Ramón Vázquez Lorenzo

ESTUDIO DEL OPERADOR DE JACOBI EN GEOMETRÍA SEMI-RIEMANNIANA

88

1997

Publicaciones del Departamento de Geometría y Topología

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

ESTUDIO DEL OPERADOR DE JACOBI EN GEOMETRIA SEMI–RIEMANNIANA

Ramón Vázquez Lorenzo

IMPRIME: Imprenta Universitaria
Pavillón de Servicios
Campus Universitario

ISBN: 84-89390-05-3

Dep. Leg.: C-1862/97

ESTUDIO DEL OPERADOR DE JACOBI EN GEOMETRIA SEMI–RIEMANNIANA

Ramón Vázquez Lorenzo

Memoria realizada en el Departamento de Xeometría e Topoloxía de la Facultad de Matemáticas, bajo la dirección de la Profesora Dra. Regina Castro Bolaño y del Profesor Dr. Eduardo García Río, para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela.

Realizado el acto público de la Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral el día 24 de Octubre de 1997, en la Universidad de Santiago de Compostela, ante el Tribunal formado por los Profesores:

Presidente:

Prof. Luis Angel Cordero Rego
(Universidad de Santiago de Compostela)

Vocales:

Prof. Lieven Vanhecke
(Katholieke Universiteit Leuven)

Prof. Antonio Díaz Miranda
(Universidad Autónoma de Madrid)

Prof. Manuel Barros Díaz
(Universidad de Granada)

Secretario:

Prof. Luis María Hervella Torrón
(Universidad de Santiago de Compostela)

obtuvo la máxima calificación, **APTO CUM LAUDE**.

A mis padres,

y a la memoria de mi abuelo.

Abstract

The study of the curvature is one of the most interesting topics in Differential Geometry, and it is central in the study of semi–Riemannian Geometry. Jacobi operators and Jacobi vector fields arise in a natural way in the study of geodesic variations as a measure of the geodesic deviation. Jacobi vector fields constitute a basic tool in the study of many geometric problems. Although it is difficult to determine them explicitly, many properties can be obtained directly from the knowledge of the Jacobi operators.

The purpose of this Doctoral Thesis is to make a study of the Jacobi operators on semi–Riemannian manifolds. Since such operators are self–adjoint, we carry out this analysis from two points of view. Firstly we study the constancy of the eigenvalues of the Jacobi operators (which is closely related to the "Osserman problem") and secondly we investigate the influence of the geometry of the manifold on the existence of distinguished eigenspaces for the Jacobi operators. In Chapter 1 we review the current situation of both problems in the Riemannian and Lorentzian framework, as a previous step to the study of the more general semi–Riemannian case.

Chapters 2 and 3 are devoted to the study of the eigenvalues of the Jacobi operators. In Chapter 2 we point out the existence of strong differences in the analysis of the Osserman condition for semi–Riemannian metrics with respect to the Riemannian and Lorentzian analogues by showing the existence of Osserman metrics of any signature (p, q), p, $q \geq 2$, which are not locally symmetric (even not locally homogeneous). These examples motivate the study of a particular class of Osserman semi–Riemannian spaces, which we call "special Osserman manifolds". They may be thought, beside the spaces of constant curvature, as the simplest semi–Riemannian manifolds from the point of view of their curvature. We show in Chapter 3 that they are locally symmetric and that, if the dimension is different from 16 and 32, they must be locally isometric to one of the following: an indefinite Kähler manifold of constant holomorphic sectional curvature, an indefinite quaternionic Kähler manifold of constant quaternionic sectional curvature, a para–Kähler manifold of constant paraholomorphic sectional curvature or a paraquaternionic Kähler manifold of constant paraquaternionic sectional curvature.

The study of the existence of distinguished eigenspaces for the Jacobi operators is carried out in Chapter 4. We focus on the most unknown classes of special Osserman spaces: para–Kähler and paraquaternionic Kähler manifolds. We characterize the constancy of the paraholomorphic and paraquaternionic sectional curvatures by the existence of eigenspaces of the Jacobi operators generated by the paracomplex and paraquaternionic structures, respectively. Finally, we point out that the information provided by the Jacobi operator in the para–Kähler setting is different when we consider it along spacelike, timelike or null geodesics, the last case giving a conformally invariant property.

Agradecimientos

El trabajo desarrollado en esta memoria ha sido posible gracias a la colaboración de un grupo de personas que durante varios años han dirigido mis investigaciones y me han apoyado en todo momento.

En primer lugar quiero mostrar mi más sincero agradecimiento a la Prof. Dra. Regina Castro Bolaño y al Prof. Dr. Eduardo García Río, que han dirigido esta tesis, y hacerlo extensivo a los Profesores Dr. Agustín Bonome Dopico y Dr. Luis M. Hervella Torrón, por su dedicación, orientaciones y aportaciones que han sido fundamentales para el desarrollo de esta memoria.

De modo especial quiero agradecer la colaboración prestada por el Profesor Dr. Lieven Vanhecke (Katholieke Universiteit Leuven). Sus indicaciones en ciertas partes del trabajo han sido de gran importancia.

La Prof. Dra. M. Elena Vázquez Abal ha colaborado en la obtención de algunos de los resultados de esta memoria. Quiero expresarle mi agradecimiento por su colaboración.

Durante estos años he contado con el apoyo de todos los miembros del Departamento de Xeometría e Topoloxía de la Facultad de Matemáticas. Quiero agradecerles el excelente ambiente de trabajo que he encontrado, así como todas las facilidades que me han dado y todo el material que han puesto a mi disposición.

Finalmente, agradecerle a mi familia y amigos el ánimo transmitido durante todos estos años.

Contenidos

Introducción

El estudio de la curvatura de variedades semi–Riemannianas constituye uno de los aspectos más ampliamente desarrollados en Geometría Diferencial. De hecho, citando textualmente a Osserman [Os, pág. 731]:

> "La noción de curvatura es uno de los conceptos centrales en geometría diferencial; se podría argumentar que es *el* central, distinguiendo la parte geométrica del término de otros aspectos que son analíticos, algebraicos o topológicos. En palabras de Marcel Berger [B, pág. 9], la curvatura es *el número uno y más natural de los invariantes Riemannianos. Gauss y después Riemann se dieron cuenta instantáneamente.*
>
> La curvatura juega también un papel fundamental en física. La magnitud de la fuerza necesaria para mover un objeto a velocidad constante a lo largo de un camino es, de acuerdo con las Leyes de Newton, un múltiplo constante de la curvatura de la trayectoria. El movimiento de un cuerpo en un campo gravitatorio está determinado, de acuerdo con Einstein, por la curvatura del espacio . . . ".

Debe resultar claro que el conocimiento de la curvatura proporciona una gran información sobre la geometría de la variedad. Así, si dos variedades semi–Riemannianas son localmente isométricas, su tensor curvatura es necesariamente el mismo. Sin embargo, el hecho de que dos variedades tengan el mismo tensor curvatura no conlleva su carácter localmente isométrico. Es, de hecho, necesario el conocimiento de las derivadas covariantes de dicho tensor curvatura. El problema de determinar las condiciones mínimas que permitan garantizar que dos variedades con el mismo tensor curvatura sean localmente isométricas está todavía abierto y, bajo ciertas condiciones, estrechamente relacionado con lo que se ha dado en llamar variedades curvatura homogéneas.

Por otro lado, la curvatura de una variedad influye también en la topología subyacente de la misma. Resultados como la teoría de clases características o los teoremas clásicos de Myers ponen de manifiesto dicha relación. Una observación más detallada del Teorema de Myers (véase, por ejemplo, [KN, vol. II, pág. 88]) o de la descripción en términos de la curvatura de la primera clase de Chern de una variedad Kähleriana, evidencia el importante papel desempeñado por una contracción del tensor curvatura: la curvatura de Ricci. Esta, a su vez, no es otra cosa que la traza de los distintos operadores de Jacobi.

El operador de Jacobi aparece de forma natural en el estudio de las variaciones geodésicas, siendo los campos de vectores de Jacobi las soluciones de la ecuación diferencial $X'' + R_\gamma X = 0$, donde $R_\gamma X = R(X, \gamma')\gamma'$ representa el operador de Jacobi a lo largo de la geodésica γ. Los campos de vectores de Jacobi son una herramienta básica en el estudio de numerosos problemas geométricos debido, especialmente, a su relación con los campos de vectores coordenados para sistemas de coordenadas normales o de Fermi. Este hecho hace que el conocimiento de los campos de Jacobi permita describir localmente la geometría de la variedad. Así pues, no es exagerado decir que el conocimiento explícito de los operadores de Jacobi (y asociado a ellos, el de los campos de vectores de Jacobi) es un aspecto básico en geometría semi–Riemanniana.

Es una consecuencia inmediata de las propiedades del tensor curvatura el carácter autoadjunto de los operadores de Jacobi, lo que permite hablar del espectro de los mismos. Una simple observación muestra que, en variedades Riemannianas, los autovalores de los operadores de Jacobi se corresponden con los valores extremos de la función curvatura seccional, al mismo tiempo que los autoespacios asociados a ellos señalan las direcciones donde la función curvatura seccional alcanza dichos valores extremos. Es, por tanto, de especial interés el conocimiento de ambos, los autovalores y los autoespacios de los operadores de Jacobi.

El estudio de los autovalores del operador de Jacobi está estrechamente relacionado con lo que se ha dado en llamar el "problema de Osserman". Así, una variedad de Riemann (M, g) se dice que es Osserman si los autovalores de los operadores de Jacobi son constantes en el fibrado esférico a la variedad. Osserman ha conjeturado que tales variedades han de ser localmente isométricas a los espacios homogéneos dos–puntos. Dicha conjetura ha sido probada por Chi cuando la dimensión de la variedad es distinta de $4k$, $(k > 1)$ [Ch1]. Además, en [Ch2] y [Ch3], Chi ha demostrado la validez de la conjetura de Osserman bajo ciertas propiedades adicionales. Recientemente Gilkey, Swann y Vanhecke [GSV] han iniciado el estudio de dos propiedades relacionadas con el problema de Osserman. La primera de ellas (estrictamente más débil que la propiedad de Osserman) es la llamada propiedad de Osserman puntual, consistente en la constancia, en cada punto de la variedad, de los autovalores de los operadores de Jacobi. La segunda (más fuerte que la propiedad de Osserman) es la existencia de esferas geodésicas isoparamétricas pasando por cada punto de la variedad. Esta última propiedad implica el carácter de Osserman, así como la propiedad de armonicidad de la variedad considerada. Sin embargo, aún bajo estas fuertes condiciones, la clasificación de las variedades de Osserman es todavía un problema abierto.

El estudio de los autoespacios del operador de Jacobi ha sido abordado con anterioridad. Así, el llamado criterio de Cartan para la constancia de la curvatura seccional puede ser reenunciado en los siguientes términos: si el operador de Jacobi tiene un único autoespacio, entonces la variedad es un espacio de curvatura seccional constante [DN1], [GN]. Cuando la variedad estudiada se encuentre equipada con alguna estructura adicional, es lógico esperar que la relación de dicha estructura con los invariantes Riemannianos de la variedad proporcione información importante sobre la misma. Así, en variedades Kählerianas, la curvatura seccional holomorfa (definida como la restricción de la curvatura seccional a planos holomorfos) permite describir de forma natural los espacios complejos Euclídeos, proyectivos e hiperbólicos como aquellas variedades Kählerianas de curvatura seccional holomorfa constante. Nomizu [N1] ha estudiado la existencia de autoespacios distinguidos para los operadores de Jacobi en variedades Kählerianas, mostrando que la curvatura seccional holomorfa es constante si y sólo si Jx es un autovector del operador de Jacobi R_x, para cada vector x. Un resultado en cierto modo análogo es conocido en el marco de la geometría cuaterniónica [Kn].

El estudio de la curvatura en geometría semi–Riemanniana presenta notables diferencias con su análogo Riemanniano. En primer lugar, debe señalarse que se encuentra mucho menos desarrollado debido, quizás, a las patologías que presenta su estudio. La función curvatura seccional en cada punto $p \in M$ de una variedad Riemanniana M está definida en toda la Grassmanniana de 2–planos tangentes $G_2(T_pM)$. Así, la compacidad de $G_2(T_pM)$ asegura la acotación de dicha función en cada punto de la variedad. La existencia de planos degenerados en variedades semi–Riemannianas muestra la imposibilidad de definir la función curvatura seccional en toda la Grassmanniana de 2–planos, lo cual conlleva la no acotación de dicha función curvatura en cada punto. Es un resultado clásico de Kulkarni [Ku] que la curvatura seccional está acotada superior o inferiormente si y sólo si es constante. Además, Dajczer y Nomizu [DN1] han mostrado que dicha función curvatura seccional puede ser extendida con continuidad a toda la Grassmanniana $G_2(T_pM)$ si y sólo si es constante en el punto $p \in M$. Este hecho hace que la relación existente entre el operador de Jacobi y la curvatura seccional sea de interpretación más compleja cuando las métricas consideradas no sean definidas positivas. Además, debe tenerse en cuenta que los operadores de Jacobi no son necesariamente diagonalizables cuando las métricas consideradas son indefinidas. Sin embargo, el estudio de los operadores de Jacobi presenta una motivación adicional en geometría Lorentziana, puesto que en la formulación de la Relatividad General dichos operadores permiten medir la aceleración relativa de sistemas inerciales de partículas y, por tanto, su conocimiento es esencial a la hora de construir los modelos relativistas [O].

Motivados por este hecho, en [GK2] y [GKV] se inicia el estudio del problema de Osserman en geometría de Lorentz. Dicho estudio ha sido recientemente completado en [BBG], obteniéndose, finalmente, que la propiedad de Osserman sobre vectores espaciales o temporales es equivalente a la constancia de la curvatura seccional. El estudio de la propiedad de Osserman para vectores nulos es todavía un campo abierto en geometría de Lorentz. Dicho estudio presenta una primera dificultad a la hora de seleccionar un representante de cada dirección nula del espacio. Esto se resuelve mediante el uso de congruencias nulas inducidas por vectores temporales y se prueba en [GK2] que una variedad nula Osserman en dimensión cuatro es de curvatura constante o un espacio de Robertson–Walker.

El estudio de la existencia de autoespacios distinguidos para los operadores de Jacobi en geometría semi–Riemanniana ha sido iniciado por Dajczer y Nomizu [DN1], quienes obtienen una generalización del criterio de Cartan. Más tarde, Graves y Nomizu [GN] señalan la posibilidad de obtener el criterio de Cartan mediante el simple análisis de los operadores de Jacobi asociados a vectores espaciales o temporales. El estudio de una propiedad análoga para los operadores de Jacobi asociados a vectores nulos ha sido desarrollado por Kupeli [K1] quien prueba que dicha condición es equivalente al carácter localmente conformalmente llano de la variedad (lo que representa un invariante conforme de la estructura). En el marco de la geometría casi Hermítica indefinida, ha sido estudiada recientemente una condición del tipo de la obtenida por Nomizu en [N1] para la constancia de la curvatura seccional holomorfa en variedades Kählerianas. De igual modo a como sucedía con la curvatura seccional, tal condición proporciona distinta información cuando se presenta sobre vectores espaciales, temporales o nulos. En el caso de estos últimos aparece de nuevo un invariante conforme: la anulación del tensor de Bochner [BCGHM].

El objetivo de esta memoria es el estudio del operador de Jacobi en variedades con métricas semi–Riemannianas en base a los dos aspectos fundamentales señalados anteriormente: el estudio de los autovalores y los autoespacios del mismo.

Al considerar métricas indefinidas no Lorentzianas, existen numerosos ejemplos de variedades Osserman que no son de curvatura seccional constante: las variedades Kähler indefinidas de curvatura seccional holomorfa constante o las variedades cuarterniónicas Kähler indefinidas de curvatura cuaterniónica constante son ejemplos claramente motivados por sus análogos Riemannianos. En ambos casos, los operadores de Jacobi son diagonalizables con dos autovalores distintos. Sin embargo, la diagonalizabilidad del operador de Jacobi no es un hecho garantizado (al trabajar con métricas indefinidas), por lo que dedicamos especial atención a la búsqueda de ejemplos de variedades Osserman con operadores de Jacobi no diagonalizables. La existencia de tales ejemplos mostrará la primera diferencia básica a tener en cuenta en el estudio de este problema con relación a sus análogos Riemanniano o Lorentziano. Después de examinar en detalle varias familias de ejemplos no localmente simétricos de variedades semi–Riemannianas de Osserman, nos planteamos el estudio del caso más sencillo posible de variedades de Osserman: aquellas cuyo operador de Jacobi sea diagonalizable con exactamente dos autovalores distintos. El estudio de estos espacios pone de manifiesto la necesidad de considerar nuevas geometrías semi–Riemannianas sin análogo Riemanniano: las variedades casi para–Hermíticas y paracuaterniónicas.

Finalmente, dedicamos especial atención al estudio de la existencia de autoespacios distinguidos para los operadores de Jacobi en estas dos geometrías, con especial atención a las variedades para–Kähler y paracuaterniónicas Kähler. Debido a la existencia de vectores temporales, espaciales y nulos, estudiamos separadamente el significado de sus operadores de Jacobi. Así, la propiedad estudiada permite caracterizar las variedades para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante cuando se examinan las direcciones espaciales o temporales. Sin embargo, la existencia de autoespacios distinguidos para el operador de Jacobi a lo largo de direcciones nulas proporciona un invariante conforme en geometría para–Hermítica. Dicha propiedad es, sin embargo, equivalente a la constancia de la curvatura seccional paracuaterniónica en variedades paracuaterniónicas Kähler.

De una forma más precisa, el contenido de esta memoria se estructura de la forma siguiente.

El primer capítulo lo dedicamos a fijar la notación básica que será utilizada a lo largo de la memoria. Además, analizamos la situación de los problemas que nos conciernen: el estudio de los autovalores y el de los autoespacios del operador de Jacobi en los marcos Riemanniano y Lorentziano, como situación previa al análisis que desarrollaremos a continuación.

El segundo capítulo está dedicado al análisis de distintos tipos de ejemplos de variedades de Osserman. Esencialmente agrupamos dichos ejemplos en dos clases, básicamente diferenciadas por la posibilidad de diagonalizar el operador de Jacobi. Ejemplos clásicos de variedades semi–Riemannianas de Osserman con operador de Jacobi diagonalizable son los espacios de curvatura seccional constante, las variedades Kähler indefinidas de curvatura seccional holomorfa constante y las variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura seccional cuaterniónica constante. Dichos ejemplos aparecen asociados a métricas de signatura (p,q), $(2p,2q)$ y $(4p,4q)$, $p,q\geq 0$, respectivamente. Otros ejemplos clásicos, aunque menos conocidos, son los proporcionados por las variedades para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante. Dichas métricas han de ser necesariamente de signatura (n,n). Además, estudiamos con cierto detalle las variedades paracuaterniónicas Kähler. Dado que el estudio de esta última geometría es casi inexistente en la bibliografía, le dedicaremos una especial atención a lo largo de esta memoria. Es interesante señalar que los operadores de Jacobi correspondientes a todos los ejemplos anteriores poseen sólo dos autovalores distintos (excepto en el caso de los espacios de curvatura constante) presentándose diferencias entre ellos en los autoespacios asociados a dichos autovalores. Además, es importante observar que todos los ejemplos mencionados son localmente simétricos.

La otra clase de ejemplos estudiada presenta grandes diferencias con la mostrada anteriormente. De hecho, pondremos de manifiesto la *existencia de ejemplos de variedades semi–Riemannianas de Osserman de cualquier signatura* (p,q), $p,q\geq 2$, *que no son localmente simétricos (ni siquiera localmente homogéneos)*. Para ello, construimos una familia de métricas en $\mathbb{R}^4$ de signatura $(+,+,-,-)$,

$$\begin{aligned} g_{(f_1,f_2)} &= x^3 f_1(x^1,x^2)dx^1\otimes dx^1 + x^4 f_2(x^1,x^2)dx^2\otimes dx^2 \\ &\quad +a\left\{dx^1\otimes dx^2 + dx^2\otimes dx^1\right\} \\ &\quad +b\left\{dx^1\otimes dx^3 + dx^3\otimes dx^1 + dx^2\otimes dx^4 + dx^4\otimes dx^2\right\} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

donde (x^1,x^2,x^3,x^4) denotan las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^4$. Probamos, en primer lugar, que las métricas anteriores son Osserman si y sólo si las funciones f_1 y f_2 verifican la ecuación en derivadas parciales $\dfrac{\partial f_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial f_2}{\partial x^1}=0$. Además, el carácter localmente simétrico de dichos espacios será equivalente a la posibilidad de resolver un cierto sistema de ecuaciones en derivadas parciales (Teorema 2.2.2). De esta forma, es posible mostrar la existencia de ejemplos no simétricos de espacios de Osserman. Señalemos además que los operadores de Jacobi de dichas métricas tienen como polinomio característico $p_\lambda(R_X)=\lambda^4$, pero el polinomio mínimo $m_\lambda(R_X)$ varía desde $m_\lambda(R_X) = \lambda$ hasta $m_\lambda(R_X) = \lambda^3$. Además, el polinomio mínimo puede variar de un punto a otro (lo que muestra que dichos espacios no serán curvatura homogéneos ni, por tanto, localmente homogéneos). Finalmente, la generalización a dimensiones superiores se obtiene sin más que considerar las variedades producto $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^k_\nu$, donde en $\mathbb{R}^4$ se considera una métrica $g_{(f_1,f_2)}$ de las descritas anteriormente y en $\mathbb{R}^k_\nu$ la métrica Euclídea indefinida usual de signatura $(k-\nu,\nu)$.

Debido al interés que presentan en nuestro estudio las métricas construidas anteriormente en $\mathbb{R}^4$, nos planteamos la posibilidad de obtenerlas de un modo más geométrico. Para ello, estudiamos el fibrado cotangente a una variedad equipada con una conexión afín. Así, en la sección 2.3 introducimos de forma natural el concepto de conexión afín de Osserman como aquella conexión sin torsión (simétrica) cuya extensión de Riemann al fibrado cotangente es una métrica de Osserman. Utilizando un resultado de Wong [Wo], caracterizamos localmente las conexiones afines de Osserman (Teorema 2.3.4) lo que permite interpretar las métricas $g_{(f_1,f_2)}$ (cuando $a=0$) anteriores como extensiones de Riemann a $\mathbb{R}^4 = T^*\mathbb{R}^2$ de ciertas conexiones afines de Osserman.

La última sección del capítulo 2 está dedicada al estudio de otra familia de variedades de Osserman. Para ello consideraremos el fibrado tangente TM a una variedad semi–Riemanniana (M,g). Si ϕ denota un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ sobre M, definimos el *levantamiento completo deformado* de g a TM como la métrica $g_\phi = g^C + \phi^V$, donde g^C y ϕ^V denotan el levantamiento completo y vertical de la métrica g y el campo de tensores ϕ respectivamente. El Teorema 2.4.1 muestra que (TM, g_ϕ) es una variedad semi–Riemanniana de Osserman si y sólo si los autovalores de los operadores de Jacobi de (M,g) son idénticamente nulos, lo que permite construir una amplia familia de ejemplos sin más que partir de una variedad llana (M,g), siendo ϕ cualquier deformación conforme de la métrica g. En esta línea, estudiamos los dos casos más sencillos correspondientes a las situaciones en las que (M,g) es el plano Euclídeo $\mathbb{R}^2$ o el plano de Minkowski $\mathbb{R}^2_1$. En ambos casos es posible equipar a TM con ciertas estructuras adicionales, lo que permite construir ejemplos de variedades Kähler indefinidas de Osserman (Teorema 2.4.3) y variedades para–Kähler de Osserman (Teorema 2.4.5). Además, la curvatura seccional holomorfa o paraholomorfa de tales métricas será no negativa o no positiva en cada punto sin necesidad de ser constante, aún cuando la variedad sea localmente simétrica.

El capítulo 3 de la memoria está dedicado al estudio de una clase particular de variedades de Osserman. Después de los espacios de curvatura seccional constante, la clase más sencilla a considerar es la dada por aquellas variedades cuyos operadores de Jacobi sean diagonalizables con exactamente dos autovalores distintos. En este sentido, decimos que una variedad semi–Riemanniana es *de Osserman especial* si satisface las dos condiciones siguientes:

(I) Para cada vector unitario x, el operador de Jacobi R_x es diagonalizable con exactamente dos autovalores distintos: $\lambda\varepsilon_x$ y $\mu\varepsilon_x$ ($\varepsilon_x = g(x,x)$).

(II) Si z es un vector unitario en $E_\lambda(x)$, entonces se cumple que $E_\lambda(z) = E_\lambda(x)$, donde $E_\lambda(x) = \langle x \rangle \oplus Ker(R_x - \lambda\varepsilon_x Id)$. Además, si y es un vector en $Ker(R_x - \mu\varepsilon_x Id)$, entonces $x \in Ker(R_y - \mu\varepsilon_y Id)$.

Como primer resultado, obtenemos una descripción de las posibles signaturas en las que pueden ocurrir las variedades de Osserman especiales en relación con la multiplicidad del autovalor distinguido λ:

Teorema 3.2.4 *Sea (M, g) una variedad de Osserman especial. Entonces se cumple una de las siguientes condiciones:*

(i) La multiplicidad de λ es uno y la métrica g es de signatura $(2p, 2q)$ ó (n, n).

(ii) La multiplicidad de λ es tres y la métrica g es de signatura $(4p, 4q)$ ó $(2n, 2n)$.

(iii) La multiplicidad de λ es siete y la métrica g es de signatura $(16, 0)$, $(0, 16)$ ó $(8, 8)$.

(iv) La multiplicidad de λ es quince y la métrica g es de signatura $(16, 16)$.

El resultado anterior es obtenido mediante el análisis de ciertos módulos de Clifford construidos a partir del autovalor λ. Además, en los casos (i) y (ii), podemos obtener una descripción completa del tensor curvatura, lo que nos permite probar el siguiente resultado:

Teorema 3.4.2 *Sea (M, g) una variedad de Osserman especial de dimensión distinta de 16 y 32. Entonces (M, g) es localmente isométrica a una de las siguientes variedades:*

(i) Una variedad Kähler indefinida de curvatura seccional holomorfa constante,

(ii) una variedad para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante,

(iii) una variedad cuaterniónica Kähler indefinida de curvatura seccional cuaterniónica constante, o

(iv) una variedad paracuaterniónica Kähler con curvatura seccional paracuaterniónica constante.

Además, cuando la dimensión de la variedad de Osserman especial sea 16 ó 32, probamos en el Teorema 3.5.1 que dicho espacio ha de ser localmente simétrico. En estos momentos, es todavía un problema abierto la clasificación completa de tales espacios que, consideramos, han de estar estrechamente relacionados con las álgebras de Cayley de primera y segunda especie.

El capítulo cuarto de esta memoria esta dedicado al estudio del otro problema mencionado: la influencia de la existencia de autoespacios distinguidos para los operadores de Jacobi. Si (M, g, J) es una variedad para–Kähler, la estructura paracompleja J define una dirección distinguida asociada a cada dirección x, y estudiamos la influencia sobre la curvatura de la variedad de la propiedad de ser Jx un autoespacio distinguido para el operador de Jacobi R_x. Debido a la existencia de vectores espaciales, temporales y nulos, investigamos dicha condición separadamente en cada uno de los tres casos, obteniendo la siguiente caracterización de la constancia de la curvatura seccional paraholomorfa:

Teorema 4.1.1 *Sea (M, g, J) una variedad para–Kähler conexa de dimensión > 2. Entonces la curvatura seccional paraholomorfa es constante en M si y sólo si se cumple alguna de las condiciones equivalentes siguientes:*

(i) *Jx es un autovector del operador de Jacobi R_x, para cada vector espacial x,*

(ii) *Jx es un autovector del operador de Jacobi R_x, para cada vector temporal x,*

(iii) *Jx es un autovector del operador de Jacobi R_x con autovalor asociado cero, para cada vector nulo x.*

El distinto comportamiento de los vectores nulos cuando se comparan con los espaciales y temporales motiva el estudio de la propiedad definida por el hecho de ser Ju un autovector del operador de Jacobi R_u para cada vector nulo u. Tal propiedad es estrictamente más débil que la constancia de la curvatura seccional paraholomorfa y, además, define una propiedad invariante conforme en geometría casi para–Hermítica. Es por ello que abordamos su estudio, con la mayor generalidad posible, en el marco de las variedades casi para–Hermíticas. Un primer paso es la generalización del resultado anterior (Teorema 4.3.1) que permite caracterizar la constancia puntual de la curvatura seccional paraholomorfa y obtener la expresión del tensor curvatura de las variedades casi para–Hermíticas isotrópicas (Teorema 4.4.1). Finalmente, dicha expresión nos ha permitido obtener un resultado de clasificación local, que en el caso particular de las variedades para–Kähler se reduce a:

Teorema 4.5.2 *Sea (M, g, J) una variedad para–Kähler isotrópica de curvatura escalar constante. Si el tensor de Ricci es diagonalizable, entonces*

(i) *(M, g, J) es localmente isométrico a un espacio de curvatura seccional paraholomorfa constante, o*

(ii) *M es localmente isométrica a un producto $M_1(c) \times M_2(-c)$, donde M_1 y M_2 son variedades para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante c y $-c$, respectivamente.*

Además, en la sección 7 del Capítulo 4 mostramos una familia de ejemplos que ponen de manifiesto la no validez del resultado anterior cuando el tensor de Ricci no es diagonalizable. Dicha familia se obtiene sin más que considerar el fibrado tangente a una variedad para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante, equipado con la estructura definida por los levantamientos completos de la métrica y la estructura paracompleja de la variedad base (Ejemplo 4.7.5).

Finalmente, en la última sección de esta memoria consideramos la propiedad anterior en el marco de la geometría paracuaterniónica probando el siguiente resultado:

Teorema 4.8.1 *Sea (M, g, V) una variedad paracuaterniónica Kähler conexa de dimensión > 4. Entonces la curvatura seccional paracuaterniónica es constante en M si y sólo si $\{J_1x, J_2x, J_3x\}$ define un autoespacio del operador de Jacobi R_x, para cada vector espacial, temporal o nulo x.*

Capítulo 1

El operador de Jacobi

1.1 Introducción

Sea (M, g) una variedad semi–Riemanniana n–dimensional de signatura arbitraria (p, q), $p, q \geq 0$. La métrica g determina de forma única una conexión simétrica, ∇, respecto a la cual es paralela, *la conexión de Levi Civita*, definida por

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y]), \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

siendo X, Y, Z campos de vectores sobre la variedad. Así, nos referiremos al tensor de curvatura de dicha conexión

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{1.1.2}$$

como *la curvatura de la variedad* (M, g). R satisface, entre otras, las siguientes identidades:

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z, \tag{1.1.3}$$

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0, \tag{1.1.4}$$

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W = 0, \tag{1.1.5}$$

para cualesquiera X, Y, Z, W campos de vectores sobre la variedad. Nos referiremos a (1.1.4) y (1.1.5) como *la primera y la segunda identidad de Bianchi*, respectivamente. Además, a menudo escribiremos el tensor curvatura de tipo $(0, 4)$

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W),$$

al que generalmente denominaremos *función curvatura*. La función curvatura R satisface, además de las identidades anteriores, las siguientes:

$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z), \tag{1.1.6}$$

$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y). \tag{1.1.7}$$

Si bien el tensor de curvatura se introduce de forma independiente de su intuición geométrica, ésta queda reflejada al estudiar la función *curvatura seccional*. Así, para cada plano no degenerado $\pi = \langle\{x,y\}\rangle$ $(g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2 \neq 0)$, se define la función curvatura seccional como

$$K(\pi) = \frac{R(x,y,y,x)}{g(x,x)g(y,y) - g(x,y)^2}. \tag{1.1.8}$$

El concepto de curvatura seccional permite interpretar geométricamente el tensor curvatura y, además, su conocimiento permite reconstruir el tensor curvatura en su totalidad.

A lo largo de esta memoria utilizaremos dos contracciones importantes del tensor curvatura: el *tensor de Ricci*, ρ, definido como

$$\rho(X,Y) = tr\,\{Z \rightsquigarrow R(Z,X)Y\}, \tag{1.1.9}$$

y la *curvatura escalar*, τ, dada por

$$\tau = tr\,\rho. \tag{1.1.10}$$

Si $\{E_1,\dots,E_n\}$ denota una referencia local ortonormal de campos de vectores sobre M, entonces el tensor de Ricci y la curvatura escalar se expresan como:

$$\rho(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i} R(E_i,X,Y,E_i), \quad \tau = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{E_i}\rho(E_i,E_i) = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{E_i}\varepsilon_{E_j} R(E_j,E_i,E_i,E_j),$$

donde $\varepsilon_{E_k} = g(E_k,E_k)$, $k = 1,\dots,n$.

Un aspecto central en geometría es el estudio de la curvatura y una herramienta básica en dicho estudio son los llamados *campos de vectores de Jacobi*. Un campo de vectores de Jacobi a lo largo de una geodésica γ es una solución de la ecuación diferencial de Jacobi, $X'' + R(X,\gamma')\gamma' = 0$, donde γ' es el campo de vectores velocidad a lo largo de γ.

Los campos de vectores de Jacobi son claves a la hora de abordar el problema de medir el cambio en la longitud del arco de un segmento de una geodésica cuando ésta se somete a pequeñas variaciones. Una curva puede compararse con otras próximas a ella utilizando el concepto de *variación geodésica*. Una variación de un segmento de curva $\alpha : [a,b] \longrightarrow M$

es una aplicación $x(u,v) : [a,b]\times(-\delta,\delta) \longrightarrow M$ tal que $\alpha(u) = x(u,0)$ para todo $a \leq u \leq b$. El campo de vectores V a lo largo de α dado por $V(u) = x_v(u,0)$ se denomina *campo de variación de* x, y para $\delta > 0$ suficientemente pequeño es un modelo infinitesimal de x. En el caso de una variación geodésica, es decir, cuando cada curva $u \rightsquigarrow x(u,v)$ es una geodésica, el campo de variación V es un campo de vectores de Jacobi, y el término $R_\gamma V = R(V,\gamma')\gamma'$ es clave en la fórmula de la segunda variación. En este punto es interesante señalar que si pensamos en la variación geodésica x de γ como una familia 1–paramétrica de partículas en caída libre, entonces el campo de variación V nos da la posición, relativa a γ, de partículas próximas. Así, la derivada V' proporciona la velocidad relativa y V'' la aceleración relativa. Asignándole a estas partículas masa unitaria, se puede interpretar la ecuación de Jacobi $V'' + R(V,\gamma')\gamma' = 0$ como la segunda ley de Newton, donde el vector curvatura $R(V,\gamma')\gamma'$ juega el papel de la fuerza. Esta interpretación resulta básica en el análisis de la curvatura como gravitación en Relatividad. (Consultar [O] para más detalles).

Por otra parte, recordemos que si $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es una base ortonormal del espacio tangente a una variedad M en un punto p, entonces las coordenadas normales $(x_1,\ldots,x_n)$ están dadas por

$$x_i\left(exp_p \sum_{j=1}^{n} t_j e_j\right) = t_i, \tag{1.1.11}$$

donde exp_p denota la aplicación exponencial. En [Gr] se prueba que los campos de vectores coordenados $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1,\ldots,n$, a lo largo de cualquier geodésica radial *se corresponden* con ciertos campos de vectores de Jacobi. Una interpretación similar se tiene en el caso de campos de vectores de Fermi. (Véase [Gr] para más detalles).

El campo de tensores simétrico $R_\gamma = R(\cdot,\gamma')\gamma'$ se denomina *operador de Jacobi a lo largo de* γ y, en geometría de Riemann, juega un papel básico en el estudio de la geometría intrínseca y extrínseca de las esferas geodésicas, tubos y reflexiones con respecto a puntos, curvas y subvariedades ([GrV1, GrV3]). Es importante señalar que, a su vez, estas propiedades resultan de gran importancia en la determinación de volúmenes, relacionados con aspectos fundamentales como la característica de Euler o los números de Chern.

En general, la determinación explícita de los campos de vectores de Jacobi resulta muy complicada, excepto en aquellos casos de variedades con tensor de curvatura muy simple. Sin embargo, muchas propiedades de la geometría de las variedades pueden ser analizadas sin conocer explícitamente los campos de Jacobi, utilizando los operadores de Jacobi. Todo lo expuesto anteriormente muestra la importancia del estudio del operador $R(\cdot,\gamma')\gamma'$. Generalizando este operador introducimos la siguiente definición:

Definición 1.1.1 *Sea (M,g) una variedad semi–Riemanniana y x un vector tangente a M en un punto p. Se define el operador de Jacobi asociado a x como la aplicación lineal $R_x : T_pM \longrightarrow T_pM$ dada por*

$$R_x(y) = R(y,x)x$$

para cualquier vector $y \in T_pM$.

Es inmediato comprobar, utilizando las identidades (1.1.6) y (1.1.7), que R_x es autoadjunto, es decir, $g(R_x y, z) = g(y, R_x z)$ para cualesquiera vectores y, $z \in T_pM$. Por tanto, cuando la métrica g sea definida positiva los operadores de Jacobi serán diagonalizables con autovalores reales. En consecuencia, el conocimiento tanto de los autovalores como de los autoespacios del operador de Jacobi proporcionará importante información sobre la curvatura de tales variedades.

El objetivo de esta memoria es el estudio de los operadores de Jacobi en variedades semi–Riemannianas desde dos puntos de vista. Por un lado analizaremos la constancia de los autovalores de dichos operadores y, por otra parte, estudiaremos ciertos casos en los que los operadores de Jacobi presentan un autoespacio distinguido. En la siguiente sección de este capítulo (§1.2) comentaremos los avances más destacados realizados hasta el momento en el primero de los problemas planteados, distinguiendo entre variedades Riemannianas, variedades de Lorentz y variedades semi–Riemannianas. En la sección 1.3 señalaremos algunos resultados conocidos sobre la influencia que, en la curvatura de la variedad, conlleva la existencia de autoespacios distinguidos para los operadores de Jacobi.

1.2 Autovalores del operador de Jacobi

Como indicamos en la introducción, la primera parte de esta memoria se centra en el estudio de la constancia de los autovalores de los operadores de Jacobi de una variedad semi–Riemanniana. Este problema fue planteado inicialmente, para variedades Riemannianas, por Osserman. Así, en [Os], basándose en los resultados obtenidos en [OS], Osserman planteó la siguiente conjetura: *si los autovalores de los operadores de Jacobi R_x de una variedad Riemanniana M son independientes de la elección del vector unitario $x \in T_pM$ y de la elección del punto $p \in M$, entonces M es llana o un espacio localmente simétrico de rango uno.* En esta sección exponemos diversos resultados obtenidos en relación con este problema, distinguiendo entre variedades Riemannianas, de Lorentz y semi–Riemannianas de signatura (p, q), $p, q > 1$.

1.2.1 El problema de Osserman en geometría de Riemann

Siguiendo la notación introducida en [GSV], diremos que una variedad de Riemann (M, g) es un *espacio de Osserman* si los autovalores de los operadores de Jacobi son constantes en el fibrado esférico de la variedad. En lo que sigue pondremos de manifiesto los resultados más importantes obtenidos hasta la fecha en el estudio de la clasificación de las variedades de Osserman. Estos han sido obtenidos por Chi en [Ch1, Ch2, Ch3], de donde entresacamos los siguientes resultados.

Teorema 1.2.1 [Ch1, Teor. 0] *Sea* (M^n, g) *una variedad Riemanniana de Osserman conexa. Si* $n \neq 4k$, $k > 1$, *entonces* M *es un espacio de curvatura seccional constante o una variedad Kähler de curvatura seccional holomorfa constante.*

Las líneas esenciales de la demostración pueden esbozarse de la siguiente forma. En cada punto $p \in M$, S_pM denota la esfera unitaria en T_pM. Así, los autovalores del operador de Jacobi permiten definir distribuciones sobre la esfera S_pM como sigue: si λ es un autovalor del operador de Jacobi, $\mathfrak{D}_\lambda : x \in S_pM \longrightarrow \mathfrak{D}_\lambda(x) = Ker(R_x - \lambda Id)$ es una distribución diferenciable en S_pM cuya dimensión coincide con la multiplicidad del autovalor λ. La no existencia de distribuciones continuas sobre las esferas de dimensión par permite asegurar la existencia de un único autovalor para el operador de Jacobi si la dimensión de M es impar. En consecuencia, en cada punto de una tal variedad el tensor curvatura es el de un espacio de curvatura seccional constante y, por tanto, el lema de Schur permite asegurar la constancia de la curvatura seccional en M. Para variedades de dimensión $4k+2$, de nuevo obstrucciones de tipo topológico permiten asegurar la existencia de dos únicos autovalores para el operador de Jacobi, uno de ellos con multiplicidad uno. A partir de este hecho, es posible construir una estructura casi compleja ortogonal, J, en M y mostrar que (M, g, J) es un espacio complejo generalizado. Finalmente, el uso de la segunda identidad de Bianchi permite obtener el resultado y mostrar que M debe ser un espacio de curvatura seccional constante o una variedad Kähler de curvatura seccional holomorfa constante.

En una variedad casi Hermítica (M, g, J), un plano π se dice holomorfo si $J\pi \subset \pi$. Dichos planos presentan fuertes peculiaridades cuando (M, g, J) es una variedad Kähler de curvatura seccional no negativa o no positiva. Restringiéndonos a este tipo de variedades, si x es un vector tangente en un punto arbitrario p, e y es un vector ortogonal a x tal que el plano generado por estos dos vectores tiene curvatura seccional máxima (o mínima), entonces el plano $\langle\{x, y\}\rangle$ es holomorfo, siendo la curvatura seccional ≥ 0 ó ≤ 0. Este argumento permite a Chi probar el siguiente resultado:

Teorema 1.2.2 [Ch1, Teor. 0] *Sea* (M, g, J) *una variedad Kähler conexa de curvatura seccional no negativa o no positiva. Si* M *es Osserman, entonces la curvatura seccional holomorfa es constante.*

En [Ch2], Chi consigue generalizar, en cierta medida, el resultado del teorema anterior para variedades cuaterniónicas. Así, se obtiene:

Teorema 1.2.3 [Ch2, Cor. 2] *Sea* (M, g, V) *una variedad cuaterniónica Kähler de Osserman compacta, conexa y simplemente conexa. Si el segundo número de Betti es cero, entonces* M *es el espacio proyectivo cuaterniónico.*

Por último indicar que, imponiendo algunas hipótesis adicionales, en [Ch3] Chi obtiene otro resultado relacionado con el problema de Osserman. En concreto, prueba el siguiente teorema:

Teorema 1.2.4 [Ch3, Teor. 1] *Los espacios localmente simétricos de rango uno de curvatura no constante están caracterizados por los dos axiomas siguientes:*

1. *Los operadores de Jacobi R_x tienen exactamente dos autovalores distintos constantes independientes del vector unitario x (contando multiplicidades).*

2. *Sean λ y μ los dos autovalores. Entonces, si $y \in \langle x \rangle \oplus Ker(R_x - \lambda Id)$ se cumple que $\langle y \rangle \oplus Ker(R_y - \lambda Id) = \langle x \rangle \oplus Ker(R_x - \lambda Id)$.*

El esbozo realizado anteriormente de la demostración del Teorema 1.2.1 sugiere una posible vía en la resolución del problema de Osserman en dos etapas. La primera de ellas sería la determinación de todos los posibles tensores curvatura que pueden ocurrir en un punto y, la segunda, consistiría en la obtención de la curvatura de la variedad a partir de la segunda identidad de Bianchi. Es por ello importante determinar los posibles tensores curvatura que se pueden presentar en un punto de la variedad. Gilkey, en [Gi], utiliza álgebras de Clifford para construir ejemplos en los que el tensor curvatura no se corresponde con el de un espacio simétrico de rango uno, mostrando que el operador de Jacobi puede presentar más de dos autovalores constantes.

Una estructura de *Cliff(ν)–módulo* real C sobre $\mathbb{R}^n$ es una colección c_i de endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ tales que $c_i c_j + c_j c_i = -2\delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq \nu$. (C puede interpretarse como una familia anticonmutativa de estructuras complejas en $\mathbb{R}^n$).

En [Gi] se prueba el siguiente resultado:

Teorema 1.2.5 [Gi, Teor. 2] *Supongamos que existe una estructura de Cliff(ν)–módulo sobre $\mathbb{R}^n$ y consideremos un conjunto de generadores $\{c_1, \ldots, c_\nu\}$ de esa estructura de tal forma que $c_i c_j + c_j c_i = -2\delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq \nu$. Si $\lambda_0, \ldots, \lambda_\nu$ son números reales cualesquiera, entonces*

$$R = \lambda_0 R^0 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\nu} (\lambda_i - \lambda_0) R^{c_i}$$

es un tensor curvatura tal que

$$R_x c_i(x) = \lambda_i c_i(x), \qquad R_x y = \lambda_0 y, \tag{1.2.1}$$

donde x, y son vectores unitarios en $\mathbb{R}^n$ e y es ortogonal a $\{x, c_1(x), \ldots, c_\nu(x)\}$. R^0 es el tensor curvatura $R^0(x, y)z = g(y, z)x - g(x, z)y$, definido sobre cualquier variedad de Riemann y R^{c_i} está dado por $R^{c_i}(x, y)z = g(c_i(x), z)c_i(y) - g(c_i(y), z)c_i(x) + 2g(c_i(x), y)c_i(z)$, siendo g una métrica c_i–Hermítica. (Nótese que siempre existen métricas de Riemann c_i–Hermíticas con respecto a todos los endomorfismos c_i de un Cliff(ν)–módulo).

La teoría de coordenadas normales muestra que un tensor curvatura de ese tipo puede ser realizado en un punto como el tensor curvatura de una métrica de Riemann definida en un entorno de ese punto.

Recientemente se ha estudiado una condición más débil que la condición de Osserman. Así, en [GSV] se dice que una variedad de Riemann (M, g) es de *Osserman en cada punto* si los autovalores del operador de Jacobi son independientes del vector unitario considerado en cada punto, pudiendo variar de un punto a otro. Debe resultar claro, según se ha comentado sobre la demostración del Teorema 1.2.1, que la condición de Osserman en cada punto es equivalente a la condición de Osserman sobre variedades conexas de dimensión impar. Sin embargo, en variedades de dimensión par tales condiciones no son equivalentes. De hecho, los espacios complejos generalizados construidos por Olszak [Ol] son variedades de dimensión cuatro de Osserman en cada punto que no son de Osserman. En [GSV] se muestra que si el número de autovalores del operador de Jacobi es menor o igual que dos, entonces la condición de Osserman en cada punto conlleva la condición de Osserman.

Teorema 1.2.6 [GSV, Cor. 2.5] *Sea (M^n, g) una variedad de Riemann conexa verificando la condición de Osserman en cada punto. Si $n > 4$ y el número de autovalores del operador de Jacobi no es mayor que dos, entonces (M, g) es una variedad de Osserman.*

1.2.2 El problema de Osserman en geometría de Lorentz

El estudio del operador de Jacobi en geometría de Lorentz presenta, independientemente de su importancia geométrica, un interés físico debido a la posibilidad de utilizarlo en la medición de la aceleración relativa de partículas en un sistema inercial [O, Cap. 12]. Este hecho ha motivado el estudio del operador de Jacobi en estas variedades y la consideración del problema de Osserman. En primer lugar ha de observarse que la existencia de vectores espaciales, temporales y nulos no sólo motiva el estudio separado del operador de Jacobi en cada uno de los casos, sino que hace que se presenten diferencias esenciales entre ellos.

Si x es un vector temporal unitario, la restricción de la métrica a $\langle x\rangle^\perp$ es definida positiva. Por tanto, el operador de Jacobi R_x es diagonalizable para cada vector temporal x, y se prueba en [GKV] el siguiente resultado:

Teorema 1.2.7 [GKV, Teor. 2.1] *Sea (M, g) una variedad de Lorentz. Si en un punto $p \in M$ los autovalores del operador de Jacobi R_x son independientes del vector temporal unitario x, entonces la curvatura seccional es constante en p.*

Cuando x sea un vector espacial, la restricción de la métrica a $\langle x\rangle^\perp$ es Lorentziana y, en consecuencia, el operador de Jacobi asociado a un vector espacial x no es necesariamente diagonalizable. Puesto que el tensor de Ricci es la traza del operador de Jacobi, toda variedad espacial o temporal de Osserman será de Einstein. Este hecho, junto con la existencia de bases de Singer–Thorpe para variedades de Lorentz de Einstein en dimensión cuatro, han permitido probar que:

Teorema 1.2.8 [GKV, Teor. 2.4] *Sea (M, g) una variedad de Lorentz con $\dim M \leq 4$. Si en un punto $p \in M$ los autovalores (posiblemente complejos) del operador de Jacobi R_x son independientes del vector espacial unitario x, entonces la curvatura seccional es constante en p.*

Este último resultado ha sido generalizado recientemente a dimensiones superiores, obteniéndose la siguiente equivalencia:

Teorema 1.2.9 [BBG, Teor. 1] *Sea (M, g) una variedad de Lorentz. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) La curvatura seccional es constante en $p \in M$.

(ii) (M, g) es temporal Osserman en el punto p.

(iii) (M, g) es espacial Osserman en el punto p.

Debe observarse que, como consecuencia, sobre variedades conexas los problemas puntual y global de Osserman son equivalentes.

