. Afabilidade

Unha relación de equivalencia sobre un espazo totalmente disconexo dise *afable* se é unión dunha familia numerable e crecente de relacións de equivalencia *étales compactas*. A noción ten sido introducida por T. Giordano, I. Putnam e C. Skau, [30, 31] e de maneira independente J. Renault [69] como versión topolóxica da noción clásica de hiperfinitude. O exemplo prototipo de relación afable é o da relación cofinal sobre o espazo de camiños infinitos dun determinado tipo de grafos dirixidos, chamados *diagramas de Bratteli*. De feito, segundo un resultado de [31] e [69], toda relación de equivalencia afable é deste tipo, no sentido de que é isomorfa á relación cofinal sobre o espazo de camiños dun diagrama de Bratteli. Esta relación vén dada esencialmente por un sistema dinámico clásico, denominado sistema de Bratteli-Vershik, de xeito que calquera relación afable é orbitalmente equivalente a unha acción de  $\mathbb{Z}$ .

O noso obxectivo aquí é demostrar que a envoltura dun mosaico repetitivo e aperiódico (que suporemos sempre de tipo finito) do plano é afable. Isto quere dicir que a relación de equivalencia inducida sobre calquera transversal completa é afable. Lembremos que en [33] xa probamos que a dinámica medible deste tipo particular de laminacións está representada por un sistema dinámico de Bratteli-Vershik. O noso resultado fundamental foi anunciado en [4] (aínda que a proba era incompleta), e demostrado por T. Giordano, H. Matui, I. Putnam e C. Skau nun contexto diferente, aínda que equivalente. Concretamente, en [27] proban que toda acción libre e minimal de  $\mathbb{Z}^2$  sobre un conxunto de Cantor é afable. Neste capítulo imos presentar unha demostración diferente. Baseada no esquema descrito en [4], a nosa proba usa o teorema de absorción de [28], un importante resultado de extensión de relacións afables clave na proba de [27], mais a diferenza desta non requirirá de ningún argumento de convexidade.

Imos comezar precisando o contexto no que traballaremos para a continuación lembrar o proceso de inflación das laminacións transversalmente Cantor. Na segunda sección ocuparémonos da noción de relación afable e na terceira fixaremos a noción de laminación afable. Finalmente, describiremos un tipo particular de inflación que nos permitirá demostrar o teorema na última sección.

## 2.1 Laminacións transversalmente Cantor

Comezamos destacando algunhas particularidades das laminacións transversalmente Cantor, un tipo de laminacións que engloba ás definidas por mosaicos euclidianos e no que cobrará sentido a noción de laminación afable.

### 2.1.1 Definición e dinámica transversa

Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación compacta. Diremos que  $(M, \mathcal{F})$  é unha *laminación transversalmente Cantor* se a súa estrutura transversa está representada por un pseudogrupo de transformacións  $\Gamma$  do conxunto de Cantor. O seguinte lema implica de feito que toda laminación transversalmente Cantor posúe unha transversal completa homeomorfa ao conxunto de Cantor:

**Lema 2.1.1** ([52]). *Sexa  $\Gamma$  un pseudogrupo de transformacións sobre un conxunto de Cantor. Se existe un aberto relativamente compacto  $Y$  que corta a todas as  $\Gamma$ -órbitas, entón existe un aberto compacto que corta a todas as  $\Gamma$ -órbitas.*

**Proba.** Se  $X$  é un conxunto de Cantor, existen veciñanzas abertas e compactas arredor de calquera punto de  $X$  e é posible recubrir a clausura de  $Y$  por unha familia finita de abertos compactos. A unión desta familia finita é un conxunto aberto e compacto que contén a  $Y$ , e polo tanto corta a todas as  $\Gamma$ -órbitas.  $\square$

Por outra banda, a compacidade de  $M$  garante a existencia dun sistema de xeradores que coa propiedade de *xeración compacta* de Haefliger:

**Definición 2.1.2** ([37, 38]). Un pseudogrupo  $\Gamma$  de transformacións dun espazo localmente compacto e Hausdorff  $X$  dise *compactamente xerado* se

- i) existe un aberto relativamente compacto  $Y \subset X$  que corta a todas as órbitas de  $\Gamma$ ;
- ii) existe  $\Gamma_1$  un sistema finito de xeradores de  $\Gamma|_Y$  tal que cada  $\gamma \in \Gamma_1$  é a restrición dun elemento  $\tilde{\gamma} \in \Gamma$  tal que  $\overline{\text{dom } \gamma} \subset \text{dom } \tilde{\gamma}$ .

Dise que o sistema de xeradores  $\Gamma_1$  é un *sistema de xeración compacta para  $Y$* .

Cómpre lembrar que esta propiedade é invariante por equivalencias de Haefliger, según pode verse en [37, 38].

**Observación 2.1.3.** Para probar que o pseudogrupo de holonomía reducido ao eixo dun atlas dunha laminación compacta é compactamente xerado chega con refinar o atlas tomando cartas relativamente compactas, empregando un argumento similar ao da proba de existencia de bos atlas foliados (véxanse [40, 52]).

O seguinte resultado describe unha propiedade interesante destes pseudogrupos:

**Teorema 2.1.4** ([52]). *Sexa  $\Gamma$  un pseudogrupo compactamente xerado sobre un conxunto de Cantor  $X$ . Se  $Y$  é un aberto compacto que corta a todas as órbitas de  $\Gamma$ , entón calquera sistema de xeración compacta para  $Y$  define unha estrutura de grafo con función de valencia continua.*

**Proba.** Sexa  $Y$  un aberto compacto que corta a todas as  $\Gamma$ -órbitas, e sexa  $\Gamma_1$  un sistema de xeración compacta para  $Y$ . Por definición, para cada  $\gamma \in \Gamma_1$ , existe  $\tilde{\gamma} \in \Gamma$  tal que  $\overline{\text{dom } \gamma} \subset \text{dom } \tilde{\gamma}$  e  $\tilde{\gamma}|_{\text{dom } \gamma} = \gamma$ . Temos así que  $\text{dom } \gamma \subset Y$  é relativamente compacto e podemos cubri-lo por unha cantidade finita de abertos compactos contidos en  $\text{dom } \tilde{\gamma}$ . A unión desta familia finita será un aberto compacto de  $X$  que denotaremos por  $X_\gamma$ . Deste xeito,  $\text{dom } \gamma \subset X_\gamma \subset \text{dom } \tilde{\gamma}$ , e temos que

$$\text{dom } \gamma = Y \cap \text{dom } \tilde{\gamma} = Y \cap X_\gamma.$$

É dicir, podemos escribir  $\text{dom } \gamma$  coma unha intersección de dous abertos compactos de  $X$ . Logo  $\text{dom } \gamma$  é un aberto compacto, e en particular pechado. Agora, xa que a función de valencia pode expresarse como

$$\text{val}_{\Gamma_1}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma_1} (\chi_{\text{dom } \gamma}(x) + \chi_{\text{im } \gamma}(x))$$

e  $\text{dom } \gamma$  e  $\text{im } \gamma$  son conxuntos abertos e pechados, as aplicacións características correspondentes son continuas. De maneira que  $\text{val}_{\Gamma_1}$  é a suma dun número finito de aplicacións continuas, e polo tanto continua.  $\square$

O feito de que a función de valencia sexa continua é unha condición moi restritiva. Tanto é así, que implica que a dinámica do pseudogrupo é a dunha acción dun grupo:

**Teorema 2.1.5** ([52]). *Un pseudogrupo de tipo finito cuxa función de valencia é continua é equivalente no sentido de Haefliger a unha acción dun grupo finitamente xerado.*  $\square$

Este resultado permite realizar estes pseudogrupos como restricións a un Cantor de pseudogrupos de transformacións sobre a esfera de dimensión 2. Para isto chega con lembrar que calquera homeomorfismo do Cantor en si mesmo pode estenderse á esfera bidimensional (véxase o capítulo 13 de [55]):

**Corolario 2.1.6** ([52]). *Un pseudogrupo de transformacións sobre un conxunto de Cantor compactamente xerado está inducido (salvo equivalencia de Haefliger) por un pseudogrupo de transformacións sobre a esfera bidimensional.*  $\square$

Os resultados anteriores permiten demostrar a conxectura de Haefliger no caso transversalmente Cantor:

**Teorema 2.1.7** ([52]). *Sexa  $\Gamma$  un pseudogrupo de transformacións sobre un conxunto de Cantor compactamente xerado. Existe unha laminación compacta por superficies de Riemann  $(M, \mathcal{F})$  cuxo pseudogrupo de holonomía é equivalente no sentido de Haefliger a  $\Gamma$ .*

Por último, tendo en conta o corolario 2.1.6 e aplicando os mesmos argumentos que conducen ao teorema 2.1.7 obtense:

**Corolario 2.1.8** ([52]). *Calquera pseudogrupo de transformacións sobre un conxunto de Cantor compactamente xerado é realizable como un pechado saturado dunha foliación de codimensión 2 sobre unha variedade compacta.*

O espazo de Gromov-Hausdorff descrito na sección §1.2 e calquera dos seus minimais son exemplos de laminacións compactas transversalmente Cantor. En [3], [26] e [53] poden verse outros exemplos definidos a partir de grafos repetitivos e aperiódicos.

## 2.1.2 Descomposición por caixas

Como dixemos, o noso propósito é probar que dinámica transversa da envoltura dun mosaico aperiódico e repetitivo do plano está representada por unha acción de  $\mathbb{Z}$ . A. M. Vershik probou en [76] que toda acción minimal de  $\mathbb{Z}$  sobre un conxunto de Cantor é un límite inverso de grafos dirixidos. En [9], J. Bellissard, R. Benedetti e J.-M. Gambaudo demostran que a envoltura de calquera mosaico aperiódico e repetitivo do plano é un límite inverso de superficies ramificadas planas. A proba baséase nun proceso de inflación que permite substituír cada tesela por un motivo que a contén. En [10], o mesmo argumento permite a R. Benedetti e J.-M. Gambaudo estender o resultado a  $\mathbb{G}$ -solenoides, i.e. laminacións transversalmente Cantor minimais e sen holonomía definidas por unha acción libre dun grupo de Lie  $\mathbb{G}$ . En [6], F. Alcalde, Á. Lozano e M. Macho adaptan o proceso para mostrar que toda laminación transversalmente Cantor de clase  $C^1$ , minimal e sen holonomía é un límite inverso de variedades ramificadas compactas (véxase o apéndice A). Para aplicar o proceso de inflación neste caso, comezan por estender o teorema de existencia de triangulacións para variedades diferenciables de clase  $C^1$ .

**Definición 2.1.9** ([6]). *Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación transversalmente Cantor de dimensión  $p$  e  $T$  unha transversal completa. Dise que unha familia de cartas locais compactas  $\mathcal{B} = \{\varphi_i : \mathbb{B}_i \rightarrow \mathbb{P}_i \times C_i\}_{i=1}^m$  é unha *descomposición por caixas* de  $M$  se*

- D1.  $M = \bigcup_{i=1}^m \mathbb{B}_i$ ;
- D2. Cada transversal  $C_i$  é un aberto-pechado de  $T$ ;
- D3. Se  $i \neq j$ , a intersección de dúas caixas  $\mathbb{B}_i \cap \mathbb{B}_j$  está contida na intersección dos seus bordos verticais  $\partial_v \mathbb{B}_i = \varphi_i^{-1}(\partial \mathbb{P}_i \times C_i)$  e  $\partial_v \mathbb{B}_j = \varphi_j^{-1}(\partial \mathbb{P}_j \times C_j)$ ;
- D4. Cada placa dunha caixa  $\mathbb{B}_i$  corta ao sumo a unha placa doutra caixa  $\mathbb{B}_j$ ;
- D5. O cambio de coordenadas escríbese como

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\mathbb{B}_i \cap \mathbb{B}_j}(x, y) = (\alpha_{ij}(x), \sigma_{ij}(y)), \quad (1.1)$$

isto é,  $\mathbb{B}_i$  e  $\mathbb{B}_j \in \mathcal{B}$  intersécense ao longo de aberto-pechados nas respectivas transversais.

Se as placas de  $\mathcal{B}$  son  $p$ -símplices, a intersección de dúas placas redúcese a unha cara común. Neste caso, podemos supoñer que as aplicacións  $\alpha_{ij}$  son bixeccións afíns e dise que  $\mathcal{B}$  é unha *descomposición por caixas simpliciais* (ou simplemente unha *descomposición simplicial*) de  $(M, \mathcal{F})$ .

**Teorema 2.1.10** ([6]). *Toda laminación transversalmente Cantor de clase  $C^1$  admite unha descomposición simplicial.*

O teorema 2.1.10 mostra a similitude do caso xeral co caso dos mosaicos, no que a descomposición en caixas vén dada de maneira canónica en virtude da topoloxía de Gromov-Hausdorff. Por outra banda, permite aplicar o esquema da proba do teorema de afabilidade (que imos debullar na sección §2.4) ao caso das laminacións transversalmente Cantor con crecemento polinomial. O obxectivo desta subsección será polo tanto lembrar a proba destes dous teoremas de [6].

Comecemos supoñendo que a laminación  $(M, \mathcal{F})$  está dotada dun bo atlas foliado  $\mathcal{A}$  tal que:

- Para cada  $x \in M$ ,  $\text{Star}(\text{Star}(x, \mathcal{A}), \mathcal{A})$  está contida nun convexo xeodésico;
- As placas que se intersecan fano de maneira transversa dúas a dúas;
- As transversis locais son espazos compactos;
- As transformacións de holonomía  $\gamma_{ij}$  están definidas sobre compacto-abertos;

o que temos garantido polo lema 1.1.12. Denotaremos  $\mathcal{U}$  á cobertura subxacente formado polos abertos distinguidos  $U_i$  onde  $1 \leq i \leq n$ .

Para probar o teorema de existencia de descomposicións simpliciais pódese adaptar unha das probas do teorema de triangulación de variedades de clase  $C^1$ :

**i) Nervio foliado dun atlas foliado:** Se dotamos a  $M$  da topoloxía das follas, temos unha variedade  $\mathcal{M}$  dotada dun atlas  $\mathcal{V}$  inducido polo foliado  $\mathcal{A}$ . O nervio  $\mathcal{N}(\mathcal{V})$  da cobertura  $\mathcal{V}$  é a unión disxunta dos nervios das coberturas por placas das follas. Lembremos que  $\mathcal{N}(\mathcal{V})$  é un complexo simplicial formado polos símplices  $[j_0, \dots, j_k]$  asociados a sucesións finitas  $j_0 < \dots < j_k$  tales que  $\mathbb{P}_{j_0} \cap \dots \cap \mathbb{P}_{j_k} \neq \emptyset$ . No caso de laminacións transversalmente Cantor, estes nervios son as follas dun espazo foliado por conxuntos simpliciais  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$  e a aplicación  $\Pi : \mathcal{N}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{M}$  correspóndese cunha aplicación foliada  $\Pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}) \rightarrow M$ .

**Definición 2.1.11** ([6, 52]). Sexa  $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{P}_i \times X_i\}_{i=1}^m$  un atlas foliado de  $(M, \mathcal{F})$  adaptado a  $g$ . Denomínase *nervio foliado de  $\mathcal{A}$*  ao espazo foliado por complexos simpliciais  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$  definido a partir dunha descomposición en caixas  $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{\Delta \times X_{\Delta}\}$ , onde  $\Delta = [i_0, i_1, \dots, i_k] \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$  corresponde a unha sucesión finita  $i_0 < i_1 < \dots < i_k$  tal que  $\bigcap_{l=0}^k U_{i_l} \neq \emptyset$  e  $X_{\Delta} = \bigcap_{l=0}^k \text{dom } \sigma_{i_0 i_l}$ . O espazo  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$  dótase da topoloxía feble, de maneira que  $A \subset \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$  é aberto se e só se  $A \cap (\Delta \times X_{\Delta})$  é un aberto para cada  $\Delta \in \mathcal{N}(\mathcal{U})$ . Se dotamos a  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$  da topoloxía das follas, recuperamos o nervio  $\mathcal{N}(\mathcal{V})$ .

**Observación 2.1.12.** No caso transversalmente Cantor, podemos supoñer que as transversais locais  $X_i$  e os dominios das transformacións de holonomía  $\sigma_{ij}$  son compactos. Isto implica que  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$  é un espazo foliado por complexos simpliciais. Para comprobar que  $\mathcal{B}(\mathcal{A})$  é unha descomposición en caixas simpliciais basta ver que a estrutura simplicial non varía nun entorno dos vértices ([6, 52]). Fixemos un vértice  $x$  pertencente ao conxunto  $[i] \times X_i$  (identificado con  $X_i$ ) e unha caixa  $\Delta \times X_{\Delta}$ . Se  $X_{\Delta}^x = X_i \cap (\Delta \times X_{\Delta}) = \sigma_{i_0 i}(X_{\Delta} \cap \text{dom } \sigma_{i_0 i})$ , entón  $\Delta \times \{y\}$  pertence a  $\text{Star}(y, \mathcal{A})$ , para cada  $y \in X_{\Delta}^x$ . Aseguramos así que  $\text{Star}(x, \mathcal{A}) \times \{y\} \subset \text{Star}(y, \mathcal{A})$  para  $y \in \bigcap_{\Delta \in \text{Star}(x, \mathcal{A})} X_{\Delta}^x$ . Agora ben, non podemos garantir que estas estrelas non conteñan novos símplices (figura 2.1(b)). Para subsanar isto chega con restrinxir a veciñanza de  $x$  tomando

$$X^x = \bigcap_{\Delta \in \text{Star}(x, \mathcal{A})} X_{\Delta}^x - \bigcup_{\Delta \in \mathcal{N}(\mathcal{U}) - \text{Star}(x, \mathcal{A})} X_{\Delta}^x.$$

Como a cobertura  $\mathcal{U}$  é finita, o número de símplices de  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  tamén, e  $X^x$  é así un conxunto compacto e aberto en  $X_i$ . Temos agora que  $\text{Star}(y, \mathcal{A}) = \text{Star}(x, \mathcal{A}) \times \{y\}$  para cada punto  $y \in X_x$ , é dicir, a estrutura simplicial local non varía transversalmente.



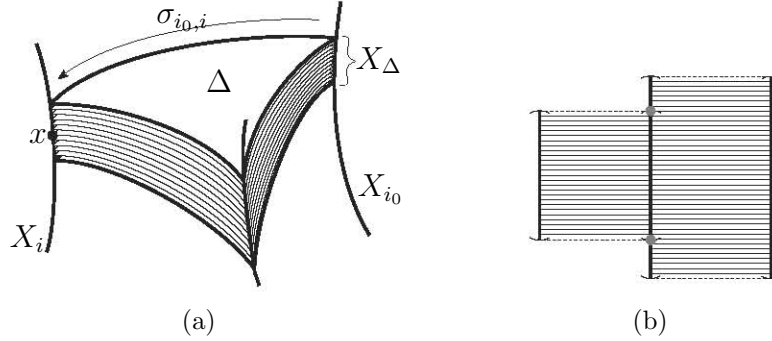


Figura 2.1: (a) Estrutura local; (b) Emerxencia de novos símplexes

**ii) Realización do nervio foliado:** No caso foliado a aplicación  $\Pi : \mathcal{N}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{M}$  provén efectivamente dunha aplicación foliada  $\Pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}) \rightarrow M$  continua e sobre-rexectiva [6, 52]:

*0-símplexes:* Para cada vértice  $[i] \times \{y\} \in [i] \times X_i$ , defínese  $\Pi_{\mathcal{F}}([i] \times \{y\}) = x_i$  como o centro  $x_i = \varphi_i^{-1}(0, y) \in M$  da placa  $\varphi_i^{-1}(\mathbb{P}_i \times \{y\})$ . Obviamente  $\Pi_{\mathcal{F}}$  é continua en restrición ao 0-esqueleto de  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$ .

*1-símplexes:* Fixemos un punto  $(x, y)$  do símplex  $[i, j] \times \{y\} \subset [i, j] \times \text{dom } \sigma_{ij}$  con  $i < j$ . Como  $\text{Star}(\text{Star}(x_i(y), \mathcal{A}), \mathcal{A})$  está contida nun convexo xeodésico, sabemos que existe unha única xeodésica minimizante parametrizada proporcionalmente á lonxitude de arco  $\gamma_{ij}^y : [0, 1] \rightarrow M$  que une  $\Pi_{\mathcal{F}}([i] \times \{y\}) = x_i(y)$  con  $\Pi_{\mathcal{F}}([j] \times \{\sigma_{ij}(y)\}) = x_j(\sigma_{ij}(y))$ . Definimos entón

$$\Pi_{\mathcal{F}}(x, y) = \gamma_{ij}^y(1 - t_0(x)) = \gamma_{ij}^x(t_1(x)),$$

onde  $t_i(x)$  é a  $i$ -ésima coordenada baricéntrica de  $x$ . Obviamente  $\Pi_{\mathcal{F}}$  está ben definida e é continua sobre o 1-esqueleto de  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$ .

*k-símplexes:* Supoñamos que  $\Pi_{\mathcal{F}}$  está definida sobre os  $(k-1)$ -símplexes de maneira continua, e fixemos un  $k$ -símplex  $\Delta \times \{y\} = [i_0, i_1, \dots, i_k] \times \{y\} \subset \Delta \times X_{\Delta}$  con  $i_0 < i_1 < \dots < i_k$  e un punto  $(x, y) \neq [i_0] \times \{y\}$ . A única recta que une  $[i_0]$  con  $x$  en  $\Delta$  corta á 0-ésima cara  $\partial_0 \Delta = [i_1, i_2, \dots, i_k]$  de  $\Delta$  nun único punto  $x'$  de coordenadas baricéntricas

$$(0, t_1(x)/1 - t_0(x), t_2(x)/1 - t_0(x), \dots, t_k(x)/1 - t_0(x)),$$

con  $t_i(x)$  a  $i$ -ésima coordenada baricéntrica de  $x$ , véxase a figura 2.2. Como  $(x', \sigma_{i_0 i_1}(y))$  pertence ao  $(k-1)$ -símplex  $\partial_0 \Delta \times \{\sigma_{i_0 i_1}(y)\} \subset \partial_0 \Delta \times \bigcap_{l=1}^k \text{dom } \sigma_{i_0 i_l}$ ,

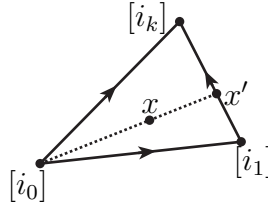


Figura 2.2: Definición dos  $k$ -símplices.

a súa imaxe  $\Pi_{\mathcal{F}}(x', \sigma_{i_0 i_1}(y))$  está definida. Existe entón unha única xeodésica minimizante  $\gamma_{i_0, \dots, i_k}^y : [0, 1] \rightarrow M$  que une  $\Pi_{\mathcal{F}}([i_0] \times \{y\})$  con  $\Pi_{\mathcal{F}}(x', \sigma_{i_0 i_1}(y))$  e definimos como antes

$$\Pi_{\mathcal{F}}(x, y) = \gamma_{i_0, \dots, i_k}^y(1 - t_0(x)).$$

Novamante a aplicación  $\Pi_{\mathcal{F}}$  está ben definida e é continua sobre o  $k$ -esqueleto de  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$ .

Obtemos así por indución a pretendida aplicación continua  $\Pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}) \rightarrow M$ . É claro que se dotamos a  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$  e  $M$  da topoloxías das follas, a aplicación  $\Pi_{\mathcal{F}}$  define unha aplicación continua  $\Pi : \mathcal{N}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{M}$ . Isto garántenos que  $\Pi_{\mathcal{F}}$  é unha aplicación foliada sobrexectiva, pois a aplicación  $\Pi_{\mathcal{F}}$  segue sendo sobrexectiva en restricción ao  $p$ -esqueleto, xa que a imaxe dun símlice de dimensión  $p+1$  é igual á unión das imaxes das súas caras propias. É dicir, o espazo  $M$  está recuberto polas imaxes dos símlices de dimensión  $p$ .

**iii) Construción da descomposición simplicial:** Imos completar a proba do teorema mostrando que é posible construír unha aplicación  $\Pi_{\mathcal{F}}$  coa seguinte propiedade:

**Lema 2.1.13** ([6, 52]). *A aplicación  $\Pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}) \rightarrow M$  é inxectiva en restricción a cada  $p$ -símlice. A imaxe por  $\Pi_{\mathcal{F}}$  de cada caixa simplicial  $\Delta \times X_{\Delta}$  de  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$  é entón unha caixa simplicial de  $M$ .*

**Proba.** Chega con examinar o caso dunha caixa  $\Delta \times X_{\Delta}$  do nervio foliado  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$  con  $\Delta = [i_0, i_1, \dots, i_p]$  un  $p$ -símlice de  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ . A proxección  $\Pi_{\mathcal{F}} : \Delta \times X_{\Delta} \rightarrow M$  pode levantarse nunha aplicación afín  $\Upsilon : \Delta \times X_{\Delta} \rightarrow T(\mathcal{F})$  que fai conmutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Delta \times X_{\Delta} & \xrightarrow{\Upsilon} & T(\mathcal{F}) \\ & \searrow \Pi_{\mathcal{F}} & \downarrow \text{exp} \\ & & M \end{array}$$

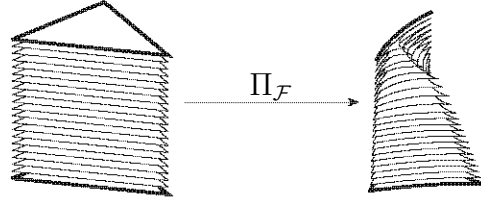


Figura 2.3: Caso dunha restrición non inxectiva.

