Hellen Colman Vale

CATEGORÍA LS

EN

FOLIACIONES

93

1998

Publicaciones
del
Departamento
de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Categoría LS en foliaciones

Hellen Colman Vale

IMPRIME: Imprenta Universitaria
ISBN: 84-89390-10-X
Dep. Legal: C-1925/98

Categoría LS en foliaciones

Hellen Colman Vale

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología bajo la dirección del Profesor Dr. D. Enrique Macías Virgós para optar al título de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela.

Realizado el acto público de Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral el día 25 de setiembre de 1998, en la Universidad de Santiago de Compostela, ante el Tribunal formado por los Profesores:

Presidente:
Dr. D. Xosé Masa Vázquez (Univ. de Santiago de Compostela)

Vocales:
Dr. D. Marcel Nicolau (Univ. Autónoma de Barcelona)
Dr. D. Paul Schweitzer (Pontificia Univ. Católica, Río de Janeiro)
Dr. D. Daniel Tanré (Univ. de Lille)

Secretario:
Dr. D. Jesús Álvarez López (Univ. de Santiago de Compostela)

obtuvo la máxima calificación, SOBRESALIENTE CUM LAUDE.

Contents

Introducción

Antecedentes

El objetivo de este trabajo es el estudio de la categoría LS en el marco de la teoría de foliaciones.

La categoría LS de un espacio topológico fue introducida por L. Lusternik y L. Schnirelmann [21] en 1934 en el contexto del cálculo de variaciones.

Se trata de un invariante homotópico que ha sido intensamente estudiado desde entonces y que continúa siendo un campo muy activo de investigación en diferentes contextos y desde distintos puntos de vista.

La categoría LS de un espacio X, cat$X$, es esencialmente el mínimo número de subespacios de cierto tipo contráctiles en X necesarios para cubrir X. Si bien en el trabajo original de Lusternik y Schnirelmann se requería que los subespacios fuesen cerrados consideraremos la definición moderna introducida por R. Fox [12] en 1941 que usa recubrimientos abiertos.

El principal resultado obtenido por Lusternik y Schnirelmann tiene que ver con la existencia de puntos críticos. Prueban que en una variedad compacta M una función diferenciable tiene al menos cat$M$ puntos críticos.

En el camino hacia el cálculo de este invariante en una variedad aparecen muchos resultados parciales, acotaciones en términos de invariantes homotópicos o cohomológicos y cálculos explícitos de categorías de variedades particulares (ver por ejemplo [36], [37]).

Muchas variaciones sobre la idea básica de la categoría LS han sido discutidas en la literatura matemática. Ya en el artículo de Fox se propone cierta generalización que será retomada en lo años 60 por I. Berstein y T. Ganea [2] y desarrollada como la categoría de una aplicación continua. En la misma década A. Schwarz [35] introduce el concepto de género de una fibración (que nosotros llamaremos categoría seccionaria siguiendo la terminología de I. M.

James en [19]). Poco después K. Varadarajan [39] obtiene una relación entre las categorías LS del espacio total, de la base y de la fibra de una fibración y K. A. Hardie [15] la generaliza para la categoría de una aplicación.

En los últimos años han aparecido distintas generalizaciones como la categoría equivariante de Fadell [10], la $\mathcal{A}$-categoría de M. Clapp y D. Puppe [5] y la categoría fibrada de I. M. James y J. R. Morris [20].

En línea con estas generalizaciones desarrollaremos en este trabajo una noción de categoría adaptada a una foliación.

La teoría de foliaciones surge como tal en los años 40 con el trabajo de C. Ehresmann y G. Reeb y se desarrolla desde múltiples enfoques y puntos de vista hasta nuestros días.

Una foliación es esencialmente una partición de una variedad en subvariedades de la misma dimensión, llamadas hojas, que localmente están bien colocadas como una pila de placas pero que globalmente pueden tener una estructura más complicada. La teoría geométrica de foliaciones intenta describir esa estructura global y sus propiedades.

En los distintos tipos de estudios juega casi siempre un papel fundamental la dinámica transversa de la foliación, es decir, el comportamiento dinámico de una transversal a lo largo de las hojas.

Aunque podemos situar antecedentes de la teoría de foliaciones en el análisis cualitativo de las soluciones de ecuaciones diferenciales, el primer impulso al desarrollo como teoría independiente viene dado por la cuestión planteada por H. Hopf en los años 30 acerca de la existencia de una foliación de codimensión uno en S^3. Esta pregunta fue respondida afirmativamente por G. Reeb en su tesis con la construcción de su conocido ejemplo.

En 1959 B. Reinhart [31] introduce un tipo particular de foliaciones, las riemannianas que esencialmente son las que localmente mantienen constante la distancia entre sus hojas (para una cierta métrica que se dirá casi-fibrada).

Dentro de las foliaciones riemannianas aparecen las foliaciones de Lie introducidas por R. Hermann en 1960 [17] y estudiadas inicialmente por E. Fedida [11] en los años 70. Estas foliaciones aparecen como una generalización de las definidas por una forma cerrada y juegan un papel fundamental en la teoría de foliaciones riemannianas gracias a los trabajos de P. Molino [26], [27]. Si bien la estructura de las foliaciones de Lie es conocida quedan aún muchos problemas interesantes abiertos [22].

En la misma década aparecen muchos artículos sobre las foliaciones con todas las hojas compactas (ver por ejemplo [8], [7], [9]). Se dan condiciones equivalentes a que el espacio de hojas sea una variedad Hausdorff, condiciones que involucran de manera decisiva a los grupos de holonomía definidos por C. Ehresmann. Estas foliaciones con todas las hojas compactas en que el espacio de hojas es Hausdorff son llamadas foliaciones compactas-Hausdorff. Su espacio de hojas se caracteriza por ser localmente el cociente de un subgrupo finito de $\mathsf{O}(n)$ actuando sobre D^n, o sea el espacio de hojas de una foliación compacta-Hausdorff tiene estructura de V-variedad o variedad de Satake. Esta noción de V-variedad fue introducida por I. Satake en 1956 [33] como una generalización del concepto de variedad y enriquecida en los años 70 a partir del aporte de W. P. Thurston [38].

En la teoría cuantitativa de foliaciones han aparecido varias generalizaciones de los grupos de cohomología de una variedad. A finales de los 50 comienza a ser estudiada la cohomología básica de De Rham de una foliación, definida por B. Reinhart [32]. Desde el punto de vista de la geometría transversa, las formas básicas son las formas diferenciales localmente invariantes a lo largo de la hojas. La cohomología básica coincidirá en el caso de una foliación simple con la cohomología de De Rham de la variedad cociente.

A partir de los años 70 surgen diversos trabajos sobre otras cohomologías asociadas a una foliación en general ligados a una sucesión espectral que generaliza la de Serre de una fibración ([34], [25], [23]). Para nosotros será de especial interés la cohomología de una variedad foliada con valores en un haz de gérmenes de funciones localmente constantes sobre las hojas, será la cohomología foliada estudiada por A. El Kacimi-Alaoui [6].

Objetivos

Una nueva categoría adaptada a una foliación deberá ser invariante de homotopía para alguna de las homotopías compatibles con la foliación. Es importante también que los abiertos foliados sean categóricos y que la nueva categoría pueda ser comparada con la categoría LS de las hojas y del espacio de hojas. Para obtener una acotación inferior de la categoría adaptada a una foliación a partir de una teoría de cohomología, tenemos que poder compararla con la nilpotencia de alguna de las cohomologías asociadas a una foliación.

En este trabajo proponemos por un lado la categoría tangente que en el caso en el que la foliación es un fibrado producto coincide con la categoría LS de las hojas y por otro la categoría transversa y la transversa saturada que, esta última, en el caso de un fibrado localmente trivial coincide con la categoría LS de la base.

Los abiertos foliados serán tangente y transversalmente categóricos con lo que las variedades compactas tendrán categoría tangente y transversa finita.

Las categorías tangente y transversa serán invariantes homotópicos para las homotopías integrable y foliada respectivamente definidas en una variedad foliada.

Comparamos la categoría tangente con la categoría LS de las hojas y la categoría transversa saturada con la categoría LS del espacio de hojas.

Acotaremos ambas categorías en términos de invariantes cohomológicos relacionados con las cohomologías básica y foliada de una foliación.

Finalmente daremos una generalización del resultado original de Lusternik y Schnirelmann acerca del número de puntos críticos de una función real en una variedad compacta. Probaremos que, bajo ciertas hipótesis (4.11), el número de hojas críticas de una función básica en una variedad compacta está acotado por la categoría transversa de la foliación.

Resultados

Describiré más detalladamente el contenido de este trabajo que está dividido en cinco capítulos.

El primer capítulo nos introduce en la teoría de foliaciones y consta de tres secciones.

En la primera sección se dan las definiciones de los conceptos fundamentales y propiedades elementales de la teoría de foliaciones que utilizaré después y se fijan las notaciones.

En la sección 2 se reseñan una serie de casos particulares de foliaciones que tendrán una importancia capital en los dos últimos capítulos. En el caso de las foliaciones compactas-Hausdorff se prueba en esta sección la existencia de particiones básicas de la unidad, de lo que como corolario tenemos que las foliaciones compactas-Hausdorff son riemannianas.

En la última sección introducimos las dos nociones usuales de homotopía compatibles con la foliación: la homotopía foliada y la integrable. En cada caso estudiamos las consecuencias sobre el espacio de hojas de tener el mismo tipo de homotopía. Concretamente veremos que si dos foliaciones tienen el mismo tipo de homotopía foliada entonces los espacios de hojas tienen el mismo tipo de homotopía y si las foliaciones tienen el mismo tipo de homotopía integrable, los espacios de hojas son homeomorfos. En particular para el caso de foliaciones de Lie demostramos que tener el mismo tipo de homotopía integrable implica que los grupos transversos tienen que ser difeomorfos y los grupos de holonomía isomorfos.

En el capítulo 2 considero un producto en la cohomología de De Rham relativa que será determinante en la acotación por un invariante cohomológico de las categorías adaptadas a la foliación. Utilizo la definición de complejo de formas relativas dada en [3] y defino en ese complejo un producto que inducirá el producto en cohomología de De Rham relativa.

Luego introducimos las definiciones de cohomología básica ([32]) y foliada ([6]) y definimos de manera análoga las correspondientes cohomologías relativas.

Tendremos un producto inducido en la cohomología foliada relativa mientras que en la básica relativa estará bien definido sólo en algunos casos particulares.

El capítulo 3 nos introduce en la teoría desarrollada en torno a la categoría LS.

En la primera sección se da la definición de categoría LS de un espacio topológico X, cat$\mathsf{X}$, así como algunas de sus propiedades más importantes, en particular la acotación por la nilpotencia de cualquier cohomología reducida de X ([19]).

En la siguiente sección damos una definición de categoría diferenciable para variedades y probamos que la categoría topológica y diferenciable coinciden en una variedad.

La sección 3 es una breve reseña sobre la categoría seccionaria definida por A. Schwartz [35].

El resto del capítulo está dedicado al estudio de la categoría fibrada de James y Morris [20] que se sitúa como uno de los antecedentes de la categoría tangente que luego definiremos.

El contexto donde se define la categoría fibrada será el de los espacios fibrados sobre un espacio topológico B, es decir espacios (X, p) donde $p\colon X \to B$ es una aplicación continua. Las aplicaciones entre dos espacios fibrados serán las que conmutan con las proyecciones. Una aplicación fibrada $c\colon (X, p) \to (X', p')$ será una constante fibrada sobre B si existe una sección global $s\colon B \to X'$ tal que $c = sp$. Un subconjunto U de X será categórico fibrado sobre B si la inclusión $U \subset X$ es homótopa fibrada a una constante fibrada sobre B y la categoría fibrada, $\mathrm{cat}_B X$, será el mínimo número de abiertos categóricos fibrados necesarios para cubrir X.

La categoría fibrada es un invariante de homotopía fibrada y coincide con la categoría de la fibra en el caso de un fibrado producto.

Se obtiene para esta categoría la acotación [20]:

$$\mathrm{cat}_B X \geq \mathrm{nil} \frac{\tilde{H}^*(X)}{\langle p^* H^*(B) \rangle}.$$

Damos también de esta categoría una versión diferenciable. Redemostramos la acotación anterior para el caso de variedades reinterpretando la cohomología del cilindro de una aplicación de la demostración de James y Morris en términos de la cohomología de De Rham de una aplicación definida en [3]. Más adelante adaptaremos estas ideas al caso de una variedad foliada.

Finalmente y tratando de evitar la necesidad de restringirnos a espacios fibrados que tengan sección global, proponemos el concepto de categoría fibrada local, $\mathrm{cat}_p X$, y su versión diferenciable, $\mathrm{cat}_p^\infty X$. Estas categorías sólo requieren la existencia de secciones locales lo que nos permitirá por ejemplo calcular la categoría de cualquier fibrado localmente trivial. Comparamos estas categorías con las categorías definidas antes y damos algunas acotaciones y condiciones en las que coinciden. También probamos que es necesario que las fibras sean cerradas para que cualquiera de las categorías fibradas en una variedad sea finita lo que motiva un siguiente paso en la búsqueda de una noción que se adecue mejor al contexto de una foliación.

En el cuarto capítulo comenzamos haciendo algunas consideraciones sobre la categoría LS de las hojas y luego definimos la categoría tangente y la transversa.

En la sección 2 introducimos la **categoría tangente**, $\mathrm{cat}_t(M, \mathcal{F})$. En una variedad foliada $(M, \mathcal{F})$ diremos que un abierto U de M es tangentemente categórico si la inclusión $U \subset M$ es homótopa integrable a una aplicación constante en cada hoja de la foliación inducida por $\mathcal{F}$ en U, $\mathcal{F}_U$.

Se trata de deformar el abierto U a lo largo de las hojas de manera que la homotopía restringida a cada hoja de $\mathcal{F}_U$ sea una contracción en la hoja de $\mathcal{F}$.

La categoría tangente es un invariante de homotopía integrable y es finita en las variedades compactas.

Si consideramos la foliación por una sola hoja coincide con la categoría LS de la variedad y si consideramos la foliación por puntos, la categoría tangente es 1.

Comparamos también esta categoría con las categorías diferenciables definidas hasta ahora y con la categoría de las hojas, obteniendo:

$$\mathrm{cat} L \leq \mathrm{cat}_t(M, \mathcal{F}) \leq \mathrm{cat}_\pi^\infty M$$

para toda hoja L de la foliación.

Utilizando la teoría desarrollada en el capítulo 2 probamos que la nilpotencia del anillo de cohomología foliada en grado positivo es una cota inferior para la categoría tangente. La nilpotencia de este anillo es un invariante del que no disponemos de cálculos explícitos ya que no se ha estudiado nunca antes.

Por último proponemos la noción más restrictiva de T-categoría que exige además que la imagen de la aplicación constante en las hojas de $\mathcal{F}_U$ esté contenida en una transversal T. Es decir, que la inclusión factorice por una transversal salvo homotopía integrable.

En la sección 3 definimos la **categoría transversa**, $\mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F})$. Diremos que un abierto U de M es transversalmente categórico si la inclusión $U \subset M$ es homótopa foliada a una aplicación cuya imagen esté contenida en alguna hoja.

Se trata de deformar el abierto transversalmente hasta una hoja de la foliación, es decir la inclusión factoriza por una hoja salvo homotopía foliada.

La categoría transversa es un invariante de homotopía foliada y es finita en las variedades compactas.

Si consideramos la foliación por puntos coincide con la categoría LS de la variedad y si consideramos la foliación por una sola hoja, la categoría transversa es 1.

Comparamos la categoría transversa con la categoría LS del espacio de hojas obteniendo algunos resultados parciales.

Damos una generalización del teorema de Varadarajan [39] sobre fibraciones para el caso de una foliación cualquiera y obtenemos la siguiente relación entre la categoría de una variedad M y las categorías tangente y transversa de cualquier foliación definida en M:

$$\mathrm{cat} M \leq \mathrm{cat}_t(M, \mathcal{F})\ \mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}).$$

Si $k\colon \Omega_b^*(M) \to \Omega^*(M)$ es la inyección de la subálgebra de formas básicas en la de todas las formas diferenciales sobre M, tenemos que

$$\mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) \geq \mathrm{nil} k^* H_b(M)$$

donde k^* es la aplicación inducida en cohomología.

Notamos que si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son foliaciones transversas en general no es cierto que la categoría transversa de $\mathcal{F}$ coincida con la categoría tangente de $\mathcal{F}'$.

Luego comparamos la categoría transversa de una foliación dada por una acción localmente libre de un grupo de Lie compacto G sobre M con la G-categoría estudiada por varios autores (ver por ejemplo [10], [24]).

Dedicamos la siguiente sección al estudio de la categoría tangente y transversa en las foliaciones compactas-Hausdorff. Sabemos que toda hoja de una foliación compacta-Hausdorff admite un entorno $\tilde{L} \times_G D$ donde G es el grupo de holonomía de la hoja, $\tilde{L}$ una cubierta de L y D una bola en R^n. Probamos que $\tilde{L} \times_G D$ es un abierto transversalmente categórico y que puede recubrirse con $\mathrm{cat} L$ abiertos t-categóricos. Obtenemos sendas acotaciones de las categorías tangente y transversa en función del número de abiertos de trivialización del fibrado de Seifert dado por la foliación. En particular concluimos que toda hoja de una foliación compacta-Hausdorff admite un entorno saturado transversalmente categórico. Retomaremos este resultado en el último capítulo.

Finalmente damos acotaciones para las categorías tangente y transversa de la suspensión de un homomorfismo en función de las categorías LS de las variedades que intevienen en la construcción de una suspensión.

Terminamos el capítulo calculando explícitamente algunas categorías de foliaciones particulares. Utilizamos los resultados obtenidos para calcular la categoría tangente de las foliaciones en el toro, probamos que la categoría tangente de cualquier flujo en el toro es 2; calculamos también la categoría tangente y transversa de sendas foliaciones en la cinta de Moebius y en S^3 dadas por un fibrado de Seifert. Comparamos estos resultados con las otras categorías diferenciables definidas para variedades y para aplicaciones.

En el último capítulo mostramos cómo puede ser utilizada una categoría en foliaciones para acotar el número de hojas críticas de una función básica.

Introducimos en la primera sección las notaciones y algunas propiedades del conjunto de puntos críticos K de una función básica.

Definimos luego la categoría transversa saturada, $\mathrm{cat}^{s}_{\pitchfork} M$, agregando a la definición de categoría transversa de antes la exigencia de que los abiertos sean saturados. La categoría será una cota inferior para la cantidad de hojas críticas por lo que con esta modificación obtendremos una acotación mejor.

Daremos una versión en términos de deformación transversa del método de Lusternik y Schnirelmann. Seguiremos con algunas modificaciones la exposición de R. S. Palais en [29]. Establecemos condiciones restrictivas sobre la variedad y sobre la función básica. Decimos que una variedad foliada es $\pitchfork$ -localmente contráctil si toda hoja admite un entorno saturado transversalmente categórico y que una función básica cumple las condiciones de deformación transversa de Palais-Smale si:

1. $\forall c \in R$ valor regular de f, $\exists \epsilon > 0$ tal que $M_{c+\epsilon}$ es $\pitchfork$ -deformable en $M_{c-\epsilon}$

2. $\forall c \in R$ valor crítico de f, $\forall U$ entorno saturado de K_c, $\exists \epsilon > 0$ tal que $M_{c+\epsilon} - U$ es $\pitchfork$ -deformable en $M_{c-\epsilon}$

donde $M_c = f^{-1}(-\infty, c]$ y $K_c = K \cap f^{-1}(c)$.

Finalmente probamos que bajo estas condiciones una función básica en una variedad compacta tiene al menos $\mathrm{cat}^{s}_{\pitchfork} M$ hojas críticas.

En la sección 3 probamos que toda foliación compacta-Hausdorff está en las hipótesis del teorema anterior. Para eso utilizamos de manera determinante la existencia de particiones básicas de la unidad en una foliación compacta-Hausdorff.

Además como aplicación de este resultado obtenemos una generalización del resultado clásico de Lusternik y Schnirelmann en variedades para las variedades de Satake que son espacios de hojas de alguna foliación compacta-Hausdorff.

En la última sección probamos que toda foliación de codimensión uno tiene al menos $\mathrm{cat}^{s}_{\pitchfork} M$ hojas críticas.

De hecho probamos más: si hay alguna hoja no cerrada en la foliación, entonces cualquier función básica tiene infinitas hojas críticas. En esta sección nos basamos sobre todo en los resultados de G. Hector [16] sobre conjuntos minimales en foliaciones de codimensión uno.

Agradecimientos

Agradezco al Profesor Dr. Enrique Macías Virgós su dedicación.

Agradezco al Departamento de Geometría y Topología los medios que ha puesto a mi alcance.

Agradezco a los Profesores Dr. Fernando Alcalde y Dr. Paul Schweitzer su desinteresada colaboración.

Agradezco a mis compañeros Pedro Martín, Manuel Calaza, Manuel Gándara y Esperanza Sanmartín su solidaridad.

Chapter 1

Cohomología de De Rham

Sea M una variedad diferenciable de dimensión $m+n$, $\Omega^r(M)$ el espacio de r-formas diferenciales sobre M y $d\colon \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ la diferencial exterior. Se tiene que d es una antiderivación, $d^2 = 0$ y tenemos el complejo diferencial:

$$\cdots \longrightarrow \Omega^r(M) \xrightarrow{d} \Omega^{r+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

donde $\omega \in \Omega^r(M)$ es cerrada si $d\omega = 0$ y es exacta si $\exists \eta \in \Omega^{r-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$. La cohomología de este complejo en grado r,

$$H^r_{DR}(M) = \frac{\{r - \text{formas cerradas}\}}{\{r - \text{formas exactas}\}}$$

es el r-ésimo grupo de cohomología de De Rham de la variedad M, y

$$H_{DR}(M) = \bigoplus_{0 \leq r \leq \dim M} H^r_{DR}(M)$$

es un álgebra graduada (anti)conmutativa con el producto inducido por el producto exterior de formas.

1.1 Cohomología de De Rham relativa

Sea $f\colon N \to M$ aplicación diferenciable entre variedades. Definimos [3]

$$\Omega^r(f) = \Omega^r(M) \oplus \Omega^{r-1}(N)$$

con diferencial dada por

$$d(\omega,\theta) = (d\omega, f^*\omega - d\theta).$$

Vemos que $d^2 = 0$ y tenemos el complejo diferencial:

$$\cdots \longrightarrow \Omega^r(f) \xrightarrow{d} \Omega^{r+1}(f) \longrightarrow \cdots$$

Llamamos $H^r(f)$ a la cohomología en grado r de este complejo. A partir de la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \Omega^{r-1}(N) \xrightarrow{\alpha} \Omega^r(f) \xrightarrow{\beta} \Omega^r(M) \longrightarrow 0$$

donde $\alpha(\eta) = (0,\eta)$ y $\beta(\omega,\theta) = \omega$, tenemos:

Proposición 1.1

$$\cdots \longrightarrow H^{r-1}(N) \xrightarrow{\alpha^*} H^r(f) \xrightarrow{\beta^*} H^r(M) \xrightarrow{f^*} H^r(N) \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta larga en cohomología.