El estudio de las variedades nulas Osserman presenta más dificultades, la primera de las cuales consiste en seleccionar un representante de cada dirección nula. Dado un vector nulo $u \in T_pM$, denotemos con $\bar{u}^\perp$ el espacio normal no degenerado, $\bar{u}^\perp = u^\perp/\langle u\rangle$, donde $u^\perp$ es el espacio ortogonal a $\langle u\rangle$. Entonces, el operador de Jacobi $\bar{R}_u : \bar{u}^\perp \longrightarrow \bar{u}^\perp$ se define como $\bar{R}_u(\bar{x}) = \pi(R_u(x))$, donde $\pi : u^\perp \longrightarrow \bar{u}^\perp$ es la proyección canónica y $x \in u^\perp$ con $\pi(x) = \bar{x}$. Si $z_p \in T_pM$ es un vector temporal unitario, se define la congruencia nula determinada por z_p, $N(z_p)$, como el conjunto de vectores nulos

$$N(z_p) = \Big\{ u \in T_pM \;/\; \langle u, u\rangle = 0, \quad \langle u, z_p\rangle = -1 \Big\}.$$

Es importante señalar que $N(z_p)$ contiene un único representante de cada dirección nula del espacio. Así, se dice que (M, g) es *nula Osserman en el punto p respecto a la dirección temporal z_p* si los autovalores de $\bar{R}_u$ son independientes del vector nulo $u \in N(z_p)$. La esfera celestial $S(z_p)$ asociada al vector temporal unitario z_p se define como

$$S(z_p) = \Big\{ x \in z_p^\perp \;/\; \langle x, x\rangle = 1 \Big\}.$$

Nótese que la congruencia nula $N(z_p)$ es canónicamente difeomorfa a la esfera celestial $S(z_p)$ mediante la aplicación $u \rightsquigarrow u - z_p = x$. Utilizando esta identificación, para cada $u \in N(z_p)$, $\bar{u}^\perp$ se puede identificar con $T_xS(z_p)$ y, por tanto, $\bar{R}_u$ puede ser usado para definir una transformación lineal $\mathfrak{R}_x : T_xS(z_p) \longrightarrow T_xS(z_p)$ vía la identificación anterior. Usando este hecho, en [GK2] se obtiene la clasificación local de las variedades de Lorentz nulas Osserman en dimensión cuatro:

Teorema 1.2.10 [GK2, Teor. 4.8] *Sea M una variedad nula Osserman con $\dim M = 4$. Entonces, el operador de Jacobi satisface $\bar{R}_u = c\overline{Id}$ para cada vector nulo $u \in N(z_p)$. Además,* *(i) Si* $c = 0$*, entonces* M *es un espacio de curvatura constante.*

(ii) Si $c \neq 0$*, entonces* M *es localmente isométrica a un producto deformado* $I \times_{f^2} N$*, donde* $I \subset \mathbb{R}$ *y* N *es una variedad de Riemann de curvatura constante.*

Es importante señalar que, aunque en [GKV] se obtienen algunos resultados para variedades nulas Osserman en dimensión mayor que cuatro, el problema de clasificar dichas variedades permanece aún abierto, así como las posibles relaciones existentes entre el carácter local y global para la condición de Osserman en vectores nulos.

1.2.3 El problema de Osserman en geometría semi–Riemanniana

En [BBR] se ha abordado el estudio de las variedades de Osserman con métrica de signatura $(+,+,-,-)$. Como se pondrá de manifiesto en el próximo capítulo de esta memoria, existen numerosos ejemplos no simétricos de tales variedades. Este hecho aparece ligado a la imposibilidad de diagonalizar el operador de Jacobi respecto a una base ortonormal.

El operador de Jacobi de una variedad con métrica de signatura $(+,+,-,-)$ queda completamente determinado por medio de su polinomio característico y su polinomio mínimo. Así, Blažić, Bokan y Rakić, analizando las distintas posibilidades para el operador de Jacobi obtienen el siguiente resultado:

Teorema 1.2.11 [BBR] *Sea* (M, g) *una variedad semi–Riemanniana con métrica de signatura* $(+,+,-,-)$*. Para cada vector unitario* $x \in T_pM$*, existe una base ortonormal de* $\langle x\rangle^\perp$ *de tal forma que el operador de Jacobi* R_x *se expresa en dicha base de una de las formas siguientes:*

a)

$$R_x = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

si $p_\lambda(R_x) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$ *y el operador de Jacobi es diagonalizable,*

b)

$$R_x = \begin{pmatrix} \varepsilon\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) & \varepsilon\,\frac{1}{2} & 0 \\ -\varepsilon\,\frac{1}{2} & \varepsilon\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

si $p_\lambda(R_x) = (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)$ *y el polinomio mínimo tiene una raíz doble,* *c)*

$$R_x = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \alpha & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \alpha \end{pmatrix}$$

si $p_\lambda(R_x) = (\lambda - \alpha)^3$ *y el polinomio mínimo tiene una raíz triple,*

d)

$$R_x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \beta \neq 0,$$

si $p_\lambda(R_x) = m_\lambda(R_x) = (\lambda - z)(\lambda - \bar{z})(\lambda - \gamma)$*, donde* $z = \alpha + i\beta$*,*

donde $p_\lambda(R_x)$ *y* $m_\lambda(R_x)$ *son el polinomio característico y el polinomio mínimo de* R_x*, respectivamente.*

Teniendo en cuenta que las formas anteriores pueden variar de un punto a otro, e incluso en cada punto, en [BBR] se estudia una condición más restrictiva que la propiedad de Osserman: la constancia de los polinomios característico y mínimo del operador de Jacobi. Finalmente, entresacamos los siguientes resultados:

Teorema 1.2.12 [BBR] *Sea* (M, g) *una variedad semi–Riemanniana con métrica de signatura* $(+, +, -, -)$*. Entonces, son equivalentes:*

a) M *es temporalmente Osserman con operador de Jacobi diagonalizable.*

b) M *es espacialmente Osserman con operador de Jacobi diagonalizable.*

c) M *es localmente isométrica a uno de los siguientes espacios:*

(c.1) Un espacio de curvatura seccional constante.

(c.2) Una variedad Kähler de curvatura seccional holomorfa constante.

(c.3) Una variedad para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante.

Las restantes posibilidades señaladas en el Teorema 1.2.11 son también estudiadas en [BBR], donde se muestra la imposibilidad del último caso señalado, esto es, el operador de Jacobi asociado a cada vector unitario no puede tener un autovalor complejo constante.

Finalmente señalemos que, por el momento, no se conocen otros ejemplos de variedades semi–Riemannianas de Osserman con métrica de signatura $(+,+,-,-)$ diferentes de los que construiremos en el capítulo siguiente de esta memoria. Es, por tanto, todavía un problema abierto la existencia de ejemplos no simétricos cuyo operador de Ricci no sea cero.

1.3 Autoespacios del operador de Jacobi

En una variedad Riemanniana, los autovalores del operador de Jacobi representan los valores extremos de la función curvatura seccional y, por tanto, los autoespacios asociados a dichos autovalores indican las direcciones en las que la curvatura seccional es extrema. Dado que el conocimiento de las soluciones de la ecuación de Jacobi permite describir localmente la geometría de una variedad mediante el uso de sistemas de coordenadas normales en entornos normales de un punto, o de Fermi en entornos tubulares de una subvariedad [Va], es importante conocer la existencia de posibles autoespacios distinguidos del operador de Jacobi, así como el comportamiento de éstos.

Es un hecho clásico que un espacio es de curvatura seccional constante si y sólo si no existen direcciones distinguidas en el mismo, esto es, el operador de Jacobi es un múltiplo escalar de la identidad.

Cuando una variedad M está equipada con alguna estructura adicional (compleja, cuaterniónica, casi contacto, ...) dicha estructura permite asociar un subespacio W del espacio tangente T_pM a cada vector unitario $x \in T_pM$. Así pues, el estudio del comportamiento del operador de Jacobi en relación a dicho subespacio distinguido es de especial interés. Señalemos, a modo de ejemplo, el siguiente resultado:

Teorema 1.3.1 [N1, Teor. 1] *Sea (M, g, J) una variedad Kähler de dimensión ≥ 4. Entonces, la curvatura seccional holomorfa es constante en el punto $p \in M$ si y sólo si Jx es un autovector del operador de Jacobi R_x para cada vector $x \in T_pM$.*

En geometría semi–Riemanniana, el estudio de los autoespacios del operador de Jacobi presenta diferencias cuando se considera de forma separada para vectores espaciales, temporales y nulos. Así, si x es un vector cualquiera, denotamos con $\bar{x}^\perp$ el espacio normal no degenerado, $\bar{x}^\perp = x^\perp/\langle x\rangle$, donde $x^\perp$ es el espacio ortogonal a $\langle x\rangle$. Si $u \in T_pM$ es nulo, se define el operador de Jacobi $\bar{R}_u : \bar{u}^\perp \longrightarrow \bar{u}^\perp$ como $\bar{R}_u(\bar{x}) = \pi(R(x,u)u)$, donde $x \in u^\perp$ con $\pi(x) = \bar{x}$, siendo $\pi : u^\perp \longrightarrow \bar{u}^\perp$ la proyección canónica. En [GK1] se prueba el siguiente resultado:

Teorema 1.3.2 [GK1] *Sea (M, g) una variedad semi–Riemanniana. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) (M, g) *es un espacio de curvatura seccional constante* c.

(ii) $R_x = cId$, *para cada vector espacial unitario* x.

(iii) $R_x = -cId$, *para cada vector temporal unitario* x.

(iv) $\bar{R}_u = 0$, *para cada vector nulo* u.

La condición $\bar{R}_u = c_u\overline{Id}$ (para algún $c_u \neq 0$), denominada *isotropía nula*, es estrictamente más débil que la constancia de la curvatura seccional. De hecho, se tiene que:

Teorema 1.3.3 *Sea (M, g) una variedad semi–Riemanniana. Entonces, $\bar{R}_u = c_u\overline{Id}$ para cada vector nulo u si y sólo si M es localmente conformalmente llana.*

Es importante señalar que la propiedad de isotropía anterior es invariante conforme. En el caso de variedades de Lorentz, tal propiedad permite caracterizar los modelos cosmológicos de Robertson–Walker [Ko], [H].

Además, señalemos que un aspecto de importancia en relación al estudio de los autoespacios del operador de Jacobi es el carácter paralelo de éstos a lo largo de geodésicas. Así, en [BV] se prueba que:

Teorema 1.3.4 *Una variedad de Riemann (M, g) es un espacio localmente simétrico si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

(C) Los autovalores del operador de Jacobi R_γ son constantes a lo largo de cada geodésica γ parametrizada por longitud de arco.

(P) Los autoespacios del operador de Jacobi R_γ son paralelos a lo largo de cada geodésica γ parametrizada por longitud de arco.

En vista del anterior resultado, es interesante considerar separadamente el estudio de las condiciones (C) y (P) anteriores como generalizaciones naturales de los espacios localmente simétricos. Además, debe observarse que la condición (C) anterior se cumple en cualquier variedad de Osserman.

Capítulo 2

Ejemplos de variedades de Osserman semi–Riemannianas

En este capítulo analizaremos diferentes tipos de variedades semi–Riemannianas de Osserman distinguiendo, a grandes rasgos, entre dos posibles casos, según el operador de Jacobi sea diagonalizable o no. Así, la primera parte del capítulo (sección 2.1) se dedica al estudio de varios ejemplos de variedades de Osserman en las que el operador de Jacobi es diagonalizable. Algunos de estos espacios están bien descritos en la bibliografía e incluimos tan sólo un esbozo de los mismos. Otra familia de ejemplos, las variedades paracuaterniónicas Kähler de curvatura seccional paracuaterniónica constante, no aparece convenientemente descrita en la bibliografía. En consecuencia, realizamos un análisis más detallado de tales variedades, el cual se completará con el estudio realizado en el Capítulo 4 (§4.8). Es importante señalar que todos estos ejemplos son localmente simétricos.

En las secciones 2, 3 y 4 construiremos varias familias de ejemplos de variedades semi–Riemannianas de Osserman en las cuales los operadores de Jacobi no serán diagonalizables. Para ello describiremos tres procesos distintos de construcción de variedades de este tipo, cada uno de los cuales mostrará, además, propiedades particulares relativas a la curvatura de las mismas.

Los ejemplos que construiremos en la segunda sección de este capítulo ponen de manifiesto la mayor complejidad del estudio del problema de Osserman en geometría semi–Riemanniana en comparación con los casos Riemanniano y Lorentziano, pues muestran la existencia de variedades semi–Riemannianas de Osserman con métrica de cualquier signatura (p, q), $p, q \geq 2$, que no son localmente simétricas (de hecho, ni siquiera localmente homogéneas). Además, estos ejemplos permiten observar diferencias importantes entre el polinomio mínimo y el polinomio característico de los operadores de Jacobi, diferencias que analizamos en detalle.

La sección 2.3 está dedicada al estudio del problema de Osserman en variedades dotadas de una conexión afín sin torsión, lo que nos permite, utilizando la extensión de Riemann de una tal conexión al fibrado cotangente de la variedad, obtener una amplia familia de ejemplos de variedades semi–Riemannianas de Osserman que no son localmente simétricas. Además, esta construcción permitirá interpretar geométricamente algunas de las métricas construidas en la sección anterior.

En la cuarta y última sección, partiendo de cualquier variedad semi–Riemanniana y de un tensor $(0, 2)$–simétrico definido sobre ella, definimos sobre el fibrado tangente de dicha variedad una métrica semi–Riemanniana de signatura (n, n), que llamamos levantamiento completo deformado de la métrica de la variedad base. Esta métrica permitirá obtener una nueva familia de variedades semi–Riemannianas de Osserman con operador de Jacobi no diagonalizable. En algunos casos particulares dotamos a estas variedades de Osserman de una estructura Kähler o para–Kähler, que posee propiedades excepcionales en relación con la acotación de su curvatura seccional holomorfa o paraholomorfa, respectivamente, propiedades que estudiamos en cada uno de los dos casos.

2.1 Ejemplos con operador de Jacobi diagonalizable

Las variedades semi–Riemannianas más sencillas, desde el punto de vista de su curvatura, son las de curvatura seccional constante. En tal caso, el tensor curvatura se expresa en cada punto como

$$R(x, y)z = c\left\{g(y, z)x - g(x, z)y\right\},$$

donde c es el valor constante de la curvatura seccional. Es inmediato comprobar, utilizando la expresión anterior, que el operador de Jacobi de tales variedades, asociado a cualquier vector unitario x, es diagonalizable con un único autovalor, $R_x = c\,\varepsilon_x Id$ ($\varepsilon_x = g(x, x)$).

En lo que sigue analizamos ciertas variedades semi–Riemannianas en las que el operador de Jacobi posee dos autovalores. Nótese que, además de las variedades Kähler indefinidas y de las variedades cuaterniónicas Kähler indefinidas (que, como casos particulares, se presentan en geometría Riemanniana), aparecen dos clases de variedades estrictamente semi–Riemannianas, las variedades para–Kähler y las paracuaterniónicas Kähler.

2.1.1 Variedades Kähler indefinidas

Sea M una variedad diferenciable $2n$–dimensional. Como es bien conocido, una tal variedad se dirá *compleja* cuando sea posible construir sobre ella un sistema de coordenadas complejas, es decir, un atlas constituido por funciones valuadas complejas cuyos cambios de coordenadas sean aplicaciones holomorfas. Tal condición supone una reducción del grupo estructural de la variedad real subyacente al grupo lineal complejo $Gl(n, \mathbb{C})$. Así, una variedad se dirá que es *casi compleja* si su grupo de estructura admite una reducción a $Gl(n, \mathbb{C})$. Tal reducción es equivalente a la existencia de un campo de tensores J de tipo $(1, 1)$ de tal forma que $J^2 = -Id$, al que se llamará *estructura casi compleja*. Nos referiremos al par (M, J) como *variedad casi compleja*. La existencia de una estructura casi compleja no permite, en general, asegurar la posibilidad de construir una estructura compleja sobre la variedad. De hecho, la condición necesaria y suficiente para que ello ocurra, [KN], puede enunciarse en términos de la anulación del producto de Nijenhuis de la estructura casi compleja, $[J, J] = 0$, donde

$$[J, J](X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y].$$

En tal caso, se dirá que J es una *estructura compleja* sobre la variedad y que (M, J) es una *variedad compleja*.

Una métrica semi–Riemanniana g en (M, J) se dirá que es *casi Hermítica indefinida* si es adaptada a la estructura casi compleja, es decir, si J es una isometría de cada espacio tangente, esto es,

$$g(JX, JY) = g(X, Y),$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y en M. De esta forma, nos referiremos a (g, J) como *estructura casi Hermítica indefinida* y al triple (M, g, J) como *variedad casi Hermítica indefinida*. Nótese que, entonces, la signatura de g ha de ser necesariamente $(2p, 2q)$, $p, q \geq 0$.

De forma natural, cada estructura casi Hermítica indefinida define una 2–forma no degenerada, llamada *forma de Kähler* y dada por

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY),$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y en M. Se dirá que (g, J) es una *estructura Kähler indefinida* cuando sea una estructura Hermítica indefinida cuya 2–forma de Kähler sea cerrada. En tal caso, nos referiremos a (M, g, J) como *variedad Kähler indefinida*.

La expresión

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) = -3d\Omega(X, Y, Z) + 3d\Omega(X, JY, JZ) + g(JX, [J, J](Y, Z))$$

permite caracterizar las variedades Kähler indefinidas mediante la propiedad $\nabla J = 0$, donde ∇ es la conexión de Levi Civita de la métrica y J la estructura compleja.

Mediante el uso de esta última caracterización se obtienen de forma inmediata las siguientes identidades para el tensor curvatura de una variedad Kähler indefinida,

$$R(X, Y, JZ, JW) = R(JX, JY, Z, W) = R(X, Y, Z, W),$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y, Z, W en M. Esta condición impone fuertes restricciones en la geometría de las variedades consideradas. Así, por ejemplo, una variedad Kähler indefinida es de curvatura seccional constante si y sólo si es llana. Este hecho hace que el estudio de la curvatura seccional no sea de gran importancia en variedades Kähler indefinidas. Se define la *curvatura seccional holomorfa* como la restricción de la función curvatura seccional a planos holomorfos no degenerados (es decir, planos π tales

que $J\pi \subset \pi$ y donde la restricción de la métrica es no singular), teniéndose entonces la expresión
$$H(\pi) = \frac{R(x, Jx, Jx, x)}{g(x, x)g(Jx, Jx) - g(x, Jx)^2},$$
donde $\{x, Jx\}$ es una base del plano holomorfo π.

De especial importancia son las variedades Kähler indefinidas donde la curvatura seccional holomorfa es constante. Tales variedades han sido especialmente estudiadas por Barros y Romero [BR], de donde entresacamos los siguientes resultados.

En primer lugar, es importante observar que el conocimiento de la curvatura seccional holomorfa de variedades Kähler indefinidas permite reconstruir el tensor curvatura, como muestra el siguiente resultado:

Teorema 2.1.1 [BR] *Sea (M, g, J) una variedad Kähler indefinida y $p \in M$. Entonces, la curvatura seccional holomorfa H es constante c en el punto p si y sólo si el tensor curvatura en p se expresa como*

$$R(x, y)z = \frac{c}{4}\Big\{g(y, z)x - g(x, z)y - g(Jx, z)Jy + g(Jy, z)Jx - 2g(Jx, y)Jz\Big\}$$

para cualesquiera x, y, $z \in T_pM$.

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el carácter localmente simétrico de las variedades Kähler indefinidas de curvatura seccional holomorfa constante. Además, mediante el uso de tal propiedad, se obtiene el siguiente resultado de clasificación:

Teorema 2.1.2 [BR] *Sea (M, g, J) una variedad Kähler indefinida conexa, simplemente conexa y completa de signatura $(2p, 2q)$, $p, q \geq 0$. Si la curvatura seccional holomorfa H es constante c, entonces M es holomórficamente isométrica a*

(i) el espacio proyectivo complejo indefinido $\mathbb{C}P^n_\nu(c)$ de signatura $(2p, 2q)$, si $c > 0$, ó

(ii) el espacio hiperbólico complejo indefinido $\mathbb{C}H^n_\nu(c)$ de signatura $(2p, 2q)$, si $c < 0$, ó

(iii) el espacio Euclídeo complejo indefinido $\mathbb{C}^n_\nu$ de signatura $(2p, 2q)$, si $c = 0$.

Observación 2.1.1 Los resultados anteriores permiten estudiar de forma sencilla el operador de Jacobi de una variedad Kähler indefinida $2n$–dimensional de curvatura seccional holomorfa constante c. Así, el operador de Jacobi asociado a cualquier vector unitario x es diagonalizable de la forma

$$R_x = diag\left[c\varepsilon_x, \frac{c}{4}\varepsilon_x, \dots, \frac{c}{4}\varepsilon_x\right], \qquad \varepsilon_x = g(x, x),$$

con respecto a cualquier base ortonormal de $\langle x\rangle^\perp$ de la forma $\{Jx, z_1, \dots, z_{2n-2}\}$. Es importante observar que el operador de Jacobi tiene sólo dos autovalores (que son distintos si la curvatura seccional holomorfa no es nula), y que uno de ellos tiene multiplicidad uno. Además, el autoespacio asociado a dicho autovalor distinguido está dado por $\langle Jx \rangle$. Nótese también que, por ser $g(Jx, Jx) = g(x, x)$, la restricción de la métrica al subespacio $\langle \{x, Jx\} \rangle$ es siempre definida (positiva o negativa según x sea espacial o temporal, respectivamente).

Finalmente, destacamos el siguiente criterio de caracterización de la constancia de la curvatura seccional holomorfa, que será de utilidad en el siguiente capítulo de esta memoria. Este criterio puede considerarse una generalización del criterio de Cartan para la constancia de la curvatura seccional (véanse también [DN1], [N1] y [BCGHM]).

Teorema 2.1.3 [BR] *Sea (M^n, g, J) una variedad Kähler indefinida conexa, con $n \geq 4$. Entonces, la curvatura seccional holomorfa de M es constante si y sólo si la condición $R(x, Jx, x, Jy) = 0$ se cumple para cualesquiera vectores unitarios x, y tangentes a la variedad, con $y \in \langle \{x, Jx\} \rangle^\perp$.*

2.1.2 Variedades para–Kähler

Una 2–forma Ω sobre una variedad $2n$–dimensional M se dice *casi simpléctica* si es no degenerada, es decir, si $\Omega^n \neq 0$, y el par (M, Ω) se denomina entonces *variedad casi simpléctica*. Si la 2–forma Ω es, además, cerrada (es decir, $d\Omega = 0$), entonces Ω se llama *simpléctica* y nos referimos al par (M, Ω) como *variedad simpléctica*. Se llama *subvariedad Lagrangiana* de una variedad casi simpléctica (M^{2n}, Ω) a una subvariedad inmersa n–dimensional sobre la que Ω induce la forma cero [V].

Una *variedad para–Kähler* es una variedad simpléctica localmente difeomorfa a un producto de subvariedades Lagrangianas. Este hecho da lugar a una descomposición del fibrado tangente, TM, en suma de Whitney de subfibrados Lagrangianos, $TM = L \oplus L'$ y, así, se dice que una variedad casi simpléctica (M, Ω) es *casi para–Hermítica* si su fibrado tangente se descompone en suma de Whitney de subfibrados Lagrangianos.

Inducido por la descomposición $TM = L \oplus L'$, el campo de tensores J de tipo $(1, 1)$ definido por $J = \pi_L - \pi_{L'}$ (siendo π_L y $\pi_{L'}$ las proyecciones de TM sobre L y L' respectivamente) determina una estructura casi producto en M, de tal forma que $\Omega(JX, JY) = -\Omega(X, Y)$ para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre la variedad. Dado que las dimensiones de las distribuciones correspondientes a los autovalores 1 y -1 asociados a J coinciden, nos referiremos a J como *estructura casi paracompleja* [CFG]. Definiendo ahora $g(X, Y) = \Omega(X, JY)$, g resulta ser un campo de tensores simétrico de tipo $(0, 2)$ no degenerado sobre M y, además,

$$g(JX, JY) = -g(X, Y)$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre M. Así, diremos que (g, J) define una *estructura casi para–Hermítica* en M y nos referiremos a (M, g, J) como *variedad casi* *para–Hermítica*. Nótese que la signatura de una tal métrica g debe ser necesariamente (n, n).

La siguiente identidad muestra la relación existente entre la 2–forma Ω, la integrabilidad de la estructura casi paracompleja J y la conexión de Levi Civita asociada a la métrica g [Cr]:

$$2g((\nabla_X J)Y, Z) = -3d\Omega(X, Y, Z) - 3d\Omega(X, JY, JZ) - g(JX, [J, J](Y, Z))$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y, Z sobre M, donde $[J, J]$ denota el producto de Nijenhuis de J, es decir, $[J, J](X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] + [X, Y]$. Tal ecuación permite caracterizar las variedades para–Kähler por medio del paralelismo de la estructura casi paracompleja J respecto a la conexión de Levi Civita de la métrica, $\nabla J = 0$. El significado de esta condición se ve reflejado en el tensor curvatura de la variedad a través de las siguientes identidades:

$$R(X, Y, JZ, JW) = R(JX, JY, Z, W) = -R(X, Y, Z, W),$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y, Z, W en M. Estas condiciones imponen fuertes restricciones en la geometría de tales variedades. Por ejemplo, una variedad para–Kähler es de curvatura seccional constante si y sólo si es llana. Este hecho motiva la definición de una nueva función curvatura, la *curvatura seccional paraholomorfa*, H, que se define como la restricción de la curvatura seccional a planos paraholomorfos ($J\pi \subset \pi$) no degenerados, es decir,

$$H(\pi) = \frac{R(x, Jx, Jx, x)}{g(x, x)g(Jx, Jx) - g(x, Jx)^2},$$

siendo $\{x, Jx\}$ una base del plano paraholomorfo considerado.

De especial importancia son las variedades para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante, que analizamos a continuación. En primer lugar, nótese que el conocimiento de la curvatura seccional paraholomorfa permite reconstruir el tensor curvatura, como muestra el siguiente resultado:

Teorema 2.1.4 [GM1] *Sea (M, g, J) una variedad para–Kähler y $p \in M$. Entonces, la curvatura seccional paraholomorfa H es constante c en el punto p si y sólo si el tensor curvatura en p se expresa como*

$$R(x, y)z = \frac{c}{4}\Big\{g(y, z)x - g(x, z)y + g(Jx, z)Jy - g(Jy, z)Jx + 2g(Jx, y)Jz\Big\},$$

para cualesquiera x, y, $z \in T_pM$.

Utilizando este teorema se prueba de forma sencilla que las variedades para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante son localmente simétricas, lo que permite clasificar tales variedades. Gadea y Montesinos Amilibia prueban el siguiente resultado de clasificación:

Teorema 2.1.5 ([CFG],[GM1]) *Sea (M, g, J) una variedad para–Kähler conexa, simplemente conexa y completa de signatura (n, n). Si la curvatura seccional paraholomorfa H es constante c, entonces M es paraholomórficamente isométrica a*

(i) el espacio proyectivo paracomplejo $P_n(B)$ de signatura (n, n), si $n > 1$ y $c \neq 0$, ó

(ii) el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^{2n}_n$ de signatura (n, n), si $n \geq 1$ y $c = 0$, ó

(iii) el espacio $(\mathbb{R}^2, g, J)$, donde $g = \frac{4}{c}(cosh^2 2ydx \otimes dx - dy \otimes dy)$ y J es la estructura casi paracompleja $J = -\frac{1}{cosh\, 2y}\frac{\partial}{\partial x} \otimes dy - cosh\, 2y \frac{\partial}{\partial y} \otimes dx$ (siendo (x, y) las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^2$), si $n = 1$ y $c \neq 0$.

Observación 2.1.2 Los resultados previos permiten estudiar el operador de Jacobi de una variedad para–Kähler $2n$–dimensional de curvatura seccional paraholomorfa constante c. Así, el operador de Jacobi asociado a cualquier vector unitario x es diagonalizable de la forma

$$R_x = diag\left[c\varepsilon_x, \frac{c}{4}\varepsilon_x, \dots, \frac{c}{4}\varepsilon_x\right], \qquad \varepsilon_x = g(x, x),$$

con respecto a cualquier base ortonormal de $\langle x \rangle^\perp$ de la forma $\{Jx, z_1, \dots, z_{2n-2}\}$. Es importante destacar que el operador de Jacobi tiene sólo dos autovalores (distintos si la curvatura seccional paraholomorfa no es nula), y que uno de ellos tiene multiplicidad uno. Además, el autoespacio asociado a dicho autovalor distinguido está dado por $\langle Jx \rangle$. Nótese también que, por ser $g(Jx, Jx) = -g(x, x)$, la restricción de la métrica al subespacio $\langle \{x, Jx\} \rangle$ tiene siempre signatura $(+, -)$.

Finalmente, es interesante disponer de un criterio que permita caracterizar las variedades para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante. Así, en [BCGHV1] hemos probado el siguiente resultado, que será de importancia en el desarrollo del capítulo siguiente de esta memoria (véase también [Vz]).

Teorema 2.1.6 *Sea (M^{2n}, g, J) una variedad para–Kähler conexa, con $n \geq 2$. Entonces, la curvatura seccional paraholomorfa es constante si y sólo si $R(x, Jx, x, Jy) = 0$ para cualesquiera vectores unitarios x, y tangentes a la variedad, con $y \in \langle \{x, Jx\} \rangle^\perp$.*

2.1.3 Variedades cuaterniónicas Kähler indefinidas

Una *estructura casi cuaterniónica V* sobre una variedad diferenciable M es un subfibrado 3–dimensional del fibrado de endomorfismos $End\ (TM)$, generado localmente por estructuras casi complejas anticonmutativas $\{J_1, J_2, J_3\}$ tales que $J_3 = J_1 J_2$. Una base de este tipo se denomina *base adaptada o admisible*. En este caso, nos referiremos al par (M, V) como *variedad casi cuaterniónica*. Además, si existe una conexión sin torsión ∇ que deja invariante la estructura V, diremos que ésta es una *estructura cuaterniónica* y el par (M, V) se llama, entonces, *variedad cuaterniónica*.

Una métrica semi–Riemanniana g sobre M se dirá *Hermítica indefinida* con respecto a una estructura casi cuaterniónica V si cumple que

$$g(J_iX, J_iY) = g(X, Y), \quad i = 1, 2, 3,$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre M y cualquier base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ de V. En este caso, diremos que (V, g) es una *estructura casi cuaterniónica Hermítica indefinida* sobre M y nos referiremos a (M, g, V) como *variedad casi cuaternió-nica Hermítica indefinida*. Nótese que, como consecuencia, la signatura de la métrica g ha de ser necesariamente $(4p, 4q)$, $p, q \geq 0$. Finalmente, si V es cuaterniónica con respecto a la conexión de Levi Civita asociada a g, es decir, si esta conexión deja invariante la estructura V, entonces el par (V, g) se denomina *estructura cuaterniónica Kähler indefinida* sobre M, y nos referiremos al triple (M, g, V) como *variedad cuaterniónica Kähler indefinida*.

En una variedad casi cuaterniónica Hermítica indefinida (M, g, V), el carácter invariante de la estructura V con respecto a la conexión de Levi Civita asociada a g equivale a que las condiciones

$$\begin{aligned}
\nabla_X J_1 &= & & q(X)J_2 - r(X)J_3, \\
\nabla_X J_2 &= -q(X)J_1 & & + p(X)J_3, \\
\nabla_X J_3 &= r(X)J_1 - p(X)J_2, & &
\end{aligned}$$

se cumplan para cualquier campo de vectores X en M y cualquier base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ de V, siendo p, q y r 1–formas locales sobre la variedad. La condición Kähler se refleja, entonces, en el tensor curvatura de la variedad mediante las condiciones

$$\begin{aligned}
[R(X,Y), J_1] &= & & C(X,Y)J_2 - B(X,Y)J_3, \\
[R(X,Y), J_2] &= -C(X,Y)J_1 & & + A(X,Y)J_3, \\
[R(X,Y), J_3] &= B(X,Y)J_1 - A(X,Y)J_2, & &
\end{aligned}$$

para cualquier base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ de V, siendo A, B y C las 2–formas locales definidas por $A = 2(dp + r \wedge q)$, $B = 2(dr + q \wedge p)$, $C = 2(dq + p \wedge r)$.

Si (M, g, V) es una variedad cuaterniónica Kähler indefinida, se define una *sección cuaterniónica* en M como un subespacio del espacio tangente a la variedad en un punto que admite una base de la forma $\{x, J_1x, J_2x, J_3x\}$, denotando entonces por $Q(x)$ dicha sección. Ahora, fijado un punto $p \in M$ y analizando los planos no degenerados contenidos en las secciones cuaterniónicas de T_pM, diremos que la variedad tiene *curvatura seccional cuaterniónica* constante en p si la curvatura seccional es constante en todos los planos no degenerados contenidos en cada sección cuaterniónica en p. Si esta propiedad se cumple independientemente del punto elegido, diremos entonces que (M, g, V) es una variedad cuaterniónica Kähler indefinida de curvatura seccional cuaterniónica constante.

En dimensión cuatro, las variedades cuaterniónicas Kähler se corresponden con las variedades orientables y la curvatura seccional cuaterniónica es constante si y sólo si lo es la curvatura seccional. Este hecho motiva nuestro interés en aquellas variedades cuaterniónicas Kähler de dimensión ≥ 8. Cuando la dimensión es ≥ 8, las identidades anteriores permiten probar dos propiedades importantes: por una parte, que la variedad es Einstein y, en segundo lugar, que la curvatura seccional de tales variedades es constante si y sólo si es nula.

Las variedades cuaterniónicas Kähler indefinidas de curvatura seccional cuaterniónica constante han sido estudiadas por Pérez y Santos en [PS], en donde encontramos, entre otros, los siguientes resultados.

En primer lugar, la constancia de la curvatura seccional cuaterniónica permite reconstruir el tensor curvatura de la variedad considerada, como muestra el siguiente teorema:

Teorema 2.1.7 [PS] *Sea (M^{4n}, g, V) una variedad cuaterniónica Kähler indefinida, con $n \geq 2$, y $p \in M$. Entonces, la curvatura seccional cuaterniónica es constante c en el punto p si y sólo si el tensor curvatura en p se expresa como*

$$R(x,y)z = \frac{c}{4}\left\{ g(y,z)x - g(x,z)y - \sum_{i=1}^{3}\Big\{ g(J_i x, z)J_i y - g(J_i y, z)J_i x + 2g(J_i x, y)J_i z \Big\} \right\},$$

para cualesquiera vectores x, y, z tangentes a M en p y cualquier base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ de V.

Nótese que el Teorema 2.1.7 permite probar que una variedad cuaterniónica Kähler indefinida de curvatura seccional cuaterniónica constante es localmente simétrica. Como consecuencia, es posible clasificar estas variedades, como muestra el siguiente resultado:

Teorema 2.1.8 [W] *Sea (M, g, V) una variedad cuaterniónica Kähler indefinida conexa, simplemente conexa y completa de signatura $(4p, 4q)$, $p, q \geq 0$. Si la curvatura seccional cuaterniónica es constante c, entonces M es isométrica a*

(i) el espacio proyectivo cuaterniónico indefinido $\mathbb{Q}P^n_\nu(c)$ de signatura $(4p, 4q)$, en el caso $c > 0$, ó

(ii) el espacio hiperbólico cuaterniónico indefinido $\mathbb{Q}H^n_\nu(c)$ de signatura $(4p, 4q)$, en el caso $c < 0$, ó

(iii) el espacio Euclídeo indefinido $\mathbb{R}^n_\nu$ de signatura $(4p, 4q)$, si $c = 0$.

Observación 2.1.3 El teorema anterior permite determinar el operador de Jacobi de una variedad cuaterniónica Kähler indefinida $4n$–dimensional de curvatura seccional cuaterniónica constante c. Así, el operador de Jacobi asociado a cualquier vector unitario x es diagonalizable de la forma

$$R_x = diag\left[c\varepsilon_x, c\varepsilon_x, c\varepsilon_x, \frac{c}{4}\varepsilon_x, \dots, \frac{c}{4}\varepsilon_x\right], \qquad \varepsilon_x = g(x,x),$$

con respecto a una base ortonormal de $\langle x\rangle^\perp$ de la forma $\{J_1x, J_2x, J_3x, z_1, \dots, z_{4n-4}\}$. Nótese que R_x tiene sólo dos autovalores (que son distintos si la curvatura seccional cuaterniónica no es nula), y que uno de ellos tiene multiplicidad tres. Además, el autoespacio asociado a dicho autovalor distinguido está dado por $\langle\{J_1x, J_2x, J_3x\}\rangle$. Nótese también que, por ser $g(J_ix, J_ix) = g(x,x)$, $i = 1,2,3$, la restricción de la métrica a la sección cuaterniónica asociada a x, $Q(x)$, es siempre definida (positiva o negativa dependiendo de si x es espacial o temporal respectivamente).

Para finalizar esta subsección destacamos un resultado de caracterización de las variedades cuaterniónicas Kähler indefinidas de curvatura seccional cuaterniónica constante, que será de utilidad en el siguiente capítulo de esta memoria.

Teorema 2.1.9 [PS] *Sea (M^{4n}, g, V) una variedad cuaterniónica Kähler indefinida conexa, con $n \geq 2$. Entonces, la curvatura seccional cuaterniónica de M es constante si y sólo si para cualquier base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ de V se cumple que $R(x, J_ix, x, J_iy) = 0$, para algún $i = 1,2,3$ y para cualesquiera vectores unitarios x, y tangentes a la variedad, con $y \in Q(x)^\perp$.*

2.1.4 Variedades paracuaterniónicas Kähler

En esta subsección utilizaremos una terminología similar a la empleada en la anterior para las variedades cuaterniónicas.

Así, si M es una variedad diferenciable, se define una *estructura casi paracuaterniónica* V sobre M como un subfibrado 3–dimensional del fibrado de endomorfismos $End\ (TM)$, generado localmente por estructuras anticonmutativas $\{J_1, J_2, J_3\}$ tales que J_1 y J_2 son paracomplejas y $J_3 = J_1J_2$. Una base de este tipo se denomina *base adaptada o admisible* y nos referiremos al par (M, V) como *variedad casi paracuaterniónica*. Además, si existe una conexión sin torsión ∇ que deje invariante la estructura V diremos que ésta es una *estructura paracuaterniónica* y el par (M, V) se llamará en este caso *variedad paracuaterniónica*.

Una métrica semi–Riemanniana g sobre M se dirá *compatible* con una estructura casi paracuaterniónica V si cumple que

$$g(J_iX, J_iY) = -\sigma_i g(X,Y), \quad i = 1,2,3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 1,\ \sigma_3 = -1,$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre M y cualquier base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ de V. Si esto se cumple, diremos entonces que (V, g) es una *estructura casi paracuaterniónica Hermítica* sobre M, y nos referiremos a (M, g, V) como *variedad casi paracuaterniónica Hermítica*. Nótese que, como consecuencia, la signatura de g ha de ser necesariamente $(2n, 2n)$. Por último, si V es paracuaterniónica con respecto a la conexión de Levi Civita asociada a g, entonces el par (V, g) se denomina *estructura paracuaterniónica Kähler*, y nos referiremos al triple (M, g, V) como *variedad paracuaterniónica Kähler*.

Las variedades paracuaterniónicas Kähler han sido recientemente estudiadas por Blažić [Bl] pero, ante la falta de referencias bibliográficas sobre las mismas, hemos iniciado un estudio sistemático de su curvatura. A continuación exponemos algunos resultados básicos que serán necesarios en el próximo capítulo. Estos se verán finalmente completados con el estudio desarrollado en el Capítulo 4 (§4.8) de esta memoria.

En relación con el carácter Kähler de una variedad paracuaterniónica tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1.1 *Sea (M, g, V) una variedad casi paracuaterniónica Hermítica. Entonces, el subfibrado V es preservado por la conexión de Levi Civita de g si y sólo si*

$$\begin{aligned} \nabla_X J_1 &= && q(X)J_2 - r(X)J_3, \\ \nabla_X J_2 &= -q(X)J_1 && + p(X)J_3, \\ \nabla_X J_3 &= -r(X)J_1 + p(X)J_2, && \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

donde $\{J_1, J_2, J_3\}$ es cualquier base local adaptada de V, X es un campo de vectores arbitrario en M y p, q, r son 1–formas definidas localmente sobre la variedad.

Demostración. Es suficiente probar que si la variedad es Kähler y $\{J_1, J_2, J_3\}$ es una base local adaptada de la estructura V, entonces se cumple (2.1.1). Para ello, nótese en primer lugar que, por ser Kähler la estructura paracuaterniónica, se tiene que $\nabla_X J_i \in V$ $(i = 1, 2, 3)$ para cualquier campo de vectores X, siendo ∇ la conexión de Levi Civita asociada a g. Es decir,

$$\begin{aligned} \nabla_X J_1 &= a_{11}(X)J_1 + a_{12}(X)J_2 + a_{13}(X)J_3, \\ \nabla_X J_2 &= a_{21}(X)J_1 + a_{22}(X)J_2 + a_{23}(X)J_3, \\ \nabla_X J_3 &= a_{31}(X)J_1 + a_{32}(X)J_2 + a_{33}(X)J_3, \end{aligned}$$

donde a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, son 1–formas sobre la variedad. Ahora, teniendo en cuenta que $g((\nabla_X J_i)Y, J_i Y) = 0$ para cualquier campo de vectores Y y para $i = 1, 2, 3$, se sigue que

$$\begin{aligned} \nabla_X J_1 &= && a_{12}(X)J_2 + a_{13}(X)J_3, \\ \nabla_X J_2 &= a_{21}(X)J_1 && + a_{23}(X)J_3, \\ \nabla_X J_3 &= a_{31}(X)J_1 + a_{32}(X)J_2. && \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Por otra parte, es fácil comprobar que $g((\nabla_X J_r)X, J_s X) + g(J_r X, (\nabla_X J_s)X) = 0$ siempre que $r \neq s$. Entonces, aplicándolo para (J_1, J_2) y utilizando la condición (2.1.2) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= g((\nabla_X J_1)X, J_2X) + g(J_1X, (\nabla_X J_2)X) \\ &= a_{12}(X)g(J_2X, J_2X) + a_{21}(X)g(J_1X, J_1X) \\ &= -a_{12}(X)g(X,X) - a_{21}(X)g(X,X) \\ &= -g(X,X)\Big\{a_{12}(X) + a_{21}(X)\Big\}, \end{aligned}$$

de donde $a_{21}(X) = -a_{12}(X)$. Utilizando el mismo razonamiento con (J_1, J_3) y (J_2, J_3) se obtiene que $a_{31}(X) = a_{13}(X)$ y $a_{32}(X) = a_{23}(X)$, de forma que (2.1.1) se sigue de (2.1.2) utilizando estas tres identidades. □

En lo que sigue nos limitaremos al caso de dimensión ≥ 8. Para los siguientes resultados será interesante conocer la influencia del carácter Kähler de una estructura paracuaterniónica sobre el tensor curvatura de la variedad. Sea entonces (M, g, V) una variedad paracuaterniónica Kähler y $\{J_1, J_2, J_3\}$ una base local adaptada de V. Se sigue de (2.1.1) que

$$\begin{aligned} [R(X,Y), J_1] &= \quad C(X,Y)J_2 - B(X,Y)J_3, \\ [R(X,Y), J_2] &= -C(X,Y)J_1 \quad + A(X,Y)J_3, \\ [R(X,Y), J_3] &= -B(X,Y)J_1 + A(X,Y)J_2, \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

donde $A = 2(dp - q \wedge r)$, $B = 2(dr - p \wedge q)$, $C = 2(dq - p \wedge r)$. Después de algunos cálculos se obtiene que

$$\begin{aligned} A(X,Y) &= \frac{1}{2n}\, tr\; J_1 R(X,Y), \\ B(X,Y) &= \frac{1}{2n}\, tr\; J_2 R(X,Y), \\ C(X,Y) &= \frac{1}{2n}\, tr\; J_3 R(X,Y), \end{aligned}$$

siendo $dim\, M = 4n$.

Entonces, si $n \geq 2$, se tiene que

$$\rho(X,Y) = -(n+2)A(X, J_1Y) = -(n+2)B(X, J_2Y) = (n+2)C(X, J_3Y), \tag{2.1.4}$$

donde ρ denota el tensor de Ricci de la variedad (M, g) y, por lo tanto, las expresiones en (2.1.3) se reducen a

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y,J_1Z,J_1W)+R(X,Y,Z,W)\\
&\qquad=\frac{-1}{n+2}\Big\{\rho(X,J_3Y)g(Z,J_3W)-\rho(X,J_2Y)g(Z,J_2W)\Big\},\\
&R(X,Y,J_2Z,J_2W)+R(X,Y,Z,W)\\
&\qquad=\frac{-1}{n+2}\Big\{\rho(X,J_3Y)g(Z,J_3W)-\rho(X,J_1Y)g(Z,J_1W)\Big\},\\
&R(X,Y,J_3Z,J_3W)-R(X,Y,Z,W)\\
&\qquad=\frac{-1}{n+2}\Big\{\rho(X,J_2Y)g(Z,J_2W)+\rho(X,J_1Y)g(Z,J_1W)\Big\}.
\end{aligned}
\tag{2.1.5}
$$

Estas identidades permiten probar el siguiente resultado:

Teorema 2.1.10 *Sea (M^{4n},g,V) una variedad paracuaterniónica Kähler. Si $n\geq 2$, entonces la variedad es Einstein.*

Demostración. Utilizando (2.1.5) primero con X, $Y=J_1X$, Z, $W=J_1Z$, y en segundo lugar con $X=J_2X$, $Y=J_3X$, Z, $W=J_1Z$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
-R(X,J_1X,J_2Z,J_3Z)+R(X,J_1X,Z,J_1Z) &= \frac{1}{n+2}\,\rho(X,X)g(Z,Z),\\
-R(J_2X,J_3X,J_2Z,J_3Z)+R(J_2X,J_3X,Z,J_1Z) &= \frac{1}{n+2}\,\rho(J_2X,J_2X)g(Z,Z),
\end{aligned}
$$

y como (2.1.4) implica que $\rho(J_2X,J_2X)=-\rho(X,X)$, de las expresiones anteriores se sigue que

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{n+2}\,\rho(X,X)g(Z,Z) &= -R(X,J_1X,J_2Z,J_3Z)+R(X,J_1X,Z,J_1Z)\\
&\quad +R(J_2X,J_3X,J_2Z,J_3Z)-R(J_2X,J_3X,Z,J_1Z).
\end{aligned}
\tag{2.1.6}
$$

Ahora, intercambiando X con Z en esta última expresión se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{n+2}\,\rho(Z,Z)g(X,X) &= -R(X,J_1X,J_2Z,J_3Z)+R(X,J_1X,Z,J_1Z)\\
&\quad +R(J_2X,J_3X,J_2Z,J_3Z)-R(J_2X,J_3X,Z,J_1Z).
\end{aligned}
\tag{2.1.7}
$$

Así, (2.1.6) y (2.1.7) implican que $\rho(X,X)g(Z,Z)=\rho(Z,Z)g(X,X)$ para cualesquiera campos de vectores X, Z, de donde se sigue que $\rho(X,X)=\lambda g(X,X)$ para cierto número real λ y cualquier campo de vectores X. Esta última expresión permite obtener fácilmente que $\rho(X,Y)=\lambda g(X,Y)$, para cualesquiera campos de vectores X, Y, lo que prueba que la variedad es Einstein (véanse [K4], [N2] para más detalles). □

Observación 2.1.4 Como consecuencia inmediata del teorema anterior y de (2.1.5), el tensor curvatura de una variedad paracuaterniónica Kähler de dimensión $4n$ ($n \geq 2$) verifica las siguientes identidades:

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y,J_1Z,J_1W) + R(X,Y,Z,W) \\
&\qquad = \frac{-\tau}{4n(n+2)} \Big\{ g(X,J_3Y)g(Z,J_3W) - g(X,J_2Y)g(Z,J_2W) \Big\}, \\
&R(X,Y,J_2Z,J_2W) + R(X,Y,Z,W) \\
&\qquad = \frac{-\tau}{4n(n+2)} \Big\{ g(X,J_3Y)g(Z,J_3W) - g(X,J_1Y)g(Z,J_1W) \Big\}, \\
&R(X,Y,J_3Z,J_3W) - R(X,Y,Z,W) \\
&\qquad = \frac{-\tau}{4n(n+2)} \Big\{ g(X,J_2Y)g(Z,J_2W) + g(X,J_1Y)g(Z,J_1W) \Big\},
\end{aligned}
\tag{2.1.8}
$$

donde τ denota la curvatura escalar de la variedad ($\tau = tr\ \rho$).

Es inmediato comprobar que una variedad paracuaterniónica Kähler de dimensión ≥ 8 tiene curvatura seccional constante si y sólo si la variedad es llana. Por lo tanto, el estudio de la curvatura seccional en variedades de este tipo no resulta de interés, lo que hace necesario definir nuevas funciones curvatura. Entre ellas, destacamos la *curvatura seccional paracuaterniónica*, que introducimos a continuación.