En efecto, como  $\text{Star}(x, \mathcal{A})$  está contido nunha bola xeodésica de radio suficientemente pequeno, podemos definir unha sección local da aplicación exponencial. Para cada  $y \in X_{\Delta}$ , a imaxe  $\Upsilon(\Delta \times \{y\})$  é a envoltura convexa das imaxes por  $\Upsilon$  dos vértices de  $\Delta \times \{y\}$ , con  $\Upsilon([i_0] \times \{y\}) = \vec{0}$ . Sexa  $B_{\Delta}$  o conxunto compacto dos puntos  $y \in X_{\Delta}$  tales que  $\Pi_{\mathcal{F}}|_{\Delta \times \{y\}}$  non é inxectiva, ou de maneira equivalente os vectores  $\Upsilon([i_1] \times \{y\}), \dots, \Upsilon([i_p] \times \{y\})$  non son linearmente independentes. Cada  $y \in B_{\Delta}$  admite unha veciñanza  $X^y \subset X_{\Delta}$  tal que  $\text{Star}(z, \mathcal{A}) = \text{Star}(y, \mathcal{A})$  para todo  $z \in X^y$ . Podemos substituír entón os centros  $\Pi_{\mathcal{F}}([i] \times \{x\}) = x_i(y)$  e as transversais  $\Pi_{\mathcal{F}}([i] \times X_{\Delta}^y) \subset \{x_i(y)\} \times X_i$  por puntos  $\hat{x}_i(y)$  e transversais  $\hat{X}_i \subset \mathbb{P}_i \times X_i$  (proyectables sobre  $X^y$ ) tales que  $\hat{\Upsilon}([i_1] \times \{z\}), \dots, \hat{\Upsilon}([i_p] \times \{z\})$  son linearmente independentes. Pola finitude de  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  e a compacidade de  $B_{\Delta}$ , podemos reducir  $B_{\Delta}$  ao conxunto baleiro nun número finito de pasos.  $\square$

**Teorema 2.1.14** ([6, 52]). *Toda laminación transversalmente Cantor de clase  $C^1$  admite unha descomposición en caixas con placas xeodésicamente convexas.*

**Proba.** Como consecuencia do lema anterior, a aplicación  $\Pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A}) \rightarrow M$  permite realizar a descomposición en caixas simpliciais de  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$  como unha descomposición de  $M$  en caixas con placas que son polítopos xeodésicamente convexas. En efecto, se  $\Delta \times X_{\Delta}$  e  $\Delta' \times X_{\Delta'}$  son dúas caixas simpliciais de  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$ , o lema anterior permite identificar cada unha delas coa súa imaxe por  $\Pi_{\mathcal{F}}$ . En xeral, a intersección das imaxes destas caixas non está foliada en produto, xa que o número de vértices do polítopo obtido como intersección dunha placa de  $\Pi_{\mathcal{F}}(\Delta \times X_{\Delta})$  e unha placa de  $\Pi_{\mathcal{F}}(\Delta' \times X_{\Delta'})$  pode medrar na veciñanza dun punto. Non obstante, empregando novamente a invarianza da estrutura simplicial nunha veciñanza dun vértice da observación 2.1.12, podemos descompoñer a intersección nun número finito de compacto-abertos foliados en produto.  $\square$

**Proba do teorema 2.1.10.** Segundo o teorema anterior, o espazo  $M$  descomponse na unión dunha familia finita de caixas cuxas placas son polítopos xeodésicamente convexas. Dada unha destas caixas, podemos triangular as súas placas (ao mesmo tempo) fixando unha transversal local formada polos seus centros de gravidade e

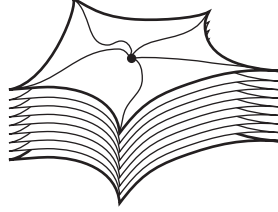


Figura 2.4: División en caixas simpliciais.

unindo estes mediante xeodésicas coas caras de codimension un (que cubren o bordo vertical). A caixa descomponse así nunha unión de caixas con placas simpliciais. Para asegurarmos que os cambios de carta sexan afíns, basta redefinir  $\Pi_{\mathcal{F}}$  reparametrizando cada unha das novas caixas simpliciais.  $\square$

### 2.1.3 Inflación

O resultado anterior vai permitir mostrar que o proceso de inflación descrito por J. Bellissard, R. Benedetti e J. M. Gambaudo en [9] segue sendo válido para calquera laminación transversalmente Cantor, minimal e sen holonomía (véxase [6, 52]):

**Definición 2.1.15.** Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación transversalmente Cantor. Unha descomposición por caixas  $\mathcal{B}'$  obtense por inflación a partir doutra descomposición  $\mathcal{B}$  se

- I1. Para cada punto  $x$  pertencente á intersección dunha caixa  $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$  e unha caixa  $\mathbb{B}' \in \mathcal{B}'$ , a transversal local de  $\mathbb{B}'$  que pasa por  $x$  está contida na transversal local de  $\mathbb{B}$  que pasa por  $x$ ;
- I2. O bordo vertical dunha caixa  $\mathbb{B}' \in \mathcal{B}'$  está contido no bordo vertical de  $\mathcal{B}$ , é dicir,  $\partial_v \mathbb{B}' \subset \bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \partial_v \mathbb{B}$ ;
- I3. Para cada caixa  $\mathbb{B}' \in \mathcal{B}'$ , existe unha caixa  $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$  tal que  $\mathbb{B} \cap \mathbb{B}' \neq \emptyset$  e  $\partial_v \mathbb{B}' \cap \partial_v \mathbb{B} = \emptyset$ .

**Teorema 2.1.16** ([6, 52]). Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación transversalmente Cantor, minimal e sen holonomía, e sexa  $\mathcal{B}$  unha descomposición por caixas de  $M$ . Existe entón outra descomposición  $\mathcal{B}'$  que se obtén por inflación a partir de  $\mathcal{B}$ .

**Proba.** Podemos dividir a proba en catro etapas:

1) *Elección natural dunha métrica:* Sexa  $\mathcal{C} = \bigsqcup_{i=1}^m C_i$  o eixo da descomposición  $\mathcal{B} = \{\mathbb{B}_i\}_{i=1}^m$ . Para cada folla  $L \in \mathcal{F}$ , a traza  $D = L \cap \mathcal{C}$  identifícase co 0-esqueleto da correspondente folla no espazo foliado por complexos simpliciais  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ . E

pode dotarse da métrica natural definida por medio da lonxitude dos camiños no 1-esqueleto de  $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$ , isto é, a que corresponde coa métrica natural sobre o pseudogrupo de holonomía de  $\mathcal{F}$  reducido a  $\mathcal{C}$ . Neste caso, para cada par de puntos  $x, y \in D$ , a distancia  $d(x, y)$  pode expresarse como o mínimo número de placas  $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_k$  de  $\mathcal{B}$  tales que  $x \in \mathbb{P}_1$ ,  $y \in \mathbb{P}_k$  e  $\mathbb{P}_i \cap \mathbb{P}_{i+1} \neq \emptyset$  para  $1 \leq i < k$ . Ademais, como  $\mathcal{F}$  é minimal,  $D$  é un conxunto de Delone.

2) *Redución da transversal completa:* Sexa  $C'$  un aberto-pechado contido nun aberto-pechado  $C_i$  do eixo  $\mathcal{C}$ . A minimalidade de  $\mathcal{F}$  implica de novo que a traza  $D' = L \cap C'$  de calquera folla é un conxunto de Delone. Ademais, tomando  $C'$  suficientemente pequeno podemos supoñer que  $D'$  é  $r$ -discreto, con  $r \in \mathbb{N}$  tan grande como sexa preciso.

3) *Descomposición de Voronoi e inflación:* Para cada  $x \in D'$ , sexa  $\mathbb{V}_x$  o conxunto dos  $y \in D$  tales que  $d(x, y) = d(x, D)$ . Como  $\mathbb{V}_x \neq \{x\}$  é finito, o conxunto  $\mathbb{P}'_x = \bigcup_{y \in \mathbb{V}_x} \mathbb{P}_y$  é un subconxunto compacto da folla  $L_x$  que non se reduce á placa  $\mathbb{P}_x$ . A trivialidade da holonomía de  $\mathcal{F}$  garante que para cada  $x \in D'$  existe unha veciñanza  $C'_x$  tal que a inclusión de  $C'_x$  en  $L_x$  pode estenderse a un mergullo de  $\mathbb{P}'_x \times C'_x$  en  $M$  que define unha caixa  $\mathbb{B}'_x$ . Deste xeito, podemos descompoñer  $C'$  nunha unión disxunta  $C'_1 \sqcup \dots \sqcup C'_k$  de abertos-pechados e obter unha cobertura  $\mathcal{B}' = \{\mathbb{B}'_1, \dots, \mathbb{B}'_k\}$  de  $M$  por caixas compactas.

4) *Eliminación das interseccións problemáticas:* Por construción, a familia  $\mathcal{B}'$  satisfai as condicións da definición 2.1.15 (e obtense por inflación de  $\mathcal{B}$ , sen máis precaucións que tomar  $C'$  suficientemente pequeno como para que se cumpra a condición I3), salvo que os interiores de dúas caixas  $\mathbb{B}'_i$  e  $\mathbb{B}'_j$  poden cortarse. De darse o caso, existiría unha transformación de holonomía  $\gamma_{ij}$  entre  $\mathbb{B}'_i$  e  $\mathbb{B}'_j$  de xeito que  $C'_i$  podería descompoñerse en dous abertos-pechados  $C'^{1}_i$  e  $C'^{2}_i$  tales que:

- i) as placas  $\mathbb{P}'_i$  que pasan por puntos de  $C'^{1}_i$  non cortan á caixa  $\mathbb{B}'_j$ ;
- ii) as placas  $\mathbb{P}'_i$  e  $\mathbb{P}'_j$  que pasan por puntos  $y_i \in C'^{2}_i$  e  $y_j = \gamma_{ij}(y_i) \in C_j$  córtanse en placas  $\mathbb{P}_y$  asociadas a puntos  $y \in \mathbb{V}_{y_i} \cap \mathbb{V}_{y_j}$  que equidistan de  $y_i$  e  $y_j$ .

Poderíamos substituír logo  $\mathbb{B}'_i$  por  $\mathbb{B}'^{1}_i$  e  $\mathbb{B}'^{2}_i$ , onde  $\mathbb{B}'^{1}_i$  está composta das placas que pasan por puntos de  $C'^{1}_i$  e  $\mathbb{B}'^{2}_i$  das que pasan por puntos de  $C'^{2}_i$  pero nas que se eliminou o interior das placas  $\mathbb{P}_y$  asociadas a puntos  $y \in \mathbb{V}_{y_i} \cap \mathbb{V}_{y_j}$  (véxase a figura 2.5). Nun número finito de pasos chegaríase así unha nova descomposición por caixas  $\mathcal{B}' = \{\mathbb{B}'_1, \dots, \mathbb{B}'_l\}$  obtida por inflación de  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Corolario 2.1.17** ([6, 52]). *Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación transversalmente Cantor, minimal e sen holonomía. Para calquera descomposición por caixas  $\mathcal{B}$  de  $M$ , existe unha sucesión de descomposicións por caixas  $\{\mathcal{B}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\mathcal{B}^{(1)} = \mathcal{B}$*

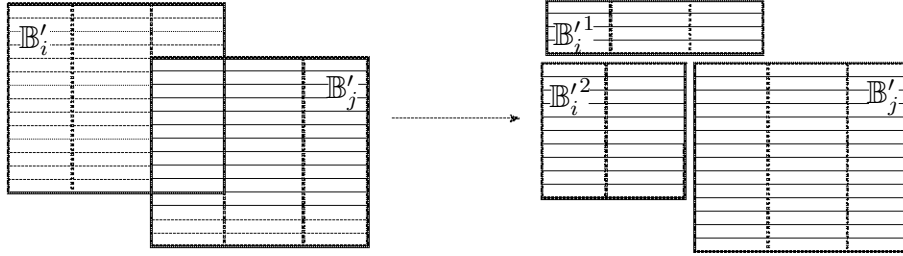


Figura 2.5: Recorte das caixas.

e  $\mathcal{B}^{(n+1)}$  obtense por inflación de  $\mathcal{B}^{(n)}$ . Ademais, é posible tomar a sucesión de descomposicións  $\mathcal{B}^{(n)}$  para que a intersección dos eixos  $\mathcal{C}^{(n)}$  se reduza a un único punto.  $\square$

## 2.2 Relacións afables

O concepto de relación *hiperfinita* aparece por vez primeira no traballo de J. Feldman e C. C. Moore [24], aínda que está xa implícito nos anteriores de H. A. Dye [21, 22] e V. A. Rohlin [71] no contexto dos sistemas dinámicos clásicos. As nocións de relación *aproximadamente propia* e *aproximadamente finita*, versións topolóxicas da hiperfinitude, foron introducidas máis recentemente por J. Renault [69] e, de maneira independente, T. Giordano, I. Putnam e C. Skau [30, 31]. O propósito desta sección é recapitular as propiedades deste tipo de relacións, que imos considerar no contexto das laminacións transversalmente Cantor. Para comezar, explicitemos a definición de relación hiperfinita.

### 2.2.1 Relacións hiperfinitas

Unha relación de equivalencia medible discreta  $\mathcal{R}$  sobre un espazo boreliano estándar  $X$  dise *finita* se as súas clases de equivalencia  $\mathcal{R}[x]$  son finitas, ou de maneira máis xeral se fixada  $\mu$  unha medida de probabilidade case-invariante, isto sucede para  $\mu$ -case toda clase. Neste caso,  $\mathcal{R}$  posúe un *dominio fundamental*, é dicir, un subconxunto boreliano  $D \subset X$  que corta a cada clase de equivalencia nun único punto. En efecto, dotando a  $X$  dunha orde, podemos definir  $D$  coma o conxunto formado por cada un dos puntos mínimos de cada clase, que así definido é neste caso un subconxunto boreliano.

**Definición 2.2.1.** Unha relación de equivalencia medible discreta  $\mathcal{R}$  sobre  $X$  dise *hiperfinita* respecto dunha medida de probabilidade case-invariante  $\mu$  se existe unha

sucesión de relacións de equivalencia finitas

$$\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{R}_n \subset \cdots \subset \mathcal{R}$$

tal que  $\mathcal{R}[x] = \varinjlim \mathcal{R}_n[x]$  para  $\mu$ -case todo  $x \in X$ . De maneira equivalente [19, 24],  $\mathcal{R}$  é hiperfinita se existe unha transformación medible  $\varphi : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$  tal que

$$\mathcal{R} = \{(x, \varphi^n(x)) \mid x \in X, n \in \mathbb{N}\}$$

salvo nun conxunto  $\mu$ -nulo.

Un remarcable resultado de A. Connes, J. Feldmann e B. Weiss establece que a hiperfinitude dunha relación de equivalencia medible discreta é equivalente á súa *promediabilidade* [19]:

**Definición 2.2.2** ([19]). Un *sistema de medias locais* para unha relación de equivalencia medible discreta  $\mathcal{R}$  é un sistema  $m = \{m_x\}_{x \in X}$  de medias  $m_x$  sobre as clases de equivalencia  $\mathcal{R}[x]$  (onde cada media  $m_x$  é un funcional lineal positivo e unitario en  $l^\infty(\mathcal{R}[x])^*$ ) tal que:

- i)  $m$  é invariante: se  $(x, y) \in \mathcal{R}$ , entón  $m_x = m_y$ ;
- ii)  $m$  é medible: se  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función medible, entón tamén o é a función  $m(f) : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $m(f)(x) = m_x(f(x, \cdot))$ .

A relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  dise *promediable* cando posúe un sistema de medias locais.

No seguinte enunciado recópanse esta e outras equivalencias [8, 19, 44, 45]:

**Teorema 2.2.3.** *Sexa  $\mathcal{R}$  unha relación de equivalencia medible discreta sobre  $X$ . As seguintes condicións son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{R}$  é hiperfinita;
- ii)  $\mathcal{R}$  é promediable;
- iii) *Existe unha sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de sistemas medibles de medidas de probabilidade  $\lambda_n^x$  sobre as clases de equivalencia  $\mathcal{R}[x]$ , tal que  $\|\lambda_n^x - \lambda_n^y\|_1 \rightarrow 0$  para  $\mu$ -case todo  $x \in X$  e todo  $y \in \mathcal{R}[x]$ ;*
- iv) *Existe unha sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de sistemas medibles de medidas de probabilidade  $\lambda_n^x$  sobre as clases de equivalencia  $\mathcal{R}[x]$ , tal que  $\int_{Dom(\gamma)} \|\lambda_n^x - \lambda_n^{\gamma(x)}\|_1 d\mu \rightarrow 0$  para cada transformación parcial  $\gamma$ .*

A equivalencia (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) é o nomeado Teorema de A. Connes, J. Feldmann e B. Weiss [19]. As condicións (iii) e (iv) coñécense indistintamente como *criterio de Reiter*, por analogía cos grupos finitamente xerados [59]. Para relacións de equivalencia medibles discretas foron introducidas por V. A. Kaimanovich (véxanse por exemplo [44, 45]). Destaquemos que se  $\mathcal{R}$  é hiperfinita, é doado concluír que é promediabile vendo que cumpre o criterio de Reiter. En efecto, podemos definir a sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dos sistemas das medidas de probabilidade obtidas normalizando a medida de contar sobre as clases das relacións finitas  $\mathcal{R}_n$ , i.e. as dadas como

$$\lambda_n^x(B) = \frac{|B \cap \mathcal{R}_n[x]|}{|\mathcal{R}_n[x]|}$$

para cada boreliano  $B \subset \mathcal{R}_n[x]$ . Así definido o sistema é obviamente asintóticamente invariante. Ademais é medible, pois a función

$$\lambda_n(f) : x \in X \mapsto \lambda_n(f)(x) := \lambda_n^x(f) = \int f d\lambda_n^x = \frac{1}{|\mathcal{R}_n[x]|} \sum_{y \in \mathcal{R}_n[x]} f(y)$$

é medible calquera que sexan  $n \in \mathbb{N}$  e a función  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Partindo desta idea, Y. Carrière e E. Ghys proban en [17] que, no caso anterior,  $\mu$ -case toda clase de equivalencia é Følner. Dada entón  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  unha función intregrable, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a función  $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{|\mathcal{R}_n[x]|} \sum_{y \in \mathcal{R}_n[x]} f(y)$$

satisfai  $\int \bar{f} d\mu = \int f d\mu$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \int \bar{f}(x) d\mu(x) &= \int \frac{1}{|\mathcal{R}_n[x]|} \sum_{y \in \mathcal{R}_n[x]} f(y) d\mu(x) = \int \frac{1}{|\mathcal{R}_n[x]|} \sum_{y \in \mathcal{R}_n[x]} f(y) d\mu(y) \\ &= \int \frac{|\mathcal{R}_n[x]|}{|\mathcal{R}_n[x]|} f(y) d\mu(y) = \int f(y) d\mu(y). \end{aligned}$$

Deste xeito, denotando  $\partial\mathcal{R}_n = \bigcup_{x \in X} \partial\mathcal{R}_n[x]$  e considerando a sucesión das funcións  $f_n = \chi_{\partial\mathcal{R}_n}$ , temos que

$$\bar{f}_n(x) = \frac{\#\partial\mathcal{R}_n[x]}{\#\mathcal{R}_n[x]}$$

e polo tanto

$$\int \bar{f}_n d\mu = \int \chi_{\partial\mathcal{R}_n} d\mu = \mu(\partial\mathcal{R}_n).$$



E como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\partial \mathcal{R}_n) = 0$ , polo lema de Fatou tense que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\partial \mathcal{R}_n[x]}{\#\mathcal{R}_n[x]} = 0$  para  $\mu$ -case todo  $x \in X$ , o que implica que  $\mu$ -case toda clase é Følner.

O recíproco non é certo, en virtude dos contraexemplos construídos por Kaimanovich [45]. Non obstante, F. Alcalde Cuesta e A. Retchman proban en [7] que se ten o recíproco se engadimos a condición de minimalidade.

### 2.2.2 Relacións *étale* compactas

O primeiro paso para introducir a noción de relación afable consiste en fixar o análogo das relacións finitas no caso topolóxico (véxanse [31, 69]). Sexa  $\mathcal{R}$  unha relación de equivalencia *étale* sobre un espazo  $X$  localmente compacto, Hausdorff e segundo numerable. Supoñamos, como é habitual, que  $\mathcal{R}$  tamén é localmente compacto e Hausdorff. A diagonal  $\Delta \subset X \times X$  é entón un subconxunto aberto-pechado de  $\mathcal{R}$ .

**Definición 2.2.4.** Dise que  $\mathcal{R}$  é *étale compacta* (REEC en abreviatura) se o conxunto  $\mathcal{R} - \Delta \subset X \times X$  é compacto. Se  $X$  é compacto,  $\mathcal{R}$  é compacta se e só se o seu grafo  $\mathcal{R} \subset X \times X$  é compacto.

**Lema 2.2.5** ([31]). *Se  $\mathcal{R}$  é unha REEC sobre  $X$ , entón cumpre as seguintes propiedades:*

- i)  $\mathcal{R}$  é un subespazo topolóxico de  $X \times X$ ;*
- ii)  $\mathcal{R}$  é un pechado de  $X \times X$  e  $X/\mathcal{R}$  é Hausdorff;*
- iii)  $\mathcal{R}$  é uniformemente finita, i.e. existe  $N \geq 1$  tal que  $\#\mathcal{R}[x] \leq N$ ,  $\forall x \in X$ .*

**Proba.** (i) Por compacidade, a inclusión  $\iota = \beta \times \alpha : \mathcal{R} - \Delta \rightarrow X \times X$  é unha identificación pechada. Logo (i) séguese de que as topoloxías inducidas por  $\mathcal{R}$  e  $X \times X$  sobre  $\Delta$  son a mesma.

(ii) En particular,  $\mathcal{R}$  é pechado en  $X \times X$ . Por outra banda, a proxección canónica  $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$  é aberta. En efecto, para cada aberto  $U$  de  $X$ , o saturado  $\pi^{-1}(\pi(U)) = \alpha(\beta^{-1}(U))$  é aberto en  $X/\mathcal{R}$ , xa que as proxeccións  $\alpha$  e  $\beta$  son abertas. O espazo cociente  $X/\mathcal{R}$  é entón Hausdorff por ser  $\mathcal{R}$  pechado.

(iii) Para todo par  $(x, y) \in \mathcal{R}$ , a proxección  $\beta : \mathcal{R} \rightarrow X$  restrínxese nun homeomorfismo dunha veciñanza de  $(x, y)$  en  $\mathcal{R}$  nunha veciñanza de  $x$  en  $X$ . Por compacidade, o conxunto  $\mathcal{R} - \Delta$  pode recubrirse por un número finito  $N'$  de tales veciñanzas. Para todo  $x \in X$ , tense daquela que  $\#\mathcal{R}[x] \leq N' + 1 = N$ .  $\square$

**Proposición 2.2.6** ([5]). *Se  $\mathcal{R}$  é unha relación de equivalencia étale nas condicións fixadas, as seguintes condicións son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{R}$  é unha REEC;*
- ii)  $\mathcal{R}$  é propia no senso de [69] (i.e.  $X/\mathcal{R}$  é Hausdorff e a proxección  $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$  é un homeomorfismo local) e trivial fóra dun compacto;*
- iii)  $\beta : \mathcal{R} \rightarrow X$  é propia e  $\mathcal{R}$  é trivial fóra dun compacto.*

**Proba.** Probemos  $(i) \Leftrightarrow (ii)$  e  $(i) \Leftrightarrow (iii)$ :

$(i) \Leftrightarrow (ii)$  En primeiro lugar, polo lema precedente  $X/\mathcal{R}$  é Hausdorff. Consideremos  $X_0 = \alpha(\mathcal{R} - \Delta) = \beta(\mathcal{R} - \Delta)$  o compacto obtido como a unión das clases de equivalencia que non se reducen a un punto. Evidentemente, a proxección  $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$  envía homeomorficamente  $X - X_0$  sobre a súa imaxe. Podémonos reducir logo ao caso no que  $X$  é compacto. Como os grafos das transformacións parciais de  $\mathcal{R}$  son abertos de  $\mathcal{R}$  en restrición aos cales as proxeccións  $\alpha$  e  $\beta$  se convirten en homeomorfismos, por compacidade o grafo de  $\mathcal{R}$  está recuberto por un número finito de tales biseccións. Todo punto de  $X$  pertence entón a un aberto  $U$  tal que  $\pi^{-1}(\pi(U))$  é unión das imaxes  $\varphi(U)$  de  $U$  por un número finito de transformacións parciais  $\varphi$ . Por analoxía coas accións de grupos finitos, substituindo  $U$  por unha veciñanza máis pequena, podemos supoñer que as imaxes  $\varphi(U)$  son disxuntas. A proxección  $\pi$  é pois un homeomorfismo en restrición a  $U$ .

Para probar o recíproco, notemos que  $\mathcal{R} - \Delta \subset \mathcal{R}_{X_0}^{X_0} = \alpha^{-1}(X_0) \cap \beta^{-1}(X_0)$  se  $\mathcal{R}$  é trivial fóra dun compacto  $X_0$ , polo que podemos restrinxirnos de novo ao caso no que  $X$  é compacto. Agora, se  $X/\mathcal{R}$  é Hausdorff,  $\mathcal{R}$  é pechado en  $X \times X$ , logo compacto.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$  Se  $\mathcal{R} - \Delta$  é un subespazo compacto de  $X \times X$ , para cada compacto  $K$  de  $X$  tense que  $\beta^{-1}(K) \cap \mathcal{R} - \Delta$  é compacto, logo

$$\beta^{-1}(K) = (\beta^{-1}(K) \cap \mathcal{R} - \Delta) \cup (K \times K \cap \Delta)$$

é un compacto. Reciprocamente, se  $\beta : \mathcal{R} \rightarrow X$  é propia e trivial fóra dun compacto  $X_0$ , entón  $\beta^{-1}(X_0) = \mathcal{R} - \Delta$  é un espazo compacto coa topoloxía coa que  $\mathcal{R}$  é unha relación de equivalencia *étale*, que non é necesariamente a topoloxía relativa de  $X \times X$ . Non obstante, a topoloxía de  $\mathcal{R}$  é necesariamente máis fina que a relativa de  $X \times X$ , polo que temos entón que  $\mathcal{R} - \Delta$  é compacto como subespazo de  $X \times X$ .  $\square$

### 2.2.3 Relacións afables e diagramas de Bratteli

A noción de relación de equivalencia afable fórmulase agora como segue:

**Definición 2.2.7** ([31],[69]). Unha relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  definida sobre un espazo totalmente disconexo  $X$  dise *afable* se existe  $\{\mathcal{R}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión crecente de REEC's tal que  $\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ . Se dotamos a  $\mathcal{R}$  da topoloxía límite inductivo (de maneira que  $U$  é aberto en  $\mathcal{R}$  se e só se  $U \cap \mathcal{R}_n$  é aberto en  $\mathcal{R}_n$ ), entón  $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}_n$  é unha relación de equivalencia  $\beta$ -discreta *aproximadamente finita* (AF en abreviatura).

Evidentemente, se unha relación de equivalencia é afable, entón é hiperfinita respecto de calquera medida case-invariante. O exemplo prototipo de relación afable é a relación cofinal sobre o espazo de camiños dun determinado tipo de grafos, os diagramas de Bratteli.

**Definición 2.2.8.** Un *diagrama de Bratteli* [30, 31] é un grafo orientado  $\mathcal{B} = (V, E)$  tal que os conxuntos de vértices  $V$  e arestas  $E$  admiten sendas descomposicións  $V = \bigsqcup_{n \geq 0} V_n$  e  $E = \bigsqcup_{n \geq 0} E_n$  como unións numerables de subconxuntos finitos  $V_n$  e  $E_n$  non baleiros tales que, para toda aresta  $e \in E_n$ , a orixe  $\alpha(e) \in V_n$  e o extremo  $\beta(e) \in V_{n+1}$ . Esíxese ademais que non existan vértices  $v$  tales que  $\alpha^{-1}(v) = \emptyset$ . Por outra banda, chámase *vértice de partida* de  $\mathcal{B}$  a un vértice  $v$  tal que  $\beta^{-1}(v) = \emptyset$ . Se o diagrama de Bratteli non posúe máis ca un vértice de partida  $v_0 \in V_0$  dise *estándar*. Un diagrama de Bratteli estándar é *simple* se para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $m > n$  tal que se contraemos telescopicamente o diagrama entre os niveis  $m$  e  $n$ , cada vértice  $v \in V_n$  está conectado a un vértice  $w \in V_m$ .