Definición 1.2 *Si* U *es abierto en* M*,* $H^r(M,U) = H^r(i)$ *es la cohomología de De Rham relativa en grado* r*, donde* $i\colon U \hookrightarrow M$ *es la inclusión.*

1.2 Producto en cohomología relativa

Sean U, V abiertos en M y $\{f, g\}$ una partición de la unidad sobre $U \cup V$ subordinada al recubrimiento $\{U, V\}$. Definimos un producto

$$\bullet\colon \Omega^p(M,U) \times \Omega^q(M,V) \to \Omega^{p+q}(M, U\cup V)$$

como

$$(\omega,\theta) \bullet (z,t) = (\omega \wedge z, \eta)$$

donde $\eta \in \Omega^{p+q-1}(U \cup V)$ está dada por

$$\eta|_U = \theta\wedge z|_U + (-1)^p \left[d(g\theta \wedge t|_{U\cap V}) + g\left((\omega - d\theta)\wedge t - (-1)^p\theta \wedge (z - dt)\right)|_{U\cap V}\right]$$

y

$$\eta|_V = (-1)^p\omega|_V\wedge t - (-1)^p \left[d(f\theta \wedge t|_{U\cap V}) + f\left((\omega - d\theta)\wedge t - (-1)^p\theta \wedge (z - dt)\right)|_{U\cap V}\right].$$

Proposición 1.3 η *está bien definida en* $U \cap V$.

Dem:

$$
\begin{aligned}
& (\eta|_U - \eta|_V)|_{U\cap V} \\
= \;& [\theta \wedge z - (-1)^p \omega \wedge t + (-1)^p d(\theta \wedge t) \\
& \quad + (-1)^p \left((\omega - d\theta) \wedge t - (-1)^p \theta \wedge (z - dt)\right)]|_{U\cap V} \\
= \;& [\theta \wedge z - (-1)^p \omega \wedge t + (-1)^p d\theta \wedge t - \theta \wedge dt + (-1)^p \omega \wedge t - (-1)^p d\theta \wedge t \\
& \quad - \theta \wedge z + \theta \wedge dt]|_{U\cap V} \\
= \;& 0.
\end{aligned}
$$

□

Proposición 1.4 *El producto* $\bullet \colon H^p(M,U) \times H^q(M,V) \to H^{p+q}(M, U \cup V)$ *está bien definido en cohomología relativa.*

Dem:

1. Si $(\omega,\theta),(z,t) \in \operatorname{Ker} d$ entonces $d\omega = dz = 0$, $\omega|_U = d\theta$ y $z|_V = dt$. El producto $(\omega,\theta) \bullet (z,t) = (\omega \wedge z, \eta)$ verifica

   $$d(\omega \wedge z) = d\omega \wedge z + (-1)^p \omega \wedge dz = 0.$$

   Además $d\eta = \omega \wedge z|_{U\cup V}$ porque

   $$
   \begin{aligned}
   & d\eta|_U \\
   = \;& d[\theta \wedge z|_U + (-1)^p \left(d(g\theta \wedge t|_{U\cap V}) + g((\omega - d\theta) \wedge t - (-1)^p \theta \wedge (z - dt))|_U\right. \\
   = \;& d(\theta \wedge z|_U) \\
   = \;& [d\theta \wedge z + (-1)^{p-1} \theta \wedge dz]|_U \\
   = \;& (\omega \wedge z)|_U
   \end{aligned}
   $$

   y

   $$
   \begin{aligned}
   & d\eta|_V \\
   = \;& d[(-1)^p \omega|_V \wedge t \\
   & -(-1)^p \left(d(f\theta \wedge t|_{U\cap V}) + f((\omega - d\theta) \wedge t - (-1)^p \theta \wedge (z - dt))|_{U\cap V}\right)] \\
   = \;& d((-1)^p \omega|_V \wedge t) \\
   = \;& ((-1)^p d\omega \wedge t + \omega \wedge dt)\,|_V \\
   = \;& (\omega \wedge z)|_V
   \end{aligned}
   $$

   Entonces $(\omega,\theta) \bullet (z,t) \in \operatorname{Ker} d$.

2. Si además $(\omega'', \theta''), (z'', t'') \in \operatorname{Ker} d$ y $(\omega'', \theta'') - (\omega, \theta), (z'', t'') - (z, t) \in \operatorname{Im} d$, entonces:

$$\begin{aligned}
\omega'' &= \omega + d\omega' \\
\theta'' &= \theta + \omega'|_U - d\theta' \\
z'' &= z + dz' \\
t'' &= t + z'|_V - dt'
\end{aligned}$$

La diferencia de los productos $(\omega'', \theta'') \bullet (z'', t'') - (\omega, \theta) \bullet (z, t)$ es:

$$\begin{aligned}
& (\omega + d\omega', \theta'') \bullet (z + dz', t'') - (\omega, \theta) \bullet (z, t) \\
= \; & (\omega \wedge z + \omega \wedge dz' + d\omega' \wedge z + d\omega' \wedge dz', \eta'') - (\omega \wedge z, \eta) \\
= \; & (d(\omega' \wedge z + (-1)^p \omega \wedge z' + \omega' \wedge dz'), \eta'' - \eta).
\end{aligned}$$

Veré que

$$\eta'' - \eta = (\omega' \wedge z + (-1)^p \omega \wedge z' + \omega' \wedge dz')|_{U \cup V} - d\xi$$

con $\xi \in \Omega^{p+q-2}(U \cup V)$. En efecto

$$\begin{aligned}
& (\eta'' - \eta)|_U \\
= \; & \theta'' \wedge z''|_U + (-1)^p [d(g\theta'' \wedge t''|_{U\cap V}) + g((\omega'' - d\theta'') \wedge t'' \\
& -(-1)^p \theta'' \wedge (z'' - dt''))|_{U \cap V}] \\
& -[\theta \wedge z|_U + (-1)^p \left(d(g\theta \wedge t|_{U\cap V}) + g\left((\omega - d\theta) \wedge t - (-1)^p \theta \wedge (z - dt)\right)|_{U\cap V}\right)] \\
= \; & [(\theta + \omega' - d\theta') \wedge (z + dz') + (-1)^p d\left[g\left((\theta + \omega' - d\theta') \wedge (t + z' - dt') - \theta \wedge t\right)\right] \\
& -\theta \wedge z]|_U \\
= \; & [\theta \wedge dz' + \omega' \wedge z + \omega' \wedge dz' - d\theta' \wedge z - d\theta' \wedge dz' \\
& +(-1)^p d(g(\theta \wedge z' - \theta \wedge dt' + \omega' \wedge t + \omega' \wedge z' - \omega' \wedge dt' - d\theta' \wedge t \\
& -d\theta' \wedge z' - d\theta' \wedge dt'))]|_U \\
= \; & [\omega' \wedge z + \omega' \wedge dz' + (-1)^p d\theta \wedge z' \\
& +d\left(-(-1)^p \theta \wedge z' - \theta' \wedge z - \theta' \wedge dz' + (-1)^p g(\theta'' \wedge t'' - \theta \wedge t)\right)]|_U
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& (\eta'' - \eta)|_V \\
= \; & (-1)^p \omega''|_V \wedge t'' - (-1)^p d(f\theta'' \wedge t''|_{U\cap V}) + f((\omega'' - d\theta'') \wedge t''
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-(-1)^p\theta''\wedge(z''-dt''))|_{U\cap V}-[(-1)^p\omega|_V\wedge t-(-1)^p[d(f\theta\wedge t|_{U\cap V})\\
&+f\left((\omega-d\theta)\wedge t-(-1)^p\theta\wedge(z-dt)\right)|_{U\cap V}]]\\
=\ &(-1)^p[(\omega+d\omega')\wedge(t+z'-dt')-\omega\wedge t-d\left(f(\theta''\wedge t''-\theta\wedge t)\right)]|_V\\
=\ &(-1)^p[\omega\wedge z'-\omega\wedge dt'+d\omega'\wedge t+d\omega'\wedge z'-d\omega'\wedge dt'-d\left(f(\theta''\wedge t''\right.\\
=\ &[(-1)^p\omega\wedge z'+(-1)^p d(\omega'\wedge t+\omega'\wedge z')+\omega'\wedge dz'-(-1)^p\omega\wedge dt'\\
&-(-1)^p d\omega'\wedge dt'-(-1)^p d\left(f(\theta''\wedge t''-\theta\wedge t)\right)]|_V\\
=\ &[\omega'\wedge z+(-1)^p\omega\wedge z'+\omega'\wedge dz'\\
&-d[(-1)^p\left(-\omega'\wedge t-\omega'\wedge z'+(-1)^p\omega\wedge t'+\omega'\wedge dt'+f(\theta''\wedge t''-\theta\wedge\right.
\end{aligned}
$$

luego ξ deberá cumplir:

$$\xi|_U=(-1)^p\theta\wedge z'+\theta'\wedge z+\theta'\wedge dz'-(-1)^p g(\theta''\wedge t''-\theta\wedge t)+d\alpha$$

y

$$\xi|_V=-(-1)^p\omega'\wedge t-(-1)^p\omega'\wedge z'+\omega\wedge t'+(-1)^p\omega'\wedge dt'+(-1)^p f(\theta''\wedge t''-\theta\wedge t)+$$

con α y β tales que

$$
\begin{aligned}
&d(\alpha-\beta)|_{U\cap V}\\
=\ &-(-1)^p\omega'\wedge t''+\omega\wedge t'-(-1)^p\theta\wedge z'-\theta'\wedge z''+(-1)^p(\theta''\wedge t''-\theta\wedge t\\
=\ &-(-1)^p\omega'\wedge t''+\omega\wedge t'-(-1)^p\theta\wedge z'-\theta'\wedge z''+(-1)^p((\theta+\omega'-d\theta')\\
&-\theta\wedge t)\\
=\ &-(-1)^p\omega'\wedge t''+\omega\wedge t'-(-1)^p\theta\wedge z'-\theta'\wedge z''+(-1)^p(\theta\wedge t''+\omega'\wedge t\\
&-d\theta'\wedge t''-\theta\wedge t)\\
=\ &\omega\wedge t'-(-1)^p\theta\wedge z'-\theta'\wedge dt''+(-1)^p\theta\wedge t+(-1)^p\theta\wedge z'-(-1)^p\theta\wedge d\\
&-(-1)^p d\theta'\wedge t''-(-1)^p\theta\wedge t\\
=\ &d\theta\wedge t'+(-1)^{p-1}\theta\wedge dt'-(-1)^p\left(d\theta'\wedge t''+(-1)^p\theta'\wedge dt''\right)\\
=\ &d(\theta\wedge t'-(-1)^p\theta'\wedge t'')
\end{aligned}
$$

Sea $\nu=\theta\wedge t'-(-1)^p\theta'\wedge t''\in\Omega^{p+q-3}(U\cap V)$ y $\{f',g'\}$ partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{U,V\}$. Definimos

$$
\begin{aligned}
\alpha &= g'\nu\in\Omega^{p+q-3}(U)\\
\beta &= -f'\nu\in\Omega^{p+q-3}(V)
\end{aligned}
$$

luego $\xi\in\Omega^{p+q-2}(U\cup V)$.

3. Veremos que el producto en cohomología no depende de la elección de la partición de la unidad.

   Sean $\{f, g\}$ y $\{f', g'\}$ dos particiones de la unidad sobre $U \cup V$ subordinadas a $\{U, V\}$. Como $[\omega \wedge z, \eta] = [\omega \wedge z, \eta']$ sii $\eta - \eta' = d\xi$ con $\xi \in \Omega^{p+q-2}(U \cup V)$, y sabemos que $f + g = 1$, $f' + g' = 1$, es decir $g - g' = f' - f$, tenemos

$$\begin{aligned} & (\eta - \eta')|_U \\ = \;& \theta \wedge z + (-1)^p d(g\theta \wedge t|_{U\cap V}) - \theta \wedge z - (-1)^p d(g'\theta \wedge t|_{U\cap V}) \\ = \;& (-1)^p d\left((g - g')\theta \wedge t|_{U\cap V}\right) = d\left((-1)^p (f' - f)\theta \wedge t|_{U\cap V}\right) \end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned} & (\eta - \eta')|_V \\ = \;& (-1)^p \omega \wedge t - (-1)^p d(f\theta \wedge t|_{U\cap V}) - (-1)^p \omega \wedge t + (-1)^p d(f'\theta \wedge t|_{U\cap V}) \\ = \;& (-1)^p d\left((-f + f')\theta \wedge t|_{U\cap V}\right) \end{aligned}$$

   luego $(\eta - \eta') = d\xi$ con $\xi = (-1)^p d\left((f' - f)\theta \wedge t|_{U\cap V}\right) \in \Omega^{p+q-2}(U \cup V)$.

$\square$

1.3 Cohomología básica

Una r-forma ω en M es básica para la variedad foliada $(M, \mathcal{F})$ si

$$i_X \omega = i_X d\omega = 0, \;\; \forall X \in X(\mathcal{F}),$$

donde $X(\mathcal{F})$ es el conjunto de los campos vectoriales sobre M tangentes a la foliación.

Designamos por $\Omega_b^r(M)$ el espacio de las r-formas básicas. La diferencial de una forma básica y el producto de formas básicas son también formas básicas, luego

$$\Omega_b(M) = \bigoplus_{0 \le r \le n} \Omega_b^r(M)$$

es el álgebra de las formas básicas, subcomplejo diferencial de $\Omega^*(M)$ cuya cohomología $H_b(M)$ es el álgebra de cohomología básica de $(M, \mathcal{F})$. Por ejemplo, si $\mathcal{F}$ es una foliación simple definida por la submersión $f\colon M \to B$ entonces $f^*\colon H_{DR}(B) = H_b(M)$ es un isomorfismo.

Proposición 1.5 *[28] $\omega \in \Omega^r(M)$ es básica para $(M, \mathcal{F})$ sii $\forall (U, \varphi)$ carta foliada con coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)$ tenemos*

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} f_{i_1 \ldots i_r}(y^1, \ldots, y^n) dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r}$$

Proposición 1.6 *Una aplicación foliada $f \colon (M, \mathcal{F}) \to (M', \mathcal{F}')$ induce un morfismo en cohomología básica.*

Dem: Sea $\omega \in \Omega^r_b(M')$, $X_1, \ldots X_{r-1} \in \mathfrak{X}(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$. Entonces

$$i_X f^* \omega(X_1, \ldots X_{r-1}) = f^* \omega(X, X_1, \ldots X_{r-1}) = \omega(f_* X, f_* X_1, \ldots f_* X_{r-1})$$

y como $f_* X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F}')$ por ser f foliada, entonces $i_X f^* \omega = 0$.

Además $i_X d f^* \omega = i_X f^* d\omega = 0$. Entonces tenemos un morfismo en cohomología básica $f^* \colon H_b(M') \to H_b(M)$.

$\square$

Lema 1.7 *Sean $i_0, i_1 \colon M \to M \times R$ tales que $i_t(x) = (x, t)$. Considerando $(M \times R, \mathcal{F}'')$ la variedad foliada por $L \times \{t\}$, con L hoja de $\mathcal{F}$, existe*

$$k \colon \Omega^r_b(M \times R) \to \Omega^{r-1}_b(M)$$

tal que $kd - dk = i_1^* - i_0^*$.

Dem: codim$\mathcal{F} = n$, codim$\mathcal{F}'' = n + 1$ y $(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n, t)$ son las coordenadas en $M \times R$. Si $\alpha \in \Omega^r_b(M \times R)$ entonces

$$\alpha = f dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r}$$

ó

$$\alpha = f dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_{r-1}} \wedge dt$$

con $f = f(y^1, \cdots, y^n, t)$.

Definimos

$$k(f dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r}) = 0$$

y

$$k(f dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_{r-1}} \wedge dt) = \left(\int_0^1 f dt \right) dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_{r-1}}.$$

Se tiene

$$
\begin{aligned}
& (kd - dk)(f dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r}) \\
= \;& k d\alpha - d \overbrace{k\alpha}^{=0} \\
= \;& k\left((\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^j} dy^j + \frac{\partial f}{\partial t} dt) \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r} \right) \\
= \;& k\left(\frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r} \right) \\
= \;& \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) dy^{i_1} \wedge \cdots dy^{i_r} \\
= \;& (f(y,1) - f(y,0))\, dy^{i_1} \wedge \cdots dy^{i_r} \\
= \;& (i_1^* - i_0^*)(f dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_r})
\end{aligned}
$$

en un caso, y

$$
\begin{aligned}
& (kd - dk)(f dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_{r-1}} \wedge dt) \\
= \;& k\left((\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^j} dy^j + \frac{\partial f}{\partial t} dt) \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_{r-1}} \wedge dt \right) \\
& - d\left((\int_0^1 f dt) dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_{r-1}} \right) \\
= \;& k\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^j} dy^j \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_{r-1}} \wedge dt \right) \\
& - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (\int_0^1 f dt)}{\partial y^j} \right) dy^j \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_{r-1}} \\
= \;& \left(\int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^j} dt \right) dy^j \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_{r-1}} \\
& - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (\int_0^1 f dt)}{\partial y^j} \right) dy^j \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_{r-1}} \\
= \;& 0 \\
= \;& (i_1^* - i_0^*)(f dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_{r-1}} \wedge dt).
\end{aligned}
$$

□

Proposición 1.8 *Si* $f \simeq_{\mathcal{F}} g$ *entonces inducen el mismo morfismo en cohomología básica.*

Dem: Sea $\omega \in \Omega_b(M\prime)$ tal que $d\omega = 0$ y $H\colon (M \times R, \mathcal{F}'') \to (M', \mathcal{F}')$ la homotopía foliada tal que $Hi_0 = f$ y $Hi_1 = g$. Entonces

$$\begin{aligned} f^*\omega - g^*\omega &= (i_0^*H^* - i_1^*H^*)\omega \\ &= (i_0^* - i_1^*)H^*\omega \\ &= (kd - dk)H^*\omega \\ &= kdH^*\omega - dkH^*\omega \\ &= kH^*d\omega - dkH^*\omega \\ &= 0 - dkH^*\omega. \end{aligned}$$

Luego $f^*[\omega] - g^*[\omega] = [-dkH^*\omega] = 0$

□

1.4 Cohomología básica relativa

Sea $f\colon (N, \mathcal{F}') \to (M, \mathcal{F})$ aplicación foliada. Definimos

$$\Omega_b^r(f) = \Omega_b^r(M) \oplus \Omega_b^{r-1}(N)$$

con diferencial $d(\omega, \theta) = (d\omega, f^*\omega - d\theta)$.

Como antes, tenemos la sucesión exacta larga en cohomología básica:

$$\cdots \longrightarrow H_b^{r-1}(N) \xrightarrow{\alpha^*} H_b^r(f) \xrightarrow{\beta^*} H_b^r(M) \xrightarrow{f^*} H_b^r(N) \longrightarrow \cdots$$

Dado U abierto en M, la inclusión $i\colon (U, \mathcal{F}_U) \hookrightarrow (M, \mathcal{F})$ es una aplicación foliada, donde $\mathcal{F}_U$ es la foliación inducida por $\mathcal{F}$ en U. Definimos la cohomología básica relativa en grado r, $H_b^r(M, U) = H^r(i)$ y llamamos sucesión exacta larga del par (M, U) en cohomología básica a

$$\cdots \longrightarrow H_b^{r-1}(U) \longrightarrow H_b^r(M, U) \longrightarrow H_b^r(M) \xrightarrow{i^*} H_b^r(U) \longrightarrow \cdots$$

1.5 Cohomología foliada

Sea $\Omega^*(M,\mathcal{F})$ el subcomplejo diferencial de $\Omega^*(M)$ definido por:
$\omega \in \Omega^r(M,\mathcal{F})$ si $\omega \in \Omega^r(M)$ y $\omega(X_1,\dots,X_r) = 0 \quad \forall X_i \in X(\mathcal{F})$ con $i = 1,\dots,r$.

Pasando al cociente, definimos el complejo de formas foliadas para la variedad $(M,\mathcal{F})$:

$$\Omega^*_{\mathcal{F}}(M) = \frac{\Omega^*(M)}{\Omega^*(M,\mathcal{F})}$$

donde la diferencial $d_{\mathcal{F}}$ es la inducida por la diferencial exterior en el cociente.

La cohomología $H^*_{\mathcal{F}}(M)$ de este complejo es la cohomología foliada de $(M,\mathcal{F})$.

Como $\Omega^*(M,\mathcal{F})$ es ideal de $\Omega^*(M)$, tenemos un producto

$$\wedge\colon \Omega^p_{\mathcal{F}}(M) \times \Omega^q_{\mathcal{F}}(M) \to \Omega^{p+q}_{\mathcal{F}}(M)$$

definido en $\Omega^*_{\mathcal{F}}(M)$ como $\overline{\varpi} \wedge \overline{z} = \overline{\omega \wedge z}$.

Proposición 1.9 *Si* $f\colon (M,\mathcal{F}) \to (M',\mathcal{F}')$ *es una aplicación foliada entonces* f *induce un homomorfismo en cohomología foliada.*

Teorema 1.10 *[6] Si* $f, g\colon (M,\mathcal{F}) \to (M',\mathcal{F}')$ *son dos aplicaciones tales que* $f \simeq_{\mathcal{F}\times R} g$ *entonces* f *y* g *inducen el mismo homomorfismo en cohomología foliada.*

1.6 Cohomología foliada relativa

Sea $f\colon (N,\mathcal{F}') \to (M,\mathcal{F})$ aplicación foliada. Definimos

$$\Omega^r_{\mathcal{F}}(f) = \Omega^r_{\mathcal{F}}(M) \oplus \Omega^{r-1}_{\mathcal{F}'}(N)$$

con diferencial

$$d_{\mathcal{F}}(\overline{\varpi},\overline{\theta}) = (d_{\mathcal{F}}\overline{\varpi}, f^*\overline{\varpi} - d_{\mathcal{F}}\overline{\theta}).$$

Como antes, tenemos la sucesión exacta larga en cohomología foliada:

$$\cdots \longrightarrow H^{r-1}_{\mathcal{F}'}(N) \xrightarrow{\alpha^*} H^r_{\mathcal{F}}(f) \xrightarrow{\beta^*} H^r_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{f^*} H^r_{\mathcal{F}'}(N) \longrightarrow \cdots$$

Dado U abierto en M, $i\colon (U, \mathcal{F}_U) \hookrightarrow (M, \mathcal{F})$, definimos la cohomología foliada relativa en grado r, $H^r_{\mathcal{F}}(M, U) = H^r_{\mathcal{F}}(i)$ y llamamos sucesión exacta larga del par en cohomología foliada a

$$\cdots \longrightarrow H^{r-1}_{\mathcal{F}_U}(U) \longrightarrow H^r_{\mathcal{F}}(M, U) \longrightarrow H^r_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{i^*} H^r_{\mathcal{F}_U}(U) \longrightarrow \cdots$$

Proposición 1.11 *El producto de formas relativas definido antes induce un producto de formas foliadas relativas*

$$\bullet\colon \Omega^p_{\mathcal{F}}(M, U) \times \Omega^q_{\mathcal{F}}(M, V) \to \Omega^{p+q}_{\mathcal{F}}(M, U \cup V)$$

donde

$$(\overline{\omega}, \overline{\theta}) \bullet (\overline{z}, \overline{t}) = (\overline{\omega \wedge z}, \overline{\eta})$$

con $\eta \in \Omega^{p+q-1}(U \cup V)$ *definida como antes.*

Dem: Veamos que está bien definido en el cociente.

Sean ω', θ', z' y t' tales que

$$\overline{\omega} = \overline{\omega'}, \quad \overline{\theta} = \overline{\theta'}, \quad \overline{z} = \overline{z'} \quad \text{ y } \quad \overline{t} = \overline{t'}.$$

Entonces los productos $(\overline{\omega}, \overline{\theta}) \bullet (\overline{z}, \overline{t})$ y $(\overline{\omega'}, \overline{\theta'}) \bullet (\overline{z'}, \overline{t'})$ coinciden sii

$$\overline{\omega \wedge z} = \overline{\omega' \wedge z'} \text{ y } \overline{\eta} = \overline{\eta}'.$$

Por un lado $\overline{\omega' \wedge z'} = \overline{\omega'} \wedge \overline{z'} = \overline{\omega} \wedge \overline{z} = \overline{\omega \wedge z}$.