Sea (M,g,V) una variedad paracuaterniónica Kähler. Entonces, cualquier vector x tangente a la variedad en un punto determina un subespacio 4–dimensional del espacio tangente en ese punto, $Q(x) = \langle \{x, J_1x, J_2x, J_3x\} \rangle$, siendo $\{J_1, J_2, J_3\}$ una base local adaptada de V. Un subespacio de este tipo se denomina *sección paracuaterniónica* de M. Diremos que M tiene curvatura seccional paracuaterniónica constante en un punto p si la curvatura seccional es constante para todos los planos no degenerados contenidos en cualquier sección paracuaterniónica en T_pM. Si esa propiedad se cumple en cualquier punto de la variedad diremos que (M,g,V) es una variedad paracuaterniónica Kähler de curvatura seccional paracuaterniónica constante.

En lo que resta de esta subsección analizaremos ciertas propiedades relacionadas con la constancia de la función curvatura introducida anteriormente. En primer lugar es importante señalar que la constancia de la curvatura seccional paracuaterniónica permite reconstruir el tensor curvatura de la variedad, como muestra el siguiente teorema:

Teorema 2.1.11 [Bl] *Sea (M^{4n},g,V), $n \geq 2$, una variedad paracuaterniónica Kähler y $p \in M$. Entonces, la curvatura seccional paracuaterniónica es constante c en el punto p si y sólo si el tensor curvatura en p se expresa como*

$$R(x,y)z = \frac{c}{4}\left\{ g(y,z)x - g(x,z)y + \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \Big\{ g(J_ix,z)J_iy - g(J_iy,z)J_ix + 2g(J_ix,y)J_iz \Big\} \right\},$$

para cualesquiera vectores x, y, $z \in T_pM$ y cualquier base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ de V, siendo $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = -1$.

Como consecuencia del teorema anterior, toda variedad paracuaterniónica Kähler de curvatura seccional paracuaterniónica constante es localmente simétrica. Entonces, es posible clasificar dichas variedades, de forma que se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1.12 [Bl] *Sea (M, g, V) una variedad paracuaterniónica Kähler conexa, simplemente conexa y completa de signatura $(2n, 2n)$. Si la curvatura seccional paracuaterniónica es constante c, entonces M es isométrica al espacio proyectivo paracuaterniónico $P_n(\mathbb{B})$, de signatura $(2n, 2n)$, donde $\mathbb{B}$ denota el álgebra de los números paracuaterniónicos sobre $\mathbb{R}$.*

Observación 2.1.5 Los resultados anteriores permiten determinar el operador de Jacobi de una variedad paracuaterniónica Kähler $4n$–dimensional de curvatura seccional paracuaterniónica constante c. Así, el operador de Jacobi asociado a cualquier vector unitario x es diagonalizable de la forma

$$R_x = diag\left[c\varepsilon_x, c\varepsilon_x, c\varepsilon_x, \frac{c}{4}\varepsilon_x, \ldots, \frac{c}{4}\varepsilon_x\right], \qquad \varepsilon_x = g(x, x),$$

con respecto a una base ortonormal de $\langle x\rangle^\perp$ de la forma $\{J_1x, J_2x, J_3x, z_1, \ldots, z_{4n-4}\}$. Nótese que R_x tiene sólo dos autovalores (que son distintos si la curvatura seccional paracuaterniónica no es nula), y que uno de ellos tiene multiplicidad tres. Además, el autoespacio asociado a dicho autovalor distinguido está dado por $\langle\{J_1x, J_2x, J_3x\}\rangle$. Nótese también que la restricción de la métrica a la sección paracuaterniónica asociada a x, $Q(x)$, tiene siempre signatura $(+, +, -, -)$.

Para finalizar esta sección caracterizaremos la constancia de la curvatura seccional paracuaterniónica de una variedad paracuaterniónica Kähler por medio de una condición que será de utilidad en el siguiente capítulo. Más concretamente, probaremos el siguiente teorema:

Teorema 2.1.13 *Sea (M^{4n}, g, V), $n \geq 2$, una variedad paracuaterniónica Kähler conexa. Entonces, la curvatura seccional paracuaterniónica de M es constante si y sólo si para cualquier base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ de V se cumple que $R(x, J_ix, x, J_iy) = 0$, para algún $i \in \{1, 2, 3\}$ y para cualesquiera vectores unitarios x, y tangentes a la variedad, con $y \in Q(x)^\perp$.*

Para ello necesitamos varios lemas previos que probamos a continuación.

Lema 2.1.1 *Sea (M^{4n}, g, V), $n \geq 2$, una variedad paracuaterniónica Kähler y consideremos un vector unitario x tangente a M en p. Si existe una base local adaptada $\{J_1, J_2, J_3\}$ de la estructura paracuaterniónica tal que* *(i)* $K(x, J_1x) = K(x, J_2x) = K(x, J_3x)$,

(ii) $R(x, J_1x, J_2x, x) = R(x, J_1x, J_3x, x) = R(x, J_2x, J_3x, x) = 0$,

entonces la curvatura seccional paracuaterniónica es constante en $Q(x)$*, y su valor es* $\frac{\tau}{4n(n+2)}$*, donde* τ *denota la curvatura escalar de* M*.*

Demostración. Utilizando (2.1.8) se obtiene que

$$\begin{aligned} K(x, J_1x) &= R(x, J_1x, J_2x, J_3x) + \frac{\tau}{4n(n+2)}, \\ K(x, J_2x) &= R(x, J_2x, J_3x, J_1x) + \frac{\tau}{4n(n+2)}, \\ K(x, J_3x) &= R(x, J_3x, J_1x, J_2x) + \frac{\tau}{4n(n+2)}, \end{aligned}$$

por lo que sumando estas expresiones se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} K(x, J_ix) &= R(x, J_1x, J_2x, J_3x) + R(x, J_2x, J_3x, J_1x) \\ &\quad + R(x, J_3x, J_1x, J_2x) + \frac{3\tau}{4n(n+2)}. \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la condición (i) y la primera identidad de Bianchi se sigue que $K(x, J_ix) = \frac{\tau}{4n(n+2)}$, para $i = 1, 2, 3$, y, por lo tanto, la curvatura seccional de los planos $\langle\{x, J_ix\}\rangle$, $i = 1, 2, 3$, es constante. Finalmente, la condición (ii) permite probar, después de largos cálculos, que la curvatura seccional de cualquier otro plano no degenerado contenido en $Q(x)$ es constante, con valor $\frac{\tau}{4n(n+2)}$. □

Lema 2.1.2 *Sea* (M^{4n}, g, V)*,* $n \geq 2$*, una variedad paracuaterniónica Kähler y consideremos un vector unitario* x *tangente a* M *en* p *y una base local adaptada* $\{J_1, J_2, J_3\}$ *de* V*. Si* $K(y, J_iy)$ *es constante para cualquier vector espacial unitario* $y \in Q(x)$ *y algún* $i \in \{1, 2, 3\}$*, entonces la curvatura seccional paracuaterniónica es constante en* $Q(x)$*.*

Demostración. Podemos suponer que x es espacial y que $K(y, J_1y) = a$ para cualquier vector espacial unitario $y \in Q(x)$ (la demostración con J_2 ó J_3 sería similar).

Si λ, μ son números reales no nulos tales que $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, como $y = \lambda x + \mu J_3x$ es un vector espacial unitario en $Q(x)$ se cumple que $K(y, J_1y) = a$ y, por lo tanto, se tiene que

$R(y, J_1y, J_1y, y) = -a$. Desarrollando esta expresión se sigue que

$$\begin{aligned} -a &= \lambda^4 R(x, J_1x, J_1x, x) + \mu^4 R(J_3x, J_2x, J_2x, J_3x) \\ &\quad +\lambda^2\mu^2 \Big\{ R(x, J_2x, J_2x, x) + R(J_3x, J_1x, J_1x, J_3x) \\ &\qquad\qquad +2R(x, J_1x, J_2x, J_3x) + 2R(x, J_2x, J_1x, J_3x) \Big\} \\ &\quad +2\lambda^3\mu \Big\{ R(x, J_1x, J_2x, x) + R(x, J_1x, J_1x, J_3x) \Big\} \\ &\quad +2\lambda\mu^3 \Big\{ R(x, J_2x, J_2x, J_3x) + R(J_3x, J_1x, J_2x, J_3x) \Big\}. \end{aligned}$$

Entonces, utilizando (2.1.8), después de algunos cálculos se obtiene

$$-a = -(\lambda^2 - \mu^2)^2 K(x, J_1x) - 4\lambda^2\mu^2 K(x, J_2x) + 4\lambda\mu(\lambda^2 - \mu^2) R(x, J_1x, J_2x, x).$$

Ahora bien, como la expresión anterior sigue siendo cierta si se sustituye λ por $-\lambda$, se sigue que $R(x, J_1x, J_2x, x) = 0$. Por lo tanto, la expresión anterior se reduce a

$$a = (\lambda^2 - \mu^2)^2 K(x, J_1x) + 4\lambda^2\mu^2 K(x, J_2x),$$

y, teniendo en cuenta que $K(x, J_1x) = a$, poniendo $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y $\mu = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ esta expresión implica que $K(x, J_2x) = a$. Hemos probado entonces que

$$R(x, J_1x, J_2x, x) = 0, \qquad K(x, J_2x) = K(x, J_1x). \tag{2.1.9}$$

Sean λ y μ números reales no nulos, con $\lambda^2 - \mu^2 = 1$. Entonces, $y = \lambda x + \mu J_2x$ es un vector espacial unitario en $Q(x)$ y, por tanto, $K(y, J_1y) = a$. Desarrollando la expresión $R(y, J_1y, J_1y, y) = -a$, de forma análoga a la anterior obtenemos

$$-a = -(\lambda^2 + \mu^2)^2 K(x, J_1x) + 4\lambda^2\mu^2 K(x, J_3x) + 4\lambda\mu(\lambda^2 + \mu^2) R(x, J_1x, J_3x, x),$$

de donde, de forma similar a la anterior, se sigue que

$$R(x, J_1x, J_3x, x) = 0, \qquad K(x, J_3x) = K(x, J_1x). \tag{2.1.10}$$

Finalmente, tomando números reales no nulos λ, μ, γ tales que $\lambda^2+\mu^2-\gamma^2 = 1$, se tiene que $y = \lambda x+\mu J_3x+\gamma J_2x$ es un vector espacial unitario en $Q(x)$ y, por tanto, $K(y, J_1y) = a$. Entonces, desarrollando la expresión $R(y, J_1y, J_1y, y) = -a$ se obtiene, después de largos cálculos, que el coeficiente correspondiente a $\lambda^2\mu\gamma$ coincide con $8R(x, J_2x, J_3x, x)$, y es fácil comprobar que este coeficiente debe anularse. Por lo tanto,

$$R(x, J_2x, J_3x, x) = 0. \tag{2.1.11}$$

Como se cumplen (2.1.9), (2.1.10) y (2.1.11), el Lema 2.1.1 permite concluir que la curvatura seccional paracuaterniónica es constante en $Q(x)$, lo que prueba el lema. □

Demostración del Teorema 2.1.13. Consideramos x, y dos vectores unitarios tales que $g(x,x) = -g(y,y)$, con $y \in Q(x)^{\perp}$, y sean λ, μ números reales no nulos con $\lambda^2 - \mu^2 = 1$. Entonces, $z = \lambda x + \mu y$, $w = \mu x + \lambda y$ son vectores unitarios y, además, $w \in Q(z)^{\perp}$. Por hipótesis, se cumple que $R(z, J_i z, z, J_i w) = 0$ para algún $i \in \{1,2,3\}$. Entonces, desarrollando esta expresión se obtiene que

$$\begin{aligned}
0 = {} & \lambda^4 R(x, J_i x, x, J_i y) + \mu^4 R(y, J_i y, y, J_i x) \\
& + \lambda^2\mu^2 \Big\{ 2R(x, J_i x, y, J_i x) + 2R(y, J_i x, y, J_i y) + R(x, J_i y, y, J_i y) + R(y, J_i x, x, J_i x) \Big\} \\
& + \lambda^3\mu \Big\{ R(x, J_i x, x, J_i x) + R(y, J_i x, x, J_i y) + R(x, J_i x, y, J_i y) + R(x, J_i y, x, J_i y) \Big\} \\
& + \lambda\mu^3 \Big\{ R(x, J_i y, y, J_i x) + R(y, J_i y, y, J_i y) + R(x, J_i x, y, J_i y) + R(x, J_i y, x, J_i y) \Big\},
\end{aligned}$$

y como esta expresión sigue siendo válida si sustituimos μ por $-\mu$, entonces se sigue que

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda^2 \Big\{ R(x, J_i x, x, J_i x) + R(y, J_i x, x, J_i y) + R(x, J_i x, y, J_i y) + R(x, J_i y, x, J_i y) \Big\} \\
& \quad + \mu^2 \Big\{ R(x, J_i y, y, J_i x) + R(y, J_i y, y, J_i y) + R(x, J_i x, y, J_i y) + R(x, J_i y, x, J_i y) \Big\}.
\end{aligned}$$

Así, los coeficientes deben anularse, y restando se tiene que

$$R(x, J_i x, x, J_i x) + R(y, J_i x, x, J_i y) = R(y, J_i y, y, J_i y) + R(x, J_i y, y, J_i x).$$

Además, es fácil comprobar que $R(y, J_i x, x, J_i y) = R(x, J_i y, y, J_i x)$ para cualquier $i = 1,2,3$, por lo que de la expresión anterior se sigue $R(x, J_i x, J_i x, x) = R(y, J_i y, J_i y, y)$, de donde $K(x, J_i x) = K(y, J_i y)$.

Esto prueba que, fijado un vector ξ tangente a la variedad en un punto p, la curvatura seccional de los planos $\langle \{\eta, J_i \eta\} \rangle$ es constante para cualquier vector espacial unitario $\eta \in Q(\xi)$. Entonces, el Lema 2.1.2 implica que la curvatura seccional paracuaterniónica es constante en $Q(\xi)$, con valor $\dfrac{\tau}{4n(n+2)}$. Finalmente, como el vector ξ y el punto p son arbitrarios, se concluye que la variedad tiene curvatura seccional paracuaterniónica constante. □

2.2 Variedades de Osserman no localmente homogéneas

Esta sección tiene como objetivo construir una amplia familia de ejemplos de variedades semi–Riemannianas de Osserman con métrica de cualquier signatura (p,q), $p,q \geq 2$, que no son localmente simétricas. El proceso lo dividiremos en tres partes. En la primera de ellas (§2.2.1) construimos una familia de métricas de Osserman sobre $\mathbb{R}^4$, analizando el carácter localmente simétrico de las mismas. En la §2.2.2 estudiamos determinados casos particulares de la familia de variedades construidas anteriormente, donde el polinomio característico de los operadores de Jacobi es λ^4, pero el polinomio mínimo no es siempre el mismo, analizando todos los casos posibles. Finalmente utilizamos los ejemplos obtenidos en dimensión 4 para construir ejemplos de signatura arbitraria en cualquier dimensión superior, utilizando para ello ciertas variedades producto. Esto se lleva a cabo en la subsección 2.2.3. Los principales resultados de esta sección se encuentran recogidos en [GVVz].

2.2.1 Una familia de métricas de Osserman en $\mathbb{R}^4$

Sea $M = \mathbb{R}^4$ el espacio Euclídeo 4–dimensional equipado con las coordenadas usuales (x^1, x^2, x^3, x^4). Sobre este espacio definimos la familia de métricas dada por

$$\begin{aligned} g_{(f_1,f_2)} &= x^3 f_1(x^1,x^2)dx^1 \otimes dx^1 + x^4 f_2(x^1,x^2)dx^2 \otimes dx^2 \\ &\quad +a\left\{dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1\right\} \\ &\quad +b\left\{dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^4 + dx^4 \otimes dx^2\right\}, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

donde a, b son constantes reales, $b \neq 0$, y f_1, f_2 son funciones diferenciables definidas sobre $\mathbb{R}^2$ con valores reales de tal forma que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x^1} = 0. \tag{2.2.2}$$

En lo que sigue estudiaremos detalladamente la familia de métricas dada por (2.2.1). Comenzamos determinando el tensor curvatura. Nótese que de (2.2.1) se sigue que la forma matricial de la métrica $g_{(f_1,f_2)}$ con respecto a la referencia dada por los campos coordenados $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^4}\right\}$ asociados a las coordenadas usuales (x^1, x^2, x^3, x^4) está dada por

$$g_{(f_1,f_2)} = \begin{pmatrix} x^3 f_1(x^1,x^2) & a & b & 0 \\ a & x^4 f_2(x^1,x^2) & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por tanto, su inversa se corresponde con

$$g^{-1}_{(f_1,f_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & 0 & -\frac{1}{b^2}x^3 f_1(x^1,x^2) & -\frac{a}{b^2} \\ 0 & \frac{1}{b} & -\frac{a}{b^2} & -\frac{1}{b^2}x^4 f_2(x^1,x^2) \end{pmatrix}.$$

Con estas expresiones matriciales de la métrica y de su inversa se determinan los símbolos de Christoffel de $g_{(f_1,f_2)}$,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{4} g_{(f_1,f_2)}^{kl}\left\{\frac{\partial g_{(f_1,f_2)_{il}}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{(f_1,f_2)_{jl}}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{(f_1,f_2)_{ij}}}{\partial x^l}\right\},$$

obteniéndose, después de algunos cálculos, que los únicos símbolos de Christoffel no nulos son los dados por:

$$\begin{array}{ll}
\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2b}f_1, & \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2b}f_1, \\
\Gamma_{11}^3 = \frac{1}{2b}x^3\frac{\partial f_1}{\partial x^1} + \frac{1}{2b^2}x^3 f_1^2, & \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{2b}f_2, \\
\Gamma_{11}^4 = -\frac{1}{2b}x^3\frac{\partial f_1}{\partial x^2} + \frac{a}{2b^2}f_1, & \Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2b}x^4\frac{\partial f_1}{\partial x^2} + \frac{a}{2b^2}f_2, \\
\Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2b}x^3\frac{\partial f_1}{\partial x^2}, & \Gamma_{22}^4 = \frac{1}{2b}x^4\frac{\partial f_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2b^2}x^4 f_2^2, \\
\Gamma_{12}^4 = -\frac{1}{2b}x^4\frac{\partial f_1}{\partial x^2}, & \Gamma_{24}^4 = \frac{1}{2b}f_2.
\end{array} \tag{2.2.3}$$

Las expresiones obtenidas en (2.2.3) permiten determinar la conexión de Levi Civita de $g_{(f_1,f_2)}$, que viene dada por $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{4}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ y, por tanto, las únicas derivadas covariantes no nulas de los campos coordenados son las dadas por:

$$\begin{array}{rcl}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}}\frac{\partial}{\partial x^1} & = & -\left\{\frac{1}{2b}f_1\right\}\frac{\partial}{\partial x^1} + \left\{\frac{1}{2b}x^3\frac{\partial f_1}{\partial x^1} + \frac{1}{2b^2}x^3 f_1^2\right\}\frac{\partial}{\partial x^3} \\
& & +\left\{-\frac{1}{2b}x^3\frac{\partial f_1}{\partial x^2} + \frac{a}{2b^2}f_1\right\}\frac{\partial}{\partial x^4}, \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}}\frac{\partial}{\partial x^2} & = & \left\{\frac{1}{2b}x^3\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3} - \left\{\frac{1}{2b}x^4\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4}, \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}}\frac{\partial}{\partial x^3} & = & \left\{\frac{1}{2b}f_1\right\}\frac{\partial}{\partial x^3}, \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}}\frac{\partial}{\partial x^2} & = & -\left\{\frac{1}{2b}f_2\right\}\frac{\partial}{\partial x^2} + \left\{\frac{1}{2b}x^4\frac{\partial f_1}{\partial x^2} + \frac{a}{2b^2}f_2\right\}\frac{\partial}{\partial x^3} \\
& & +\left\{\frac{1}{2b}x^4\frac{\partial f_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2b^2}x^4 f_2^2\right\}\frac{\partial}{\partial x^4}, \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}}\frac{\partial}{\partial x^4} & = & \left\{\frac{1}{2b}f_2\right\}\frac{\partial}{\partial x^4}.
\end{array} \tag{2.2.4}$$

De esta forma, las únicas componentes no nulas del tensor curvatura son las dadas por:

$$
\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} &= \left\{\frac{1}{2b}\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^1}-\left\{\frac{1}{2b^2}x^3 f_1\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3}\\
&\quad+\frac{1}{4b^3}\left\{2b^2x^3\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2\partial x^2}-2b^2x^4\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^1\partial x^2}\right.\\
&\quad\left.+b\left(x^3f_2-x^4f_1-2a\right)\frac{\partial f_1}{\partial x^2}-af_1f_2\right\}\frac{\partial}{\partial x^4},\\
R\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} &= \left\{\frac{1}{2b}\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^2}-\left\{\frac{1}{2b^2}x^4 f_2\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4}\\
&\quad-\frac{1}{4b^3}\left\{2b^2x^3\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2\partial x^2}-2b^2x^4\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^1\partial x^2}\right.\\
&\quad\left.+b\left(x^3f_2-x^4f_1+2a\right)\frac{\partial f_1}{\partial x^2}-af_1f_2\right\}\frac{\partial}{\partial x^3},\\
R\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^3} &= -\left\{\frac{1}{2b}\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3},\\
R\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^4} &= -\left\{\frac{1}{2b}\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4},\\
R\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} &= \left\{\frac{1}{2b}\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4},\\
R\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} &= -\left\{\frac{1}{2b}\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3},\\
R\left(\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^4}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} &= \left\{\frac{1}{2b}\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4},\\
R\left(\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^4}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} &= -\left\{\frac{1}{2b}\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3}.
\end{aligned}
\tag{2.2.5}
$$

Sea ahora $X=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x^i}$ un campo de vectores tangente a la variedad. El operador de Jacobi, $R_X=R(\cdot,X)X$, define un endomorfismo del espacio tangente a la variedad en cada punto. Utilizando la expresión anterior del tensor curvatura se obtiene que la matriz asociada al endomorfismo R_X respecto a la base de campos coordenados está dada por

$$
R_X=\begin{pmatrix} A & 0\\ B & {}^tA\end{pmatrix},
\tag{2.2.6}
$$

donde A es la matriz 2×2

$$A = \frac{1}{2b}\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 & -\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}, \tag{2.2.7}$$

y $B = (b_{ij})$ es la matriz 2×2 cuyos coeficientes vienen determinados por:

$$\begin{aligned}
b_{11} = \frac{1}{4b^3}\Bigg\{ & -2b^2\alpha_2^2x^3\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2\partial x^2} + 2b^2\alpha_2^2x^4\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^1\partial x^2} \\
& -b\left(2\alpha_1\alpha_2x^3f_1 + \alpha_2^2x^3f_2 - \alpha_2^2x^4f_1 + 4b\alpha_2\alpha_3 + 2a\alpha_2^2\right)\frac{\partial f_1}{\partial x^2} + a\alpha_2^2f_1f_2\Bigg\}, \\
b_{12} = \frac{1}{4b^3}\Bigg\{ & 2b^2\alpha_1\alpha_2x^3\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2\partial x^2} - 2b^2\alpha_1\alpha_2x^4\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^1\partial x^2} \\
& +b\left(2\alpha_1^2x^3f_1 + \alpha_1\alpha_2x^3f_2 - \alpha_1\alpha_2x^4f_1 + 2b\alpha_1\alpha_3 + 2a\alpha_1\alpha_2 - 2b\alpha_2\alpha_4\right)\frac{\partial f_1}{\partial x^2} \\
& -a\alpha_1\alpha_2f_1f_2\Bigg\}, \\
b_{21} = \frac{1}{4b^3}\Bigg\{ & 2b^2\alpha_1\alpha_2x^3\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2\partial x^2} - 2b^2\alpha_1\alpha_2x^4\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^1\partial x^2} \\
& -b\left(\alpha_1\alpha_2x^4f_1 + 2\alpha_2^2x^4f_2 - \alpha_1\alpha_2x^3f_2 - 2b\alpha_1\alpha_3 + 2a\alpha_1\alpha_2 + 2b\alpha_2\alpha_4\right)\frac{\partial f_1}{\partial x^2} \\
& -a\alpha_1\alpha_2f_1f_2\Bigg\}, \\
b_{22} = \frac{1}{4b^3}\Bigg\{ & -2b^2\alpha_1^2x^3\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2\partial x^2} + 2b^2\alpha_1^2x^4\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^1\partial x^2} \\
& +b\left(2\alpha_1\alpha_2x^4f_2 + \alpha_1^2x^4f_1 - \alpha_1^2x^3f_2 + 4b\alpha_1\alpha_4 + 2a\alpha_1^2\right)\frac{\partial f_1}{\partial x^2} + a\alpha_1^2f_1f_2\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Se tiene entonces el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1 $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2)})$ *es una variedad semi–Riemanniana de Osserman con métrica de signatura* $(+,+,-,-)$*. Además, el polinomio característico del operador de Jacobi es* $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$*, mientras que el polinomio mínimo* $m_\lambda(R_X)$ *verifica:*

(i) $m_\lambda(R_X) = \lambda^3$ *en cualquier punto donde* $\dfrac{\partial f_1}{\partial x^2} \neq 0$.

(ii) En cualquier punto donde $\dfrac{\partial f_1}{\partial x^2} = 0$ *la función*

$$F(x^1, x^2, x^3, x^4) = 2b^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\left(x^3 \frac{\partial f_1}{\partial x^2} - x^4 \frac{\partial f_1}{\partial x^1} \right) - a f_1 f_2 \tag{2.2.9}$$

determina el polinomio mínimo de la forma siguiente:

(ii.a) $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2)})$ *es de curvatura constante cero* ($m_\lambda(R_X) = \lambda$) *en cualquier punto donde* $\dfrac{\partial f_1}{\partial x^2}$ *y* F *se anulan,*

(ii.b) el polinomio mínimo $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$ *en aquellos puntos en los cuales* $\dfrac{\partial f_1}{\partial x^2} = 0$ *y* F *es distinta de cero.*

Demostración. De la expresión (2.2.6), que determina el operador de Jacobi de cualquier campo de vectores X, se sigue que el correspondiente polinomio característico viene dado por $p_\lambda(R_X) = det(R_X - \lambda Id_4) = (det(A - \lambda Id_2))^2$. Entonces, de (2.2.7) se obtiene que $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$ y, por lo tanto, todos los autovalores son nulos. Esto prueba que $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2)})$ es una variedad de Osserman.

Por otra parte, utilizando de nuevo (2.2.6), se puede comprobar que

$$R_X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ BA + {}^tAB & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4b^3} g(X,X) \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 & \alpha_1\alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y también

$$R_X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (BA + {}^tAB)A & 0 \end{pmatrix} = 0$$

para cualquier campo de vectores X.

Entonces, el polinomio mínimo es $m_\lambda(R_X) = \lambda^3$ siempre que $\dfrac{\partial f_1}{\partial x^2} \neq 0$. En aquellos puntos en los que $\dfrac{\partial f_1}{\partial x^2} = 0$ el polinomio mínimo será $m_\lambda(R_X) = \lambda$ ó $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$, según la función F definida por (2.2.9) se anule o no, pues en este caso (2.2.6) se transforma en

$$R_X = \frac{1}{4b^3} F \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 & \alpha_1\alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Observación 2.2.1 La condición (2.2.2) impuesta sobre las funciones f_1 y f_2 ha permitido simplificar los cálculos realizados hasta el momento. Sin embargo, procediendo de forma análoga, se puede probar que dicha condición es, de hecho, equivalente a que la variedad $(M, g_{(f_1,f_2)})$ sea de Osserman.

Es interesante señalar que las métricas $g_{(f_1,f_2)}$ construidas en $\mathbb{R}^4$ no son, en general, localmente simétricas. De hecho, el carácter localmente simétrico de las mismas se obtiene bajo ciertas condiciones restrictivas sobre las funciones f_1 y f_2. Tales condiciones vienen expresadas en el siguiente resultado:

Teorema 2.2.2 $(\mathbb{R}^4, g_{(f_1,f_2)})$ *es un espacio localmente simétrico si y sólo si, además de* (2.2.2)*, las funciones* f_1 *y* f_2 *son solución de las siguientes ecuaciones:*

(i) $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \dfrac{1}{2b} f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x^2} = 0,$

(ii) $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2 \partial x^2} + \dfrac{1}{2b} f_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x^2} = 0,$

(iii) $\dfrac{1}{4b} a \left(3 f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x^2} - f_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x^1} - \dfrac{1}{b} f_1^2 f_2 \right) - x^3 \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x^2} \right)^2 = 0,$

(iv) $\dfrac{1}{4b} a \left(3 f_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x^2} + f_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x^2} + \dfrac{1}{b} f_1 f_2^2 \right) + x^4 \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x^2} \right)^2 = 0.$

Demostración. Denotemos por $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ la referencia de campos coordenados inducida por las coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4). Utilizaremos (2.2.4) y (2.2.5) para determinar las derivadas $(\nabla_{E_i} R)(E_j, E_k)E_l$, donde $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, $j < k$, por medio de la expresión

$$\begin{aligned}(\nabla_{E_i} R)(E_j, E_k)E_l &= \nabla_{E_i}(R(E_j, E_k)E_l) - R(\nabla_{E_i} E_j, E_k)E_l \\ &\quad - R(E_j, \nabla_{E_i} E_k)E_l - R(E_j, E_k)\nabla_{E_i} E_l.\end{aligned}$$

En lo que sigue denotaremos por H_i, $i = 1, 2, 3, 4$, las expresiones (i)–(iv) dadas en el enunciado del teorema, es decir,

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{1}{2b} f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x^2}, \\
H_2 &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{1}{2b} f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x^2}, \\
H_3 &= \frac{1}{4b} a \left(3 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x^2} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x^1} - \frac{1}{b} f_1^2 f_2 \right) - x^3 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right)^2, \\
H_4 &= \frac{1}{4b} a \left(3 f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x^2} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x^2} + \frac{1}{b} f_1 f_2^2 \right) + x^4 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right)^2,
\end{aligned}$$

y escribiremos sólo aquellas derivadas que son no nulas.

Comenzamos analizando $(\nabla_{E_1}R)(E_1,E_2)E_1$. Después de unos largos cálculos, se obtiene que

$$\begin{aligned}(\nabla_{E_1}R)(E_1,E_2)E_1 &= \nabla_{E_1}(R(E_1,E_2)E_1) - R(\nabla_{E_1}E_1,E_2)E_1\\ &\quad -R(E_1,\nabla_{E_1}E_2)E_1 - R(E_1,E_2)\nabla_{E_1}E_1\\ &= \left\{\frac{1}{2b}H_1\right\}E_1 - \left\{\frac{1}{2b^2}x^3 f_1 H_1\right\}E_3\\ &\quad +\left\{-\frac{1}{2b^2}x^4 f_1 H_1 + \frac{1}{2b^2}x^3 f_1 H_2 - \frac{1}{2b}x^4\frac{\partial H_1}{\partial x^1}\right.\\ &\quad \left.+\frac{1}{2b}x^3\frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{a}{2b^2}H_1 + \frac{1}{b^2}H_3\right\}E_4.\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}(\nabla_{E_2}R)(E_1,E_2)E_1 &= \left\{\frac{1}{2b}H_2\right\}E_1 - \left\{\frac{1}{2b^2}x^3 f_1 H_2\right\}E_3\\ &\quad +\left\{\frac{1}{2b^2}x^4 f_2 H_1 + \frac{1}{2b^2}x^3 f_2 H_2 + \frac{1}{2b}x^4\frac{\partial H_1}{\partial x^2}\right.\\ &\quad \left.+\frac{1}{2b}x^3\frac{\partial H_2}{\partial x^2} - \frac{a}{2b^2}H_2 - \frac{1}{b^2}H_4\right\}E_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{E_1}R)(E_1,E_2)E_2 &= \left\{\frac{1}{2b}H_1\right\}E_2 - \left\{\frac{1}{2b^2}x^4 f_2 H_1\right\}E_4\\ &\quad +\left\{\frac{1}{2b^2}x^4 f_1 H_1 - \frac{1}{2b^2}x^3 f_1 H_2 + \frac{1}{2b}x^4\frac{\partial H_1}{\partial x^1}\right.\\ &\quad \left.-\frac{1}{2b}x^3\frac{\partial H_2}{\partial x^1} - \frac{a}{2b^2}H_1 - \frac{1}{b^2}H_3\right\}E_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_{E_2}R)(E_1,E_2)E_2 &= \left\{\frac{1}{2b}H_2\right\}E_2 - \left\{\frac{1}{2b^2}x^4 f_2 H_2\right\}E_4\\ &\quad +\left\{\frac{1}{2b^2}x^4 f_2 H_1 - \frac{1}{2b^2}x^3 f_2 H_2 + \frac{1}{2b}x^4\frac{\partial H_1}{\partial x^2}\right.\\ &\quad \left.-\frac{1}{2b}x^3\frac{\partial H_2}{\partial x^2} - \frac{a}{2b^2}H_2 + \frac{1}{b^2}H_4\right\}E_3.\end{aligned}$$

Las demás derivadas covariantes se calculan de forma más sencilla que las anteriores. Así, por ejemplo, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\nabla_{E_3}R)(E_1,E_2)E_1 &= \nabla_{E_3}(R(E_1,E_2)E_1) - R(\nabla_{E_3}E_1,E_2)E_1 \\
&\quad -R(E_1,\nabla_{E_3}E_2)E_1 - R(E_1,E_2)\nabla_{E_3}E_1 \\
&= -\left\{\frac{1}{4b^2}f_1\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}E_3 + \left\{\frac{1}{2b}H_2\right\}E_4 + \left\{\frac{1}{4b^2}f_1\frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right\}E_3 \\
&= \left\{\frac{1}{2b}H_2\right\}E_4.
\end{aligned}$$

Procediendo de forma análoga a la anterior, concluimos que

$$\begin{aligned}
(\nabla_{E_3}R)(E_1,E_2)E_1 &= \left\{\frac{1}{2b}H_2\right\}E_4, & (\nabla_{E_4}R)(E_1,E_2)E_1 &= -\left\{\frac{1}{2b}H_1\right\}E_4,\\
(\nabla_{E_3}R)(E_1,E_2)E_2 &= -\left\{\frac{1}{2b}H_2\right\}E_3, & (\nabla_{E_4}R)(E_1,E_2)E_2 &= \left\{\frac{1}{2b}H_1\right\}E_3,\\
(\nabla_{E_1}R)(E_1,E_2)E_3 &= -\left\{\frac{1}{2b}H_1\right\}E_3, & (\nabla_{E_2}R)(E_1,E_2)E_3 &= -\left\{\frac{1}{2b}H_2\right\}E_3,\\
(\nabla_{E_1}R)(E_1,E_2)E_4 &= -\left\{\frac{1}{2b}H_1\right\}E_4, & (\nabla_{E_2}R)(E_1,E_2)E_4 &= -\left\{\frac{1}{2b}H_2\right\}E_4,\\
(\nabla_{E_1}R)(E_1,E_3)E_1 &= \left\{\frac{1}{2b}H_1\right\}E_4, & (\nabla_{E_2}R)(E_1,E_3)E_1 &= \left\{\frac{1}{2b}H_2\right\}E_4,\\
(\nabla_{E_1}R)(E_1,E_3)E_2 &= -\left\{\frac{1}{2b}H_1\right\}E_3, & (\nabla_{E_2}R)(E_1,E_3)E_2 &= -\left\{\frac{1}{2b}H_2\right\}E_3,\\
(\nabla_{E_1}R)(E_2,E_4)E_1 &= \left\{\frac{1}{2b}H_1\right\}E_4, & (\nabla_{E_2}R)(E_2,E_4)E_1 &= \left\{\frac{1}{2b}H_2\right\}E_4,\\
(\nabla_{E_1}R)(E_2,E_4)E_2 &= -\left\{\frac{1}{2b}H_1\right\}E_3, & (\nabla_{E_2}R)(E_2,E_4)E_2 &= -\left\{\frac{1}{2b}H_2\right\}E_3.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que las demás derivadas son todas nulas, de las expresiones obtenidas se sigue fácilmente el resultado. □

2.2.2 Ejemplos con distintos polinomios mínimos

Las métricas (2.2.1) descritas anteriormente, junto con los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2, nos permiten construir ejemplos de variedades semi–Riemannianas de Osserman, de signatura $(+,+,-,-)$, que no son localmente simétricas. En los ejemplos que siguen mostramos, además, las distintas posibilidades para el polinomio mínimo de los operadores de Jacobi. Nótese que las raíces del polinomio mínimo pueden cambiar de un punto a otro. Sin embargo, dichas raíces son necesariamente constantes en cada punto, pues las condiciones dadas por el Teorema 2.2.1 no dependen de ninguna dirección particular.

Ejemplo 2.2.1 *Variedad de Osserman con polinomio característico $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$ y polinomio mínimo $m_\lambda(R_X) = \lambda^3$ para todo campo de vectores X sobre la variedad.*

Sea g la métrica definida en $\mathbb{R}^4$ por

$$\begin{aligned} g &= x^3x^2dx^1 \otimes dx^1 - x^4x^1dx^2 \otimes dx^2 \\ &\quad +a\left\{dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1\right\} \\ &\quad +b\left\{dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^4 + dx^4 \otimes dx^2\right\}, \end{aligned}$$

donde a, $b \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$.

Entonces, de (2.2.6) y (2.2.7) se sigue que el operador de Jacobi, expresado en la base de campos coordenados, tiene la forma

$$R_X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2b}\alpha_1\alpha_2 & -\frac{1}{2b}\alpha_1^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b}\alpha_2^2 & -\frac{1}{2b}\alpha_1\alpha_2 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \frac{1}{2b}\alpha_1\alpha_2 & \frac{1}{2b}\alpha_2^2 \\ b_{21} & b_{22} & -\frac{1}{2b}\alpha_1^2 & -\frac{1}{2b}\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix},$$

donde $X = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es un campo de vectores arbitrario en $\mathbb{R}^4$ y b_{ij}, $i, j = 1, 2$, están dados por (2.2.8). Como $\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^3} = -\frac{1}{4b^2}x^2\frac{\partial}{\partial x^3} \neq 0$, este espacio no es localmente simétrico. Además, el polinomio mínimo es siempre $m_\lambda(R_X) = \lambda^3$ pues, en este caso, $f_1(x^1, x^2) = x^2$ y, por tanto, $\frac{\partial f_1}{\partial x^2} = 1 \neq 0$ en todo punto.

Ejemplo 2.2.2 *Variedad de Osserman con polinomio característico $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$ y polinomio mínimo $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$ para todo campo de vectores X sobre la variedad.*

Sea g la métrica definida en $\mathbb{R}^4$ por

$$\begin{aligned} g &= x^3k_1dx^1 \otimes dx^1 + x^4k_2dx^2 \otimes dx^2 \\ &\quad +a\left\{dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1\right\} \\ &\quad +b\left\{dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^4 + dx^4 \otimes dx^2\right\}, \end{aligned}$$

donde a, b, k_1, k_2 son constantes reales no nulas.

Entonces, de (2.2.6), (2.2.7) y (2.2.8) se sigue que el operador de Jacobi tiene la forma

$$R_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{4b^3}\alpha_2^2 k_1 k_2 & -\frac{a}{4b^3}\alpha_1\alpha_2 k_1 k_2 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{4b^3}\alpha_1\alpha_2 k_1 k_2 & \frac{a}{4b^3}\alpha_1^2 k_1 k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $X = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es un campo de vectores arbitrario en $\mathbb{R}^4$. Teniendo en cuenta que $\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} = -\frac{a}{4b^4}k_1^2 k_2 \frac{\partial}{\partial x^4} \neq 0$, se tiene que este espacio no es localmente simétrico. Por último, como $f_1(x^1, x^2) = k_1$ y $f_2(x^1, x^2) = k_2$, se sigue que $\frac{\partial f_1}{\partial x^2} = 0$ y $F(x^1, x^2, x^3, x^4) = -ak_1k_2 \neq 0$, lo que implica que el polinomio mínimo es siempre $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$.

Observación 2.2.2 Nótese que las variedades construidas en los ejemplos 2.2.1 y 2.2.2 no son localmente simétricas, aunque tanto el polinomio característico como el polinomio mínimo tienen raíces constantes.

Ejemplo 2.2.3 *Variedad de Osserman con polinomio característico $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$ para todo campo de vectores X, y polinomio mínimo $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$ ó $m_\lambda(R_X) = \lambda$ dependiendo del punto considerado.*

Sea g la métrica definida en $\mathbb{R}^4$ por

$$\begin{aligned} g &= x^3x^1 dx^1 \otimes dx^1 + x^4 k dx^2 \otimes dx^2 \\ &\quad + a\left\{dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1\right\} \\ &\quad + b\left\{dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^4 + dx^4 \otimes dx^2\right\}, \end{aligned}$$

donde a, b, k son constantes reales diferentes de cero.

Entonces, de (2.2.6), (2.2.7) y (2.2.8) se sigue que el operador de Jacobi tiene la forma

$$R_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{4b^3}\alpha_2^2 k x^1 & -\frac{a}{4b^3}\alpha_1\alpha_2 k x^1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{4b^3}\alpha_1\alpha_2 k x^1 & \frac{a}{4b^3}\alpha_1^2 k x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $X = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es un campo de vectores arbitrario en $\mathbb{R}^4$. Así, teniendo en cuenta que, en este caso, $f_1(x^1, x^2) = x^1$ y $f_2(x^1, x^2) = k$, se sigue que el polinomio mínimo es $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$ en cualquier punto con $x^1 \neq 0$ y $m_\lambda(R_X) = \lambda$ en aquellos puntos en los que $x^1 = 0$, pues $\frac{\partial f_1}{\partial x^2} = 0$ y $F(x^1, x^2, x^3, x^4) = -akx^1$. Además, como $\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} = -\frac{a}{4b^3}k\left\{1 + \frac{(x^1)^2}{b}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4} \neq 0$, este espacio no es localmente simétrico.

Ejemplo 2.2.4 *Variedad de Osserman con polinomio característico $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$ para todo campo de vectores X, y con polinomio mínimo $m_\lambda(R_X) = \lambda^3$, $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$ ó $m_\lambda(R_X) = \lambda$ según el punto considerado.*

Sea g la métrica definida en $\mathbb{R}^4$ por

$$\begin{aligned} g \;=\; & x^3x^1x^2dx^1 \otimes dx^1 - \frac{1}{2}x^4(x^1)^2dx^2 \otimes dx^2 \\ & +a\left\{dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1\right\} \\ & +b\left\{dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^4 + dx^4 \otimes dx^2\right\}, \end{aligned}$$

donde a, $b \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$.

En este caso, de (2.2.6) y (2.2.7) se sigue que el operador de Jacobi tiene la forma

$$R_X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2b}\alpha_1\alpha_2x^1 & -\frac{1}{2b}\alpha_1^2x^1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b}\alpha_2^2x^1 & -\frac{1}{2b}\alpha_1\alpha_2x^1 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \frac{1}{2b}\alpha_1\alpha_2x^1 & \frac{1}{2b}\alpha_2^2x^1 \\ b_{21} & b_{22} & -\frac{1}{2b}\alpha_1^2x^1 & -\frac{1}{2b}\alpha_1\alpha_2x^1 \end{pmatrix},$$

donde $X = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es un campo de vectores arbitrario en $\mathbb{R}^4$ y los coeficientes b_{ij}, $i, j = 1, 2$, están dados por (2.2.8). Así, el polinomio mínimo es $m_\lambda(R_X) = \lambda^3$ en los puntos con $x^1 \neq 0$, $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$ en los puntos correspondientes a $x^1 = 0$ y $x^4 \neq 0$, y $m_\lambda(R_X) = \lambda$ en aquellos puntos en los que $x^1 = x^4 = 0$ pues, en este caso, $f_1(x^1, x^2) = x^1x^2$ y $f_2(x^1, x^2) = -\frac{1}{2}(x^1)^2$ y, por tanto, $\frac{\partial f_1}{\partial x^2} = x^1$ y $F(x^1, x^2, x^3, x^4) = -2b^2x^4 + \frac{1}{2}a(x^1)^3x^2$. Además, como $\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^4}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} = -\frac{1}{2b}\left\{\frac{1}{2b}(x^1)^2x^2 + 1\right\}\frac{\partial}{\partial x^3} \neq 0$, este espacio no es localmente simétrico.

Por último, nótese que en el subconjunto abierto determinado por $x^4 \neq 0$ el polinomio mínimo varía entre $m_\lambda(R_X) = \lambda^3$ y $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$, según x^1 sea diferente o igual a cero respectivamente.

Ejemplo 2.2.5 *Variedad de Osserman con polinomio característico $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$ para todo campo de vectores X, y polinomio mínimo $m_\lambda(R_X) = \lambda^3$ ó $m_\lambda(R_X) = \lambda$ dependiendo del punto considerado.*

Sea g la métrica definida en $\mathbb{R}^4$ por

$$\begin{aligned} g &= x^3(x^1)^3(x^2)^3 dx^1 \otimes dx^1 - \frac{3}{4}x^4(x^1)^4(x^2)^2 dx^2 \otimes dx^2 \\ &\quad + a\left\{dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1\right\} \\ &\quad + b\left\{dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^4 + dx^4 \otimes dx^2\right\}, \end{aligned}$$

donde a, $b \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$.

Entonces, de (2.2.6) y (2.2.7) se sigue que el operador de Jacobi tiene la forma

$$R_X = \frac{3}{2b}\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2(x^1)^3(x^2)^2 & -\alpha_1^2(x^1)^3(x^2)^2 & 0 & 0 \\ \alpha_2^2(x^1)^3(x^2)^2 & -\alpha_1\alpha_2(x^1)^3(x^2)^2 & 0 & 0 \\ b'_{11} & b'_{12} & \alpha_1\alpha_2(x^1)^3(x^2)^2 & \alpha_2^2(x^1)^3(x^2)^2 \\ b'_{21} & b'_{22} & -\alpha_1^2(x^1)^3(x^2)^2 & -\alpha_1\alpha_2(x^1)^3(x^2)^2 \end{pmatrix},$$

donde $X = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es un campo de vectores arbitrario en $\mathbb{R}^4$ y los coeficientes b'_{ij}, con $i, j = 1, 2$, se obtienen a partir de (2.2.8), teniendo en cuenta que $b'_{ij} = \frac{2b}{3} b_{ij}$. Por tanto, el polinomio mínimo es $m_\lambda(R_X) = \lambda^3$ en los puntos en los que $x^1x^2 \neq 0$ y $m_\lambda(R_X) = \lambda$ siempre que $x^1x^2 = 0$, pues como $f_1(x^1, x^2) = (x^1)^3(x^2)^3$ y $f_2(x^1, x^2) = -\frac{3}{4}(x^1)^4(x^2)^2$, entonces $\frac{\partial f_1}{\partial x^2} = 3(x^1)^3(x^2)^2$ y $F(x^1, x^2, x^3, x^4) = 6b^2(2x^1x^3 - 3x^2x^4)(x^1)^2x^2 + \frac{3}{4}a(x^1)^7(x^2)^5$. Además, $\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^4}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} = -\frac{3}{2b}(x^1)^2(x^2)^2\left\{\frac{1}{2b}(x^1)^4(x^2)^3 + 3\right\}\frac{\partial}{\partial x^3} \neq 0$, por lo que este espacio no es localmente simétrico.

Observación 2.2.3 Nótese que en las variedades de los ejemplos 2.2.3, 2.2.4 y 2.2.5 el polinomio mínimo no tiene raíces constantes (cambia de un punto a otro) y, por lo tanto, dichas variedades no son curvatura homogéneas. En consecuencia, tampoco serán localmente homogéneas.

Finalizamos con un ejemplo que muestra que, aún bajo la condición adicional de ser la variedad localmente simétrica, el carácter de Osserman presenta fuertes pecularidades en el caso semi–Riemanniano frente a sus homólogos Riemanniano o Lorentziano. De hecho, el ejemplo mostrado a continuación es una variedad no llana localmente simétrica cuyo operador de Jacobi tiene un único autovalor idénticamente nulo.

Ejemplo 2.2.6 *Variedad de Osserman localmente simétrica con polinomio característico $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$ y polinomio mínimo $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$ para todo campo de vectores X sobre la variedad.*

Sea M el subconjunto abierto de $\mathbb{R}^4$ determinado por $x^1x^2 \neq 0$. Sobre M consideramos la métrica g definida por

$$\begin{aligned} g &= x^3\frac{b}{x^1}dx^1\otimes dx^1 + x^4\frac{b}{x^2}dx^2\otimes dx^2 \\ &\quad + a\left\{dx^1\otimes dx^2 + dx^2\otimes dx^1\right\} \\ &\quad + b\left\{dx^1\otimes dx^3 + dx^3\otimes dx^1 + dx^2\otimes dx^4 + dx^4\otimes dx^2\right\}, \end{aligned}$$

donde a, b son números reales distintos de cero.

Entonces, de (2.2.6), (2.2.7) y (2.2.8) se sigue que el operador de Jacobi tiene la forma

$$R_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{4b}\alpha_2^2\frac{1}{x^1x^2} & -\frac{a}{4b}\alpha_1\alpha_2\frac{1}{x^1x^2} & 0 & 0 \\ -\frac{a}{4b}\alpha_1\alpha_2\frac{1}{x^1x^2} & \frac{a}{4b}\alpha_1^2\frac{1}{x^1x^2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $X = \sum_{i=1}^{4}\alpha_i\frac{\partial}{\partial x^i}$ es un campo de vectores arbitrario en M. Además, como en este caso $f_1(x^1,x^2) = \frac{b}{x^1}$ y $f_2(x^1,x^2) = \frac{b}{x^2}$, se tiene que $\frac{\partial f_1}{\partial x^2} = 0$ y $F(x^1,x^2,x^3,x^4) = \frac{-ab^2}{x^1x^2} \neq 0$. Por lo tanto, el Teorema 2.2.1 implica que (M,g) es una variedad semi–Riemanniana de Osserman 4–dimensional con polinomio característico $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$ y polinomio mínimo $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$. Por último, se sigue del Teorema 2.2.2 que (M,g) es locamente simétrica.