Sexa  $v \in V_n$  un vértice de partida de  $\mathcal{B}$  e

$$X_v = \{ (e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots) \mid \alpha(e_n) = v, \alpha(e_{i+1}) = \beta(e_i), \forall i \geq n \}$$

o conxunto de camiños infinitos de  $\mathcal{B}$  que nacen en  $v$ . É un espazo compacto e totalmente disconexo coa topoloxía inducida pola topoloxía produto de  $E = \bigsqcup_{i \geq n} E_i$  xerada polos *cilindros* aberto-pechados da forma

$$C_{e_n, \dots, e_{n+m}} = \{ (e'_n, e'_{n+1}, \dots) \in X_v \mid e'_n = e_n, \dots, e'_{n+m} = e_{n+m} \}$$

nos que  $\alpha(e_n) = v$ . Chámase *espazo de camiños infinitos de  $\mathcal{B}$*  á suma topolóxica  $X_{\mathcal{B}} = \bigsqcup X_v$  dos espazos de camiños infinitos de  $\mathcal{B}$  que nacen en vértices de partida de  $\mathcal{B}$ . Está dotado da relación de equivalencia cofinal  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$  que identifica dous camiños  $(e_n, e_{n+1}, \dots)$  e  $(e'_m, e'_{m+1}, \dots)$  se existe un enteiro  $N \geq m, n$  tal que  $e_i = e'_i$  para todo  $i \geq N$ . A relación de equivalencia  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$  é afable, pois é a unión das relacións de equivalencia compactas

$$\mathcal{R}_{\mathcal{B}}^N = \{ ((e_n, e_{n+1}, \dots), (e'_m, e'_{m+1}, \dots)) \mid m, n \leq N \text{ e } e_i = e'_i \text{ para todo } i \geq N \}.$$

O seguinte resultado mostra que de feito toda relación de equivalencia afable é deste tipo:

**Teorema 2.2.9** ([31, 69]). *Sexa  $\mathcal{R}$  unha relación de equivalencia AF sobre un espazo totalmente disconexo  $X$ . Existen un diagrama de Bratteli  $\mathcal{B}$  e un homeomorfismo  $\Psi : X \rightarrow X_{\mathcal{B}}$  que define un isomorfismo entre  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ . Se  $X$  é compacto,  $\mathcal{B}$  pode supoñerse estándar.*

**Proba.** Imos reproducir a proba de [69] para o caso compacto. A proba do caso xeral, que difere en certos detalles técnicos pero segue o mesmo esquema, pode verse en [31]. En primeiro lugar, lembremos que se  $\pi : X \rightarrow Y$  é unha aplicación sobrexectiva,  $s \subset X$  é unha sección de  $\pi$  se a restrición de  $\pi$  a  $s$  é inxectiva. Unha partición  $\mathcal{S}$  de  $X$  por seccións de  $\pi$  dise unha partición de  $\pi$  se para cada par de seccións  $s, s' \in \mathcal{S}$ , ben  $\pi(s) \cap \pi(s') = \emptyset$ , ou ben  $\pi(s) = \pi(s')$ . A proxección  $\pi_*\mathcal{S} = \{\pi(s) \mid s \in \mathcal{S}\}$  é entón unha partición de  $Y$ . Se  $X$  é compacto e totalmente disconexo e  $\pi$  un homeomorfismo local, dada unha partición de  $X$  por abertos pechados, existe sempre unha partición de  $\pi$  que a refina.

Centrándonos no noso caso, sexa  $\mathcal{R}$  unha relación AF sobre  $X$  compacto e totalmente disconexo. Por definición, existe  $\{\mathcal{R}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión crecente de REEC's tal que  $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}_n$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotemos  $X_n = X/\mathcal{R}_n$  e  $\pi_n : X \rightarrow X_n$  a aplicación cociente. Consideremos tamén as proxeccións

$$\pi_{n-1,n} : X_{n-1} \rightarrow X_n$$

tales que  $\pi_n = \pi_{n-1,n} \circ \pi_{n-1}$ . Para cada  $n \geq 1$ , existe unha partición  $\mathcal{S}_n$  do grafo de  $\pi_{n-1,n}$  por seccións aberto-pechadas  $s_n$  definidas sobre abertos de  $X_{n-1}$  (cos que se identifican) e que refina á partición  $(\pi_{n-2,n-1})_*\mathcal{S}_{n-1}$ . A sucesión de particións  $\{\mathcal{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  define un diagrama de Bratteli  $\mathcal{B} = (V, E)$  do seguinte xeito: sexa  $V_0 = \{v_0\}$  un único vértice e para cada  $n \geq 1$ ,  $V_n = (\pi_{n-2,n-1})_*\mathcal{S}_{n-1}$ ,  $E_n = \mathcal{S}_n$  e se  $s_n \in \mathcal{S}_n$ , a orixe  $\alpha(s_n)$  é o elemento de  $(\pi_{n-2,n-1})_*\mathcal{S}_{n-1}$  que contén a  $s_n$  e o extremo  $\beta(s_n) = \pi_{n,n-1}(s_n)$ . Sexa agora  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$  a relación cofinal sobre o espazo de camiños infinitos  $X_{\mathcal{B}}$  do diagrama de Bratteli  $\mathcal{B}$ . Cada elemento de  $X_{\mathcal{B}}$  é unha sucesión  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n$  é un aberto-pechado de  $X_{n-1}$  e  $s_{n+1}$  está contido en  $\pi_{n,n-1}(s_n)$ . A aplicación  $\Psi : X \rightarrow X_{\mathcal{B}}$  que asocia a cada  $x \in X$  sucesión  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $s_n \in \mathcal{S}_n$  e contén a  $\pi_{n-1}(x)$ . Tomando  $\{\mathcal{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de maneira que  $\{(\pi_{n-1})^{-1}(\mathcal{S}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  sexa unha base para a topoloxía de  $X$ ,  $\Psi$  induce un isomorfismo entre as relacións de equivalencia  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ .  $\square$

**Observación 2.2.10.** Como se puido observar, a proba do teorema 2.2.9 é construtiva e pon de manifesto que o diagrama de Bratteli correspondente contén información sobre como se van incluíndo as  $\mathcal{R}_n$ -clases nas  $\mathcal{R}_{n+1}$ -clases. Os exemplos da sección §1.3 tamén ilustran este feito.

### 2.2.4 Sistemas de Bratteli-Vershik

Un *diagrama de Bratteli ordeado* [30] é un diagrama de Bratteli xunto cunha relación de orde parcial en  $E$  tal que dúas arestas  $e, e'$  son comparables cando  $\beta(e) = \beta(e')$ . Noutras palabras, temos unha orde total para cada conxunto  $\beta^{-1}(v)$  dos camiños que rematan nun mesmo vértice  $v \in V - V_0$ . Un *diagrama de Bratteli ordeado simple* é un diagrama de Bratteli simple, ordeado de maneira que existe un único camiño infinito  $\gamma_{max} \in X_{\mathcal{B}}$  no que todas as arestas son máximas para a relación de orde e un único camiño infinito  $\gamma_{min} \in X_{\mathcal{B}}$  con todas as arestas mínimas.

Se  $X_{\mathcal{B}}$  é o espazo de camiños infinitos dun diagrama de Bratteli ordeado simple, defínese un homeomorfismo  $\lambda_{\mathcal{B}} : X_{\mathcal{B}} \rightarrow X_{\mathcal{B}}$ , denominado *aplicación de Vershik*, do seguinte xeito. Para  $\gamma_{max}$ , defínese  $\lambda_{\mathcal{B}}(\gamma_{max}) = \gamma_{min}$ . Para  $\gamma = (e_1, e_2, \dots) \neq \gamma_{max}$ , considérase  $k$  o menor natural tal que  $e_k$  non é unha aresta máxima de  $E$ , e  $f_k$  a aresta inmediatamente maior que  $e_k$ . Tómase  $(f_0, f_1, \dots, f_k)$  o único elemento en  $E_0 \circ \dots \circ E_{k-1}$  que conecta  $v_0$  con  $\alpha(f_k) \in V_k$  e no que todas as arestas son mínimas, e defínese entón

$$\lambda_{\mathcal{B}}(\gamma) = \lambda_{\mathcal{B}}((e_1, e_2, \dots)) = (f_0, f_1, \dots, f_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots).$$

A aplicación de Vershik define deste xeito un sistema dinámico minimal sobre  $X_{\mathcal{B}}$ , denominado *sistema dinámico de Bratteli-Vershik*.

As órbitas do sistema dinámico de Bratteli-Vershik  $(X_{\mathcal{B}}, \lambda_{\mathcal{B}})$  están determinadas polas clases de equivalencia da relación cofinal, agás no caso das clases de cofinalidade de  $\gamma_{max}$  e  $\gamma_{min}$ , que se “pegan” pola acción de  $\lambda_{\mathcal{B}}$ . Un exemplo clásico desta situación é unha *máquina de sumar binaria*, isto é, o sistema dinámico clásico sobre o espazo de sucesións binarias  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  xerado pola *aplicación suma de 1* (definida como a conxugada da suma de 1 no anel dos enteiros 2-ádicos), no que as órbitas coinciden coas clases de cofinalidade, agás para as sucesións  $000\dots$  e  $111\dots$ , que pertencen a unha mesma órbita pero representan distintas clases de cofinalidade.

**Teorema 2.2.11** ([31]). *Sexa  $X_{\mathcal{B}}$  o espazo de camiños infinitos dun diagrama de Bratteli simple  $\mathcal{B}$ . Sexan  $\gamma$  e  $\gamma'$  dous camiños infinitos non cofinais. Existe unha relación de orde parcial en  $E$  que fai de  $\mathcal{B}$  un diagrama de Bratteli ordeado simple, de maneira que  $\gamma = \gamma_{max}$  e  $\gamma' = \gamma_{min}$ . Deste xeito, a correspondente aplicación de Vershik preserva as clases de cofinalidade, agás  $\lambda_{\mathcal{B}}(\gamma) = \gamma'$ .*

## 2.3 Laminacións afables

Antes de abordar o teorema de afabilidade, imos fixar a noción de afabilidade no contexto das laminacións transversalmente Cantor. Temos dúas posibilidades, ben

en función da relación inducida sobre unha transversal completa, ou directamente por medio da relación que definen as follas.

### 2.3.1 Laminacións transversalmente afables

Como dicimos, en primeiro lugar podemos definir o carácter afable por medio da relación de equivalencia inducida sobre unha transversal completa:

**Definición 2.3.1.** Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación transversalmente 0-dimensional compacta e sen holonomía. Diremos que  $(M, \mathcal{F})$  é *afable* se posúe unha transversal completa  $T$  tal que a relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  inducida sobre ela por  $\mathcal{F}$  é AF.

**Observación 2.3.2.** Esta definición pode estenderse empregando grupoides e grupoides locais no lugar de relacións de equivalencia para eliminar a condición de trivialidade da holonomía. Non obstante, isto non será necesario para o propósito desta memoria.

A definición de laminación transversalmente afable é coherente, é dicir, non depende da elección da transversal:

**Teorema 2.3.3.** *Se a relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  inducida por  $\mathcal{F}$  sobre algunha transversal completa  $T$  é AF, entón tamén o é a relación  $\mathcal{R}'$  inducida sobre calquera outra transversal completa  $T'$ .*

**Proba.** Por hipótese, existe unha sucesión crecente de REEC's  $\mathcal{R}_n$  sobre  $T$  tales que  $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}_n$ . Vexamos como definir a partir desta unha tal sucesión para  $\mathcal{R}'$ . Para maior claridade, distinguiremos tres casos:

1)  $T'$  é unha transversal completa aberto-pechada en  $T$ : A relación de equivalencia

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}|_{T'} = \mathcal{R} \cap (T' \times T')$$

é o límite indutivo das REEC's  $\mathcal{R}_n|_{T'} = \mathcal{R}_n \cap (T' \times T')$ .

2)  $T'$  é unha transversal completa compacta: Existe  $\Phi$  equivalencia de pseudogrupos de  $(\Gamma', T')$  en  $(\Gamma, T)$  formada por unha familia finita  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$  de transformacións con dominios e rangos aberto-pechados contidos en  $T'$  e  $T$  respectivamente de maneira que  $T' = \bigsqcup_{i=1}^k \text{dom } \varphi_i$ . Logo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos definir sobre  $T'$  a REEC seguinte

$$\mathcal{R}'_n = \bigcup_{i,j=1}^k (\varphi_i \times \varphi_j)^{-1}(\mathcal{R}_n).$$

Por construción, a sucesión  $\{\mathcal{R}'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é crecente e  $\mathcal{R}' = \varinjlim \mathcal{R}'_n$ .

3)  $T'$  é unha transversal completa: Pola  $\sigma$ -compacidade de  $T'$ , existe  $\{K_m\}$  sucesión crecente de compactos tal que  $T' = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$ . Sexa  $\Phi$  unha equivalencia de pseudo-grupos de  $(\Gamma', T')$  en  $(\Gamma, T)$ . Podemos supoñer novamente que os elementos de  $\Phi$  posúen dominios e rangos aberto-pechados. Existe agora unha familia finita  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k_1}\} \subset \Phi$  tal que  $K_1 = \bigsqcup_{i=1}^{k_1} \text{dom } \varphi_i$ . Neste caso, definimos en primeiro lugar

$$\mathcal{R}'_1 = \left( \bigcup_{i,j=1}^{k_1} (\varphi_i \times \varphi_j)^{-1}(\mathcal{R}_1) \right) \cup \Delta_{T'},$$

que segue sendo unha REEC sobre  $T'$ . Empregando os mesmos argumentos, podemos tomar unha nova subfamilia finita  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k_1}, \varphi_{k_1+1}, \dots, \varphi_{k_2}\}$  tal que  $K_2 = \bigsqcup_{i=1}^{k_2} \text{dom } \varphi_i$ . Definimos a continuación

$$\mathcal{R}'_2 = \left( \bigcup_{i,j=1}^{k_2} (\varphi_i \times \varphi_j)^{-1}(\mathcal{R}_2) \right) \cup \Delta_{T'}$$

que por construción é unha REEC sobre  $T'$  e satisfai  $\mathcal{R}'_1 \subset \mathcal{R}'_2$ . Por indución, obtemos coma nos casos anteriores unha sucesión crecente de REEC's  $\{\mathcal{R}'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\mathcal{R}' = \varinjlim \mathcal{R}'_n$ .  $\square$

**Observación 2.3.4.** O teorema anterior mostra que a afabilidade é unha propiedade transversa.

### 2.3.2 Relacións e laminacións AC

Outra posibilidade para decidir se unha laminación  $(M, \mathcal{F})$  é afable consiste en facelo en función da relación de equivalencia definida polas follas sobre o espazo total  $M$ . É dicir, trátase de dar unha versión topolóxica da noción de laminación hipercompacta de [12].

**Definición 2.3.5.** Sexa  $\mathcal{R}$  unha relación de equivalencia topolóxica sobre un espazo localmente compacto e Hausdorff  $M$ , que suporemos sempre localmente compacta e Hausdorff. Diremos que  $\mathcal{R}$  é *compacta* se é trivial fóra dun compacto e a proxección  $\beta : \mathcal{R} \rightarrow M$  é propia.

Lembremos que unha aplicación entre espazos topolóxicos  $f : X \rightarrow Y$  é *propia* [14] se é unha aplicación pechada e a fibra  $f^{-1}(y)$  de cada punto  $y \in Y$  é un compacto en  $X$ . Se  $X$  e  $Y$  son Hausdorff e  $Y$  é localmente compacto, entón  $f$  é propia se e só se a imaxe inversa  $f^{-1}(K)$  de cada compacto  $K \subset Y$  é un compacto en  $X$ .

**Lema 2.3.6.** *Se  $M$  é compacto, a relación  $\mathcal{R}$  é compacta se e só se é un espazo topolóxico compacto.*

**Proba.** Se  $\beta : \mathcal{R} \rightarrow M$  é propia, entón  $\beta^{-1}(M) = \mathcal{R}$  é un compacto. Reciprocamente, para cada compacto  $K$  en  $M$ ,  $\beta^{-1}(K)$  é un pechado en  $\mathcal{R}$ , logo compacto.  $\square$

**Observación 2.3.7.** Nótese que no lema anterior  $\mathcal{R}$  é un espazo compacto coa topoloxía que a convirte nunha relación de equivalencia topolóxica, que non é necesariamente a topoloxía relativa de  $M \times M$ . É dicir, que  $\mathcal{R}$  sexa un compacto de  $M \times M$  coa topoloxía relativa non é condición suficiente para que  $\mathcal{R}$  sexa unha relación compacta. Non obstante, como xa observamos na proba da proposición 2.2.6, si é condición necesaria, pois a topoloxía de  $\mathcal{R}$  é máis fina que a relativa de  $M \times M$ .

Como consecuencia do lema 2.2.6, a definición 2.3.5 é unha extensión da definición 2.2.4. É dicir, se  $\mathcal{R}$  é unha relación de equivalencia *étale*, entón  $\mathcal{R}$  é compacta se e só se é unha REEC. A definición de relación AF esténdense agora como cabe esperar:

**Definición 2.3.8.** Diremos que  $\mathcal{R}$  é unha relación *aproximadamente compacta* (AC en abreviatura) se existe unha sucesión crecente de relacións compactas  $\mathcal{R}_n$  tales que  $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}_n$ .

A relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  inducida polas follas dunha laminación sen holonomía  $(M, \mathcal{F})$  pode dotarse dunha topoloxía que a convirte nunha relación topolóxica. De maneira explícita, dados dous abertos distinguidos  $U = P \times T$  e  $U' = P' \times T'$  e un elemento do pseudogrupo de holonomía  $\gamma : T \rightarrow T'$ , defínese un aberto básico  $O(U, U', \gamma)$  coma o conxunto das parellas  $(x, x')$  de  $M \times M$  tales que se  $x \in U$  pertence á placa de  $x_0$ , entón  $x' \in U'$  pertence á placa de  $\gamma(x_0)$ . Podemos introducir daquela a seguinte definición:

**Definición 2.3.9.** Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación sen holonomía. Diremos que é *aproximadamente compacta* (AC) se o é a relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  inducida por  $\mathcal{F}$  sobre  $M$ .

**Observación 2.3.10.** Novamente, como no caso da definición 2.3.1, poderíamos eliminar a condición de trivialidade da holonomía empregando grupoides e grupoides locais no lugar de relacións de equivalencia.

Esta definición é en efecto unha extensión da definición 2.3.1:

**Lema 2.3.11.** *Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación transversalmente 0-dimensional compacta e sen holonomía. Se  $(M, \mathcal{F})$  é AC, entón é afable.*



**Proba.** Sexa  $\mathcal{R}$  a relación de equivalencia inducida por  $\mathcal{F}$  sobre  $M$  e  $\{\mathcal{R}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a sucesión crecente de relacións compactas sobre  $M$  tales que  $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}_n$ . Dada calquera transversal completa aberto-pechada  $T$ , temos que  $\mathcal{R}|_T = \widehat{\mathcal{R}} \cap (T \times T)$  é unha relación de equivalencia *étale* sobre  $T$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a subrelación  $\mathcal{R}_n|_T = \mathcal{R}_n \cap (T \times T)$  segue sendo *étale*. Ademais, o grafo  $\mathcal{R}_n \cap (T \times T)$  é un subconxunto compacto de  $T \times T$ , xa que  $\mathcal{R}_n$  é compacto en  $M \times M$  e  $T$  é un compacto. Logo  $\mathcal{R}$  coincide co límite inductivo das REEC's  $\mathcal{R}_n|_T$  e polo tanto é unha relación afable.  $\square$

E en virtude do teorema de existencia de descomposicións simpliciais de [6, 52], no caso dunha laminación de clase  $C^1$  temos o recíproco:

**Lema 2.3.12.** *Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación transversalmente 0-dimensional compacta e sen holonomía de clase  $C^1$ . Se  $(M, \mathcal{F})$  é afable, entón é AC.*

**Proba.** Sexa  $T$  o eixo dunha descomposición simplicial  $\mathcal{B} = \{\varphi_i : B_i \rightarrow P_i \times C_i\}_{i=1}^m$  de  $(M, \mathcal{F})$  e sexan  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}|_T$  as relacións de equivalencia inducidas por  $\mathcal{F}$  sobre  $M$  e  $T$  respectivamente. Por hipótese, existe  $\{\mathcal{R}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión crecente de REEC's tal que  $\mathcal{R}|_T = \varinjlim \mathcal{R}_n$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  e cada  $x \in T$ , consideremos  $P_n^x = \bigcup_{y \in \mathcal{R}_n[x]} P_y$ , onde  $P_y$  é a placa da descomposición  $\mathcal{B}$  que pasa por  $y \in T$ , e tomemos  $U_n$  unha  $\frac{1}{n}$ -veciñanza do bordo vertical de  $\mathcal{B}$  en  $M$ . Podemos definir agora a relación de equivalencia sobre  $M$  dada por

$$\widehat{\mathcal{R}}_n[x] = \begin{cases} P_n^x - U_n & \text{se } x \notin U_n \\ x & \text{se } x \in U_n \end{cases}$$

coa topoloxía inducida pola topoloxía de  $\mathcal{R}$ . Por construción, as  $\widehat{\mathcal{R}}_n$  son relacións compactas e  $\mathcal{R} = \varinjlim \widehat{\mathcal{R}}_n$ . En efecto, de existir  $x \in M$  tal que  $\mathcal{R}[x] \neq \varinjlim \widehat{\mathcal{R}}_n[x]$ , entón necesariamente  $\mathcal{R}|_T[x'] \neq \varinjlim \mathcal{R}_n[x']$  para algún  $x' \in \mathcal{R}|_T[x]$ . Probamos así que  $(M, \mathcal{F})$  é unha laminación AC.  $\square$

Combinando os dous resultados anteriores obtemos o seguinte:

**Teorema 2.3.13.** *Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación transversalmente 0-dimensional compacta e sen holonomía de clase  $C^1$ . Entón,  $(M, \mathcal{F})$  é afable se e só se é AC.*

## 2.4 Afabilidade da envoltura dun mosaico aperiódico e repetitivo do plano

Sexa  $\mathbb{X}$  a envoltura dun mosaico plano  $\mathcal{T} \in \mathbb{T}(\mathcal{P})$  aperiódico e repetitivo, dotada dunha estrutura de laminación transversalmente Cantor, minimal e sen holonomía.

Fixemos  $T$  unha transversal canónica de  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$  (definida pola elección dun punto base en cada prototesela de  $\mathcal{P}$ ) e sexa  $\mathcal{R}$  a relación de equivalencia inducida sobre a transversal completa  $X = \mathbb{X} \cap T$ . Como xa se dixo, o seguinte resultado foi anunciado en [4], aínda que a proba era incompleta:

**Teorema 2.4.1 (Teorema de afabilidade [27]).** *A envoltura dun mosaico repetitivo e aperiódico do plano é afable.*

Imos presentar agora unha demostración baseada no esquema de [4] que non precisará de ningún argumento de convexidade. Comecemos describindo o esquema xeral de [4]:

- i) O primeiro paso consiste en empregar o *proceso de inflación* ilustrado en §2.1.3 para construír unha sucesión crecente de REEC's  $\mathcal{R}_n$  que defina unha subrelación AF  $\mathcal{R}_\infty = \varinjlim \mathcal{R}_n$  aberta en  $\mathcal{R}$ .
- ii) A continuación introducimos a noción de bordo de  $\mathcal{R}_\infty$  para estudar o subconxunto de  $X$  no que  $\mathcal{R}$  non coincide con  $\mathcal{R}_\infty$ . Trátase dun subconxunto magro cuxa saturación contén todos os puntos con  $\mathcal{R}_\infty$ -clase distinta da súa  $\mathcal{R}$ -clase.
- iii) Para concluír aplicando o teorema de absorción de [28], debemos probar que o bordo é  $\mathcal{R}_\infty$ -fino. Pero tamén que toda  $\mathcal{R}$ -clase se divide ao sumo nun número finito uniformemente limitado de  $\mathcal{R}_\infty$ -clases.

Precisamos agora con máis detalle as distintas etapas. Na próxima sección imos describir un novo proceso de inflación, que denominaremos *inflación de Robinson* por estar inspirado no proceso de inflación natural dos mosaicos de Robinson, que nos porá en condicións de aplicar o teorema de absorción.

### 2.4.1 Construción dunha subrelación AF mediante inflación

No caso da envoltura dun mosaico, o proceso de inflación foi descrito orixinalmente por J. Bellissard, R. Benedetti e J. M. Gambaudo en [9]. Neste contexto dise que unha descomposición por caixas  $\mathcal{B} = \{\mathbb{B}_i \simeq \mathbb{P}_i \times C_i\}_{i=1}^m$  de  $\mathbb{X}$  é *adaptada a  $\mathcal{P}$*  se as transversais  $C_i$  son aberto-pechados na transversal completa  $X$  e as placas  $\mathbb{P}_i$  son motivos compostos a partir das prototeselas de  $\mathcal{P}$ . A existencia de descomposicións por caixas adaptadas a  $\mathcal{P}$  vén garantida pola definición mesma da laminación do espazo de mosaicos de Gromov-Hausdorff  $\mathbb{T}(\mathcal{P})$ , que fai que os os mosaicos que posúen un mesmo motivo arredor da orixe poidan apilarse en caixas compactas foliadas no produto do motivo por un aberto-pechado, véxase o teorema 1.2.23.

Os seguintes resultados son un caso particular do teorema 2.1.16 e do corolario 2.1.17:

**Teorema 2.4.2** ([9]). *Para toda descomposición por caixas  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{X}$  adaptada a  $\mathcal{P}$ , existe outra  $\mathcal{B}'$  que se obtén por inflación de  $\mathcal{B}$ .*

**Corolario 2.4.3** ([9]). *Para cada descomposición por caixas de  $\mathbb{X}$  adaptada a  $\mathcal{P}$ , existe unha sucesión  $\{\mathcal{B}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  de descomposicións por caixas de  $\mathbb{X}$  adaptadas a  $\mathcal{P}$  tal que:*

- i)  $\mathcal{B}^{(0)} = \mathcal{B}$ ;
- ii)  $\mathcal{B}^{(n+1)}$  obtense por inflación a partir de  $\mathcal{B}^{(n)}$ ;
- iii)  $\mathcal{B}^{(n+1)}$  determina un conxunto finito de prototeselas  $\mathcal{P}^{(n+1)}$ , que son motivos de  $\mathcal{P}^{(n)}$ , e un mosaico en  $\mathbb{T}(\mathcal{P}^{(n+1)})$  de cada folla de  $\mathbb{X}$ ;
- iv) cada tesela de  $\mathcal{P}^{(n+1)}$  contén alomenos unha tesela de  $\mathcal{P}^{(n)}$  no seu interior.

Se  $X^{(n)}$  é o eixo da descomposición  $\mathcal{B}^{(n)}$ , dada unha sucesión crecente de números naturais  $N_n$  podemos supoñer que cada conxunto de Delone  $D_{\mathcal{T}}^{(n)} = L_{\mathcal{T}} \cap X^{(n)}$  é  $N_n$ -discreto.