Por otro $\overline{\eta'}|_U$ es la clase de

$$\theta' \wedge z'|_U + (-1)^p \left(d(g\theta' \wedge t'|_{U\cap V}) + g\left((\omega' - d\theta') \wedge t' - (-1)^p \theta' \wedge (z' - dt')\right)|_{U\cap V}\right)$$

y $\overline{\eta'}|_V$ es la clase de

$$(-1)^p \omega'|_V \wedge t' - (-1)^p \left(d(f\theta' \wedge t'|_{U\cap V}) + f\left((\omega' - d\theta') \wedge t' - (-1)^p \theta' \wedge (z' - dt')\right)|_{U\cap}$$

por lo que $\overline{\eta'} = \overline{\eta}$.

□

Proposición 1.12 *La diferencial*

$$d_{\mathcal{F}}\colon \Omega_{\mathcal{F}}(M, W) \to \Omega_{\mathcal{F}}(M, W)$$

es una antiderivación.

Dem: Veremos que

$$d_{\mathcal{F}}((\omega,\theta)\bullet(z,t)) = d_{\mathcal{F}}(\omega,\theta)\bullet(z,t) + (-1)^p(\omega,\theta)\bullet d_{\mathcal{F}}(z,t)$$

$\forall(\omega,\theta)\in\Omega^p_{\mathcal{F}}(M,U)$, $\quad\forall(z,t)\in\Omega_{\mathcal{F}}(M,V)$.

Por un lado tenemos que

$$d_{\mathcal{F}}((\omega,\theta)\bullet(z,t)) = (d_{\mathcal{F}}(\omega\wedge z),(\omega\wedge z)|_{U\cup V} - d_{\mathcal{F}}\eta).$$

Llamamos $Y = (\omega\wedge z)|_{U\cup V} - d_{\mathcal{F}}\eta$ a la segunda coordenada.

Sabemos que

$$\eta|_U = \theta\wedge z|_U + (-1)^p(d(g\theta\wedge t|_{U\cap V}) + g((\omega - d_{\mathcal{F}}\theta)\wedge t - (-1)^p\theta\wedge(z-dt))|_{U\cap V})$$

y

$$\eta|_V = (-1)^p\omega|_V\wedge t - (-1)^p(d(f\theta\wedge t|_{U\cap V}) + f((\omega - d_{\mathcal{F}}\theta)\wedge t - (-1)^p\theta\wedge(z-dt))|_{U\cap V}).$$

Como $d_{\mathcal{F}}\colon\Omega_{\mathcal{F}}(U\cup V)\to\Omega_{\mathcal{F}}(U\cup V)$ es una antiderivación es un operador local con lo que

$$(d_{\mathcal{F}}\eta)|_U = [d_{\mathcal{F}}(\theta\wedge z + (-1)^p(d(g\theta\wedge t|_{U\cap V}) + g((\omega - d_{\mathcal{F}}\theta)\wedge t - (-1)^p\theta\wedge(z-dt))|_{U\cap V})]|_U$$

y

$$(d_{\mathcal{F}}\eta)|_V = [d_{\mathcal{F}}((-1)^p\omega\wedge t - (-1)^p(d(f\theta\wedge t|_{U\cap V}) + f((\omega - d_{\mathcal{F}}\theta)\wedge t - (-1)^p\theta\wedge(z-dt))|_{U\cap V}))]|_V.$$

Luego

$$Y|_U = (\omega\wedge z)|_U - d_{\mathcal{F}}(\theta\wedge z + (-1)^p g((\omega - d_{\mathcal{F}}\theta)\wedge t - (-1)^p\theta\wedge(z-dt))|_{U\cap V})|_U$$

y

$$Y|_V = (\omega\wedge z)|_V - d_{\mathcal{F}}((-1)^p\omega\wedge t + (-1)^p(f((\omega - d_{\mathcal{F}}\theta)\wedge t - (-1)^p\theta\wedge(z-dt))|_{U\cap V})|_V.$$

Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} & d_{\mathcal{F}}(\omega,\theta)\bullet(z,t) + (-1)^p(\omega,\theta)\bullet d_{\mathcal{F}}(z,t) \\ = {} & (d_{\mathcal{F}}\omega,\omega|_U - d_{\mathcal{F}}\theta)\bullet(z,t) + (-1)^p(\omega,\theta)\bullet(d_{\mathcal{F}}z, z|_V - d_{\mathcal{F}}t) \\ = {} & (d_{\mathcal{F}}\omega\wedge z + (-1)^p\omega\wedge d_{\mathcal{F}}z, Y') \\ = {} & (d_{\mathcal{F}}(\omega\wedge z), Y'). \end{aligned}$$

Veremos que $Y' = Y$.

$$\begin{aligned}
& Y'|_U \\
= \; & (\omega - d_{\mathcal{F}}\theta) \wedge z + (-1)^p [d_{\mathcal{F}}(g(\omega - d_{\mathcal{F}}\theta) \wedge t|_{U\cap V}) - (-1)^p g((\omega - d_{\mathcal{F}}\theta) \wedge (z - d \\
& +(-1)^p \theta \wedge d_{\mathcal{F}} z + d_{\mathcal{F}}(g\theta \wedge (z - dt)|_{U\cap V}) + g((\omega - d_{\mathcal{F}}\theta) \wedge (z - dt))|_{U\cap V} \\
= \; & (\omega \wedge z)|_U - d_{\mathcal{F}}(\theta \wedge z) + (-1)^p d_{\mathcal{F}}(g((\omega - d_{\mathcal{F}}\theta) \wedge t - (-1)^p \theta \wedge (z - dt))|_{U\cap V}) \\
= \; & Y|_U.
\end{aligned}$$

Análogamente $Y'|_V = Y|_V$.

□

Corolario 1.13 *El producto*

$$\bullet\colon H^p_{\mathcal{F}}(M, U) \times H^q_{\mathcal{F}}(M, V) \to H^{p+q}_{\mathcal{F}}(M, U \cup V)$$

está bien definido en cohomología foliada.

Dem: Si (ω'', θ''), $(\omega, \theta) \in \mathrm{Ker} d_{\mathcal{F}} \subset \Omega^p_{\mathcal{F}}(M, U)$ son cohomólogos y (z'', t''), $(z, t) \in \mathrm{Ker} d_{\mathcal{F}} \subset \Omega^q_{\mathcal{F}}(M, V)$ son cohomólogos, tenemos que

$$(\omega'', \theta'') = (\omega, \theta) + d_{\mathcal{F}}(\omega', \theta')$$

$$(z'', t'') = (z, t) + d_{\mathcal{F}}(z', t')$$

$$d_{\mathcal{F}}(\omega, \theta) = d_{\mathcal{F}}(\omega'', \theta'') = d_{\mathcal{F}}(z, t) = d_{\mathcal{F}}(z'', t'') = 0.$$

Veremos que $(\omega'', \theta'') \bullet (z'', t'')$ y $(\omega, \theta) \bullet (z, t)$ son cohomólogos.

$$\begin{aligned}
& (\omega'', \theta'') \bullet (z'', t'') \\
= \; & ((\omega, \theta) + d_{\mathcal{F}}(\omega', \theta')) \bullet ((z, t) + d_{\mathcal{F}}(z', t')) \\
= \; & (\omega, \theta) \bullet (z, t) + (\omega, \theta) \bullet d_{\mathcal{F}}(z', t') + d_{\mathcal{F}}(\omega', \theta') \bullet (z, t) + d_{\mathcal{F}}(\omega', \theta') \bullet d_{\mathcal{F}}(z', t') \\
= \; & (\omega, \theta) \bullet (z, t) + d_{\mathcal{F}}((-1)^p (\omega', \theta') \bullet (z', t') + (\omega', \theta') \bullet (z, t) + (-1)^p d_{\mathcal{F}}(\omega', \theta') \bullet
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.14 $H^*_{\mathcal{F}}(M, M) = 0$

Dem: Si $[\overline{\omega}, \overline{\theta}] \in H^*_{\mathcal{F}}(M, M)$ entonces $d\omega, \omega - d\theta \in \Omega^*(M, \mathcal{F})$ y $d_{\mathcal{F}}(\overline{\theta}, 0) = [\overline{\omega}, \overline{\theta}]$.

□

Chapter 2

Categoría LS

2.1 Categoría de Lusternik-Schnirelmann

Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $U \subset X$ es categórico si U es contráctil en X.

Definición 2.1 *Llamamos categoría LS del espacio* X*,* $\mathrm{cat}X$*, al menor entero* k *tal que* X *se puede recubrir por* k *subconjuntos abiertos categóricos. Si no existe tal entero,* $\mathrm{cat}X = \infty$*.*

Por ejemplo, $\mathrm{cat}X = 1$ si y sólo si X es contráctil.

Proposición 2.2 *[19]* $\mathrm{cat}X$ *es un invariante homotópico.*

Dem: Sea $f\colon X \to Y$ una equivalencia de homotopía con inversa homotópica g y U abierto categórico para X. Consideramos $V = g^{-1}(U) \subset Y$. V es abierto por serlo U y $fi_U g|_V \simeq 0$ pues $i_U \simeq 0$. Además $fi_U g|_V = fgi_V \simeq id i_V = i_V$ con lo que $i_V \simeq 0$ y V es contráctil en Y. Luego $\mathrm{cat}X \geq \mathrm{cat}Y$. Invirtiendo el razonamiento obtenemos la igualdad.

$\square$

Decimos que un anillo A es nilpotente si existe un natural r tal que $A^r = 0$ y su nilpotencia será el número:

$$\mathrm{nil}A = \mathrm{ínf}\{r | a_1 \cdots a_r = 0 \quad \forall a_i \in A\}.$$

Proposición 2.3 *[19]* cat$X \geq$ nil$\tilde{H}^*(X)$

Dem: Si U es un abierto categórico para X entonces $i^*\colon \tilde{H}^*(X) \to \tilde{H}^*(U)$ es la aplicación nula y considerando la sucesión exacta del par (X, U) tenemos

$$H^*(X, U) \xrightarrow{p^*} H^*(X) \xrightarrow{i^*} H^*(U)$$

con lo que p^* es sobre.

Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ recubrimiento por abiertos categóricos de X y $x_1, \ldots, x_n \in H^*(X)$. Como $p_i^*\colon H^*(X, U_i) \to \tilde{H}^*(X)$ es sobre $\quad \forall i = 1, \ldots, n$, entonces $\exists w_i \in H^*(X, U_i)$ tal que $p_i^*(w_i) = x_i$. Luego

$$w_1 \cup \ldots \cup w_n \in H^*(X, \bigcup_{i=1}^{n} U_i) = H^*(X, X) = 0$$

y $p_1^*(w_1) \cup \ldots \cup p_n^*(w_n) = 0$ con lo que nil$\tilde{H}^*(X) \leq n$.

$\square$

Se dice que la aplicación $p\colon X \to B$ tiene la Propiedad de levantamiento de homotopías (PLH) para el espacio Z si para toda aplicación $f\colon Z \to X$ y para toda homotopía $H\colon Z \times I \to B$ tales que $H_0 = pf$ existe una aplicación $\tilde{H}\colon Z \times I \to X$ tal que $\tilde{H}_0 = f$ y $p\tilde{H}_t = H_t$.

Diremos que p es una fibración si tiene la PLH para todo espacio topológico Z.

Un fibrado localmente trivial tiene la PLH para todo espacio Z paracompacto [18].

Teorema 2.4 *[39] Sea* $p\colon X \to B$ *una fibración con* B *conexo por caminos y con fibra homotópica* F. *Entonces* cat$X \leq$ cat$F$cat$B$.

2.2 Categoría diferenciable

Sea M una variedad diferenciable. Una subvariedad U es diferenciablemente categórica si existe una contracción diferenciable $F\colon U \times R \to M$.

Veremos que la categoría topológica y diferenciable coinciden en una variedad.

Por el teorema de Whitney sabemos que toda variedad diferenciable de dimensión k es una subvariedad embebida de R^{2k+1}. Por otra parte toda subvariedad $M \subset R^N$ admite un entorno tubular en R^N, es decir, existe un abierto $W \subset R^N$ y una retracción diferenciable $r\colon W \to M$ con (r, W, M) fibrado vectorial.

Lema 2.5 *Sean $A \subset U$, U abierto y A cerrado en U. Sea M' subvariedad embebida en R^N. Entonces dada $h\colon M \to M'$ aplicación continua tal que $h|_U$ es diferenciable, para todo $\epsilon > 0$ existe $g\colon M \to M'$ diferenciable tal que:*

1. $g|_A = h|_A$;
2. $\|h(x) - g(x)\| < \epsilon \quad \forall x \in M$,

donde $\| \quad \|$ es la norma en R^N.

Dem: Si $M' \subset R^N$, sea W el entorno tubular y $r\colon W \to M'$ la retracción diferenciable.

Como h es continua, tenemos que $\forall \epsilon' > 0$ y $\forall p \in M - A$, existe U_p entorno de p con $U_p \subset M - A$ tal que:

$$\|h(x) - h(p)\| < \epsilon' \quad \forall x \in U_p.$$

Sea $\{\varphi, \varphi_p\}_{p \in M-A}$ partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento abierto $\{U, U_p\}_{p \in M-A}$ de M. Considero $g_0\colon M \to R^N$ tal que

$$g_0(x) = \varphi(x)h(x) + \sum_{p \in M-A} \varphi_p(x)h(p).$$

Está bien definida, $\|h(x) - g_0(x)\| < \epsilon' \quad \forall x \in M$ y $g_0|_A = h|_A$.

Como $\|h(x) - g_0(x)\| < \epsilon'$ para todo $x \in M$, puedo suponer $g_0(M) \subset W$ y definir entonces $g\colon M \to M'$ como $g = r \circ g_0$ que resulta diferenciable; $g|_A = h|_A$ y como r es continua, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\|r(v)\| < \epsilon$ si $\|v\| < \delta$. Elijo $\epsilon' = \delta$ con lo que

$$\|h(x) - g(x)\| < \epsilon \quad \forall x \in M.$$

□

Proposición 2.6 *Si M y M' son variedades diferenciables, entonces:*

1. *Toda aplicación continua* $h\colon M \to M'$ *es homótopa a una aplicación diferenciable.*

2. *Si dos aplicaciones diferenciables* $f, g\colon M \to M'$ *son homótopas, entonces existe una homotopía diferenciable* $F\colon M \times R \to M'$ *tal que* $f \simeq_F g$.

Dem:

1. Construyo g_0 como en la demostración anterior eligiendo ϵ' tal que el segmento en R^N entre $g_0(x)$ y $h(x)$ esté contenido en W para todo $x \in M$. Luego la aplicación diferenciable $g\colon M \to M'$ dada por $g = r \circ g_0$ es homótopa a h.

2. Si $H\colon M \times I \to M'$ es la homotopía entre f y g, considero $H'\colon M \times R \to M'$ dada por

   $$H'(x, t) = H(x, \gamma(t))$$

   donde $\gamma\colon R \to I$ es una aplicación continua tal que $\gamma(t) = 1$ si $t > 1 - \delta$ y $\gamma(t) = 0$ si $t < \delta$ para algún $\delta < \frac{1}{2}$.

   Luego H' es una aplicación continua tal que si $(x, t) \in M \times (-\infty, \delta)$:

   $$H'(x, t) = H(x, 0) = f(x)$$

   y si $(x, t) \in M \times (1 - \delta, \infty)$:

   $$H'(x, t) = H(x, 1) = g(x).$$

   Por lo que H' es diferenciable en $U = M \times ((-\infty, \delta) \cup (1 - \delta, \infty))$.

   Sea $A = M \times ((-\infty, 0] \cup [1, \infty))$ que es cerrado en U. Por el lema anterior existe $F\colon M \times R \to M'$ diferenciable tal que $F|_A = H'|_A$, es decir $F_0 = f$ y $F_1 = g$.

$\square$

Corolario 2.7 *Un abierto en* $U \subset M$ *es categórico sii es diferenciablemente categórico.*

2.3 Categoría seccionaria

Sea $p: X \to B$ una aplicación continua. Un subconjunto $U \subset B$ es categórico seccionario si $\exists s: U \to X$ tal que $ps = i_U$.

Definición 2.8 *[35] Llamamos categoría seccionaria del espacio* X*,* secat$X$*, al menor entero* k *tal que* B *se puede recubrir por* k *subconjuntos abiertos categóricos seccionarios. Si no existe tal entero,* secat$X = \infty$*.*

Proposición 2.9 *Si* $p: X \to B$ *es una fibración entonces* secat$X \leq$ cat$B$*. Si además* X *es contráctil entonces* secat$X =$ cat$B$*.*

Dem: Sean $V \subset B$ un abierto categórico y $H: V \times I \to B$ la homotopía tal que $H_0 =$ cte y $H_1 = i_V$. Sea $f: V \to M$ una aplicación constante tal que $f(b) = x_0$ con $p(x_0) = H_0(b)$. Luego $H_0 = pf$. Por la PLH para V, existe $\tilde{H}: V \times I \to X$ tal que $p\tilde{H} = H$ y $\tilde{H}_0 = f$. Tenemos que $\tilde{H}_1: V \to M$ es una sección local de p: $p\tilde{H}_1 = H_1 = i_V$ con lo que V es categórico seccionario.

Si X es contráctil, consideramos la homotopía $G: X \times I \to X$ tal que $G_0 = id_X$ y $G_1 =$ cte. Si V es categórico seccionario, sea $s: V \to X$ la sección local. Consideramos $F: V \times I \to B$ dada por

$$F(b,t) = pG(s(b),t).$$

Tenemos que $F_0(b) = pG_0s(b) = ps(b) = b$ y $F_1(b) = pG_1s(b) =$ cte con lo que V es categórico.

$\square$

Proposición 2.10 secat$X \geq$ nil Kerp^**, donde* $p^*: H(B) \to H(M)$ *es el morfismo inducido en cohomología.*

Dem: Si $U \subset B$ es abierto categórico seccionario tenemos:

$$H^*(B) \xrightarrow{p^*} H^*(X) \xrightarrow{s^*} H^*(U)$$

tal que $s^*p^* = i^*$. Entonces Ker$p^* \subset$ Keri^*. Además considerando la sucesión exacta

$$H^*(B,U) \xrightarrow{j^*} H^*(B) \xrightarrow{i^*} H^*(U)$$

tenemos que $\mathrm{Im} j^* = \mathrm{Ker} i^*$.

Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ recubrimiento de B por abiertos categóricos seccionarios y $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Ker} p^* \subset \mathrm{Ker} i^* = \mathrm{Im} j^*$. Entonces $\exists w_i \in H^*(B, U_i)$ tal que $j^*(w_i) = x_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$. Como $w_1 \cup \ldots \cup w_n \in H^*(B, B) = 0$ entonces $x_1 \cup \ldots \cup x_n = 0$ y nil $\mathrm{Ker} p^* \leq n$.

$\square$

2.4 Categoría fibrada

La noción de categoría fibrada ha sido introducida por I. M. James y J. R. Morris [20].

Decimos que (X, p) es un espacio fibrado sobre B si $p\colon X \to B$ es una aplicación continua entre espacios topológicos. En este contexto $\varphi\colon (X, p) \to (Y, p')$ es una aplicación fibrada sobre B si $p'\varphi = p$, $H\colon X \times I \to Y$ es una homotopía fibrada sobre B si $H_t\colon (X, p) \to (Y, p')$ es una aplicación fibrada $\forall t$ (notación $\simeq_B$) y $c\colon (X, p) \to (Y, p')$ es una constante fibrada sobre B si $\exists s'\colon B \to Y$ sección de p' tal que $c = s'p$.

Un subconjunto $U \subset X$ es categórico fibrado sobre B si la inclusión $U \hookrightarrow X$ es homótopa fibrada a una constante fibrada sobre B.

Definición 2.11 *Llamamos categoría fibrada del espacio* X, $\mathrm{cat}_B X$, *al menor entero* k *tal que* X *se puede recubrir por* k *subconjuntos abiertos categóricos fibrados. Si no existe tal entero,* $\mathrm{cat}_B X = \infty$.

Si $B = X$, $p = id_B$, entonces $\mathrm{cat}_B X = 1$ y si $B = \{b\}$ entonces $\mathrm{cat}_B X = \mathrm{cat} X$.

Proposición 2.12 $\mathrm{cat}_B X$ *es un invariante de homotopía fibrada sobre* B.

Dem: Sea $f\colon (X, p) \to (Y, p')$ la equivalencia de homotopía fibrada sobre B con inversa homotópica g y U abierto categórico fibrado para Y. Consideramos $V = f^{-1}(U)$ abierto en X. En el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f|_V"] \arrow[d, "i_V"] & U \arrow[d, "i_U"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

tenemos que

$$fi_V = i_U f|_V, p's' = id_B \text{ y } i_U \simeq_B s'p'|_U = s'p'i_U.$$

Defino $s = gs'$. Es una sección y además $i_V \simeq_B c$ con $c = sp|_V$ pues

$$c = gs'p|_V = gs'pi_V = gs'p'fi_V = gs'p'i_U f|_V$$

es homótopa fibrada a

$$gi_U f|_V = gf|_V = gfi_V$$

que es homótopa fibrada a $id_X i_V = i_V$.

□

Propiedades 2.13 *Si* $(X, p), (Y, p')$ *son espacios fibrados sobre* B *y* $f, g\colon (X, p) \to (Y, p')$ *son aplicaciones fibradas sobre* B*, tenemos que para todo* $A \subset X$ *y para todo* $B' \supset B$*:*

1. $(A, p|_A)$ *es un espacio fibrado sobre* B *y* $(X, i_B p)$ *es un espacio fibrado sobre* B'.

2. $f|_A\colon (A, p|_A) \to (Y, p')$ *es una aplicación fibrada sobre* B *y* $f' = f\colon (X, i_B p) \to (Y, i_B p')$ *es una aplicación fibrada sobre* B'.

3. *Si* $f \simeq_B g$ *entonces* $f|_A \simeq_B g|_A$ *y* $f' \simeq_{B'} g'$.

Proposición 2.14 *Para toda fibra* F *de* p *tenemos*

$$\mathrm{cat}_B X \geq \mathrm{cat} F.$$

Dem: Dado V abierto categórico fibrado para X, veré que $V \cap F$ es abierto categórico para F.

Sea G la homotopía fibrada sobre B tal que $G_t\colon V \to X$ verifica $pG_t = p|_V$, $G_0 = i_V$ y $G_1 = c$. Sea $H_t = G_t|_{V \cap F}$. Tenemos que $H_t(V \cap F) \subset F$ pues

$$pG_t(V \cap F) = p(V \cap F) \subset p(F) = b_0 \Rightarrow G_t(V \cap F) \subset p^{-1}(b_0) = F.$$

Luego $H_t\colon V \cap F \to F$ verifica

$$H_0(x) = G_0(x) = x \text{ y } H_1(x) = G_1(x) = c(x) = sp(x) = s(b_0) = \text{cte},$$

con lo que $H\colon (V \cap F) \times I \to F$ es la homotopía buscada.

□

Corolario 2.15 $\mathrm{cat}_B(B \times F) = \mathrm{cat}F$.

Dem: Sea U abierto categórico para F, veré que $B \times U$ es categórico fibrado sobre B para la proyección $p_B\colon B \times F \to B$.

Como $i_U \simeq$ cte, sea H la homotopía tal que $H_t\colon U \to F$ verifica $H_0 = i_U$ y $H_1(x) = x_0$ para todo $x \in U$.

Sea $s\colon B \to B \times F$ tal que $b \mapsto (b, x_0)$ y $G_t\colon B \times U \to B \times F$ tal que $(b, x) \mapsto (b, H_t(x))$.

Entonces G es una homotopía fibrada sobre B:

$$p_B G_t(b, x) = p_B(b, H_t(x)) = b,$$

con

$$G_0(b, x) = (b, H_0(x)) = (b, x) = i_{B\times U}(b, x)$$

y

$$G_1(b, x) = (b, H_1(x)) = (b, x_0) = c(b, x).$$

Luego $\mathrm{cat}F \geq \mathrm{cat}_B(B \times F)$.