2.2.3 Variedades de Osserman de dimensión y signatura arbitrarias

A continuación mostraremos que los ejemplos construidos anteriormente en dimensión 4 nos permiten probar la *existencia de variedades semi–Riemannianas de Osserman de cualquier signatura (p,q), $p,q \geq 2$, que no son localmente simétricas*. Para ello consideraremos ciertas variedades producto, por lo que será útil el siguiente resultado:

Lema 2.2.1 *Sean $(M_1^{n_1}, g_1)$ y $(M_2^{n_2}, g_2)$ dos variedades semi–Riemannianas de Osserman. Si los autovalores de los operadores de Jacobi en ambas variedades son todos cero, entonces la variedad producto $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2)$ es una variedad semi–Riemanniana de Osserman.*

Demostración. Denotemos por $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ los tensores curvatura de las variedades M_1 y M_2 respectivamente, y por R el tensor curvatura de la variedad producto. Es inmediato comprobar que, por ser todos los autovalores de los operadores de Jacobi nulos en ambas variedades, entonces $p_\lambda(R^{(1)}_{X_1}) = det(R^{(1)}_{X_1} - \lambda Id_{n_1}) = (-\lambda)^{n_1}$ para cualquier campo de vectores X_1 sobre la variedad M_1 y, análogamente, $p_\lambda(R^{(2)}_{X_2}) = det(R^{(2)}_{X_2} - \lambda Id_{n_2}) = (-\lambda)^{n_2}$ para cualquier campo de vectores X_2 sobre M_2.

Entonces, si $X = (X_1, X_2)$ es un campo de vectores arbitrario sobre la variedad producto, como

$$R_X = \begin{pmatrix} R^{(1)}_{X_1} & 0 \\ 0 & R^{(2)}_{X_2} \end{pmatrix}$$

se sigue que $p_\lambda(R_X) = p_\lambda(R^{(1)}_{X_1}) \cdot p_\lambda(R^{(2)}_{X_2}) = (-\lambda)^{n_1+n_2}$, lo que prueba que $M_1 \times M_2$ es Osserman. $\square$

Observación 2.2.4 Nótese que, en el caso Riemanniano, una variedad de Osserman en cada punto es llana si y sólo si es localmente reducible [GSV, Lema 2.2]. Del mismo modo, como consecuencia de [BBG, Teor. 1], se obtiene que una variedad Lorentziana de Osserman es localmente reducible si y sólo si es llana.

Denotemos ahora por $(N, g_{(f_1,f_2)})$ uno cualquiera de los ejemplos 2.2.1–2.2.5 construidos en la subsección anterior de esta sección (por lo que N es una variedad de Osserman 4–dimensional de signatura $(+,+,-,-)$) y sea $\mathbb{R}^n_{(p-2,q-2)}$ el espacio Euclídeo con la métrica indefinida usual de signatura $(p-2, q-2)$, $p+q = n+4$. Entonces, el Lema 2.2.1 implica que la variedad producto $\mathbb{R}^n_{(p-2,q-2)} \times N$, dotada de la métrica producto, es una *variedad semi–Riemanniana de signatura (p, q) que es Osserman pero no localmente simétrica para cualesquiera $p, q \geq 2$.*

Observación 2.2.5

1. Nótese que, en cada punto de la variedad $\mathbb{R}^n_{(p-2,q-2)} \times N$, existen vectores unitarios cuyos operadores de Jacobi tienen diferentes polinomios mínimos. Por ejemplo, tomando $X = (X_1, 0)$, el operador de Jacobi asociado se anula idénticamente y, por tanto, el polinomio mínimo es $m_\lambda(R_X) = \lambda$. Sin embargo, para $X = (0, X_2)$, el polinomio mínimo de R_X será $m_\lambda(R_X) = \lambda^s$, $s = 1, 2, 3$, dependiendo del punto y la métrica $g_{(f_1,f_2)}$ considerados en N. Esto muestra que, en un mismo punto, el operador de Jacobi puede ser diagonalizable para algunas direcciones pero no diagonalizable para otras.

2. Por otra parte, si $(N, g_{(f_1,f_2)})$ es la variedad de Osserman localmente simétrica con polinomio característico $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$ y polinomio mínimo $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$ construida en el Ejemplo 2.2.6, entonces la variedad producto $\mathbb{R}^n_{(p-2,q-2)} \times N$ es localmente simétrica de Osserman. Nótese que, en este caso, las raíces del polinomio mínimo del operador de Jacobi tampoco son constantes, ni siquiera en cada punto. Por tanto, aun cuando la homogeneidad local de la variedad permitiese asegurar la independencia del polinomio mínimo con respecto al punto considerado, dicho polinomio no tiene por qué tener raíces constantes.

2.3 Métricas de Osserman en el fibrado cotangente a una variedad afín

El objetivo de esta sección es construir nuevos ejemplos de variedades de Osserman semi–Riemannianas. Esto se llevará a cabo mediante el estudio de la extensión de Riemann de una conexión afín sin torsión al fibrado cotangente de la variedad afín (M, ∇) considerada. Cuando la variedad base sea una superficie, las métricas construidas en el fibrado cotangente serán de signatura $(+, +, -, -)$ y permitirán interpretar geométricamente la familia de métricas construidas en la sección anterior. Los resultados más importantes de esta sección se encuentran recogidos en [GKVVz].

2.3.1 Extensión de Riemann de una conexión afín

Sea M una variedad diferenciable n–dimensional y denotemos por T^*M el fibrado cotangente, que es una variedad $2n$–dimensional, y por $\pi : T^*M \longrightarrow M$ la proyección natural. Si $(U, (x^1, \dots, x^n))$ es un sistema de coordenadas locales sobre M, en el abierto $\pi^{-1}(U)$ de T^*M se tiene un sistema de coordenadas locales inducido por el anterior, $(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{2n})$, teniendo en cuenta el homeomorfismo $\pi^{-1}(U) \cong U \times (\mathbb{R}^n)^*$. Para facilitar la escritura de las expresiones, en lo que sigue escribiremos $x^{n+i} = x_{\bar{i}}$ para $i = 1, \dots, n$. Dado un campo de vectores X sobre M, $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, se define el *levantamiento completo* de X como $X^C = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}}}$.

Una conexión simétrica ∇ sobre M induce en T^*M una métrica semi–Riemanniana, que denotamos por g_∇, de signatura (n, n), llamada *extensión de Riemann* de ∇. Esta métrica está determinada por

$$g_\nabla(X^C, Y^C) = -\gamma(\nabla_X Y + \nabla_Y X), \tag{2.3.1}$$

donde X^C, Y^C son los levantamientos completos a T^*M de campos de vectores X, Y en M y, para cualquier campo de vectores Z sobre M, $Z = \sum_{i=1}^{n} Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, γZ es la función sobre T^*M definida por $\gamma Z = x_{\bar{i}} Z^i$. En el sistema de coordenadas inducidas en T^*M la extensión de Riemann se expresa como

$$g_\nabla = \begin{pmatrix} -2x_{\bar{k}}\Gamma^k_{ij} & \delta^j_i \\ \delta^j_i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3.2}$$

$(i, j = 1, \ldots, n)$ con respecto a $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial x_{\bar{1}}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{\bar{n}}}\right\}$, donde Γ^c_{ab} denotan los símbolos de Christoffel de la métrica g. (Consultar [YI, Cap. 7] para más detalles.)

En lo que sigue supondremos que las variedades son conexas y las conexiones sin torsión. Comenzamos con la siguiente definición:

Definición 2.3.1 *Sea ∇ una conexión sobre una variedad M. Se dice que ∇ es Osserman si los autovalores de los operadores de Jacobi son constantes (y, por lo tanto, se anulan).*

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1 *Sea (M, ∇) una variedad afín, T^*M el fibrado cotangente de M y g_∇ la extensión de Riemann de ∇. Entonces, (T^*M, g_∇) es una variedad de Osserman si y sólo si (M, ∇) es una variedad afín de Osserman.*

Demostración. Las componentes $\tilde{R}^D_{ABC}$ del tensor curvatura $\tilde{R}$ de (T^*M, g_∇) están determinadas por las componentes R^D_{ABC} del tensor curvatura R de (M, ∇) y su derivada covariante, según [YI, pág. 270]:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^h_{kji} &= R^h_{kji}, \\
\tilde{R}^{\bar{h}}_{kji} &= x_{\bar{a}}\Big\{\nabla_h R^a_{kji} - \nabla_i R^a_{kjh} + \Gamma^a_{ht} R^t_{kji} \\
&\qquad + \Gamma^a_{kt} R^t_{ihj} + \Gamma^a_{jt} R^t_{hik} + \Gamma^a_{it} R^t_{kjh}\Big\}, \\
\tilde{R}^{\bar{h}}_{kj\bar{i}} &= -R^i_{kjh}, \\
\tilde{R}^{\bar{h}}_{k\bar{j}i} &= -R^j_{hik}, \\
\tilde{R}^{\bar{h}}_{\bar{k}ji} &= -R^k_{hij}.
\end{aligned}$$

Sea ahora $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \alpha_{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}}}\right\}$ un campo de vectores sobre T^*M. De las expresiones anteriores se sigue que la matriz del operador de Jacobi $\tilde{R}_{\tilde{X}}$ con respecto a la base de campos coordenados $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}}}\right\}$ está dada por

$$\tilde{R}_{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} R_X & 0 \\ * & {}^tR_X \end{pmatrix}, \tag{2.3.3}$$

donde R_X es la matriz del operador de Jacobi correspondiente al campo de vectores $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ sobre M con respecto a la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$.

Ahora bien, si $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es un campo de vectores arbitrario en M, entonces es inmediato comprobar que $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2\alpha_i}\frac{\partial}{\partial x_{\bar{i}}}\right\}$ es un campo de vectores unitario en cualquier punto de la sección cero de T^*M y, por lo tanto, si (T^*M, g_∇) es Osserman entonces (2.3.3) implica que (M, ∇) es afín Osserman. Por otra parte, si (M, ∇) es afín Osserman, (2.3.3) muestra que los autovalores del operador de Jacobi $\tilde{R}_{\tilde{X}}$ son nulos para cualquier campo de vectores $\tilde{X}$ en T^*M y, por tanto, (T^*M, g_∇) es Osserman. □

2.3.2 Superficies afines de Osserman

En esta subsección estudiaremos la situación más sencilla que se presenta en el Teorema 2.3.1, es decir, cuando M es una superficie. En tal caso, obtendremos una descripción local de las conexiones afines de Osserman.

Sea ∇ una conexión en M y X un campo de vectores en M. El tensor de Ricci, ρ, verifica que $\rho(X,X) = tr(R_X)$, donde R_X es el operador de Jacobi asociado a X. Por tanto, si (M, ∇) es una variedad afín de Osserman, entonces $\rho(X,X) = 0$ para todo campo de vectores X y, en consecuencia, el tensor de Ricci debe ser antisimétrico. El siguiente teorema muestra que la antisimetría del tensor de Ricci caracteriza las conexiones afines de Osserman sobre superficies.

Teorema 2.3.2 *Una conexión afín ∇ sobre una superficie M es Osserman si y sólo si el tensor de Ricci es antisimétrico.*

Demostración. Sean R_{ijk}^l, $(i,\ j,\ k,\ l = 1,2)$, las componentes del tensor curvatura de la conexión ∇. Si (x^1, x^2) denota un sistema de coordenadas locales sobre M, entonces el operador de Jacobi R_X asociado a un campo de vectores $X = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ tiene la forma

$$R_X = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 R_{121}^1 + \alpha_2^2 R_{122}^1 & -\alpha_1^2 R_{121}^1 - \alpha_1\alpha_2 R_{122}^1 \\ \alpha_1\alpha_2 R_{121}^2 + \alpha_2^2 R_{122}^2 & -\alpha_1^2 R_{121}^2 - \alpha_1\alpha_2 R_{122}^2 \end{pmatrix}$$

con respecto a la referencia de campos coordenados $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right\}$. Se sigue entonces que el polinomio característico de R_X está dado por

$$p_\lambda(R_X) = det(R_X - \lambda Id_2) = \lambda^2 - \left\{\alpha_1\alpha_2 R_{121}^1 - \alpha_1^2 R_{121}^2 + \alpha_2^2 R_{122}^1 - \alpha_1\alpha_2 R_{122}^2\right\}\lambda$$

y, por tanto, ∇ es Osserman si y sólo si

$$\begin{aligned} R_{121}^2 = R_{122}^1 = 0, \\ R_{121}^1 - R_{122}^2 = 0. \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Ahora bien, como el tensor curvatura de una superficie satisface

$$R(X,Y)Z = \rho(Y,Z)X - \rho(X,Z)Y, \tag{2.3.5}$$

se sigue que (M,∇) es Osserman si y sólo si el tensor de Ricci satisface la condición $\rho(X,Y) + \rho(Y,X) = 0$. □

Observación 2.3.1 Una conexión ∇ es *métrica* si hace paralela a alguna forma bilineal simétrica no degenerada ϕ (es decir, $\nabla\phi = 0$). Dado que el tensor de Ricci de tales conexiones es simétrico, el teorema anterior muestra que las conexiones de Osserman sobre superficies son llanas si son métricas.

Teorema 2.3.3 *Una conexión afín localmente simétrica ∇ sobre una superficie M es Osserman si y sólo si es localmente llana.*

Demostración. Se sigue de (2.3.5) que ∇ es una conexión localmente simétrica si y sólo si el tensor de Ricci es paralelo. Como ρ es antisimétrico, es de rango cero o dos. Es claro que ∇ es una conexión localmente llana si y sólo si el rango del tensor de Ricci ρ es cero. Supongamos entonces que el rango de ρ es 2. En este caso, el tensor de Ricci es una 2–forma no nula en todo punto y, por lo tanto, ρ define un elemento de volumen sobre M. Entonces, existe una 1–forma τ tal que $\nabla_X\rho = \tau(X)\rho$ y, como

$$\nabla_X(\nabla_Y\rho) = \nabla_X(\tau(Y)\rho) = X(\tau(Y))\rho + \tau(\nabla_X Y)\rho + \tau(Y)\tau(X)\rho,$$

se sigue que $R(X,Y)\rho = 2(d\tau)(X,Y)\rho$. Además, $R(X,Y)\rho = -(trR(X,Y))\rho$. Pero τ debe ser nula, pues la conexión ∇ es equiafín (por ser ρ paralelo) y, por lo tanto, $tr\,R(X,Y) = 0$ para cualesquiera campos de vectores X, Y.

Por otra parte, teniendo en cuenta que $R(X,Y) = -R(Y,X)$, la expresión (2.3.5) implica que $\rho(X,Y) - \rho(Y,X) = -tr\,R(X,Y)$.

Concluimos entonces que $\rho(X,Y) - \rho(Y,X) = 0$ para cualesquiera campos de vectores X, Y. Esto significa que el tensor de Ricci es simétrico, lo que supone una contradicción teniendo en cuenta que rango $\rho = 2$. □

Observación 2.3.2 Nótese que el resultado del teorema anterior no se cumple en dimensiones superiores. Por ejemplo, en el espacio Euclídeo 3–dimensional $\mathbb{R}^3$ consideramos la conexión ∇ definida por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^1}, \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \frac{\partial}{\partial x^2} = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^3} = e^{(x^1+\frac{1}{2}(x^2)^2)} \frac{\partial}{\partial x^2},$$

donde (x^1, x^2, x^3) son las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^3$. Entonces, las únicas componentes no nulas del tensor curvatura son las dadas por

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} = e^{(x^1+\frac{1}{2}(x^2)^2)} \frac{\partial}{\partial x^2},$$

de donde se sigue que $(\mathbb{R}^3, \nabla)$ es una variedad afín Osserman localmente simétrica, pero no llana. Nótese también la existencia de ejemplos de variedades semi–Riemannianas de Osserman localmente simétricas no llanas en dimensión 4 con métrica de signatura $(+,+,-,-)$ (cf. §2.2).

El siguiente resultado describe localmente las conexiones de Osserman en un entorno de un punto donde su curvatura no sea cero.

Teorema 2.3.4 *Sea (M, ∇) una superficie afín Osserman y sea p un punto de M. Entonces el tensor curvatura de ∇ se anula en p o existe un sistema de coordenadas (x^1, x^2) en un entorno U de p en el que la conexión ∇ está dada por*

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^1} &= -\left\{\frac{\partial \theta}{\partial x^1}\right\}\frac{\partial}{\partial x^1}, \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \frac{\partial}{\partial x^2} &= \left\{\frac{\partial \theta}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^2}, \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

donde θ es una función diferenciable en U tal que $\dfrac{\partial \theta}{\partial x^1 \partial x^2} \neq 0$, *ó*

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^1} &= -\left\{\frac{\partial \lg \varphi}{\partial x^1}\right\}\frac{\partial}{\partial x^1}, \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \frac{\partial}{\partial x^2} &= \varphi\frac{\partial}{\partial x^1} + \left\{\frac{\partial \lg \varphi}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^2}, \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

donde φ es una función diferenciable en U tal que $\dfrac{\partial \lg \varphi}{\partial x^1 \partial x^2} \neq 0$, *ó*

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^1} &= \left\{-\frac{\partial \lg \psi}{\partial x^1} + \frac{x^2}{1+x^1x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^1} - \left\{\frac{1}{\psi(1+x^1x^2)}\right\}\frac{\partial}{\partial x^2}, \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \frac{\partial}{\partial x^2} &= -\left\{\frac{\psi}{1+x^1x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^1} + \left\{\frac{\partial \lg \psi}{\partial x^2} + \frac{x^1}{1+x^1x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^2}, \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

donde ψ es una función diferenciable en U tal que $\dfrac{\partial \lg \psi}{\partial x^1 \partial x^2} \neq 0$.

Demostración. Si en un punto $p \in M$ el tensor de Ricci es no nulo, entonces define un elemento de volumen en un entorno U de p y, por lo tanto, existe una 1–forma τ tal que $\nabla\rho = \tau \otimes \rho$. Esto muestra que ρ es un campo de tensores recurrente en el entorno U y, entonces, (2.3.5) implica que ∇ tiene curvatura recurrente. Las conexiones afines sin torsión 2–dimensionales con curvatura recurrente han sido estudiadas por Wong quien probó que, para cada punto, existe un sistema de coordenadas en el que la conexión está dada por (2.3.6), (2.3.7) ó (2.3.8), lo que prueba el resultado (véase [Wo, Teor. 4.2]). $\square$

Observación 2.3.3 Nótese que la existencia de conexiones afines Osserman es una condición restrictiva cuando se consideran superficies analíticas compactas. Así, si ∇ es una conexión analítica en una superficie compacta M entonces el tensor de Ricci es un campo de tensores recurrente y, por lo tanto, es nulo o existe una 1–forma no nula sobre M, de donde se sigue que la característica de Euler es nula. (Véase [BB] para un ejemplo de conexión compleja no llana con tensor de Ricci antisimétrico sobre el toro).

Observación 2.3.4 Teniendo en cuenta que la variedad (T^*M, g_∇) es localmente simétrica si y sólo si (M, ∇) también lo es [YI, pág. 272], el Teorema 2.3.3 implica que las variedades 4–dimensionales semi–Riemannianas de Osserman construidas por el teorema anterior son localmente simétricas si y sólo si son localmente llanas. Por otra parte, a partir del ejemplo indicado en la Observación 2.3.2 se obtienen ejemplos de variedades de Osserman localmente simétricas no llanas en dimensión 6 con métrica de signatura $(+,+,+,-,-,-)$.

Observación 2.3.5 Sea $M = \mathbb{R}^2$ el espacio Euclídeo 2–dimensional con coordenadas usuales (x^1, x^2), y ∇ una conexión simétrica sobre $\mathbb{R}^2$ determinada por los símbolos de Christoffel $\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2} f_1(x^1, x^2)$, $\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} f_2(x^1, x^2)$, siendo los demás símbolos nulos y f_1 y f_2 funciones diferenciables sobre $\mathbb{R}^2$. Entonces, la extensión de Riemann g_∇ definida sobre $T^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ coincide con la métrica $g_{(f_1,f_2)}$ dada por (2.2.1), cuando $a = 0$ y $b = 1$.

2.4 Métricas de Osserman en el fibrado tangente

Como ya se ha mencionado en el Capítulo 1 de esta memoria, Chi [Ch1] ha probado la validez de la conjetura de Osserman sobre variedades Kählerianas con métrica definida positiva de curvatura seccional no negativa o no positiva. Aun cuando disponemos de numerosos ejemplos de variedades semi–Riemannianas de Osserman no simétricas, debe tenerse presente que la acotación de la curvatura seccional es una condición muy restrictiva sobre variedades Kähler indefinidas. Así, Kulkarni [Ku] prueba que la acotación superior o inferior de la curvatura seccional en una variedad semi–Riemanniana es equivalente a su constancia, por lo que si, además, la variedad es Kähler, entonces debe ser llana.

Por lo tanto, parece lógico imponer acotaciones directamente sobre la curvatura seccional holomorfa de una variedad Kähler indefinida. En primer lugar, nótese que la curvatura seccional holomorfa de una variedad Kähler indefinida está acotada superior e inferiormente en un punto si y sólo si es constante [BR, Teor. 6.3], [BCGH, Teor. 2.1]. Tal condición de acotación puede ser restringida a planos holomorfos de signatura $(+,+)$ ó $(-,-)$ independientemente, siendo igualmente cierto que conlleva la constancia de la curvatura seccional holomorfa. Además, se ha probado en [BCGHM, Teor. 4.1] que la curvatura seccional holomorfa de una variedad Kähler indefinida está acotada superiormente (o inferiormente) sobre planos holomorfos de signatura $(+,+)$ e inferiormente (o superiormente) sobre planos holomorfos de signatura $(-,-)$ en un punto $p \in M$ si y sólo si la variedad es nula holomórficamente llana en dicho punto. Dado que toda variedad de Osserman es Einstein, se sigue de [BCGHM, Teor. 6.2] que toda variedad Kähler indefinida de Osserman cumpliendo la condición de acotación anterior ha de tener curvatura seccional holomorfa constante.

En vista de todo lo anterior, podría esperarse también que el carácter no positivo o no negativo de la curvatura seccional holomorfa permitiese clasificar las variedades Kählerianas indefinidas de Osserman. En esta sección construiremos ejemplos no simétricos (e incluso no homogéneos) de variedades Kähler indefinidas de Osserman donde la curvatura seccional holomorfa es no positiva o no negativa. Para ello estudiamos el fibrado tangente a una variedad semi–Riemanniana equipado con una métrica relacionada con el levantamiento completo de la métrica de la variedad base. Los principales resultados de esta sección se encuentran recogidos en [BCGHV2].

2.4.1 El levantamiento completo deformado de una métrica

Sea M una variedad diferenciable n–dimensional y denotemos por TM el fibrado tangente a M, que es una variedad $2n$–dimensional, y por $\pi : TM \longrightarrow M$ la proyección natural. Si $(U,(x^1,\dots,x^n))$ es un sistema de coordenadas locales sobre M, en el abierto $\pi^{-1}(U)$ de TM se tiene un sistema de coordenadas locales inducido por el anterior, $(x^1,\dots,x^n,x^{n+1},\dots,x^{2n})$, teniendo en cuenta el homeomorfismo $\pi^{-1}(U)\cong U\times\mathbb{R}^n$. Para simplificar la escritura de las expresiones, en lo que sigue escribiremos $x^{n+i}=x^{\bar{i}}$ para $i=1,\dots,n$.

Dado un campo de vectores X sobre M, $X=\sum_{i=1}^n X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, se define el *levantamiento completo* de X como $X^C=\sum_{i=1}^n X^i\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}$. Además, si ϕ es un campo de tensores de tipo $(0,2)$ con componentes ϕ_{ij} con respecto al sistema de coordenadas elegido, su *levantamiento vertical* a TM está dado por $\phi^V=\sum_{i,j=1}^n(\phi_{ij}\circ\pi)dx^i\otimes dx^j$. Si g es una métrica semi–Riemanniana en M, su *levantamiento completo* g^C es la métrica en TM definida por

$$g^C(X^C, Y^C) = g(X,Y)^C, \tag{2.4.1}$$

donde X^C, Y^C son los levantamientos completos en TM de los campos de vectores X, Y de M. La métrica g^C ha de ser necesariamente de signatura (n,n). Además, teniendo en cuenta que el levantamiento completo f^C de una función f en M es la función en TM definida por $f^C = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} x^{\bar{i}}$, la métrica g^C se expresa, en coordenadas locales, por

$$g^C = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} x^{\bar{k}} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad i,j = 1,\dots,n. \tag{2.4.2}$$

Señalemos, finalmente, que si J es cualquier campo de tensores de tipo $(1,1)$ sobre la variedad base, se define su *levantamiento completo*, J^C, por medio de la expresión $J^C(X^C) = (JX)^C$. (Consultar [YI] para más detalles.)

A continuación introducimos la familia de métricas en TM en la que estamos interesados. Tales métricas han sido consideradas inicialmente por Oproiu en el estudio de la armonicidad de campos de vectores [Op].

Definición 2.4.1 *Sea (M,g) una variedad semi–Riemanniana y ϕ un campo de tensores $(0,2)$ simétrico sobre M. Llamamos levantamiento completo deformado de la métrica g a la métrica semi–Riemanniana g_ϕ en TM definida por*

$$g_\phi = g^C + \phi^V, \tag{2.4.3}$$

donde g^C denota el levantamiento completo de la métrica g y ϕ^V el levantamiento vertical de ϕ a TM.

En coordenadas locales, g_ϕ se expresa como

$$g_\phi = \begin{pmatrix} \phi_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} x^{\bar{k}} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4.4}$$

donde $i,j = 1,\dots,n$, y (ϕ_{ij}) es la descripción de ϕ en las coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$.

El siguiente teorema pone de manifiesto la utilidad del levantamiento completo deformado en la construcción de nuevos ejemplos de variedades semi–Riemannianas de Osserman.

Teorema 2.4.1 *Sea (M,g) una variedad semi–Riemanniana y ϕ un campo de tensores de tipo $(0,2)$ simétrico sobre M. Entonces, (TM, g_ϕ) es una variedad semi–Riemanniana de Osserman si y sólo si los autovalores de los operadores de Jacobi de (M,g) son idénticamente nulos.*

Demostración. Sean $(U, (x^i))$ un entorno coordenado sobre M, $(\pi^{-1}(U), (x^i, x^{\bar{i}}))$ las coordenadas inducidas en TM y $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \alpha_{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \right\}$ un campo de vectores en TM, donde $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \right\}$ es la referencia local de campos de vectores en TM asociada a los campos de vectores coordenados.

Después de largos cálculos se obtienen las siguientes componentes $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$ del tensor curvatura $\tilde{R}$ de (TM, g_ϕ):

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ij\bar{k}}^{l} = \tilde{R}_{i\bar{j}k}^{l} = \tilde{R}_{\bar{i}\bar{j}k}^{l} = \tilde{R}_{i\bar{j}\bar{k}}^{l} = \tilde{R}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}^{l} = 0, \\ \tilde{R}_{ijk}^{l} = \tilde{R}_{ij\bar{k}}^{\bar{l}} = \tilde{R}_{i\bar{j}k}^{\bar{l}} = R_{ijk}^{l}, \\ \tilde{R}_{\bar{i}\bar{j}k}^{\bar{l}} = \tilde{R}_{i\bar{j}\bar{k}}^{\bar{l}} = \tilde{R}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}^{\bar{l}} = 0, \end{aligned}$$

donde R_{ijk}^{l} son las componentes del tensor curvatura R de (M, g).

Se sigue, entonces, que la matriz del operador de Jacobi $\tilde{R}_{\tilde{X}} = \tilde{R}(\cdot, \tilde{X})\tilde{X}$ en un punto $\tilde{p} \in TM$ con respecto a la base inducida por los campos de vectores coordenados está dada por

$$\tilde{R}_{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} R_X & 0 \\ * & R_X \end{pmatrix}, \tag{2.4.5}$$

donde X es el vector $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ tangente a M en $p = \pi(\tilde{p})$ y R_X representa la matriz del operador de Jacobi asociado a X con respecto a la base inducida por los campos de vectores coordenados en M.

Sea ahora $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un vector no nulo en T_pM y tomemos $\tilde{X}$ en $T_{\tilde{p}}TM$, con $\tilde{p} = (p, 0)$, dado por $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \alpha_{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \right\}$, donde $\alpha_{\bar{i}} \in \mathbb{R}$ están definidas como sigue: elegimos $k \in \{1, \ldots, n\}$ de tal forma que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_{ik} \neq 0$ (nótese que siempre es posible elegir k de esta forma, pues X es un vector no nulo) y definimos

$$\alpha_{\bar{t}} = \begin{cases} \dfrac{1 - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \phi_{ij}}{2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_{ik}} & \text{si} \quad t = k, \\ 0 & \text{si} \quad t \neq k. \end{cases}$$

Entonces, como $g_\phi(\tilde{X},\tilde{X}) = \sum_{i,j,r=1}^{n} \alpha_i\alpha_j x^{\bar{r}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j\phi_{ij} + 2\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\alpha_{\bar{j}} g_{ij}$, se sigue que $\tilde{X}$ es un vector unitario en la sección cero de TM.

Ahora, si (TM, g_ϕ) es una variedad de Osserman, se sigue de (2.4.5) que (M,g) es también Osserman. Además, como los operadores de Jacobi deben tener autovalores constantes independientemente del vector no nulo X elegido en M, estos autovalores son necesariamente nulos. Por otra parte, si (M,g) es Osserman y los autovalores de los operadores de Jacobi son nulos, entonces (2.4.5) implica que el polinomio característico $p_\lambda(\tilde{R}_{\tilde{X}}) = det(\tilde{R}_{\tilde{X}} - \lambda Id_{2n})$ del operador de Jacobi $\tilde{R}_{\tilde{X}}$ verifica $p_\lambda(\tilde{R}_{\tilde{X}}) = \lambda^{2n}$, para cualquier vector $\tilde{X}$ tangente a TM. Esto muestra que (TM, g_ϕ) es Osserman. □

Observación 2.4.1 La construcción en el teorema anterior permite mostrar ejemplos de variedades semi–Riemannianas de Osserman sin más que considerar (M,g) una variedad llana y ϕ un cambio conforme de la métrica g.

2.4.2 Variedades Kähler indefinidas

A continuación analizamos el caso más simple del Teorema 2.4.1 estudiando el levantamiento completo deformado de la métrica usual de Riemann en $\mathbb{R}^2$. Sea, entonces, el espacio Euclídeo real 4–dimensional $\mathbb{R}^4$ con coordenadas $(x^1,x^2,x^3,x^4) = (x^1,x^2,x^{\bar{1}},x^{\bar{2}})$, siendo (x^1,x^2) las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^2$. Por otra parte, sea $\phi = (\phi_{ij})$ un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ sobre $\mathbb{R}^2$ y consideremos el levantamiento completo deformado g_ϕ en $\mathbb{R}^4$,

$$g_\phi = dx^1 \otimes dx^3 + dx^2 \otimes dx^4 + \sum_{i,j=1}^{2} \phi_{ij} dx^i \otimes dx^j. \tag{2.4.6}$$

La conexión de Levi Civita de $(\mathbb{R}^4, g_\phi)$ está dada por

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^1} &= \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_{11}}{\partial x^1}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3} + \left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi_{12}}{\partial x^1}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4},\\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^2} &= \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_{11}}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3} + \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_{22}}{\partial x^1}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4},\\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \frac{\partial}{\partial x^2} &= \left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial\phi_{12}}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3} + \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_{22}}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4},
\end{aligned}\tag{2.4.7}$$

y, por tanto, las únicas componentes no nulas del tensor curvatura son

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} &= \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_{11}}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_{22}}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2\phi_{12}}{\partial x^1\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4},\\
R\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} &= -\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_{11}}{\partial x^2\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_{22}}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2\phi_{12}}{\partial x^1\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3}.
\end{aligned}\tag{2.4.8}$$

Como consecuencia tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.4.2 *$(\mathbb{R}^4, g_\phi)$ es una variedad semi–Riemanniana de Osserman con métrica de signatura $(+,+,-,-)$, siendo el polinomio característico de los operadores de Jacobi $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$. El polinomio mínimo $m_\lambda(R_X)$ de dichos operadores queda determinado por la función*

$$F(x^1, x^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \phi_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}, \tag{2.4.9}$$

donde ϕ_{ij}, $i, j = 1, 2$, son las componentes de ϕ, de la forma siguiente:

(i) $(\mathbb{R}^4, g_\phi)$ es de curvatura constante cero ($m_\lambda(R_X) = \lambda$) en todo punto en el que F se anula,

(ii) el polinomio mínimo es $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$ en los puntos en los que F es diferente de cero.

Además, $(\mathbb{R}^4, g_\phi)$ es localmente simétrica si y sólo si la función F es constante.

Demostración. Claramente $(\mathbb{R}^4, g_\phi)$ es Osserman como aplicación del Teorema 2.4.1. Además, si $X = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es un campo de vectores sobre $\mathbb{R}^4$, de (2.4.8) se sigue que el operador de Jacobi R_X asociado a X viene dado por la matriz

$$R_X = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \phi_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 & \alpha_1\alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

respecto de la referencia de campos coordenados $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i};\ i = 1, 2, 3, 4\right\}$. Esta expresión implica que el polinomio característico es $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$, mientras que el polinomio mínimo será $m_\lambda(R_X) = \lambda$ ó $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$ según F se anule o no.

Para estudiar el carácter localmente simétrico de la variedad, nótese que las expresiones (2.4.7) y (2.4.8) nos permiten calcular las derivadas del tensor curvatura, obteniéndose que las únicas no nulas son las dadas por:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} &= \left\{\frac{\partial F}{\partial x^1}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4}, \\
\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} &= \left\{\frac{\partial F}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4}, \\
\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} &= -\left\{\frac{\partial F}{\partial x^1}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3}, \\
\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} &= -\left\{\frac{\partial F}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que la variedad es localmente simétrica si y sólo si la función F es constante. □

En lo que sigue denotemos por J la estructura compleja usual en $\mathbb{R}^2$, $J\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x^2}$, y sea J^C su levantamiento completo a $\mathbb{R}^4 = T\mathbb{R}^2$. Un campo de tensores ϕ simétrico de tipo $(0,2)$ sobre $(\mathbb{R}^2, g, J)$ se llama *Hermítico* si verifica $\phi(JX, JY) = \phi(X, Y)$, para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre $\mathbb{R}^2$ (equivalentemente, $\phi_{11} = \phi_{22}$ y $\phi_{12} = 0$). Entonces, se sigue de (2.4.6) que g_ϕ define una métrica casi Hermítica en $(\mathbb{R}^4, J^C)$ si y sólo si ϕ es Hermítico.

Cuando ϕ es un tensor Hermítico se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.4.3 *Sea ϕ un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ Hermítico sobre $(\mathbb{R}^2, g, J)$. Entonces, $(\mathbb{R}^4, g_\phi, J^C)$ es una variedad Kähler indefinida de Osserman y, además, la curvatura seccional holomorfa de $(\mathbb{R}^4, g_\phi, J^C)$ en cada punto tiene el signo de $-\Delta\phi_{11}$, donde Δ denota el Laplaciano en $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. Como ϕ es Hermítico, $\phi_{11} = \phi_{22}$ y $\phi_{12} = 0$. Entonces, se sigue de (2.4.7) que $(\mathbb{R}^4, g_\phi, J^C)$ es una variedad Kähler indefinida. Además, la expresión (2.4.8) del tensor curvatura se reduce a

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} &= \frac{1}{2}\Delta\phi_{11}\frac{\partial}{\partial x^4}, \\ R\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2}\Delta\phi_{11}\frac{\partial}{\partial x^3}, \end{aligned}$$

donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2}$ es el Laplaciano Euclídeo en $\mathbb{R}^2$. Así, la curvatura seccional holomorfa de cualquier plano holomorfo no degenerado $\{X, JX\}$ está dada por

$$H(X) = \frac{g_\phi(X, JX, JX, X)}{g_\phi(X, X)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{g_\phi(X, X)}\right)^2 \Delta\phi_{11},$$

donde X es el campo de vectores $X = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Esto muestra que la curvatura seccional holomorfa toma el signo de $-\Delta\phi_{11}$. □

Corolario 2.4.1 *Si $(\mathbb{R}^4, g_\phi, J^C)$ es una variedad indefinida Kähler de Osserman localmente simétrica, entonces la curvatura seccional holomorfa de $(\mathbb{R}^4, g_\phi, J^C)$ es no positiva o no negativa, pero no es constante a menos que sea llana.*

Demostración. Nótese que, si ϕ es un tensor simétrico de tipo $(0,2)$ Hermítico sobre $\mathbb{R}^2$, entonces (2.4.9) se reduce a $\Delta\phi_{11}$, de donde se sigue el resultado. □

Finalizamos este apartado con algunas observaciones:

1. En primer lugar, nótese que el producto de las variedades $(\mathbb{R}^4, g_\phi, J^C)$ y los espacios Euclídeos $\mathbb{R}^n_\nu$ nos permite construir variedades Kähler indefinidas de cualquier signatura $(2p, 2q)$, $p, q \geq 1$, con curvatura seccional holomorfa no positiva o no negativa, que son Osserman pero no localmente simétricas, de hecho, ni siquiera localmente homogéneas.

2. En segundo lugar, nótese que en cada punto de $(\mathbb{R}^4, g_\phi, J^C)$ la curvatura seccional holomorfa es no positiva o no negativa, aunque su signo puede cambiar de un punto a otro (según lo haga el signo de $\Delta\phi_{11}$).

3. Finalmente señalemos que en [BR, Ejemplo 6.2] se muestra un ejemplo de variedad Kähler indefinida simétrica cuya curvatura seccional holomorfa está acotada superiormente o inferiormente sin ser constante. Nótese que los ejemplos construidos en el Teorema 2.4.2 son no simétricos (salvo que la función F definida en (2.4.9) sea constante). Además, cuando la función F se anule en algún punto sin ser idénticamente nula, los ejemplos construidos no serán localmente homogéneos.

2.4.3 Variedades para–Kähler

Teniendo en cuenta que la geometría para–Hermítica desempeña un papel importante en el estudio de las métricas semi–Riemannianas mostraremos que, también en los casos más sencillos, es posible dotar a las variedades construidas en el Teorema 2.4.1 de una estructura para–Kähler, lo que permitirá mostrar ejemplos de variedades para–Kähler de Osserman cuya curvatura seccional paraholomorfa es no negativa o no positiva en cada punto, pero no constante (incluso cuando la variedad es localmente simétrica). Para ello realizamos un estudio similar al anterior pero, en este caso, analizaremos el levantamiento completo deformado de la métrica de Minkowski en $\mathbb{R}^2_1$.

Denotemos por h la métrica usual de Minkowski en $\mathbb{R}^2_1$ y consideremos el espacio Euclídeo 4–dimensional $\mathbb{R}^4$, con coordenadas $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1, x^2, x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}})$, inducidas por las coordenadas (x^1, x^2) en $\mathbb{R}^2_1$. Si $\phi = (\phi_{ij})$ es un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ sobre $\mathbb{R}^2$, entonces el levantamiento completo deformado h_ϕ en $\mathbb{R}^4 = T\mathbb{R}^2_1$ viene dado por

$$h_\phi = dx^1 \otimes dx^3 - dx^2 \otimes dx^4 + \sum_{i,j=1}^{2} \phi_{ij} dx^i \otimes dx^j. \tag{2.4.10}$$

En este caso, la conexión de Levi Civita de $(\mathbb{R}^4, h_\phi)$ está dada por

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^1} &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_{11}}{\partial x^1} \right\} \frac{\partial}{\partial x^3} + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_{12}}{\partial x^1} \right\} \frac{\partial}{\partial x^4}, \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^2} &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_{11}}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial}{\partial x^3} - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_{22}}{\partial x^1} \right\} \frac{\partial}{\partial x^4}, \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \frac{\partial}{\partial x^2} &= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial \phi_{12}}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial}{\partial x^3} - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_{22}}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial}{\partial x^4},
\end{aligned} \tag{2.4.11}
$$

y, por tanto, las únicas componentes no nulas del tensor curvatura son

$$
\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} &= -\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \phi_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} \right\} \frac{\partial}{\partial x^4}, \\
R\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} &= -\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \phi_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} \right\} \frac{\partial}{\partial x^3}.
\end{aligned} \tag{2.4.12}
$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 2.4.4 $(\mathbb{R}^4, h_\phi)$ *es una variedad semi–Riemanniana de Osserman con métrica de signatura* $(+,+,-,-)$*, siendo el polinomio característico de los operadores de Jacobi* $p_\lambda(R_X) = \lambda^4$*. El polinomio mínimo* $m_\lambda(R_X)$ *de dichos operadores queda determinado por la función*

$$F(x^1, x^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \phi_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}, \tag{2.4.13}$$

donde ϕ_{ij}*,* $i, j = 1, 2$*, son las componentes de* ϕ*, de la forma siguiente:*

(i) $(\mathbb{R}^4, h_\phi)$ *es de curvatura constante cero (*$m_\lambda(R_X) = \lambda$*) en todo punto en el que* F *se anula,*

(ii) el polinomio mínimo es $m_\lambda(R_X) = \lambda^2$ *en los puntos en los que* F *es diferente de cero.*

Además, $(\mathbb{R}^4, h_\phi)$ *es localmente simétrica si y sólo si la función* F *es constante.*

Demostración. Que la variedad $(\mathbb{R}^4, h_\phi)$ es de Osserman se sigue del Teorema 2.4.1. Además, si $X = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es un campo de vectores sobre $\mathbb{R}^4$, entonces (2.4.12) implica que la matriz de operador de Jacobi asociado a X viene dada por

$$R_X = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 \phi_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2^2 & \alpha_1 \alpha_2 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

respecto de la referencia de campos coordenados $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i};\ i=1,2,3,4\right\}$. Esta expresión implica que el polinomio característico es $p_\lambda(R_X)=\lambda^4$, mientras que el polinomio mínimo queda determinado por la función F de acuerdo con (i) y (ii).

Por otra parte, las expresiones (2.4.11) y (2.4.12) permiten determinar las derivadas del tensor curvatura de la variedad, de forma que las únicas no nulas son las dadas por:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} &= -\left\{\frac{\partial F}{\partial x^1}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4},\\
\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} &= -\left\{\frac{\partial F}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^4},\\
\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} &= -\left\{\frac{\partial F}{\partial x^1}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3},\\
\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} R\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} &= -\left\{\frac{\partial F}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x^3},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que la variedad es localmente simétrica si y sólo si la función F es constante. $\square$

$(\mathbb{R}^2_1,h)$ puede ser dotado de forma natural de una estructura para–Kähler, sin más que considerar la estructura paracompleja K definida por $K\frac{\partial}{\partial x^1}=\frac{\partial}{\partial x^2}$. Diremos que un campo de tensores ϕ de tipo $(0,2)$ sobre $(\mathbb{R}^2_1,h,K)$ es *para–Hermítico* si verifica que $\phi(KX,KY)=-\phi(X,Y)$, para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre $\mathbb{R}^2_1$ (equivalentemente, $\phi_{11}=-\phi_{22}$ y $\phi_{12}=0$). Entonces, es inmediato observar que, por (2.4.10), h_ϕ es una métrica casi para–Hermítica en $(\mathbb{R}^4,K^C)$ si y sólo si ϕ es para–Hermítico.

Teorema 2.4.5 *Sea ϕ un campo de tensores simétrico de tipo $(0,2)$ para–Hermítico sobre $(\mathbb{R}^2_1,h,K)$. Entonces, $(\mathbb{R}^4,h_\phi,K^C)$ es una variedad para–Kähler de Osserman y, además, la curvatura seccional paraholomorfa de $(\mathbb{R}^4,h_\phi,K^C)$ tiene el signo de $-\square\phi_{11}$, donde $\square$ denota el Laplaciano hiperbólico en $\mathbb{R}^2_1$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que ϕ es para–Hermítico, se cumple que $\phi_{11}=-\phi_{22}$ y $\phi_{12}=0$. Entonces, se sigue de (2.4.11) que $(\mathbb{R}^4,g_\phi,J^C)$ es una variedad para–Kähler. Por otra parte, la expresión (2.4.12) del tensor curvatura se reduce a

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1} &= \frac{1}{2}\square\phi_{11}\frac{\partial}{\partial x^4},\\
R\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}\square\phi_{11}\frac{\partial}{\partial x^3},
\end{aligned}$$

donde $\square=\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^1}-\frac{\partial^2}{\partial x^2\partial x^2}$ es el Laplaciano hiperbólico en $\mathbb{R}^2_1$. Entonces, la curvatura seccional paraholomorfa de cualquier plano paraholomorfo no degenerado $\{X,KX\}$ está dada por

$$H(X) = \frac{h_\phi(X, KX, KX, X)}{-h_\phi(X, X)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{h_\phi(X, X)}\right)^2 \Box\phi_{11},$$

donde $X = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, lo que muestra que la curvatura seccional paraholomorfa tiene el signo de $-\Box\phi_{11}$. □

Corolario 2.4.2 *Si* $(\mathbb{R}^4, h_\phi, K^C)$ *es una variedad para–Kähler de Osserman localmente simétrica, entonces la curvatura seccional paraholomorfa de* $(\mathbb{R}^4, h_\phi, K^C)$ *es no positiva o no negativa, pero no constante salvo que sea llana.*

Demostración. Si ϕ es un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ para–Hermítico sobre $\mathbb{R}^2_1$, entonces (2.4.13) se reduce a $\Box\phi_{11}$, de donde se sigue el resultado. □

Observación 2.4.2 Nótese que la curvatura seccional paraholomorfa de una variedad para–Kähler está acotada inferior y superiormente en un punto si y sólo si es constante en dicho punto [GB, Teor. 9]. Sin embargo, de acuerdo con el Teorema 2.4.5, dicha curvatura puede estar acotada superiormente o inferiormente sin necesidad de ser constante, incluso cuando la variedad es localmente simétrica. Además, el Teorema 2.4.4 muestra que, si la función F definida por (2.4.13) no es idénticamente nula pero se anula en algún punto, entonces la variedad $(\mathbb{R}^4, h_\phi)$ no es localmente homogénea (pues el polinomio mínimo varía de unos puntos a otros).

Capítulo 3

Variedades de Osserman especiales

Los ejemplos expuestos en el Capítulo 2 muestran la mayor complejidad del problema de Osserman en geometría semi–Riemanniana con respecto a sus análogos Riemanniano o Lorentziano. Motivados por los resultados de [BBR], analizaremos en detalle el problema de Osserman bajo ciertas condiciones adicionales que exponemos a continuación.

En la sección 2.1 construimos ejemplos de variedades de Osserman semi–Riemannianas con métrica de cualquier signatura (p,q), $p,q \geq 2$, que no son localmente simétricas, todas ellas con operador de Jacobi no diagonalizable. Teniendo esto en cuenta, parece natural limitar el estudio del problema de Osserman a variedades en las que el operador de Jacobi sea diagonalizable, y dentro de este caso comenzar por la situación más sencilla. Es inmediato observar que si el operador de Jacobi es diagonalizable con un único autovalor (que cambia de signo según los vectores sean espaciales o temporales), entonces la variedad debe ser un espacio de curvatura seccional constante. Por tanto nos centraremos en el análisis del primer caso no trivial, es decir, variedades cuyo operador de Jacobi tiene dos autovalores distintos. Esto lo resumimos en el primer axioma:

Axioma 1. *Para cada vector unitario x, el operador de Jacobi R_x es diagonalizable con exactamente dos autovalores distintos, $\lambda\varepsilon_x$ y $\mu\varepsilon_x$, donde $\varepsilon_x = g(x,x)$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$.*

En el Capítulo 2 analizábamos también varios ejemplos de variedades de Osserman con operador de Jacobi diagonalizable (sección 2.1), y todos ellos verifican el Axioma anterior. En esos ejemplos estudiamos los autoespacios asociados a ambos autovalores y resaltamos varias propiedades comunes a todos los casos que ahora generalizamos en el segundo axioma. Para ello resultará útil denotar por $E_\lambda(x)$ el subespacio del espacio tangente definido por

$$E_\lambda(x) = \langle x \rangle \oplus Ker(R_x - \lambda\varepsilon_x Id).$$

Entonces,

Axioma 2. *Si z es un vector unitario en $E_\lambda(x)$, entonces $E_\lambda(z) = E_\lambda(x)$. Además, si $y \in Ker(R_x - \mu\varepsilon_x Id)$, entonces $x \in Ker(R_y - \mu\varepsilon_y Id)$.*

Nótese que el segundo axioma implica que el autovalor λ verifica una condición similar a la enunciada para μ, es decir, si $y \in Ker(R_x - \lambda\varepsilon_x Id)$, entonces $x \in Ker(R_y - \lambda\varepsilon_y Id)$. Sin embargo, el autovalor μ no satisface una condición análoga a la impuesta sobre λ. Esto muestra que no es posible intercambiar los autovalores λ y μ entre sí.

Nótese además que, en el caso particular de ser la métrica Riemanniana, los Axiomas 1 y 2 anteriores se reducen a los considerados por Chi en [Ch1].