**Definición 2.4.4.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , defínese unha relación de equivalencia  $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}$  sobre  $X$  da seguinte maneira: a  $\mathcal{R}_n$ -clase de equivalencia dun mosaico  $\mathcal{T} \in X$  é a placa discreta  $P_n = \mathbb{P}_n \cap X$  definida pola placa  $\mathbb{P}_n$  da descomposición  $\mathcal{B}^{(n)}$  que pasa por  $\mathcal{T}$ , é dicir,

$$\mathcal{R}_n[\mathcal{T}] = \{\mathcal{T}' \in \mathcal{R}[\mathcal{T}] \mid \mathcal{T}' \in \mathbb{P}_n\}.$$

**Lema 2.4.5.** *A relación de equivalencia  $\mathcal{R}_n$  é unha REEC sobre  $X$  aberta en  $\mathcal{R}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Proba.** Dotando a  $\mathcal{R}_n$  da topoloxía inducida por  $\mathcal{R}$ , o espazo de unidades  $T$  é un aberto de  $\mathcal{R}_n$  e polo tanto  $\mathcal{R}_n$  é  $\beta$ -discreta. Para comprobar que  $\mathcal{R}_n$  é aberta en  $\mathcal{R}$ , consideremos un par  $(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in \mathcal{R}_n$ . Sabemos que  $\mathcal{T}$  contén un motivo  $\mathbb{P}_n$  arredor da orixe representado por unha prototesela de  $\mathcal{P}^{(n)}$  e o conxunto  $P_n = D_{\mathcal{T}} \cap \mathbb{P}_n$  contén un vector  $v$  tal que  $\mathcal{T}' = \mathcal{T} - v$ . Tomando o aberto-pechado  $X_{\mathbb{P}_n}$  de  $X$  formado por todos o mosaicos que conteñen ao motivo  $\mathbb{P}_n$  e o aberto

$$O(X_{\mathbb{P}_n}, v) = \{(\mathcal{T}'', \mathcal{T}'' - v) \mid \mathcal{T}'' \in X_{\mathbb{P}_n}\}$$

de  $\mathcal{R}$ , temos entón que  $(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \in O(X_{\mathbb{P}_n}, v) \subset \mathcal{R}_n$ . Por último, observemos que  $\mathcal{R}_n$  é a unión finita dos abertos  $O(X_{\mathbb{P}_n}, v)$  asociados aos pares  $(\mathbb{P}_n, v)$  con  $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}^{(n)}$  e  $v \in P_n$ . Cada un destes abertos é tamén pechado, pois coincide co grafo da translación  $\mathcal{T}'' \mapsto \mathcal{T}'' - v$  definida sobre  $X_{\mathbb{P}_n}$ . Polo tanto,  $\mathcal{R}_n$  é compacta.  $\square$

**Proposición 2.4.6.** *O límite indutivo  $\mathcal{R}_\infty = \varinjlim \mathcal{R}_n$  é unha subrelación AF aberta e minimal de  $\mathcal{R}$ .*

**Proba.** Polo lema anterior,  $\mathcal{R}_\infty$  é unha subrelación AF aberta en  $\mathcal{R}$ . Por outra banda, como  $\mathcal{R}$  é minimal, a traza de calquera aberto  $A$  de  $X$  coa órbita  $L_{\mathcal{T}}$  segue a ser un conxunto de Delone que é case-isométrico á folla  $L_{\mathcal{T}}$  e á clase  $\mathcal{R}[\mathcal{T}]$ . Pero ademais, cada clase  $\mathcal{R}_\infty[\mathcal{T}]$  contén unha sucesión crecente de placas discretas  $P_n = \mathbb{P}_n \cap X$  definidas polas placas  $\mathbb{P}_n$  da descomposición  $\mathcal{B}^{(n)}$ . Existe logo  $n_0 \in \mathbb{N}$  de maneira que  $A \cap \mathbb{P}_{n_0} = A \cap P_{n_0} \neq \emptyset$  para algunha placa  $\mathbb{P}_{n_0}$ . Polo tanto,  $\mathcal{R}_\infty[\mathcal{T}]$  corta a calquera aberto e daquela  $\mathcal{R}_\infty$  é tamén minimal.  $\square$

## 2.4.2 Bordo da subrelación AF

Interéranos estudar agora o subconxunto de  $X$  no que  $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}_\infty$ . Con este propósito, introducimos a noción de bordo de  $\mathcal{R}_\infty$ :

**Definición 2.4.7.** i) Para cada  $n \in \mathbb{N}$  e cada  $\mathcal{T} \in X$ , o *bordo* da clase  $\mathcal{R}_n[\mathcal{T}]$  é o conxunto

$$\partial \mathcal{R}_n[\mathcal{T}] = \{\mathcal{T}' \in \mathcal{R}_n[\mathcal{T}] \mid \exists \tau_v \in \Gamma_1 : \tau_v(\mathcal{T}') = \mathcal{T}' - v \notin \mathcal{R}_n[\mathcal{T}]\},$$

onde  $\Gamma_1$  é un sistema simétrico de xeradores do pseudogrupo de holonomía de  $\mathcal{F}$  reducido a  $X$ . Noutros termos,  $\partial \mathcal{R}_n[\mathcal{T}]$  é o conxunto dos mosaicos  $\mathcal{T}' = \mathcal{T} - v$  tales que  $v$  é punto base dalgunha tesela da placa  $\mathbb{P}_n$  que corta a  $\partial \mathbb{P}_n$ .

ii) Definimos o *bordo de  $\mathcal{R}_n$*  como o aberto-pechado

$$\partial \mathcal{R}_n = \bigcup_{\mathcal{T} \in X^{(n)}} \partial \mathcal{R}_n[\mathcal{T}] = \bigcup_{\mathbb{B}_n \in \mathcal{B}^{(n)}} \partial_v B_n$$

onde  $\partial_v B_n$  é o bordo vertical da caixa discreta  $B_n = \mathbb{B}_n \cap X$ .

iii) Finalmente, denominaremos *bordo de  $\mathcal{R}_\infty$*  ao subconxunto pechado

$$\partial \mathcal{R}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \partial \mathcal{R}_n.$$

Obsérvese que a relación  $\mathcal{R}_\infty$  non é maximal, nin sequera no caso de que  $\mathcal{R}$  sexa unha relación AF, pois o bordo  $\partial \mathcal{R}_\infty$  será sempre distinto do baleiro (como intersección decrecente de compactos non baleiros). Para cada mosaico  $\mathcal{T} \in \partial \mathcal{R}_\infty$ , a súa clase  $\mathcal{R}[\mathcal{T}]$  descomponse en alomenos dúas  $\mathcal{R}_\infty$ -clases.

**Definición 2.4.8.** Se substituímos os elementos das  $\mathcal{R}_\infty$ -clases polas correspondentes teselas, obtemos unha descomposición da folla  $L = L_{\mathcal{T}}$  que pasa por  $\mathcal{T}$  en distintas rexións que teñen un bordo común  $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{T}}$  que é unión de lados de teselas. A unión destes bordos é un subconxunto pechado  $\partial_c \mathcal{R}_\infty$  de  $\mathbb{X}$ , chamado *bordo continuo*, que ven dado por

$$\partial_c \mathcal{R}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\mathbb{B}_n \in \mathcal{B}^{(n)}} \partial_v \mathbb{B}_n.$$

Para cada  $n \geq 1$ , a traza do subconxunto pechado  $\bigcup_{\mathbb{B}_n \in \mathcal{B}^{(n)}} \partial_v \mathbb{B}_n$  corta á folla  $L$  nun grafo infinito  $\Gamma_n$  tal que cada aresta separa dúas teselas distintas de  $\mathcal{T}$ . Pola propiedade I3 dunha descomposición inflada (segundo a definición 2.1.15),  $\Gamma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$  é unha árbore infinita sen arestas terminais. Por construción, o número de compoñentes conexas de  $L - \Gamma$  é igual ao número de  $\mathcal{R}_\infty$ -clases en  $\mathcal{R}[\mathcal{T}]$ .

Se remplazamos  $X$  por outra transversal completa  $\check{X}$  que pase polo bordo de cada tesela, podemos supoñer que o correspondente bordo discreto  $\check{\partial} \mathcal{R}_\infty$  é igual a  $\partial_c \mathcal{R}_\infty \cap \check{X}$ . Non obstante, cada punto no novo bordo  $\check{\partial} \mathcal{R}_\infty$  determina varios puntos (no interior das diferentes teselas adxacentes) no bordo orixinal  $\partial \mathcal{R}_\infty$ .

**Proposición 2.4.9.** *O bordo continuo  $\partial_c \mathcal{R}_\infty$  é un subconxunto pechado de  $\mathbb{X}$  que admite unha partición por árbores infinitos sen vértices terminais e tal que  $\check{\partial} \mathcal{R}_\infty$  é unha transversal completa.*

Chegados a este punto, a idea é empregar o teorema de absorción de [27] para “facer desaparecer” o bordo. Para isto, en primeiro lugar, necesitaremos probar que cumpre a seguinte propiedade:

**Definición 2.4.10** ([31]). Sexa  $\mathcal{R}$  unha relación de equivalencia *étale* sobre  $X$ . Un pechado non baleiro  $F \subset X$  dise  *$\mathcal{R}$ -fino* se  $\mu(F) = 0$  para calquera medida de probabilidade  $\mu$  sobre  $X$  invariante por  $\mathcal{R}$ .

No caso que nos ocupa, o dos mosaicos de  $\mathbb{R}^2$ , podese supoñer que as clases de cada relación  $\mathcal{R}_n$  están definidas a partir de descomposicións por caixas con placas convexas que conteñen bólas da radio  $N_n$  cada vez maior que satisfán a desigualdade isoperimétrica  $L(\mathbb{P}_n)/A(\mathbb{P}_n) < 1/n$  (véxase o apéndice B ou [33] para os detalles). Isto permite tomar unha sucesión de descomposicións por caixas con placas que definan sucesións de Følner para probar de maneira directa que  $\partial \mathcal{R}_\infty$  é  $\mathcal{R}_\infty$ -fino. Non obstante, no apéndice B damos unha proba alternativa, válida nun caso máis xeral, que se deriva do tipo de crecemento das follas (véxase tamén [4, 33]). O que

se fai é probar un teorema de tipo Rohlin, seguindo un argumento similar ao que emprega C. Series en [73] para demostrar que calquera foliación con crecemento polinomial é hiperfinita respecto de calquera medida invariante.

Aquí probaremos directamente o seguinte resultado como consecuencia da relación isoperimétrica que van satisfacer as placas obtidas por inflación de Robinson (véxase § 2.5).

**Proposición 2.4.11.** *O bordo  $\partial\mathcal{R}_\infty$  é  $\mathcal{R}_\infty$ -fino.*

### 2.4.3 Absorción

A derradeira etapa da proba do teorema de afabilidade consiste en empegar o teorema de absorción de [28] para eliminar o bordo conservando o carácter afable. Antes de nada, enunciemos este resultado:

**Teorema 2.4.12** ([28]). *Sexa  $\mathcal{R}$  unha relación AF minimal sobre un conxunto de Cantor  $X$  e sexa  $Y$  un pechado  $\mathcal{R}$ -fino de  $X$  tal que  $\mathcal{R}|_Y$  segue sendo étale. Sexa  $\mathcal{K}$  unha REEC sobre  $Y$  que é transversa a  $\mathcal{R}|_Y$  (i.e.  $\mathcal{R} \cap \mathcal{K} = \Delta_Y$  e existe un homeomorfismo de grupoides topolóxicos  $\varphi : \mathcal{R}|_Y * \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} * \mathcal{R}|_Y$  tal que  $\beta \circ \varphi = \beta$  e  $\alpha \circ \varphi = \alpha$ ). Existe entón un homeomorfismo  $h : X \rightarrow X$  tal que*

*i)  $h$  define unha equivalencia orbital entre a relación  $\mathcal{R} \vee \mathcal{K}$  xenerada por  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{K}$ , e a relación  $\mathcal{R}$ ;*

*ii)  $\mathcal{R}|_{h(Y)}$  é étale e  $h(Y)$  é  $\mathcal{R}$ -fino;*

*iii)  $h|_Y$  define un isomorfismo entre  $\mathcal{R}|_Y \vee \mathcal{K}$  e  $\mathcal{R}|_{h(Y)}$ .*

*En particular,  $\mathcal{R} \vee \mathcal{K}$  é afable.*

Lembremos que  $\mathcal{R} * \mathcal{K}$  é o conxunto dos pares  $(x, y) \in \mathcal{R}$  e  $(x', y') \in \mathcal{K}$  tales que  $\alpha(x, y) = y = x' = \beta(x', y')$  dotado da topoloxía inducida por  $\mathcal{R} \times \mathcal{K}$ .

Tendo en conta as proposicións 2.4.6, 2.4.9 e 2.4.11, a relación  $\mathcal{R}_\infty$  satisfai as hipótesis iniciais do teorema de absorción. Por outra banda, o grafo de  $\mathcal{R}|_{\partial\mathcal{R}_\infty}$  é a unión dunha familia numerable de biseccións aberto-pechadas  $G_i$  obtidas como grafos de transformacións parciais  $\varphi_i : A_i \rightarrow B_i$  entre aberto-pechados disxuntos  $A_i$  e  $B_i$  de  $\partial\mathcal{R}_\infty$ . Deste xeito, cada bisección pechada  $\tilde{G}_i = G_i - \mathcal{R}_\infty$  é o grafo dunha transformación parcial  $\tilde{\varphi}_i : \tilde{A}_i \rightarrow \tilde{B}_i$  entre pechados disxuntos  $\tilde{A}_i$  e  $\tilde{B}_i$  de  $\partial\mathcal{R}_\infty$ . Se supoñemos que todas as  $\mathcal{R}$ -clases se descompoñen ao sumo en dúas  $\mathcal{R}_\infty$ -clases, entón  $\tilde{\varphi}_i$  define un isomorfismo entre  $\mathcal{R}_\infty|_{\tilde{A}_i}$  e  $\mathcal{R}_\infty|_{\tilde{B}_i}$  e o seu grafo  $\tilde{G}_i$  determina unha REEC transversa a  $\mathcal{R}_\infty|_{\tilde{A}_i \cup \tilde{B}_i}$ . Temos entón unha descomposición global  $\partial\mathcal{R}_\infty = A \cup B$  e unha transformación global  $\varphi : A \rightarrow B$  cuxo grafo determina unha REEC  $\mathcal{K}$  transversa a  $\mathcal{R}_\infty|_{\partial\mathcal{R}_\infty}$ . De feito, neste caso podemos usar unha

versión anterior do teorema de absorción (teorema 4.18 de [31]) para concluír que  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_\infty \vee \mathcal{K}$  é orbitalmente equivalente a  $\mathcal{R}_\infty$ . Non obstante, en xeral, non podemos dividir o bordo  $\partial\mathcal{R}_\infty$  en subconxuntos pechados co mesmo número de  $\mathcal{R}_\infty$ -clases. Isto obríganos a introducir un proceso de inflación particular que nos permita aplicar o teorema de absorción.

## 2.5 Inflación de Robinson

Imos definir un proceso de inflación para mosaicos do plano inspirado no proceso de construción dos mosaicos de Robinson que describimos en §1.12. Para comezar, imos substituír o conxunto de prototeselas dado por un conxunto equivalente de cadrados decorados, en virtude dun resultado de L. Sadun e R. F. Williams [72]. A continuación construiremos unha familia de caixas cuxas placas sexan cadrados de lado fixado, que non será exhaustiva pero si maximal nun certo sentido. Finalmente, a partires desta descomposición parcial imos definir unha auténtica descomposición por caixas sobre a que seguiremos tendo un control da razón isoperimétrica das placas e as posibles configuracións locais. Deste xeito, obteremos un proceso de inflación recorrente que nos proporcionará unha subrelación AF  $\mathcal{R}_\infty$  de maneira que cada  $\mathcal{R}$ -clase se divida ao sumo en catro  $\mathcal{R}_\infty$ -clases diferentes. O seu bordo  $\partial\mathcal{R}_\infty$  poderá dividirse entón nunha familia numerable (finita ou infinita) de subconxuntos  $\mathcal{R}_\infty$ -finos dotados de sendas REECs transversas a  $\mathcal{R}_\infty|_{\partial\mathcal{R}_\infty}$ .

### 2.5.1 Redución de Sadun-Williams

En [72], L. Sadun e R. F. Williams demostran que a envoltura dun mosaico repetitivo e aperiódico do plano é un fibrado localmente trivial sobre o toro  $\mathbb{T}^2$  con fibra un conxunto de Cantor. Para isto, proban previamente:

**Teorema 2.5.1** ([72]). *A envoltura dun mosaico de plano de tipo finito é orbitalmente equivalente á envoltura dun mosaico cuxas teselas son cadrados con decoracións a modo de regras de adxacencia.*  $\square$

No noso caso, fixado un mosaico repetitivo e aperiódico  $\mathcal{T}$  obtido a partir dun conxunto finito de prototesela  $\mathcal{P}$  e grazas a este teorema, podemos supoñer que o conxunto de prototeselas  $\mathcal{P}$  é un conxunto finito de cadrados decorados. Isto permítenos ter maior control sobre a transversal completa inicial e tomar de partida unha descomposición por caixas  $\mathcal{B}$  con placas cadradas. Suporemos ademais que todas as follas da envoltura  $\mathbb{X}$  están dotadas coa distancia do máximo.

## 2.5.2 Descomposición parcial

A nosa idea é facer unha inflación que force as propiedades desexadas. Para isto, comezamos tomando unha transversal suficientemente pequena e inflando as teselas de partida da maneira máis natural:

**Lema 2.5.2.** *Existe unha familia finita  $\mathcal{B}_1$  de caixas  $\mathbb{B}_{1,i} \cong \mathbb{P}_{1,i} \times C_{1,i}$ ,  $i = 1, \dots, k_1$ , tal que as placas  $\mathbb{P}_{1,i}$  son motivos cadrados de lado  $N_1$  e a transversal  $C_1 = \bigcup_{i=1}^{k_1} C_{1,i}$  asociada é  $N_1$ -densa en  $\mathbb{X}$  (con respecto á distancia do máximo).*

**Proba.** Tomemos  $C_{1,1}$  unha transversal completa suficientemente pequena para permitírnos definir un compacto foliado en produto  $\mathbb{B}_{1,1} \cong \mathbb{P}_{1,1} \times C_{1,1}$  tal que, para cada  $\mathcal{T} \in C_{1,1}$ , a placa que pasa por  $\mathcal{T}$  é a bóla  $\bar{B}_{\mathcal{T}}(0, \frac{N_1}{2})$  coa distancia do máximo (suporemos, unicamente por cuestións de notación, que  $N_1 \in \mathbb{N}$  é par). A traza de  $\mathbb{B}_{1,1}$  con calquera folla  $L$  é entón unha familia numerable de cadrados de lado  $N_1$ . Definamos  $\mathcal{B}_1 = \mathbb{B}_{1,1}$ . Se  $L - \mathcal{B}_1$  non contén ningunha bóla cadrada de lado  $N_1$ , entón  $\mathcal{B}_1$  cumpre as propiedades requiridas. En caso contrario, existe outra caixa  $\mathbb{B}_{1,2} \cong \mathbb{P}_{1,2} \times C_{1,2}$  coas mesmas propiedades que  $\mathbb{B}_{1,1}$  e redefinimos entón  $\mathcal{B}_1 = \mathbb{B}_{1,1} \cup \mathbb{B}_{1,2}$ . Por indución, nun número finito de pasos obtemos unha familia maximal  $\mathcal{B}_1$  que satisfai as condicións desexadas.  $\square$

Imos denominar *descomposición parcial*  $\mathcal{B}_1 = \{\mathbb{B}_{1,i}\}_{i=1}^{k_1}$  a esta familia e denotaremos  $\mathcal{P}_1$  ao conxunto das placas  $\mathbb{P}_{1,i}$ . O seguinte paso agora é substituír  $\mathcal{B}_1$  por unha descomposición por caixas  $\mathcal{B}'_1$  de  $\mathbb{X}$ . Para isto necesitamos algunha notación:

**Definición 2.5.3.** Sexan  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{Q}$  dúas placas de  $\mathcal{B}_1$  contidas na mesma folla de  $\mathbb{X}$ . Diremos que  $\mathbb{Q}$  é *veciña de*  $\mathbb{P}$  se a distancia ortogonal dun lado de  $\mathbb{P}$  a  $\mathbb{Q}$  é o mínimo das distancias dese lado de  $\mathbb{P}$  a calquera outra placa, véxase a figura 2.6(a). A unión dos segmentos ortogonais que realizan a distancia entre  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{Q}$  denominarase *brazo* (do complementario da traza de  $\mathcal{B}_1$  coa folla), véxase a figura 2.6(b). Chamaremos *eixo* ao segmento paralelo e equidistante a cada un dos lados de  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{Q}$  que divide ao brazo en dous *semibrazos*. Obsérvase ademais que a relación ser veciño non é simétrica, é dicir,  $\mathbb{P}$  non é necesariamente veciño de  $\mathbb{Q}$  por ser  $\mathbb{Q}$  veciño de  $\mathbb{P}$ , véxase de novo a figura 2.6(a).

**Lema 2.5.4.** *A lonxitude dos lados dun brazo está limitada por  $N_1$ .*

**Proba.** É obvio que a lonxitude dos lados do brazo que cortan ás placas de  $\mathcal{B}_1$  está limitada por  $N_1$ . Por outra banda, se a anchura dun brazo (entre dúas placas  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{Q}$ ) fora maior que  $N_1$ , entón habería sitio na folla (entre dúas placas  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{Q}$ ) para un motivo cadrado de lado  $N_1$ , polo que  $C_1$  non sería  $N_1$ -denso (véxase a figura 2.6(c)).  $\square$



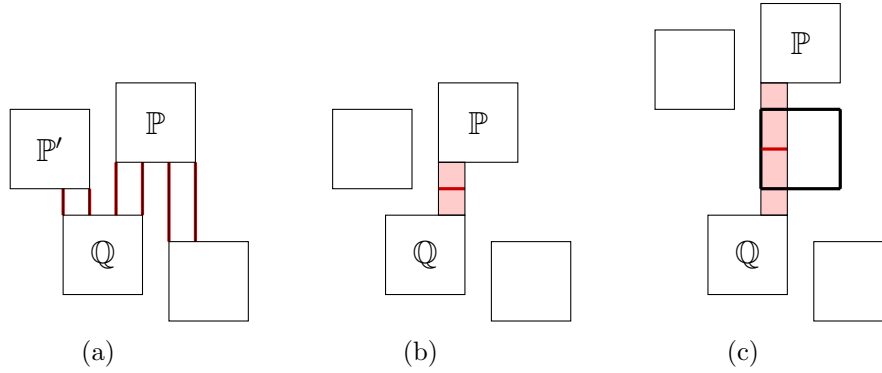


Figura 2.6: Brazos e eixos

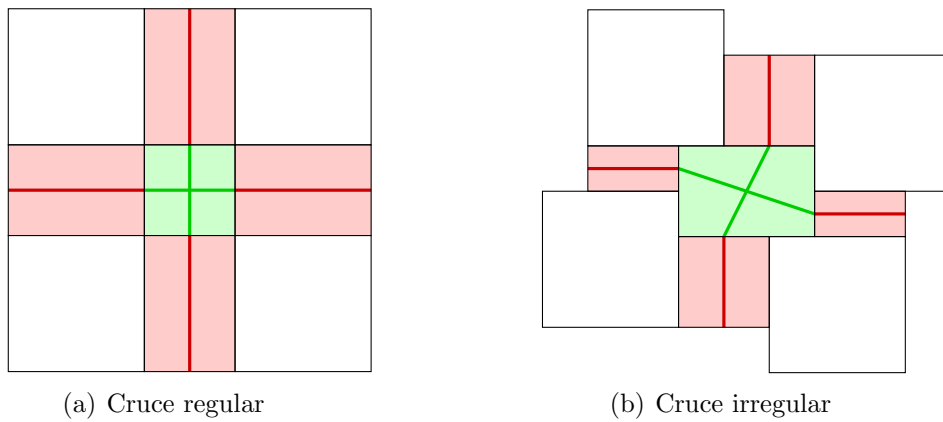


Figura 2.7: Cruces con 4 saídas

**Lema 2.5.5.** *Para cada mosaico  $\mathcal{T} \in \mathbb{X}$ , consideremos a unión das placas das caixas da descomposición parcial  $\mathcal{B}_1$  e os brazos do seu complementario. Cada compoñente conexas do complementario desta unión é un rectángulo con lados de lonxitude menor ou igual que  $2N_1$ .*

**Proba.** Como cada placa de  $\mathcal{B}_1$  ten ao sumo 4 veciños, o bordo de cada compoñente conexas corta a 3 ou 4 placas de  $\mathcal{B}_1$  e a 3 ou 4 brazos entre estas placas. En calquera caso, a compoñente conexas é un rectángulo con lados de lonxitude menor ou igual que  $2N_1$ , como pode verse nas figuras 2.7 e 2.8.  $\square$

**Observación 2.5.6.** Poden aparecer casos dexenerados como os que se amosan na figura 2.9.

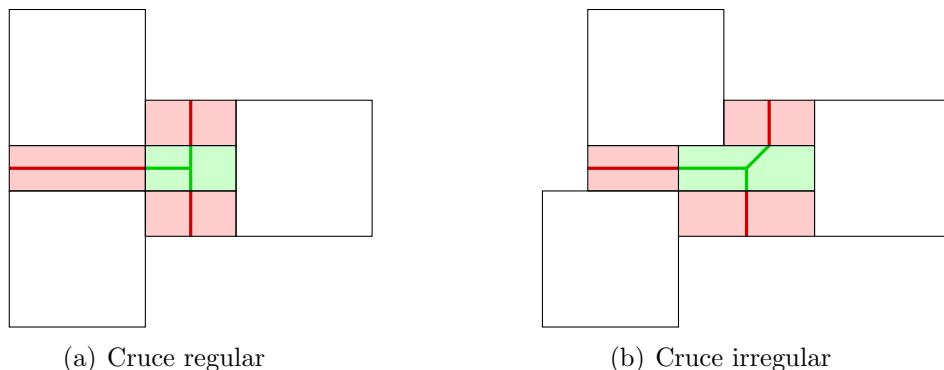


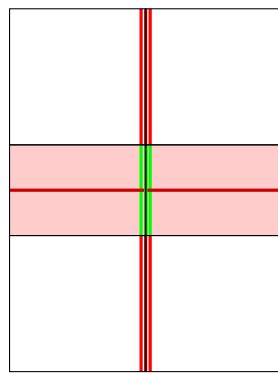
Figura 2.8: Cruces con 3 saídas

**Definición 2.5.7.** i) Cada unha destas compoñentes conexas denominarase *cruce*.  
 ii) Chamaremos *punto de saída* dun cruce ao punto medio da intersección de cada brazo co cruce. Cada lado dun cruce contén a sumo 1 punto de saída e cada cruce non dexenerado (resp. dexenerado) posúe alomenos 3 (resp. de 1 a 4 incluíndo a multiplicidade) puntos de saída, véxanse as figuras 2.7, 2.8, e 2.9. Correspóndense con puntos fronteira *positivos* ou *negativos* do eixo (con respecto á orientación positiva usual).  
 iii) Unindo o centro de masa dun cruce cos seus puntos de saída obtemos un grafo que chamaremos *decoración* do cruce. No caso non dexenerado, a decoración separa o cruce en 3 ou 4 rexións. No caso dexenerado, o cruce redúcese a un lado común de dous brazos adxacentes (decorado co punto medio contido nos dous eixos) ou a un único punto (que é a intersección de dous brazos dexenerados). Chamaremos *sector* a cada unha destas partes do cruce.