□

Si S es un subanillo del anillo A, llamaremos $\langle S\rangle$ al menor ideal de A que contiene a S. Se tiene que [20]:

Proposición 2.16

$$\mathrm{cat}_B M \geq \mathrm{nil}\frac{\tilde{H}^*(M)}{\langle p^*\tilde{H}^*(B)\rangle}.$$

2.5 Categoría fibrada diferenciable

Suponemos ahora que M y B son variedades y $p\colon M \to B$ una aplicación diferenciable. Decimos que (M, p) es una variedad fibrada sobre B.

Una homotopía diferenciable $H\colon M \times \mathbb{R} \to M'$ entre variedades fibradas sobre B es diferenciable fibrada si H_t es fibrada para todo $t \in \mathbb{R}$ (notación: $\simeq_B^\infty$).

Proposición 2.17 *Sean* $f, g\colon (M', p') \to (M, p)$ *dos aplicaciones diferenciables tales que* $f \simeq^{\infty}_{B} g$ *entonces* $f^* = g^*\colon H^*(p) \to H^*(p')$.

Dem: Consideramos la aplicación lineal

$$k\colon \Omega^r(M' \times R) \to \Omega^{r-1}(M')$$

dada por

$$k(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \text{ (I)} \\ \left(\int_0^1 f\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, & \text{si } \omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \wedge dt \text{ (II)} \end{cases}$$

Si $H\colon M' \times R \to M$ es la homotopía fibrada entre f y g, tenemos que

$$j_r\colon \Omega^r(M) \to \Omega^{r-1}(M')$$

dada por $j_r = kH^*$ es un operador de homotopía para f y g, es decir

$$j_{r+1}d + dj_r = f^* - g^*.$$

Además como H es fibrada, tenemos que $pH\colon M' \times R \to B$ no depende de t por lo que $H^*p^*\beta$ es de la forma (I) para toda forma $\beta \in \Omega(B)$. Luego $j_r p^* = kH^*p^* = 0$.

Recordamos que

$$\Omega^r(p) = \Omega^r(B) \oplus \Omega^{r-1}(M)$$
$$\Omega^r(p') = \Omega^r(B) \oplus \Omega^{r-1}(M').$$

Sean $f^{**}, g^{**}\colon \Omega^r(p) \to \Omega^r(p')$ las inducidas por f y g:

$$f^{**}(\omega, \theta) = (\omega, f^*\theta)$$

$$g^{**}(\omega, \theta) = (\omega, g^*\theta).$$

Definimos $h_r\colon \Omega^r(p) \to \Omega^r(p')$ como

$$h_r(\omega, \theta) = (0, -j_{r-1}\theta).$$

Veremos que es un operador de homotopía.

$$\begin{aligned}
(h_{r+1}d + dh_r)(\omega, \theta) &= h_{r+1}(d\omega, p^*\omega - d\theta) + d(0, -j_{r-1}\theta) \\
&= (0, -j_r(p^*\omega - d\theta)) + (0, dj_{r-1}\theta) \\
&= (0, -j_r p^*\omega + j_r d\theta + dj_{r-1}\theta) \\
&= (0, -j_r p^* + (f^* - g^*)\theta).
\end{aligned}$$

Como $j_r p^* = 0$ tenemos que

$$h_{r+1}d + dh_r = f^{**} - g^{**}.$$

Luego f y g inducen la misma aplicación en cohomología.

$\square$

Diremos que una subvariedad U de M es C^∞-categórica fibrada si existe una sección diferenciable $s\colon B \to M$ de p tal que $i_U \simeq_B^\infty sp|_U$. Análogamente definimos la C^∞-categoría fibrada de una variedad fibrada (M, p) sobre B.

Proposición 2.18 $\mathrm{cat}_B M \leq \mathrm{cat}_B^\infty M$.

Proposición 2.19 *Si* U *es* C^∞*-categórico fibrado sobre* B *entonces* $i_U^*\colon \tilde{H}^*(p) \to \tilde{H}^*(p|_U)$ *es idénticamente nula.*

Dem: Sabemos que existe una sección diferenciable $s\colon B \to M$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "i_U"] \arrow[dr, "p|_U"'] & & M \\ & B \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta salvo homotopía fibrada.

Veremos que $s(B)$ es una subvariedad embebida en M. Como $ps = id_B$, tenemos que $p_{*_{s(b)}} \circ s_{*_b} = id_{T_b B}$ para todo $b \in B$. Luego s es una inmersión inyectiva. Además s es abierta en M ya que para todo V abierto en B, $s(V) = s(B) \cap p^{-1}(V)$. Luego $s(B)$ es una subvariedad regular de M.

Veremos que $H(p|_{s(B)}) = 0$. Como B y $s(B)$ son difeomorfas, tenemos que los complejos $\Omega(B)$ y $\Omega(s(B))$ son isomorfos mediante los morfismos de complejos:

$$\Omega(B) \xrightarrow{(p|_{s(B)})^*} \Omega(s(B)) \xrightarrow{s^*} \Omega(B).$$

Sea $(\omega, \theta) \in \Omega^r(p|_{s(B)}) = \Omega^r(B) \oplus \Omega^{r-1}(s(B))$.

Si $(\omega, \theta) \in \mathrm{Ker} d$, entonces $d\omega = 0$ y $(p|_{s(B)})^*\omega - d\theta = 0$. Luego $d\theta = (p|_{s(B)})^*$ implica que $s^* d\theta = \omega$ y como s^* es un morfismo de complejos:

$$ds^*\theta = \omega.$$

Entonces $(s^*\theta, 0) \in \Omega^{r-1}(p|_{s(B)})$ y

$$d(s^*\theta, 0) = (ds^*\theta, (p|_{s(B)})^* s^*\theta) = (\omega, \theta).$$

con lo que $(\omega, \theta) \in \operatorname{Im} d$.

Consideramos ahora las aplicaciones diferenciables fibradas sobre B:

$$i_U\colon (U, p|_U) \to (M, p)$$

$$j\colon (s(B), p|_{s(B)}) \to (M, p)$$

$$sp|_U\colon (U, p|_U) \to (s(B), p|_{s(B)})$$

y el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Omega(p) \arrow[rr, "i_U^*"] \arrow[dr, "j^*"'] & & \Omega(p|_U) \\
& \Omega(p|_{s(B)}) \arrow[ur, "(sp|_U)^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $i_U \simeq_B^\infty jsp|_U$ tenemos que $i_U^* = (jsp|_U)^* = (sp|_U)^* j^* = 0$ ya que $H(p|_{s(B)}) = 0$.

$\square$

Daremos una demostración particular de la Proposición 2.16 para la C^∞-categoría fibrada. Su interés es que más adelante la adaptaremos para variedades foliadas.

Proposición 2.20

$$\operatorname{cat}_B^\infty M \geq \operatorname{nil} \frac{\tilde{H}^*(M)}{\langle p^* \tilde{H}^*(B) \rangle}.$$

Dem: Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ recubrimiento de M por abiertos C^∞-categóricos fibrados. Para cada U_i, tenemos el siguiente diagrama conmutativo, con $r > 0$:

$$\begin{tikzcd} & H^r(M,U_i) \arrow[d, "a"] & \\ H^r(B) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "id"] & H^r(M) \arrow[r] \arrow[d, "b"] & H^{r+1}(p) \arrow[d, "\equiv 0"] \\ H^r(B) \arrow[r, "c"] & H^r(U_i) \arrow[r, "d"] & H^{r+1}(p|_{U_i}) \end{tikzcd}$$

Sean $x_1,\ldots,x_n \in H^r(M)$. Entonces $db(x_i) = 0 \quad \forall i = 1,\ldots,n$ es decir, $b(x_i) \in \mathrm{Ker}\, d = \mathrm{Im}\, c$ luego $\exists \beta_i \in H^r(B)$ tal que $c(\beta_i) = b(x_i)$.

Como

$$b(x_i) = c(\beta_i) = c\,id(\beta_i) = bp^*(\beta_i) \Rightarrow p^*(\beta_i) - x_i \in \mathrm{Ker}\, b = \mathrm{Im}\, a,$$

entonces $\exists \gamma_i \in H^r(M,U_i)$ tal que $a(\gamma_i) = p^*(\beta_i) - x_i$.

El producto

$$x_1 \cdots x_n = (p^*(\beta_1) - a(\gamma_1)) \cdots (p^*(\beta_n) - a(\gamma_n))$$

es igual a

$$p^*(\beta_1) \cdots p^*(\beta_n) + \prod_i p^*(\beta_i)\delta_i + (-1)^n a(\gamma_1 \cdots \gamma_n)$$

con $\delta_i \in \tilde{H}^*(M)$. Y como $\gamma_1 \ldots \gamma_n \in H^*(M,M) = 0$ resulta $x_1 \cdots x_n \in \langle p^*\tilde{H}^*(B)\rangle$.

□

2.6 Categoría fibrada local

El principal obstáculo para la aplicación de la noción de categoría fibrada de James a variedades foliadas es la necesidad de existencia de secciones globales. Haremos aquí una generalización que sólo requiere la existencia de secciones locales lo que nos permitirá calcular la categoría de los fibrados localmente triviales. Para simplificar la notación sólo consideraremos aplicaciones $p\colon X \to B$ sobreyectivas, abiertas y con fibras conexas.

Decimos que (X, p, B) es un espacio fibrado si $p\colon X \to B$ con p sobreyectiva, abierta y con fibras conexas.

Una aplicación $(f, \overline{f})\colon (X, p, B) \to (Y, p', B')$ es fibrada si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "\overline{f}"] & B' \end{tikzcd}$$

$H\colon X \times I \to Y$ será una homotopía fibrada si $(H, \overline{H})\colon (X \times I, p \circ pr_X, B) \to (Y, p', B')$ es una aplicación fibrada (notación $\simeq_p$).

Por último $(c, \overline{c})\colon (X, p, B) \to (Y, p', B')$ es una constante fibrada local si $\exists s'\colon p'c(X) \to Y$ sección local de p' tal que $c = s'\overline{c}p$.

Observaciones 2.21 *1. Una aplicación fibrada lleva la fibra de* p *que pasa por* $x \in X$ *en la fibra de* p' *que pasa por* $f(x) \in Y$.

2. $(f, \overline{f})\colon (X, p, B) \to (Y, p', B')$ *es una aplicación fibrada sii* $f\colon (X, \overline{f}p) \to (Y, p')$ *es fibrada sobre* B'

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\overline{f}p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & B' & \end{tikzcd}$$

3. $f \simeq_p g$ *sii* $f, g\colon (X, \overline{f}p) \to (Y, p')$ *verifican* $f \simeq_{B'} g$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, "\overline{f}p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & B' & \end{tikzcd}$$

Proposición 2.22 *Si* $f \simeq_p g$ *entonces* $\overline{f} = \overline{g}$.

Un subconjunto $U \subset X$ es categórico fibrado localmente si la inclusión

$$i\colon (U, p_U, U/\sim) \hookrightarrow (X, p, B)$$

es homótopa fibrada a una constante fibrada local, donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por: $x \sim y$ sii pertenecen a la misma componente conexa de la fibra de p en U y $p_U\colon U \to U/\sim$ es la proyección canónica. Es decir, $\exists s\colon p(U) \to X$ sección local de p tal que $i \simeq_p sp|_U$.

Proposición 2.23 $U \subset X$ *es categórico fibrado localmente sii existen* a *y* b *aplicaciones fibradas tales que el siguiente diagrama conmuta bajo homotopía fibrada:*

$$\begin{tikzcd}
(U, p_U, U/\sim) \arrow[rr, hook, "{(i, \bar{i})}"] \arrow[dr, "{(a, \overline{a})}"'] & & (X, p, B) \\
& (p(U), id, p(U)) \arrow[ur, "{(b, \overline{b})}"'] &
\end{tikzcd}$$

con $\overline{a} = \bar{i}$ *y* $\overline{b} = i_{p(U)}$

Dem:
$(\Rightarrow)$
$\exists s\colon p(U) \to X$ sección local de p tal que $i \simeq_p sp|_U$, sea $a = p|_U\colon U \to p(U)$ y $b = s$. Son fibradas y verifican la condición de homotopía.
$(\Leftarrow)$
b es sección local de p por ser fibrada:

$$\begin{tikzcd}
p(U) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "id"] & X \arrow[d, "p"] \\
p(U) \arrow[r, "i"] & B
\end{tikzcd}$$

Además $bp|_U = b\bar{i}p_U = ba \simeq_p i$.

$\square$

Definición 2.24 *Llamamos categoría fibrada local del espacio* X, $\mathrm{cat}_p X$, *al menor entero* k *tal que* X *se puede recubrir por* k *subconjuntos abiertos categóricos fibrados localmente. Si no existe tal entero,* $\mathrm{cat}_p X = \infty$.

Como en el caso de la categoría fibrada de James, podemos probar que la categoría fibrada local es un invariante de homotopía fibrada.

Proposición 2.25 $\mathrm{secat}X \leq \mathrm{cat}_p X \leq \mathrm{cat}_B X$.

Dem: Si U es abierto categórico fibrado localmente, entonces $\exists s\colon p(U) \to X$ sección local de p y como p es una aplicación abierta, tenemos que $p(U)$ es abierto categórico seccionario.

Si U es abierto categórico fibrado, entonces $\exists s\colon B \to X$ sección global de p tal que $sp|_U \simeq_B i_U$. Sea $s' = s|_{p(U)}$ luego $s'p|_U = sp|_U \simeq_B i_U$ y por la Observación 2.21.3, $s'p|_U \simeq_p i_U$ con lo que U es abierto categórico fibrado localmente.

$\square$

Proposición 2.26 *Para toda fibra* F *de* p *tenemos*

$$\mathrm{cat}_p X \geq \mathrm{cat}F.$$

Dem: Si U es abierto categórico fibrado localmente, es decir si $\exists H\colon U \times I \to X$ tal que $H_0 = i_U$, $H_1 = sp|_U$ y $H((F \cap U) \times I) \subset F$, veré que $F \cap U$ es categórico para F.

Sea $G\colon (F \cap U) \times I \to F$ dada por $G = H|_{(F\cap U)\times I}$.

G_0 es la inclusión y $G_1 = sp|_{F\cap U}$ con $p|_F = \mathrm{cte}$ con lo que G_1 es la aplicación constante y $F \cap U$ es abierto categórico para F.

$\square$

Proposición 2.27 *Si* $p\colon X \to B$ *es un fibrado principal de fibra* F*, entonces* $\mathrm{cat}_p X \leq \mathrm{cat}F\mathrm{secat}X$.

Dem: Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ recubrimiento de B por abiertos categóricos seccionarios.

Para todo U_i existe $s_i\colon U_i \to X$ sección local de p que es fibrado principal con lo que U_i es abierto de trivialidad y $p^{-1}(U_i)$ es homeomorfo a $U_i \times F$.

Sea $\{W_1, \ldots, W_m\}$ recubrimiento de F por abiertos categóricos. Entonces cada $U_i \times W_j$ es homeomorfo a un abierto de $p^{-1}(U_i)$ y veré que es categórico fibrado localmente para X.

Sea $H\colon (U_i \times W_j) \times I \to X$ tal que $H((u,w),t) = (u, G(w,t))$ con G la homotopía entre la inclusión $W_j \subset F$ y la aplicación constante.

$$\begin{aligned} H_0(u,w) &= (u,w) \\ H_1(u,w) &= (u, \mathrm{cte}) \end{aligned}$$

con lo que, componiendo con la trivialización local, podemos considerar que H es una homotopía entre la inclusión $U_i \times W_j \subset X$ y una aplicación constante fibrada local. Además H es fibrada pues $H(p^{-1}(b)) = H(b \times F) \subset b \times F = p^{-1}(b)$.

Por lo tanto $\{U_i \times W_j \mid i = 1 \ldots n, \quad j = 1 \ldots m\}$ es un recubrimiento de X por abiertos categóricos fibrados localmente.

$\square$

Corolario 2.28 *Si* $p\colon X \to B$ *es un fibrado principal, entonces*

$$\mathrm{cat} F \leq \mathrm{cat}_p X \leq \mathrm{cat} F \mathrm{secat} X.$$

(Si el fibrado es trivial, entonces $\mathrm{cat}_p X = \mathrm{cat} F$*)*

Nótese que los fibrados principales no triviales tienen categoría fibrada infinita.

2.6.1 Espacios verticalmente conexos

Definición 2.29 *[19] Dos secciones* $s, s'\colon B \to X$ *son verticalmente homótopas si* $sp \simeq_B s'p$.

Definición 2.30 *[20] Un espacio fibrado* (X,p) *es verticalmente conexo si admite sección global y todas las secciones son verticalmente homótopas.*

Diremos que (X,p,B) es verticalmente conexo localmente (v.c.l.) si para todo abierto categórico seccionario $V \subset B$ el espacio fibrado $(p^{-1}(V), p|_{p^{-1}(V)}, V)$ es verticalmente conexo.

Proposición 2.31 *Si* (X,p,B) *es v.c.l. y admite sección global entonces* $\mathrm{cat}_p X = \mathrm{cat}_B X$.

Dem: Si U es categórico fibrado localmente entonces $\exists s\colon p(U) \to X$ tal que $i_U \simeq_p sp|_U$. En particular $V = p(U)$ es categórico seccionario, y poniendo $X_V = p^{-1}(V)$ tenemos que $(X, p|_{X_V}, V)$ es verticalmente conexo. Consideramos $s'\colon B \to X$ la sección global de p. Las secciones locales $s'|_V, s\colon V \to X_V$ son verticalmente homótopas entonces:

$$sp|_{X_V} \simeq_V s'p|_{X_V}.$$

Como $U \subset X_V$ y $B \supset V$ utilizando las propiedades 2.13 tenemos que $sp|_U \simeq_V s'p|_U$ y luego $sp|_U \simeq_B s'p|_U$ con lo que

$$i_U \simeq_B s'p|_U$$

con s' sección global.

$\square$

2.7 Categoría fibrada local diferenciable

En toda esta sección M y B serán variedades y $p\colon M \to B$ una aplicación diferenciable, sobreyectiva, abierta y con fibras conexas.

Análogamente a la categoría fibrada diferenciable definimos la categoría fibrada local diferenciable $\mathrm{cat}_p^\infty M$.

Como antes tenemos que $\mathrm{cat}_p M \leq \mathrm{cat}_p^\infty M$.

Sea $p\colon M \to B$ un fibrado diferenciable localmente trivial. Consideramos M y B paracompactas por lo que estos fibrados tendrán la PLH para todo abierto $U \subset M$ y para todo abierto $V \subset B$.

Lema 2.32 *Si* $V \subset B$ *es contráctil en* B*, entonces* V *es un abierto de trivialidad para* p*.*

Dem: Sea $H\colon V \times R \to B$ la homotopía entre la inclusión i_V y una constante. Consideramos $\overline{H}\colon p^{-1}(V) \times R \to B$ tal que $\overline{H} = H(p \times id)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{H}_0 &= p|_{p^{-1}(V)} \\ \overline{H}_1 &= \text{cte} \end{aligned}$$

A partir del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V)\times\{0\} & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow & & \downarrow p \\ p^{-1}(V)\times I & \xrightarrow{\overline{H}} & B \end{array}$$

y por la Propiedad de levantamiento de homotopías para el abierto $p^{-1}(V)$ existe $\tilde{H}\colon p^{-1}(V)\times R \to M$ diferenciable tal que $\tilde{H}_0 = i$ y $p\tilde{H} = \overline{H}$. Fijamos una métrica para la que p es una submersión riemanniana y elegimos $\tilde{H}$ ortogonal a las fibras con lo que el levantamiento es único.

Si $H_1(x) = b_0 \quad \forall x \in V$ y $F_0 = p^{-1}(b_0)$ tenemos que $p\tilde{H}_1(F) = H_1 p(F) = b_0$ con lo que para cada fibra F podemos considerar $\tilde{H}_1|_F\colon F \to F_0$ que resulta diferenciable por ser todas las fibras subvariedades embebidas.

Además es sobre y tiene inversa diferenciable.

Luego es un difeomorfismo.

Defino $h\colon p^{-1}(V) \to V \times F$ como

$$h(z) = (p(z), \tilde{H}_1(z)).$$

Tenemos que $pr_V \circ h = p$. Además h es inyectiva: si $h(z) = h(z')$ entonces $p(z) = p(z')$ y $\tilde{H}_1(z) = \tilde{H}_1(z')$. Luego $z, z' \in F$ y como $\tilde{H}_1|_F\colon F \to F_0$ es un difeomorfismo tenemos que $z = z'$. Es también sobreyectiva pues lo son $p|_{p^{-1}(V)}\colon p^{-1}(V) \to V$ y $\tilde{H}_1|_{p^{-1}(V)}\colon p^{-1}(V) \to F_0$. Finalmente la aplicación inversa

$$(b, x) \mapsto (\tilde{H}_1|_F)^{-1}(x)$$

donde $F = p^{-1}(b)$, es diferenciable. Luego h es un difeomorfismo.

□

Proposición 2.33 *Si* $p\colon M \to B$ *es un fibrado diferenciable localmente trivial, entonces* $\mathrm{cat}_p^\infty M \leq \mathrm{cat} F \mathrm{cat} B$.

En particular $\mathrm{cat}_p M \leq \mathrm{cat} F \mathrm{cat} B$.

Proposición 2.34 *Si* M *es una variedad,* B *un espacio topológico y* $p\colon M \to B$ *una aplicación continua, sobreyectiva, abierta y con fibras conexas tal que* $\mathrm{secat} M < \infty$ *tenemos que*

1. *las fibras son subconjuntos cerrados de* M*;*

2. *si además* M *es compacta, entonces* B *es Hausdorff.*

Dem:

1. Sea $U = p^{-1}(V)$, tenemos que $sp|_U : U \to U$ es una aplicación continua entre variedades y constante en las hojas. Luego $sp|_U(\overline{L}) = \text{cte}$. Como s es una sección debe ser $\overline{L} = L$.

2. Dados b_1, $b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$, existen abiertos categóricos seccionarios $V_i \subset B, \quad i = 1, 2$ tales que $b_i \in V_i$.

   Los abiertos $V_i, \quad i = 1, 2$ son Hausdorff ya que son homeomorfos a $s(V_i) \subset M$.

   Sean $F_i, \quad i = 1, 2$ las fibras de p sobre b_i que son compactas por el apartado anterior y porque M es compacta.

   Como M es normal existen abiertos disjuntos $U_i, \quad i = 1, 2$ tales que $F_i \subset W_i \subset \overline{W}_i \subset U_i \cap p^{-1}(V_i)$.

   Consideramos los compactos $K_i = \text{Fr}(\overline{W}_i), \quad i = 1, 2$, como $K_i \subset \overline{W}_i \subset p^{-1}(V_i)$ tenemos que $p(K_i)$ es un compacto contenido en V_i que es Hausdorff por lo que $p(K_i)$ es cerrado en V_i. Luego $\text{sat}K_i = p^{-1}(p(K_i))$ es cerrado en $p^{-1}(V_i)$.

   Sean $A_i = \overline{W}_i - \text{sat}K_i, \quad i = 1, 2$. Veremos que son abiertos y saturados.

   Por un lado tenemos que

   $$\text{Int}A_i = \overline{W}_i - \text{sat}K_i$$

   con lo que A_i es abierto.

   Además si una fibra $F \subset A_i$ tenemos que $F \cap \overline{W}_i \neq \emptyset$ y $F \cap K_i = \emptyset$. Luego como F es conexa, debe ser $F \subset \overline{W}_i$, con lo que A_i es saturado.

   Finalmente tenemos que $p(A_i), \quad i = 1, 2$ son abiertos disjuntos tales que $b_i \in p(A_i)$.