Definición 3.0.1 *Diremos que una variedad semi–Riemanniana es una variedad de Osserman especial si verifica los Axiomas* 1 *y* 2*. (Nótese que tales variedades son espaciales y temporales Osserman).*

El objetivo central de este capítulo es obtener el siguiente resultado de clasificación:

Teorema 3.0.1 *Sea (M, g) una variedad de Osserman especial. Entonces M es localmente simétrica y, además, si la dimensión de M es distinta de* 16 *y* 32 *entonces dicha variedad es localmente isométrica a una de las variedades siguientes:*

(a) una variedad Kähler indefinida de curvatura seccional holomorfa constante con métrica de signatura $(2p, 2q)$, $p, q \geq 0$,

(b) una variedad cuaterniónica Kähler indefinida de curvatura seccional cuaterniónica constante con métrica de signatura $(4p, 4q)$, $p, q \geq 0$,

(c) una variedad para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante con métrica de signatura (n, n) ó

(d) una variedad paracuaterniónica Kähler de curvatura seccional paracuaterniónica constante con métrica de signatura $(2n, 2n)$.

Cuando la dimensión sea distinta de 16 y 32, la demostración del Teorema 3.0.1 se llevará a cabo en dos etapas. La primera de ellas consistirá en la determinación explícita del tensor curvatura a través del estudio del operador de Jacobi, y la segunda se centrará en la demostración del carácter localmente simétrico de tales variedades usando, como herramienta básica, la segunda identidad de Bianchi. Los casos de dimensión 16 ó 32 son tratados como casos excepcionales en una sección aparte.

Hemos dividido el desarrollo de la primera etapa en tres secciones. En la primera (Preliminares) obtenemos varios resultados técnicos que serán necesarios en las siguientes. La sección 3.2 se dedica al estudio de la multiplicidad del autovalor distinguido λ. Esto se lleva a cabo mediante la construcción de ciertos módulos de Clifford y el uso de determinadas restricciones topológicas sobre su existencia. Finalmente, en la sección 3.3 mostramos como la curvatura en cada punto de la variedad puede ser expresada en términos de ciertas funciones curvatura asociadas a los módulos de Clifford construidos.

La sección 3.4 se dedica a probar el carácter localmente simétrico de los espacios considerados cuando la dimensión es distinta de 16 y 32, obteniéndose además la clasificación en este caso. En la sección 3.5 analizamos las dimensiones excepcionales 16 y 32, probando el carácter localmente simétrico de tales variedades. Sin embargo, en este momento es todavía un problema abierto la clasificación en estas dimensiones que, consideramos, está estrechamente relacionada con las álgebras de Cayley de primera y segunda especie. Con esta sección se completa la demostración del Teorema 3.0.1.

Por último, en la sección 3.6 mostramos que el resultado de clasificación obtenido para variedades de Osserman es también válido para variedades de Osserman en cada punto, siempre que la dimensión de la variedad sea estrictamente mayor que 4, probando para ello que, en este caso, el carácter global de Osserman es equivalente a la condición de Osserman en cada punto.

3.1 Preliminares

En esta sección nos restringiremos al espacio tangente en un punto arbitrario p de una variedad de Osserman especial (M^n, g), y utilizaremos los Axiomas 1 y 2 que satisfacen estas variedades para demostrar una serie de propiedades y lemas técnicos que serán de gran utilidad en las restantes secciones del capítulo. Más concretamente, si x_0, y_0 son vectores unitarios tales que $y_0 \in E_\lambda(x_0)^\perp$, determinaremos el operador de Jacobi R_w asociado a un vector unitario de la forma $w = ax_0 + by_0$, y describiremos los correspondientes autoespacios $Ker(R_w - \lambda\varepsilon_w Id)$ y $Ker(R_w - \mu\varepsilon_w Id)$, todo ello a partir de los subespacios $E_\lambda(x_0)$ y $E_\lambda(y_0)$.

Comenzamos probando que el espacio tangente T_pM admite una descomposición en suma directa de subespacios $E_\lambda(\cdot)$, lo que nos permite demostrar ciertas propiedades del tensor curvatura de la variedad.

Lema 3.1.1 *Los Axiomas* 1 *y* 2 *implican las siguientes propiedades:*

(i) Si x, y son vectores unitarios, con $y \in E_\lambda(x)^\perp$, entonces el vector y pertenece al autoespacio $Ker(R_x - \mu\varepsilon_x Id)$.

(ii) Si x, y se eligen como en (i), entonces $E_\lambda(y) \perp E_\lambda(x)$.

(iii) T_pM puede descomponerse en suma directa ortogonal de subespacios $E_\lambda(\cdot)$.

Demostración. Para probar (i) basta tener en cuenta que el espacio tangente se descompone en suma directa ortogonal $T_pM = E_\lambda(x) \oplus Ker(R_x - \mu\varepsilon_x Id)$, y que el vector y es ortogonal a $E_\lambda(x)$ por hipótesis.

Para probar (ii) consideremos cualquier vector unitario $\bar{x}$ en $E_\lambda(x)$. Por el Axioma 2 $E_\lambda(\bar{x})$ coincide con $E_\lambda(x)$, y por lo tanto (i) implica que $y \in Ker(R_{\bar{x}} - \mu\varepsilon_{\bar{x}} Id)$. Entonces, de nuevo por el Axioma 2, sabemos que $\bar{x} \in Ker(R_y - \mu\varepsilon_y Id)$, y por lo tanto $\bar{x} \perp E_\lambda(y)$ para todo vector unitario $\bar{x} \in E_\lambda(x)$, lo que prueba (ii).

Finalmente, (iii) se obtiene como aplicación directa de (ii). □

Aunque el apartado (iii) del lema anterior proporciona una descomposición del espacio tangente en términos de los subespacios $E_\lambda(\cdot)$ y la restricción de la métrica a cada uno de estos subespacios es no degenerada, su signatura puede, en principio, cambiar de unos subespacios a otros. Más adelante mostraremos que, esencialmente, sólo hay dos posibilidades diferentes para la signatura de la métrica inducida en $E_\lambda(\cdot)$: ser definida o de signatura (s, s).

Lema 3.1.2 *Considerando la descomposición del espacio tangente a M en el punto p dada por el lema anterior, es decir,*

$$T_pM = E_\lambda(x) \oplus E_\lambda(y) \oplus E_\lambda(z) \oplus \cdots,$$

se verifica que:

(i) $R(y, x_1)x_2 = -R(y, x_2)x_1 = -\frac{1}{2}R(x_1, x_2)y$, *para cualesquiera vectores unitarios ortogonales x_1, x_2 en $E_\lambda(x)$,*

(ii) $R(x, y)z = 0$,

(iii) $R(x_1, x_2)x_3 = 0$, *para cualesquiera vectores unitarios ortogonales x_1, x_2, x_3 en el subespacio $E_\lambda(x)$.*

Demostración. Sean x_1, x_2 vectores unitarios ortogonales en $E_\lambda(x)$ y tomemos a, b números reales no nulos tales que el vector $w = ax_1 + bx_2$ sea unitario. Por el Axioma 2, $E_\lambda(w) = E_\lambda(x)$. Así, y es ortogonal a $E_\lambda(w)$ y por lo tanto $R_w(y) = \mu\varepsilon_w y$.

Desarrollando esta última expresión obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu\varepsilon_w y &= R(y, ax_1 + bx_2)(ax_1 + bx_2) \\
&= a^2R(y, x_1)x_1 + b^2R(y, x_2)x_2 + ab(R(y, x_1)x_2 + R(y, x_2)x_1) \\
&= a^2\mu\varepsilon_{x_1} y + b^2\mu\varepsilon_{x_2} y + ab(R(y, x_1)x_2 + R(y, x_2)x_1) \\
&= \mu(a^2\varepsilon_{x_1} + b^2\varepsilon_{x_2})y + ab(R(y, x_1)x_2 + R(y, x_2)x_1) \\
&= \mu\varepsilon_w y + ab(R(y, x_1)x_2 + R(y, x_2)x_1),
\end{aligned}$$

y como $ab \neq 0$ se tiene que $R(y, x_1)x_2 = -R(y, x_2)x_1$. Ahora, utilizando esta última relación y la primera identidad de Bianchi se sigue que

$$\begin{aligned}
R(y, x_1)x_2 &= -R(x_1, x_2)y - R(x_2, y)x_1 \\
&= -R(x_1, x_2)y + R(y, x_2)x_1 \\
&= -R(x_1, x_2)y - R(y, x_1)x_2,
\end{aligned}$$

de donde $R(y,x_1)x_2 = -\frac{1}{2}R(x_1,x_2)y$, lo que prueba (i).

Para probar (ii), sean a, b números reales no nulos tales que $w = ay + bz$ es un vector unitario. Entonces, $R_w(x) = \mu\varepsilon_w x$, pues $w \in E_\lambda(x)^\perp$ implica que $x \in E_\lambda(w)^\perp$. Desarrollando ahora esta última expresión obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu\varepsilon_w x &= R(x, ay+bz)(ay+bz) \\
&= a^2R(x,y)y + b^2R(x,z)z + ab(R(x,y)z + R(x,z)y) \\
&= a^2\mu\varepsilon_y x + b^2\mu\varepsilon_z x + ab(R(x,y)z + R(x,z)y) \\
&= \mu(a^2\varepsilon_y + b^2\varepsilon_z)x + ab(R(x,y)z + R(x,z)y) \\
&= \mu\varepsilon_w x + ab(R(x,y)z + R(x,z)y),
\end{aligned}$$

y como $ab \neq 0$, se obtiene $R(x,y)z = -R(x,z)y$. Análogamente se puede probar que

$$\begin{cases} R(y,z)x = -R(y,x)z, \\ R(z,x)y = -R(z,y)x. \end{cases}$$

Con estas tres relaciones y la primera identidad de Bianchi obtenemos

$$\begin{aligned}
R(x,y)z &= -R(y,z)x - R(z,x)y \;=\; R(y,x)z + R(x,z)y \\
&= -R(x,y)z - R(x,y)z \;=\; -2R(x,y)z,
\end{aligned}$$

de donde $R(x,y)z = 0$.

Finalmente probaremos (iii) por medio de un argumento similar al anterior. Sean entonces a, b números reales no nulos tales que $w = ax_1 + bx_2$ es un vector unitario. Se cumple que $R_w(x_3) = \lambda\varepsilon_w x_3$, pues x_3 es un vector ortogonal a w perteneciente al subespacio $E_\lambda(w) = E_\lambda(x)$. Desarrollando esta última expresión se obtiene

$$\begin{aligned}
\lambda\varepsilon_w x_3 &= R(x_3, ax_1+bx_2)(ax_1+bx_2) \\
&= a^2R(x_3,x_1)x_1 + b^2R(x_3,x_2)x_2 + ab(R(x_3,x_1)x_2 + R(x_3,x_2)x_1) \\
&= a^2\lambda\varepsilon_{x_1}x_3 + b^2\lambda\varepsilon_{x_2}x_3 + ab(R(x_3,x_1)x_2 + R(x_3,x_2)x_1) \\
&= \lambda(a^2\varepsilon_{x_1} + b^2\varepsilon_{x_2})x_3 + ab(R(x_3,x_1)x_2 + R(x_3,x_2)x_1) \\
&= \lambda\varepsilon_w x_3 + ab(R(x_3,x_1)x_2 + R(x_3,x_2)x_1),
\end{aligned}$$

y como $ab \neq 0$ se sigue que $R(x_3,x_1)x_2 = -R(x_3,x_2)x_1$. Análogamente se comprueba que $R(x_1,x_2)x_3 = -R(x_1,x_3)x_2$, $R(x_2,x_3)x_1 = -R(x_2,x_1)x_3$. Con estas tres relaciones y la primera identidad de Bianchi obtenemos

$$\begin{aligned}
R(x_1,x_2)x_3 &= -R(x_2,x_3)x_1 - R(x_3,x_1)x_2 \;=\; R(x_2,x_1)x_3 + R(x_1,x_3)x_2 \\
&= -R(x_1,x_2)x_3 - R(x_1,x_2)x_3 \;=\; -2R(x_1,x_2)x_3,
\end{aligned}$$

de donde $R(x_1, x_2)x_3 = 0$, lo que concluye la demostración del lema. $\square$

En lo que sigue denotaremos por τ la multiplicidad del autovalor distinguido λ. Así, si ξ_0 es un vector unitario en T_pM, el subespacio $Ker(R_{\xi_0} - \lambda\varepsilon_{\xi_0}Id)$ tiene dimensión τ, y por lo tanto $E_\lambda(\xi_0)$ es un subespacio $(\tau + 1)$–dimensional. Escribiremos entonces $E_\lambda(\xi_0) = \langle\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\tau\}\rangle$, donde $\{\xi_1, \ldots, \xi_\tau\}$ es una base ortonormal del autoespacio $Ker(R_{\xi_0} - \lambda\varepsilon_{\xi_0}Id)$. Nótese que, como consecuencia, la dimensión de la variedad debe ser un múltiplo de $\tau + 1$ (basta tener en cuenta la descomposición del espacio tangente en un punto dada por el Lema 3.1.1).

Lema 3.1.3 *Sean x_0, y_0 vectores unitarios, con $y_0 \in E_\lambda(x_0)^\perp$. La relación*

$$\sum_{j=1}^{\tau} R(x_i, y_0, x_0, y_j)R(x_k, y_0, x_0, y_j)\varepsilon_{y_j} = \delta_{ik}\left(\frac{\lambda - \mu}{3}\right)^2 \varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}\varepsilon_{y_0}$$

se cumple para índices $i, k = 1, \ldots, \tau$, donde δ_{ik} denota la delta de Kronecker y, además, $E_\lambda(x_0) = \langle\{x_0, x_1, \ldots, x_\tau\}\rangle$, $E_\lambda(y_0) = \langle\{y_0, y_1, \ldots, y_\tau\}\rangle$.

Demostración. Elegimos dos números reales no nulos a, b tales que $w = ax_0 + by_0$ es un vector unitario. Para la descomposición

$$T_pM = E_\lambda(x_0) \oplus E_\lambda(y_0) \oplus (E_\lambda(x_0) \oplus E_\lambda(y_0))^\perp,$$

consideramos la base asociada $\Big\{x_0, x_1, \ldots, x_\tau, y_0, y_1, \ldots, y_\tau, z_1, \ldots, z_{n-2(\tau+1)}\Big\}$, y analizamos a continuación la actuación del operador R_w en cada uno de los elementos de esa base.

$\boxed{R_w(x_0)}$

Se tiene

$$\begin{aligned} R_w(x_0) &= R(x_0, ax_0 + by_0)(ax_0 + by_0) \;=\; abR(x_0, y_0)x_0 + b^2R(x_0, y_0)y_0 \\ &= -ab\mu\varepsilon_{x_0}y_0 + b^2\mu\varepsilon_{y_0}x_0, \end{aligned}$$

de donde $R_w(x_0) = b\mu(b\varepsilon_{y_0}x_0 - a\varepsilon_{x_0}y_0)$.

$\boxed{R_w(x_i),\ i = 1, \ldots, \tau}$

En este caso,

$$\begin{aligned} R_w(x_i) &= R(x_i, ax_0 + by_0)(ax_0 + by_0) \\ &= a^2R(x_i, x_0)x_0 + b^2R(x_i, y_0)y_0 + ab(R(x_i, x_0)y_0 + R(x_i, y_0)x_0) \\ &= a^2\lambda\varepsilon_{x_0}x_i + b^2\mu\varepsilon_{y_0}x_i + ab(R(x_i, x_0)y_0 + R(x_i, y_0)x_0) \\ &= (a^2\varepsilon_{x_0}\lambda + b^2\varepsilon_{y_0}\mu)x_i + ab(R(x_i, y_0)x_0 + R(x_i, x_0)y_0). \end{aligned}$$

Ahora bien, como por el Lema 3.1.2, (i), $R(x_i, x_0)y_0 = 2R(x_i, y_0)x_0$, la expresión anterior se convierte en $R_w(x_i) = (a^2\varepsilon_{x_0}\lambda + b^2\varepsilon_{y_0}\mu)x_i + 3abR(x_i, y_0)x_0$.

Por otra parte, como $R(x_i, y_0)x_0$ pertenece al subespacio $\langle\{y_1, \ldots, y_\tau\}\rangle$, se tiene que $R(x_i, y_0)x_0 = \sum_{j=1}^{\tau} R(x_i, y_0, x_0, y_j)\varepsilon_{y_j} y_j$, y así podemos concluir que

$$R_w(x_i) = (a^2\varepsilon_{x_0}\lambda + b^2\varepsilon_{y_0}\mu)x_i + 3ab\sum_{j=1}^{\tau} R(x_i, y_0, x_0, y_j)\varepsilon_{y_j} y_j.$$

$\boxed{R_w(y_0)}$

Se tiene

$$\begin{aligned} R_w(y_0) &= R(y_0, ax_0 + by_0)(ax_0 + by_0) = a^2 R(y_0, x_0)x_0 + abR(y_0, x_0)y_0 \\ &= a^2\mu\varepsilon_{x_0} y_0 - ab\mu\varepsilon_{y_0} x_0, \end{aligned}$$

y por lo tanto $R_w(y_0) = -a\mu(b\varepsilon_{y_0} x_0 - a\varepsilon_{x_0} y_0)$.

$\boxed{R_w(y_i),\ i = 1, \ldots, \tau}$

Igual que en los casos anteriores,

$$\begin{aligned} R_w(y_i) &= R(y_i, ax_0 + by_0)(ax_0 + by_0) \\ &= a^2 R(y_i, x_0)x_0 + b^2 R(y_i, y_0)y_0 + ab(R(y_i, x_0)y_0 + R(y_i, y_0)x_0) \\ &= a^2\mu\varepsilon_{x_0} y_i + b^2\lambda\varepsilon_{y_0} y_i + ab(R(y_i, x_0)y_0 + R(y_i, y_0)x_0) \\ &= (a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)y_i + ab(R(y_i, x_0)y_0 + R(y_i, y_0)x_0), \end{aligned}$$

y por el Lema 3.1.2, (i), se sigue que $R_w(y_i) = (a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)y_i + 3abR(y_i, x_0)y_0$.

Por otra parte, como $R(y_i, x_0)y_0 \in \langle\{x_1, \ldots, x_\tau\}\rangle$, se tiene que

$$R(y_i, x_0)y_0 = \sum_{j=1}^{\tau} R(y_i, x_0, y_0, x_j)\varepsilon_{x_j} x_j = \sum_{j=1}^{\tau} R(x_j, y_0, x_0, y_i)\varepsilon_{x_j} x_j,$$

y por lo tanto concluimos que $R_w(y_i) = 3ab\sum_{j=1}^{\tau} R(x_j, y_0, x_0, y_i)\varepsilon_{x_j} x_j + (a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)y_i$.

$\boxed{R_w(z_i),\ i = 1, \ldots, n - 2(\tau + 1)}$

Para cualquier vector z_i se cumple que

$$\begin{aligned} R_w(z_i) &= R(z_i, ax_0 + by_0)(ax_0 + by_0) \\ &= a^2 R(z_i, x_0)x_0 + b^2 R(z_i, y_0)y_0 + ab(R(z_i, x_0)y_0 + R(z_i, y_0)x_0) \\ &= a^2 \mu\varepsilon_{x_0} z_i + b^2 \mu\varepsilon_{y_0} z_i + ab(R(z_i, x_0)y_0 + R(z_i, y_0)x_0) \\ &= \mu(a^2\varepsilon_{x_0} + b^2\varepsilon_{y_0})z_i + ab(R(z_i, x_0)y_0 + R(z_i, y_0)x_0) \\ &= \mu\varepsilon_w z_i + ab(R(z_i, x_0)y_0 + R(z_i, y_0)x_0), \end{aligned}$$

y como $R(z_i, x_0)y_0 = R(z_i, y_0)x_0 = 0$ (por el Lema 3.1.2, (ii)), se sigue que $R_w(z_i) = \mu\varepsilon_w z_i$.

Resumiendo, hemos probado que el operador de Jacobi R_w queda determinado por:

$$(3.1.1) \qquad R_w : \left\{ \begin{array}{lcl} x_0 & \longrightarrow & b\mu(b\varepsilon_{y_0} x_0 - a\varepsilon_{x_0} y_0) \\ x_i & \longrightarrow & (a^2\varepsilon_{x_0}\lambda + b^2\varepsilon_{y_0}\mu)x_i + 3ab\sum_{j=1}^{\tau} R(x_i, y_0, x_0, y_j)\varepsilon_{y_j} y_j \\ y_0 & \longrightarrow & -a\mu(b\varepsilon_{y_0} x_0 - a\varepsilon_{x_0} y_0) \\ y_i & \longrightarrow & 3ab\sum_{j=1}^{\tau} R(x_j, y_0, x_0, y_i)\varepsilon_{x_j} x_j + (a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)y_i \\ z_i & \longrightarrow & \mu\varepsilon_w z_i \end{array} \right\}$$

Estudiamos ahora el autoespacio de R_w correspondiente al autovalor $\lambda\varepsilon_w$, es decir, $Ker(R_w - \lambda\varepsilon_w Id)$. Como $\{b\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{y_0} x_0 - ay_0, x_1, \ldots, x_\tau, y_1, \ldots, y_\tau, z_1, \ldots, z_{n-2(\tau+1)}\}$ proporciona una base de $\langle w \rangle^\perp$, si $\xi \in Ker(R_w - \lambda\varepsilon_w Id)$ podemos escribir

$$(3.1.2) \qquad \xi = \alpha(b\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{y_0} x_0 - ay_0) + \sum_{i=1}^{\tau}(\gamma_i x_i + \delta_i y_i) + \sum_{j=1}^{n-2(\tau+1)} \beta_j z_j,$$

y (3.1.1) implica que

$$R_w(\xi) = \alpha\mu\varepsilon_w(b\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{y_0} x_0 - ay_0) + \sum_{i=1}^{\tau}(\gamma'_i x_i + \delta'_i y_i) + \sum_{j=1}^{n-2(\tau+1)} \beta_j \mu\varepsilon_w z_j.$$

Como ξ es un autovector de R_w para λ, se tiene que $R_w(\xi) = \lambda\varepsilon_w \xi$, y por lo tanto (3.1.2) implica que

$$R_w(\xi) = \alpha\lambda\varepsilon_w(b\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{y_0} x_0 - ay_0) + \sum_{i=1}^{\tau}(\gamma_i \lambda\varepsilon_w x_i + \delta_i \lambda\varepsilon_w y_i) + \sum_{j=1}^{n-2(\tau+1)} \beta_j \lambda\varepsilon_w z_j.$$

Restando las dos expresiones obtenidas para $R_w(\xi)$ se sigue que

$$\alpha(\lambda-\mu)\varepsilon_w(b\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{y_0}x_0-ay_0)+\sum_{i=1}^{\tau}(\gamma_i''x_i+\delta_i''y_i)+\sum_{j=1}^{n-2(\tau+1)}\beta_j(\lambda-\mu)\varepsilon_w z_j$$

debe anularse. Por lo tanto tenemos una combinación lineal de los elementos de la base elegida para $\langle w\rangle^\perp$ que es nula, por lo que todos los coeficientes en la expresión anterior deben ser nulos. Así, $\alpha=0$ y también $\beta_j=0$, $j=1,\ldots,n-2(\tau+1)$, y por lo tanto (3.1.2) implica que $\xi\in\langle\{x_1,\ldots,x_\tau,y_1,\ldots,y_\tau\}\rangle$.

Sea V el subespacio de T_pM generado por $\{x_1,\ldots,x_\tau,y_1,\ldots,y_\tau\}$. Hemos probado que

$$Ker(R_w-\lambda\varepsilon_w Id)\subset V, \tag{3.1.3}$$

es decir, todos los autovectores de R_w correspondientes a $\lambda\varepsilon_w$ pertenecen al subespacio V.

Denotemos por $\tilde R_w$ la restricción de R_w al subespacio V. (3.1.1) implica entonces que la matriz de $\tilde R_w$ con respecto a la base $\{x_1,\ldots,x_\tau,y_1,\ldots,y_\tau\}$ está dada por

$$\tilde R_w=\left(\begin{array}{c|c}(a^2\varepsilon_{x_0}\lambda+b^2\varepsilon_{y_0}\mu)Id_\tau & 3abC\\ \hline 3abB & (a^2\varepsilon_{x_0}\mu+b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)Id_\tau\end{array}\right), \tag{3.1.4}$$

donde B y C son matrices $\tau\times\tau$ que están determinadas por $(B_{ij})=(R(x_j,y_0,x_0,y_i)\varepsilon_{y_i})$, $(C_{ij})=(R(x_i,y_0,x_0,y_j)\varepsilon_{x_i})$.

Ahora, (3.1.3) junto con los Axiomas 1 y 2 implican que el operador $\tilde R_w$ tiene dos autovalores, λ y μ, ambos con multiplicidad τ. Por lo tanto, $Ker(\tilde R_w-\lambda\varepsilon_w Id)$ es un subespacio τ–dimensional. Para determinar este subespacio, de (3.1.4) se sigue que

$$\tilde R_w-\lambda\varepsilon_w Id_{2\tau}=\left(\begin{array}{c|c}-b^2(\lambda-\mu)\varepsilon_{y_0}Id_\tau & 3abC\\ \hline 3abB & -a^2(\lambda-\mu)\varepsilon_{x_0}Id_\tau\end{array}\right),$$

y por lo tanto el subespacio queda determinado por

$$\left\{\begin{array}{rcrcl}-b^2(\lambda-\mu)\varepsilon_{y_0}\vec x & + & 3abC\vec y & = & 0,\\ 3abB\vec x & - & a^2(\lambda-\mu)\varepsilon_{x_0}\vec y & = & 0,\end{array}\right. \tag{3.1.5}$$

donde $\vec x$, $\vec y$ son vectores en $\langle\{x_1,\ldots,x_\tau\}\rangle$, $\langle\{y_1,\ldots,y_\tau\}\rangle$ respectivamente (considerados como vectores columna).

Se comprueba directamente que la solución de (3.1.5) está dada por

$$\begin{cases} \vec{y} &= \dfrac{3}{\lambda-\mu}\,\dfrac{b}{a}\,\varepsilon_{x_0}B\vec{x}, \\ CB\vec{x} &= \left(\dfrac{\lambda-\mu}{3}\right)^2 \varepsilon_{x_0}\varepsilon_{y_0}\vec{x}. \end{cases}$$

Como el subespacio es τ–dimensional, y además $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son matrices $\tau\times 1$, se sigue que la condición $CB\vec{x} = \left(\dfrac{\lambda-\mu}{3}\right)^2 \varepsilon_{x_0}\varepsilon_{y_0}\vec{x}$ se cumple para todos los vectores $\vec{x}$ en el subespacio $\langle\{x_1,\dots,x_\tau\}\rangle$. Entonces,

$$CB = \left(\frac{\lambda-\mu}{3}\right)^2 \varepsilon_{x_0}\varepsilon_{y_0}Id_\tau. \tag{3.1.6}$$

Finalmente, con las expresiones de las matrices B y C podemos calcular el elemento (i,k) de la matriz producto $C\cdot B$, obteniendo $\varepsilon_{x_i}\sum_{j=1}^{\tau} R(x_i,y_0,x_0,y_j)R(x_k,y_0,x_0,y_j)\varepsilon_{y_j}$, y por (3.1.6) este elemento coincide con $\delta_{ik}\left(\dfrac{\lambda-\mu}{3}\right)^2\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{y_0}$. Concluimos entonces que

$$\sum_{j=1}^{\tau} R(x_i,y_0,x_0,y_j)R(x_k,y_0,x_0,y_j)\varepsilon_{y_j} = \delta_{ik}\left(\frac{\lambda-\mu}{3}\right)^2 \varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}\varepsilon_{y_0}$$

para $i,k=1,\dots,\tau$, lo que prueba el lema. □

Para finalizar esta sección estudiamos los autoespacios correspondientes a los autovalores $\lambda\varepsilon_w$ y $\mu\varepsilon_w$ de R_w, donde el vector unitario w se elige como en el lema anterior.

Lema 3.1.4 *Sean x_0, y_0 vectores unitarios, con $y_0\in E_\lambda(x_0)^\perp$, y sean a, b números reales no nulos tales que $w = ax_0+by_0$ es un vector unitario. Entonces, los vectores $u_1,\dots,u_\tau,v_1,\dots,v_\tau$ definidos por*

$$\begin{aligned} u_i &= x_i - \frac{3}{2(\lambda-\mu)}\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}R(x_0,x_i)y_0, \quad i=1,\dots,\tau, \\ v_i &= \frac{b}{a}\varepsilon_{y_0}x_i + \frac{3}{2(\lambda-\mu)}R(x_0,x_i)y_0, \quad i=1,\dots,\tau, \end{aligned}$$

donde $\{x_1,\dots,x_\tau\}$ es una base ortonormal para $Ker(R_{x_0}-\lambda\varepsilon_{x_0}Id)$, verifican

(i) $\{u_1,\dots,u_\tau\}$ es un subespacio τ–dimensional de $Ker(R_w-\lambda\varepsilon_w Id)$, y por lo tanto una base,

(ii) $\{v_1,\dots,v_\tau\}$ es un subespacio τ–dimensional de $Ker(R_w-\mu\varepsilon_w Id)$,

(iii) $R_{u_i}v_j = \mu g(u_i,u_i)v_j$, con $i,j=1,\dots,\tau$.

Demostración. En la demostración del lema anterior determinamos el operador de Jacobi asociado al vector w. En concreto, fijando $\{y_1, \ldots, y_\tau\}$ una base ortonormal para el autoespacio $Ker(R_{y_0} - \lambda\varepsilon_{y_0} Id)$, para $i = 1, \ldots, \tau$ obtuvimos que

$$R_w(x_i) = (a^2\varepsilon_{x_0}\lambda + b^2\varepsilon_{y_0}\mu)x_i - \frac{3}{2}abR(x_0, x_i)y_0, \tag{3.1.7}$$

y también

$$R_w(y_i) = (a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)y_i + 3abR(y_i, x_0)y_0. \tag{3.1.8}$$

A continuación estudiamos como actúa R_w sobre el vector $R(x_0, x_i)y_0$, $i = 1, \ldots, \tau$. Teniendo en cuenta que

$$R(x_0, x_r)y_0 = \sum_{j=1}^{\tau} R(x_0, x_r, y_0, y_j)\varepsilon_{y_j} y_j, \qquad r = 1, \ldots, \tau, \tag{3.1.9}$$

se sigue que $R_w(R(x_0, x_i)y_0) = \sum_{j=1}^{\tau} R(x_0, x_i, y_0, y_j)\varepsilon_{y_j} R_w(y_j)$, y por (3.1.8) obtenemos

$$\begin{aligned} R_w(R(x_0, x_i)y_0) &= (a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)\sum_{j=1}^{\tau} R(x_0, x_i, y_0, y_j)\varepsilon_{y_j} y_j \\ &\quad + 3ab\sum_{j=1}^{\tau} R(x_0, x_i, y_0, y_j)\varepsilon_{y_j} R(y_j, x_0)y_0. \end{aligned}$$

Ahora, (3.1.9) junto con $R(y_j, x_0)y_0 = \sum_{k=1}^{\tau} R(y_j, x_0, y_0, x_k)\varepsilon_{x_k} x_k$ implican que

$$\begin{aligned} R_w(R(x_0, x_i)y_0) &= (a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)R(x_0, x_i)y_0 \\ &\quad + 3ab\sum_{k=1}^{\tau}\left\{\sum_{j=1}^{\tau} R(x_0, x_i, y_0, y_j)R(y_j, x_0, y_0, x_k)\varepsilon_{y_j}\right\}\varepsilon_{x_k} x_k, \end{aligned}$$

y como $R(x_0, x_i, y_0, y_j) = -2R(x_i, y_0, x_0, y_j)$ y $R(y_j, x_0, y_0, x_k) = R(x_k, y_0, x_0, y_j)$ la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned} R_w(R(x_0, x_i)y_0) &= (a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)R(x_0, x_i)y_0 \\ &\quad - 6ab\sum_{k=1}^{\tau}\left\{\sum_{j=1}^{\tau} R(x_i, y_0, x_0, y_j)R(x_k, y_0, x_0, y_j)\varepsilon_{y_j}\right\}\varepsilon_{x_k} x_k. \end{aligned}$$

Entonces, por el Lema 3.1.3 se sigue que

$$R_w(R(x_0,x_i)y_0) = (a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)R(x_0,x_i)y_0 - 6ab\sum_{k=1}^{\tau}\delta_{ik}\left(\frac{\lambda-\mu}{3}\right)^2\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}\varepsilon_{y_0}\varepsilon_{x_k}x_k,$$

de donde

$$R_w(R(x_0,x_i)y_0) = (a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)R(x_0,x_i)y_0 - \frac{2}{3}ab(\lambda-\mu)^2\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{y_0}x_i. \tag{3.1.10}$$

Utilizando ahora la expresión (3.1.7) y la condición (3.1.10) se obtiene que, para cualquier índice $i = 1,\ldots,\tau$,

$$\begin{aligned}
R_w(u_i) &= R_w(x_i) - \frac{3}{2(\lambda-\mu)}\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}R_w(R(x_0,x_i)y_0)\\
&= (a^2\varepsilon_{x_0}\lambda + b^2\varepsilon_{y_0}\mu)x_i - a\,\frac{3}{2}bR(x_0,x_i)y_0\\
&\quad -(a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)\frac{3}{2(\lambda-\mu)}\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}R(x_0,x_i)y_0 + (b^2\varepsilon_{y_0}\lambda - b^2\varepsilon_{y_0}\mu)x_i\\
&= (a^2\varepsilon_{x_0}\lambda + b^2\varepsilon_{y_0}\mu)x_i - (a^2\varepsilon_{x_0}\lambda - a^2\varepsilon_{x_0}\mu)\frac{3}{2(\lambda-\mu)}\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}R(x_0,x_i)y_0\\
&\quad -(a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)\frac{3}{2(\lambda-\mu)}\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}R(x_0,x_i)y_0 + (b^2\varepsilon_{y_0}\lambda - b^2\varepsilon_{y_0}\mu)x_i\\
&= \lambda(a^2\varepsilon_{x_0} + b^2\varepsilon_{y_0})x_i - \lambda(a^2\varepsilon_{x_0} + b^2\varepsilon_{y_0})\frac{3}{2(\lambda-\mu)}\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}R(x_0,x_i)y_0\\
&= \lambda\varepsilon_w u_i,
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
R_w(v_i) &= \frac{b}{a}\varepsilon_{y_0}R_w(x_i) + \frac{3}{2(\lambda-\mu)}R_w(R(x_0,x_i)y_0)\\
&= (a^2\varepsilon_{x_0}\lambda + b^2\varepsilon_{y_0}\mu)\frac{b}{a}\varepsilon_{y_0}x_i - (b^2\varepsilon_{y_0})\frac{3}{2}R(x_0,x_i)y_0\\
&\quad +(a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)\frac{3}{2(\lambda-\mu)}R(x_0,x_i)y_0 - (a\varepsilon_{x_0}\lambda - a\varepsilon_{x_0}\mu)b\varepsilon_{y_0}x_i\\
&= (a^2\varepsilon_{x_0}\lambda + b^2\varepsilon_{y_0}\mu)\frac{b}{a}\varepsilon_{y_0}x_i - (b^2\varepsilon_{y_0}\lambda - b^2\varepsilon_{y_0}\mu)\frac{3}{2(\lambda-\mu)}R(x_0,x_i)y_0\\
&\quad +(a^2\varepsilon_{x_0}\mu + b^2\varepsilon_{y_0}\lambda)\frac{3}{2(\lambda-\mu)}R(x_0,x_i)y_0 - (a^2\varepsilon_{x_0}\lambda - a^2\varepsilon_{x_0}\mu)\frac{b}{a}\varepsilon_{y_0}x_i\\
&= \mu(a^2\varepsilon_{x_0} + b^2\varepsilon_{y_0})\frac{b}{a}\varepsilon_{y_0}x_i + \mu(a^2\varepsilon_{x_0} + b^2\varepsilon_{y_0})\frac{3}{2(\lambda-\mu)}R(x_0,x_i)y_0\\
&= \mu\varepsilon_w v_i.
\end{aligned}$$

Las expresiones anteriores obtenidas para $R_w(u_i)$ y $R_w(v_i)$ prueban que $\{u_1, \ldots, u_\tau\}$ y $\{v_1, \ldots, v_\tau\}$ son subespacios de los autoespacios $Ker(R_w - \lambda\varepsilon_w Id)$ y $Ker(R_w - \mu\varepsilon_w Id)$, respectivamente.

Probaremos que la dimensión de ambos subespacios es τ. Para ello será suficiente comprobar que ambos son conjuntos de vectores no nulos ortogonales. Utilizando la expresión (3.1.9) y el Lema 3.1.3, se tiene que

$$\begin{aligned}
&g(R(x_0,x_i)y_0, R(x_0,x_j)y_0)\\
&= g\left(\sum_{k=1}^{\tau} R(x_0,x_i,y_0,y_k)\varepsilon_{y_k}y_k, \sum_{l=1}^{\tau} R(x_0,x_j,y_0,y_l)\varepsilon_{y_l}y_l\right)\\
&= \sum_{k,l=1}^{\tau} (-2R(x_i,y_0,x_0,y_k))(-2R(x_j,y_0,x_0,y_l))\varepsilon_{y_k}\varepsilon_{y_l}g(y_k,y_l)\\
&= 4\sum_{k,l=1}^{\tau} R(x_i,y_0,x_0,y_k)R(x_j,y_0,x_0,y_l)\varepsilon_{y_k}\varepsilon_{y_l}\delta_{kl}\varepsilon_{y_k}\\
&= 4\sum_{k=1}^{\tau} R(x_i,y_0,x_0,y_k)R(x_j,y_0,x_0,y_k)\varepsilon_{y_k}\\
&= 4\delta_{ij}\left(\frac{\lambda-\mu}{3}\right)^2 \varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}\varepsilon_{y_0},
\end{aligned}$$

para $i, j = 1, \ldots, \tau$.

Por otra parte, utilizando la expresión anterior y teniendo en cuenta además que los vectores $R(x_0,x_i)y_0$, $R(x_0,x_j)y_0$ son ortogonales al subespacio $\langle\{x_1, \ldots, x_\tau\}\rangle$, se sigue que

$$\begin{aligned}
g(u_i,u_j) &= g\left(x_i - \frac{3}{2(\lambda-\mu)}\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}R(x_0,x_i)y_0, x_j - \frac{3}{2(\lambda-\mu)}\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}R(x_0,x_j)y_0\right)\\
&= g(x_i,x_j) + \left(\frac{3}{2(\lambda-\mu)}\frac{b}{a}\right)^2 g(R(x_0,x_i)y_0, R(x_0,x_j)y_0)\\
&= \delta_{ij}\varepsilon_{x_i} + \delta_{ij}\frac{b^2}{a^2}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}\varepsilon_{y_0}\\
&= \delta_{ij}\frac{\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}}{a^2}(a^2\varepsilon_{x_0} + b^2\varepsilon_{y_0})\\
&= \delta_{ij}\frac{\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}\varepsilon_w}{a^2},
\end{aligned}$$

y, de igual forma,

$$\begin{aligned} g(v_i, v_j) &= g\left(\frac{b}{a}\varepsilon_{y_0}x_i + \frac{3}{2(\lambda-\mu)}R(x_0,x_i)y_0, \frac{b}{a}\varepsilon_{y_0}x_j + \frac{3}{2(\lambda-\mu)}R(x_0,x_j)y_0\right) \\ &= \frac{b^2}{a^2}g(x_i,x_j) + \left(\frac{3}{2(\lambda-\mu)}\right)^2 g(R(x_0,x_i)y_0, R(x_0,x_j)y_0) \\ &= \frac{b^2}{a^2}\delta_{ij}\varepsilon_{x_i} + \delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}\varepsilon_{y_0} \\ &= \delta_{ij}\frac{\varepsilon_{y_0}\varepsilon_{x_i}}{a^2}(a^2\varepsilon_{x_0} + b^2\varepsilon_{y_0}) \\ &= \delta_{ij}\frac{\varepsilon_{y_0}\varepsilon_{x_i}\varepsilon_w}{a^2}, \end{aligned}$$

lo que prueba que $\{u_1,\ldots,u_\tau\}$ y $\{v_1,\ldots,v_\tau\}$ son conjuntos de vectores no nulos ortogonales. Así quedan probados los apartados (i) y (ii).

Para probar (iii) fijamos $i,j \in \{1,\ldots,\tau\}$. Como u_i es un vector no nulo, podemos considerar el vector unitario $\overline{u}_i = \dfrac{u_i}{||u_i||}$, que por el apartado (i) pertenece a $E_\lambda(w)$, y por tanto el Axioma 2 implica que los subespacios $E_\lambda(w)$ y $E_\lambda(\overline{u}_i)$ coinciden. Por otra parte, (ii) implica que el vector v_j es ortogonal al subespacio $E_\lambda(w) = E_\lambda(\overline{u}_i)$ y, por tanto, $v_j \in Ker(R_{\overline{u}_i} - \mu\varepsilon_{\overline{u}_i}Id)$. Entonces, $R_{\overline{u}_i}v_j = \mu\varepsilon_{\overline{u}_i}v_j$, de donde se sigue el resultado. □

3.2 Multiplicidades de los autovalores

En esta sección definiremos ciertos tensores de tipo $(1,1)$ actuando en cada subespacio $E_\lambda(\cdot)$. El estudio de tales tensores nos permitirá determinar la signatura de la restricción de la métrica a los subespacios $E_\lambda(\cdot)$, lo que, a su vez, nos proporcionará información sobre la dimensión y la signatura de las variedades de Osserman especiales. Además, esos tensores nos permitirán dotar a los subespacios $E_\lambda(\cdot)$ de una estructura de módulo de Clifford, de forma que las obstrucciones a la existencia de una tal estructura nos permitirán finalmente probar que el autovalor λ sólo puede tener multiplicidad $1, 3, 7$ ó 15.

Definición 3.2.1 *Sea $x_0 \in T_pM$ un vector unitario, con $E_\lambda(x_0) = \langle\{x_0, x_1, \ldots, x_\tau\}\rangle$. Para cada $i = 1,\ldots,\tau$ definimos $\phi_i : E_\lambda(x_0)^\perp \longrightarrow E_\lambda(x_0)^\perp$ como*

$$\phi_i\xi = \frac{3}{2(\lambda-\mu)}R(x_0,x_i)\xi, \tag{3.2.1}$$

siendo ξ cualquier vector en $E_\lambda(x_0)^\perp$.

Observación 3.2.1 Nótese que la aplicación ϕ_i está bien definida por (iii) en el Lema 3.1.2. Además, si ξ_0 es un vector unitario en $E_\lambda(x_0)^\perp$, con $E_\lambda(\xi_0) = \langle\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_\tau\}\rangle$, como $R(x_0,x_i)\xi_0 \in \langle\{\xi_1,\dots,\xi_\tau\}\rangle$ se tiene que $\phi_i\xi_0 = \dfrac{3}{2(\lambda-\mu)}\sum_{j=1}^{\tau} R(x_0,x_i,\xi_0,\xi_j)\varepsilon_{\xi_j}\xi_j$. Ahora bien, por el Lema 3.1.2 (i), $R(x_0,x_i,\xi_0,\xi_j) = -2R(x_i,\xi_0,x_0,\xi_j)$, y por lo tanto

$$\phi_i\xi_0 = -\frac{3}{\lambda-\mu}\sum_{j=1}^{\tau} R(x_i,\xi_0,x_0,\xi_j)\varepsilon_{\xi_j}\xi_j. \tag{3.2.2}$$

En particular, esto implica que ϕ_i deja invariante cada subespacio $E_\lambda(\cdot) \subset E_\lambda(x_0)^\perp$.

Recordemos que si V es un espacio vectorial, una *estructura compleja* (resp., *paracompleja*) sobre V es un tensor de tipo $(1,1)$, J, verificando $J^2 = -Id$ (resp., $J^2 = Id$). Además, si $\langle\ ,\ \rangle$ denota un producto interior en V, llamamos *estructura Hermítica* (resp., *para–Hermítica*) sobre V a un par $(\langle\ ,\ \rangle, J)$, siendo J una estructura compleja (resp., paracompleja) tal que $\langle u, Jv\rangle + \langle Ju, v\rangle = 0$ para cualesquiera $u, v \in V$.

El siguiente resultado muestra que $\phi_1,\dots,\phi_\tau$ pueden verse como una familia de estructuras Hermíticas/para–Hermíticas sobre $E_\lambda(x_0)^\perp$ que anticonmutan dos a dos.

Proposición 3.2.1 *Los tensores definidos por* (3.2.1) *satisfacen:*

(i) $g(\phi_i\xi,\eta) + g(\xi,\phi_i\eta) = 0$, *para cualesquiera vectores* $\xi,\eta \in E_\lambda(x_0)^\perp$,

(ii) $g(\phi_i\xi,\phi_j\xi) = \delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i} g(\xi,\xi)$, *para cualquier vector* $\xi \in E_\lambda(x_0)^\perp$,

(iii) $\phi_i\phi_j + \phi_j\phi_i = -2\delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i} Id$,

donde $i,j \in \{1,\dots,\tau\}$.

Demostración. Si $\xi,\eta \in E_\lambda(x_0)^\perp$,

$$\begin{aligned} g(\phi_i\xi,\eta) &= \frac{3}{2(\lambda-\mu)} g(R(x_0,x_i)\xi,\eta) = \frac{3}{2(\lambda-\mu)} R(x_0,x_i,\xi,\eta) \\ &= -\frac{3}{2(\lambda-\mu)} R(x_0,x_i,\eta,\xi) = -\frac{3}{2(\lambda-\mu)} g(R(x_0,x_i)\eta,\xi) \\ &= -g(\phi_i\eta,\xi) = -g(\xi,\phi_i\eta), \end{aligned}$$

lo que prueba (i).

Para probar (ii) consideramos en primer lugar vectores unitarios en $E_\lambda(x_0)^\perp$. Así, si ξ_0 es un vector unitario en ese subespacio, con $E_\lambda(\xi_0) = \langle\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_\tau\}\rangle$, por (3.2.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_i\xi_0 &= -\frac{3}{\lambda-\mu}\sum_{k=1}^{\tau} R(x_i,\xi_0,x_0,\xi_k)\varepsilon_{\xi_k}\xi_k, \\ \phi_j\xi_0 &= -\frac{3}{\lambda-\mu}\sum_{l=1}^{\tau} R(x_j,\xi_0,x_0,\xi_l)\varepsilon_{\xi_l}\xi_l, \end{aligned}$$

para $i, j \in \{1, \ldots, \tau\}$, de donde se sigue que

$$g(\phi_i\xi_0, \phi_j\xi_0) = \left(\frac{3}{\lambda - \mu}\right)^2 \sum_{k=1}^{\tau} R(x_i, \xi_0, x_0, \xi_k)R(x_j, \xi_0, x_0, \xi_k)\varepsilon_{\xi_k}.$$

Entonces, el Lema 3.1.3 implica que $g(\phi_i\xi_0, \phi_j\xi_0) = \delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}g(\xi_0, \xi_0)$, lo que prueba la condición (ii) para vectores unitarios. Ahora, si ξ es un vector no nulo en $E_\lambda(x_0)^\perp$, entonces $\bar{\xi} = \dfrac{\xi}{||\xi||}$ es un vector unitario y por lo tanto $g(\phi_i\bar{\xi}, \phi_j\bar{\xi}) = \delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}g(\bar{\xi}, \bar{\xi})$, de donde se sigue (ii) para el vector ξ. Por último, si u es un vector nulo en $E_\lambda(x_0)^\perp$ podemos aproximarlo por medio de una sucesión $\{\xi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ de vectores no nulos pertenecientes a ese subespacio, de tal forma que $g(\phi_i\xi_\alpha, \phi_j\xi_\alpha) = \delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}g(\xi_\alpha, \xi_\alpha)$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}$, y tomando límites cuando $\alpha \to +\infty$ se sigue que $g(\phi_i u, \phi_j u) = \delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}g(u, u)$. Esto prueba que (ii) se cumple para cualquier vector en $E_\lambda(x_0)^\perp$.

Finalmente probamos (iii). Si ξ es cualquier vector en $E_\lambda(x_0)^\perp$, (i) y (ii) implican que

$$g(\phi_i\phi_j\xi, \xi) = -g(\phi_i\xi, \phi_j\xi) = -\delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}g(\xi, \xi). \tag{3.2.3}$$

Entonces, si ξ, η son vectores en $E_\lambda(x_0)^\perp$, aplicando esta condición al vector $\xi + \eta$ se obtiene $g(\phi_i\phi_j(\xi + \eta), \xi + \eta) = -\delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}g(\xi + \eta, \xi + \eta)$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} &g(\phi_i\phi_j\xi, \xi) + g(\phi_i\phi_j\eta, \eta) + g(\phi_i\phi_j\xi, \eta) + g(\phi_i\phi_j\eta, \xi) \\ &\qquad = -\delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}g(\xi, \xi) - \delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}g(\eta, \eta) - 2\delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}g(\xi, \eta), \end{aligned}$$

de donde, utilizando (3.2.3), se sigue que $g(\phi_i\phi_j\xi, \eta) + g(\phi_i\phi_j\eta, \xi) = -2\delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}g(\xi, \eta)$. Como (i) implica que $g(\phi_i\phi_j\eta, \xi) = g(\phi_j\phi_i\xi, \eta)$, la expresión anterior se reduce entonces a $g(\phi_i\phi_j\xi + \phi_j\phi_i\xi, \eta) = g(-2\delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}\xi, \eta)$. Como esta última expresión se cumple para cualesquiera vectores $\xi, \eta \in E_\lambda(x_0)^\perp$, concluimos que $\phi_i\phi_j + \phi_j\phi_i = -2\delta_{ij}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}Id$, lo que finaliza la demostración. □

Nótese que la dimensión $\tau+1$ de los subespacios $E_\lambda(\cdot)$ debe ser par, pues la proposición anterior muestra que sobre cada uno de ellos tenemos definida, al menos, una estructura compleja o paracompleja. Por lo tanto, la multiplicidad τ del autovalor λ debe ser impar.