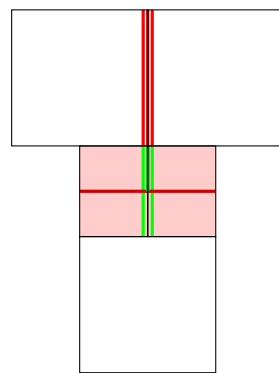
### 2.5.3 Descomposicións completa e inflada

Usando os cruces e os brazos podemos definir a partir de  $\mathcal{B}_1$  unha verdadeira descomposición por caixas  $\mathcal{B}'_1$  e modificando lixeiramente esta descomposición podemos obter outra  $\mathcal{B}''_1$  que sexa ademais unha descomposición inflada da descomposición  $\mathcal{B}$  de partida:

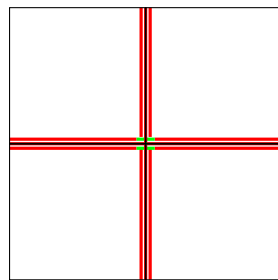
**Definición 2.5.8.** Sexa  $\mathbb{P}$  unha placa da descomposición  $\mathcal{B}_1$ . Denotaremos  $\mathbb{P}'$  á unión de  $\mathbb{P}$  cos semibrazos e os sectores de cruce adxacentes e  $\mathbb{P}''$  á unión das teselas de  $\mathcal{P}$  que cortan a  $\mathbb{P}'$ , de maneira que se unha tesela corta a varios sectores (resp. semibrazos) convimos incluíla sempre no sector (resp. semibrazo) colocado á súa dereita e arriba. Deste xeito,  $\mathbb{P}'$  (resp.  $\mathbb{P}''$ ) é unha tesela dun mosaico  $\mathcal{T}'$



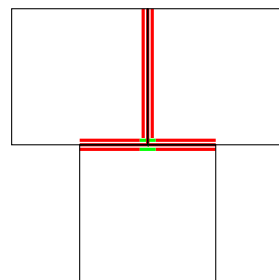
(a) 3 puntos de saída



(b) 2 puntos de saída



(c) 1 punto de saída



(d) 1 punto de saída

Figura 2.9: Cruces e brazos dexenerados

do plano (resp. dun mosaico  $\mathcal{T}''$  obtido por inflación de  $\mathcal{T} \in \mathbb{X}$ ) e unha placa da descomposición  $\mathcal{B}'_1$  (resp. da descomposición  $\mathcal{B}''_1$  obtida por inflación de  $\mathcal{B}$ ). Chamaremos a este proceso *inflación de Robinson*, noutros termos, diremos que  $\mathcal{B}''$  obtense a partir de  $\mathcal{B}$  por inflación de Robinson.

**Lema 2.5.9.** *Cada tesela  $\mathbb{P}'$  e cada tesela inflada  $\mathbb{P}''$  conteñen un cadrado de lado  $N_1$  e están contidas nun cadrado de lado  $3N_1$ . As súas áreas  $A(\mathbb{P}')$  e  $A(\mathbb{P}'')$  están comprendidas logo entre  $N_1^2$  e  $9N_1^2$ . Ademais, se  $\mathbb{P}'$  e  $\mathbb{P}''$  están asociadas á mesma placa  $\mathbb{P}$  de  $\mathcal{B}_1$ , entón*

$$A(\mathbb{P}'') \geq A(\mathbb{P}') - L(\partial\mathbb{P}')A(\mathbb{P}_0) = A(\mathbb{P}') - L(\partial\mathbb{P}')$$

e

$$L(\partial\mathbb{P}'') \leq L(\partial\mathbb{P}')L(\partial\mathbb{P}_0) \leq 64N_1$$

onde  $\mathbb{P}_0$  é a prototesela cadrada de  $\mathcal{T}$ .

**Proba.** En primeiro lugar, como obtemos  $\mathbb{P}''$  a partir de  $\mathbb{P}'$  engadindo ou quitando teselas de  $\mathcal{P}$ , temos que

$$A(\mathbb{P}'') \geq A(\mathbb{P}') - L(\partial\mathbb{P}')A(\partial\mathbb{P}_0) \quad \text{e} \quad L(\partial\mathbb{P}'') \leq L(\partial\mathbb{P}')L(\partial\mathbb{P}_0)$$

onde  $A(\mathbb{P}_0) = 1$  e  $L(\partial\mathbb{P}_0) = 4$ . Por outra banda, cando substituímos  $\mathbb{P}$  por  $\mathbb{P}'$  incrementamos ao sumo a lonxitude de cada cara en  $2\sqrt{2}N_1 \leq 3N_1$ , onde  $2\sqrt{2}N_1$  é o produto do número máximo de cruces non dexenerados que cortan a cada lado de  $\mathbb{P}$  (igual a 2) e a metade da diagonal do cadrado de lado  $2N_1$  (igual a  $\sqrt{2}N_1$ ). Concluimos polo tanto que  $L(\partial\mathbb{P}') \leq 4(N_1 + 3N_1) = 16N_1$ .  $\square$

Por indución, podemos enunciar agora o seguinte teorema:

**Teorema 2.5.10.** *Existe unha sucesión de descomposicións por caixas  $\mathcal{B}''_n$  tal que  $\mathcal{B}''_0 = \mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}''_{n+1}$  obtense por inflación de Robinson a partir de  $\mathcal{B}''_n$ .*  $\square$

Denotemos por  $\mathcal{P}'_n$  (resp.  $\mathcal{P}''_n$ ) ao conxunto finito das clases de placas de  $\mathcal{B}'_n$  (resp.  $\mathcal{B}''_n$ ). A descomposición  $\mathcal{B}'_n$  (resp.  $\mathcal{B}''_n$ ) induce un mosaico  $\mathcal{T}'_n \in \mathbb{T}(\mathcal{P}'_n)$  (resp.  $\mathcal{T}''_n \in \mathbb{T}(\mathcal{P}''_n)$ ) en cada folla de  $\mathbb{X}$ . Cada placa  $\mathbb{P}'_{n+1}$  (resp.  $\mathbb{P}''_{n+1}$ ) da descomposición por caixas  $\mathcal{B}'_{n+1}$  (resp. da descomposición por caixas inflada  $\mathcal{B}''_{n+1}$ ) é un  $\mathcal{P}'_n$ -motivo (resp.  $\mathcal{P}''_n$ -motivo) que se constrúe a partir dun cadrado de lado  $N_{n+1}$  e está contida nun cadrado de lado  $3N_{n+1}$ . O mosaico  $\mathcal{T}''_{n+1} \in \mathbb{T}(\mathcal{P}''_{n+1})$  inducido por  $\mathcal{B}''_{n+1}$  obtense por inflación de Robinson do mosaico  $\mathcal{T}''_n \in \mathbb{T}(\mathcal{P}''_n)$  inducido por  $\mathcal{B}''_n$ . Como na proba do lema 2.5.9, temos que

$$A(\mathbb{P}''_{n+1}) \geq A(\mathbb{P}'_{n+1}) - L(\partial\mathbb{P}'_{n+1})A_n \quad \text{e} \quad L(\partial\mathbb{P}''_{n+1}) \leq L(\partial\mathbb{P}'_{n+1})L_n$$

onde

$$A_n = \max\{A(\mathbb{P}''_n) \mid \mathbb{P}''_n \in \mathcal{P}''_n\} \quad \text{e} \quad L_n = \max\{L(\mathbb{P}''_n) \mid \mathbb{P}''_n \in \mathcal{P}''_n\}.$$

Ademais,

$$A(\mathbb{P}'_{n+1}) \geq N_{n+1}^2 \quad \text{e} \quad L(\partial\mathbb{P}'_{n+1}) \leq 16N_{n+1}.$$

Finalmente, se  $n$  é suficientemente grande, podemos asegurar que  $L_n \leq A_n$ .

**Proposición 2.5.11.** *Existe unha sucesión de naturais  $N_n$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L(\partial\mathbb{P}''_n)}{A(\mathbb{P}''_n)} = 0.$$

**Proba.** Tendo en conta as desigualdades anteriores e tomando, por exemplo,  $N_{n+1} = N_n^3$ , a razón isoperimétrica satisfai

$$\begin{aligned} \frac{L(\partial\mathbb{P}''_{n+1})}{A(\mathbb{P}''_{n+1})} &\leq \frac{L(\partial\mathbb{P}'_{n+1})L_n}{A(\mathbb{P}'_{n+1}) - L(\partial\mathbb{P}'_{n+1})A_n} \\ &\leq \frac{L(\partial\mathbb{P}'_{n+1})A_n}{A(\mathbb{P}'_{n+1}) - L(\partial\mathbb{P}'_{n+1})A_n} \\ &= \frac{1}{\frac{A(\mathbb{P}'_{n+1})}{L(\partial\mathbb{P}')} \frac{1}{A_n} - 1} \\ &\leq \frac{1}{\frac{N_{n+1}^2}{16N_{n+1}} \frac{1}{9N_n^2} - 1} \\ &= \frac{144N_n^2}{N_{n+1} - 144N_n^2} \end{aligned}$$

e polo tanto converxe a 0 cando  $n \rightarrow \infty$ . □

## 2.5.4 Propiedades do bordo na inflación de Robinson

Imos subsituír a sucesión de descomposicións por caixas  $\mathcal{B}^{(n)}$  da sección §2.4 definida de forma usual pola descomposición por caixas  $\mathcal{B}''_n$  que proporciona o teorema 2.5.10, definida por inflación de Robinson, mais mantendo a notación xa introducida. É dicir, reproducindo novamente os mesmos argumentos, obtemos unha subrelación  $\mathcal{R}_\infty = \varinjlim \mathcal{R}_n$  de  $\mathcal{R}$  que é unha relación AF minimal (proposición 2.4.6). A primeira cuestión que resulta sinxela agora é a proba da proposición 2.4.11.

**Proba da proposición 2.4.11.** Sexa  $\mu$  unha medida de probabilidade sobre  $X$  invariante por  $\mathcal{R}_\infty$ . Para cada caixa discreta  $B_n'' \cong P_n'' \times C_n''$  definida por  $\mathcal{B}_n''$ , temos que

$$\mu(B_n'') = \#P_n'' \mu(C_n'') \quad \text{e} \quad \mu(\partial_v B_n'') = \#\partial P_n'' \mu(C_n'')$$

onde  $\#P_n''$  e  $\#\partial P_n''$  denotan o número de elementos da placa discreta  $P_n''$  e o seu bordo  $\partial P_n''$ . Deste xeito, para cada  $n \geq 1$ , séguese que

$$\begin{aligned} \mu(\partial \mathcal{R}_n) &= \sum_{\mathbb{B}_n'' \in \mathcal{B}_n''} \mu(\partial_v B_n'') \\ &= \sum_{\mathbb{B}_n'' \in \mathcal{B}_n''} \#\partial P_n'' \mu(C_n'') \\ &= \sum_{\mathbb{B}_n'' \in \mathcal{B}_n''} \frac{\#\partial P_n''}{\#P_n''} \mu(B_n'') \\ &\leq \max_{\mathbb{P}_n'' \in \mathcal{P}_n''} \left\{ \frac{\#\partial P_n''}{\#P_n''} \right\} \sum_{\mathbb{B}_n'' \in \mathcal{B}_n''} \mu(B_n'') \\ &= \max_{\mathbb{P}_n'' \in \mathcal{P}_n''} \left\{ \frac{\#\partial P_n''}{\#P_n''} \right\} \mu(X) = \max_{\mathbb{P}_n'' \in \mathcal{P}_n''} \left\{ \frac{\#\partial P_n''}{\#P_n''} \right\} \end{aligned}$$

A proposición 2.5.11 implica agora que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\partial P_n''}{\#P_n''} = 0$$

para cada  $\mathbb{P}_n'' \in \mathcal{P}_n''$ . En efecto, substituíndo a distancia do máximo sobre as follas pola métrica discreta (definida como a lonxitude mínima dos camiños de  $\mathcal{P}$ -teselas que unen dous puntos), podemos supoñer que  $L(\partial \mathbb{P}_n'') = \#\partial P_n''$  e  $A(\mathbb{P}_n'') = \#P_n''$ . Temos entón que

$$\mu(\partial \mathcal{R}_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\partial \mathcal{R}_n) = 0$$

e polo tanto  $\partial \mathcal{R}_\infty$  é  $\mathcal{R}_\infty$ -fino. □

A segunda propiedade importante do bordo que debemos probar para poder aplicar o teorema de absorción é a seguinte:

**Proposición 2.5.12.** *Cada  $\mathcal{R}$ -clase descomponse ao sumo en catro  $\mathcal{R}_\infty$ -clases.*

Probaremos de feito que cada árbore da partición do bordo continuo  $\partial_c \mathcal{R}_\infty$  separa a correspondente folla da envoltura  $\mathbb{X}$  en ao sumo 4 compoñentes conexas. Para isto precisamos introducir algunhas definicións. Lembremos que temos considerado unha sucesión de descomposicións por caixas  $\mathcal{B}_n'$  de  $\mathbb{X}$  con placas obtidas a partir

de cadrados  $\mathbb{P}_n$  de lado  $N_n$ . Denotaremos  $A_n$  e  $C_n$  aos correspondentes brazos e cruces, e no que segue, suporemos sempre que todos estes elementos pertencen á mesma folla  $L$  de  $\mathbb{X}$ .

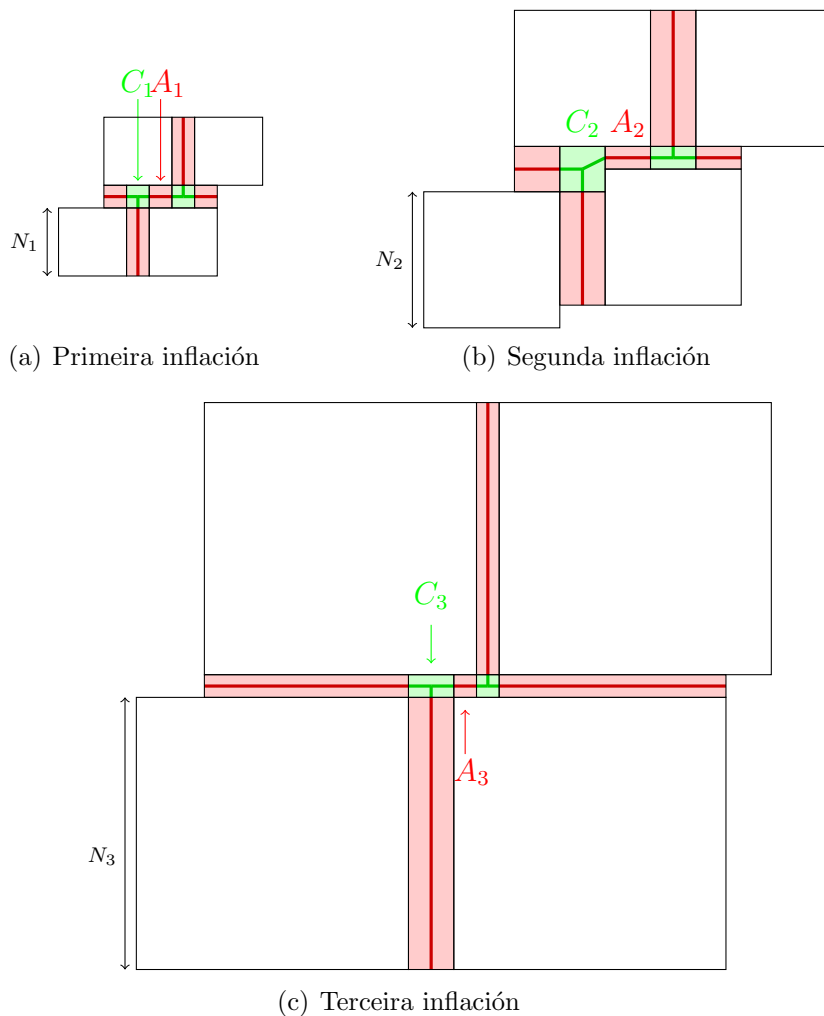


Figura 2.10: Brazos e cruces virtuais

**Definición 2.5.13.** Denominaremos *brazo virtual* (resp. *cruce virtual*) do proceso de inflación a unha sucesión de brazos  $A_n$  (resp. cruces  $C_n$ ) cuxos eixos  $a_n$  (resp. centros de masa  $c_n$ ) están contidos nunha franxa horizontal ou vertical de ancho constante (resp. nun cadrado de lado contante). Obsérvese que os eixos e os centros de masa poden oscilar no interior destas franxas ou cadrados, véxase a figura 2.10.

**Proba da proposición 2.5.12.** Para probar o resultado, imos analizar os distintos casos posibles:

1) *Non existen nin cruces nin brazos virtuais.* Neste caso, a folla  $L$  non interseca ao bordo continuo  $\partial_c \mathcal{R}_\infty$ , o que implica que  $\mathcal{R}_\infty[\mathcal{T}] = \mathcal{R}[\mathcal{T}]$  para cada  $\mathcal{T} \in L \cap X$ .

2) *Existe un brazo virtual, pero non cruces virtuais.* Por definición, hai unha sucesión de brazos  $A_n$  cuxos eixos  $a_n$  permanecen no interior dunha franxa de ancho constante. Temos entón tres posibilidades:

2.1) *Os puntos fronteira dos eixos  $a_n$  non permanecen no interior dun cadrado de lado constante.* Deste xeito, cando substituímos cada eixo  $a_n$  por  $a_{n+1}$ , o eixo crece en dous sentidos opostos determinados polo eixo da franxa. Podemos supoñer que  $a_n$  crece *cara a dereita e cara a esquerda* no caso da dirección horizontal e *cara arriba e cara abaixo* no caso da dirección vertical. Nos dous casos, como as árbores de  $\partial_c \mathcal{R}_\infty$  non teñen arestas terminais (proposición 2.4.9), o bordo continuo  $\partial_c \mathcal{R}_\infty$  separa a folla  $L$  en dúas compoñentes conexas, e polo tanto  $\mathcal{R}[\mathcal{T}]$  queda dividida en dúas  $\mathcal{R}_\infty$ -clases.

2.2) *Os puntos fronteira positivos ou negativos dos eixos permanecen no interior dun cadrado de lado constante.* Supoñamos primeiro que só os puntos fronteira dun lado, poñamos o negativo, satisfán esta condición. Neste caso, como por hipótese non hai cruces virtuais na folla  $L$ , a única posibilidade é que exista unha sucesión de cruces  $C_n$  cada vez maiores tales que un dos seus puntos de saída coincide co punto fronteira negativo do eixo  $a_n$ . As decoracións dos cruces  $C_n$  deben crecer logo á esquerda (i.e. en sentido negativo do eixo se a franxa é horizontal) ou cara abaixo (i.e. en sentido negativo do eixo se a franxa é vertical). Agora, compoñendo o eixo  $a_n$  co correspondente bordo da decoración do cruce  $C_n$ , reducimos este subcaso ao anterior. O mesmo argumento é válido se supoñemos que son os puntos fronteira positivos os que satisfán a condición. Por último, se tanto os puntos fronteira positivos coma os negativos permanecen no interior dun cadrado de lado constante, a única situación posible é que o brazo virtual (definido por unha sucesión de brazos de lonxitude limitada) conecte dúas sucesións de cruces cada vez maiores  $C_n$  e  $C'_n$  que teñen necesariamente tres saídas e crecen en sentidos opostos. Neste caso basta combinar os argumentos dos casos anteriores para obter a mesma conclusión.

3) *Existe un único cruce virtual.* Temos agora unha sucesión de cruces  $C_n$  cuxos centros de masa  $c_n$  pertencen a un cadrado de lado constante. Como antes, podemos distinguir dous subcasos:

3.1) *Os cruces teñen catro saídas (incluíndo a multiplicidade).* Os puntos de saída dos lados dereito e esquerdo dos cruces  $C_n$  son puntos fronteira negativos e positivos de eixos  $a_n$  de brazos  $A_n$  que definen respectivamente brazos virtuais á dereita e



esquerda do cruce virtual. Analogamente, os puntos de saída dos lados superior e inferior dos cruces son puntos fronteira negativos e positivos de eixos de brazos que definen brazos virtuais enriba e debaixo do cruce virtual. Temos logo 4 brazo virtuais (do tipo descrito no subcaso 2.2) asociados ao cruce virtual, véxase a figura 2.11. Logo é claro que neste caso a traza de  $\partial_c \mathcal{R}_\infty$  separa  $L$  en 4 compoñentes conexas e a correspondente clase  $\mathcal{R}[\mathcal{T}]$  queda dividida entón en catro  $\mathcal{R}_\infty$ -clases.

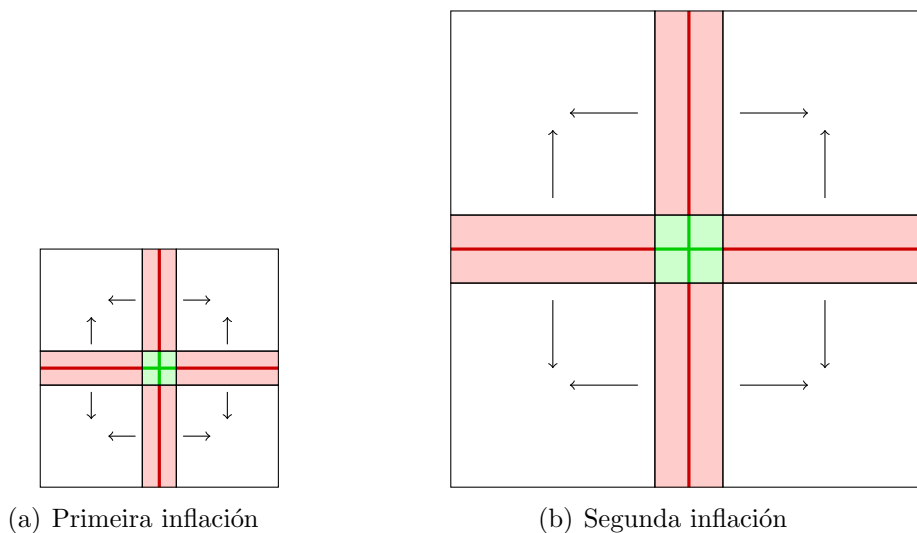


Figura 2.11: Cruce virtual con 4 saídas

3.2) *Os cruces teñen tres saídas (incluíndo a multiplicidade).* A situación é análoga á do caso anterior. Agora podemos asociar ao cruce virtual 3 brazos virtuais cuxos eixos crecen en tres sentidos distintos (i.e. á dereita e á esquerda, pero só ou cara arriba ou cara abaixo; ou cara arriba e cara abaixo, pero só ou á dereita ou á esquerda, véxase a figura 2.12). Temos entón que a traza de  $\partial_c \mathcal{R}_\infty$  separa á folla  $L$  en 3 compoñentes conexas e a correspondente clase  $\mathcal{R}[\mathcal{T}]$  queda dividida en tres  $\mathcal{R}_\infty$ -clases.

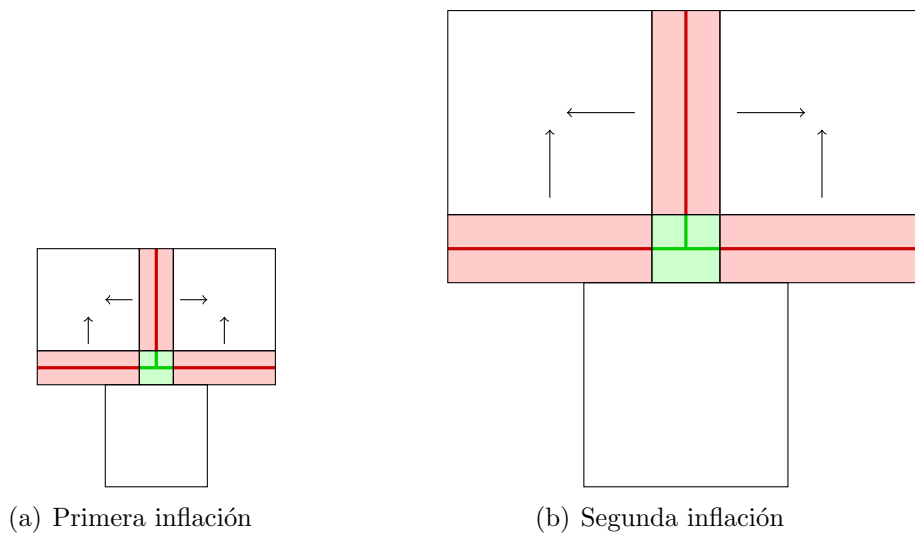


Figura 2.12: Cruce virtual con 3 saídas

4) *Existe máis dun cruce virtual.* Como o tamaño das placas da descomposición parcial  $\mathcal{B}_n$  tende a  $\infty$ , a única posibilidade é que haxa exactamente dous cruces virtuais con tres saídas conectados por un brazo virtual de lonxitude limitada e de maneira que os demais brazos virtuais (verticais e horizontais) que definen os dous cruces crecen en sentidos opostos, véxase a figura 2.13. Aínda así, neste caso  $\partial_c \mathcal{R}_\infty$  separa a folla  $L$  en 4 compoñentes conexas (e  $\mathcal{R}[\mathcal{T}]$  divídese en catro  $\mathcal{R}_\infty$ -clases).

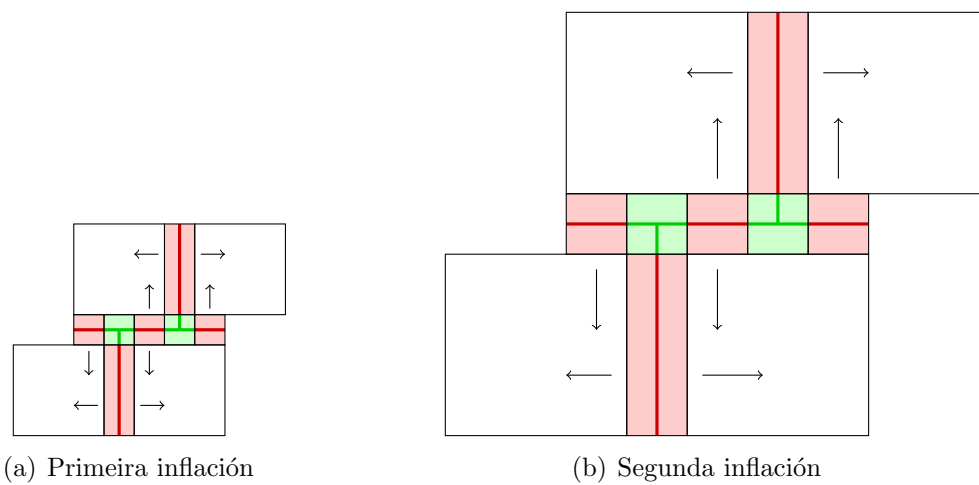


Figura 2.13: Dous cruces virtuais conectados por un brazo virtual

Para rematar, observemos que nos sucesivos pasos da inflación poderían darse distintos tipos de configuracións. É dicir, a sucesión de configuracións non ten que ser necesariamente constante. Tampouco estacionaria, xa que as descomposicións  $\mathcal{B}'_n$  non son infladas. Podemos ter o caso, por exemplo, dun cruce virtual definido por unha sucesión de cruces con 3 e 4 saídas que se alternan indefinidamente. Non obstante, nestes casos o número de partes nas que se divide a folla (e polo tanto o número de  $\mathcal{R}_\infty$ -clases nos que se divide a correspondente clase  $\mathcal{R}[\mathcal{T}]$ ) estará determinado pola configuración que separa no menor número de partes, pois as descomposicións  $\mathcal{B}''_n$  que determinan o bordo real si son infladas, o que implica que as partes que “se pegan” permanecen unidas nas sucesivas inflacións.