$\square$

Como $\text{secat}M \leq \text{mín}\{\text{cat}_p M, \text{cat}_p^\infty M, \text{cat}_B M, \text{cat}_B^\infty M\}$ tenemos que es necesario que las fibras sean cerradas para que cualquiera de las categorías fibradas definidas en una variedad sea finita.

Corolario 2.35 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación en la variedad compacta M tal que* $\operatorname{secat} M < \infty$ *para la proyección $\pi\colon M \to M/\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ es una foliación compacta-Hausdorff.*

Sean $(M, \mathcal{F})$ y $(M', \mathcal{F}')$ variedades foliadas.

Proposición 2.36 *Una homotopía diferenciable $H\colon M \times R \to M'$ es fibrada sii es integrable.*

Dem:
($\Rightarrow$)
Como H es fibrada, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \times R \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi pr_1"] & M' \arrow[d, "\pi'"] \\
M/\mathcal{F} \arrow[r, "\overline{H}"] & M'/\mathcal{F}'
\end{tikzcd}$$

Entonces $H(L \times R) \subset L'$ porque $\pi' H(L \times R) = \overline{H}\pi pr_1(L \times R) = \overline{H}\pi(L) = \text{cte}$.
($\Leftarrow$)
Defino $\overline{H}(\pi pr_1(x,t)) = \pi' H(x,t)$. Está bien definida: si $\pi pr_1(x,t) = \pi pr_1(x',t')$ entonces $\pi(x) = \pi(x')$ con lo que $x, x' \in L$. Luego $(x,t), (x',t') \in L \times R$ y como H es integrable entonces $H(x,t), H(x',t') \in L'$. Luego $\pi' H(x,t) = \pi' H(x',t')$.

$\square$

Chapter 3

Categoría LS en foliaciones

3.1 Categoría LS de las hojas

La categoría LS de un espacio topológico depende de la topología, $\mathrm{cat}\mathsf{X}$ es más precisamente $\mathrm{cat}(\mathsf{X}, \tau)$. En general se omite la topología cuando no hay posibilidad de confusión. En el caso de las hojas de una variedad foliada omitiremos la topología cuando se trate de la topología de variedad de la hoja, es decir la topología de las placas: $\mathrm{cat}\mathsf{L} = \mathrm{cat}(\mathsf{L}, \tau_{\mathsf{p}})$.

Lema 3.1 *Sean τ y τ' topologías en la variedad N tales que $\tau' \subset \tau$ y para toda variedad X se cumple: f es continua sii $\mathtt{id} \circ \mathsf{f}$ es continua*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{X} \arrow[d, "\mathsf{f}"] \arrow[dr, "\mathtt{id} \circ \mathsf{f}"] & \\ (\mathsf{N}, \tau) \arrow[r, "\mathtt{id}"] & (\mathsf{N}, \tau') \end{tikzcd}$$

entonces $\mathrm{cat}(\mathsf{N}, \tau) \leq \mathrm{cat}(\mathsf{N}, \tau')$.

Dem: Sea V abierto categórico para (N, τ') y sea H' la homotopía entre la inclusión i_{V} y la aplicación constante. Como $\tau' \subset \tau$ se cumple que $\mathtt{id}\colon (\mathsf{V} \times \mathsf{R}, \tau) \to (\mathsf{V} \times \mathsf{R}, \tau')$ es continua. Consideramos $\mathsf{H}''\colon (\mathsf{V} \times \mathsf{R}, \tau) \to (\mathsf{N}, \tau')$ tal que $\mathsf{H}'' = \mathsf{H}'\mathtt{id}$, luego H'' es continua.
Tenemos el siguiente diagrama con $(\mathsf{V} \times \mathsf{R}, \tau)$ variedad :

$$\begin{tikzcd}
(V \times R, \tau) \arrow[d, "H"] \arrow[dr, "H''"] & \\
(N, \tau) \arrow[r, "id"] & (N, \tau')
\end{tikzcd}$$

de donde H es continua y V es abierto categórico para (N, τ).

$\square$

Proposición 3.2 $\mathrm{cat}L \leq \mathrm{cat}(L, \tau_i)$ *donde* τ_i *es la topología inducida por la topología de variedad de* M*.*

Observación 3.3 *Si* L *es una variedad tal que* $\mathrm{cat}L > \mathrm{cat}(L, \tau)$*, para toda topología* τ *menos fina que la de* L *entonces* L *no es hoja excepcional ni localmente densa de ninguna foliación.*

3.2 Categoría tangente

Todas las variedades, foliaciones y aplicaciones consideradas serán de clase C^∞.

Sea $(M, \mathcal{F})$ una variedad foliada, U abierto en M y $\mathcal{F}_U$ la foliación inducida por $\mathcal{F}$ en U.

Diremos que U es tangentemente categórico (t-categórico) si $\exists c\colon (U, \mathcal{F}_U) \to (M, \mathcal{F})$ constante en cada hoja de $\mathcal{F}_U$ tal que $c \simeq_{\mathcal{F}\times R} i_U$.

Definición 3.4 *Llamamos categoría tangente de* $(M, \mathcal{F})$*,* $\mathrm{cat}_t(M, \mathcal{F})$*, al menor entero* k *tal que* M *se puede recubrir por* k *subconjuntos abiertos t-categóricos. Si no existe tal entero,* $\mathrm{cat}_t(M, \mathcal{F}) = \infty$*.*

Proposición 3.5 *Si* M *es compacta entonces* $\mathrm{cat}_t(M, \mathcal{F}) < \infty$

Dem: Como M es compacta, existe $\{U_1, \ldots, U_r\}$ recubrimiento de M por abiertos foliados. Veré que los abiertos foliados son t-categóricos. Si U es foliado, $\exists \varphi\colon U \to R^m \times R^n$ difeomorfismo. Consideramos $c\colon U \to M$ tal que $c(x) = \varphi^{-1}(0, pr_2\varphi(x))$. Tenemos que $c(P) = \text{cte}$ y $c \simeq_{\mathcal{F}\times R} i_U$ considerando la homotopía $H\colon U \times R \to M$ tal que $H(x,t) = \varphi^{-1}((1-t)pr_1\varphi(x), pr_2\varphi(x))$.

$\square$

Observación 3.6 *Sea* $n_{\mathcal{A}}$ *el número de cartas foliadas de cualquier atlas foliado* $\mathcal{A}$*, entonces*

$$\mathrm{cat}_t(M,\mathcal{F}) \leq n_{\mathcal{A}}.$$

Proposición 3.7 $\mathrm{cat}_t(M,\mathcal{F})$ *es un invariante de homotopía integrable.*

Dem: Sea $f\colon (M,\mathcal{F}) \to (N,\mathcal{F}')$ la equivalencia de homotopía integrable con inversa homotópica g, U abierto t-categórico para $(M,\mathcal{F})$ y $c\colon (U,\mathcal{F}_U) \to (M,\mathcal{F})$ constante en cada hoja de $\mathcal{F}_U$ tal que $c \simeq_{\mathcal{F}\times R} i_U$. Consideramos $V = g^{-1}(U)$ abierto en N y $c' = fcg|_V$. Entonces $c'\colon (V,\mathcal{F}'_V) \to (N,\mathcal{F}')$ es constante en las hojas de $\mathcal{F}'_V$: si P' es una hoja de $\mathcal{F}'_V$, $c'(P') = fcg(P') \subset fc(P)$ pues $g|_V$ es continua, P' es conexo y P es una componente conexa de $L \cap U$.

Además $i_V \simeq_{\mathcal{F}\times R} c'$:

$$c' = fcg|_V \simeq_{\mathcal{F}\times R} fi_U g|_V = fgi_V \simeq_{\mathcal{F}\times R} idi_V = i_V.$$

Luego $\mathrm{cat}_t(M,\mathcal{F}) \geq \mathrm{cat}_t(N,\mathcal{F}')$. Invirtiendo el razonamiento, obtenemos la igualdad.

□

Proposición 3.8 U *es t-categórico sii existe una homotopía integrable* $H\colon U \times R \to M$ *tal que para toda* P *hoja de* $\mathcal{F}_U$*,* $H|_{P\times R}$ *es una contracción diferenciable en la hoja* L *que contiene a* P*.*

Dem:

($\Rightarrow$) $\exists c\colon (U,\mathcal{F}_U) \to (M,\mathcal{F})$ constante en cada hoja de $\mathcal{F}_U$ tal que $c \simeq_{\mathcal{F}\times R} i_U$. Sea H la homotopía integrable entre c y la inclusión i_U.

$$\begin{aligned} (H|_{P\times R})_0 &= H_0|_P = c|_P = \mathrm{cte} \\ (H|_{P\times R})_1 &= H_1|_P = i_U|_P = i_P \end{aligned}$$

Luego $H|_{P\times R}\colon P \times R \to L$ es una contracción en L que es diferenciable por ser L una variedad débilmente embebida en M.

($\Leftarrow$) Sea $c = H_0$, $c\colon U \to M$ es constante en cada hoja de $\mathcal{F}_U$: $c|_P = H_0|_P = \mathrm{cte}$ y es homótopa a i_U considerando la propia homotopía H.

l

$\square$

Por lo que en un conjunto t-categórico las componentes conexas de cada hoja son C^∞-contráctiles en la hoja.

Proposición 3.9 *Si* $\mathrm{cat}_t(M,\mathcal{F}) = 1$ *entonces todas las hojas son cerradas y contráctiles.*

Dem: M es t-categórico, sea $c\colon (M,\mathcal{F}) \to (M,\mathcal{F})$ tal que $c(L) = p$, $p \in L$. Considero el abierto $V = M - \{p\}$. Por ser c continua, el conjunto $c^{-1}(V) = M - L$ es abierto en M de donde L es cerrado en M.

Que L es contráctil se sigue como corolario de la proposición anterior.

$\square$

Proposición 3.10 *Para toda hoja* L *se tiene:*

$$\mathrm{cat} L \leq \mathrm{cat}_t(M,\mathcal{F}) \leq \mathrm{cat}^\infty_\pi M$$

(Si $(M,\mathcal{F})$ *es un fibrado trivial, entonces* $\mathrm{cat} L = \mathrm{cat}_t(M,\mathcal{F})$*)*

Dem: Sea U abierto C^∞-categórico fibrado localmente para (M,π), c la constante fibrada local y $s\colon \pi(U) \to M$ la sección local tales que $c \simeq_\pi i_U$, $\pi s = i_{\pi(U)}$ y $c = s\pi|_U$.

Tenemos que c es constante en las hojas de $\mathcal{F}_U$ pues $c(P) = s\pi|_U(P) = s\pi(P) = \mathrm{cte}$ y por la Proposición 2.36 resulta que U es t-categórico para $(M,\mathcal{F})$.

Sea ahora U abierto t-categórico para $(M,\mathcal{F})$ y H la homotopía entre c y la inclusión i_U, veré que $U \cap L$ es abierto categórico para (L,τ_p). Escribimos $U \cap L$ como la unión disjunta de sus componentes conexas $U \cap L = \bigsqcup P_\alpha$. Se trata de deformar cada componente conexa P_α hasta un punto $p_\alpha \in P_\alpha$ y luego hasta un punto fijo $p \in L$. Como L es conexa por caminos, para cada p_α existe un camino $\alpha\colon I \to L$ entre p_α y p. Tenemos que $(U \cap L) \times I = \bigsqcup (P_\alpha \times I)$ y consideramos $F_\alpha\colon (P_\alpha \times I) \to L$ tal que

$$F_\alpha(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), & \text{en } P_\alpha \times [0,\frac{1}{2}] \\ \alpha(2t-1), & \text{en } P_\alpha \times [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

que es continua $\forall \alpha$ por ser combinada de continuas en dos cerrados.

Sea ahora $F\colon (U \cap L) \times I \to L$ tal que $F(x,t) = F_\alpha(x,t)$ si $(x,t) \in P_\alpha \times I$ que también es continua por ser combinada de continuas en abiertos disjuntos ($P_\alpha \times I$ es abierto y cerrado). Además $F_0 = H_0 = i_U$ y $F_1(x) = \alpha(1) = p \quad \forall x \in U \cap L$ con lo que $U \cap L$ es categórico para L.

□

Proposición 3.11 *Si* $c\colon (N, \mathcal{F}') \to (M, \mathcal{F})$ *es constante en cada hoja de* $\mathcal{F}'$ *entonces la aplicación inducida* $c_{\mathcal{F}}\colon \Omega^r_{\mathcal{F}}(M) \to \Omega^r_{\mathcal{F}'}(N)$ *es idénticamente nula* $\forall r > 0$.

Dem: Si $c(L') = \text{cte} \quad \forall L' \in \mathcal{F}'$ entonces para toda carta foliada $(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n)$ es $c(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = h(y^1, \dots, y^n)$.

Si $X_1, \dots, X_r \in T_pN$ y $\omega \in \Omega^r(M)$ tenemos que $c^\#\colon \Omega^r(M) \to \Omega^r(N)$ cumple

$$c^\#\omega_{c(p)}(X_1, \dots, X_r) = \omega_{c(p)}(c_{*p}X_1, \dots, c_{*p}X_r).$$

Ahora, si Y es un campo tangente a la foliación, $Y = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ con lo que $c_*Y = 0$. Luego $c^\#\omega(Y_1, \dots, Y_r) = 0$ si $Y_1, \dots, Y_r$ son tangentes de donde $c^\#\omega \in \Omega^*(N, \mathcal{F}')$ y

$$c_{\mathcal{F}}\colon \frac{\Omega^r(M)}{\Omega^r(M, \mathcal{F})} \to \frac{\Omega^r(N)}{\Omega^r(N, \mathcal{F}')}$$

es idénticamente nula, con $c_{\mathcal{F}}(\overline{\omega}) = \overline{c^\#(\omega)}$.

□

Corolario 3.12 *Si* U *es t-categórico entonces el morfismo* $i^*\colon \tilde{H}^*_{\mathcal{F}}(M) \to \tilde{H}^*_{\mathcal{F}_U}(U)$ *inducido por la inclusión es idénticamente nulo.*

Dem: $c^* = 0$ y $c^* = i^*$.

□

Teorema 3.13 $\operatorname{cat}_t(M, \mathcal{F}) \geq \operatorname{nil}\tilde{H}^*_{\mathcal{F}}(M)$.

Dem: Considerando la sucesión exacta larga en cohomología foliada del par (M, U),

$$\dots \longrightarrow H^r_{\mathcal{F}}(M, U) \xrightarrow{\beta^*} H^r_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{i^*} H^r_{\mathcal{F}_U}(U) \longrightarrow \dots$$

tenemos que β^* es sobre. Sean $x_1, \dots, x_n$ elementos de $\tilde{H}^*_{\mathcal{F}}(M)$ y $\{U_1, \dots, U_n\}$ recubrimiento de M por abiertos t-categóricos. Para cada x_i, con $i = 1, \dots, n$ existe $y_i \in H^r_{\mathcal{F}}(M, U_i)$ tal que $\beta^*(y_i) = x_i$. Luego el producto

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = \beta^*(y_1 \bullet \ldots \bullet y_n) = 0$$

pues $y_1 \bullet \ldots \bullet y_n \in H^*_{\mathcal{F}}(M, M) = 0$. Con lo que $\mathrm{nil}\tilde{H}^*_{\mathcal{F}}(M) \leq n$.

□

Como $\tilde{H}^r_{\mathcal{F}}(M) = 0$ para todo $r > m$ tenemos:

Observación 3.14 $\mathrm{nil}\tilde{H}^*_{\mathcal{F}}(M) \leq m + 1$ *donde* $m = \dim \mathcal{F}$*.*

Un subconjunto U abierto en M es T-categórico si $\exists T$ transversal tal que el siguiente diagrama conmuta bajo homotopía integrable:

$$\begin{tikzcd}
(U, \mathcal{F}_U) \arrow[r, hook] \arrow[dr] & (M, \mathcal{F}) \\
& (T, \mathcal{F}_T) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{F}_T$ es la foliación por puntos en T.
Análogamente definimos la T-categoría de $(M, \mathcal{F})$, $\mathrm{cat}_T(M, \mathcal{F})$.

Proposición 3.15 $\mathrm{cat}_t(M, \mathcal{F}) \leq \mathrm{cat}_T(M, \mathcal{F})$*.*

Dem: Sea U abierto T-categórico, existe T transversal y $a\colon (U, \mathcal{F}_U) \to (T, \mathcal{F}_T)$ tal que $i_T a \simeq_{\mathcal{F} \times I} i_U$. Poniendo $c = i_T a$, si P es una hoja de $\mathcal{F}_U$ tenemos que $c(P) \subset L$ por ser foliada y que $c(P) \subset T$ de donde $c(P) \subset L \cap T$ y por conexión c es constante en P.

Proposición 3.16

1. *Si* $\mathcal{F}$ *es una foliación por puntos, entonces* $\mathrm{cat}_T(M, \mathcal{F}) = \mathrm{cat}_t(M, \mathcal{F}) = 1$*.*
2. *Si* $\mathcal{F}$ *es una foliación por una única hoja, entonces* $\mathrm{cat}_T(M, \mathcal{F}) = \mathrm{cat}_t(M, \mathcal{F}) = \mathrm{cat} M$*.*

Dem:

1. Consideramos como transversal $T = U = M$, entonces

$$\begin{tikzcd}(M,\mathcal{F}) \arrow[r, hook] \arrow[dr] & (M,\mathcal{F}) \\ & (M,\mathcal{F}) \arrow[u, "id"']\end{tikzcd}$$

   conmuta bajo homotopía integrable y $\mathrm{cat}_T(M,\mathcal{F}) = 1$.

2. U es T-categórico sii existe $T = \{*\}$ tal que

$$\begin{tikzcd}(U,\mathcal{F}_U) \arrow[r, hook] \arrow[dr] & (M,\mathcal{F}) \\ & (*,*) \arrow[u, "i"']\end{tikzcd}$$

   conmuta bajo homotopía sii U es categórico. Luego $\mathrm{cat}_T(M,\mathcal{F}) = \mathrm{cat}M$. Además si U es t-categórico, entonces $c(U) = *$ es una transversal y U resulta T-categórico con lo que $\mathrm{cat}_T(M,\mathcal{F}) = \mathrm{cat}_t(M,\mathcal{F})$.

□

3.3 Categoría transversa

Un subconjunto U abierto en M es transversalmente categórico ($\pitchfork$-categórico) si existe $l\colon (U,\mathcal{F}_U) \to (M,\mathcal{F})$ con $l(U) \subset L$, L hoja de $\mathcal{F}$ y tal que $l \simeq_{\mathcal{F}} i_U$.

Proposición 3.17 *U abierto en M es transversalmente categórico sii existe $a\colon (U,\mathcal{F}_U) \to (L,\mathcal{F}_L)$ tal que el siguiente diagrama conmuta bajo homotopía foliada:*

$$\begin{tikzcd}(U,\mathcal{F}_U) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "a"'] & (M,\mathcal{F}) \\ & (L,\mathcal{F}_L) \arrow[u, "i"']\end{tikzcd}$$

donde L *es una hoja de* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{F}_L$ *la foliación por una hoja en* L.

Dem: Como $l(U) \subset L$ y L es una subvariedad débilmente embebida entonces puedo considerar $a = l \colon U \to L$ que resulta diferenciable.

Para el recíproco considero $l = i \circ a$.

$\square$

Definición 3.18 *Llamamos categoría transversa de* $(M, \mathcal{F})$, $\operatorname{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F})$, *al menor entero* k *tal que* M *se puede recubrir por* k *subconjuntos abiertos* $\pitchfork$ *-categóricos. Si no existe tal entero,* $\operatorname{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) = \infty$.

Proposición 3.19 *Si* M *es compacta entonces* $\operatorname{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) < \infty$

Dem: Como M es compacta, existe $\{U_1, \ldots, U_r\}$ recubrimiento de M por abiertos foliados. Veré que los abiertos foliados son $\pitchfork$ -categóricos. Si U es foliado, $\exists \varphi \colon U \to R^m \times R^n$ difeomorfismo. Sea $L \supset \varphi^{-1}(R^m \times \{0\})$ y $a \colon U \to L$ tal que $a(x) = \varphi^{-1}(pr_1\varphi(x), 0)$. $a(U) \subset L$ y $i_L a \simeq_{\mathcal{F}} i_U$ considerando la homotopía foliada $H \colon U \times R \to M$ tal que $H(x,t) = \varphi^{-1}(pr_1\varphi(x), (1-t)pr_2\varphi(x))$.

$\square$

Observación 3.20 *Para todo atlas foliado* $\mathcal{A}$,

$$\operatorname{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) \leq n_{\mathcal{A}}.$$

Proposición 3.21 $\operatorname{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F})$ *es un invariante de homotopía foliada.*

Dem: Sea $f \colon (M, \mathcal{F}) \to (N, \mathcal{F}')$ la equivalencia de homotopía foliada con inversa homotópica g, U abierto $\pitchfork$ -categórico para $(M, \mathcal{F})$ y $a \colon (U, \mathcal{F}_U) \to (L, \mathcal{F}_L)$ tal que $i_L a \simeq_{\mathcal{F}} i_U$. Sea $V = g^{-1}(U)$ abierto en N y $a' = f|_L \circ a \circ g|_V$. Como f es foliada $f(L) \subset L'$ hoja de $\mathcal{F}'$ y podemos considerar $f|_L \colon L \to L'$ con lo que $i'_{L'} \circ f|_L = f \circ i_L$ y

$$i' \circ a' = i' \circ f|_L \circ a \circ g|_V = f \circ i \circ a \circ g|_V \simeq_{\mathcal{F}} f \circ i_U \circ g|_V = f \circ g \circ i_V \simeq_{\mathcal{F}} id \circ i_V = i_V.$$

Por lo que V es transversalmente categórico para $(N, \mathcal{F}')$. Luego $\operatorname{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) \geq \operatorname{cat}_{\pitchfork}(N, \mathcal{F}')$. Invirtiendo el razonamiento, obtenemos la igualdad.

$\square$

Proposición 3.22 *1. Si $\mathcal{F}$ es una foliación por puntos, entonces* $\mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) = \mathrm{cat} M$.

2. Si $\mathcal{F}$ es una foliación por una única hoja, entonces $\mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) = 1$.

Dem:

1. U es $\pitchfork$-categórico sii el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(U, \mathcal{F}_U) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & (M, \mathcal{F}) \\
& * \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta bajo homotopía sii U es categórico.

2. Como $L = M$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(M, \mathcal{F}) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & (M, \mathcal{F}) \\
& (M, \mathcal{F}) \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta bajo homotopía foliada y M es transversalmente categórico.

Proposición 3.23 *Si V es $\pitchfork$-categórico y saturado entonces $\pi(V)$ es categórico para $M/\mathcal{F}$.*

Dem: Sea $H \colon V \times R \to M$ la homotopía foliada entre la inclusión i_V y $H_1 \colon V \to M$ tal que $H_1(V) \subset L_0$. Consideramos $\overline{H} \colon \pi(V) \times I \to M/\mathcal{F}$ tal que $\overline{H}(\pi(x), t) = \pi H(x, t)$:

$$\begin{tikzcd}
V \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi \times id"] & M \arrow[d, "\pi"] \\
\pi(V) \times I \arrow[r, "\overline{H}"] & M/\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

La aplicación $\overline{H}$ está bien definida: si $\pi(x) = \pi(y)$ entonces x e y pertenecen a la misma hoja de $\mathcal{F}$ y como V es saturado y H_t foliada, entonces $H_t(x)$ y $H_t(y)$ pertenecen también a una misma hoja de $\mathcal{F}$, con lo que $\pi H(x,t) = \pi H(y,t)$.

Es continua pues $\overline{H}(\pi \times id_I) = \pi H$ es continua y $\pi \times id_I$ es una identificación.