Una primera aplicación de los tensores ϕ_i nos permitirá determinar la signatura de la restricción de la métrica a los subespacios $E_\lambda(\cdot)$.

Teorema 3.2.1 *Para cualquier subespacio $E_\lambda(\xi)$ se cumple una de las dos condiciones siguientes:*

(i) la restricción de la métrica a $E_\lambda(\xi)$ es definida (es decir, tiene signatura $(\tau + 1, 0)$ ó $(0, \tau + 1)$, ó

(ii) la restricción de la métrica a $E_\lambda(\xi)$ tiene signatura $\left(\dfrac{\tau+1}{2}, \dfrac{\tau+1}{2}\right)$.

Demostración. Sea x_0 un vector unitario ortogonal a $E_\lambda(\xi)$. Este vector nos permite definir las estructuras $\phi_1, \dots, \phi_\tau$ que dejan invariante el subespacio $E_\lambda(\xi)$, y por la Proposición 3.2.1 estos tensores definen estructuras Hermíticas o para–Hermíticas en dicho subespacio respecto a la métrica inducida. Si alguna de las estructuras es para–Hermítica, entonces la restricción de la métrica al subespacio $E_\lambda(\xi)$ debe tener signatura $\left(\frac{\tau+1}{2}, \frac{\tau+1}{2}\right)$. Por el contrario, si todas las estructuras son Hermíticas, teniendo en cuenta que $\{\xi, \phi_1\xi, \dots, \phi_\tau\xi\}$ es una base ortonormal para $E_\lambda(\xi)$, se sigue que la restricción de la métrica a ese subespacio debe ser definida. $\square$

Observación 3.2.2 Es importante observar que el teorema anterior no implica que la restricción de la métrica a los subespacios $E_\lambda(\cdot)$ tenga siempre la misma signatura. Sin embargo, es fácil comprobar que eso sí es cierto cuando al menos existen tres de esos subespacios ortogonales entre sí. Además, siempre que consideremos una descomposición del espacio tangente T_pM en suma directa de subespacios $E_\lambda(\cdot)$, entonces la restricción de la métrica debe tener la misma signatura en todos ellos.

Por otra parte, fijado un vector unitario $x_0 \in T_pM$, nótese que si $\{x_0, x_1, \dots, x_\tau\}$ es una base ortonormal del subespacio $E_\lambda(x_0)$, la Proposición 3.2.1 implica que $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\tau$ son estructuras compatibles con la métrica (es decir, $g(\phi_i\xi, \eta) + g(\xi, \phi_i\eta) = 0$) tales que $\phi_i^2 = \sigma_i$, siendo $\sigma_i = -\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}$, con $i = 1, \dots, \tau$. Pero, por el teorema anterior, las constantes σ_i son todas iguales a -1 ó bien se pueden ordenar los elementos de la base elegida para $E_\lambda(x_0)$ de tal forma que $\sigma_1 = \cdots = \sigma_{\frac{\tau-1}{2}} = -1$ y $\sigma_{\frac{\tau+1}{2}} = \cdots = \sigma_\tau = 1$. Por lo tanto, los tensores ϕ_i definidos en $E_\lambda(x_0)^\perp$ determinan sobre este subespacio τ estructuras Hermíticas, o bien $(\tau-1)/2$ estructuras Hermíticas y $(\tau+1)/2$ para–Hermíticas, según la signatura de $E_\lambda(x_0)$ se corresponda con (i) o (ii), respectivamente.

Como segunda aplicación de los tensores ϕ_i mostramos que sólo pueden existir variedades de Osserman especiales en una cierta dimensión cuando la multiplicidad del autovalor λ es mayor que 3, dimensión que está determinada por dicha multiplicidad.

Teorema 3.2.2 *Sea (M, g) una variedad de Osserman especial. Si la multiplicidad τ del autovalor λ es estrictamente mayor que* 3*, entonces dim $M = 2(\tau + 1)$.*

Demostración. Si x_0, y_0 son vectores unitarios, con $y_0 \in E_\lambda(x_0)^\perp$, podemos considerar los tensores $\phi_i : E_\lambda(x_0)^\perp \longrightarrow E_\lambda(x_0)^\perp$, $i = 1, \dots, \tau$, de forma que si ξ es cualquier vector unitario en $E_\lambda(y_0)$ podemos usar $\{\xi, \phi_1\xi, \dots, \phi_\tau\xi\}$ como base de $E_\lambda(y_0)$ y expresar el elemento $\phi_i\phi_j\xi$ en esa base, es decir, $\phi_i\phi_j\xi = \alpha_{ij}^0(\xi)\xi + \sum_{s=1}^{\tau} \alpha_{ij}^s(\xi)\phi_s\xi$, donde i, j son índices diferentes elegidos en $\{1, \dots, \tau\}$ y los coeficientes α_{ij}^s dependen del vector ξ. Por ser $i \neq j$ se tiene que $\phi_i\phi_j\xi \in \langle\{\xi, \phi_i\xi, \phi_j\xi\}\rangle^\perp$, y por lo tanto la expresión anterior se reduce a

$$\phi_i\phi_j\xi = \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq i,j}}^{\tau} \alpha_{ij}^s(\xi)\phi_s\xi. \tag{3.2.4}$$

Como el espacio tangente T_pM admite una descomposición en suma directa de espacios $E_\lambda(\cdot)$, y cada uno de estos subespacios tiene dimensión $\tau+1$, entonces la dimensión de la variedad debe ser un múltiplo de $\tau+1$.

En lo que sigue supondremos que $dim\ M > 2(\tau+1)$. En primer lugar probaremos que, entonces, los coeficientes $\alpha_{ij}^s(\xi)$ en (3.2.4) no dependen del vector unitario ξ elegido en $E_\lambda(y_0)$. Para ello tomamos un vector unitario η ortogonal a los subespacios $E_\lambda(x_0)$, $E_\lambda(y_0)$, y elegimos números reales no nulos a, b de forma que $w = a\xi+b\eta$ y $t = b\xi - a\varepsilon_\xi\varepsilon_\eta\eta$ sean vectores unitarios. Para $l, m, n \in \{1, \ldots, \tau\}$ se tiene que $g(\phi_l\phi_m\phi_n w, t) = 0$, pues $\phi_l\phi_m\phi_n w \in E_\lambda(w)$ y $t \in E_\lambda(w)^\perp$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} 0 = \;& g(\phi_l\phi_m\phi_n(a\xi+b\eta), b\xi - a\varepsilon_\xi\varepsilon_\eta\eta) \\ = \;& ab(g(\phi_l\phi_m\phi_n\xi,\xi) - \varepsilon_\xi\varepsilon_\eta g(\phi_l\phi_m\phi_n\eta,\eta)) - a^2\varepsilon_\xi\varepsilon_\eta g(\phi_l\phi_m\phi_n\xi,\eta) + b^2 g(\phi_l\phi_m\phi_n\eta,\xi), \end{aligned}$$

y como $g(\phi_l\phi_m\phi_n\xi,\eta) = g(\phi_l\phi_m\phi_n\eta,\xi) = 0$ (pues $E_\lambda(\xi) \perp E_\lambda(\eta)$ y esos tensores dejan ambos subespacios invariantes) se concluye que $g(\phi_l\phi_m\phi_n\xi,\xi) = \varepsilon_\xi\varepsilon_\eta g(\phi_l\phi_m\phi_n\eta,\eta)$. Entonces, los coeficientes $\alpha_{ij}^s(\xi)$ en (3.2.4) están dados por

$$\alpha_{ij}^s(\xi) = g(\phi_i\phi_j\xi,\phi_s\xi)g(\phi_s\xi,\phi_s\xi) = -\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_s}\varepsilon_\xi g(\phi_s\phi_i\phi_j\xi,\xi) = -\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_s}\varepsilon_\eta g(\phi_s\phi_i\phi_j\eta,\eta),$$

lo que muestra que son independientes del vector unitario ξ, y por lo tanto podemos escribir la expresión (3.2.4) de la forma

$$\phi_i\phi_j\xi = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i,j}}^{\tau} \alpha_{ij}^s\phi_s\xi, \tag{3.2.5}$$

válida para cualquier vector unitario $\xi \in E_\lambda(y_0)$. Ahora, si elegimos $k \in \{1, \ldots, \tau\}$ de forma que i, j, k sean distintos dos a dos, como $\phi_k\xi$ es un vector unitario en $E_\lambda(y_0)$ podemos aplicar (3.2.5), obteniendo

$$\phi_i\phi_j(\phi_k\xi) = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i,j}}^{\tau} \alpha_{ij}^s\phi_s(\phi_k\xi) = -\alpha_{ij}^k\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_k}\xi + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i,j,k}}^{\tau} \alpha_{ij}^s\phi_s\phi_k\xi,$$

y, por otra parte, (3.2.5) implica también que

$$\phi_k(\phi_i\phi_j\xi) = \phi_k\left(\sum_{\substack{s=1\\ s\neq i,j}}^{\tau} \alpha_{ij}^s\phi_s\xi\right) = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i,j}}^{\tau} \alpha_{ij}^s\phi_k(\phi_s\xi) = -\alpha_{ij}^k\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_k}\xi - \sum_{\substack{s=1\\ s\neq i,j,k}}^{\tau} \alpha_{ij}^s\phi_s\phi_k\xi,$$

y como $\phi_i\phi_j(\phi_k\xi) = \phi_i\phi_j\phi_k\xi = \phi_k\phi_i\phi_j\xi = \phi_k(\phi_i\phi_j\xi)$, sumando las dos expresiones anteriores se tiene que $\phi_i\phi_j\phi_k\xi = -\alpha_{ij}^k\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_k}\xi$, expresión válida para cualquier vector unitario $\xi \in E_\lambda(y_0)$. Así, suponiendo que $dim\ M > 2(\tau+1)$, hemos probado que en el subespacio

$E_\lambda(y_0)$ la composición $\phi_i\phi_j$ coincide con ϕ_k o $-\phi_k$ siempre que i, j, k sean diferentes, lo que nos lleva a una contradicción siempre que haya más de tres estructuras. Finalmente, como el número de estructuras coincide con la multiplicidad τ del autovalor λ, se sigue que si τ es estrictamente mayor que 3 entonces $dim\, M = 2(\tau + 1)$, lo que prueba el teorema.□

En lo que sigue utilizaremos algunas propiedades de módulos de Clifford que introducimos a continuación. Sea V^m un espacio vectorial real m–dimensional dotado de un producto interior $\langle\ ,\ \rangle$. Una estructura de *Cliff(ν)–módulo* real C en V es una colección c_i de endomorfismos de V tal que $c_ic_j + c_jc_i = -2\delta_{ij}$ para $i, j = 1, \ldots, \nu$. Es decir, C determina una familia anticonmutativa de estructuras complejas sobre V.

Nótese que los módulos de Clifford aparecen en el estudio de las variedades de Osserman especiales pues, de acuerdo con la Observación 3.2.2, en cada subespacio $E_\lambda(\cdot)$ los tensores ϕ_i determinan, bien una estructura de Cliff($(\tau - 1)/2$)–módulo, bien una estructura de Cliff(τ)–módulo, de acuerdo con la restricción de la métrica al subespacio $E_\lambda(\cdot)$.

Existen restricciones a la existencia de tales estructuras de Clifford sobre V, ligadas a la existencia de ciertas distribuciones en TS^{m-1}, como muestra el siguiente resultado:

Teorema 3.2.3 [St] *Sea $m = 2^r \cdot m_0$, con m_0 impar.*

(i) V^m admite una estructura de Cliff(ν)–módulo si y sólo si $\nu \leq \nu(r)$,

(ii) TS^{m-1} admite una distribución q–dimensional, para $2q \leq m-1$, si y sólo si $q \leq \nu(r)$,

donde ν está dado por $\nu(i + 4) = \nu(i) + 8$ y $\nu(i) = 2^i - 1$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

En nuestro caso nos interesa resolver la situación siguiente.

Lema 3.2.1 *Si $\{c_1, \ldots, c_{\tilde\tau}\}$ genera una estructura de Cliff($\tilde\tau$)–módulo en un espacio vectorial V de dimensión $2\tilde\tau + 2$, entonces $\tilde\tau \in \{0, 1, 3, 7\}$.*

Demostración. El apartado (i) del Teorema 3.2.3 implica que existe una tal estructura de Cliff($\tilde\tau$)–módulo si y sólo si

$$\tilde\tau \leq \nu(r), \tag{3.2.6}$$

donde $2\tilde\tau + 2 = 2^r \cdot m_0$, con m_0 impar.

En primer lugar, si suponemos que $\tilde\tau$ es par ($\tilde\tau = 2\alpha$), entonces $2\tilde\tau + 2 = 2^r \cdot m_0$ viene dado por $2\tilde\tau + 2 = 4\alpha + 2 = 2(2\alpha + 1)$, y así $r = 1$, $m_0 = 2\alpha + 1$. Por lo tanto, se sigue de (3.2.6) que $2\alpha \leq \nu(1) = 1$, con lo que $\tilde\tau$ debe ser 0 ó impar.

En lo que sigue supondremos que $\tilde\tau$ es impar, y que se puede escribir de la forma $\tilde\tau = 2^\alpha - 1$ para algún valor de α. En este caso, $2\tilde\tau + 2 = 2^r \cdot m_0$ viene dado por $2\tilde\tau + 2 = 2(2^\alpha - 1) + 2 = 2^{\alpha+1}$, por lo que $r = \alpha + 1$, $m_0 = 1$. Entonces, de nuevo (3.2.6) implica que existe una estructura de Cliff($\tilde\tau$)–módulo sobre V si y sólo si

$$2^\alpha - 1 \leq \nu(\alpha + 1). \tag{3.2.7}$$

A continuación analizamos esta desigualdad. Poniendo $\alpha+1 = 4a+b$, $0 \leq b \leq 3$, tenemos $\nu(\alpha+1) = \nu(b) + 8a$, y como $\nu(b) = 2^b - 1$ y $a = (\alpha+1-b)/4$, se sigue que $\nu(\alpha+1) = 2^b - 2b + 2\alpha + 1$. Entonces, (3.2.7) se transforma en $2^\alpha - 1 \leq 2^b - 2b + 2\alpha + 1$, o lo que es lo mismo,

$$2^\alpha - 2\alpha \leq 2^b - 2b + 2.$$

Ahora bien, como $0 \leq b \leq 3$, se cumple que $2^b - 2b + 2 \leq 4$, y por lo tanto la desigualdad anterior implica que

$$2^\alpha - 2\alpha \leq 4. \tag{3.2.8}$$

Sea $f(x) = 2^x - 2x$, con $x \in \mathbb{R}$. Esta función es estrictamente creciente en $(2, +\infty)$, con $f(4) = 8$, por lo que $2^\alpha - 2\alpha \geq 8$ para $\alpha \geq 4$. Entonces, (3.2.8) da una contradicción siempre que $\alpha \geq 4$, y por lo tanto concluimos que $\tilde{\tau}$ no puede escribirse de la forma $2^\alpha - 1$ si $\alpha \geq 4$.

Finalmente supongamos que $\tilde{\tau}$ satisface

$$2^\alpha - 1 < \tilde{\tau} < 2^{\alpha+1} - 1, \tag{3.2.9}$$

con $\alpha \geq 4$. Escribiendo $2\tilde{\tau} + 2 = 2^r \cdot m_0$, con m_0 impar, sabemos que (3.2.6) se cumple, y además (3.2.9) implica que

$$2^{\alpha+1} < 2^r \cdot m_0 < 2^{\alpha+2},$$

de donde $r \leq \alpha + 1$, y por lo tanto

$$\nu(r) \leq \nu(\alpha+1). \tag{3.2.10}$$

Por otra parte, como $\alpha \geq 4$ la desigualdad (3.2.7) no se cumple, es decir,

$$2^\alpha - 1 > \nu(\alpha+1). \tag{3.2.11}$$

Juntando (3.2.6), (3.2.9),(3.2.10) y (3.2.11) obtenemos

$$\tilde{\tau} \leq \nu(r) \leq \nu(\alpha+1) < 2^\alpha - 1 < \tilde{\tau},$$

es decir, llegamos a una contradicción, lo que significa que $\tilde{\tau}$ no puede cumplir (3.2.9).

Los resultados anteriores nos permiten concluir que $\tilde{\tau} \in \{0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, y analizando cada uno de estos casos directamente por medio de la condición (3.2.6) se obtiene fácilmente que $\tilde{\tau} \in \{0, 1, 3, 7\}$, con lo que el lema queda demostrado. □

Concluimos esta sección con el siguiente resultado:

Teorema 3.2.4 *Sea (M, g) una variedad de Osserman especial. Entonces se cumple una de las siguientes condiciones:*

(i) $\tau = 1$ y M es una variedad de dimensión $2n$ con métrica de signatura (n, n) ó $(2p, 2q)$, para ciertos $p, q \geq 0$,

(ii) $\tau = 3$ *y* M *es una variedad de dimensión* $4n$ *con métrica de signatura* $(2n, 2n)$ *ó* $(4p, 4q)$*, para ciertos* $p, q \geq 0$*,*

(iii) $\tau = 7$ *y* M *es una variedad de dimensión* 16 *con métrica de signatura* $(8, 8)$*,* $(16, 0)$ *ó* $(0, 16)$*, o*

(iv) $\tau = 15$ *y* M *es una variedad de dimensión* 32 *con métrica de signatura* $(16, 16)$*,*

donde τ *denota la multiplicidad del autovalor* λ*.*

Demostración. Sea y_0 un vector unitario en el espacio tangente T_pM y consideremos el subespacio $E_\lambda(y_0)$. Teniendo en cuenta la Observación 3.2.2, sobre este subespacio podemos definir $\tilde{\tau}$ estructuras complejas $\phi_1, \ldots, \phi_{\tilde{\tau}}$ que determinan una estructura de Cliff$(\tilde{\tau})$–módulo, de tal forma que si m denota la dimensión de $E_\lambda(y_0)$, entonces se cumple que $m = \tau + 1 = 2\tilde{\tau} + 2$. Además, podemos considerar un producto interior h en $E_\lambda(y_0)$, y definir

$$\Psi(\xi, \eta) = h(\xi, \eta) + \sum_{r=1}^{\tilde{\tau}} \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \ldots < i_r \\ i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, \tilde{\tau}\}}} h(\phi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_r}\xi, \phi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_r}\eta).$$

Es fácil comprobar que Ψ es un producto interior en $E_\lambda(y_0)$ tal que $\phi_1, \ldots, \phi_{\tilde{\tau}}$ cumplen $\Psi(\phi_i\xi, \eta) + \Psi(\xi, \phi_i\eta) = 0$, para cualesquiera vectores $\xi, \eta \in E_\lambda(y_0)$ y para $i = 1, \ldots, \tilde{\tau}$.

Entonces, el Lema 3.2.1 implica que $\tilde{\tau} \in \{0, 1, 3, 7\}$, y como $\tau = 2\tilde{\tau} + 1$, concluimos que $\tau \in \{1, 3, 7, 15\}$. La demostración se completa utilizando los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2, teniendo en cuenta que en el caso de multiplicidad $\tau = 15$ la métrica no puede ser definida, pues si lo fuese, la Observación 3.2.2 implicaría que podríamos dotar al subespacio $E_\lambda(y_0)$, de dimensión 16, de una estructura de Cliff(15)–módulo, lo que no es posible de acuerdo con el Teorema 3.2.3. □

Es importante observar que el resultado obtenido en el teorema anterior es válido para cualquier tensor F de tipo curvatura que verifique los Axiomas 1 y 2 en un punto de la variedad. Para finalizar esta sección mostramos un ejemplo que pone de manifiesto la necesidad del Axioma 2. Así, sea V un espacio vectorial $4n$–dimensional dotado de un producto interior $\langle\, , \,\rangle$, y sea $\{J_1, J_2, J_3\}$ una estructura cuaterniónica sobre $(V, \langle\, , \,\rangle)$. Entonces, $F = -\frac{1}{3}\left(R^{J_1} + R^{J_2}\right)$ es un tensor curvatura sobre V con operador de Jacobi diagonalizable con dos autovalores, $\lambda = 1$ (con multiplicidad $\tau = 2$) y $\mu = 0$. Por lo tanto, para F no se verifica el teorema. Sin embargo, nótese que, aunque se cumple el Axioma 1, no sucede lo mismo con el segundo Axioma, pues si x es un vector unitario en V entonces $E_1(x) = \langle\{x, J_1x, J_2x\}\rangle$ y $E_1(J_1x) = \langle\{x, J_1x, J_3x\}\rangle$, y por lo tanto $E_1(J_1x) \neq E_1(x)$ aunque $J_1x \in E_1(x)$.

3.3 Expresión puntual del tensor curvatura

En esta sección determinaremos de forma explícita el tensor curvatura en cada punto de una variedad semi–Riemanniana de Osserman especial cuando la dimensión sea distinta de 16 y 32. Para ello recordemos que una función curvatura $\tilde{F}$ sobre un espacio vectorial V es un campo de tensores de tipo $(0,4)$ sobre V que verifica las propiedades siguientes:

(a) $\tilde{F}(x,y,z,w) = -\tilde{F}(y,x,z,w) = -\tilde{F}(x,y,w,z)$,

(b) $\tilde{F}(x,y,z,w) = \tilde{F}(z,w,x,y)$,

(c) $\tilde{F}(x,y,z,w) + \tilde{F}(y,z,x,w) + \tilde{F}(z,x,y,w) = 0$,

para cualesquiera $x, y, z, w \in V$. Además, si $\langle \, , \, \rangle$ denota un producto interior en V, el carácter no degenerado permite comprobar que existe un único campo de tensores de tipo $(1,3)$ sobre V, que denotaremos por F y que llamaremos tensor curvatura asociado, verificando $\tilde{F}(x,y,z,w) = \langle F(x,y)z, w\rangle$ para cualesquiera $x, y, z, w \in V$. A continuación recordamos la definición de ciertos tensores curvatura que serán fundamentales en lo que sigue. Así, asociado al producto interior $\langle \, , \, \rangle$, se define el tensor curvatura R^0 como

$$R^0(x,y)z = \langle y,z\rangle x - \langle x,z\rangle y.$$

Por otra parte, si J es una estructura compleja (resp., paracompleja) tal que $(V, \langle \, , \, \rangle, J)$ es un espacio vectorial Hermítico (resp., para–Hermítico), se define el tensor curvatura R^J como

$$R^J(x,y)z = \langle Jx,z\rangle Jy - \langle Jy,z\rangle Jx + 2\langle Jx,y\rangle Jz.$$

El objetivo será mostrar que el tensor curvatura de una variedad de Osserman especial de dimensión distinta de 16 y 32 se puede expresar en cada punto como una combinación lineal del tensor R^0 y de los tensores R^{J_i} asociados a ciertas estructuras definidas sobre el espacio tangente a la variedad en ese punto. Más concretamente, en esta sección probaremos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.1 *Sea (M,g) una variedad de Osserman especial de dimensión distinta de 16 y 32. Entonces, en cada punto $p \in M$ se cumple una de las siguientes condiciones:*

(i) Existe una estructura compleja J, de tal forma que (g,J) define una estructura Hermítica en T_pM y el tensor curvatura R viene expresado en dicho punto por

$$R = \mu R^0 - \frac{\lambda - \mu}{3} R^J.$$

(ii) Existe una estructura paracompleja J, de tal forma que (g,J) define una estructura para–Hermítica en T_pM y el tensor curvatura R viene expresado en dicho punto por

$$R = \mu R^0 + \frac{\lambda - \mu}{3} R^J.$$

(iii) Existe una estructura cuaterniónica V, de tal forma que (g, V) define una estructura cuaterniónica Hermítica en T_pM y el tensor curvatura R viene expresado en dicho punto por

$$R = \mu R^0 - \frac{\lambda - \mu}{3} \sum_{i=1}^{3} R^{J_i},$$

donde $\{J_1, J_2, J_3\}$ es una base canónica de V.

(iv) Existe una estructura paracuaterniónica V, de tal forma que (g, V) define una estructura paracuaterniónica Hermítica en T_pM y el tensor curvatura R viene expresado en dicho punto por

$$R = \mu R^0 + \frac{\lambda - \mu}{3} \sum_{i=1}^{3} \sigma_i R^{J_i},$$

donde $\{J_1, J_2, J_3\}$ es una base canónica de V y $J_i^2 = \sigma_i Id$, $i = 1, 2, 3$, ($\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$).

Antes de demostrar el Teorema 3.3.1 veremos algunos lemas previos (válidos para variedades de Osserman especiales de cualquier dimensión).

Lema 3.3.1 *Sean $x_0, \xi \in T_pM$ vectores unitarios, con $\xi \in E_\lambda(x_0)^\perp$, y sean a, b números reales no nulos tales que $ax_0 + b\xi$ es un vector unitario. Entonces, los vectores $u_1, \ldots, u_\tau$, $v_1, \ldots, v_\tau$ definidos por*

$$\begin{aligned} u_i &= x_i - \frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}\phi_i\xi, \qquad i = 1, \ldots, \tau, \\ v_i &= \frac{b}{a}\varepsilon_\xi x_i + \phi_i\xi, \qquad i = 1, \ldots, \tau, \end{aligned}$$

donde $\{x_1, \ldots, x_\tau\}$ es una base ortonormal para $Ker(R_{x_0} - \lambda\varepsilon_{x_0} Id)$ y $\phi_1, \ldots, \phi_\tau$ son los tensores definidos por (3.2.1), *verifican*

$$R_{u_i} v_j = \mu g(u_i, u_i) v_j,$$

para $i, j = 1, \ldots, \tau$.

Demostración. El resultado es una consecuencia inmediata del Lema 3.1.4, teniendo en cuenta como fueron definidos los tensores ϕ_i. □

Lema 3.3.2 *Sea $x_0 \in T_pM$ un vector unitario. Para cualquier vector unitario ξ ortogonal a $E_\lambda(x_0)$ se cumple que*

$$R(x_i, x_j)\xi = -\frac{2}{3}(\lambda - \mu)\varepsilon_{x_0}\phi_i\phi_j\xi, \quad i, j \in \{1, \ldots, \tau\},\ i \neq j,$$

donde $\{x_1, \ldots, x_\tau\}$ es una base ortonormal de $Ker(R_{x_0} - \lambda\varepsilon_{x_0} Id)$ y $\phi_1, \ldots, \phi_\tau$ los tensores definidos por (3.2.1).

Demostración. Fijamos $i, j \in \{1, \ldots, \tau\}$, $i \neq j$. Como ξ es un vector unitario ortogonal a $E_\lambda(x_0)$, $\phi_j\xi$ también lo es. Por lo tanto, si a, b son números reales no nulos tales que $ax_0 + b\phi_j\xi$ es un vector unitario, entonces el Lema 3.3.1 implica que

$$R_{u_j} v_i = \mu g(u_j, u_j) v_i, \tag{3.3.1}$$

donde, teniendo en cuenta la Proposición 3.2.1, $u_j = x_j + \frac{b}{a}\varepsilon_{x_j}\xi$, $v_i = \frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_j}\varepsilon_\xi x_i + \phi_i\phi_j\xi$. A continuación desarrollamos el término $R_{u_j}v_i$. Así,

$$\begin{aligned}
R_{u_j}v_i &= R\left(\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_j}\varepsilon_\xi x_i + \phi_i\phi_j\xi, x_j + \frac{b}{a}\varepsilon_{x_j}\xi\right)\left(x_j + \frac{b}{a}\varepsilon_{x_j}\xi\right) \\
&= \frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_j}\varepsilon_\xi R(x_i, x_j)x_j + \frac{b^3}{a^3}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_j}\varepsilon_\xi R(x_i, \xi)\xi \\
&\quad + \frac{b^2}{a^2}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_\xi(R(x_i, x_j)\xi + R(x_i, \xi)x_j) + R(\phi_i\phi_j\xi, x_j)x_j \\
&\quad + \frac{b^2}{a^2}R(\phi_i\phi_j\xi, \xi)\xi + \frac{b}{a}\varepsilon_{x_j}(R(\phi_i\phi_j\xi, x_j)\xi + R(\phi_i\phi_j\xi, \xi)x_j),
\end{aligned}$$

y por los Lemas 3.1.1 y 3.1.2 se sigue que

$$\begin{aligned}
R_{u_j}v_i &= \frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_\xi\lambda x_i + \frac{b^3}{a^3}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_j}\mu x_i + \frac{3}{2}\frac{b^2}{a^2}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_\xi R(x_i, x_j)\xi \\
&\quad + \varepsilon_{x_j}\mu\phi_i\phi_j\xi + \frac{b^2}{a^2}\varepsilon_\xi\lambda\phi_i\phi_j\xi + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\varepsilon_{x_j}R(\phi_i\phi_j\xi, \xi)x_j \\
&= \left(\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_\xi\lambda + \frac{b^3}{a^3}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_j}\mu\right)x_i + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\varepsilon_{x_j}R(\phi_i\phi_j\xi, \xi)x_j \\
&\quad + \left(\varepsilon_{x_j}\mu + \frac{b^2}{a^2}\varepsilon_\xi\lambda\right)\phi_i\phi_j\xi + \frac{3}{2}\frac{b^2}{a^2}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_\xi R(x_i, x_j)\xi.
\end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta además que $g(u_j, u_j) = \varepsilon_{x_j} + \frac{b^2}{a^2}\varepsilon_\xi$, la expresión (3.3.1) se transforma en

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_\xi\lambda + \frac{b^3}{a^3}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_j}\mu\right)x_i + \frac{3}{2}\frac{b}{a}\varepsilon_{x_j}R(\phi_i\phi_j\xi, \xi)x_j + \left(\varepsilon_{x_j}\mu + \frac{b^2}{a^2}\varepsilon_\xi\lambda\right)\phi_i\phi_j\xi \\
&\quad + \frac{3}{2}\frac{b^2}{a^2}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_\xi R(x_i, x_j)\xi = \left(\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_\xi\mu + \frac{b^3}{a^3}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_j}\mu\right)x_i + \left(\varepsilon_{x_j}\mu + \frac{b^2}{a^2}\varepsilon_\xi\mu\right)\phi_i\phi_j\xi,
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{b^2}{a^2}\varepsilon_\xi(\lambda - \mu)\phi_i\phi_j\xi + \frac{3}{2}\frac{b^2}{a^2}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_\xi R(x_i, x_j)\xi = -\frac{b}{a}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_\xi(\lambda - \mu)x_i - \frac{3}{2}\frac{b}{a}\varepsilon_{x_j}R(\phi_i\phi_j\xi, \xi)x_j.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que los vectores $\phi_i\phi_j\xi, R(x_i,x_j)\xi$ pertenecen a $E_\lambda(x_0)^\perp$ y que, por otra parte, los vectores $x_i, R(\phi_i\phi_j\xi,\xi)x_j \in E_\lambda(x_0)$, la expresión anterior implica que

$$\frac{b^2}{a^2}\varepsilon_\xi(\lambda-\mu)\phi_i\phi_j\xi + \frac{3}{2}\frac{b^2}{a^2}\varepsilon_{x_0}\varepsilon_\xi R(x_i,x_j)\xi = 0,$$

de donde se sigue que $\frac{3}{2}\varepsilon_{x_0}R(x_i,x_j)\xi = -(\lambda-\mu)\phi_i\phi_j\xi$. Podemos concluir entonces que $R(x_i,x_j)\xi = -\frac{2}{3}(\lambda-\mu)\varepsilon_{x_0}\phi_i\phi_j\xi$, lo que prueba el lema. □

A continuación probamos el resultado principal de esta sección.

Demostración del Teorema 3.3.1. Como la dimensión de M es distinta de 16 y 32, entonces el Teorema 3.2.4 implica que el autovalor λ sólo puede tener multiplicidad 1 ó 3. A continuación analizamos cada uno de estos casos por separado.

Demostración del Teorema 3.3.1 cuando la multiplicidad de λ es 1. Sea x_0 un vector unitario en T_pM. Fijado un vector unitario x_1 perteneciente al autoespacio $Ker(R_{x_0} - \lambda\varepsilon_{x_0}Id)$, sea $\phi : E_\lambda(x_0)^\perp \longrightarrow E_\lambda(x_0)^\perp$ el tensor definido en (3.2.1), de forma que $\phi^2 = \sigma Id$, siendo $\sigma = -\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_1}$. Además, si y_0 es un vector unitario ortogonal a $E_\lambda(x_0)$, tomando $y_1 = -\varepsilon_{y_0}\phi y_0$ se tiene $E_\lambda(y_0) = \langle\{y_0,y_1\}\rangle$, lo que permite definir, de forma análoga a la anterior, un tensor $\psi : E_\lambda(x_0) \longrightarrow E_\lambda(x_0)$, dado por $\psi = \frac{3}{2(\lambda-\mu)}R(y_0,y_1)$, para el cual $\psi^2 = -\varepsilon_{y_0}\varepsilon_{y_1}Id = \sigma Id$.

Definimos ahora $J : T_pM \longrightarrow T_pM$ como $J = \psi \oplus \phi$, de forma que J determina una estructura compleja o paracompleja en T_pM, según σ sea -1 ó $+1$, respectivamente. En lo que sigue probaremos que la curvatura R en T_pM se expresa, de acuerdo con el Teorema 3.3.1, en términos de los tensores curvatura R^0 y R^J, este último inducido por la estructura Hermítica o para–Hermítica (g,J), donde g es el tensor métrico en T_pM y J es la estructura compleja o paracompleja construida anteriormente. Para ello, consideramos el tensor curvatura $F = R - \mu R^0 - \frac{\lambda-\mu}{3}\sigma R^J$ y vemos que es idénticamente nulo.

En primer lugar estudiamos el tensor F actuando sobre vectores del subespacio $E_\lambda(x_0)$. En este caso, es fácil probar que $F(E_\lambda(x_0),E_\lambda(x_0))E_\lambda(x_0) \subset E_\lambda(x_0)$. Entonces, denotando por $\tilde{F},\tilde{R},\tilde{R}^0,\tilde{R}^J$ las restricciones de los tensores curvatura F,R,R^0,R^J a vectores del subespacio $E_\lambda(x_0)$, dado cualquier vector unitario x en este subespacio se cumple que

$$\tilde{R}_x = \lambda\varepsilon_x Id_1, \quad \tilde{R}^0_x = \varepsilon_x Id_1, \quad \tilde{R}^J_x = 3\sigma\varepsilon_x Id_1,$$

de donde se sigue que $\tilde{F}_x = 0$, lo que implica que F se anula cuando nos restringimos al subespacio $E_\lambda(x_0)$.

En segundo lugar, la restricción de F al subespacio $E_\lambda(x_0)^\perp$ está bien definida, ya que $F(E_\lambda(x_0)^\perp,E_\lambda(x_0)^\perp)E_\lambda(x_0)^\perp \subset E_\lambda(x_0)^\perp$. Denotemos por $\tilde{F},\tilde{R},\tilde{R}^0,\tilde{R}^J$ las restricciones de los tensores curvatura F,R,R^0,R^J a vectores del subespacio $E_\lambda(x_0)^\perp$. Entonces, si ξ es cualquier vector unitario en $E_\lambda(x_0)^\perp$ y n denota la dimensión de la variedad, con respecto a una base ortonormal $\{J\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-4}\}$ del subespacio $\langle\xi\rangle^\perp \cap E_\lambda(x_0)^\perp$ se tiene que

$$\tilde{R}_\xi = diag\,[\lambda\varepsilon_\xi, \mu\varepsilon_\xi, \overset{n-4}{\ldots}, \mu\varepsilon_\xi], \quad \tilde{R}^0_\xi = diag\,[\varepsilon_\xi, \overset{n-3}{\ldots}, \varepsilon_\xi], \quad \tilde{R}^J_\xi = diag\,[3\sigma\varepsilon_\xi, 0, \overset{n-4}{\ldots}, 0],$$

de donde $\tilde{F}_\xi = 0$. Esto prueba que F se anula al aplicarlo a vectores del subespacio $E_\lambda(x_0)^\perp$.

Por lo tanto hemos probado que, considerando la descomposición del espacio tangente $T_pM = E_\lambda(x_0) \oplus E_\lambda(x_0)^\perp$, el tensor curvatura F se anula si nos restringimos a uno de los dos subespacios de esa descomposición ortogonal. Entonces, teniendo en cuenta el Lema 3.1.2, es fácil observar que para probar que F es idénticamente nulo es suficiente mostrar que la aplicación $F(x_0, x_1) : E_\lambda(x_0)^\perp \longrightarrow E_\lambda(x_0)^\perp$ es nula. Para ello, si ξ es un vector unitario en $E_\lambda(x_0)^\perp$, se tiene que

$$R(x_0, x_1)\xi = \frac{2}{3}(\lambda - \mu)J\xi, \quad R^0(x_0, x_1)\xi = 0. \tag{3.3.2}$$

Por otra parte,

$$g(Jx_0, x_1) = \frac{3}{2(\lambda-\mu)}g(R(y_0, y_1)x_0, x_1) = \frac{3}{2(\lambda-\mu)}g(R(x_0, x_1)y_0, y_1) = g(Jy_0, y_1),$$

y como $y_1 = -\varepsilon_{y_0}Jy_0$, se sigue que $g(Jx_0, x_1) = \sigma$, de donde

$$R^J(x_0, x_1)\xi = 2g(Jx_0, x_1)J\xi = 2\sigma J\xi. \tag{3.3.3}$$

Entonces, (3.3.2) y (3.3.3) implican que

$$F(x_0, x_1)\xi = \frac{2}{3}(\lambda-\mu)J\xi - \frac{\lambda-\mu}{3}\sigma(2\sigma J\xi) = 0,$$

lo que prueba que el Teorema 3.3.1 se cumple si la multiplicidad de λ es 1.

Demostración del Teorema 3.3.1 cuando la multiplicidad de λ es 3. Sea x_0 un vector unitario en T_pM. Si fijamos una base ortonormal $\{x_1, x_2, x_3\}$ para el autoespacio $Ker(R_{x_0} - \lambda\varepsilon_{x_0}Id)$, tenemos los tensores $\phi_i : E_\lambda(x_0)^\perp \longrightarrow E_\lambda(x_0)^\perp$ definidos en (3.2.1), tales que $\phi_i^2 = \sigma_i Id$, siendo $\sigma_i = -\varepsilon_{x_0}\varepsilon_{x_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Por otra parte, sea y_0 un vector unitario ortogonal a $E_\lambda(x_0)$ y tomemos $y_i = -\varepsilon_{y_0}\phi_i y_0$. Se tiene entonces que $\langle\{y_0, y_1, y_2, y_3\}\rangle$ determina una base ortonormal de $E_\lambda(y_0)$, lo que permite definir, de forma análoga a la anterior, los tensores $\psi_i : E_\lambda(x_0) \longrightarrow E_\lambda(x_0)$, dados por $\psi_i = \dfrac{3}{2(\lambda-\mu)}R(y_0, y_i)$, de forma que $\psi_i^2 = -\varepsilon_{y_0}\varepsilon_{y_i}Id = \sigma_i Id$. Nótese que, de acuerdo con la Observación 3.2.2, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -1$, o bien $\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma_3 = -1$.

Para $i = 1, 2, 3$, sea $J_i : T_pM \longrightarrow T_pM$ definida por $J_i = \psi_i \oplus \phi_i$. J_i determina una estructura compleja o paracompleja en T_pM, según σ_i sea -1 ó $+1$, respectivamente. En primer lugar veamos que se puede suponer que $J_1J_2 = J_3$. Considerando la descomposición

$T_pM = E_\lambda(x_0) \oplus E_\lambda(x_0)^\perp$, si ξ es un vector unitario en cualquiera de esos dos subespacios entonces $J_1J_2\xi$ pertenece a $E_\lambda(\xi)$, y como $\{\xi, J_1\xi, J_2\xi, J_3\xi\}$ es una base ortonormal de ese subespacio y, además, $J_1J_2\xi \in \langle\{\xi, J_1\xi, J_2\xi\}\rangle^\perp$, se sigue que $J_1J_2\xi \in \langle J_3\xi\rangle$. Esto prueba que $J_1J_2 = \pm J_3$, por lo que cambiando x_0 por $-x_0$, si fuese necesario, se tiene que $J_1J_2 = J_3$.

La condición $J_1J_2 = J_3$ nos permite comprobar directamente que $J_\alpha J_\beta = J_{\alpha\beta}$ para $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, donde el producto $\alpha \cdot \beta$ se define como el valor $\pm\gamma$ tal que $\pm e_\gamma = e_\alpha e_\beta$, donde $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ es una base estándar para la multiplicación dada por la tabla

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$\sigma_1 e_0$	e_3	$\sigma_1 e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	$\sigma_2 e_0$	$-\sigma_2 e_1$
e_3	e_3	$-\sigma_1 e_2$	$\sigma_2 e_1$	$\sigma_3 e_0$

Tabla 3.1: Base estándar para $\tau = 3$

Nótese que este producto corresponde al de los cuaternios si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -1$, y al de los paracuaternios si $\sigma_1 = -\sigma_2 = -\sigma_3 = -1$. Además, tomamos $J_0 = Id$, y denotamos por $J_{-\alpha}$ el tensor $-J_\alpha$.

A continuación probaremos que la curvatura R en T_pM se expresa de acuerdo con el Teorema 3.3.1, mostrando para ello que el tensor curvatura $F = R - \mu R^0 - \dfrac{\lambda-\mu}{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_i R^{J_i}$ es idénticamente nulo. Considerando de nuevo la descomposición ortogonal del espacio tangente dada por $T_pM = E_\lambda(x_0) \oplus E_\lambda(x_0)^\perp$, se prueba de forma análoga al caso de multiplicidad 1 que el tensor curvatura F es nulo cuando nos restringimos a vectores en uno de los subespacios de esa descomposición. Entonces, será suficiente probar que las aplicaciones $F(x_\alpha, x_\beta) : E_\lambda(x_0)^\perp \longrightarrow E_\lambda(x_0)^\perp$ son nulas para $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}, \alpha < \beta$.

En primer lugar consideramos la aplicación $F(x_0, x_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$. En este caso, si ξ es un vector unitario en $E_\lambda(x_0)^\perp$, se cumple que

$$R(x_0, x_\alpha)\xi = \frac{2}{3}(\lambda-\mu)J_\alpha\xi, \quad R^0(x_0, x_\alpha)\xi = 0. \tag{3.3.4}$$

Por otra parte,

$$g(J_ix_0, x_\alpha) = \frac{3}{2(\lambda-\mu)}g(R(y_0, y_i)x_0, x_\alpha) = \frac{3}{2(\lambda-\mu)}g(R(x_0, x_\alpha)y_0, y_i) = g(J_\alpha y_0, y_i),$$

y teniendo en cuenta que $y_i = -\varepsilon_{y_0}J_iy_0$, se sigue que $g(J_ix_0, x_\alpha) = \delta_{i\alpha}\sigma_\alpha$, de donde

$$R^{J_i}(x_0, x_\alpha)\xi = 2g(J_ix_0, x_\alpha)J_i\xi = 2\delta_{i\alpha}\sigma_\alpha J_\alpha\xi. \tag{3.3.5}$$

Entonces, (3.3.4) y (3.3.5) implican que

$$F(x_0, x_\alpha)\xi = \frac{2}{3}(\lambda-\mu)J_\alpha\xi - \frac{\lambda-\mu}{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_i(2\delta_{i\alpha}\sigma_\alpha J_\alpha\xi) = \frac{2}{3}(\lambda-\mu)J_\alpha\xi - \frac{\lambda-\mu}{3}2J_\alpha\xi = 0,$$

lo que prueba que $F(x_0, x_\alpha)$ es nula.

Finalmente estudiamos la aplicación $F(x_\alpha, x_\beta)$, $\alpha, \beta \in \{1,2,3\}$, $\alpha < \beta$. Para ello, si ξ es un vector unitario en $E_\lambda(x_0)^\perp$, entonces la relación $J_\alpha J_\beta = J_{\alpha\beta}$ junto con el Lema 3.3.2 implican, por una parte,

$$R(x_\alpha, x_\beta)\xi = -\frac{2}{3}(\lambda-\mu)\varepsilon_{x_0}J_{\alpha\beta}\xi, \tag{3.3.6}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned} g(J_i x_\alpha, x_\beta) &= \frac{3}{2(\lambda-\mu)}g(R(y_0, y_i)x_\alpha, x_\beta) \\ &= \frac{3}{2(\lambda-\mu)}g(R(x_\alpha, x_\beta)y_0, y_i) = -\varepsilon_{x_0}g(J_{\alpha\beta}y_0, y_i). \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $y_i = -\varepsilon_{y_0}J_i y_0$, de la expresión anterior se sigue que $g(J_i x_\alpha, x_\beta) = -\delta_{i,\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\varepsilon_{x_0}$, de donde

$$R^{J_i}(x_\alpha, x_\beta)\xi = 2g(J_i x_\alpha, x_\beta)J_i\xi = -2\delta_{i,\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\varepsilon_{x_0}J_{\alpha\beta}\xi. \tag{3.3.7}$$

Entonces, como $R^0(x_\alpha, x_\beta)\xi = 0$, las expresiones (3.3.6) y (3.3.7) implican que

$$\begin{aligned} F(x_\alpha, x_\beta)\xi &= -\frac{2}{3}(\lambda-\mu)\varepsilon_{x_0}J_{\alpha\beta}\xi - \frac{\lambda-\mu}{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_i(-2\delta_{i,\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\varepsilon_{x_0}J_{\alpha\beta}\xi) \\ &= -\frac{2}{3}(\lambda-\mu)\varepsilon_{x_0}J_{\alpha\beta}\xi + \frac{\lambda-\mu}{3}2\varepsilon_{x_0}J_{\alpha\beta}\xi \;=\; 0, \end{aligned}$$

lo que muestra que el resultado también se cumple si la multiplicidad de λ es 3, concluyendo así la demostración del Teorema 3.3.1. □

3.4 Clasificación local

Sea (M, g) una variedad de Osserman especial. En las secciones anteriores nos restringimos al estudio de las propiedades de estas variedades en el espacio tangente en un punto arbitrario. En primer lugar veremos que los resultados obtenidos puntualmente (más concretamente el Teorema 3.3.1, que describía el tensor curvatura en cualquier punto de una variedad de Osserman especial de dimensión distinta de 16 y 32) son válidos en un entorno del punto fijado.

Sea entonces p un punto de la variedad, y consideremos un campo de vectores X_0 definido en un entorno de dicho punto. Generalizando la notación utilizada para vectores tangentes a M en p, escribimos $E_\lambda(X_0) = \langle X_0 \rangle \oplus Ker(R_{X_0} - \lambda\varepsilon_{X_0}Id)$. Entonces, $E_\lambda(X_0)$ y $E_\lambda(X_0)^\perp = Ker(R_{X_0} - \mu\varepsilon_{X_0}Id)$ definen dos distribuciones diferenciables en un entorno del punto p, que representamos por $\mathcal{U}_p$, de forma que la descomposición $T\mathcal{U}_p = E_\lambda(X_0) \oplus E_\lambda(X_0)^\perp$ nos permite definir, igual que en el Teorema 3.3.1, τ campos de tensores de tipo $(1,1)$, $J_1, \ldots, J_\tau$, que actúan en el entorno $\mathcal{U}_p$. Nótese que dichas estructuras son diferenciables por ser diferenciables las distribuciones $E_\lambda(X_0)$ y $E_\lambda(X_0)^\perp$. Así, procediendo de forma análoga al Teorema 3.3.1, se tiene que si la dimensión de la variedad es distinta de 16 y 32, entonces para todo punto $p \in M$ se puede considerar un entorno $\mathcal{U}_p$ en el que el tensor curvatura viene dado por

$$R = \mu R^0 + \frac{\lambda - \mu}{3} \sum_{i=1}^{\tau} \sigma_i R^{J_i}, \tag{3.4.1}$$

donde

- $\tau = 1$ y J_1 define en $\mathcal{U}_p$ una estructura casi Hermítica ($\sigma_1 = -1$) o una estructura casi para–Hermítica ($\sigma_1 = 1$), o
- $\tau = 3$ y $\{J_1, J_2, J_3\}$ es una estructura cuaterniónica ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -1$) o una estructura paracuaterniónica ($\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$) sobre $\mathcal{U}_p$.

Nótese que, como consecuencia de que el tensor curvatura esté dado por la expresión (3.4.1), para cualquier campo de vectores unitario ξ en $\mathcal{U}_p$ se cumple que $\{J_1\xi, \ldots, J_\tau\xi\}$ es una base para $Ker(R_\xi - \lambda\varepsilon_\xi Id)$, y por lo tanto $E_\lambda(\xi) = \langle\{\xi, J_1\xi, \ldots, J_\tau\xi\}\rangle$.