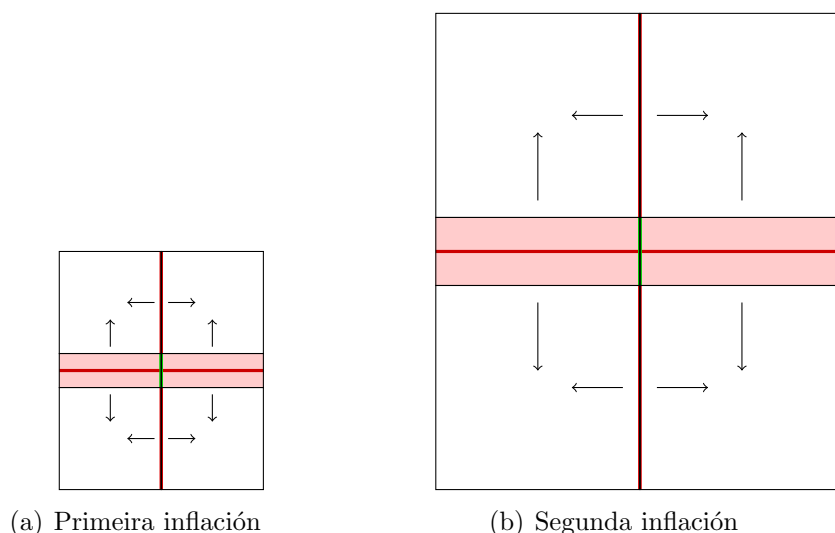


Figura 2.14: Cruce virtual con catro saídas dexenerado

Por outra banda, nos casos descritos poderíamos ter cruces ou brazos virtuais dexenerados (definidos por sucesións de cruces e brazos dexenerados, véxase a figura 2.14), mais a análise nese caso é totalmente análoga.  $\square$

A discusión anterior pode resumirse na seguinte proposición:

**Proposición 2.5.14.** *Sexa  $\mathbb{X}$  a envoltura dun mosaico repetitivo e aperiódico do plano cuxas teselas son cadrados decorados. Sexa  $\mathcal{R}$  a relación de equivalencia étale inducida sobre unha transversal completa  $X$  pola laminación natural de  $\mathbb{X}$ , e  $\mathcal{R}_\infty$  a subrelación AF definida pola inflación de Robinson. O bordo  $\partial\mathcal{R}_\infty$  é un subconxunto pechado, magro e  $\mathcal{R}_\infty$ -fino de  $X$  tal que as  $\mathcal{R}$ -clases representadas por puntos de  $\partial\mathcal{R}_\infty$  están divididas ao sumo en catro  $\mathcal{R}_\infty$ -clases.  $\square$*

### 2.5.5 Filtración do bordo

Tendo en conta a proposición 2.5.14, para poder aplicar o teorema de absorción de [28] e completar entón a proba do teorema de afabilidade, temos que descompoñer o bordo nunha unión de subconxuntos pechados dotados de REEC's transversas á subrelación  $\mathcal{R}_\infty$ . Imos considerar a seguinte partición natural do bordo

$$\partial\mathcal{R}_\infty = \bigcup_{i=2}^4 \partial_i\mathcal{R}_\infty = \bigcup_{i=2}^4 \{\mathcal{T} \in X \mid \mathcal{R}[\mathcal{T}] \text{ é unión de } i \text{ } \mathcal{R}_\infty\text{-clases}\}$$

para definir unha familia numerable de subconxuntos pechados que cumplan esta condición. En primeiro lugar, observemos a seguinte propiedade:

**Lema 2.5.15.** *O subconxunto  $\mathcal{H}_2 = \partial_2\mathcal{R}_\infty$  de  $X$  é pechado.*

**Proba.** Supoñamos que  $\mathcal{T}_n$  é unha sucesión de mosaicos en  $\partial_2\mathcal{R}_\infty$  que converxe a un mosaico  $\mathcal{T} \in X$ . Por hipótese, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a clase  $\mathcal{R}[\mathcal{T}_n]$  está dividida en dúas  $\mathcal{R}_\infty$ -clases diferentes e sabemos entón que hai dúas  $\mathcal{P}_n''$ -teselas diferentes que se intersecan en  $\Gamma_{\mathcal{T}_n}$ , a árbore da partición do bordo continuo  $\partial_c\mathcal{R}_\infty$  que pasa por  $\mathcal{T}_n$ . Por definición da topoloxía de Gromov-Hausdorff, para  $R = N_n$  con  $n$  suficientemente grande, podemos deducir que o límite  $\mathcal{T}$  contén un motivo que é a unión destas dúas  $\mathcal{P}_n''$ -teselas coa mesma propiedade (véxase a figura 2.15(a)). Isto implica que  $\mathcal{T} \in \partial_2\mathcal{R}_\infty$ .  $\square$

Pola contra, os subconxuntos  $\partial_3\mathcal{R}_\infty$  e  $\partial_4\mathcal{R}_\infty$  non son pechados. Mais imos mostrar como obter dominios fundamentais pechados. Comecemos lembrando a súa definición:

**Definición 2.5.16.** Sexa  $\mathcal{R}$  unha relación de equivalencia sobre  $X$ . Diremos que un subconxunto  $A$  de  $X$  é un *dominio fundamental* para a relación inducida sobre a súa  $\mathcal{R}$ -saturación, se interseca a cada  $\mathcal{R}$ -clase da  $\mathcal{R}$ -saturación en exactamente un punto.

Para maior simplicidade, imos comezar por substituír os subconxuntos  $\partial_3\mathcal{R}_\infty$  e  $\partial_4\mathcal{R}_\infty$  de  $\partial\mathcal{R}_\infty \subset X$  polos correspondentes subconxuntos  $\check{\partial}_3\mathcal{R}_\infty$  e  $\check{\partial}_4\mathcal{R}_\infty$  de  $\check{\partial}\mathcal{R}_\infty = \partial_c\mathcal{R}_\infty \cap \check{X}$ . Lembremos que  $\check{X}$  é unha transversal que pasa polo bordo de cada tesela e que o bordo continuo  $\partial_c\mathcal{R}_\infty$  admite unha partición en árbores infinitas sen aristas terminais con 2, 3 ou 4 finais. Por outra banda, cada mosaico  $\mathcal{T} \in \check{\partial}_3\mathcal{R}_\infty \cup \check{\partial}_4\mathcal{R}_\infty$  contén unha sucesión de cruces  $C_n$  con 3 ou 4 saídas que definen cruces virtuais. Pola definición de cruce e brazo virtual, estes cruces están contidos na unión de franxas horizontais e verticais cuxos eixos se cortan exactamante nun punto, véxanse as figuras 2.15(b), 2.16 e 2.17.

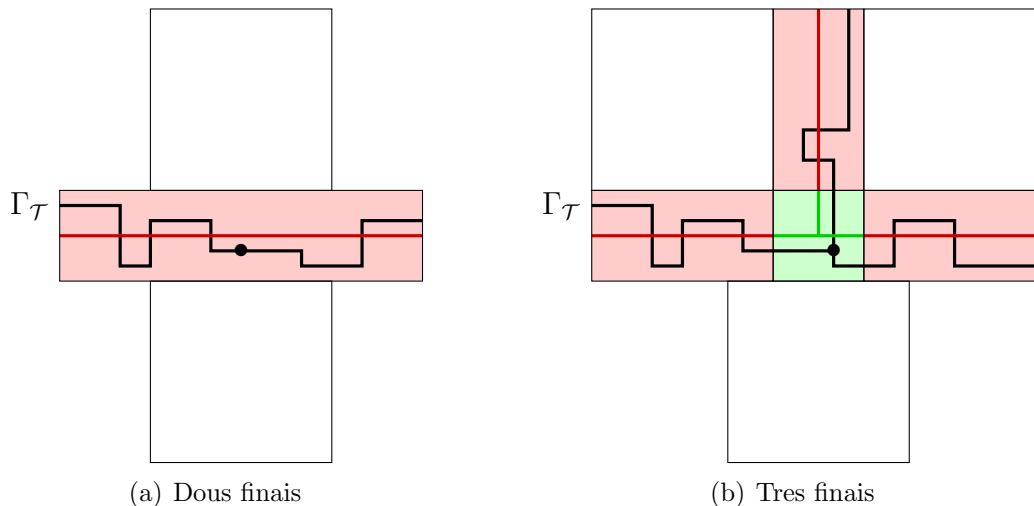


Figura 2.15: Bordos virtuais e reais

**Definición 2.5.17.** Chamaremos *bordo virtual* e *raíz virtual* dunha folla  $L$  á unión destes eixos e ao seu punto de intersección respectivamente. Así mesmo, unha *raíz real* dunha árbore  $\Gamma$  de  $\partial_c \mathcal{R}_\infty$  será calquera vértice de valencia maior ou igual que 3. Se a árbore ten tres finais só ten unha raíz, mais se ten 4 finais pode ter unha única raíz de valencia 4 ou dúas raíces de valencia 3.

Para cada enteiro  $R > 0$ , aumentando o tamaño das anteditas franxas se fora preciso, podemos supoñer que a árbore  $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{T}}$  que pasa por  $\mathcal{T}$  está contida nunha veciñanza do bordo virtual dentro dunha gran bóla de radio  $R$ , véxanse as figuras 2.15(b), 2.16 e 2.17. Por outra banda, as pequenas veciñanzas da raíz virtual no plano decoradas coa árbore inducida son homeomorfas ás da raíz real. Lembremos que  $\Gamma$  é intersección de grafos infinitos  $\Gamma_n$  obtidos a partir de arestas das  $\mathcal{P}_n''$ -teselas dos mosaicos inflados  $\mathcal{T}_n''$ , e a súa raíz real ten valencia 3 ou 4 cando se considera como vértice de  $\Gamma_n$ .

**Definición 2.5.18.** Sexa  $\Gamma$  a traza do bordo continuo cun mosaico  $\mathcal{T}$  que pertence a  $\check{\partial}_3 \mathcal{R}_\infty \cup \check{\partial}_4 \mathcal{R}_\infty$ . Para cada  $n \geq 1$ , hai tres ou catro  $\mathcal{P}_n''$ -teselas distintas que se cortan nunha veciñanza en  $\Gamma_n$  da raíz real de  $\Gamma$ . Forman un  $\mathcal{P}_n''$ -motivo  $\mathbb{M}_n(\Gamma)$ , que imos denominar  *$\mathcal{P}_n''$ -motivo básico arredor da raíz real*. Así mesmo, denotaremos por  $D(\mathbb{M}_n(\Gamma))$  o número de  $\mathcal{P}_n''$ -teselas de  $\mathbb{M}_n(\Gamma)$ .

**Lema 2.5.19.** A relación de equivalencia étale inducida sobre a  $\mathcal{R}$ -saturación de  $\check{\partial}_3 \mathcal{R}_\infty$  admite un dominio fundamental  $\check{\mathcal{H}}_3$  que é unión numerable dunha familia de pechados disxuntos  $\check{\mathcal{H}}_{3,m}$ .

**Proba.** Sexa  $\mathcal{T}$  un mosaico de  $\check{\partial}_3\mathcal{R}_\infty$ . Tendo en conta a proba da proposición 2.5.12, sabemos que neste caso os  $\mathcal{P}_n''$ -motivos básicos arredor da raíz real  $\mathbb{M}_n(\Gamma)$  crecen alomenos en tres sentidos distintos. Pero observemos que poderíamos atopar un destes motivos básicos nunha folla da saturación dun mosaico de  $\check{\partial}_4\mathcal{R}_\infty$  que teña exactamente dous cruces virtuais, véxase a figura 2.17. Non obstante, se supoñemos que  $\mathbb{M}_n(\Gamma)$  contén unha bóla de radio  $n$  centrada na raíz real e que  $n$  é maior que a distancia  $l$  entre os dous cruces reais, necesitamos catro  $\mathcal{P}_n''$ -teselas diferentes para cubrir a bóla. Noutras palabras, para  $n$  suficientemente grande, os  $\mathcal{P}_n''$ -motivos básicos arredor dos dous vértices reais teñen intersección non trivial, e podemos substituír cada un dos  $\mathcal{P}_n''$ -motivos básicos orixinais (formados por tres  $\mathcal{P}_n''$ -teselas diferentes) pola súa unión (que constará de catro  $\mathcal{P}_n''$ -teselas diferentes). Seguiremos denotando  $\mathbb{M}_n(\Gamma)$  ao novo  $\mathcal{P}_n''$ -motivo básico arredor da raíz real. Agora, como a raíz real de  $\Gamma$  pertence a  $\check{\partial}_3\mathcal{R}_\infty$ , existe un natural  $m = m(\Gamma) \geq 0$  mínimo tal que  $D(\mathbb{M}_n(\Gamma)) = 3$  para todo  $n \geq m$ .

Consideramos logo  $X_n(\Gamma)$  o subconxunto aberto-pechado de  $\check{X}$  formado polos mosaicos que conteñen ao motivo  $\mathbb{M}_n(\Gamma)$  arredor da orixe. Cada aberto-pechado  $X_n(\Gamma) \cap \check{\partial}\mathcal{R}_\infty$  da transversal  $\check{\partial}\mathcal{R}_\infty$  é un dominio fundamental para a REE inducida no bordo continuo  $\partial_c\mathcal{R}_\infty$ . De feito, aínda no caso de que  $X_n(\Gamma) \cap \check{\partial}\mathcal{R}_\infty$  corte a unha folla da saturación de  $\mathcal{T} \in \check{\partial}_4\mathcal{R}_\infty$  que teña exactamente dous cruces virtuais, cortará a un deles exactamante unha vez, véxase de novo a figura 2.17. Mais  $X_n(\Gamma)$  non é un dominio fundamental para a REE inducida na  $\mathcal{R}$ -saturación de  $\check{\partial}_3\mathcal{R}_\infty$ . Non obstante, a intersección

$$\check{\mathcal{H}}_{3,\Gamma} = \bigcap_{n \geq m} X_n(\Gamma)$$

é un subconxunto pechado de  $\check{\partial}_3\mathcal{R}_\infty$  que corta a todas as  $\mathcal{R}$ -clases ao sumo nun punto. Pero a súa  $\mathcal{R}$ -saturación podería ser máis pequena que a de  $\check{\partial}_3\mathcal{R}_\infty$  e as árbores  $\Gamma$  con 3 finais que poderían estar contidas no bordo  $\partial_c\mathcal{R}_\infty$  forman unha familia que non é numerable. En calquera caso, podemos definir unha familia numerable de subconxuntos pechados coa mesma propiedade tales que a súa unión sexa un dominio fundamental para  $\check{\partial}_3\mathcal{R}_\infty$ .

En efecto, consideremos o subconxunto pechado

$$\check{\mathcal{H}}_{3,\Gamma_m} = \bigcap_{n \geq m} \bigcup_{\Gamma'_m = \Gamma_m} X_n(\Gamma')$$

onde  $\Gamma'$  representa calquera árbore contida no bordo continuo  $\partial_c\mathcal{R}_\infty$  e que conteña ao motivo  $\Gamma'_m = \Gamma' \cap \mathbb{M}_m(\Gamma') = \Gamma \cap \mathbb{M}_m(\Gamma) = \Gamma_m$ . Como, para cada  $m \in \mathbb{N}$ , só hai

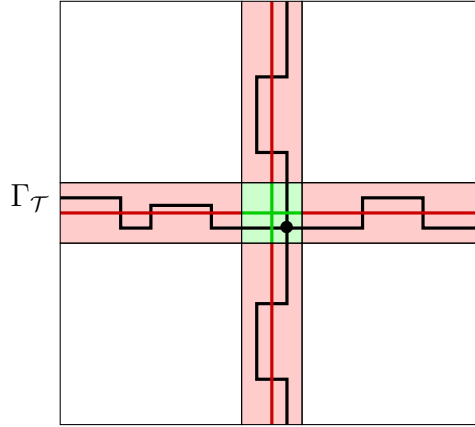


Figura 2.16: Bordo con 4 finais

un número finito de árbores finitas  $\Gamma_m$ , a unión  $\check{\mathcal{H}}_{3,m}$  de todos estes subconxuntos pechados  $\check{\mathcal{H}}_{3,\Gamma_m}$  segue a ser un subconxunto pechado de  $\check{\partial}_3\mathcal{R}_\infty$ . A súa unión

$$\check{\mathcal{H}}_3 = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \check{\mathcal{H}}_{3,m}$$

é un dominio fundamental que corta a cada  $\mathcal{R}$ -clase da saturación de  $\check{\partial}_3\mathcal{R}_\infty$  nun único punto: a súa raíz real.  $\square$

**Observación 2.5.20.** Se volvemos considerar agora a transversal canónica  $X$ , temos que  $\check{\mathcal{H}}_3$  determina 3 dominios fundamentais disxuntos para a  $\mathcal{R}$ -saturación de  $\check{\partial}_3\mathcal{R}_\infty$  que están relacionados por transformacións parciais de  $\mathcal{R}$ . Denotaremos por  $\mathcal{H}_3$  indistintamente a cada un deles, que está dividido igualmente nunha familia numerable  $\mathcal{H}_{3,m}$ .

A construción dun dominio fundamental para a  $\mathcal{R}$ -saturación de  $\check{\partial}_4\mathcal{R}_\infty$  vai ser lixeiramente diferente. Unicamente no caso de que os grafos contidos nas follas teñan unha única raíz real de grao 4 (véxase a figura 2.16) podemos argumentar como no caso anterior. Mais pode haber follas con dous vértices reais de grao 3 (como na figura 2.17) que deben recibir outro tratamento.

**Lema 2.5.21.** *Existe un subconxunto pechado  $\check{\mathcal{H}}_{4,0} \subset \check{\partial}_4\mathcal{R}_\infty$  do bordo continuo  $\check{\partial}\mathcal{R}_\infty$  que interseca a todas as  $\mathcal{R}$ -clases ao sumo nun punto: a única raíz real de grao 4 da correspondente árbore de  $\partial_c\mathcal{R}_\infty$ .*  $\square$

**Observación 2.5.22.** Como no caso anterior, o lema proporciona 4 dominios fundamentais disxuntos para a  $\mathcal{R}$ -saturación de  $\partial_4\mathcal{R}_\infty$  relacionados por transformacións parciais de  $\mathcal{R}$ , que denotaremos por  $\mathcal{H}_{4,0}$ .

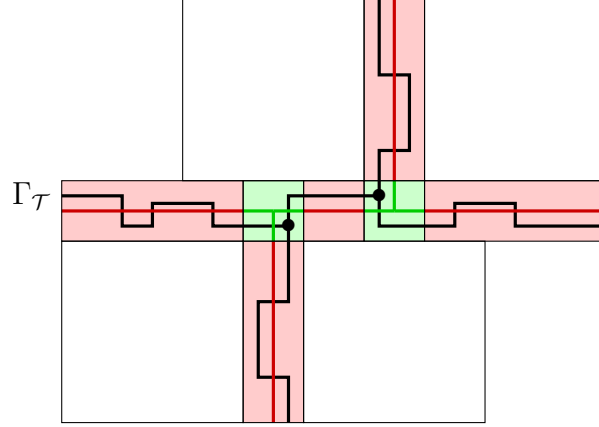


Figura 2.17: Bordo con 4 finais e 2 vértices

En xeral, cada mosaico  $\mathcal{T}$  do complementario de  $\check{\mathcal{H}}_{4,0}$  en  $\check{\partial}_4\mathcal{R}_\infty$  contén dúas sucesións de cruces  $C_n$  e  $C'_n$  con 3 saídas que definen sendos cruces virtuais conectados por un brazo virtual de lonxitude limitada. Sen perda de xeneralidade, suporemos que estes cruces son do tipo descrito na figura 2.13. Os correspondentes brazos están contidos logo na unión dunha franxa horizontal e dúas semifranxas verticais que crecen cara arriba e cara abaixo e de maneira que o eixo horizontal corta aos eixos verticais en dous puntos diferentes. Temos un bordo virtual con dous vértices virtuais. Trátase dun grafo con 4 finais onde todos os vértices teñene grado 2 excepto os dous vértices virtuais, de grado 3. Este segue a ser o modelo para a árbore  $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{T}}$  na partición de  $\partial_c\mathcal{R}_\infty$  que pasa por  $\mathcal{T}$ , véxase a figura 2.17.

**Definición 2.5.23.** Para cada natural  $l \geq 1$ , definimos  $\check{\mathcal{H}}_{4,l}$  como o conxunto dos mosaicos  $\mathcal{T} \in \check{\partial}_4\mathcal{R}_\infty$  con orixe nunha das dúas raíces reais de  $\Gamma$  tales que a distancia (coa métrica discreta) á outra raíz é igual a  $l$ .

**Lema 2.5.24.** A REE inducida sobre a  $\mathcal{R}$ -saturación de  $\check{\partial}_4\mathcal{R}_\infty$  admite un dominio fundamental  $\check{\mathcal{H}}_4$  que é unión dunha familia numerable de pechados disxuntos  $\check{\mathcal{H}}_{4,l}$ .

**Proba.** Fixemos  $l \geq 1$ , e sexa  $\mathcal{T} \in \check{\partial}_4\mathcal{R}_\infty$  un mosaico tal que existe un camiño xeodésico  $\gamma$  de lonxitude  $l$  que une as dúas raíces reais de  $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{T}}$ . Para  $n \geq 0$  suficientemente grande, hai catro  $\mathcal{P}_n''$ -teselas distintas que se cortan nunha veciñanza de  $\gamma$  en  $\Gamma$ . Como na proba do lema 2.5.19, conforman un  $\mathcal{P}_n''$ -motivo básico arredor de cada raíz real de  $\gamma$  que seguiremos denotando  $\mathbb{M}_n(\Gamma)$ . Así mesmo, imos seguir denotando  $X_n(\Gamma)$  ao conxunto dos mosaicos en  $\check{X}$  que teñen este motivo arredor da orixe (que podemos supoñer que é un dos vértices de  $\gamma$ ). Neste caso, como todos os puntos de  $\gamma$  pertencen a  $\check{\partial}_4\mathcal{R}_\infty$ , existe un natural  $m = m(\gamma) \geq 0$  mínimo tal que



$D(\mathbb{M}_n(\Gamma)) = 4$  para todo  $n \geq m$ . Polo tanto, se  $\Gamma'$  é unha árbore contida en  $\partial_c \mathcal{R}_\infty$  e tal que  $\mathbb{M}_n(\Gamma') = \mathbb{M}_n(\Gamma)$ , entón

$$\check{\mathcal{G}}_{4,\gamma} = \bigcap_{n \geq m} \bigcup_{\mathbb{M}_m(\Gamma') = \mathbb{M}_m(\Gamma)} X_n(\Gamma')$$

é un subconxunto pechado de  $\check{\partial}_4 \mathcal{R}_\infty$  que corta a todas as  $\mathcal{R}$ -clases ao sumo en  $l + 1$  puntos. Agora, como hai un número finito de camiños de lonxitude  $\leq l$  que parten da orixe, a unión  $\check{\mathcal{G}}_{4,l}$  de todos estes subconxuntos pechados  $\check{\mathcal{G}}_{4,\gamma}$  de  $\check{\partial}_4 \mathcal{R}_\infty$  é tamén un subconxunto pechado de  $\check{\partial}_4 \mathcal{R}_\infty$  coa mesma propiedade. Por outra banda, cada pechado  $\check{\mathcal{G}}_{4,\gamma}$  divídese nun número finito de pechados que intersecan a todas as  $\mathcal{R}$ -clases en ao sumo un punto. Denotaremos por  $\check{\mathcal{H}}_{4,\gamma}$  ao subconxunto pechado correspondente ao vértice inicial de  $\gamma$ . Coma antes, a unión  $\check{\mathcal{H}}_{4,l}$  de todos os pechados  $\check{\mathcal{H}}_{4,\gamma}$  segue cumprindo a mesma propiedade. Temos logo que

$$\check{\mathcal{H}}_4 = \bigcup_{l \geq 0} \check{\mathcal{H}}_{4,l}$$

é un dominio fundamental para a  $\mathcal{R}$ -saturación de  $\check{\partial}_4 \mathcal{R}_\infty$ . □

**Observación 2.5.25.** Unha vez máis o dominio fundamental  $\check{\mathcal{H}}_4$  para a  $\mathcal{R}$ -saturación de  $\check{\partial}_4 \mathcal{R}_\infty$  proporcionan 4 dominios fundamentais disxuntos en  $X$  relacionados por transformación parciais de  $\mathcal{R}$ . Cada un deles, que denotaremos  $\mathcal{H}_4$ , está dividido nunha familia numerable  $\mathcal{H}_{4,l}$ .

## 2.5.6 Absorción do bordo

Estamos finalmente en condicións de aplicar o teorema de absorción para completar a proba do teorema de afabilidade:

**Proba do teorema 2.4.1.** Podemos aplicar agora o teorema de absorción (teorema 2.4.12) aos subconxuntos pechados  $\mathcal{R}_\infty$ -finos  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_{3,m}$  e  $\mathcal{H}_{4,l}$  do bordo  $\partial \mathcal{R}_\infty$  (véxase a proposición 2.5.14). Primeiro, observemos que a relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  induce REECs sobre  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_{3,m}$  e  $\mathcal{H}_{4,l}$  que son transversas ás correspondentes relacións inducidas por  $\mathcal{R}_\infty$ . Para  $\mathcal{H}_2$ , xa explicamos como obter unha descomposición de  $\mathcal{H}_2$  en dous subconxuntos aberto-pechados  $A$  e  $B$  e unha transformación  $\varphi : A \rightarrow B$  cuxo grafo determina unha REEC  $\mathcal{K}_2$  transversa a  $\mathcal{R}_\infty|_{\partial_2 \mathcal{R}_\infty}$ . Neste caso, a primeira versión do teorema de absorción de [31] permítenos deducir que  $\mathcal{R}_\infty \vee \mathcal{K}_2$  é orbitalmente equivalente a  $\mathcal{R}_\infty$ . Para cada  $\mathcal{H}_{3,m}$ , temos dúas transformacións parciais de  $\mathcal{H}_{3,m}$  nos outros dous dominios fundamentais da  $\mathcal{R}$ -saturación de  $\partial_3 \mathcal{R}_\infty$  que cortan a cada  $\mathcal{R}$ -clase en ao sumo un punto (véxase o lema 2.5.19). Xeneran así unha REEC  $\mathcal{K}_{3,m}$  que é transversa a  $\mathcal{R}_\infty|_{\partial_3 \mathcal{R}_\infty}$ . Do mesmo xeito, polos

lemas 2.5.21 e 2.5.24, obtemos outra familia de REECs  $\mathcal{K}_{4,l}$  coa mesma propiedade. Polo tanto, aplicando inductivamente o teorema de absorción de [27], podemos filtrar  $\mathcal{R}$  por unha familia crecente numerable de REEs

$$\mathcal{R}_\infty \vee \mathcal{K}_2 \vee \mathcal{K}_{3,1} \vee \cdots \vee \mathcal{K}_{3,m} \vee \mathcal{K}_{4,0} \vee \cdots \vee \mathcal{K}_{4,l}$$

orbitalmente equivalentes a  $\mathcal{R}_\infty$  e concluimos entón que  $\mathcal{R}$  é afable.  $\square$

**Observación 2.5.26.** En [27], T. Giordano, H. Matui, I. Putnam e C. Skau proban en realidade un resultado algo máis forte, pois conclúen que a subrelación AF  $\mathcal{R}_\infty$  obtida é orbitalmente equivalente a  $\mathcal{R}$ . Isto é posible no seu caso porque o proceso de inflación que empregan implica que toda clase de  $\mathcal{R}$  se divide ao sumo en 3  $\mathcal{R}_\infty$ -clases e permítelles descompoñer o bordo nunha unión finita de subconxuntos pechados  $\mathcal{R}_\infty$ -finos dotados de REEC's transversas á subrelación  $\mathcal{R}_\infty$ . E polo tanto só precisan aplicar o teorema de afabilidade un número finito de veces.