Además $\overline{H}_0(\pi(x)) = \pi H_0(x) = \pi(x)$ y $\overline{H}_1(\pi(x)) = \pi H_1(x) = \pi(L_0) =$ cte, luego $\pi(V)$ es categórico para $M/\mathcal{F}$.

□

Y si V es abierto, $\pi(V)$ también lo es.

Corolario 3.24 *Si* $\operatorname{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) = 1$ *entonces* $M/\mathcal{F}$ *es contráctil.*

Observación 3.25 *Si* V *es transversalmente categórico,* $\pi(V)$ *no es necesariamente categórico.*

Proposición 3.26 *Si* $\pi\colon M \to M/\mathcal{F}$ *es un fibrado localmente trivial diferenciable, entonces*

$$\operatorname{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) \leq \operatorname{cat} M/\mathcal{F}.$$

Dem: Sea V abierto categórico para $M/\mathcal{F}$, veré que $\pi^{-1}(V)$ es transversalmente categórico para $(M, \mathcal{F})$. Llamamos $U = \pi^{-1}(V)$. Sea $\overline{H}\colon V \times R \to M/\mathcal{F}$ una homotopía diferenciable entre la inclusión i_V y la aplicación constante. Sea $H = \overline{H}(\pi|_U \times id)$, entonces $H_0 = \pi|_U$, $H_1 =$ cte y $\pi i = Hi$. Por la Propiedad de levantamiento de homotopías para el abierto U de M, existe $\tilde{H}\colon U \times R \to M$ diferenciable tal que $\tilde{H}_0 = i_U$ y $\pi\tilde{H} = H$

$$\begin{tikzcd}
U \times \{0\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"] & M \arrow[d, "\pi"] \\
U \times I \arrow[ur, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"] & M/\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

$\tilde{H}_t$ es foliada: si $x, y \in L$ hoja de $\mathcal{F}_U$, entonces $\pi(x) = \pi(y)$ y

$$\pi\tilde{H}_t(x) = H_t(x) = \overline{H}_t\pi(x) = \overline{H}_t\pi(y) = H_t(y) = \pi\overline{H}_t(y)$$

de donde $\tilde{H}_t(x)$ y $\tilde{H}_t(y)$ pertenecen a la misma hoja.
$\tilde{H}_0 = i_U$ y $\tilde{H}_1(U) \subset L_0$ pues $\pi\tilde{H}_1(U) = H_1(U) =$ cte.
Por lo que U es abierto transversalmente categórico para $(M, \mathcal{F})$.

□

Teorema 3.27 $\mathrm{cat} M \leq \mathrm{cat} L \ \mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F})$ *donde* L *es una hoja de categoría máxima.*

Dem: Sea $U \subset M$ un abierto $\pitchfork$-categórico y $H\colon U \times R \to M$ la homotopía foliada tal que $H_0 = i_U$ y $H_1(U) \subset L'$. Como L' es una subvariedad débilmente embebida en M tenemos que la aplicación $\varphi = H_1\colon U \to (L, \tau_p)$ es continua.

Sea $V \subset L'$ un abierto categórico para L' y $G\colon V \times R \to L$ la contracción tal que $G_0 = i_V$ y $G_1 = \mathrm{cte}$.

Consideramos $W = \varphi^{-1}(V) \subset U$ abierto en M. Veremos que es categórico. Definimos $F\colon W \times R \to M$ como

$$F(x,t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ G(\varphi(x), 2t-1), & \text{si } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Está bien definida y es continua ya que $\varphi\colon W \to V$ lo es. Además $F_0 = H_0|_W = i_W$ y $F_1 = G_1\varphi|_W = \mathrm{cte}$.

Con lo que cada abierto $\pitchfork$-categórico U puede recubrirse por n_L abiertos categóricos para M, donde n_L es la categoría de la hoja en la que se deforma U.

□

Si $\mathcal{F}$ está definida por un fibrado localmente trivial de fibra F y base B, tenemos que para toda hoja L, $\mathrm{cat} L = \mathrm{cat} F$ y además $\mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) \leq \mathrm{cat} B$ por la Proposición 3.26. Luego el teorema anterior generaliza el teorema de Varadarajan (Teorema 2.4).

Corolario 3.28 $\mathrm{cat} M \leq \mathrm{cat}_t(M, \mathcal{F}) \mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F})$.

Observaciones 3.29

1. *Si todas las hojas de la foliación son contráctiles, entonces*
$$\mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) \geq \mathrm{cat} M.$$

2. *Si* $\mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) = 1$ *y las hojas son contráctiles, entonces* M *es contráctil.*

3. *Si* $\mathrm{cat}_t(M, \mathcal{F}) = \mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) = 1$ *entonces* M *es contráctil.*

Proposición 3.30 *Si* U *es* $\pitchfork$ *-categórico entonces* $i^*\colon \tilde{H}^*_b(M) \to \tilde{H}^*_b(U)$ *es idénticamente nula.*

Dem: $(L, \mathcal{F}_L)$ es una variedad foliada por una sola hoja y $\pi\colon L \to L/\mathcal{F}_L = *$ es una foliación simple con lo cual $H^*_b(L) = H^*_{DR}(*) = 0$ y la inclusión factoriza por cero.

$\square$

Denotamos $k\colon \Omega^*{}_b(M) \hookrightarrow \Omega^*(M)$ la inyección de la subálgebra de formas diferenciales básicas para $\mathcal{F}$ en el álgebra de todas las formas diferenciales sobre M.

Teorema 3.31 $\mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) \geq \mathrm{nilk}^*(\tilde{H}^*_b(M))$.

Dem: Consideramos el siguiente diagrama conmutativo para el par (M, U), con U abierto $\pitchfork$ -categórico:

$$\begin{tikzcd}
H^r_b(M,U) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"] & H^r(M,U) \arrow[d, "c"] \\
H^r_b(M) \arrow[r, "k^*"] \arrow[d, "\equiv 0"] & H^r(M) \\
H^r_b(U) &
\end{tikzcd}$$

$cb = k^*a$ y por exactitud a es sobre. Sean $\{U_1, \ldots, U_n\}$ recubrimiento de M por abiertos $\pitchfork$ -categóricos y $x_1, \ldots, x_n$ elementos de $k^*(\tilde{H}^*_b(M))$. Para cada x_i existe $y_i \in H^r_b(M)$ tal que $k^*(y_i) = x_i$ y como a es sobre, para cada y_i existe $z_i \in H^r_b(M, U_i)$ tal que $a(z_i) = y_i$. Entonces $x_i = k^*(y_i) = k^*a(z_i) = cb(z_i)$ y el producto

$$x_1 \cdots x_n = c(b(z_1) \bullet \cdots \bullet b(z_n)).$$

Como $b(z_i) \in H^*(M, U_i)$ entonces $b(z_1) \bullet \cdots \bullet b(z_n) \in H^*(M, M) = 0$. Con lo que $x_1 \cdots x_n = 0$ y $\mathrm{nilk}^*(\tilde{H}^*_b(M)) \leq n$.

$\square$

Proposición 3.32 $\mathrm{nilk}^*(\tilde{H}_b^*(M)) \leq n+1$ *donde* $n = \mathrm{codim}\mathcal{F}$.

Dem: $\forall r > \mathrm{codim}\mathcal{F}$ se cumple que $H_b^r(M) = 0$. Si $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \tilde{H}_b^*(M)$ su producto pertenece a $H_b^r(M)$ con $r \geq n+1$, luego es cero y $\mathrm{nil}\tilde{H}_b^*(M) \leq n+1$. Además $\mathrm{nilk}^*(\tilde{H}_b^*(M)) \leq \mathrm{nil}\tilde{H}_b^*(M)$ pues $\forall b_i \in k^*(\tilde{H}_b^*(M))$ existe $a_i \in H_b^*(M)$ tal que $k^*(a_i) = b_i$ y el producto $b_1 \cdots b_n = k^*(a_1 \cdots a_n) = k^*(0) = 0$.

□

Sea ahora $\mathcal{F}'$ otra foliación en M de codimensión m, i.e. $\mathrm{codim}\mathcal{F}' = \dim\mathcal{F}$. Diremos que $\mathcal{F}'$ es transversa a $\mathcal{F}$ y denotamos $\mathcal{F}' = \mathcal{F}^{\pitchfork}$ si dos hojas cualesquiera $L \in \mathcal{F}$ y $L' \in \mathcal{F}'$ tales que $L \cap L' \neq \emptyset$ son subvariedades transversas.

Observación 3.33 *En general no es cierto que la categoría tangente de una foliación* $\mathcal{F}$ *coincida con la categoría transversa de* $\mathcal{F}^{\pitchfork}$.

Como se verá en la sección 3.6 la categoría tangente de cualquier foliación en el toro T^2 es 2. Y la categoría transversa del flujo lineal $\mathcal{F}_\alpha$ con $\alpha \notin Q$ es 3 por estar acotada inferiormente por la categoría LS de T^2. Considerando $\beta \in Q$ tenemos que $\mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_\alpha^{\pitchfork}$ y las categorías no coinciden.

3.3.1 G-categoría

Sea G un grupo de Lie compacto y X un G-espacio. Un subconjunto G-invariante U es G-categórico si la inclusión $i\colon U \subset X$ es G-homótopa a una aplicación $a\colon U \to X$ tal que $a(U)$ esté contenido en alguna órbita G/H, con H subgrupo de isotropía.

Definición 3.34 *[24] Llamamos* G*-categoría de* X, $\mathrm{cat}_G X$, *al menor entero* k *tal que* X *se puede recubrir por* k *subconjuntos abiertos* G*-categóricos. Si no existe tal entero,* $\mathrm{cat}_G = \infty$.

Proposición 3.35 *Si* $\mathcal{F}$ *está definida por una acción localmente libre de* G *sobre* M *entonces* $\mathrm{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F}) \leq \mathrm{cat}_G^\infty M$.

Dem: Sea U un abierto G-categórico. Entonces $\exists a\colon U \to X$ tal que $a(U) \subset G/H = L$ y $i_U \simeq_G a$. H es una G-homotopía sii H_t es G-equivariante sii $H_t(gx) = gH_t(x)$ para todo t. Entonces $H_t(L) \subset L' \quad \forall t$, con lo que la homotopía es foliada y U es $\pitchfork$-categórico.

□

3.4 Foliaciones compactas-Hausdorff

Sea $\tilde{L}\times_G D \to D/G$ un fibrado de Seifert producto, $p\colon D \to D/G$ y $p'\colon \tilde{L}\times D \to \tilde{L}\times_G D$ las proyecciones en el cociente:

$$\begin{tikzcd} \tilde{L}\times D \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "p_2"] & \tilde{L}\times_G D \arrow[d] \\ D \arrow[r, "p"] & D/G \end{tikzcd}$$

Proposición 3.36 *Si $\pi\colon M \to M/\mathcal{F}$ es un fibrado de Seifert producto entonces*

$$\mathrm{cat}_t(M,\mathcal{F}) = \mathrm{cat}L.$$

Dem: Sabemos que $\mathrm{cat}L \leq \mathrm{cat}_t(M,\mathcal{F})$. Además sabemos que existe un difeomorfismo foliado entre $(M,\mathcal{F})$ y $\tilde{L}\times_G D$ con la foliación dada por hojas de la forma $p'(\tilde{L}\times d)$ con $d \in D$.

Como G actúa libremente sobre $\tilde{L}$, tenemos que $\mathrm{cat}_G\tilde{L} = \mathrm{cat}L$ [24]. Veremos que $\mathrm{cat}_t(\tilde{L}\times_G D) \leq \mathrm{cat}_G\tilde{L}$.

Sea $J \subset \tilde{L}$ abierto G-categórico para $\tilde{L}$ y $H\colon J\times R \to \tilde{L}$ la homotopía equivariante tal que $H_0 = i_J$, $H_1 = \text{cte}$ y $H_t(xg) = H_t(x)g \quad \forall g \in G$.

Defino $\tilde{H}\colon (J\times_G D)\times R \to \tilde{L}\times_G D$ como

$$\tilde{H}_t([x,d]) = [H_t(x),d]$$

(notación: $[x,d] = p'(x,d)$). Está bien definida:

$$\tilde{H}_t([xg^{-1},gd]) = [H_t(xg^{-1}),gd] = [H_t(x)g^{-1},gd] = [H_t(x),d].$$

Además

$$\tilde{H}_0[x,d] = [H_0(x),d] = [x,d]$$

$$\tilde{H}_1[x,d] = [H_1(x),d] = [\text{cte},d]$$

con lo que $\tilde{H}_1$ es constante en las hojas de la foliación restringida a $J\times_G D$.

Como $\tilde{H}([x,\text{cte}],t) = [H(x,t),\text{cte}]$, tenemos que $\tilde{H}$ es integrable.

Luego $J\times_G D$ es t-categórico para $\tilde{L}\times_G D$ y $\mathrm{cat}_t(\tilde{L}\times_G D) \leq \mathrm{cat}_G\tilde{L}$.

$\square$

Sea $(M, \mathcal{F})$ una foliación compacta-Hausdorff. Llamamos $n_{\mathcal{S}}$ al número de S-abiertos de trivialidad del S-recubrimiento $\mathcal{S}$ de $M/\mathcal{F}$.

Corolario 3.37 *Si $\mathcal{F}$ es una foliación compacta-Hausdorff entonces*

$$\mathrm{cat}_t(M, \mathcal{F}) \leq n_{\mathcal{S}} \, \mathrm{cat} L.$$

Sean $H\colon D \times R \to D$ y $f\colon \tilde{L} \times D \to \tilde{L} \times D$ equivariantes y $\overline{H}\colon D/G \times R \to D/G$, $\overline{f}\colon \tilde{L} \times_G D \to \tilde{L} \times_G D$ tales que $pH = \overline{H}(p \times id_R)$, $p'f = \overline{f}p'$ y $pr_D \circ f = H_0 \circ pr_D$:

$$\begin{tikzcd} D \times R \arrow[r, "H"] \arrow[d, "p \times id"] & D \arrow[d, "p"] \\ D/G \times R \arrow[r, "\overline{H}"] & D/G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde{L} \times D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p'"] & \tilde{L} \times D \arrow[d, "p'"] \\ \tilde{L} \times_G D \arrow[r, "\overline{f}"] & \tilde{L} \times_G D \end{tikzcd}$$

Lema 3.38 *En las condiciones anteriores, si π es un fibrado de Seifert producto levanta la homotopía $\overline{H}(\pi \times id_R)$ a una homotopía foliada $\tilde{H}\colon (\tilde{L} \times_G D) \times R \to \tilde{L} \times_G D$ tal que $\pi\tilde{H} = \overline{H}(\pi \times id_R)$ y $\tilde{H}_0 = \overline{f}$.*

Dem: Como π es un fibrado de Seifert producto, tenemos que $\pi[l, d] = p(d)$. Defino $\tilde{H}([l, d], t) = [pr_{\tilde{L}} \circ f(l, d), H(d, t)]$:

$$\begin{tikzcd} \tilde{L} \times_G D \times R \arrow[r, "\tilde{H}"] \arrow[d, "\pi \times id"] & \tilde{L} \times_G D \arrow[d, "\pi"] \\ D/G \times R \arrow[r, "\overline{H}"] & D/G \end{tikzcd}$$

Está bien definida: Si $[l, d] = [l', d']$ entonces $l' = lg^{-1}$ y $d' = gd$. $H(gd, t) = gH(d, t)$ por ser H equivariante y como f es equivariante

$$pr_{\tilde{L}} \circ f(lg^{-1}, gd) = pr_{\tilde{L}} gf(l, d) = pr_{\tilde{L}} g(pr_{\tilde{L}} f(l, d), pr_D f(l, d) = pr_{\tilde{L}}(f(l, d))g^{-1}$$

luego $[pr_{\tilde{L}} \circ f(lg^{-1}, H(gd, t)] = [pr_{\tilde{L}}(f(l, d))g^{-1}, gH(d, t)]$.

$\tilde{H}$ es diferenciable pues $\tilde{H}(p' \times id_R)$ lo es y $p' \times id_R$ es una submersión sobreyectiva. Además:

$$\begin{aligned} \pi\tilde{H}([l, d], t) &= \pi[pr_{\tilde{L}} \circ f(l, d), H(d, t)] = p(H(d, t)) \\ &= \overline{H}(p \times id)(d, t) = \overline{H}(p(d), t) \\ &= \overline{H}(\pi[l, d], t) = \overline{H}(\pi \times id)([l, d], t) \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}\tilde{H}_0([l,d]) &= [pr_{\tilde{L}}\circ f(l,d), H(d,0)] = [pr_{\tilde{L}}\circ f(l,d), H(pr_D(l,d),0)]\\ &= [pr_{\tilde{L}} f(l,d), pr_D f(l,d)] = [f(l,d)]\\ &= \overline{f}[l,d].\end{aligned}$$

y $\tilde{H}$ es foliada: sea $L = \{[l,d] \mid p(d) = \text{cte}\}$ una hoja de la foliación dada por el fibrado de Seifert π. Dado $t \in R$, es $\tilde{H}_t[l,d] = [pr_{\tilde{L}} f(l,d), H_t(d)]$ y si $p(d) = \text{cte}$ entonces $pH_t(d) = \overline{H}_t(p(d)) = \text{cte}$ con lo que $\tilde{H}_t[l,d]$ pertenece a una misma hoja para todo $[l,d] \in L$.

□

Proposición 3.39 *Si* D/G *es un S-abierto de trivialidad entonces* $\tilde{L}\times_G D$ *es* $\pitchfork$ *-categórico.*

Dem: Sea $H\colon D\times R \to D$ una contracción equivariante al origen y $f = id\colon \tilde{L}\times D \to \tilde{L}\times D$.

Como $f = id_{\tilde{L}\times D}$ y $H_0 = id_D$ tenemos que $pr_D f = H_0 pr_D$.

Consideramos $\overline{H}\colon D/G\times R \to D/G$ como antes y por el Lema 3.38 existe $\tilde{H}\colon (\tilde{L}\times_G D)\times R \to \tilde{L}\times_G D$ foliada tal que $\pi\tilde{H} = H(\pi\times id)$ y $\tilde{H}_0 = id$.

Además $\pi\tilde{H}_1[l,d] = p(0)$ con lo que $\tilde{H}_1[l,d] \in L_0 \quad \forall [l,d] \in \tilde{L}\times_G D$ donde $L_0 = \pi^{-1}(p(0))$.

□

Corolario 3.40 *Cada hoja de una foliación compacta-Hausdorff admite un entorno saturado transversalmente categórico.*

Proposición 3.41 *Si* $\mathcal{F}$ *es una foliación compacta-Hausdorff entonces*

$$\text{cat}_{\pitchfork}(M,\mathcal{F}) \leq n_{\mathcal{S}}.$$

Corolario 3.42 *Si* $(M,\mathcal{F})$ *es un fibrado de Seifert producto entonces*

$$\text{cat}_{\pitchfork}(M,\mathcal{F}) = 1.$$

Observación 3.43

$$\text{cat}\tilde{L}\times_G D = \text{cat}L$$

ya que $\text{cat}L \leq \text{cat}\tilde{L}\times_G D \leq \text{cat}_t(\tilde{L}\times_G D)\ \text{cat}_{\pitchfork}(\tilde{L}\times_G D) = \text{cat}L$.

3.5 Suspensiones

Utilizaremos la misma notación que en **??**.

Proposición 3.44 $\mathrm{cat}\tilde{M} \leq \mathrm{cat}_t(\tilde{M} \times_h F, \mathcal{F}) \leq \mathrm{cat}M.$

Dem: Sea L una hoja de $\mathcal{F}$. Por la Proposición 3.10 tenemos que $\mathrm{cat}L \leq \mathrm{cat}_t(\tilde{M} \times_h F, \mathcal{F})$ y como $\tilde{M}$ es una cubierta de L, $\mathrm{cat}\tilde{M} \leq \mathrm{cat}L$.

Sea ahora $U \subset M$ abierto categórico y $H\colon U \times R \to M$ tal que $H_0 = i_U$ y $H_1 = $ cte.

Si $q\colon \tilde{M} \to M$ es la cubierta universal, sea $\tilde{U} = q^{-1}(U)$ y $\tilde{H}\colon \tilde{U} \times R \to \tilde{M}$ un levantamiento equivariante de H.

Considero en $\tilde{M} \times F$ el abierto $\tilde{U} \times F$ y la homotopía

$$G\colon (\tilde{U} \times F) \times R \to \tilde{M} \times F$$

dada por $G((x, y), t) = (\tilde{H}(x, t), y)$.

G es una homotopía integrable para la foliación horizontal e invariante por la acción de $\pi_1(M, x_0)$ por lo que pasa al cociente en una homotopía integrable para la suspensión $(\tilde{M} \times_h F, \mathcal{F})$:

$$\overline{G}\colon V \times R \to \tilde{M} \times_h F$$

dada por $\overline{G}([x, y], t) = [G(x, t), y]$ y donde V es la imagen en el cociente de $\tilde{U} \times F$.

Además $\overline{G}_0 = i_{\overline{U}}$ y $\overline{G}_1$ es constante en las hojas de $\mathcal{F}_{\overline{U}}$.

Luego $\overline{U}$ es t-categórico para $(\tilde{M} \times_h F, \mathcal{F})$.

$\square$

Si consideramos ahora recubrimientos por abiertos $\pitchfork$-categóricos podemos definir la categoría transversa saturada, $\mathrm{cat}^{s}_{\pitchfork}M$, que es una cota superior de la categoría transversa (ver Capítulo 5).

Proposición 3.45

$$\mathrm{cat}(F/\sim) \leq \mathrm{cat}^{s}_{\pitchfork}(\tilde{M} \times_h F) \leq \mathrm{cat}_G F$$

donde $G = \pi_1(M, x_0)$ *y* $F/\sim$ *es el espacio de órbitas de la acción de* G *sobre* F.

Dem: Por la Proposición 3.23 tenemos que $\text{cat} F/\sim \leq \text{cat}_{\pitchfork}^{s} \tilde{M} \times_h F$.

Sea U un abierto G-categórico para F y $H\colon U \times R \to F$ la G-homotopía tal que $H_0 = i_U$ y $H_1(U) \subset G/H$ órbita de la acción.

Considero el abierto $\tilde{M} \times U \subset \tilde{M} \times F$ y una homotopía

$$\tilde{H}\colon (\tilde{M} \times U) \times R \to \tilde{M} \times F$$

dada por $\tilde{H}((x, y), t) = (x, H(y, t))$.

Como antes, $\tilde{H}$ pasa al cociente y tenemos en la suspensión un abierto $\pitchfork$ -categórico y saturado.

$\square$

3.6 Ejemplos de cálculo de categorías tangente y transversa

3.6.1 Foliaciones en T^2

Enunciaré una serie de resultados conocidos sobre las foliaciones en el toro [16]. Sea $\mathcal{F}$ una foliación de dimensión 1 en T^2.

Proposición 3.46

1. *$\mathcal{F}$ es una suspensión sii existe alguna transversal total cerrada.*

2. *Toda foliación en $S^1 \times \mathrm{I}$ tangente al borde se obtiene pegando un número finito de componentes de Reeb y un número finito de suspensiones.*

3. *Si $\mathcal{F}$ contiene alguna componente de Reeb entonces se obtiene de la foliación anterior identificando los bordes por un homeomorfismo que preserve la orientación.*

Proposición 3.47 *$\mathcal{F}$ es una suspensión o contiene una componente de Reeb.*

Y ahora calculamos la categoría tangente de todas las foliaciones en el toro.