A lo largo de esta sección utilizaremos ciertas propiedades generales válidas para variedades casi Hermíticas y casi para–Hermíticas que recogemos en el siguiente lema:

Lema 3.4.1 *Sea (M, g, J) una variedad casi Hermítica o casi para–Hermítica. Las condiciones*

(i) $(\nabla_X J)JY = -J(\nabla_X J)Y$,

(ii) $g((\nabla_X J)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X J)Z)$,

(iii) $g((\nabla_X J)Y, Y) = g((\nabla_X J)Y, JY) = 0$,

se cumplen para cualesquiera campos de vectores X, Y, Z sobre la variedad.

Mediante el uso de (3.4.1) probaremos el carácter localmente simétrico de las variedades de Osserman especiales cuyo tensor curvatura venga expresado de esa forma. Para probar este resultado necesitaremos varios lemas previos que estudiamos a continuación.

Lema 3.4.2 *Sea* (M, g) *una variedad semi–Riemanniana cuyo tensor curvatura está dado por la expresión* (3.4.1). *Entonces la relación*

$$\begin{aligned}(\nabla_A R)(B,C)D &= \frac{\lambda-\mu}{3}\sum_{i=1}^{\tau}\sigma_i \Big\{ g(B,J_iD)(\nabla_A J_i)C + g(B,(\nabla_A J_i)D)J_iC \\ &\qquad -g(C,J_iD)(\nabla_A J_i)B - g(C,(\nabla_A J_i)D)J_iB \\ &\qquad +2g(B,J_iC)(\nabla_A J_i)D + 2g(B,(\nabla_A J_i)C)J_iD \Big\}\end{aligned}$$

se cumple para cualesquiera campos de vectores A, B, C, D.

Demostración. Usando la expresión (3.4.1) para el tensor curvatura se tiene que

$$(\nabla_A R)(B,C)D = \left(\mu\nabla_A R^0 + \frac{\lambda-\mu}{3}\sum_{i=1}^{\tau}\sigma_i \nabla_A R^{J_i}\right)(B,C)D,$$

y, como R^0 es paralelo, se sigue que

$$(\nabla_A R)(B,C)D = \frac{\lambda-\mu}{3}\sum_{i=1}^{\tau}\sigma_i\left(\nabla_A R^{J_i}\right)(B,C)D. \tag{3.4.2}$$

Por otra parte, utilizando la definición de R^{J_i} se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\nabla_A R^{J_i}\right)(B,C)D &= \nabla_A \{g(B,J_iD)J_iC - g(C,J_iD)J_iB + 2g(B,J_iC)J_iD\} \\ &\quad -g(\nabla_A B,J_iD)J_iC + g(C,J_iD)J_i(\nabla_A B) - 2g(\nabla_A B,J_iC)J_iD \\ &\quad -g(B,J_iD)J_i(\nabla_A C) + g(\nabla_A C,J_iD)J_iB - 2g(B,J_i(\nabla_A C))J_iD \\ &\quad -g(B,J_i(\nabla_A D))\nabla_A C + g(C,J_i(\nabla_A D))J_iB - 2g(B,J_iC)J_i(\nabla_A D),\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\nabla_A R^{J_i}\right)(B,C)D &= g(B,J_iD)\nabla_A(J_iC) + A(g(B,J_iD))J_iC - g(C,J_iD)\nabla_A(J_iB) \\ &\quad -A(g(C,J_iD))J_iB + 2g(B,J_iC)\nabla_A(J_iD) + 2A(g(B,J_iC))J_iD \\ &\quad -g(\nabla_A B,J_iD)J_iC + g(C,J_iD)J_i(\nabla_A B) - 2g(\nabla_A B,J_iC)J_iD \\ &\quad -g(B,J_iD)J_i(\nabla_A C) + g(\nabla_A C,J_iD)J_iB - 2g(B,\nabla_A(J_iC))J_iD \\ &\quad +2g(B,(\nabla_A J_i)C)J_iD - g(B,\nabla_A(J_iD))J_iC + g(B,(\nabla_A J_i)D)J_iC \\ &\quad +g(C,\nabla_A(J_iD))J_iB - g(C,(\nabla_A J_i)D)J_iB - 2g(B,J_iC)J_i(\nabla_A D).\end{aligned}$$

De esta expresión se sigue que

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_A R^{J_i}\right)(B,C)D &= g(B,J_iD)\{\nabla_A(J_iC)-J_i(\nabla_AC)\}+g(B,(\nabla_AJ_i)D)J_iC \\
&\quad+\{A(g(B,J_iD))-g(\nabla_AB,J_iD)-g(B,\nabla_A(J_iD))\}J_iC \\
&\quad-g(C,J_iD)\{\nabla_A(J_iB)-J_i(\nabla_AB)\}-g(C,(\nabla_AJ_i)D)J_iB \\
&\quad-\{A(g(C,J_iD))-g(\nabla_AC,J_iD)-g(C,\nabla_A(J_iD))\}J_iB \\
&\quad+2g(B,J_iC)\{\nabla_A(J_iD)-J_i(\nabla_AD)\}+2g(B,(\nabla_AJ_i)C)J_iD \\
&\quad+2\{A(g(B,J_iC))-g(\nabla_AB,J_iC)-g(B,\nabla_A(J_iC))\}J_iD,
\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_A R^{J_i}\right)(B,C)D &= g(B,J_iD)(\nabla_AJ_i)C+g(B,(\nabla_AJ_i)D)J_iC \\
&\quad-g(C,J_iD)(\nabla_AJ_i)B-g(C,(\nabla_AJ_i)D)J_iB \\
&\quad+2g(B,J_iC)(\nabla_AJ_i)D+2g(B,(\nabla_AJ_i)C)J_iD.
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo esta última expresión en (3.4.2) se obtiene la igualdad deseada. □

La expresión para la derivada covariante del tensor curvatura que nos da el lema anterior nos permite obtener información sobre las derivadas covariantes de las estructuras J_i, como vemos en el siguiente resultado:

Lema 3.4.3 *Sea (M,g) una variedad semi–Riemanniana cuyo tensor curvatura está dado por la expresión* (3.4.1)*. Entonces,*

$$(\nabla_X J_s)X \in \langle\{J_iX;\ i\in\{1,\dots,\tau\},\ i\neq s\}\rangle,$$

para cualquier campo de vectores unitario X y cualquier $s\in\{1,\dots,\tau\}$.

Demostración. Sea Y un campo de vectores unitario ortogonal a $E_\lambda(X)$. La segunda identidad de Bianchi implica que

$$(\nabla_Y R)(X,J_sY)X+(\nabla_X R)(J_sY,Y)X+(\nabla_{J_sY}R)(Y,X)X=0.$$

Entonces, aplicando el Lema 3.4.2 a esa expresión se obtiene fácilmente que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{\tau}\sigma_i\Big\{g(X,(\nabla_YJ_i)X)g(J_iJ_sY,Y)-g(Y,(\nabla_XJ_i)X)g(J_iJ_sY,Y) \\
&\qquad +2g(J_sY,J_iY)g((\nabla_XJ_i)X,Y)\Big\},
\end{aligned}$$

y como $g(J_iY, J_sY) = -\delta_{is}\sigma_s\varepsilon_Y$ y $g(J_iJ_sY, Y) = -g(J_iY, J_sY)$, se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_s \Big\{ \sigma_s\varepsilon_Y g(X, (\nabla_Y J_s)X) - \sigma_s\varepsilon_Y g(Y, (\nabla_X J_s)X) - 2\sigma_s\varepsilon_Y g((\nabla_X J_s)X, Y) \Big\} \\ &= \varepsilon_Y \Big\{ g((\nabla_Y J_s)X, X) - 3g((\nabla_X J_s)X, Y) \Big\}, \end{aligned}$$

de donde $g((\nabla_X J_s)X, Y) = 0$ (pues $g((\nabla_Y J_s)X, X) = 0$ por el Lema 3.4.1, (*iii*)). Entonces, como Y es cualquier campo de vectores unitario en $E_\lambda(X)^\perp$, se tiene que el campo de vectores $(\nabla_X J_s)X$ debe pertenecer a $E_\lambda(X) = \langle\{X, J_1X, \ldots, J_\tau X\}\rangle$. Así, teniendo en cuenta que $(\nabla_X J_s)X$ es ortogonal a X y a J_sX (de nuevo por el Lema 3.4.1, (*iii*)), se sigue que $(\nabla_X J_s)X \in \langle\{J_iX;\, i \in \{1, \ldots, \tau\},\, i \neq s\}\rangle$, lo que prueba el lema. □

Teorema 3.4.1 *Sea* (M, g) *una variedad semi–Riemanniana cuyo tensor curvatura viene dado por* (3.4.1)*. Entonces* (M, g) *es localmente simétrica.*

Demostración. Para probar el carácter localmente simétrico de la variedad mostraremos que para cualquier punto $p \in M$ se cumple que

$$\nabla_{X_0} R_{X_0} = 0, \tag{3.4.3}$$

donde X_0 es cualquier campo de vectores unitario en $\mathcal{U}_p$ (entorno del punto p en el que el tensor curvatura está dado por la expresión (3.4.1)).

Entonces, si X_0 es uno de esos campos de vectores, considerando la descomposición

$$T\mathcal{U}_p = E_\lambda(X_0) \oplus E_\lambda(Y_0) \oplus \cdots$$

para probar (3.4.3) será suficiente demostrar que

$$(\nabla_{X_0} R)(T, X_0, X_0, W) = 0, \tag{3.4.4}$$

donde T y W son cualesquiera campos de vectores en la referencia ortonormal inducida por la descomposición anterior.

En primer lugar, el Lema 3.4.2 implica que

$$\begin{aligned} &(\nabla_{X_0} R)(T, X_0, X_0, W) \\ &\quad = \frac{\lambda - \mu}{3} \sum_{i=1}^{\tau} \sigma_i \Big\{ g(T, J_iX_0) g((\nabla_{X_0} J_i)X_0, W) + g(T, (\nabla_{X_0} J_i)X_0) g(J_iX_0, W) \\ &\qquad\qquad - g(X_0, J_iX_0) g((\nabla_{X_0} J_i)T, W) - g(X_0, (\nabla_{X_0} J_i)X_0) g(J_iT, W) \\ &\qquad\qquad + 2g(T, J_iX_0) g((\nabla_{X_0} J_i)X_0, W) + 2g(T, (\nabla_{X_0} J_i)X_0) g(J_iX_0, W) \Big\}, \end{aligned}$$

y como X_0 es ortogonal a J_iX_0 y también a $(\nabla_{X_0}J_i)X_0$ (esto último por el Lema 3.4.1, (*iii*)), se sigue que

$$\begin{aligned}&(\nabla_{X_0}R)(T,X_0,X_0,W)\\&\quad=(\lambda-\mu)\sum_{i=1}^{\tau}\sigma_i\left\{g(T,J_iX_0)g(W,(\nabla_{X_0}J_i)X_0)+g(T,(\nabla_{X_0}J_i)X_0)g(W,J_iX_0)\right\}.\end{aligned}$$

Entonces, como $(\nabla_{X_0}J_i)X_0\in\langle\{J_jX_0;\ j\in\{1,\dots,\tau\},\ j\neq i\}\rangle$ (por el Lema 3.4.3), la expresión anterior se anula siempre que al menos uno de los campos de vectores T, W pertenece a $E_\lambda(X_0)^\perp$, y por lo tanto (3.4.4) se cumple para esta elección de T y W.

Para finalizar analizamos el caso en que T y W pertenecen a $E_\lambda(X_0)$. En este caso, se tiene que

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_0}R)(T,X_0,X_0,W)\ &=\ \nabla_{X_0}(R(T,X_0,X_0,W))-R(\nabla_{X_0}T,X_0,X_0,W)\\&\quad -R(T,\nabla_{X_0}X_0,X_0,W)-R(T,X_0,\nabla_{X_0}X_0,W)\\&\quad -R(T,X_0,X_0,\nabla_{X_0}W),\end{aligned}$$

pero, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}&\nabla_{X_0}(R(T,X_0,X_0,W))-R(\nabla_{X_0}T,X_0,X_0,W)-R(T,X_0,X_0,\nabla_{X_0}W)\\&\quad=\nabla_{X_0}(g(R_{X_0}T,W))-g(R_{X_0}W,\nabla_{X_0}T)-g(R_{X_0}T,\nabla_{X_0}W)\\&\quad=\nabla_{X_0}(\lambda\varepsilon_{X_0}g(T,W))-\lambda\varepsilon_{X_0}g(W,\nabla_{X_0}T)-\lambda\varepsilon_{X_0}g(T,\nabla_{X_0}W)\\&\quad=\lambda\varepsilon_{X_0}\left\{\nabla_{X_0}(g(T,W))-g(\nabla_{X_0}T,W)-g(T,\nabla_{X_0}W)\right\}\\&\quad=\lambda\varepsilon_{X_0}(\nabla_{X_0}g)(T,W)\\&\quad=0,\end{aligned}$$

se sigue que

$$(\nabla_{X_0}R)(T,X_0,X_0,W)=-R(T,\nabla_{X_0}X_0,X_0,W)-R(T,X_0,\nabla_{X_0}X_0,W).\tag{3.4.5}$$

Sean $T=X_i$, $W=X_j$, con $i,j\in\{1,\dots,\tau\}$. Si i, j son diferentes, entonces el Lema 3.1.2, (*iii*) (para campos de vectores) implica que la expresión (3.4.5) se anula. Por otra parte, si $i=j$, de (3.4.5) obtenemos

$$\begin{aligned}&(\nabla_{X_0}R)(X_i,X_0,X_0,X_i)\\&\quad=-R(X_i,\nabla_{X_0}X_0,X_0,X_i)-R(X_i,X_0,\nabla_{X_0}X_0,X_i)\\&\quad=-2R(X_0,X_i,X_i,\nabla_{X_0}X_0)\ =\ -2g(R_{X_i}X_0,\nabla_{X_0}X_0)\ =\ -2\lambda\varepsilon_{X_i}g(X_0,\nabla_{X_0}X_0),\end{aligned}$$

que también se anula, pues $g(X_0,\nabla_{X_0}X_0)=0$. Así queda probado (3.4.4), y por lo tanto (3.4.3) también se cumple, por lo que la variedad es localmente simétrica. □

Al principio de este capítulo señalábamos que uno de los objetivos del mismo era obtener un resultado de clasificación para variedades de Osserman especiales de dimensión distinta de 16 y 32 (véase Teorema 3.0.1). A continuación, utilizando los resultados previos y los obtenidos en las secciones anteriores, obtenemos dicha clasificación.

Teorema 3.4.2 *Sea (M, g) una variedad de Osserman especial. Si la dimensión de M es distinta de 16 y 32, entonces dicha variedad es localmente isométrica a una de las variedades siguientes:*

(a) una variedad Kähler indefinida de curvatura seccional holomorfa constante con métrica de signatura $(2p, 2q)$, $p, q \geq 0$,

(b) una variedad cuaterniónica Kähler indefinida de curvatura seccional cuaterniónica constante con métrica de signatura $(4p, 4q)$, $p, q \geq 0$,

(c) una variedad para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante con métrica de signatura (n, n) ó

(d) una variedad paracuaterniónica Kähler de curvatura seccional paracuaterniónica constante con métrica de signatura $(2n, 2n)$.

Demostración. Por ser la dimensión de la variedad distinta de 16 y 32 el tensor curvatura está dado, localmente, por (3.4.1), es decir, $R = \mu R^0 + \frac{\lambda - \mu}{3} \sum_{i=1}^{\tau} \sigma_i R^{J_i}$, donde

- $\tau = 1$ y J_1 determina una estructura casi Hermítica ($\sigma_1 = -1$) o una estructura casi para–Hermítica ($\sigma_1 = 1$) , o
- $\tau = 3$ y $\{J_1, J_2, J_3\}$ es una estructura cuaterniónica ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -1$) o una estructura paracuaterniónica ($\sigma_1 = -1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$).

A continuación analizamos cada uno de los cuatro casos posibles por separado. En lo que sigue utilizaremos la siguiente expresión (que se obtiene directamente a partir de la definición del tensor R^{J_i}),

$$(3.4.6) \qquad \left(\nabla_\xi R^{J_i}\right)(\eta, \gamma)\gamma = 3\left\{g((\nabla_\xi J_i)\gamma, \eta)J_i\gamma + g(\eta, J_i\gamma)(\nabla_\xi J_i)\gamma\right\},$$

para cualesquiera campos de vectores ξ, η, γ.

<u>Caso 1</u>: $\tau = 1$ y $R = \mu R^0 - \frac{\lambda - \mu}{3} R^J$, siendo J una estructura casi Hermítica.

En primer lugar probaremos que J es paralela, es decir, $\nabla J = 0$. Teniendo en cuenta que R_0 es paralelo, por ser la variedad localmente simétrica la expresión (3.4.1) implica que $\nabla R^J = 0$, por lo que, en particular, $\left(\nabla_X R^J\right)(JY, Y)Y = 0$ para cualesquiera campos de vectores unitarios X, Y. Pero la expresión (3.4.6) y el Lema 3.4.1 implican que $\left(\nabla_X R^J\right)(JY, Y)Y = 3\varepsilon_Y(\nabla_X J)Y$. Se sigue entonces que $(\nabla_X J)Y = 0$, lo que prueba que J es paralela, y por lo tanto (M, g, J) es una variedad Kähler indefinida.

Por otra parte, si x, y son vectores unitarios tangentes a la variedad en un mismo punto, con $y \in \langle\{x, Jx\}\rangle^\perp$, como $R^0(x, Jx, x, Jy) = R^J(x, Jx, x, Jy) = 0$, la expresión (3.4.1) implica que $R(x, Jx, x, Jy) = 0$. Entonces, el Teorema 2.1.3 permite concluir que la curvatura seccional holomorfa es constante.

Caso 2: $\tau = 1$ y $R = \mu R^0 + \frac{\lambda - \mu}{3} R^J$, con J una estructura casi para–Hermítica.

De forma análoga al caso anterior se prueba que la estructura J es paralela. Entonces, (M, g, J) es una variedad para–Kähler. Además, también de forma análoga se comprueba que $R(x, Jx, x, Jy) = 0$, para cualesquiera vectores x, y tangentes a la variedad verificando que $y \in \langle\{x, Jx\}\rangle^\perp$. Entonces, el Teorema 2.1.6 implica que la curvatura seccional paraholomorfa es constante.

Caso 3: $\tau = 3$ y $R = \mu R^0 - \frac{\lambda - \mu}{3} \sum_{i=1}^{3} R^{J_i}$, donde $\{J_1, J_2, J_3\}$ define una estructura cuaterniónica.

En primer lugar veremos que la estructura cuaterniónica es Kähler, para lo cual probaremos que $(\nabla_X J_i)Y \in Q(Y) = \langle\{Y, J_1Y, J_2Y, J_3Y\}\rangle$, para cualesquiera campos de vectores unitarios X, Y, y para $i = 1, 2, 3$. Para ello, nótese que por ser R^0 paralelo y la variedad localmente simétrica, la expresión (3.4.1) implica que $\sum_{i=1}^{3} \nabla R^{J_i} = 0$. En particular, $\sum_{i=1}^{3} \left(\nabla_X R^{J_i}\right)(Z, Y)Y = 0$ para cualesquiera campos de vectores unitarios X, Y, Z. Ahora, si $Z \in Q(Y)^\perp$, de la expresión (3.4.6) y del Lema 3.4.1 se sigue que $\left(\nabla_X R^{J_i}\right)(Z, Y)Y = 3g((\nabla_X J_i)Y, Z)J_iY$. Entonces, $\sum_{i=1}^{3} g((\nabla_X J_i)Y, Z)J_iY = 0$, y como $\{J_1Y, J_2Y, J_3Y\}$ son linealmente independientes se sigue que $g((\nabla_X J_i)Y, Z) = 0$ siempre que $Z \in Q(Y)^\perp$, lo que prueba que $(\nabla_X J_i)Y \in Q(Y)$.

Así, la variedad es cuaterniónica Kähler indefinida. Ahora, si x, y son vectores tangentes tales que $y \in Q(x)^\perp$, entonces como $R^0(x, J_ix, x, J_iy)$, $R^{J_j}(x, J_ix, x, J_iy)$ se anulan $(i, j = 1, 2, 3)$, la expresión (3.4.1) implica que $R(x, J_ix, x, J_iy) = 0$ para cualquier $i = 1, 2, 3$, y por lo tanto el Teorema 2.1.9 permite concluir que la curvatura seccional cuaterniónica es constante.

<u>**Caso 4**</u>**:** $\tau = 3$ **y** $R = \mu R^0 + \frac{\lambda-\mu}{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_i R^{J_i}$**, siendo** $\{J_1, J_2, J_3\}$ **una estructura paracuaterniónica (**$\sigma_1 = -1$**,** $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$**).**

De forma análoga al caso 3 se prueba que la estructura paracuaterniónica es Kähler. Además, si x e y son vectores tangentes a la variedad con $y \in Q(x)^\perp$, de forma análoga a la anterior se obtiene que $R(x, J_i x, x, J_i y) = 0$, $i = 1, 2, 3$, por lo que el Teorema 2.1.13 implica que la curvatura seccional paracuaterniónica es constante. □

3.5 Casos excepcionales: dimensión 16 y 32

En primer lugar nótese que si una variedad semi–Riemanniana de Osserman especial tiene dimensión 16 ó 32 y la multiplicidad del autovalor distinguido λ es $\tau = 1$ ó $\tau = 3$, entonces la clasificación dada por el Teorema 3.4.2 sigue siendo válida. Por tanto, en esta sección analizaremos aquellas variedades de Osserman especiales en las cuales la multiplicidad es $\tau = 7$ ó $\tau = 15$, de forma que la dimensión de la variedad es 16 ó 32, respectivamente, de signatura $(8, 8)$, $(16, 0)$, $(0, 16)$ ó $(16, 16)$ (cf. Teorema 3.2.4).

El objetivo de esta sección es poner de manifiesto el carácter localmente simétrico de las variedades de Osserman especiales no consideradas en el Teorema 3.4.2. Tal propiedad será establecida en el Teorema 3.5.1, después de un análisis detallado de las componentes del tensor curvatura. En el estudio de dichas componentes jugará un papel básico la posibilidad de definir ciertos productos no asociativos en los subespacios $E_\lambda(\cdot)$ de las variedades.

Si X_0 e Y_0 son campos de vectores unitarios en un entorno de un punto p de una variedad de Osserman especial M, con $Y_0 \in E_\lambda(X_0)^\perp$, y $\{X_1, \ldots, X_\tau\}$ es una base ortonormal del autoespacio $Ker(R_{X_0} - \lambda\varepsilon_{X_0} Id)$, se tienen definidos los campos de tensores $\phi_i : E_\lambda(Y_0) \longrightarrow E_\lambda(Y_0)$, $i = 1, \ldots, \tau$, dados por $\phi_i = \frac{3}{2(\lambda-\mu)}R(X_0, X_i)$ (véase (3.2.1)). Estas estructuras son todas complejas si la signatura de M es $(16, 0)$ ó $(0, 16)$. En otro caso la signatura de M es $(8, 8)$ ó $(16, 16)$, y dichas estructuras se pueden ordenar de forma que las $(\tau - 1)/2$ primeras sean complejas y el resto paracomplejas. (Dichas estructuras determinan una base ortonormal $\{Y_0, Y_1 = \phi_1 Y_0, \ldots, Y_\tau = \phi_\tau Y_0\}$ de $E_\lambda(Y_0)$). A continuación definimos un producto en el subespacio $E_\lambda(Y_0)$. Para ello procedemos de la forma siguiente:

$$(3.5.1) \qquad \begin{cases} Y_0 \cdot Y_i = Y_i \cdot Y_0 = Y_i, & i = 0, 1, \ldots, \tau, \\ \\ Y_i \cdot Y_j = \phi_i \phi_j Y_0, & i, j = 1, \ldots, \tau. \end{cases}$$

En la primera parte de esta sección estudiaremos este producto, con el objetivo central de probar que admite una *base estándar*, es decir, una base ortonormal $V_0, V_1, \ldots, V_\tau$ de tal forma que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \{0, 1, \dots, \tau\}$, existe $\gamma \in \{0, 1 \dots, \tau\}$ con $V_\alpha \cdot V_\beta = \pm V_\gamma$. Definiendo $\alpha \cdot \beta = \pm\gamma$ escribiremos $V_\alpha \cdot V_\beta = V_{\alpha\beta}$ (tomando $V_{-\delta} = -V_\delta$).

Nótese que el producto anterior se puede definir independientemente de la multiplicidad que tenga el autovalor λ. Además, cuando la multiplicidad de λ es uno, el producto definido se corresponde con el de los números complejos o paracomplejos, según la restricción de la métrica a $E_\lambda(\cdot)$ sea definida o indefinida. Si la multiplicidad de λ es tres, tal producto se corresponde con el de los cuaternios o paracuaternios, según la restricción de la métrica a $E_\lambda(\cdot)$ sea definida o indefinida. En cualquier caso, el producto admite una base estándar. (Véase la Tabla 3.1, pág. 87, para el producto de los paracuaternios).

Lema 3.5.1 *El producto definido por* (3.5.1) *sobre* $E_\lambda(Y_0)$ *cumple las siguientes condiciones:*

(i) Y_0 *es el elemento neutro (por la derecha y por la izquierda),*

(ii) $\phi_i Y_0 \cdot \xi = \phi_i \xi$, *para cualquier campo de vectores* ξ, $i = 1, \dots, \tau$,

(iii) $\xi \cdot \phi_i \eta = -\phi_i(\xi \cdot \eta)$, *para cualesquiera campos de vectores* ξ, η, *con* ξ *ortogonal a los campos* Y_0 *y* $\phi_i Y_0$, $i = 1, \dots, \tau$,

(iv) $\xi^2 = -\varepsilon_{Y_0} g(\xi, \xi) Y_0$, *para cualquier campo de vectores* ξ *ortogonal a* Y_0,

(v) $\xi \cdot \eta = -\eta \cdot \xi$, *para cualesquiera campos de vectores* ξ, η *ortogonales entre sí y ortogonales a* Y_0,

(vi) $\xi \cdot (\xi \cdot \eta) = \xi^2 \cdot \eta$, *para cualesquiera campos de vectores* ξ, η *ortogonales a* Y_0,

(vii) $g(\xi \cdot \eta, \gamma) = -g(\eta, \xi \cdot \gamma)$, *para cualesquiera campos de vectores* ξ, η, γ *ortogonales al campo de vectores* Y_0,

donde $\xi^2 = \xi \cdot \xi$.

Demostración. Denotamos por σ_i el valor -1 ó $+1$ tal que $\phi_i^2 = \sigma_i Id$. La condición (i) se sigue trivialmente de (3.5.1). Para probar (ii), escribiendo $\xi = a_0 Y_0 + \sum_{j=1}^{\tau} a_j \phi_j Y_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \phi_i Y_0 \cdot \xi &= \phi_i Y_0 \cdot \left(a_0 Y_0 + \sum_{j=1}^{\tau} a_j \phi_j Y_0 \right) = a_0 (\phi_i Y_0 \cdot Y_0) + \sum_{j=1}^{\tau} a_j (\phi_i Y_0 \cdot \phi_j Y_0) \\ &= a_0 \phi_i Y_0 + \sum_{j=1}^{\tau} a_j \phi_i \phi_j Y_0 = \phi_i \left(a_0 Y_0 + \sum_{j=1}^{\tau} a_j \phi_j Y_0 \right) = \phi_i \xi. \end{aligned}$$

Probamos a continuación (iii). Escribiendo $\xi = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\tau} a_j\phi_j Y_0$, de (ii) se sigue que

$$\begin{aligned}
\xi\cdot\phi_i\eta &= \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\tau} a_j\phi_j Y_0\right)\cdot\phi_i\eta = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\tau} a_j(\phi_j Y_0\cdot\phi_i\eta) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\tau} a_j\phi_j\phi_i\eta \\
&= -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\tau} a_j\phi_i\phi_j\eta = -\phi_i\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\tau} a_j\phi_j\eta\right),
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que, de nuevo por (ii),

$$\xi\cdot\eta = \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\tau} a_j\phi_j Y_0\right)\cdot\eta = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\tau} a_j(\phi_j Y_0\cdot\eta) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\tau} a_j\phi_j\eta,$$

se obtiene que $\xi\cdot\phi_i\eta = -\phi_i(\xi\cdot\eta)$.

Para probar (iv) escribimos $\xi = \sum_{i=1}^{\tau} a_i\phi_i Y_0$, de forma que de (ii) se sigue que

$$\begin{aligned}
\xi^2 &= \xi\cdot\xi = \left(\sum_{i=1}^{\tau} a_i\phi_i Y_0\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{\tau} a_j\phi_j Y_0\right) = \sum_{i,j=1}^{\tau} a_i a_j(\phi_i Y_0\cdot\phi_j Y_0) \\
&= \sum_{i,j=1}^{\tau} a_i a_j\phi_i\phi_j Y_0 = \sum_{i=1}^{\tau} a_i^2\phi_i^2 Y_0 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\tau} a_i a_j\phi_i\phi_j Y_0 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\tau}\sigma_i a_i^2\right) Y_0 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\tau} a_i a_j\phi_i\phi_j Y_0.
\end{aligned}$$

Ahora, es inmediato comprobar que $g(\xi,\xi) = -\varepsilon_{Y_0}\sum_{i=1}^{\tau}\sigma_i a_i^2$ y, por otra parte, como $\phi_i\phi_j = -\phi_j\phi_i$ si $i\neq j$, se obtiene que $\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{\tau} a_i a_j\phi_i\phi_j Y_0 = 0$. Entonces, de la expresión anterior se sigue que $\xi^2 = -\varepsilon_{Y_0} g(\xi,\xi) Y_0$.

Probemos ahora (v). Escribiendo $\xi = \sum_{i=1}^{\tau} a_i \phi_i Y_0$, $\eta = \sum_{j=1}^{\tau} b_j \phi_j Y_0$, por (ii) se tiene que

$$\begin{aligned} \xi \cdot \eta &= \left(\sum_{i=1}^{\tau} a_i \phi_i Y_0 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\tau} b_j \phi_j Y_0 \right) = \sum_{i,j=1}^{\tau} a_i b_j (\phi_i Y_0 \cdot \phi_j Y_0) = \sum_{i,j=1}^{\tau} a_i b_j \phi_i \phi_j Y_0 \\ &= \sum_{i=1}^{\tau} a_i b_i \phi_i^2 Y_0 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\tau} a_i b_j \phi_i \phi_j Y_0 = \left(\sum_{i=1}^{\tau} \sigma_i a_i b_i \right) Y_0 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\tau} a_i b_j \phi_i \phi_j Y_0 \end{aligned}$$

y, de forma análoga,

$$\begin{aligned} \eta \cdot \xi &= \left(\sum_{j=1}^{\tau} b_j \phi_j Y_0 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\tau} a_i \phi_i Y_0 \right) = \sum_{i,j=1}^{\tau} a_i b_j (\phi_j Y_0 \cdot \phi_i Y_0) = \sum_{i,j=1}^{\tau} a_i b_j \phi_j \phi_i Y_0 \\ &= \sum_{i=1}^{\tau} a_i b_i \phi_i^2 Y_0 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\tau} a_i b_j \phi_j \phi_i Y_0 = \left(\sum_{i=1}^{\tau} \sigma_i a_i b_i \right) Y_0 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\tau} a_i b_j \phi_j \phi_i Y_0. \end{aligned}$$

Ahora, como $g(\xi, \eta) = 0$ se obtiene que $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i a_i b_i = 0$, por lo que (v) se sigue de las expresiones anteriores teniendo en cuenta que $\phi_i \phi_j = -\phi_j \phi_i$ siempre que $i \neq j$.

Para probar (vi) de nuevo escribimos $\xi = \sum_{i=1}^{\tau} a_i \phi_i Y_0$, $\eta = \sum_{j=1}^{\tau} b_j \phi_j Y_0$ de forma que, por (ii), se tiene que $\xi \cdot \eta = \sum_{i=1}^{\tau} a_i \phi_i \eta$. Entonces, aplicando de nuevo (ii) se sigue que

$$\begin{aligned} \xi \cdot (\xi \cdot \eta) &= \left(\sum_{i=1}^{\tau} a_i \phi_i Y_0 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\tau} a_j \phi_j \eta \right) = \sum_{i,j=1}^{\tau} a_i a_j (\phi_i Y_0 \cdot \phi_j \eta) = \sum_{i,j=1}^{\tau} a_i a_j \phi_i \phi_j \eta \\ &= \sum_{i=1}^{\tau} a_i^2 \phi_i^2 \eta + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\tau} a_i a_j \phi_i \phi_j \eta = \left(\sum_{i=1}^{\tau} \sigma_i a_i^2 \right) \eta + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\tau} a_i a_j \phi_i \phi_j \eta, \end{aligned}$$

y como $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\tau} a_i a_j \phi_i \phi_j \eta = 0$ y, por otra parte, $g(\xi, \xi) = -\varepsilon_{Y_0} \sum_{i=1}^{\tau} \sigma_i a_i^2$, la expresión anterior se reduce a $\xi \cdot (\xi \cdot \eta) = -\varepsilon_{Y_0} g(\xi, \xi) \eta$. Así, de (iv) se sigue que $\xi \cdot (\xi \cdot \eta) = \xi^2 \cdot \eta$.

Por último probamos (vii). Escribiendo $\xi = \sum_{i=1}^{\tau} a_i \phi_i Y_0$, $\eta = \sum_{j=1}^{\tau} b_j \phi_j Y_0$, $\gamma = \sum_{k=1}^{\tau} c_k \phi_k Y_0$

se tiene que $\xi \cdot \eta = \sum_{i,j=1}^{\tau} a_i b_j \phi_i \phi_j Y_0$ y, por tanto,

$$g(\xi \cdot \eta, \gamma) = g\left(\sum_{i,j=1}^{\tau} a_i b_j \phi_i \phi_j Y_0, \sum_{k=1}^{\tau} c_k \phi_k Y_0\right) = \sum_{i,j,k=1}^{\tau} a_i b_j c_k g(\phi_i \phi_j Y_0, \phi_k Y_0).$$

Por otra parte, como $\xi \cdot \gamma = \sum_{i,k=1}^{\tau} a_i c_k \phi_i \phi_k Y_0$, se tiene que

$$g(\eta, \xi \cdot \gamma) = g\left(\sum_{j=1}^{\tau} b_j \phi_j Y_0, \sum_{i,k=1}^{\tau} a_i c_k \phi_i \phi_k Y_0\right) = \sum_{i,j,k=1}^{\tau} a_i b_j c_k g(\phi_j Y_0, \phi_i \phi_k Y_0).$$

Así, (vii) se obtiene de las expresiones anteriores sin más que tener en cuenta que $g(\phi_i \phi_j Y_0, \phi_k Y_0) = -g(\phi_j Y_0, \phi_i \phi_k Y_0)$. □

Utilizando las propiedades obtenidas en el lema anterior probamos a continuación la existencia de una base estándar para el producto definido en (3.5.1).

Lema 3.5.2 *Sea* (M, g) *una variedad de Osserman especial y supongamos que la multiplicidad del autovalor* λ *es* $\tau = 7$ *ó* $\tau = 15$*. Entonces, el producto definido en* (3.5.1) *admite una base estándar.*

Demostración. En lo que sigue utilizaremos reiteradamente las propiedades obtenidas en el Lema 3.5.1. Además, recordemos que ϕ_1 y ϕ_2 son estructuras complejas.

Analizamos en primer lugar el caso de multiplicidad $\tau = 7$. En este caso, elegimos

$$V_0 = Y_0, \quad V_1 = \phi_1 Y_0, \quad V_2 = \phi_2 Y_0, \quad V_3 = \phi_1 Y_0 \cdot \phi_2 Y_0 = \phi_1 \phi_2 Y_0.$$

Ahora, si W es cualquier campo de vectores unitario elegido en $\langle\{V_0, V_1, V_2, V_3\}\rangle^{\perp}$, tomamos

$$V_4 = W \cdot V_0, \quad V_5 = W \cdot V_1, \quad V_6 = W \cdot V_2, \quad V_7 = W \cdot V_3,$$

es decir,

$$\begin{aligned}
V_4 &= W \cdot Y_0 \overset{(i)}{=} W, \\
V_5 &= W \cdot \phi_1 Y_0 \overset{(iii)}{=} -\phi_1 W, \\
V_6 &= W \cdot \phi_2 Y_0 \overset{(iii)}{=} -\phi_2 W, \\
V_7 &= W \cdot \phi_1 \phi_2 Y_0 \overset{(iii)}{=} -\phi_1 (W \cdot \phi_2 Y_0) \overset{(iii)}{=} \phi_1 \phi_2 W.
\end{aligned}$$

Probaremos que la base ortonormal $\{V_i;\, i=0,\ldots,7\}$ es una base estándar, mostrando para ello que tomando $\varepsilon=\varepsilon_{Y_0}\varepsilon_W$, la tabla del producto definido en (3.5.1) para esa base está dada por:

	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
V_0	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
V_1	V_1	$-V_0$	V_3	$-V_2$	$-V_5$	V_4	$-V_7$	V_6
V_2	V_2	$-V_3$	$-V_0$	V_1	$-V_6$	V_7	V_4	$-V_5$
V_3	V_3	V_2	$-V_1$	$-V_0$	$-V_7$	$-V_6$	V_5	V_4
V_4	V_4	V_5	V_6	V_7	$-\varepsilon V_0$	$-\varepsilon V_1$	$-\varepsilon V_2$	$-\varepsilon V_3$
V_5	V_5	$-V_4$	$-V_7$	V_6	εV_1	$-\varepsilon V_0$	$-\varepsilon V_3$	εV_2
V_6	V_6	V_7	$-V_4$	$-V_5$	εV_2	εV_3	$-\varepsilon V_0$	$-\varepsilon V_1$
V_7	V_7	$-V_6$	V_5	$-V_4$	εV_3	$-\varepsilon V_2$	εV_1	$-\varepsilon V_0$

Tabla 3.2: Base estándar para $\tau=7$

A continuación comprobamos los resultados de la Tabla 3.2. Nótese que, de acuerdo con la propiedad (v), si i, j son índices distintos elegidos en $\{1,\ldots,7\}$, entonces se cumple que $V_i\cdot V_j=-V_j\cdot V_i$.

$$V_0\cdot V_i \;=\; V_i\cdot V_0 \stackrel{(i)}{=} V_i, \quad i=0,\ldots,7,$$

$$\begin{aligned}
V_1\cdot V_1 &= \phi_1Y_0\cdot\phi_1Y_0 \stackrel{(ii)}{=} \phi_1^2Y_0 = -Y_0 = -V_0,\\
V_1\cdot V_2 &= \phi_1Y_0\cdot\phi_2Y_0 \stackrel{(ii)}{=} \phi_1\phi_2Y_0 = V_3,\\
V_1\cdot V_3 &= \phi_1Y_0\cdot\phi_1\phi_2Y_0 \stackrel{(ii)}{=} \phi_1^2\phi_2Y_0 = -\phi_2Y_0 = -V_2,\\
V_1\cdot V_4 &= \phi_1Y_0\cdot W \stackrel{(ii)}{=} \phi_1W = -V_5,\\
V_1\cdot V_5 &= \phi_1Y_0\cdot(-\phi_1W) \stackrel{(ii)}{=} -\phi_1^2W = W = V_4,\\
V_1\cdot V_6 &= \phi_1Y_0\cdot(-\phi_2W) \stackrel{(ii)}{=} -\phi_1\phi_2W = -V_7,\\
V_1\cdot V_7 &= \phi_1Y_0\cdot\phi_1\phi_2W \stackrel{(ii)}{=} \phi_1^2\phi_2W = -\phi_2W = V_6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2\cdot V_2 &= \phi_2Y_0\cdot\phi_2Y_0 \stackrel{(ii)}{=} \phi_2^2Y_0 = -Y_0 = -V_0,\\
V_2\cdot V_3 &= \phi_2Y_0\cdot\phi_1\phi_2Y_0 \stackrel{(ii)}{=} \phi_2\phi_1\phi_2Y_0 = -\phi_2^2\phi_1Y_0 = \phi_1Y_0 = V_1,\\
V_2\cdot V_4 &= \phi_2Y_0\cdot W \stackrel{(ii)}{=} \phi_2W = -V_6,\\
V_2\cdot V_5 &= \phi_2Y_0\cdot(-\phi_1W) \stackrel{(ii)}{=} -\phi_2\phi_1W = \phi_1\phi_2W = V_7,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_2 \cdot V_6 &= \phi_2 Y_0 \cdot (-\phi_2 W) \overset{(ii)}{=} -\phi_2^2 W \;=\; W \;=\; V_4,\\
V_2 \cdot V_7 &= \phi_2 Y_0 \cdot \phi_1\phi_2 W \overset{(ii)}{=} \phi_2\phi_1\phi_2 W \;=\; -\phi_2^2\phi_1 W \;=\; \phi_1 W \;=\; -V_5,\\
\\
V_3 \cdot V_3 &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot \phi_1\phi_2 Y_0 \overset{(iv)}{=} -\varepsilon_{Y_0} g(\phi_1\phi_2 Y_0, \phi_1\phi_2 Y_0) Y_0 \;=\; -Y_0 \;=\; -V_0,\\
V_3 \cdot V_4 &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot W \overset{(v)}{=} -W \cdot \phi_1\phi_2 Y_0 \overset{(iii)}{=} \phi_1(W \cdot \phi_2 Y_0) \overset{(iii)}{=} -\phi_1\phi_2 W \;=\; -V_7,\\
V_3 \cdot V_5 &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot (-\phi_1 W) \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_1\phi_2 Y_0 \cdot W) \;=\; \phi_1(V_3 \cdot V_4) \;=\; -\phi_1^2\phi_2 W \;=\; \phi_2 W \;=\; -V_6,\\
V_3 \cdot V_6 &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot (-\phi_2 W) \overset{(iii)}{=} \phi_2(\phi_1\phi_2 Y_0 \cdot W) \;=\; \phi_2(V_3 \cdot V_4) \;=\; -\phi_2\phi_1\phi_2 W \;=\; \phi_2^2\phi_1 W\\
&= -\phi_1 W \;=\; V_5,\\
V_3 \cdot V_7 &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot \phi_1\phi_2 W \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1\phi_2 Y_0 \cdot \phi_2 W) \;=\; \phi_1(V_3 \cdot V_6) \;=\; -\phi_1^2 W \;=\; W \;=\; V_4,\\
\\
V_4 \cdot V_4 &= W \cdot W \overset{(iv)}{=} -\varepsilon_{Y_0}\varepsilon_W Y_0 \;=\; -\varepsilon Y_0 \;=\; -\varepsilon V_0,\\
V_4 \cdot V_5 &= W \cdot (-\phi_1 W) \overset{(iii)}{=} \phi_1(W \cdot W) \;=\; \phi_1(V_4 \cdot V_4) \;=\; -\varepsilon\phi_1 Y_0 \;=\; -\varepsilon V_1,\\
V_4 \cdot V_6 &= W \cdot (-\phi_2 W) \overset{(iii)}{=} \phi_2(W \cdot W) \;=\; \phi_2(V_4 \cdot V_4) \;=\; -\varepsilon\phi_2 Y_0 \;=\; -\varepsilon V_2,\\
V_4 \cdot V_7 &= W \cdot \phi_1\phi_2 W \overset{(iii)}{=} -\phi_1(W \cdot \phi_2 W) \;=\; \phi_1(V_4 \cdot V_6) \;=\; -\varepsilon\phi_1\phi_2 Y_0 \;=\; -\varepsilon V_3,\\
\\
V_5 \cdot V_5 &= (-\phi_1 W) \cdot (-\phi_1 W) \overset{(iv)}{=} -\varepsilon_{Y_0} g(\phi_1 W, \phi_1 W) Y_0 \;=\; -\varepsilon V_0,\\
V_5 \cdot V_6 &= (-\phi_1 W) \cdot (-\phi_2 W) \overset{(iii)}{=} -\phi_2(\phi_1 W \cdot W) \overset{(v)}{=} \phi_2(W \cdot \phi_1 W) \;=\; -\phi_2(V_4 \cdot V_5) \;=\; \varepsilon\phi_2\phi_1 Y_0\\
&= -\varepsilon\phi_1\phi_2 Y_0 \;=\; -\varepsilon V_3,\\
V_5 \cdot V_7 &= (-\phi_1 W) \cdot \phi_1\phi_2 W \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_1 W \cdot \phi_2 W) \;=\; \phi_1(V_5 \cdot V_6) \;=\; -\varepsilon\phi_1^2\phi_2 Y_0 \;=\; \varepsilon\phi_2 Y_0 \;=\; \varepsilon V_2,\\
\\
V_6 \cdot V_6 &= (-\phi_2 W) \cdot (-\phi_2 W) \overset{(iv)}{=} -\varepsilon_{Y_0} g(\phi_2 W, \phi_2 W) Y_0 \;=\; -\varepsilon_{Y_0}\varepsilon_W Y_0 \;=\; -\varepsilon Y_0 \;=\; -\varepsilon V_0,\\
V_6 \cdot V_7 &= (-\phi_2 W) \cdot \phi_1\phi_2 W \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_2 W \cdot \phi_2 W) \;=\; \phi_1(V_6 \cdot V_6) \;=\; -\varepsilon\phi_1 Y_0 \;=\; -\varepsilon V_1,\\
\\
V_7 \cdot V_7 &= \phi_1\phi_2 W \cdot \phi_1\phi_2 W \overset{(iv)}{=} -\varepsilon_{Y_0} g(\phi_1\phi_2 W, \phi_1\phi_2 W) Y_0 \;=\; -\varepsilon_{Y_0}\varepsilon_W Y_0 \;=\; -\varepsilon Y_0 \;=\; -\varepsilon V_0.
\end{aligned}
$$

En la segunda parte de la demostración analizamos el caso en que el autovalor λ tiene multiplicidad $\tau = 15$. Elegimos los campos $V_0, V_1, \ldots, V_7$ igual que en el caso anterior. Como la signatura de la métrica es $(16, 16)$, podemos suponer que tanto Y_0 como W son espaciales. Ahora, si T es cualquier campo de vectores unitario en $\langle\{V_0, V_1, \ldots, V_7\}\rangle^\perp$ (necesariamente temporal), tomamos $V_{8+i} = T \cdot V_i$, $i = 0, 1, \ldots, 7$, es decir,

$$
\begin{aligned}
V_8 &= T \cdot V_0 \;=\; T \cdot Y_0 \overset{(i)}{=} T,\\
V_9 &= T \cdot V_1 \;=\; T \cdot \phi_1 Y_0 \overset{(iii)}{=} -\phi_1 T,\\
V_{10} &= T \cdot V_2 \;=\; T \cdot \phi_2 Y_0 \overset{(iii)}{=} -\phi_2 T,\\
V_{11} &= T \cdot V_3 \;=\; T \cdot \phi_1\phi_2 Y_0 \overset{(iii)}{=} -\phi_1(T \cdot \phi_2 Y_0) \overset{(iii)}{=} \phi_1\phi_2 T,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{12} &= T \cdot V_4 = T \cdot W, \\
V_{13} &= T \cdot V_5 = T \cdot (-\phi_1 W) \overset{(iii)}{=} \phi_1(T \cdot W), \\
V_{14} &= T \cdot V_6 = T \cdot (-\phi_2 W) \overset{(iii)}{=} \phi_2(T \cdot W), \\
V_{15} &= T \cdot V_7 = T \cdot \phi_1\phi_2 W \overset{(iii)}{=} -\phi_1(T \cdot \phi_2 W) \overset{(iii)}{=} \phi_1\phi_2(T \cdot W).
\end{aligned}
$$

Nótese que $V_{12} = T \cdot W$ es un campo de vectores temporal unitario, pues

$$
g(T \cdot W, T \cdot W) \overset{(vii)}{=} -g(W, T \cdot (T \cdot W)) \overset{(vi)}{=} -g(W, T^2 \cdot W) \overset{(iv)}{=} \varepsilon_{Y_0}\varepsilon_W\varepsilon_T = -1.
$$

Además, la propiedad (vii) también permite comprobar fácilmente que $V_{12} = T \cdot W$ es ortogonal a $\{V_0, V_1, \dots, V_{11}\}$. Por tanto, se sigue que $\{V_i;\ i = 0, 1, \dots, 15\}$ es una base ortonormal.