# A. Límites inversos de variedades ramificadas

A aplicación  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  definida por  $f(z) = z^2$  induce un sistema proactivo  $\mathbb{S}^1 \xleftarrow{f} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{f} \mathbb{S}^1 \dots$  e o seu límite inverso

$$X = \varprojlim(\mathbb{S}^1, f) = \{(z_k) \in \prod_{k \geq 0} \mathbb{S}^1 \mid z_{k+1}^2 = z_k\}.$$

é un fibrado localmente trivial de base  $\mathbb{S}^1$  con fibra homeomorfa a un conxunto de Cantor, dotado dunha laminación minimal transversa ás fibras e definida por una acción libre de  $\mathbb{R}$ . Esta construción pode xeneralizarse substituíndo  $\mathbb{S}^1$  por variedades compactas de dimensión  $p$  e  $f$  por submersións entre elas (véxase §11.3.A de [16]).

Os límites inversos foron empregados por R.F. Williams en [78] para modelar atractores expansivos de difeomorfismos de variedades. Neste contexto, o espazo foliado  $X = \varprojlim(M, f)$  está determinado por unha inmersión expansiva  $f : M \rightarrow M$  dunha variedade ramificada  $M$  en si mesma. Noutro contexto, como xa se dixo, A. M. Vershik probou que toda acción minimal de  $\mathbb{Z}$  sobre un conxunto de Cantor é un límite inverso de grafos dirixidos [76]. Pola súa banda, J. Bellissard, R. Benedetti e J.-M. Gambaudo demostran en [9] que a envoltura de calquera mosaico aperiódico e repetitivo do plano é un límite inverso de superficies ramificadas planas, resultado extendido posteriormente en [10] a  $\mathbb{G}$ -solenoides.

Por último, o teorema de existencia de descomposicións simpliciais e o proceso de inflación descritos en §2.1.2 permiten probar en [6] a F. Alcalde, Á. Lozano e M. Macho que toda laminación transversalmente Cantor é un límite inverso de variedades ramificadas. Dada unha laminación transversalmente Cantor  $(M, \mathcal{F})$ , a idea é tomar unha sucesión de descomposicións simpliciais  $\mathcal{B}^{(n)}$  e colapsar as caixas en placas para obter unha sucesión de CW-complexos  $S_n$  con boas propiedades [6, 52]. Neste apéndice engadimos a proba deste resultado.

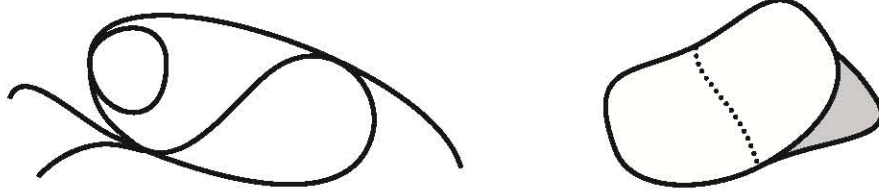


Figura A.1: Variedades ramificadas

**Teorema A.1.** *Toda laminación compacta de clase  $C^1$  e dimensión  $p$  transversalmente 0-dimensional, minimal e sen holonomía é límite inverso de variedades ramificadas de dimensión  $p$ .*

Comecemos lembrando a definición de variedade ramificada introducida por R. F. Williams en [78]. Intuitivamente, trátase dun CW-complejo que ten espazo tanxente en todo punto, como se mostra na figura A.1.

**Definición A.2** ([78]). Unha *variedade ramificada* de dimensión  $p$  e clase  $C^r$  é un espazo localmente compacto, metrizable e separable  $S$  dotado de

- R1. unha familia de subconxuntos pechados  $\{U_i\}$  tal que  $S = \bigcup_i \mathring{U}_i$ ;
- R2. unha familia finita de subconxuntos pechados  $D_{ij}$  de  $U_i$  tales que  $\bigcup D_{ij} = U_i$ ;
- R3. unha familia de aplicacións  $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{D}^p$  tales que as súas restricións  $\psi_i|_{D_{ij}} : D_{ij} \rightarrow \mathbb{D}^p$  son homeomorfismos e os cambios de cartas  $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$  son difeomorfismos de clase  $C^r$ .

Denomínase *parte singular* de  $S$  ao conxunto  $\text{Sing } S$  dos puntos que non posúen unha veciñanza homeomorfa a un disco. Ao igual que as variedades usuais, as variedades ramificadas posúen espazo tanxente ben definido. Para cada  $x \in D_{ij}$ , o espazo tanxente  $T_x(D_{ij})$  indentifícase con  $T_{\psi_i(x)}(\mathbb{D}^p)$  vía o isomorfismo  $(\psi_i|_{D_{ij}})_{*x}$ . O fibrado tanxente  $T(S)$  é entón o cociente da unión disxunta  $\bigsqcup_{ij} TD_{ij}$  pola relación de equivalencia

$$\vec{v} \in T_x(D_{ij}) \sim \vec{w} \in T_y(D_{kl}) \iff x = y \quad \text{e} \quad (\psi_i \circ \psi_k^{-1})_*(\vec{w}) = \vec{v}.$$

**Definición A.3.** Unha aplicación continua  $f : S \rightarrow S'$  entre dúas variedades ramificadas  $S$  e  $S'$  de clase  $C^r$  dirase *de clase  $C^r$*  se

1. as aplicacións  $f_{ij}^k : \mathbb{D}^p \xrightarrow{(\psi_i|_{D_{ij}})^{-1}} D_{ij} \xrightarrow{f|_{D_{ij} \cap f^{-1}(U'_k)}} U'_k \xrightarrow{\psi_k} \mathbb{D}^{p'}$  son de clase  $C^r$ ;

2. os xermes das  $f_{ij}^k$  en calquera punto de  $\mathbb{D}^p$  non dependen de  $j$ .

A última condición garante que  $f$  se comporta da mesma maneira nas diferentes ramas arredor de calquera singularidade de  $S$ . E como no caso usual,  $f$  induce unha aplicación linear  $f_{*x} : T_x(S) \rightarrow T_x(S')$  para cada  $x \in S$ , definida por  $(f_{*x})_{ij}^k(\vec{v}) = f_{ij_{*x}}^k(\vec{v})$ , se  $f(x) \in U_k$ . A condición 2 e a diferenciabilidade dos cambios de coordenadas garanten que esta definición é coherente (véxase [78]).

**Definición A.4.** Unha aplicación  $f : S \rightarrow S'$  de clase  $C^r$  entre dúas variedades ramificadas é unha *inmersión* (resp. *submersión*) se

$$f_{*x} : T_x S \rightarrow T_{f(x)} S$$

é un monomorfismo (resp. epimorfismo) para cada  $x \in S$ . A aplicación  $f$  é unha *aplicación celular* se  $\text{Sing } S \subset f^{-1}(\text{Sing } S')$ .

**Proba do teorema A.1.** Polo teorema 2.1.10 e o corolario 2.1.17, a laminación  $(M, \mathcal{F})$  admite unha sucesión de descomposicións simpliciais  $\mathcal{B}^{(n)}$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{B}^{(n+1)}$  obtense por inflación de  $\mathcal{B}^{(n)}$ . A proba complétase agora en tres etapas:

*i) Construción dunha sucesión de variedades ramificadas  $S_n$ .* Para cada  $n \leq 1$ , denotemos  $S_n = M / \sim_n$  ao espazo cociente de  $M$  pola relación de equivalencia que colapsa cada caixa  $B$  de  $\mathcal{B}^{(n)}$  a unha placa, isto é,  $x \sim_n x'$  se e só se  $x$  e  $x'$  pertencen a unha mesma caixa  $B$  de  $\mathcal{B}^{(n)}$  e as súas imaxes pola aplicación  $p_1 \circ \varphi : B \rightarrow P \times C \rightarrow P$  son iguais. Denotemos por  $\pi_n : M \rightarrow S_n$  a proxección canónica. Podemos definir tamén  $S_n$  da seguinte maneira:

a) o espazo cociente  $S_n = \bigsqcup_{B \in \mathcal{B}^{(n)}} B / \sim_n$  da unión disxunta de todas as caixas de  $\mathcal{B}^{(n)}$  pola relación de equivalencia inducida por  $\sim_n$  sobre cada caixa;

b) o espazo cociente  $S_n = \mathcal{M} / \sim_n$  da variedade  $\mathcal{M}$  de clase  $C^1$  e dimensión  $p$  pola relación de equivalencia  $\sim_n$ .

A primeira destas dúas definicións garante que  $S_n$  é un espazo compacto Hausdorff. A segunda mostra de maneira inmediata que  $S_n$  é unha variedade ramificada de clase  $C^1$  e dimensión  $p$ . Cada estrela  $\text{Star}(x, \mathcal{B}^{(n)})$  contén un pechado homeomorfo ao disco  $\mathbb{D}^p$  e a súa descomposición como unión finita de placas de  $\mathcal{B}^{(n)}$  determina unha descomposición de cada pechado nunha familia finita de pechados que satisfan as condicións da definición A.2.

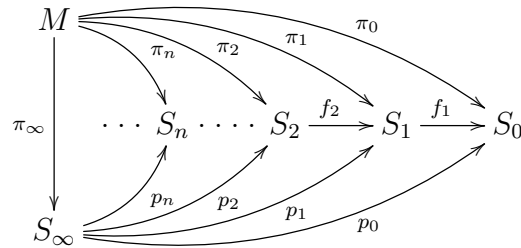
*ii) Construción do límite proxectivo.* Como as placas de  $\mathcal{B}^{(n+1)}$  son unión de placas de  $\mathcal{B}^{(n)}$ , a proxección canónica  $\pi_n : \mathcal{M} \rightarrow S_n$  induce unha aplicación sobrexectiva

$f_n : S_{n+1} \rightarrow S_n$  de clase  $C^1$ . É evidente que ambas aplicacións son inmersións celulares e o límite proxectivo

$$S_\infty = \varprojlim(S_n, f_n) = \{(x_n) | f_n(x_n) = x_{n-1}\} \subset \prod_n S_n$$

é un espazo compacto Hausdorff.

iii) *Construción dun homeomorfismo foliado entre  $M$  e  $S_\infty$ .* Pola propiedade universal do límite inverso, existe unha aplicación  $\pi_\infty : M \rightarrow S_\infty$  que fai conmutativo o seguinte diagrama:



onde  $p_n : S_\infty \rightarrow S_n$  é proxección canónica. A imaxe da aplicación  $\pi_\infty$  é densa en  $S_\infty$ , xa que cada aplicación  $\pi_n$  é sobrexectiva. Pero como  $M$  é compacto, a imaxe de  $\pi_\infty$  tamén é compacta e daquela  $\pi_\infty$  é sobrexectiva. Polo tanto, se vemos que  $\pi_\infty$  é inxectiva, teremos que é un homeomorfismo, xa que será unha bixección continua dun espazo compacto nun Hausdorff. Para iso podemos supoñer que a intersección dos eixos  $C^{(n)}$  se reduce a un punto, de maneira que para calquera par de puntos distintos  $x, y \in M$ , existe un enteiro  $n \geq 1$  tal que  $\pi_n(x) \neq \pi_n(y)$ . Logo  $\pi_\infty$  é inxectiva.

Finalmente, se dotamos a  $M$  e  $S_\infty$  das topoloxías das follas, podemos ver que  $\pi_\infty$  é un homeomorfismo foliado que preserva as respectivas laminacións. Para cada  $x \in \mathcal{M}$  e cada  $n \geq 1$ , podemos identificar

$$C_n^x = \{(x_m) \in S_\infty \mid f_{m,n}(x_m) = x_n = \pi_n(x), \forall m \geq n\} = p_n^{-1}(x_n)$$

co conxunto de Cantor  $C$ , onde  $f_{m,n} = f_m \circ \dots \circ f_n$ . Se  $x$  pertence ao interior dunha placa  $P$  de  $\mathcal{B}^{(n)}$  para algún  $n$  (e daquela  $x_m \notin \text{Sing}(S_m)$ , para cada  $m \geq n$ ), entón a identificación entre  $C_n^x$  e  $C$  exténdese a unha veciñanza  $V$  de  $x$ . Noutros termos, para cada  $y \in V$ , existe unha única sucesión  $(y_n) \in C_n^y$  tal que  $x_m$  e  $y_m$  pertencen ao interior da mesma placa de  $S_m$ , para cada  $m \geq n$ . Se pola contra  $x$  pertence ao bordo dunha placa de  $\mathcal{B}^{(n)}$  (e entón  $x_n \in \text{Sing}(S_n)$ ) para cada  $n \geq 1$ , a identificación entre  $C_n^x$  e  $C$  tamén se estende a unha veciñanza  $V$  de  $x$ , pero que neste caso corta a un número finito de placas de  $\mathcal{B}^{(n)}$ . Podemos

---

definir así unha aplicación  $q : \mathcal{M} \times C \rightarrow S_\infty$ . A aplicación  $\pi_\infty : M \rightarrow S_\infty$  está inducida por  $q$ , e como  $q$  envía homeomorficamente cada conxunto  $V \times C$  nun aberto  $U = \{(y_n) \in S_\infty \mid f_{m,n}(y_m) \in \pi_n(V), \forall m \geq n\}$  de  $S_\infty$ , a laminación horizontal de  $\mathcal{M} \times C$  induce a laminación de  $S_\infty$ .  $\square$





# B. Laminacións transversalmente Cantor con crecemento polinomial

O teorema de existencia de descomposicións simpliciais e o proceso de inflación das laminacións transversalmente Cantor descritos en §2.1.2 fan posible adaptar as primeiras etapas da proba do teorema de afabilidade. En concreto, pódese describir a dinámica transversa medible de calquera laminación transversalmente Cantor con crecemento polinomial:

**Teorema B.1.** *Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación transversalmente Cantor, minimal e sen holonomía con crecemento polinomial. A súa dinámica transversa medible está representada por un sistema dinámico de Bratteli-Vershik.*

En efecto, se  $\mathcal{R}$  é a relación inducida sobre calquera transversal completa  $T$ , en virtude do teorema 2.1.10 e o corolario 2.1.17 e seguindo os mesmos argumentos de §2.4, podemos definir unha sucesión crecente de REEC's  $\mathcal{R}_n$  que defina unha subrelación aberta AF  $\mathcal{R}_\infty = \varinjlim \mathcal{R}_n$  de  $\mathcal{R}$ . Para probar o teorema B.1 chega agora con mostrar que o bordo  $\partial\mathcal{R}_\infty$  é  $\mathcal{R}$ -fino. Como é habitual, as REEC's  $\mathcal{R}_n$  proveñen de descomposicións por caixas  $\mathcal{B}^{(n)}$ , pero neste caso non podemos recorrer ás propiedades de convexidade ou de enlosetado dos espazos euclidianos para comprobar que as placas das descomposicións teñen boas desigualdades isoperimétricas. Non obstante, imos poder demostrar que  $\partial\mathcal{R}_\infty$  é  $\mathcal{R}$ -fino empregando un argumento similar ao que usa C. Series en [73] para probar que calquera foliación con crecemento polinomial é hiperfinita. A relación de equivalencia  $\mathcal{R}$  e a subrelación aberta AF  $\mathcal{R}_\infty$  son daquela orbitalmente equivalentes en sentido medible (véxase a definición 1.1.19) e temos o seguinte resultado:

**Corolario B.2.** *Calquera laminación transversalmente Cantor, minimal e sen holonomía con crecemento polinomial é establemente orbitalmente equivalente (en sentido medible) a un sistema dinámico de Bratteli-Vershik.*

Evidentemente, o argumento é aplicable ao caso da envoltura dun mosaico repetitivo e aperiódico do plano. Non obstante, nese caso é máis doado concluír. Antes de ocuparnos do teorema B.1, imos mostrar brevemente como probar nese suposto que o bordo é  $\mathcal{R}_\infty$ -fino mediante un argumento de convexidade (véxase [33] para máis detalle).

Lembremos en primeiro lugar algunhas propiedades elementais da xeometría plana:

i) Se  $V$  é un polígono convexo que contén unha bóla  $B(x, r)$ , entón

$$A(V) \geq r\delta(V) \tag{B.1}$$

onde  $A(V)$  e  $\delta(V)$  denotan a área e o diámetro de  $V$ .

ii) O perímetro dun polígono convexo  $V$  é menor que o perímetro de calquera bóla que o conteña. En particular,

$$L(V) < 2\pi\delta(V) \tag{B.2}$$

onde  $L(V)$  denota o perímetro de  $V$ .

iii) Sexa  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  unha sucesión de polígonos convexos que conteñen unha sucesión de bólas  $B(x_n, r_n) \subset V_n$  tal que  $r_n \rightarrow \infty$  cando  $n \rightarrow \infty$ . Entón a razón isoperimétrica da sucesión de polígonos  $V_n$  tende a cero, é dicir,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L(V_n)}{A(V_n)} = 0.$$

Sexa  $\{\mathcal{B}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha descomposición por caixas de  $\mathbb{X}$  adaptada a  $\mathcal{P}$ . Convén lembrar que, se  $X^{(n)}$  é o eixo da descomposición  $\mathcal{B}^{(n)}$ , dada unha sucesión crecente de números naturais  $N_n$  podemos supoñer que cada conxunto de Delone  $D_{\mathcal{T}}^{(n)} = L_{\mathcal{T}} \cap X^{(n)}$  é  $N_n$ -discreto. Tendo en conta a proba do teorema 2.1.16, as celdas de Voronoi  $\mathbb{V}_n$  a partir das que se definen as placas das descomposicións  $\mathcal{B}^{(n)}$  verifican:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L(\mathbb{V}_n)}{A(\mathbb{V}_n)} = 0.$$

Mediante un proceso de inflación axeitado, podemos asegurar logo que as placas  $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}^{(n)}$  das descomposicións  $\mathcal{B}^{(n)}$  verifican que

$$\frac{L(\mathbb{P}_n)}{A(\mathbb{P}_n)} < \frac{1}{n}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$  e cada placa  $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}^{(n)}$ . En efecto, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sexan

$$A_n = \max_{\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}^{(n)}} A(\mathbb{P}_n), \quad L_n = \max_{\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}^{(n)}} L(\mathbb{P}_n).$$

Tendo en conta como se definen as placas de  $\mathcal{P}^{(n)}$  a partir das celdas de Voronoi en cada etapa da inflación, e mailas desigualdades (B.1) e (B.2), obtemos:

$$L(\mathbb{P}_n) < 2\pi\delta(\mathbb{V}_n) L_{n-1}$$

$$A(\mathbb{P}_n) \geq N_n\delta(\mathbb{V}_n) - 2\pi A_{n-1}\delta(\mathbb{V}_n)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$  e cada placa  $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}^{(n)}$ . Aplicando a desigualdade isoperimétrica  $4\pi A_n \leq L_n^2$  á segunda inecuación:

$$A(\mathbb{P}_n) \geq N_n\delta(\mathbb{V}_n) - L_{n-1}^2\delta(\mathbb{V}_n).$$

Temos logo que

$$\frac{L(\mathbb{P}_n)}{A(\mathbb{P}_n)} < \frac{2\pi L_{n-1}\delta(\mathbb{V}_n)}{(N_n - L_{n-1}^2)\delta(\mathbb{V}_n)} = 2\pi \frac{L_{n-1}}{(N_n - L_{n-1}^2)}.$$

Polo tanto, tomando o eixo  $X^{(n)}$  da descomposición  $\mathcal{B}^{(n)}$  suficientemente pequeno para que

$$N_n > L_{n-1}^2 + 2\pi n L_{n-1} \tag{B.3}$$

asegurámonos que

$$\frac{L(\mathbb{P}_n)}{A(\mathbb{P}_n)} < \frac{1}{n}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$  e cada placa  $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}^{(n)}$ .

Empregando un razonamento análogo, podemos tomar  $X^{(n)}$  suficientemente pequeno para que  $N_n > L_{n-1}^2 + 2\pi n A_{n-1} L_{n-1}$  en lugar de (B.3), e garantir daquela tamén que

$$A_{n-1} \frac{L(\mathbb{P}_n)}{A(\mathbb{P}_n)} < \frac{1}{n} \tag{B.4}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$  e cada placa  $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}^{(n)}$ . Isto permítenos demostrar o resultado esencial:

**Lema B.3.** *Calquera sucesión de placas discretas  $P_n = \mathbb{P}_n \cap X$  é unha sucesión de Følner.*

**Proba.** Sen perda de xeneralidade, podemos supoñer que todos os lados das prototeselas de  $\mathcal{P}$  teñen lonxitude  $\geq 1$ . Temos daquela que calquera prototesela  $\mathbb{P}_n \in \mathcal{P}^{(n)}$  satisfai:

$$\#\partial P_n \leq L(\mathbb{P}_n) \quad \text{e} \quad A_{n-1} \#P_n \geq A(\mathbb{P}_n).$$

Polo tanto,

$$\frac{\#\partial P_n}{\#P_n} \leq A_{n-1} \frac{L(\mathbb{P}_n)}{A(\mathbb{P}_n)} < \frac{1}{n}.$$

□

Grazas a este resultado, procedendo da mesma maneira que na proba feita en §2.5.4, podemos probar o resultado anunciado:

**Proposición B.4.** *O bordo  $\partial\mathcal{R}_\infty$  é  $\mathcal{R}_\infty$ -fino.*

□

## Proba do Teorema B.1

Propoñémonos agora demostrar a proposición anterior nun contexto moito máis xeral. Como dixemos, a idea neste caso consiste en probar un teorema de tipo Rohlin, seguindo un argumento similar ao que emprega C. Series en [73] para demostrar que calquera foliación con crecemento polinomial é hiperfinita respecto de calquera medida invariante. Antes de fixar as hipóteses, precisamos lembrar algunhas definicións:

**Definición B.5.** Dadas  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dúas funcións monótonas crecentes, dise que  $g$  *está dominada por*  $f$ , e denótase  $g \prec f$ , se existen constantes  $\lambda, \rho \geq 1$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $g(n) \leq \lambda f(\rho n)$  para cada  $n \geq n_0$ . Dúas funcións  $f$  e  $g$  están *mutuamente dominadas* se  $g \prec f$  e  $f \prec g$ . Esta relación define un preorde no conxunto das funcións monótonas crecentes con rango e imaxe en  $\mathbb{N}$  e a clase de cada función  $f$  denomínase *tipo de crecemento* de  $f$ .

O tipo de crecemento dunha folla  $L$  dunha laminación  $(M, \mathcal{F})$  defínese por medio da función de volume da órbita do pseudogrupo de holonomía  $\Gamma$  nun punto  $x$  de  $L \cap T$ :

**Definición B.6.** Chámase *tipo de crecemento* de  $L$  ao tipo de crecemento da función de volume  $v_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definida por  $v_x(n) = \#\bar{B}_\Gamma(x, n)$ .

O tipo de crecemento de  $L$  non depende do punto elixido: se  $x, y \in L$  e  $d = d_\Gamma(x, y)$ , temos entón que  $\bar{B}_\Gamma(y, n) \subset \bar{B}_\Gamma(x, n + d) \subset \bar{B}_\Gamma(y, n + 2d)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o que implica que  $v_x$  e  $v_y$  están mutuamente dominadas.

**Definición B.7.** Dise que unha laminación ten *crecemento polinomial* se  $v_x \prec n^d$ , para cada  $x \in M$ , é dicir, se o crecemento de todas as súas follas está dominado por un mesmo polinomio.

Isto permite probar no noso caso a seguinte versión global do lema de Jenkins que emprega C. Series en [73] (a versión primitiva do lema de Jenkins pode verse en ([43]):

**Lema B.8** (cf. [4, 33, 52]). *Sexa  $(M, \mathcal{F})$  unha laminación transversalmente Cantor, minimal e sen holonomía con crecemento polinomial. Existe unha sucesión de funcións continuas  $n_q : T \rightarrow \mathbb{N}$  e unha constante  $M > 0$ , tales que:*

$$\frac{v_x(2n_q(x))}{v_x(n_q(x))} \leq M \quad (\text{B.5})$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{v_x(n_q(x) - r)}{v_x(n_q(x))} = 1 \quad (\text{B.6})$$

para cada  $x \in T$  e cada  $r \in \mathbb{N}$ .

**Proba.** Para cada  $x \in T$ , a función de volume  $v_x$  ten crecemento polinomial, logo está dominada por unha función polinomial  $p(n) = n^d$ , i.e. existen constantes  $\lambda, \rho > 1$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $v_x(n) \leq \lambda p(\rho n) = \lambda(\rho n)^d$ , para cada  $n \geq n_0$ . Se denotamos por  $M$  á razón

$$\frac{p(2n)}{p(n)} = 2^d,$$

temos entón que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{v_x(2n)}{v_x(n)} \leq M.$$

En efecto, cúmprese que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{v_x(2n)}{v_x(n)} < aM$ , para cada  $a > 1$ . En caso contrario, existiría  $N \geq n_0$  tal que  $v_x(2n) > aMv_x(n)$  para cada  $n \geq N$ . Logo

$$v_x(2^k n) > a^k M^k v_x(n)$$

para cada  $k > 1$ , e daquela

$$a^k M^k v_x(n) < M^k \lambda(\rho n)^d.$$

O que implica que  $\lambda(\rho n)^d \geq a^k v_x(n) \geq a^k$  e chegamos así a unha contradición. Polo tanto, para cada  $x \in X$ , existe unha sucesión crecente de naturais  $n_q(x)$  tales que

$$\frac{v_x(2n_q(x))}{v_x(n_q(x))} \leq M.$$

Por outra banda, polo crecemento subexponencial, calquera sucesión de bólas contén unha subsucesión de Følner que satisfai

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{v_x(n_q(x) - r)}{v_x(n_q(x))} = 1$$

para cada  $x \in T$ . Por último, como a función de volume  $v : T \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $v(x, n) = v_x(n)$  é continua, é posible tomar funcións  $n_q : T \rightarrow \mathbb{N}$  localmente constantes.  $\square$

A proba do carácter  $\mathcal{R}$ -fino de  $\partial\mathcal{R}_\infty$  consta agora dunha serie de lemas análogos aos de [73]. Todas as caixas  $B \cong P \times C$  que imos considerar e as placas  $P$  correspondentes están directamente discretizadas. De maneira explícita, temos a seguinte definición:

**Definición B.9.** Unha *caixa de anchura*  $2n$  en  $T$  é unha caixa  $B \cong P \times C$  con placas  $P \times \{x\} = \bar{B}_\Gamma(x, n)$ . Para cada  $r \leq n$ , o *bordo vertical*  $r$ -ésimo de  $B$  é o conxunto

$$\partial^r B = \bigcup_{x \in C} \partial^r \bar{B}_\Gamma(x, n)$$

onde

$$\partial^r \bar{B}_\Gamma(x, n) = \{x' \in \bar{B}_\Gamma(x, n) \mid \exists \gamma \in \Gamma, \text{lonx}_\Gamma(\gamma) \leq r : \gamma(x') \notin \bar{B}_\Gamma(x, n)\}.$$

A unión  $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$  dunha familia de caixas  $B_1, \dots, B_k$  de anchura  $\leq 2n$  con interiores disxuntos e eixos  $C_1, \dots, C_k$  denominarase *pila de anchura*  $2n$  e *eixo*  $C = \bigsqcup_{i=1}^k C_i$ .