$\mathcal{F}$ es una suspensión

Sea $f \in \mathrm{Diff}(S^1)$ tal que $T^2 = R \times_f S^1$ y $p\colon R \times S^1 \to T^2$ es la proyección en el cociente (notación: $p(s,x) = [s,x]$). Sean $m_i = p(\{s_i\} \times S^1)$, $i = 1,2$ dos transversales totales con $s_i \neq 1$, $i = 1,2$. Los abiertos $U_i = T^2 - m_i$, $i = 1,2$ serán t-categóricos considerando las homotopías $H_i\colon U_i \times R \to T^2$ tales que

$$H_i([s,x],t) = [s(1-t)+t,x].$$

H_i está bien definida en $U_i \times R$ para $i = 1,2$ y es integrable. Además $(H_i)_0([s,x]) = [s,x]$ y $(H_i)_1([s,x]) = [1,x]$ con lo que $(H_i)_0 = i_{U_i}$ y $(H_i)_1 = c$, constante en cada hoja de $\mathcal{F}_{U_i}$. Por lo que $\mathrm{cat}_t(T^2,\mathcal{F}) \leq 2$.

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_R$ foliación de Reeb en T^2

La idea de este ejemplo se la debemos al Profesor Paul Schweitzer.

Sea $R^2_* = R^2 - \{0\}$ y $pr_2\colon R^2_* \to R$ la segunda proyección.

Definimos una acción de Z sobre R^2_* generada por el difeomorfismo

$$\varphi\colon R^2_* \to R^2_* \quad , \quad v \mapsto \frac{1}{4}v.$$

La submersión pr_2 es equivariante por esta acción, por lo que la foliación horizontal determinada por pr_2 pasa al cociente.

Consideramos el dominio fundamental

$$H = \{(x,y) \in R^2_* \mid 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 4; y \geq 0\}$$

y tenemos que el cociente H/Z es homeomorfo a $S^1 \times \mathrm{I}$.

Diremos que la foliación determinada en $S^1 \times \mathrm{I}$ por la restricción a H de pr_2 es una componente de Reeb. Las hojas de la componente de Reeb son las imágenes en el cociente de las rectas $R \times \{y\}$, $y > 0$ y el borde $S^1 \times \{t\}$, $t = 0,1$.

Llamamos foliación de Reeb $\mathcal{F}_R$ en T^2 a la obtenida identificando las hojas del borde.

La aplicación cociente $p\colon H \to T^2$ es un submersión sobreyectiva por lo que si $U \subset H$ es un abierto t-categórico para la foliación horizontal en H (e invariante por la acción) entonces $V = p(U)$ es t-categórico para $\mathcal{F}_R$ en T^2. Es decir, si existe $c\colon U \to H$ foliada y constante en las placas tal que $c \simeq_{\mathcal{F}} i_U$, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{c} & H \\ \Big\downarrow p|_U & & \Big\downarrow p \\ V & \xrightarrow{\overline{c}} & T^2 \end{array}$$

con $pc = \overline{c}p|_U$, de donde $\overline{c}$ es diferenciable y V t-categórico.

Buscaremos entonces un recubrimiento de H por abiertos t-categóricos para la foliación horizontal.

Consideramos coordenadas polares (r, θ) en H. Sea $M = \{r_\theta \in H \mid \theta = \frac{\pi}{2}\}$ y $P = \{r_\theta \in H \mid r = r_0\}$ con $1 < r_0 < 4$.

Sea $U_1 = H - \{M \cup P\}$. Es un abierto foliado, luego es t-categórico.

Construiremos ahora un entorno U_2 de $M \cup P$. Para $\epsilon, \delta > 0$ y arbitrariamente pequeños definimos los subconjuntos:

$$A = \{r_\theta \mid \theta \in (\frac{\pi}{2} - \epsilon, \frac{\pi}{2} + \epsilon)\}$$

$$B = \{r_\theta \mid r \in (r_0 - \delta, r_0 + \delta)\}.$$

Sea $U_2 = A \cup B$.

Definimos $c\colon U_2 \to H$ tal que

$$c(x,y) = \begin{cases} (0, y) & \text{si } (x,y) \in A \text{ ó } y \geq r_\delta \\ (\pm(r_\delta - \sqrt{y(2r_\delta - y)}), y) & \text{si } (x,y) \in B \text{ y } \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} r_\delta \leq y \leq r_\delta \\ (\pm\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 r_\delta^2 - y^2}, y) & \text{si } (x,y) \in B \text{ y } 0 \leq y < \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} r_\delta \end{cases}$$

donde $r_\delta = (r_0 - \delta)\cos\epsilon$ es la ordenada del punto $(y_0 - \delta)_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}$.

La aplicación c es diferenciable, constante en las placas y compatible con la acción. Además c es homótopa foliada a la inclusión con la homotopía

$$G\colon U_2 \times R \to H \ , \ ((x,y),t) \mapsto (1-t)(x,y) + tc(x,y).$$

Luego $\{U_1, U_2\}$ es un recubrimiento de H por abiertos invariantes y t-categóricos por lo que $\{V_1, V_2\}$ con $V_i = p(U_i), \quad i = 1, 2$ es un recubrimiento de T^2 por abiertos t-categóricos para la foliación de Reeb con lo que $\text{cat}_t(T^2, \mathcal{F}_R) \leq 2$.

$\mathcal{F}$ contiene alguna componente de Reeb

Si $\mathcal{F}$ se obtiene pegando m suspensiones y n componentes de Reeb, sean M_i y P_i el meridiano y el paralelo de antes en cada componente de Reeb R_i, $i = 1, \cdots, m$ y P_j el paralelo dado por $r = r_0$ en cada suspensión S_j, $j = 1, \cdots, n$. Consideramos

$$P = \left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} P'_j \right)$$

paralelo en T^2 y el conjunto

$$A = P \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i \right).$$

Tenemos que $V_1 = T^2 - A$ es un abierto t-categórico de T^2 por ser unión disjunta de abiertos foliados.

Construimos ahora un entorno abierto V_2 del conjunto A como antes y resulta también t-categórico.

Luego $\{V_1, V_2\}$ es un recubrimiento t-categórico de T^2 y $\mathrm{cat}_t(T^2, \mathcal{F}) \leq 2$.

Categoría tangente

Sabemos que si $\mathcal{F}$ es una foliación por puntos, $\mathrm{cat}_t(T^2, \mathcal{F}) = 1$ y si $\mathcal{F}$ es una foliación por una sola hoja, $\mathrm{cat}_t(T^2, \mathcal{F}) = 3$.

Proposición 3.48 $\mathrm{cat}_t(T^2, \mathcal{F}) = 2$, *para todo flujo* $\mathcal{F}$ *en* T^2.

Dem: Las hojas de la foliación son o bien S^1 o bien R.

Si $\exists L = S^1$ entonces L no es contráctil y $\mathrm{cat}_t(T^2, \mathcal{F}) > 1$ por la Proposición 3.9.

Si $\exists L = R$ entonces L no es cerrada y $\mathrm{cat}_t(T^2, \mathcal{F}) > 1$ por la misma Proposición.

Por lo que $\mathrm{cat}_t(T^2, \mathcal{F}) \geq 2$ y con la otra desigualdad probada en los apartados anteriores, tenemos la igualdad.

□

3.6.2 Fibrados de Seifert

Cinta de Moebius

Considero $M = S^1 \times_{Z_2} R$ espacio de órbitas de la acción:

$$Z_2 \times (S^1 \times R) \to S^1 \times R$$

dada por $(1,(x,t)) \longmapsto (x+\frac{1}{2}, -t)$ y $\mathcal{F}$ la foliación determinada por el fibrado de Seifert $\pi\colon M \to R/Z_2$ tal que $\pi[x,t] = [t]$, donde $D = R$ y $\tilde{L} = S^1$ cubierta de $L = S^1$ de grupo $G = Z_2$.

Es un fibrado de Seifert producto, luego $\mathrm{cat}_{\pitchfork}(M,\mathcal{F}) = 1$ por el Corolario 3.42 y $\mathrm{cat}_t(M,\mathcal{F}) = \mathrm{cat}S^1 = 2$ por la Proposición 3.36.

En este caso $\mathrm{secat}M = 1$ ya que existe sección global y $\mathrm{cat}_B M = \mathrm{cat}_p M = 2$.

Fibración de Hopf generalizada

Sea $S^3 = \{(z_1,z_2) \in C^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ y $a,b \in Z$ tales que $(a,b) = 1$. Considero $S^2 = S^3/S^1$ espacio de órbitas de la acción:

$$S^1 \times S^3 \to S^3$$

$$(u,(z_1,z_2)) \longmapsto (u^a z_1, u^b z_2)$$

y $\mathcal{F}$ la foliación determinada por la proyección en el cociente $\pi\colon S^3 \to S^2$.

Considero $\{U,V\}$ recubrimiento de S^2 por S-abiertos de trivialidad, donde $U = S^2 - \{p_S\}$, $V = S^2 - \{p_N\}$ y la S-trivialización local está dada por:

$$(re^{it}, e^{is}) \mapsto re^{i(tp+sq)}$$

con $(p,q) = (-a,b)$ en U y $(p,q) = (b,-a)$ en V.

Luego $\mathrm{cat}_{\pitchfork}(S^3,\mathcal{F}) \leq 2$ por la Proposición 3.41 y como B $= S^2$ no es contráctil por el Corolario 3.24 tenemos que $\mathrm{cat}_{\pitchfork}(S^3,\mathcal{F}) > 1$ de donde $\mathrm{cat}_{\pitchfork}(S^3,\mathcal{F}) = 2$.

Como $\mathrm{cat}L = \mathrm{cat}S^1 = 2$, tenemos que $\mathrm{cat}_t(S^3,\mathcal{F}) \geq 2$ (3.10) y como $n_{\mathcal{S}} = 2$ para el recubrimiento anterior tenemos:

$$2 \leq \mathrm{cat}_t(S^3,\mathcal{F}) \leq 4$$

por el Corolario 3.37.

Chapter 4

Hojas críticas

4.1 Hojas críticas de una función básica

Recordamos que una función diferenciable $f\colon M \to R$ es básica si $Yf = 0$ para todo $Y \in X(\mathcal{F})$ y $C^\infty_b(M)$ es el subanillo de $C^\infty(M)$ de las funciones básicas.

Dados $f \in C^\infty_b(M)$, $c \in R$, definimos los siguientes subconjuntos de M:

$$
\begin{aligned}
K &= \{p \in M \mid df_p = 0\}\\
K_c &= K \cap f^{-1}(c)\\
M_c &= f^{-1}(-\infty, c]
\end{aligned}
$$

Proposición 4.1 *Los subconjuntos K, K_c y M_c son cerrados en M y saturados para $\mathcal{F}$.*

Dem: M_c y $f^{-1}(c)$ son cerrados y saturados pues $f \in C^\infty_b(M)$. Veré que K es cerrado y saturado, luego lo es también K_c.

K es cerrado: sea $\{p_n\} \subset K$ tal que $\lim p_n = p$. Considero el campo de vectores $X\colon M \to TM$. Como $p_n \in K$ entonces $df_{p_n}(X_{p_n}) = 0$ y como $df \circ X$ es continua entonces

$$\lim df \circ X(p_n) = df \circ X(p).$$

Pero $df \circ X(p_n) = 0$ con lo que $df_p(X_p) = 0$ y $p \in K$.

K es saturado: sea $L \in \mathcal{F}$ tal que $A = K \cap L \neq \emptyset$.

A es cerrado en L pues K es cerrado en M lo que implica que A es cerrado para la topología inducida que es menos fina que la topología de variedad de L. Veré que A también es abierto en L. Dado $p \in A$ considero (U, φ) carta foliada en p con coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)$. Para todo $z \in U$ tenemos que $d(f\varphi^{-1})_{\varphi(z)} = df_z \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(z)}$. Como $df_p = 0$ entonces $d(f\varphi^{-1})_{\varphi(p)} = 0$. Luego $\forall i = 1, \ldots, m, \quad \forall \alpha = 1, \ldots, n,$

$$\frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial x^i}(\varphi(p)) = 0 \text{ y } \frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial y^\alpha}(\varphi(p)) = 0$$

y como $f\varphi^{-1}$ es básica para la foliación horizontal en $\varphi(U)$ entonces también lo son $\partial f\varphi^{-1}/\partial x^i$ y $\partial f\varphi^{-1}/\partial y^\alpha$ con lo cual tenemos que son aplicaciones constantes en las imágenes de las placas de U. Luego

$$\frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial x^i}(\varphi(z)) = 0 \text{ y } \frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial y^\alpha}(\varphi(z)) = 0$$

para todo $z \in P$, placa por P y $df_z = 0 \quad \forall z \in P$. Entonces $P \subset A$ con lo que A es abierto en L que es conexo y $A = L$.

$\square$

Definición 4.2 *Diremos que una hoja* $L \in \mathcal{F}$ *es crítica si* $L \subset K$.

Por la proposición anterior, basta que contenga un punto crítico.

4.2 Categoría transversa saturada

Sea A un subconjunto saturado de M para $\mathcal{F}$.

Definición 4.3 *Llamamos categoría transversa saturada de* A*,* $\operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork} A$*, al menor entero* k *tal que* A *se puede recubrir por* k *subconjuntos abiertos saturados y transversalmente categóricos para* M*. Si no existe tal entero,* $\operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork} A = \infty$*.*

Evidentemente, $\operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork} M \geq \operatorname{cat}_{\pitchfork}(M, \mathcal{F})$.
Ejemplo: Si $\mathcal{F}_\alpha$ es la foliación lineal en el toro T^2 con $\alpha \notin Q$, entonces $\operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork}(T^2) = \infty$ mientras que $\operatorname{cat}_{\pitchfork}(T^2, \mathcal{F}_\alpha) = 3$.

Como consecuencia de las proposiciones 3.23 y 3.26 tenemos:

Proposición 4.4 *Si* $\pi\colon M \to M/\mathcal{F}$ *es un fibrado localmente trivial diferenciable entonces*

$$\operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork} M = \operatorname{cat} M/\mathcal{F}.$$

Definición 4.5 *Dados dos subespacios saturados* A *y* B *en* M*, decimos que* A *es* $\pitchfork$ *-deformable en* B *si existe una homotopía foliada* $H\colon M \times R \to M$ *tal que* $H_0|_A = i_A$ *y* $H_1(A) \subset B$*.*

Propiedades 4.6 *Si* A *y* B *son dos subespacios saturados, la categoría transversa saturada verifica*

1. *monotonía: si* $A \subset B$ *entonces* $\operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork} A \leq \operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork} B$
2. *subaditividad:* $\operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork}(A \cup B) \leq \operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork} A + \operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork} B$
3. *invariancia: si* A *es* $\pitchfork$ *-deformable en* B *entonces* $\operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork} A \leq \operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork} B$*.*

4.3 Condiciones de Palais-Smale

Definición 4.7 *Diremos que una función* $f \in C^{\infty}_{b}(M)$ *verifica las condiciones de deformación transversa de Palais-Smale (* $\pitchfork$ *-PS) si se cumple:*

1. $\forall c \in R$ *valor regular de* f*,* $\exists \epsilon > 0$ *tal que* $M_{c+\epsilon}$ *es* $\pitchfork$ *-deformable en* $M_{c-\epsilon}$*;*
2. $\forall c \in R$ *valor crítico de* f*,* $\forall U$ *entorno saturado de* K_c*,* $\exists \epsilon > 0$ *tal que* $M_{c+\epsilon} - U$ *es* $\pitchfork$ *-deformable en* $M_{c-\epsilon}$*.*

Definición 4.8 *Una variedad foliada* $(M, \mathcal{F})$ *es* $\pitchfork$ *-localmente contráctil si toda hoja* $L \in \mathcal{F}$ *tiene un entorno saturado y* $\pitchfork$ *-categórico.*

Por ejemplo, las foliaciones compactas-Hausdorff son $\pitchfork$ -localmente contráctiles 3.40.

Lema 4.9 *Sea* $(M, \mathcal{F})$ $\pitchfork$ *-localmente contráctil. Si* $A = L_1 \cup \cdots \cup L_r$ *es unión de hojas entonces* $\operatorname{cat}^{s}_{\pitchfork} A \leq r$*.*

Dem: Para cada hoja L_k, existe un entorno U_k saturado y $\pitchfork$ -categórico con lo que $A \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r$.

$\square$

Para todo $m \in N$, $m \leq \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M$ definimos

$$c_m(f) = \mathrm{inf}\{a \in R \mid \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_a \geq m\}$$

Lema 4.10 *Si* $f \in C_b^\infty(M)$ *verifica las condiciones* $\pitchfork$ *-PS entonces:*

1. $-\infty < c_m(f) < \infty \Rightarrow c_m(f)$ *es valor crítico*
2. $-\infty < c_m(f) = c_n(f) = c < \infty$ *con* $m < n \Rightarrow \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} K_c \geq n - m + 1$.

Dem:

1. Suponemos que $c_m(f) = c$ es valor regular, entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $M_{c+\epsilon}$ es $\pitchfork$ -deformable en $M_{c-\epsilon}$. Como $c + \epsilon \geq c = \mathrm{inf}\{a \in R \mid \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_a \geq m\}$ entonces $\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_{c+\epsilon} \geq m$. Además $\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_{c-\epsilon} < m$ con lo que

$$m \leq \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_{c+\epsilon} \leq \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_{c-\epsilon} < m$$

   y c no puede ser valor regular.

2. Podemos suponer que $\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} K_c < \infty$, entonces $K_c \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k = U$ con $U_i, \quad i = 1, \ldots, k$ saturado y $\pitchfork$ -categórico. Luego $\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} K_c = \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} U$.

   Como c es valor crítico de f y U entorno saturado de K_c, $\exists \epsilon > 0$ tal que $M_{c+\epsilon} - U$ es $\pitchfork$ -deformable en $M_{c-\epsilon}$ de donde

$$\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_{c+\epsilon} \leq \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_{c+\epsilon} \cup U \leq \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_{c+\epsilon} - U + \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} U \leq \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_{c-\epsilon} + \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} K_c$$

   (aplicando las Propiedades 4.6).

   Tenemos que $\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_{c+\epsilon} \geq n$ y $\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_{c-\epsilon} < m$ pues $c - \epsilon < c < c + \epsilon$, entonces

$$\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} K_c \geq \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_{c+\epsilon} - \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_{c-\epsilon} \geq n - (m - 1) = n - m + 1$$

$\square$

Teorema 4.11 *Si* $(M, \mathcal{F})$ *es* $\pitchfork$ *-localmente contráctil,* M *compacta y* $f \in C_b^\infty(M)$ *verifica las condiciones* $\pitchfork$ *-PS entonces* f *tiene al menos* $\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M$ *hojas críticas.*

Dem: Por ser M compacta y $\pitchfork$ -localmente contráctil, $\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M = k < \infty$.

Se tiene que $c_1(f) = \mathrm{ínf}\{a \in R \mid \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_a \neq 0\} = \mathrm{ínf} f(M)$ pues $\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_a = 0$ sii $M_a = \emptyset$.

Además $c_{m-1}(f) \leq c_m(f) \quad \forall m = 2, \ldots, k$ y

$$c_k(f) = \mathrm{ínf}\{a \in R \mid \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M_a \geq \mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} M\} \leq \sup f(M).$$

Como f está acotada, $-\infty < c_m(f) < \infty \quad \forall m = 1, \ldots, k$ y por el Lema 4.10, $c_m(f)$ es valor crítico.

Demostraré por inducción sobre m que la cantidad de hojas críticas que hay en $M_{c_m(f)}$ es al menos m. Para $m = 1$ es inmediato que existe al menos una hoja crítica L tal que $f(L) = c_1(f)$. Suponemos que hay al menos m hojas críticas en $M_{c_m(f)}$ para todo $m = 1, \ldots, n-1$. Como $c_{n-1} \leq c_n$ entonces $M_{c_{n-1}} \subset M_{c_n}$ y como por hipótesis de inducción en $M_{c_{n-1}}$ había al menos $(n-1)$ hojas críticas y $f^{-1}(c_n) \subset M_{c_n}$ tenemos la dos siguientes posibilidades.

Si $c_n \neq c_{n-1}$ entonces hay en M_{c_n} al menos una hoja más que no estaba en $M_{c_{n-1}}$, luego hay al menos n hojas críticas.

Si $c_n = c_{n-1}$, sea r el primer número natural tal que $c_r = c_n = c$. Entonces por el Lema 4.9 tenemos que la cantidad de hojas críticas en K_c es al menos $\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} K_c$ y por el Lema 4.10

$$\mathrm{cat}\,\overset{s}{\pitchfork} K_c \geq n - r + 1.$$

Si $r = 1$ resulta que hay al menos n hojas críticas en K_c y si $r > 1$ por hipótesis de inducción hay al menos $(r-1)$ hojas críticas en M_{c_r}. Como $c_{r-1} \neq c$, $M_{c_{r-1}} \cap K_c = \emptyset$ y en M_c hay al menos $(r-1) + (n-r+1) = n$ hojas críticas.

$\square$

4.4 Foliaciones compactas-Hausdorff

Veremos que una foliación compacta-Hausdorff en una variedad compacta verifica las condiciones $\pitchfork$ -PS.

En toda la sección $\mathcal{F}$ será una foliación compacta-Hausdorff en una variedad compacta M, g una métrica casi-fibrada para $\mathcal{F}$, $\|\quad\|$ la norma determinada por g, $f \in C_b^\infty(M)$ una función básica y $M^* = M - K$ el complementario del conjunto de puntos críticos. Podemos suponer que los puntos críticos son aislados.

Proposición 4.12 *Sea el campo* $Y = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|^2} \in X(M^*)$.

1. *Si* U *y* V *son abiertos saturados tales que* $\overline{V} \subset U \subset \overline{U} \subset M^*$ *existe* $X \in X(M, \mathcal{F})$ *tal que* $X = Y$ *en* V *y* $X = 0$ *en* $M - U$.

2. *Si* φ *es el flujo de* X *entonces* $f\varphi_p$ *es una función no decreciente para todo* $p \in M$ *y* $\forall s \leq 0$ *tal que* $\varphi_p[s, 0] \subset V$ *se tiene* $f\varphi_p(t) = f(p) + t$ *para todo* $t \in [s, 0]$.

Dem:

1. Como ∇f es un campo foliado (Proposición ??), tenemos que $\|\nabla f\|^2$ es una función básica. Luego como $X(M, \mathcal{F})$ es un módulo sobre el anillo de las funciones básicas tenemos que Y es un campo foliado en el abierto saturado M^*.

   Sea $k \colon U \to R$ tal que $k(p) = 1$ para todo $p \in U$. Como $\overline{V} \subset U$ y $k \in C_b^\infty(U, \mathcal{F}_U)$ por la Proposición ?? tenemos que existe $h \in C_b^\infty(M)$ tal que $h = 1$ en V y $h = 0$ en $M - U$.

   Defino $X = hY$. Está bien definido y es foliado ya que Y es foliado y h es básica.

2. $$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f\varphi_p(t)) &= X_{\varphi_p(t)} f \\ &= \langle X_{\varphi_p(t)}, \nabla f_{\varphi_p(t)} \rangle \\ &= \langle h\varphi_p(t) Y_{\varphi_p(t)}, \nabla f_{\varphi_p(t)} \rangle \\ &= h\varphi_p(t) \langle \frac{\nabla f_{\varphi_p(t)}}{\|\nabla f_{\varphi_p(t)}\|^2}, \nabla f_{\varphi_p(t)} \rangle \\ &= h\varphi_p(t) \geq 0 \end{aligned}$$

   luego $h\varphi_p(t)$ es no decreciente. Además $\forall s \leq 0$ tal que $\varphi_p[s, 0] \subset V$ tenemos que $\varphi_p(t) \in V \quad \forall t \in [s, 0]$ con lo que

   $$\frac{d}{dt}(f\varphi_p(t)) = h(\varphi_p(t)) = 1$$

   luego $f\varphi_p(t) - f(p) = t \quad \forall t \in [s, 0]$.