A necesidade de introducir esta noción máis xeral está xustificada pola proba do seguinte resultado:

**Lema B.10.** *Sexa  $A$  un subconxunto aberto-pechado de  $T$ . Supoñamos que  $v_x(2n) \leq Mv_x(n)$  para cada  $x \in A$ . Existe entón unha pila  $B$  de anchura  $2n$  e eixo  $C \subset A$  tal que*

$$\mu(B) > \frac{1}{M} \mu(A)$$

para calquera medida  $\mu$  sobre  $T$  invariante por  $\mathcal{R}$ .

**Proba.** Para cada  $x \in A$ , existe unha veciñanza aberta-pechada  $C_x$  de  $x$  en  $A$  tal que para dous elementos distintos  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$  cúmprese que

$$\gamma(x), \gamma'(x) \in \bar{B}_\Gamma(x, n) \Rightarrow \gamma(C_x) \cap \gamma'(C_x) = \emptyset \quad (\text{B.7})$$

En efecto, como só hai un número finito de elementos  $\gamma(x)$  para  $\gamma \in \Gamma$  con  $\text{lonx}_\gamma(\gamma) \leq 2n$ , podemos elixir  $C_x$  suficientemente pequeno para asegurarmos (B.7) e poder definir así unha pila (en realidade unha caixa)  $B_x = P_x \times C_x$  de anchura  $2n$  en  $T$ .

Sexa  $C$  o aberto maximal que satisfai a anterior condición (B.7). Temos entón unha pila  $B$  de eixo  $C$  de maneira que  $A$  está contido na unión das imaxes  $\gamma(C)$  por elementos  $\gamma \in \Gamma$  con  $\text{lonx}_\gamma(\gamma) \leq 2n$ . Se supoñemos pola contra que existe  $x' \in A$  con  $d_\Gamma(x', C) > 2n$ , podemos tomar unha veciñanza aberto-pechada  $C'$  de  $x'$  en  $A$  satisfacendo (B.7). Restrinxíndonos a unha veciñanza máis pequena se fose preciso, podemos asegurar que  $C'$  é o eixo dunha caixa  $B'$  coa seguinte propiedade: para cada par de elementos  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$  tales que  $\gamma(x) \in \bar{B}_\Gamma(x, n)$  e  $\gamma'(x') \in \bar{B}_\Gamma(x', n)$ , cúmprese que  $\gamma(C) \cap \gamma'(C') = \emptyset$ . Mais daquela  $B \cup B'$  sería unha pila coa propiedade requirida e  $C$  non sería maximal. Ademais, como  $A$  é un aberto-pechado na transversal  $T$ , que é homeomorfa ao conxunto de Cantor, é posible tomar  $C$  aberto-pechado.

Finalmente, pola invarianza da medida e pola condición (B.5) da función de volume, a pila  $B$  de anchura  $2n$  e eixo  $C$  satisfai:

$$\mu(B) = \int v_x(n)\mu(C) d\mu(x) > \frac{1}{M} \int v_x(2n)\mu(C) d\mu(x) \geq \frac{1}{M}\mu(A). \quad (\text{B.8})$$

□

**Lema B.11.** *Sexa  $B$  unha pila de anchura  $2n$  e eixo  $C$ . Supoñamos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $v_x(n) < (1 + \varepsilon)v_x(n - r)$  para cada  $x \in C$ . Entón*

$$\mu(\partial^r B) < \varepsilon\mu(B)$$

para calquera medida invariante  $\mu$ .

**Proba.** Como

$$\partial^r B = \bigcup_{x \in C} \partial^r \bar{B}_\Gamma(x, n) \subset \bigcup_{x \in C} (\bar{B}_\Gamma(x, n) - \bar{B}_\Gamma(x, n - r))$$

e por hipótese

$$v_x(n) - v_x(n - r) < \varepsilon v_x(n - r) < \varepsilon v_x(n),$$

daquela

$$\begin{aligned} \mu(\partial^r B) &= \int \#\partial^r \bar{B}_\Gamma(x, n)\mu(C) d\mu(x) \leq \int (v_x(n) - v_x(n - r))\mu(C) d\mu(x) \\ &< \varepsilon \int v_x(n)\mu(C) d\mu(x) = \varepsilon\mu(B). \end{aligned}$$

□

**Lema B.12.** *Sexa  $A$  un subconxunto aberto-pechado de  $T$ . Para cada  $r \geq 1$  e cada  $\varepsilon > 0$ , existen  $N = N(r, \varepsilon) \geq 0$  e unha pila  $B$  de anchura  $2N$  e eixo  $C \subset A$  tal que:*

$$\mu(B) > \frac{1}{M}\mu(A) \quad (\text{B.9})$$

$$\mu(\partial^r B) < \varepsilon\mu(B) \quad (\text{B.10})$$

para calquera medida invariante  $\mu$ .

**Proba.** Para cada  $x \in X$ , existe unha sucesión  $n_q(x) \rightarrow \infty$  tal que

$$v_x(2n_q(x)) \leq Mv_x(n_q(x)) \quad \text{e} \quad v_x(n_q(x)) < (1 + \varepsilon)v_x(n_q(x) - r), \quad (\text{B.11})$$

se  $q \geq q_0$ . Denotemos  $N(x) = n_{q_0}(x)$  ao menor dos termos da sucesión. Como as funcións  $n_q$  e a función de volume son localmente constantes, podemos descompoñer  $T$  nun número finito de abertos-pechados  $X_1, X_2, \dots, X_p$  con constantes asociadas  $N_1, N_2, \dots, N_p \geq 0$  verificando (B.11) para cada  $x \in X_i$  e cada  $n_q \geq N_i$ . Supoñamos que  $N_p \geq N_{p-1} \geq \dots \geq N_1$ . Polos lemas B.10 e B.11, existe unha pila  $B_p$  de anchura  $2N_p$  e eixo  $C_p \subset A_p = X_p \cap A$ , tal que

$$\mu(B_p) > \frac{1}{M}\mu(A_p) \quad \text{e} \quad \mu(\partial^r B_p) < \varepsilon\mu(B_p)$$

para cada  $r \geq 1$ . Ademais, se denotamos  $V_{2N_p}(C) = \bigcup_{y \in C} B(y, 2N_p)$ , de (B.8) despréndese que

$$M\mu(B_p) \geq \mu(V_{2N_p}(C_p)) \geq \mu(A_p).$$

Consideremos agora o aberto-pechado  $A_{p-1} - V_{2N_p}(C_p)$  e observemos que a medida de  $A_{p-1} \cap V_{2N_p}(C_p) \subset V_{2N_p}(C_p)$  está limitada por  $M\mu(B_p)$ . Aplicando os lemas B.10 e B.11 de novo, existe unha pila  $B_{p-1}$  de anchura  $N_{p-1}$  e eixo  $C_{p-1}$  contido en  $A_{p-1} - V_{2N_p}(C_p)$  tal que

$$M\mu(B_{p-1}) \geq \mu(V_{2N_{p-1}}(C_{p-1})) \geq \mu(A_{p-1} - V_{2N_p}(C_p)).$$

Por recorrencia, podemos tomar pilas  $B_i$  de anchura  $N_i$  e eixo  $C_i \subset A_i - \bigcup_{j>i} V_{2N_j}(C_j)$  tales que

$$M\mu(B_i) \geq \mu(V_{2N_i}(C_i)) \geq \mu\left(A_i - \bigcup_{j>i} V_{2N_j}(C_j)\right).$$

Agora, como por construción

$$C_i \cap \left(\bigcup_{j>i} V_{2N_j}(C_j)\right) = \emptyset,$$



temos que  $V_{N_i}(C_i) \cap V_{N_j}(C_j) = \emptyset$  se  $i < j$ . Pero  $V_{N_i}(C_i)$  non é máis que a pila  $B_i$ , logo  $B_i \cap B_j = \emptyset$ , para  $i < j$ . Polo tanto, tendo en conta que  $A_i \cap A_{i-1} = \emptyset$ , a pila  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_p$  de eixo  $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_p \subset A$  e anchura  $2N = 2N_p$  verifica

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A_p) + \mu(A_{p-1} \cap V_{2N_p}(C_p)) + \mu(A_{p-1} - V_{2N_p}(C_p)) + \dots \\ &\quad + \mu\left(A_i \cap \bigcup_{j>i} V_{2N_j}(C_j)\right) + \mu\left(A_i - \bigcup_{j>i} V_{2N_j}(C_j)\right) + \dots \\ &\quad + \mu\left(A_1 \cap \bigcup_{j=2}^p V_{2N_j}(C_j)\right) + \mu\left(A_1 - \bigcup_{j=2}^p V_{2N_j}(C_j)\right) \\ &\qquad\qquad\qquad < M\mu(B_p) + \dots + M\mu(B_1) = M\mu(B). \end{aligned}$$

Por outra banda,

$$\mu(\partial^r B) = \sum_{i=1}^p \mu(\partial^r B_i) < \varepsilon \sum_{i=1}^p \mu(B_i) = \varepsilon \mu(B),$$

polo que temos probado o resultado. □

**Lema B.13.** *Para cada  $r \geq 1$  e cada  $\varepsilon > 0$ , existen  $N = N(r, \varepsilon) \geq 0$  e unha pila  $B$  de anchura  $2n$  e eixo  $C \subset A$  tal que:*

$$\mu(B) > 1 - \varepsilon \quad e \quad \mu(\partial^r B) < \varepsilon \mu(B)$$

para calquera medida invariante  $\mu$ .

**Proba.** Fixemos  $\delta > 0$  e  $m \in \mathbb{N}$  tales que:

$$\left(1 - \frac{1}{M}\right)^m < \delta,$$

$$\frac{\delta}{1 - \delta} < \varepsilon, \quad (1 - \delta)^2 > 1 - \varepsilon.$$

Aplicando a proposición B.12, existen enteiros positivos

$$\begin{aligned} N_1 &= N(r, \delta), \quad N_1 \geq r \\ &\quad \vdots \\ N_i &= N(N_{i-1}, \delta), \quad N_i \geq N_{i-1} \end{aligned}$$

⋮

$$N_m = N(N_{m-1}, \delta), \quad N_m \geq N_{m-1}$$

e pilas  $B_i$  de anchura  $2N_i$  e eixo  $C_i \subset T - \bigcup_{j>i} B_j$  tales que

$$\mu(B_i) > \frac{1}{M} \mu(T - \bigcup_{j>i} B_j) \quad \text{e} \quad \mu(\partial^{N_{i-1}} B_i) < \delta \mu(B_i).$$

Así definidas, as pilas  $B_1, \dots, B_m$  satisfán  $B_i \cap B_j \subset \partial^{N_{j-1}} B_j$  se  $j > i$ , pois do contrario  $B_j$  cortaríaa  $C_i$ . Podemos definir entón unha nova familia  $B'$  de pilas disxuntas  $B'_i = B_i - \partial^{N_{i-1}} B_i$ , que identificaremos coa súa unión. Por construción

$$\mu(B'_i) > (1 - \delta) \mu(B_i) \quad \text{e} \quad \mu(T - \bigcup_{i=j}^m B_i) < (1 - \frac{1}{M}) \mu(T - \bigcup_{i=j+1}^m B_i)$$

o que implica que

$$\mu(T - \bigcup_{i=1}^m B_i) < (1 - \frac{1}{M})^m < \delta$$

e daquela

$$\mu(\bigcup_{i=1}^m B_i) > 1 - \delta.$$

Polo tanto,

$$\mu(B') = \sum_{i=1}^m \mu(B'_i) > (1 - \delta) \sum_{i=1}^m \mu(B_i) \geq (1 - \delta) \mu(\bigcup_{i=1}^m B_i) > (1 - \delta)^2 > 1 - \varepsilon.$$

Por outra banda,

$$\mu(\partial^r B') = \sum_{i=1}^m \mu(\partial^r B'_i) < \delta \sum_{i=1}^m \mu(B_i) < \frac{\delta}{1 - \delta} \sum_{i=1}^m \mu(B'_i) = \frac{\delta}{1 - \delta} \mu(B') < \varepsilon \mu(B').$$

Concluimos pois tomando  $N = N_m$ . □

**Proposición B.14.** *Existe unha sucesión  $\{\mathcal{R}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de REEC's abertas en  $\mathcal{R}$  e unha sucesión monótona crecente de enteiros positivos  $\{N_n\}_{n \geq 0}$  tales que para cada  $n \in \mathbb{N}$ :*

i)  $\mathcal{R}_n[x] \subset \mathcal{R}_{n+1}[x] \subset \mathcal{R}[x]$  para cada  $x \in T$ ;

ii) se  $x' \in \mathcal{R}_n[x]$ , entón  $x' \in \bar{B}_\Gamma(x, N_n)$ ;

iii)  $\mu(\{x \in T \mid \bar{B}_\Gamma(x, N_{n-1}) \not\subset \mathcal{R}_n[x]\}) < \frac{1}{2^n}$  para calquera medida invariante  $\mu$ .

**Proba.** Aplicando o lema B.13 para  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  e  $r = N_0 = 1$  existe unha pila  $B_1$  de anchura  $N_1$ , tal que

$$\mu(B_1) > 1 - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \mu(\partial^{N_0} B_1) < \frac{1}{2} \mu(B_1) < \frac{1}{2}.$$

Supoñamos entón definidas as relacións  $\mathcal{R}_i$  e o enteiros  $N_i$  para  $i \leq n$ . Aplicando de novo o lema B.13 para  $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+2}}$  e  $r = 2N_n$ , existen  $N \in \mathbb{N}$  e unha pila  $\hat{B}$  de anchura  $2N$  tal que:

$$\mu(\hat{B}) > 1 - \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{e} \quad \mu(\partial^{2N_n} \hat{B}) < \frac{1}{2^{n+2}} \mu(\hat{B}) < \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Se definimos agora  $B = \hat{B} - \partial^{N_n} \hat{B}$ , temos que

$$\mu(B) - \mu(\partial^{N_n} B) > 1 - \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

e podemos definir entón  $N_{n+1} = 2N$  e  $\mathcal{R}_{n+1}$  como

$$x\mathcal{R}_{n+1}x' \Leftrightarrow \begin{cases} x\mathcal{R}_n x' \\ x\mathcal{R}_n x'', x'\mathcal{R}_n x''' \end{cases} \quad \text{e} \quad x'', x''' \text{ pertecen á mesma placa } P \text{ de } B$$

A relación de equivalencia  $\mathcal{R}_{n+1}$  satisfai evidentemente (i), (ii) e (iii). Por outra banda, empregando argumentos análogos aos da proba do lema 2.4.5, compróbase que as relacións  $\mathcal{R}_n$  son REEC's abertas en  $\mathcal{R}$ .  $\square$

**Proposición B.15.** *Nas condicións anteriores, o bordo  $\partial\mathcal{R}_\infty$  é  $\mathcal{R}$ -fino.*

**Proba.** Pola proposición anterior, o límite indutivo  $\mathcal{R}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_n$  é unha sub-relación AF aberta en  $\mathcal{R}$ . Ademais, o conxunto

$$\{x \in T \mid \mathcal{R}_\infty[x] \neq \mathcal{R}[x]\} = \{x \in T \mid \exists x' \in \mathcal{R}[x] : x' \notin \mathcal{R}_n[x], \forall n \in \mathbb{N}\}$$

está contido en

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in T \mid \bar{B}_\Gamma(x, N_{n-1}) \not\subseteq \mathcal{R}_n[x]\}.$$

Logo

$$\mu(\{x \in T \mid \mathcal{R}_\infty[x] \neq \mathcal{R}[x]\}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in T \mid \bar{B}_\Gamma(x, N_{n-1}) \not\subseteq \mathcal{R}_n[x]\}) = 0$$

para calquera medida  $\mathcal{R}$ -invariante  $\mu$ .  $\square$



# Bibliografía

- [1] C. Albert, E. Dazord, *Théorie des groupoides Symplectiques. Chapitre I : Théorie General des Groupoides de Lie*. Publications du Département de Mathématiques de l'Université de Lyon 1 (1989), 53-105.
- [2] F. Alcalde Cuesta, Moyennes harmoniques. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **19** (2010), 393-512.
- [3] F. Alcalde Cuesta, M.P. Fernández de Córdoba, Nombre de branchement d'un pseudogroupe. *Monatsh. Math.*, **163** (2011), 384-414.
- [4] F. Alcalde Cuesta, P. González Sequeiros, Á. Lozano Rojo, Affability of Euclidean tilings. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **347** (2009), 947-952.
- [5] F. Alcalde Cuesta, Á. Lozano Rojo, M. Macho Stadler, Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon. *Astérisque*, **323** (2009), 1-16.
- [6] F. Alcalde Cuesta, Á. Lozano Rojo, M. Macho Stadler, Transversely Cantor laminations as inverse limits. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **139** (2011), 2615-2630.
- [7] F. Alcalde Cuesta, A. Rechtman, Minimal Følner foliations are amenable. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **31** (2011), 685-707.
- [8] C. Anantharaman-Delaroche, J. Renault, *Amenable Groupoids (avec un appendice par E. Germain)*. Monographie de l'Enseignement Mathématique, **36** (2000), Genève.
- [9] J. Bellissard, R. Benedetti, J.M. Gambaudo, Spaces of Tilings, Finite Telescopic Approximations and Gap-Labeling, *Comm. Math. Phys.*, **261** (2006), 1-41.
- [10] R. Benedetti, J.M. Gambaudo, On the Dynamics of  $\mathbb{G}$ -Solenoids. Applications to Delone Sets. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23**, (2003), 673-691.

- 
- [11] R. Berger. The undecidability of the domino problem. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **66** (1966).
- [12] M. Bermúdez, G. Héctor, Laminations hyperfinies et revêtements. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **26** (2006), 305-339.
- [13] E. Blanc, *Propriétés génériques des Laminations*. Thèse UCB-Lyon 1, 2001.
- [14] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Livre III : Topologie générale, Chap. 3 : Groupes topologiques*. Hermann-Paris, 1960.
- [15] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Fascicule XXV, Livre VI : Intégration, Chap. 6 : Intégration Vectorielle*. Hermann-Paris, 1959.
- [16] A. Candel, L. Conlon, *Foliations I*. Graduate Studies in Mathematics, **23**. AMS, 2000.
- [17] Y. Carrière, É. Ghys, Relations d'équivalence moyennables sur les groupes de Lie. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **300** (1985), 677-680.
- [18] A. Connes, *Noncommutative Geometry*. Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [19] A. Connes, J. Feldman, B. Weiss, An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **1** (1981), 431-450.
- [20] R. Dougherty, S. Jackson, A. S. Kechris, The structure of hyperfinite Borel equivalence relations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **341** (1994), 193-225.
- [21] H. A. Dye, On groups of measure preserving transformations I. *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 119-159.
- [22] H. A. Dye, On groups of measure preserving transformations II. *Amer. J. Math.*, **85** (1963), 551-576.
- [23] D. B. A. Epstein, K. C. Millett, D. Tischler, Leaves without holonomy. *J. London Math. Soc.* **16** (1977), 548-552.
- [24] J. Feldman, C. C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **234** (1977), 289-324.
- [25] D. Gaboriau, Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math.*, **139** (2000), 41-89.

- 
- [26] E. Ghys, Laminations par surfaces de Riemann. *Panor. Syntheses*, **8** (1999), 49-95.
- [27] T. Giordano, H. Matui, I. Putnam, C. Skau, Orbit equivalence for Cantor minimal  $\mathbb{Z}^2$ -systems. *J. Amer. Math. Soc.*, **21** (2008), 863-892.
- [28] T. Giordano, H. Matui, I. Putnam, C. Skau, The absorption theorem for affable equivalence relations. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **28** (2008), 1509-1531.
- [29] T. Giordano, H. Matui, I. Putnam, C. Skau, Orbit equivalence for Cantor minimal  $\mathbb{Z}^d$ -systems. *Invent math.*, **179** (2010), 119-158.
- [30] T. Giordano, I. Putnam, C. Skau, Topological orbit equivalence and  $C^*$ -crossed products. *J. reine angew. Math.* **469** (1995), 51-111.
- [31] T. Giordano, I. Putnam, C. Skau, Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor minimal systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **24** (2004), 441-475.
- [32] P. González Sequeiros, *A dinámica dos mosaicos de Robinson*. Publicacións do Departamento de Xeometría e Topoloxía da USC, **107** (2006).
- [33] P. González Sequeiros, *A dinámica dos mosaicos euclidianos*. Publicacións do Departamento de Xeometría e Topoloxía da USC, **111** (2007).
- [34] S. E. Goodman, J. F. Plante, Holonomy and averaging in foliated sets. *J. Differential Geom.*, **14** (1979), 401-407.
- [35] B. Grünbaum, G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman & Co., New York, 1987.
- [36] A. Haefliger, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, en *Transversal structure of foliations (Toulouse, 1982)*. *Astérisque*, **116** (1984), 70-97.
- [37] A. Haefliger, Pseudogroups of local isometries, en *Differential Geometry (Santiago de Compostela, 1984)*. Research Notes in Math. 131, Pitman, Boston, 1985, 174-197.
- [38] A. Haefliger, Foliations and compactly generated pseudogroups, in *Foliations: geometry edinamics (Warsaw, 2000)*. World Sci. Publishing, River Edge, 2002, 275-295.
- [39] G. Hector, *Feuilletages en cylindres*. Springer Lecture Notes in Math., **597** (1977), 252-270.

- 
- [40] G. Hector, U. Hirsch, *Introduction to the geometry of foliations. Part A.* Vieweg & Sohn, 1981.
- [41] G. Hector, U. Hirsch, *Introduction to the geometry of foliations. Part B.* Vieweg & Sohn, 1983.
- [42] M. W. Hirsch, *Differential Topology.* Springer-Verlag, 1976.
- [43] J. Jenkins, Growth of connected locally compact groups. *J. Functional Anal.*, **12** (1973), 113-127.
- [44] V. A. Kaimanovich, Amenability, hyperfiniteness and isoperimetric inequalities. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, **325** (1997), 999-1004.
- [45] V. A. Kaimanovich, Equivalence relations with amenable leaves need not be amenable. En *Topology, Ergodic Theory, Real Algebraic Geometry. Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, **202** (2001), 151-166.
- [46] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory.* Graduate Texts in Math. **156**, Springer-Verlag, 1995.
- [47] J. Kepler, *Harmonices Mundi*, 1619.
- [48] J. C. Lagarias, P. A. B. Pleasants, Repetitive Delone sets and quasicrystals. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23** (2003), 831-867.
- [49] Á. Lozano Rojo, Decorando el plano. *Matematicalia*, **7** (2011).
- [50] Á. Lozano Rojo, *The dynamics of the Ghys-Kenyon lamination*, en *Foliations 2005*, Lodz, 2005.
- [51] Á. Lozano Rojo, The Cayley foliated space of a graphed pseudogroup. *Publ. de la RSME*, **10** (2006), 267-272.
- [52] Á. Lozano Rojo, *Dinámica topológica, teoría ergódica y geometría no conmutativa de grafos repetitivos.* Publicación do Departamento de Xeometría e Topoloxía da USC, **112** (2008).
- [53] Á. Lozano Rojo, An example of non-uniquely ergodic lamination. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **31** (2011), 449-457.
- [54] H. Matui, Affability of equivalence relations arising from two-dimensional substitution tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **26** (2006), 467-480.



- [55] E. Moise, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, GTM, **47**. Springer, 1977.
- [56] C. C. Moore, C. Schochet, *Global Analysis on Foliated Spaces*. Second Edition. Mathematical Sciences Research Institute Publications, 9. Cambridge University Press, New York, 2006.
- [57] P. S. Muhly, J. N. Renault, D. P. Williams, Equivalence and isomorphism for groupoid  $C^*$ -algebras. *J. Operator Theory*, **17** (1987), 3-22.
- [58] J. C. Oxtoby, Ergodic sets. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 116-136.
- [59] A. T. Paterson, *Amenability*. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1988.
- [60] R. Penrose, The role of aesthetics in pure and applied mathematical research. *Bull. Inst. Math. Appl.*, **10** (1974), 266-271.
- [61] R. Penrose, Pentaplexity. *Math. Intelligencer*, **2** (1979), 32-37.
- [62] R. Penrose, *Las sombras de la mente*. Crítica, Barcelona, 1996.
- [63] S. Petite, *Pavages du demi-plan hyperbolique et laminations*. Thèse Université de Bourgogne, 2005.
- [64] A. Phillips, D. Sullivan, Geometry of leaves. *Topology*, **20** (1981), 209-218.
- [65] C. Radin, M. Wolff, Space tilings and local isomorphism. *Geom. Dedicata*, **42** (1992), 355-360.
- [66] J. Renault, *A groupoid approach to  $C^*$ -Algebras*, Springer Lecture Notes in Math. 793, 1980.
- [67] J. Renault,  $C^*$ -algebras of groupoids and foliations, *Proc. Symposia Pure Maths.*, **38** (1982), 339-350.
- [68] J. Renault, The ideal structure of groupoid crossed product  $C^*$ -algebras (avec un appendice par G. Skandalis). *J. Operator Theory*, **25** (1991), 3-36.
- [69] J. Renault, AF-equivalence relations and their cocycles, en *Operator algebras and mathematical physics (Constanța, 2001)*. Theta, Bucharest, 2003, 365-377.
- [70] R. M. Robinson, Undecidability and Nonperiodicity of Tilings of the Plane. *Inventiones Math.*, **12** (1971), 177-209.
- [71] V. A. Rohlin, On the fundamental ideas of measure theory. *Mat. Sbornik (N.S.)* **25(67)** (1949), 107-150; *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 1*, **10** (1962), 1-54.

- 
- [72] L. Sadun, R. F. Williams, Tiling spaces are Cantor set fiber bundles. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23** (2003), 307-316.
- [73] C. Series, Foliations of polynomial growth are hyperfinite. *Israel Journal Math.*, **34** 3 (1979), 245-258.
- [74] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J. Cahn. Metallic. Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, **53** (1984), 1951-1953.
- [75] B. Solomyak, Dynamics of self-similar tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **17** (1997), 695-738.
- [76] A. M. Vershik, A Theorem on Periodical Markov Approximation, en *Ergodic Theory and Related Topics (Vitte, 1981)*. Math. Res., **12**, Akademie-Verlag, Berlin, 1981, 195-206.
- [77] H. Wang, Proving theorems by pattern recognition-II. *H. Bell Systems Technical Journal*, **40** (1961), 1-41.
- [78] R. F. Williams, Expanding attractors. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, **43** (1974), 169-203.