□

Proposición 4.13 *Para todo* c *valor regular de* f *existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $M_{c+\epsilon}$ *es* $\pitchfork$ *-deformable en* $M_{c-\epsilon}$.

Dem: Sea $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ tal que en $[c-4\epsilon, c+4\epsilon]$ no hay valores críticos. Luego $U = f^{-1}(c-3\epsilon, c+3\epsilon)$ y $V = f^{-1}(c-2\epsilon, c+2\epsilon)$ son abiertos saturados tales que $\overline{V} \subset U \subset \overline{U} \subset M^*$ y por la Proposición 4.12.1 existe $X \in X(M, \mathcal{F})$ tal que $X = Y$ en V y $X = 0$ en $M - U$.

Defino $H\colon M \times R \to M$ tal que

$$H(p,t) = \varphi(p,-t)$$

donde φ es el flujo de X.

H es foliada ya que φ_t lleva hojas en hojas por ser el flujo de un campo foliado y H_0 es la identidad en M.

Veremos que $H_1 M_{c+\epsilon} \subset M_{c-\epsilon}$.

Si $p \in M_{c-\epsilon}$, como $f\varphi_p$ es no decreciente tenemos que

$$fH_1(p) = f\varphi_{-1}(p) \leq f\varphi_0(p) \leq f(p) \leq c-\epsilon.$$

Si $p \in f^{-1}(c-\epsilon, c+\epsilon]$ entonces $c-\epsilon < f(p) \leq c+\epsilon$ y tenemos que probar que $fH_1(p) \leq c-\epsilon$. Suponemos que no lo es, es decir, $f\varphi_{-1}(p) > c-\epsilon$. Sabemos que $f\varphi_0(p) = f(p) \leq c+\epsilon$, luego $c-\epsilon < f\varphi_t(p) \leq c+\epsilon \quad \forall t \in [-1, 0]$, es decir $\varphi_p[-1,0] \subset f^{-1}(c-\epsilon, c+\epsilon] \subset V$ y por la Proposición 4.12.2

$$f\varphi_p(t) = f(p) + t \quad \forall t \in [-1, 0].$$

En particular $f\varphi_p(-1) = f(p) - 1$, entonces $f(p) - 1 > c - \epsilon$. Además $f(p) \leq c + \epsilon$, con lo que

$$c - \epsilon < f(p) - 1 \leq c + \epsilon - 1$$

y $\epsilon < \frac{1}{2}$, y tenemos una contradicción. Luego $f\varphi_{-1}(p) \leq c - \epsilon \quad \forall p \in M_{c+\epsilon}$ y $H_1(M_{c+\epsilon}) \subset M_{c-\epsilon}$.

□

Proposición 4.14 *Si* c *es valor crítico de* f*, para todo entorno saturado* U *de* K_c*,* $\exists \epsilon > 0$ *tal que* $M_{c+\epsilon} - U$ *es* $\pitchfork$ *-deformable en* $M_{c-\epsilon}$.

Dem: Sea $V_k = \{p \in M \mid \|\nabla f(p)\|^2 < \frac{1}{k}\}$ con $k \in N$.

Como $\|\nabla f\|^2 \in C_b^\infty(M, \mathcal{F})$ y $V_k = (\|\nabla f\|^2)^{-1}(-\infty, \frac{1}{k})$ tenemos que V_k es un entorno saturado de K.

Veremos que $\overline{V}_{k+1} \subset V_k$. Dado $p \in \overline{V}_{k+1}$ sea $\{p_n\} \subset V_{k+1}$ tal que $\lim p_n = p$ entonces $\lim \|\nabla f(p_n)\|^2 = \|\nabla f(p)\|^2$ y como $\|\nabla f(p_n)\| < \frac{1}{k+1}$ debe ser $\|\nabla f(p)\|^2 \leq \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$.

Sean los conjuntos saturados $C = M - V_k$ y $W = M - \overline{V}_{k+1}$. Tenemos que C es cerrado, W es abierto y $C \subset W$. Como M es normal existe un abierto A tal que $C \subset A \subset \overline{A} \subset W$. Luego $A_k = \text{sat}A$ es un abierto saturado. Como C es saturado, $C \subset A_k$. Ademaś $\overline{A} \subset W$ implica $\overline{A}_k \subset W$ por el Lema **??**.1. Con lo que $C \subset A_k \subset \overline{A}_k \subset W$. Aplicamos ahora la Proposición 4.12.1 a los abiertos saturados W y A_k y tenemos que existe $X_k \in X(M, \mathcal{F})$ tal que $X_k = Y$ en A_k y $X_k = 0$ en $\overline{V}_{k+1}$.

Sea ahora

$$U_k = \{p \in M : |f(p) - c| < \frac{1}{k} \text{ y } \varphi_p(t) \in V_k \text{ para algún } t \in [-\frac{1}{k}, 0]\}.$$

Veremos que para todo entorno saturado U de K_c existe $k \in N$ tal que $U_k \subset U$. Dado U entorno saturado de K_c, suponemos que U no contiene a ningún U_k. Entonces $\forall k \in N$ puedo elegir $p_k \in U_k$ tal que $p_k \notin U$ y tenemos una sucesión $\{p_k\}$ en la variedad compacta M. Luego tiene una subsucesión convergente, sea $\{p_n\}$ tal que $\lim p_n = q \in M$.

Como $\{p_n\} \subset M - U$ y $M - U$ es cerrado entonces $q \in M - U$.

Veremos que $q \in K_c$. Como $p_n \in U_n$, $|f(p_n) - c| < \frac{1}{n}$ por lo que $\lim f(p_n) = c$ y como f es continua $f(q) = c$. Además como $\varphi_{p_n}(t_n) \in V_n$ para algún $t_n \in [-\frac{1}{n}, 0]$ tenemos que $\lim \varphi_{p_n}(t_n) = \varphi_q(0) = q$ y $\|\nabla f(\varphi_{p_n}(t_n))\|^2 < \frac{1}{n}$ por lo que $\lim \|\nabla f(\varphi_{p_n}(t_n))\|^2 = 0$ y como $\|\nabla f\|^2$ es continua $\lim \|\nabla f(\varphi_{p_n}(t_n))\|^2 = \|\nabla f(q)\|^2$ con lo que $\nabla f(q) = 0$. Luego $q \in K_c$ y como $K_c \subset U$ tenemos una contradicción.

Dado U entorno saturado de K_c sea $k \in N$ tal que $U_k \subset U$ y sea $\epsilon > 0$ tal que $k < \frac{1}{2\epsilon}$. Defino $H \colon M \times R \to M$ tal que

$$H(p, t) = \varphi^k(p, -t)$$

con φ^k flujo de X_k. H es una homotopía foliada, H_0 es la aplicación identidad en M y $H_1 = \varphi^k_{-1}$.

Veré que $H_1(M_{c+\epsilon} - U) \subset M_{c-\epsilon}$. Para todo $p \in M$ tenemos que

$$fH_1(p) = f\varphi^k_{-1}(p) \leq f\varphi^k_{-\frac{1}{k}}(p)$$

ya que $\varphi^k_p(t)$ es no decreciente (4.12.2). Sea $p \in M_{c+\epsilon} - U$. Si $f(p) < c - \epsilon$ entonces

$$fH_1(p) \leq f\varphi^k_{-\frac{1}{k}}(p) \leq f\varphi^k_0(p) = f(p) < c - \epsilon.$$

Si $f(p) > c - \epsilon$ entonces $|f(p) - c| < \epsilon$ pues $p \in M_{c+\epsilon}$. Pero $p \notin U$, luego $p \notin U_k$ por lo que $\varphi_p(t) \notin V_k, \quad \forall t \in [-\frac{1}{k}, 0]$ y por la Proposición 4.12.2 $f\varphi^k_p(-\frac{1}{k}) = f(p) - \frac{1}{k}$. Entonces

$$fH_1(p) \leq f\varphi^k_{-\frac{1}{k}}(p) = f(p) - \frac{1}{k} \leq c - \epsilon.$$

□

Finalmente, como una foliación compacta-Hausdorff es $\pitchfork$-localmente contráctil (Corolario 3.40) tenemos el siguiente

Teorema 4.15 *La cantidad de hojas críticas de una función básica para una foliación compacta-Hausdorff en una variedad compacta es al menos* $\mathrm{cat}^{\,\S}_{\pitchfork} M$.

4.4.1 Variedades de Satake

Como aplicación del teorema anterior obtendremos ahora una generalización del resultado clásico de Lusternik-Schnirelmann acerca de la cantidad de puntos críticos de una función diferenciable para las variedades de Satake que son espacios de hojas de alguna foliación compacta-Hausdorff.

Sea B una variedad de Satake de dimensión n.

Definición 4.16 *Diremos que* $h \colon B \to R$ *es* S*-diferenciable si* $\forall (U, \varphi)$ *carta uniformizada, la aplicación* $h|_U\varphi \colon D \to R$ *es diferenciable.*

Si B es una variedad, h es S-diferenciable sii h es diferenciable.

Definición 4.17 *Diremos que* $b \in B$ *es punto crítico para la aplicación* S*-diferenciable* $h \colon B \to R$ *si* $\exists (U, \varphi)$ *carta uniformizada tal que* $b \in U$ *y para todo* $d \in D$ *tal que* $\varphi(d) = b$ *se verifica que* d *es punto crítico para* $h|_U\varphi$.

Proposición 4.18 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación compacta-Hausdorff, $\pi\colon M \to M/\mathcal{F}$ la proyección en el espacio de hojas y $\overline{f}\colon M/\mathcal{F} \to R$ una aplicación S-diferenciable. Entonces*

1. $\overline{f}\pi \in C^\infty_b(M)$
2. $\pi(L)$ *es punto crítico de* $\overline{f}$ *sii* L *es hoja crítica de* $\overline{f}\pi$.

Dem:

1. Sea el atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ para la variedad de Satake $M/\mathcal{F}$ tal que $\pi^{-1}(U_i) = \tilde{L} \times_{G_i} D_i$. Luego $\forall i \in I$, $\overline{f}|_{U_i}\varphi_i$ es diferenciable. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \overline{L} \times D_i \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "p_2"] & \pi^{-1}(U_i) \arrow[d, "\pi"] \\ D_i \arrow[r, "\varphi_i"] & U_i \end{tikzcd}$$

   de donde $\overline{f}\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}p' = \overline{f}|_{U_i}\varphi_i p_2$. Luego $\overline{f}\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}p'$ es diferenciable y como p' es una submersión sobreyectiva tenemos que $\overline{f}\pi|_{\pi^{-1}(U_i)}$ es diferenciable. Por lo tanto $\overline{f}\pi$ es diferenciable, y como es constante en las hojas $\overline{f}\pi \in C^\infty_b(M)$.

2. Sea $f = \overline{f}\pi$ y $\overline{d} = \pi(L)$. Consideramos (U, φ) carta uniformizada como antes tal que $\overline{d} \in U$. Localmente tenemos que $fp' = \overline{f}\varphi p_2$, luego $df_{[l,d]} \circ dp'_{(l,d)} = d(\overline{f}\varphi)_d \circ dp_{2(l,d)}$ con lo que

$$df_{[l,d]} = 0 \Longleftrightarrow d(\overline{f}\varphi)_d = 0$$

   con $(l, d) \in \tilde{L} \times D$.

   Luego $\overline{d} = \varphi(d)$ es punto crítico para $\overline{f}\varphi$ sii para todo $l \in \tilde{L}$, $[l, d]$ es punto crítico para f.

$\square$

Sea B una variedad de Satake que es espacio de hojas de alguna foliación compacta-Hausdorff.

Proposición 4.19 *Si* B *es compacta y* $h\colon B \to R$ *es* S*-diferenciable entonces la cantidad de puntos críticos de* h *es al menos* $\mathrm{cat}B$.

Dem: Sea M la variedad compacta tal que $M/\mathcal{F} = B$ y $f = h\pi$. Por la Proposición 4.18.1 sabemos que $f \in C^{\infty}_{b}(M)$ y por el Teorema 4.15 tenemos que la cantidad de hojas críticas de f es al menos $\mathrm{cat}\,{}^{s}_{\pitchfork}M$.

Por la proposición 3.23

$$\mathrm{cat}M/\mathcal{F} \leq \mathrm{cat}\,{}^{s}_{\pitchfork}M$$

y como la cantidad de hojas críticas de f coincide con la cantidad de puntos críticos de h (4.18.2) tenemos que

$$\#\text{ puntos críticos de } h = \#\text{ hojas críticas de } f \geq \mathrm{cat}\,{}^{s}_{\pitchfork}M \geq \mathrm{cat}B.$$

$\square$

4.5 Foliaciones de codimensión uno

En toda esta sección M será una variedad compacta y $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión 1 en M.

Definición 4.20 *Un subconjunto* $\mu \subset M$ *no vacío es minimal si verifica:*

1. μ *es cerrado y saturado,*
2. *si* $\mu' \subset \mu$ *es cerrado y saturado entonces* $\mu' = \emptyset$ *ó* $\mu' = \mu$.

Por ejemplo, cada hoja cerrada de una foliación es un conjunto minimal; si existe una hoja densa en la foliación, entonces el único conjunto minimal es M.

Proposición 4.21 *Un conjunto minimal* $\mu \subset M$ *satisface alguna de las siguientes posibilidades:*

1. $\mu = L$, L *hoja compacta*
2. $\mu = M$

3. *μ es unión de hojas excepcionales, en este caso μ se dice conjunto minimal excepcional.*

Recordamos que dada una transversal T, una hoja excepcional se caracteriza por que la clausura de la intersección $L \cap T$ es un conjunto perfecto y sin puntos interiores. En codimensión 1 esto equivale a ser un conjunto de Cantor.

Proposición 4.22 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión 1 en la variedad compacta M.*

1. *$\overline{L}$ contiene un conjunto minimal, para toda hoja $L \in \mathcal{F}$. ([16] parte A)*
2. *Para todo conjunto minimal excepcional $\mu \subset M$ existe un entorno saturado W de μ en M tal que $\mu \subset \overline{L}$ para toda hoja $L \subset W$. ([16] parte B)*

Sea ahora $f \colon M \to R$ una función básica para $\mathcal{F}$ y K su conjunto de puntos críticos (unión de hojas críticas).

Lema 4.23 *Si $K \cap \overline{L} \neq \emptyset$ entonces $\overline{L} \subset K$.*

Dem: Sea L' hoja de $\mathcal{F}$ tal que $L' \subset K \cap \overline{L}$. Como $L' \subset K$, tenemos que $df_p = 0$ para todo $p \in L'$. Además $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ es constante en $\overline{L} \supset L$ pues $f \in C_b^\infty(M)$. Luego $df_p = 0$ para todo $p \in \overline{L}$ con lo que $\overline{L} \subset K$.

□

Para cada μ conjunto minimal, sea $A_\mu = \{L \in \mathcal{F} \mid \overline{L} \supset \mu \text{ y } L \text{ es no cerrada}\}$.

Si $\mathcal{F}$ tiene alguna hoja no cerrada, entonces existe algún conjunto minimal μ tal que $A_\mu \neq \emptyset$.

Teorema 4.24 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación con alguna hoja no cerrada y μ tal que $A_\mu \neq \emptyset$. Sea $N = \bigcup_{L \in A_\mu} \overline{L}$. Entonces:*

1. *Existe un abierto saturado W en M tal que $W \subset N$.*
2. *$N \subset K$.*

Dem: Según la Proposición 4.21 un conjunto minimal es toda la variedad, es una hoja compacta o bien es un conjunto minimal excepcional.

1. Si $\mu = M$ entonces $N = M$ y consideramos el abierto saturado $W = M$.

   Si $\mu = L_0$ hoja compacta, sea $L \subset N$, T transversal por $x \in L$ y $z = T \cap L_0$. Consideramos el grupo de holonomía de L_0, $\mathrm{hol}(L_0) \subset \mathrm{Diff}_z(T) = \mathrm{Diff}_0(R)$. Sabemos que este grupo no es finito pues L_0 no tiene ningún entorno de hojas compactas, luego existe $g \in \mathrm{hol}(L_0)$ tal que

   $$\lim_{n\to\infty} g^n(x) = z.$$

   Sean $i, j \in Z$ tales que $g^i(x) < x < g^j(x)$ y sea $J = (g^i(x), g^j(x)) \subset T$. Como g es un difeomorfismo tenemos que $g^n g^i(x) < g^n(y) < g^n g^j(x)$ para todo $y \in J$ con lo que

   $$\lim_{n\to\infty} g^n(y) = z$$

   para todo $y \in J$.

   Si $y \in L'$ entonces $g^n(y) \in L'$ para todo $n \in Z$ con lo que $L_0 \subset \overline{L}'$. Luego $y \in N$ para todo $y \in J$ y $J \subset N$.

   Sea $W = \mathrm{sat} J$. Es abierto por ser J una transversal y $W \subset N$ por ser N saturado.

   Por último, si μ es un conjunto minimal excepcional la Proposición 4.22.2 nos garantiza la existencia del abierto saturado W.

2. Por ser f básica, f es constante en N y por el apartado anterior f es constante en un abierto saturado W. Luego $df = 0$ en W y $W \subset K$.

   Si $\mu = M$ entonces $W = M$ y $N = M$ con lo que $N \subset K$.

   Si μ es una hoja compacta, entonces existe un entorno saturado $W \subset N$ de cada hoja $L \subset N$ con lo que $L \subset W \subset K$ y $N \subset K$.

   Finalmente, si μ es un conjunto minimal excepcional tenemos que $W \subset N$ es un entorno saturado de μ por lo que $\mu \subset K$. Además para toda hoja $L \subset N$, $\overline{L} \supset \mu$ entonces $\overline{L} \cap K \neq \emptyset$ lo que implica, por el Lema 4.23 que $\overline{L} \subset K$. Luego $L \subset K$ y $N \subset K$.

$\square$

Corolario 4.25 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión 1 en la variedad compacta M y $f \in C_b^\infty(M)$.*

1. *Si una hoja es no cerrada, entonces es crítica.*

2. *Si existe alguna hoja no cerrada, entonces $\mathcal{F}$ tiene infinitas hojas críticas.*

Dem:

1. Si L es una hoja no cerrada, como $\overline{L} \supset \mu$ tenemos que $\overline{L} \subset N$. Como $N \subset K$ entonces $\overline{L} \subset K$, luego $L \subset K$.

2. Como $\mathcal{F}$ contiene alguna hoja no cerrada, tenemos que existe un abierto saturado $W \subset N \subset K$. Como W es abierto contiene infinitas hojas y todas ellas son críticas.

$\square$

Proposición 4.26 *[30][14][9] Si $\mathcal{F}$ es una foliación de codimensión 1 con todas las hojas compactas entonces es una foliación compacta-Hausdorff.*

Por lo que una foliación de codimensión 1 en una variedad compacta es una foliación compacta-Hausdorff o bien cualquier función básica tiene infinitas hojas críticas. En particular, podemos enunciar el siguiente

Teorema 4.27 *Si $\mathcal{F}$ es una foliación de codimensión 1 en una variedad compacta M entonces toda función básica tiene al menos $\mathrm{cat}_{\pitchfork}^{s}(M, \mathcal{F})$ hojas críticas.*

Bibliography

[1] J. Álvarez López, *Sucesión espectral asociada a foliaciones riemannianas,* Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, **72**, 1987.

[2] I. Berstein y T. Ganea, *The category of a map and of a cohomology class,* Fundam. Math. **50** (1962), 265-279.

[3] R. Bott y L. Tu, *Differential forms in Algebraic Topology,* GTM, **82**, Springer-Verlag, 1982.

[4] C. Camacho y A. Lins Neto, *Teoria geométrica das folheações,* IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[5] M. Clapp y D. Puppe, *Invariants of the Lusternik-Schnirelmann type and the topology of critical sets,* Trans. Amer. Math. Soc. **298** (1986), 603-620.

[6] A. El Kacimi-Alaoui, *Sur la cohomologie feuilletée,* Compositio Mathematica **49** (1983), 195-215.

[7] R. Edwards, K. Millet y D. Sullivan, *Foliations with all leaves compact,* Topology **16** (1977), 13-32.

[8] D. B. A. Epstein, *Periodic flows on 3-manifolds,* Annals of Math. **95** (1972), 68-82.

[9] D. B. A. Epstein, *Foliations with all leaves compact,* Ann. Inst. Fourier **26** (1976), 265-282.

[10] E. Fadell, *The equivariant Ljusternik-Schnirelmann method for invariant functionals and relative cohomological index theories,* In *Méthodes Topologiques en Analyse Non-Lineaire,* ed. A. Granas, Montreal, 1985.

[11] E. Fedida, *Sur les feuilletages de Lie,* C. R. Ac. Sci. Paris **272** (1971), 991-1001.

[12] R. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category,* Annals of Math. **42** (1941), 333-370.

[13] J. Girbau y M. Nicolau, *Pseudo-differential operators on* V*-manifolds and foliations,* Collectanea Mathematica **30** (1979) y **31** (1980).

[14] A. Haefliger, *Variétés feuilletés,* Ann. Scuola Norm. Pisa.(3) **16** (1962), 367-397.

[15] K. A. Hardie, *A note on fibrations and category* Michigan Math. J. **17** (1970), 351-352.

[16] G. Hector y U. Hirsch, *Introduction to the Geometry of foliations,* A y B, Vieweg, 1981-83.

[17] R. Hermann, *On the differential geometry of foliations,* Annals of Math. **72** (1960), 445-457.

[18] W. Huebsch, *On the covering homotopy theorem* Annals of Math. **61** (1965),555-563.

[19] I. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann,* Topology **17** (1978), 331-348.

[20] I. James y J. Morris, *Fibrewise category,* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **119A** (1991), 177-190.

[21] L. Lusternik y L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les Problèmes Variationnels,* Hermann, Paris, 1934.

[22] E. Macías, *Homotopy groups in Lie foliations,* Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 701-711.

[23] E. Macías, *Las cohomologías diferenciable, continua y discreta de una variedad foliada,* Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, **60**, 1983.

[24] W. Marzantowicz, *A G-Lusternik-Schnirelmann category of space with an action of a compact Lie group,* Topology **28** (1989), 403-412.

[25] X. Masa, *Sucesión espectral de cohomología asociada a variedades foliadas,* Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología, **19**, 1973.

[26] P. Molino, *Feuilletages trasversement parallélisables et feuilletages de Lie,* C. R. Acad. Sci. Paris **282** (1976), 99-101.

[27] P. Molino, *Géométrie globale des feuilletages riemanniens,* Indag. Math. (N.S.) **44** (1982), 45-76.

[28] P. Molino, *Riemannian Foliations,* Progress in Math. **73**, 1988.

[29] R. S. Palais, *Lusternik-Schnirelmann theory on Banach manifolds,* Topology **5** (1966), 115-132.

[30] G. Reeb, *Sur certaines propiétés topologiques des variétés feuilletés,* Act. Sci. et Ind. **1183** (1952), 91-154.

[31] B. Reinhart, *Foliated manifolds with bundle-like metrics,* Ann.of Math. **69** (1959), 119-132.

[32] B. Reinhart, *Harmonics integrals on foliated manifolds,* Amer. Jour. of Math. **81** (1959) 529-536.

[33] I. Satake, *On a generalization of the notion of manifold,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956), 359-363.

[34] K. S. Sarkaria, *A finiteness theorem for foliated manifolds,* J. Math. Soc. Japan **30**, 4 (1978), 687-696.

[35] A. Schwarz, *The genus of a fiber space,* Am. Math. Soc. Transl **55** (1966), 49-140.

[36] P. Schweitzer, *Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping,* Topology **3** (1965), 337-355.

[37] W. Singhof, *On the LS category of Lie Groups,* Math. Z. **145** (1975), 111-116.

[38] W. P Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds,* Lectures Notes, Princeton University, 1976-79.

[39] K. Varadarajan, *On fibrations and category,* Math. Z. **88** (1965), 267-273.