En lo que sigue nos ocupamos de probar que la anterior es una base estándar, para lo cual mostraremos que la tabla del producto definido en (3.5.1) para esa base es la dada por:

	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}
V_0	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}
V_1	V_1	$-V_0$	V_3	$-V_2$	$-V_5$	V_4	$-V_7$	V_6	$-V_9$	V_8	$-V_{11}$	V_{10}	V_{13}	$-V_{12}$	V_{15}	$-V_{14}$
V_2	V_2	$-V_3$	$-V_0$	V_1	$-V_6$	V_7	V_4	$-V_5$	$-V_{10}$	V_{11}	V_8	$-V_9$	V_{14}	$-V_{15}$	$-V_{12}$	V_{13}
V_3	V_3	V_2	$-V_1$	$-V_0$	$-V_7$	$-V_6$	V_5	V_4	$-V_{11}$	$-V_{10}$	V_9	V_8	$-V_{15}$	$-V_{14}$	V_{13}	V_{12}
V_4	V_4	V_5	V_6	V_7	$-V_0$	$-V_1$	$-V_2$	$-V_3$	$-V_{12}$	$-V_{13}$	$-V_{14}$	$-V_{15}$	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}
V_5	V_5	$-V_4$	$-V_7$	V_6	V_1	$-V_0$	$-V_3$	V_2	$-V_{13}$	V_{12}	V_{15}	$-V_{14}$	$-V_9$	V_8	V_{11}	$-V_{10}$
V_6	V_6	V_7	$-V_4$	$-V_5$	V_2	V_3	$-V_0$	$-V_1$	$-V_{14}$	$-V_{15}$	V_{12}	V_{13}	$-V_{10}$	$-V_{11}$	V_8	V_9
V_7	V_7	$-V_6$	V_5	$-V_4$	V_3	$-V_2$	V_1	$-V_0$	$-V_{15}$	V_{14}	$-V_{13}$	V_{12}	V_{11}	$-V_{10}$	V_9	$-V_8$
V_8	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
V_9	V_9	$-V_8$	$-V_{11}$	V_{10}	V_{13}	$-V_{12}$	V_{15}	$-V_{14}$	$-V_1$	V_0	V_3	$-V_2$	$-V_5$	V_4	V_7	$-V_6$
V_{10}	V_{10}	V_{11}	$-V_8$	$-V_9$	V_{14}	$-V_{15}$	$-V_{12}$	V_{13}	$-V_2$	$-V_3$	V_0	V_1	$-V_6$	$-V_7$	V_4	V_5
V_{11}	V_{11}	$-V_{10}$	V_9	$-V_8$	V_{15}	V_{14}	$-V_{13}$	$-V_{12}$	$-V_3$	V_2	$-V_1$	V_0	V_7	$-V_6$	V_5	$-V_4$
V_{12}	V_{12}	$-V_{13}$	$-V_{14}$	V_{15}	$-V_8$	V_9	V_{10}	$-V_{11}$	$-V_4$	V_5	V_6	$-V_7$	V_0	$-V_1$	$-V_2$	V_3
V_{13}	V_{13}	V_{12}	V_{15}	V_{14}	$-V_9$	$-V_8$	V_{11}	V_{10}	$-V_5$	$-V_4$	V_7	V_6	V_1	V_0	V_3	V_2
V_{14}	V_{14}	$-V_{15}$	V_{12}	$-V_{13}$	$-V_{10}$	$-V_{11}$	$-V_8$	$-V_9$	$-V_6$	$-V_7$	$-V_4$	$-V_5$	V_2	$-V_3$	V_0	$-V_1$
V_{15}	V_{15}	V_{14}	$-V_{13}$	$-V_{12}$	$-V_{11}$	V_{10}	$-V_9$	V_8	$-V_7$	V_6	$-V_5$	V_4	$-V_3$	$-V_2$	V_1	V_0

Tabla 3.3: Base estándar para $\tau = 15$

Comprobamos a continuación los resultados de la tabla anterior. Nótese que, como en el caso $\tau = 7$, si i, j son índices distintos en $\{1, \dots, 15\}$, entonces $V_i \cdot V_j = -V_j \cdot V_i$. Además, teniendo en cuenta que $V_0, \dots, V_7$ coinciden con los campos elegidos en el caso $\tau = 7$ y que las propiedades del Lema 3.5.1 no dependen de la multiplicidad del autovalor λ, se sigue que los productos $V_i \cdot V_j$, para $i, j \in \{0, 1, \dots, 7\}$ coinciden con los dados en la Tabla 3.2. Nos limitaremos, por tanto, a comprobar los productos restantes.

$$\begin{aligned}
V_1 \cdot V_8 &= \phi_1 Y_0 \cdot T \overset{(ii)}{=} \phi_1 T = -V_9,\\
V_1 \cdot V_9 &= \phi_1 Y_0 \cdot (-\phi_1 T) \overset{(ii)}{=} -\phi_1^2 T = T = V_8,\\
V_1 \cdot V_{10} &= \phi_1 Y_0 \cdot (-\phi_2 T) \overset{(ii)}{=} -\phi_1\phi_2 T = -V_{11},\\
V_1 \cdot V_{11} &= \phi_1 Y_0 \cdot \phi_1\phi_2 T \overset{(ii)}{=} \phi_1^2\phi_2 T = -\phi_2 T = V_{10},\\
V_1 \cdot V_{12} &= \phi_1 Y_0 \cdot (T \cdot W) \overset{(ii)}{=} \phi_1(T \cdot W) = V_{13},\\
V_1 \cdot V_{13} &= \phi_1 Y_0 \cdot \phi_1(T \cdot W) \overset{(ii)}{=} \phi_1^2(T \cdot W) = -T \cdot W = -V_{12},\\
V_1 \cdot V_{14} &= \phi_1 Y_0 \cdot \phi_2(T \cdot W) \overset{(ii)}{=} \phi_1\phi_2(T \cdot W) = V_{15},\\
V_1 \cdot V_{15} &= \phi_1 Y_0 \cdot \phi_1\phi_2(T \cdot W) \overset{(ii)}{=} \phi_1^2\phi_2(T \cdot W) = -\phi_2(T \cdot W) = -V_{14},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 \cdot V_8 &= \phi_2 Y_0 \cdot T \overset{(ii)}{=} \phi_2 T = -V_{10},\\
V_2 \cdot V_9 &= \phi_2 Y_0 \cdot (-\phi_1 T) \overset{(ii)}{=} -\phi_2\phi_1 T = \phi_1\phi_2 T = V_{11},\\
V_2 \cdot V_{10} &= \phi_2 Y_0 \cdot (-\phi_2 T) \overset{(ii)}{=} -\phi_2^2 T = T = V_8,\\
V_2 \cdot V_{11} &= \phi_2 Y_0 \cdot \phi_1\phi_2 T \overset{(ii)}{=} \phi_2\phi_1\phi_2 T = -\phi_2^2\phi_1 T = \phi_1 T = -V_9,\\
V_2 \cdot V_{12} &= \phi_2 Y_0 \cdot (T \cdot W) \overset{(ii)}{=} \phi_2(T \cdot W) = V_{14},\\
V_2 \cdot V_{13} &= \phi_2 Y_0 \cdot \phi_1(T \cdot W) \overset{(ii)}{=} \phi_2\phi_1(T \cdot W) = -\phi_1\phi_2(T \cdot W) = -V_{15},\\
V_2 \cdot V_{14} &= \phi_2 Y_0 \cdot \phi_2(T \cdot W) \overset{(ii)}{=} \phi_2^2(T \cdot W) = -T \cdot W = -V_{12},\\
V_2 \cdot V_{15} &= \phi_2 Y_0 \cdot \phi_1\phi_2(T \cdot W) \overset{(ii)}{=} \phi_2\phi_1\phi_2(T \cdot W) = -\phi_2^2\phi_1(T \cdot W) = \phi_1(T \cdot W) = V_{13},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_3 \cdot V_8 &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot T \overset{(v)}{=} -T \cdot \phi_1\phi_2 Y_0 \overset{(iii)}{=} \phi_1(T \cdot \phi_2 Y_0) \overset{(iii)}{=} -\phi_1\phi_2 T = -V_{11},\\
V_3 \cdot V_9 &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot (-\phi_1 T) \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_1\phi_2 Y_0 \cdot T) = \phi_1(V_3 \cdot V_8) = -\phi_1^2\phi_2 T = \phi_2 T = -V_{10},\\
V_3 \cdot V_{10} &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot (-\phi_2 T) \overset{(iii)}{=} \phi_2(\phi_1\phi_2 Y_0 \cdot T) = \phi_2(V_3 \cdot V_8) = -\phi_2\phi_1\phi_2 T = -\phi_1 T = V_9,\\
V_3 \cdot V_{11} &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot \phi_1\phi_2 T \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1\phi_2 Y_0 \cdot \phi_2 T) = \phi_1(V_3 \cdot V_{10}) = -\phi_1^2 T = T = V_8,\\
V_3 \cdot V_{12} &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot (T \cdot W) \overset{(v)}{=} -(T \cdot W) \cdot \phi_1\phi_2 Y_0 \overset{(iii)}{=} \phi_1((T \cdot W) \cdot \phi_2 Y_0) \overset{(iii)}{=} -\phi_1\phi_2(T \cdot W)\\
&= -V_{15},\\
V_3 \cdot V_{13} &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot \phi_1(T \cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1\phi_2 Y_0 \cdot (T \cdot W)) = -\phi_1(V_3 \cdot V_{12}) = \phi_1^2\phi_2(T \cdot W)\\
&= -\phi_2(T \cdot W) = -V_{14},\\
V_3 \cdot V_{14} &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot \phi_2(T \cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_2(\phi_1\phi_2 Y_0 \cdot (T \cdot W)) = -\phi_2(V_3 \cdot V_{12}) = \phi_2\phi_1\phi_2(T \cdot W)\\
&= -\phi_2^2\phi_1(T \cdot W) = \phi_1(T \cdot W) = V_{13},\\
V_3 \cdot V_{15} &= \phi_1\phi_2 Y_0 \cdot \phi_1\phi_2(T \cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1\phi_2 Y_0 \cdot \phi_2(T \cdot W)) = -\phi_1(V_3 \cdot V_{14}) = -\phi_1^2(T \cdot W)\\
&= T \cdot W = V_{12},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_4\cdot V_8 &= W\cdot T \overset{(v)}{=} -T\cdot W = -V_{12},\\
V_4\cdot V_9 &= W\cdot(-\phi_1 T) \overset{(iii)}{=} \phi_1(W\cdot T) \overset{(v)}{=} -\phi_1(T\cdot W) = -V_{13},\\
V_4\cdot V_{10} &= W\cdot(-\phi_2 T) \overset{(iii)}{=} \phi_2(W\cdot T) \overset{(v)}{=} -\phi_2(T\cdot W) = -V_{14},\\
V_4\cdot V_{11} &= W\cdot\phi_1\phi_2 T \overset{(iii)}{=} -\phi_1(W\cdot\phi_2 T) \overset{(iii)}{=} \phi_1\phi_2(W\cdot T) \overset{(v)}{=} -\phi_1\phi_2(T\cdot W) = -V_{15},\\
V_4\cdot V_{12} &= W\cdot(T\cdot W) \overset{(v)}{=} -W\cdot(W\cdot T) \overset{(vi)}{=} -W^2\cdot T \overset{(iv)}{=} T = V_8,\\
V_4\cdot V_{13} &= W\cdot\phi_1(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(W\cdot(T\cdot W)) = -\phi_1(V_4\cdot V_{12}) = -\phi_1 T = V_9,\\
V_4\cdot V_{14} &= W\cdot\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_2(W\cdot(T\cdot W)) = -\phi_2(V_4\cdot V_{12}) = -\phi_2 T = V_{10},\\
V_4\cdot V_{15} &= W\cdot\phi_1\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(W\cdot\phi_2(T\cdot W)) = -\phi_1(V_4\cdot V_{14}) = \phi_1\phi_2 T = V_{11},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_5\cdot V_8 &= (-\phi_1 W)\cdot T \overset{(v)}{=} T\cdot\phi_1 W \overset{(iii)}{=} -\phi_1(T\cdot W) = -V_{13},\\
V_5\cdot V_9 &= (-\phi_1 W)\cdot(-\phi_1 T) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1 W\cdot T) = \phi_1(V_5\cdot V_8) = -\phi_1^2(T\cdot W) = T\cdot W = V_{12},\\
V_5\cdot V_{10} &= (-\phi_1 W)\cdot(-\phi_2 T) \overset{(iii)}{=} -\phi_2(\phi_1 W\cdot T) = \phi_2(V_5\cdot V_8) = -\phi_2\phi_1(T\cdot W) = \phi_1\phi_2(T\cdot W)\\
&= V_{15},\\
V_5\cdot V_{11} &= (-\phi_1 W)\cdot\phi_1\phi_2 T \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_1 W\cdot\phi_2 T) = \phi_1(V_5\cdot V_{10}) = \phi_1^2\phi_2(T\cdot W) = -\phi_2(T\cdot W)\\
&= -V_{14},\\
V_5\cdot V_{12} &= (-\phi_1 W)\cdot(T\cdot W) \overset{(v)}{=} (T\cdot W)\cdot\phi_1 W \overset{(iii)}{=} -\phi_1((T\cdot W)\cdot W) \overset{(v)}{=} \phi_1(W\cdot(T\cdot W))\\
&= \phi_1(V_4\cdot V_{12}) = \phi_1 T = -V_9,\\
V_5\cdot V_{13} &= (-\phi_1 W)\cdot\phi_1(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_1 W\cdot(T\cdot W)) = -\phi_1(V_5\cdot V_{12}) = -\phi_1^2 T = T = V_8,\\
V_5\cdot V_{14} &= (-\phi_1 W)\cdot\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} \phi_2(\phi_1 W\cdot(T\cdot W)) = -\phi_2(V_5\cdot V_{12}) = -\phi_2\phi_1 T = \phi_1\phi_2 T\\
&= V_{11},\\
V_5\cdot V_{15} &= (-\phi_1 W)\cdot\phi_1\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_1 W\cdot\phi_2(T\cdot W)) = -\phi_1(V_5\cdot V_{14}) = -\phi_1^2\phi_2 T\\
&= \phi_2 T = -V_{10},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_6\cdot V_8 &= (-\phi_2 W)\cdot T \overset{(v)}{=} T\cdot\phi_2 W \overset{(iii)}{=} -\phi_2(T\cdot W) = -V_{14},\\
V_6\cdot V_9 &= (-\phi_2 W)\cdot(-\phi_1 T) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_2 W\cdot T) = \phi_1(V_6\cdot V_8) = -\phi_1\phi_2(T\cdot W) = -V_{15},\\
V_6\cdot V_{10} &= (-\phi_2 W)\cdot(-\phi_2 T) \overset{(iii)}{=} -\phi_2(\phi_2 W\cdot T) = \phi_2(V_6\cdot V_8) = -\phi_2^2(T\cdot W) = T\cdot W = V_{12},\\
V_6\cdot V_{11} &= (-\phi_2 W)\cdot\phi_1\phi_2 T \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_2 W\cdot\phi_2 T) = \phi_1(V_6\cdot V_{10}) = \phi_1(T\cdot W) = V_{13},\\
V_6\cdot V_{12} &= (-\phi_2 W)\cdot(T\cdot W) \overset{(v)}{=} (T\cdot W)\cdot\phi_2 W \overset{(iii)}{=} -\phi_2((T\cdot W)\cdot W) \overset{(v)}{=} \phi_2(W\cdot(T\cdot W))\\
&= \phi_2(V_4\cdot V_{12}) = \phi_2 T = -V_{10},\\
V_6\cdot V_{13} &= (-\phi_2 W)\cdot\phi_1(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_2 W\cdot(T\cdot W)) = -\phi_1(V_6\cdot V_{12}) = -\phi_1\phi_2 T = -V_{11},\\
V_6\cdot V_{14} &= (-\phi_2 W)\cdot\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} \phi_2(\phi_2 W\cdot(T\cdot W)) = -\phi_2(V_6\cdot V_{12}) = -\phi_2^2 T = T = V_8,\\
V_6\cdot V_{15} &= (-\phi_2 W)\cdot\phi_1\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_2 W\cdot\phi_2(T\cdot W)) = -\phi_1(V_6\cdot V_{14}) = -\phi_1 T = V_9,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_7\cdot V_8 &= \phi_1\phi_2 W\cdot T \overset{(v)}{=} -T\cdot\phi_1\phi_2 W \overset{(iii)}{=} \phi_1(T\cdot\phi_2 W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1\phi_2(T\cdot W) = -V_{15},\\
V_7\cdot V_9 &= \phi_1\phi_2 W\cdot(-\phi_1 T) \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_1\phi_2 W\cdot T) = \phi_1(V_7\cdot V_8) = -\phi_1^2\phi_2(T\cdot W) = \phi_2(T\cdot W)\\
&= V_{14},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
V_7 \cdot V_{10} &= \phi_1\phi_2 W \cdot (-\phi_2 T) \overset{(iii)}{=} \phi_2(\phi_1\phi_2 W \cdot T) = \phi_2(V_7 \cdot V_8) = -\phi_2\phi_1\phi_2(T \cdot W) \\
&= \phi_2^2\phi_1(T \cdot W) = -\phi_1(T \cdot W) = -V_{13}, \\
V_7 \cdot V_{11} &= \phi_1\phi_2 W \cdot \phi_1\phi_2 T \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1\phi_2 W \cdot \phi_2 T) = \phi_1(V_7 \cdot V_{10}) = -\phi_1^2(T \cdot W) = T \cdot W \\
&= V_{12}, \\
V_7 \cdot V_{12} &= \phi_1\phi_2 W \cdot (T \cdot W) \overset{(v)}{=} -(T \cdot W) \cdot \phi_1\phi_2 W \overset{(iii)}{=} \phi_1((T \cdot W) \cdot \phi_2 W) \\
&\overset{(v)}{=} -\phi_1(\phi_2 W \cdot (T \cdot W)) = \phi_1(V_6 \cdot V_{12}) = \phi_1\phi_2 T = V_{11}, \\
V_7 \cdot V_{13} &= \phi_1\phi_2 W \cdot \phi_1(T \cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1\phi_2 W \cdot (T \cdot W)) = -\phi_1(V_7 \cdot V_{12}) = -\phi_1^2\phi_2 T \\
&= \phi_2 T = -V_{10}, \\
V_7 \cdot V_{14} &= \phi_1\phi_2 W \cdot \phi_2(T \cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_2(\phi_1\phi_2 W \cdot (T \cdot W)) = -\phi_2(V_7 \cdot V_{12}) = -\phi_2\phi_1\phi_2 T \\
&= \phi_2^2\phi_1 T = -\phi_1 T = V_9, \\
V_7 \cdot V_{15} &= \phi_1\phi_2 W \cdot \phi_1\phi_2(T \cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1\phi_2 W \cdot \phi_2(T \cdot W)) = -\phi_1(V_7 \cdot V_{14}) = \phi_1^2 T \\
&= -T = -V_8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_8 \cdot V_8 &= T \cdot T \overset{(iv)}{=} Y_0 = V_0, \\
V_8 \cdot V_9 &= T \cdot (-\phi_1 T) \overset{(iii)}{=} \phi_1(T \cdot T) = \phi_1(V_8 \cdot V_8) = \phi_1 Y_0 = V_1, \\
V_8 \cdot V_{10} &= T \cdot (-\phi_2 T) \overset{(iii)}{=} \phi_2(T \cdot T) = \phi_2(V_8 \cdot V_8) = \phi_2 Y_0 = V_2, \\
V_8 \cdot V_{11} &= T \cdot \phi_1\phi_2 T \overset{(iii)}{=} -\phi_1(T \cdot \phi_2 T) = \phi_1(V_8 \cdot V_{10}) = \phi_1\phi_2 Y_0 = V_3, \\
V_8 \cdot V_{12} &= T \cdot (T \cdot W) \overset{(vi)}{=} T^2 \cdot W \overset{(iv)}{=} W = V_4, \\
V_8 \cdot V_{13} &= T \cdot \phi_1(T \cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(T \cdot (T \cdot W)) = -\phi_1(V_8 \cdot V_{12}) = -\phi_1 W = V_5, \\
V_8 \cdot V_{14} &= T \cdot \phi_2(T \cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_2(T \cdot (T \cdot W)) = -\phi_2(V_8 \cdot V_{12}) = -\phi_2 W = V_6, \\
V_8 \cdot V_{15} &= T \cdot \phi_1\phi_2(T \cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(T \cdot \phi_2(T \cdot W)) = -\phi_1(V_8 \cdot V_{14}) = \phi_1\phi_2 W = V_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_9 \cdot V_9 &= (-\phi_1 T) \cdot (-\phi_1 T) \overset{(iv)}{=} -\varepsilon_{Y_0} g(\phi_1 T, \phi_1 T) Y_0 = Y_0 = V_0, \\
V_9 \cdot V_{10} &= (-\phi_1 T) \cdot (-\phi_2 T) \overset{(iii)}{=} -\phi_2(\phi_1 T \cdot T) \overset{(v)}{=} \phi_2(T \cdot \phi_1 T) = -\phi_2(V_8 \cdot V_9) = -\phi_2\phi_1 Y_0 \\
&= \phi_1\phi_2 Y_0 = V_3, \\
V_9 \cdot V_{11} &= (-\phi_1 T) \cdot \phi_1\phi_2 T \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_1 T \cdot \phi_2 T) = \phi_1(V_9 \cdot V_{10}) = \phi_1^2\phi_2 Y_0 = -\phi_2 Y_0 = -V_2, \\
V_9 \cdot V_{12} &= (-\phi_1 T) \cdot (T \cdot W) \overset{(v)}{=} (T \cdot W) \cdot \phi_1 T \overset{(iii)}{=} -\phi_1((T \cdot W) \cdot T) \overset{(v)}{=} \phi_1(T \cdot (T \cdot W)) \\
&= \phi_1(V_8 \cdot V_{12}) = \phi_1 W = -V_5, \\
V_9 \cdot V_{13} &= (-\phi_1 T) \cdot \phi_1(T \cdot W) \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_1 T \cdot (T \cdot W)) = -\phi_1(V_9 \cdot V_{12}) = -\phi_1^2 W = W = V_4, \\
V_9 \cdot V_{14} &= (-\phi_1 T) \cdot \phi_2(T \cdot W) \overset{(iii)}{=} \phi_2(\phi_1 T \cdot (T \cdot W)) = -\phi_2(V_9 \cdot V_{12}) = -\phi_2\phi_1 W = \phi_1\phi_2 W \\
&= V_7, \\
V_9 \cdot V_{15} &= (-\phi_1 T) \cdot \phi_1\phi_2(T \cdot W) \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_1 T \cdot \phi_2(T \cdot W)) = -\phi_1(V_9 \cdot V_{14}) = -\phi_1^2\phi_2 W \\
&= \phi_2 W = -V_6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10} \cdot V_{10} &= (-\phi_2 T) \cdot (-\phi_2 T) \overset{(iv)}{=} -\varepsilon_{Y_0} g(\phi_2 T, \phi_2 T) Y_0 = -\varepsilon_{Y_0}\varepsilon_T Y_0 = Y_0 = V_0, \\
V_{10} \cdot V_{11} &= (-\phi_2 T) \cdot \phi_1\phi_2 T \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_2 T \cdot \phi_2 T) = \phi_1(V_{10} \cdot V_{10}) = \phi_1 Y_0 = V_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{10}\cdot V_{12} &= (-\phi_2 T)\cdot(T\cdot W) \overset{(v)}{=} (T\cdot W)\cdot\phi_2 T \overset{(iii)}{=} -\phi_2((T\cdot W)\cdot T) \overset{(v)}{=} \phi_2(T\cdot(T\cdot W))\\
&= \phi_2(V_8\cdot V_{12}) = \phi_2 W = -V_6,\\
V_{10}\cdot V_{13} &= (-\phi_2 T)\cdot\phi_1(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_2 T\cdot(T\cdot W)) = -\phi_1(V_{10}\cdot V_{12}) = -\phi_1\phi_2 W = -V_7,\\
V_{10}\cdot V_{14} &= (-\phi_2 T)\cdot\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} \phi_2(\phi_2 T\cdot(T\cdot W)) = -\phi_2(V_{10}\cdot V_{12}) = -\phi_2^2 W = W = V_4,\\
V_{10}\cdot V_{15} &= (-\phi_2 T)\cdot\phi_1\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} \phi_1(\phi_2 T\cdot\phi_2(T\cdot W)) = -\phi_1(V_{10}\cdot V_{14}) = -\phi_1 W = V_5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{11}\cdot V_{11} &= \phi_1\phi_2 T\cdot\phi_1\phi_2 T \overset{(iv)}{=} -\varepsilon_{Y_0} g(\phi_1\phi_2 T,\phi_1\phi_2 T)Y_0 = -\varepsilon_{Y_0}\varepsilon_T Y_0 = Y_0 = V_0,\\
V_{11}\cdot V_{12} &= \phi_1\phi_2 T\cdot(T\cdot W) \overset{(v)}{=} -(T\cdot W)\cdot\phi_1\phi_2 T \overset{(iii)}{=} \phi_1((T\cdot W)\cdot\phi_2 T) \overset{(v)}{=} -\phi_1(\phi_2 T\cdot(T\cdot W))\\
&= \phi_1(V_{10}\cdot V_{12}) = \phi_1\phi_2 W = V_7,\\
V_{11}\cdot V_{13} &= \phi_1\phi_2 T\cdot\phi_1(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1\phi_2 T\cdot(T\cdot W)) = -\phi_1(V_{11}\cdot V_{12}) = -\phi_1^2\phi_2 W\\
&= \phi_2 W = -V_6,\\
V_{11}\cdot V_{14} &= \phi_1\phi_2 T\cdot\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_2(\phi_1\phi_2 T\cdot(T\cdot W)) = -\phi_2(V_{11}\cdot V_{12}) = -\phi_2\phi_1\phi_2 W\\
&= \phi_2^2\phi_1 W = -\phi_1 W = V_5,\\
V_{11}\cdot V_{15} &= \phi_1\phi_2 T\cdot\phi_1\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1\phi_2 T\cdot\phi_2(T\cdot W)) = -\phi_1(V_{11}\cdot V_{14}) = \phi_1^2 W\\
&= -W = -V_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{12}\cdot V_{12} &= (T\cdot W)\cdot(T\cdot W) \overset{(iv)}{=} -\varepsilon_{Y_0} g(T\cdot W, T\cdot W)Y_0 \overset{(vii)}{=} \varepsilon_{Y_0} g(W, T\cdot(T\cdot W))Y_0\\
&\overset{(vi)}{=} \varepsilon_{Y_0} g(W, T^2\cdot W)Y_0 \overset{(iv)}{=} -\varepsilon_W\varepsilon_T Y_0 = Y_0 = V_0,\\
V_{12}\cdot V_{13} &= (T\cdot W)\cdot\phi_1(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1((T\cdot W)\cdot(T\cdot W)) = -\phi_1(V_{12}\cdot V_{12}) = -\phi_1 Y_0 = -V_1,\\
V_{12}\cdot V_{14} &= (T\cdot W)\cdot\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_2((T\cdot W)\cdot(T\cdot W)) = -\phi_2(V_{12}\cdot V_{12}) = -\phi_2 Y_0 = -V_2,\\
V_{12}\cdot V_{15} &= (T\cdot W)\cdot\phi_1\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1((T\cdot W)\cdot\phi_2(T\cdot W)) = -\phi_1(V_{12}\cdot V_{14}) = \phi_1\phi_2 Y_0 = V_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{13}\cdot V_{13} &= \phi_1(T\cdot W)\cdot\phi_1(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1(T\cdot W)\cdot(T\cdot W)) \overset{(v)}{=} \phi_1((T\cdot W)\cdot\phi_1(T\cdot W))\\
&= \phi_1(V_{12}\cdot V_{13}) = -\phi_1^2 Y_0 = Y_0 = V_0,\\
V_{13}\cdot V_{14} &= \phi_1(T\cdot W)\cdot\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_2(\phi_1(T\cdot W)\cdot(T\cdot W)) \overset{(v)}{=} \phi_2((T\cdot W)\cdot\phi_1(T\cdot W))\\
&= \phi_2(V_{12}\cdot V_{13}) = -\phi_2\phi_1 Y_0 = \phi_1\phi_2 Y_0 = V_3,\\
V_{13}\cdot V_{15} &= \phi_1(T\cdot W)\cdot\phi_1\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1(T\cdot W)\cdot\phi_2(T\cdot W)) = -\phi_1(V_{13}\cdot V_{14})\\
&= -\phi_1^2\phi_2 Y_0 = \phi_2 Y_0 = V_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{14}\cdot V_{14} &= \phi_2(T\cdot W)\cdot\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_2(\phi_2(T\cdot W)\cdot(T\cdot W)) \overset{(v)}{=} \phi_2((T\cdot W)\cdot\phi_2(T\cdot W))\\
&= \phi_2(V_{12}\cdot V_{14}) = -\phi_2^2 Y_0 = Y_0 = V_0,\\
V_{14}\cdot V_{15} &= \phi_2(T\cdot W)\cdot\phi_1\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_2(T\cdot W)\cdot\phi_2(T\cdot W)) = -\phi_1(V_{14}\cdot V_{14})\\
&= -\phi_1 Y_0 = -V_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{15}\cdot V_{15} &= \phi_1\phi_2(T\cdot W)\cdot\phi_1\phi_2(T\cdot W) \overset{(iii)}{=} -\phi_1(\phi_1\phi_2(T\cdot W)\cdot\phi_2(T\cdot W))\\
&\overset{(v)}{=} \phi_1(\phi_2(T\cdot W)\cdot\phi_1\phi_2(T\cdot W)) = \phi_1(V_{14}\cdot V_{15}) = -\phi_1^2 Y_0 = Y_0 = V_0. \qquad \square
\end{aligned}$$

La existencia de una base estándar para el producto definido en (3.5.1), demostrada en el resultado anterior, será fundamental para probar que una variedad semi–Riemanniana de Osserman especial en la cual la multiplicidad del autovalor distinguido λ es $\tau = 7$ ó $\tau = 15$ debe ser localmente simétrica.

En primer lugar mostraremos que la condición $V_\alpha \cdot V_\beta = V_{\alpha\beta}$ que caracteriza a los elementos de una base estándar se ve reflejada en una condición análoga sobre la composición de los campos de tensores ϕ_i evaluada en Y_0. Más concretamente, se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.5.3 *Sea (M, g) una variedad de Osserman especial y supongamos que el autovalor distinguido λ tiene multiplicidad $\tau = 7$ ó $\tau = 15$. Para cada punto $p \in M$ existe un entorno $\mathcal{U}_p$ de p tal que si X_0 e Y_0 son campos de vectores unitarios en $\mathcal{U}_p$, con $Y_0 \in E_\lambda(X_0)^\perp$, entonces podemos elegir una base ortonormal $\{X_1, \dots, X_\tau\}$ para $Ker(R_{X_0} - \lambda\varepsilon_{X_0} Id)$, de tal forma que los campos de tensores $\phi_1, \dots, \phi_\tau$ asociados satisfacen*

$$\phi_\alpha \phi_\beta Y_0 = \phi_{\alpha\beta} Y_0,$$

para $\alpha, \beta \in \{0, 1, \dots, \tau\}$ (donde $\phi_0 = Id$ y $\phi_{-\alpha} = -\phi_\alpha$).

Demostración. Sea $\{X_1, \dots, X_\tau\}$ cualquier base ortonormal de $Ker(R_{X_0} - \lambda\varepsilon_{X_0} Id)$ y consideremos los campos de tensores ϕ_i asociados. Además, sea $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_\tau\}$ la base de $E_\lambda(Y_0)$ determinada por $Y_i = \phi_i Y_0$, $i = 1, \dots, \tau$. (Podemos suponer, además, que $\varepsilon_{X_i} = \varepsilon_{Y_i}$, $i = 0, 1, \dots, \tau$).

Por el Lema 3.5.2 podemos considerar una base estándar $\{V_0 = Y_0, V_1, \dots, V_\tau\}$ para el producto (3.5.1) definido en $E_\lambda(Y_0)$, es decir, una base ortonormal de este subespacio tal que $V_\alpha \cdot V_\beta = V_{\alpha\beta}$.

Escribiendo $V_i = \sum_{j=1}^{\tau} a_{ij} Y_j$, $i = 1, \dots, \tau$, definimos los siguientes elementos en $E_\lambda(X_0)$:

$$\begin{cases} \overline{X}_0 = X_0, \\ \\ \overline{X}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{\tau} a_{ij} X_j, \quad i = 1, \dots, \tau, \end{cases}$$

que determinan una base ortonormal de $E_\lambda(X_0)$.

En lo que sigue mostraremos que $\{\overline{X}_0, \overline{X}_1, \dots, \overline{X}_\tau\}$ es la base buscada. Denotemos por $\overline{\phi}_1, \dots, \overline{\phi}_\tau$ los campos de tensores asociados a esa base. En primer lugar nótese que si $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$ entonces la igualdad $\overline{\phi}_\alpha \overline{\phi}_\beta Y_0 = \overline{\phi}_{\alpha\beta} Y_0$ es trivial. En otro caso, se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}_\alpha \overline{\phi}_\beta Y_0 &= \left\{ \frac{3}{2(\lambda-\mu)} \right\}^2 R(\overline{X}_0, \overline{X}_\alpha) R(\overline{X}_0, \overline{X}_\beta) Y_0 \\
&= \left\{ \frac{3}{2(\lambda-\mu)} \right\}^2 R\left(X_0, \sum_{r=1}^{\tau} a_{\alpha r} X_r \right) R\left(X_0, \sum_{s=1}^{\tau} a_{\beta s} X_s \right) Y_0 \\
&= \left\{ \frac{3}{2(\lambda-\mu)} \right\}^2 \sum_{r,s=1}^{\tau} a_{\alpha r} a_{\beta s} R(X_0, X_r) R(X_0, X_s) Y_0 \\
&= \left\{ \frac{3}{2(\lambda-\mu)} \right\}^2 \sum_{r,s=1}^{\tau} a_{\alpha r} a_{\beta s} R(X_0, X_r) \left(\frac{2(\lambda-\mu)}{3} \phi_s Y_0 \right) \\
&= \frac{3}{2(\lambda-\mu)} \sum_{r,s=1}^{\tau} a_{\alpha r} a_{\beta s} R(X_0, X_r) \phi_s Y_0 \\
&= \frac{3}{2(\lambda-\mu)} \sum_{r,s=1}^{\tau} a_{\alpha r} a_{\beta s} \frac{2(\lambda-\mu)}{3} \phi_r \phi_s Y_0 \\
&= \sum_{r,s=1}^{\tau} a_{\alpha r} a_{\beta s} (Y_r \cdot Y_s) \\
&= V_\alpha \cdot V_\beta,
\end{aligned}$$

y, por otra parte, si $\alpha \cdot \beta \neq 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\overline{\phi}_{\alpha\beta} Y_0 &= \frac{3}{2(\lambda-\mu)} R(\overline{X}_0, \overline{X}_{\alpha\beta}) Y_0 \\
&= \frac{3}{2(\lambda-\mu)} R\left(X_0, \sum_{t=1}^{\tau} a_{(\alpha\beta)t} X_t \right) Y_0 \\
&= \frac{3}{2(\lambda-\mu)} \sum_{t=1}^{\tau} a_{(\alpha\beta)t} R(X_0, X_t) Y_0 \\
&= \frac{3}{2(\lambda-\mu)} \sum_{t=1}^{\tau} a_{(\alpha\beta)t} \frac{2(\lambda-\mu)}{3} \phi_t Y_0 \\
&= \sum_{t=1}^{\tau} a_{(\alpha\beta)t} Y_t \\
&= V_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Así, el resultado se sigue de las dos expresiones anteriores teniendo en cuenta la condición $V_\alpha \cdot V_\beta = V_{\alpha\beta}$. □

Teorema 3.5.1 *Sea (M, g) una variedad de Osserman especial y supongamos que la multiplicidad del autovalor distinguido λ es $\tau = 7$ ó $\tau = 15$. Entonces, la variedad es localmente simétrica.*

Demostración. Dado cualquier campo de vectores unitario X_0 sobre la variedad mostraremos que $\nabla_{X_0} R_{X_0} = 0$. Si Y_0 es un campo de vectores unitario ortogonal a $E_\lambda(X_0)$, consideramos la base ortonormal $\{X_1, \ldots, X_\tau\}$ para el autoespacio $Ker(R_{X_0} - \lambda\varepsilon_{X_0} Id)$ dada por el Lema 3.5.3, de tal forma que $\phi_\alpha\phi_\beta Y_0 = \phi_{\alpha\beta} Y_0$. Entonces, para probar que $\nabla_{X_0} R_{X_0} = 0$ será suficiente mostrar que $(\nabla_{X_0} R)(T, X_0, X_0, W) = 0$ para cualesquiera T, W elegidos en $\{X_0, X_1, \ldots, X_\tau, Y_0, Y_1, \ldots, Y_\tau\}$, donde $Y_i = \phi_i Y_0$, $i = 1, \ldots, \tau$.

En primer lugar, si T, $W \in E_\lambda(X_0)$ entonces

$$\begin{aligned}
&\nabla_{X_0}(R(T, X_0, X_0, W)) - R(\nabla_{X_0} T, X_0, X_0, W) - R(T, X_0, X_0, \nabla_{X_0} W)\\
&= \nabla_{X_0}(\lambda\varepsilon_{X_0} g(T, W)) - \lambda\varepsilon_{X_0} g(W, \nabla_{X_0} T) - \lambda\varepsilon_{X_0} g(T, \nabla_{X_0} W)\\
&= \lambda\varepsilon_{X_0}(\nabla_{X_0} g)(T, W)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

de forma que $(\nabla_{X_0} R)(T, X_0, X_0, W) = -R(T, \nabla_{X_0} X_0, X_0, W) - R(T, X_0, \nabla_{X_0} X_0, W)$. Por tanto, si $T \neq W$ esta expresión se anula. En el caso de ser $T = W$ se sigue que

$$\begin{aligned}
(\nabla_{X_0} R)(W, X_0, X_0, W) &= -R(W, \nabla_{X_0} X_0, X_0, W) - R(W, X_0, \nabla_{X_0} X_0, W)\\
&= -2R(X_0, W, W, \nabla_{X_0} X_0)\\
&= -2\lambda\varepsilon_W g(X_0, \nabla_{X_0} X_0)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si T, $W \in E_\lambda(Y_0)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\nabla_{X_0}(R(T, X_0, X_0, W)) - R(\nabla_{X_0} T, X_0, X_0, W) - R(T, X_0, X_0, \nabla_{X_0} W)\\
&= \nabla_{X_0}(\mu\varepsilon_{X_0} g(T, W)) - \mu\varepsilon_{X_0} g(W, \nabla_{X_0} T) - \mu\varepsilon_{X_0} g(T, \nabla_{X_0} W)\\
&= \mu\varepsilon_{X_0}(\nabla_{X_0} g)(T, W)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

de forma que $(\nabla_{X_0} R)(T, X_0, X_0, W) = -R(T, \nabla_{X_0} X_0, X_0, W) - R(T, X_0, \nabla_{X_0} X_0, W)$. Así, si $T \neq W$ se sigue que

$$\begin{aligned}
(\nabla_{X_0} R)(T, X_0, X_0, W) &= -R(X_0, W, T, \nabla_{X_0} X_0) - R(X_0, T, W, \nabla_{X_0} X_0)\\
&= -R(X_0, W, T, \nabla_{X_0} X_0) + R(X_0, W, T, \nabla_{X_0} X_0)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

y para $T = W$ se obtiene

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_0}R)(W,X_0,X_0,W) &= -R(W,\nabla_{X_0}X_0,X_0,W) - R(W,X_0,\nabla_{X_0}X_0,W)\\ &= -2R(X_0,W,W,\nabla_{X_0}X_0)\\ &= -2\mu\varepsilon_W g(X_0,\nabla_{X_0}X_0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Para finalizar la demostración analizamos el caso en que $T = X_i$, $W = Y_j$. En este caso, si ξ es cualquier campo de vectores se tiene que

$$\begin{aligned}\nabla_\xi(R(X_i,X_0,X_0,Y_j)) &= 0,\\ R(\nabla_\xi X_i,X_0,X_0,Y_j) &= R(Y_j,X_0,X_0,\nabla_\xi X_i) = \mu\varepsilon_{X_0}g(Y_j,\nabla_\xi X_i),\\ R(X_i,X_0,X_0,\nabla_\xi Y_j) &= \lambda\varepsilon_{X_0}g(X_i,\nabla_\xi Y_j) = -\lambda\varepsilon_{X_0}g(Y_j,\nabla_\xi X_i),\\ R(X_i,\nabla_\xi X_0,X_0,Y_j) &= -R(Y_j,X_0,X_i,\nabla_\xi X_0) = \frac{1}{2}R(X_0,X_i,Y_j,\nabla_\xi X_0),\\ R(X_i,X_0,\nabla_\xi X_0,Y_j) &= R(X_0,X_i,Y_j,\nabla_\xi X_0),\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi R)(X_i,X_0,X_0,Y_j) &= (\lambda-\mu)\varepsilon_{X_0}g(Y_j,\nabla_\xi X_i) - \frac{3}{2}R(X_0,X_i,Y_j,\nabla_\xi X_0)\\ &= (\lambda-\mu)\varepsilon_{X_0}g(Y_j,\nabla_\xi X_i) - \frac{3}{2}g\left(\frac{2}{3}(\lambda-\mu)\phi_i Y_j,\nabla_\xi X_0\right),\end{aligned}$$

es decir,

$$(\nabla_\xi R)(X_i,X_0,X_0,Y_j) = (\lambda-\mu)\left\{\varepsilon_{X_0}g(Y_j,\nabla_\xi X_i) - g(Y_{ij},\nabla_\xi X_0)\right\}. \tag{3.5.2}$$

Además,

$$\begin{aligned}\nabla_\xi(R(Y_{ij},Y_j,Y_j,X_0)) &= 0,\\ R(\nabla_\xi Y_{ij},Y_j,Y_j,X_0) &= R(X_0,Y_j,Y_j,\nabla_\xi Y_{ij}) = \mu\varepsilon_{Y_j}g(X_0,\nabla_\xi Y_{ij})\\ &= -\mu\varepsilon_{Y_j}g(Y_{ij},\nabla_\xi X_0),\\ R(Y_{ij},Y_j,Y_j,\nabla_\xi X_0) &= \lambda\varepsilon_{Y_j}g(Y_{ij},\nabla_\xi X_0),\\ R(Y_{ij},\nabla_\xi Y_j,Y_j,X_0) &= -R(X_0,Y_j,Y_{ij},\nabla_\xi Y_j) = \frac{1}{2}R(Y_j,Y_{ij},X_0,\nabla_\xi Y_j),\\ R(Y_{ij},Y_j,\nabla_\xi Y_j,X_0) &= R(Y_j,Y_{ij},X_0,\nabla_\xi Y_j),\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$(3.5.3) \qquad (\nabla_\xi R)(Y_{ij}, Y_j, Y_j, X_0) = -(\lambda - \mu)\varepsilon_{Y_j} g(Y_{ij}, \nabla_\xi X_0) - \frac{3}{2} R(Y_j, Y_{ij}, X_0, \nabla_\xi Y_j).$$

Ahora, $R(Y_j, Y_{ij})X_0 = \sum_{k=0}^{\tau} R(Y_j, Y_{ij}, X_0, X_k)\varepsilon_{X_k} X_k$ y como

$$\begin{aligned} R(Y_j, Y_{ij}, X_0, X_k) &= R(X_0, X_k, Y_j, Y_{ij}) = \frac{2}{3}(\lambda - \mu) g(Y_{kj}, Y_{ij}) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq i, \\ \frac{2}{3}(\lambda - \mu) g(Y_{ij}, Y_{ij}), & \text{si } k = i, \end{cases} \end{aligned}$$

se tiene que $R(Y_j, Y_{ij})X_0 = \frac{2}{3}(\lambda - \mu)\varepsilon_{X_0}\varepsilon_{Y_j} X_i$ y, por tanto, (3.5.3) se transforma en

$$\begin{aligned} (\nabla_\xi R)(Y_{ij}, Y_j, Y_j, X_0) &= -(\lambda - \mu)\varepsilon_{Y_j} g(Y_{ij}, \nabla_\xi X_0) - (\lambda - \mu)\varepsilon_{X_0}\varepsilon_{Y_j} g(X_i, \nabla_\xi Y_j) \\ &= (\lambda - \mu)\varepsilon_{Y_j} \left\{ \varepsilon_{X_0} g(Y_j, \nabla_\xi X_i) - g(Y_{ij}, \nabla_\xi X_0) \right\}. \end{aligned}$$

Entonces, teniendo en cuenta (3.5.2) y esta última expresión concluimos que

$$(3.5.4) \qquad (\nabla_\xi R)(X_i, X_0, X_0, Y_j) = \varepsilon_{Y_j} (\nabla_\xi R)(Y_{ij}, Y_j, Y_j, X_0).$$

Poniendo $\xi = X_0$, la segunda identidad de Bianchi implica que

$$(\nabla_{X_0} R)(Y_{ij}, Y_j, Y_j, X_0) = (\nabla_{Y_{ij}} R)(Y_j, X_0, X_0, Y_j) - (\nabla_{Y_j} R)(Y_{ij}, X_0, X_0, Y_j),$$

expresión que se anula por un argumento similar al utilizado anteriormente en el caso en que T, $W \in E_\lambda(Y_0)$. Por tanto, de (3.5.4) se obtiene que $(\nabla_{X_0} R)(X_i, X_0, X_0, Y_j) = 0$, con lo que finaliza la demostración. □

3.6 Análisis de la condición de Osserman en cada punto

Recordemos que una variedad se dice de Osserman en cada punto si el operador de Jacobi tiene autovalores constantes en cada punto, pero estos autovalores pueden cambiar de un punto a otro. Nótese que si una variedad es de Osserman en cada punto y el operador de Jacobi es diagonalizable con un único autovalor, entonces se cumple que $R(x, y, y, z) = 0$ para cualesquiera vectores ortogonales x, y, z tangentes a la variedad. Esto implica que la curvatura seccional es constante en cada punto de la variedad [N2] y, por lo tanto, una condición de tipo Schur nos permite concluir que si la dimensión de la variedad es estrictamente mayor que 2, y la variedad es conexa, entonces la curvatura seccional es constante y, como consecuencia, la variedad es Osserman. Si el operador de Jacobi no es diagonalizable y tiene un único autovalor, λ, entonces $trR_x = (n-1)\lambda\varepsilon_x$ y, por tanto, $\rho(x,x) = (n-1)\lambda\varepsilon_x$ para cualquier vector arbitrario. Como toda variedad puntual Osserman es de Einstein, se sigue que λ es necesariamente constante para $dim M = n \geq 3$.

El siguiente caso a estudiar es aquel en que el operador de Jacobi tiene dos autovalores distintos (que pueden cambiar de un punto a otro). En esta sección mostraremos que, en este caso, la condición puntual de Osserman equivale a la condición global siempre que la dimensión de la variedad sea estrictamente mayor que 4. Esto mostrará que en dimensión mayor que cuatro las variedades de Osserman especiales en cada punto lo serán globalmente. Nótese que existen variedades de Osserman puntuales en dimensión 4 que no son variedades de Osserman [Ol].

Sea (M,g) una variedad semi–Riemanniana. Asociadas al operador de Jacobi podemos definir las aplicaciones f_k dadas por

$$f_k(x,p) = g(x,x)^k \, tr\left(R_x^k\right), \quad k = 1,2,3,\dots \tag{3.6.1}$$

siendo p cualquier punto de M y x cualquier vector unitario tangente a la variedad en el punto p. Nótese que la variedad es de Osserman en cada punto si y sólo si las funciones f_k dependen sólo del punto p (para cualquier valor de k), mientras que el carácter global de Osserman es equivalente a la constancia de todas las funciones f_k.

Además, si una variedad es de Osserman en cada punto, entonces (3.6.1) implica que

$$tr\left(R_\xi^k\right) = f_k(p)g(\xi,\xi)^k \tag{3.6.2}$$

para cualquier vector ξ tangente a la variedad, pues si ξ es no nulo, entonces $\bar{\xi} = \frac{\xi}{||\xi||}$ es unitario, por lo que $tr\left(R_{\bar{\xi}}^k\right) = f_k(p)g\left(\bar{\xi},\bar{\xi}\right)$, y como $tr\left(R_{\bar{\xi}}^k\right) = \frac{1}{||\xi||^{2k}} tr\left(R_\xi^k\right)$ y también $g\left(\bar{\xi},\bar{\xi}\right)^k = \frac{1}{||\xi||^{2k}} g(\xi,\xi)^k$, se sigue que (3.6.2) se cumple para cualquier vector no nulo. Ahora, si u es un vector nulo, considerando una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ de vectores no nulos que aproxime a u, se cumple que $tr\left(R_{x_\alpha}^k\right) = f_k(p)g(x_\alpha,x_\alpha)^k$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}$, por lo que tomando límites cuando $\alpha \to +\infty$ se sigue que (3.6.2) es cierta también para vectores nulos.

A continuación probamos el resultado fundamental de esta sección.

Teorema 3.6.1 *Sea (M^n,g) una variedad semi–Riemanniana de Osserman en cada punto. Se cumple que:*

(i) si $n \neq 2$, entonces f_1 es constante,

(ii) si $n \neq 2,4$, entonces f_2 es constante.

Demostración. Teniendo en cuenta que $tr(R_\xi) = \rho(\xi, \xi)$, la condición (3.6.2) para $k = 1$ implica que

$$\rho(\xi, \xi) = f_1(p)g(\xi, \xi), \tag{3.6.3}$$

siendo p cualquier punto de la variedad y ξ cualquier vector tangente a la variedad en ese punto. Entonces, si x, y son dos vectores tangentes a M, la relación anterior aplicada al vector $x + y$ implica que $\rho(x + y, x + y) = f_1(p)g(x + y, x + y)$, de donde

$$\rho(x, x) + \rho(y, y) + 2\rho(x, y) = f_1(p)g(x, x) + f_1(p)g(y, y) + 2f_1(p)g(x, y),$$

y de nuevo teniendo en cuenta (3.6.3) se sigue que $\rho(x, y) = f_1(p)g(x, y)$. Así, $\rho = f_1 g$, y por tanto si $n > 2$ la función f_1 debe ser constante sobre la variedad, lo que prueba (i).

Veamos ahora la demostración de la condición (ii). Fijamos un punto $p \in M$ y elegimos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal del espacio tangente a M en p. La condición (3.6.2) para $k = 2$ implica que $tr\left(R_\xi^2\right) = f_2(p)g(\xi, \xi)^2$ para cualquier vector $\xi \in T_pM$, es decir,

$$f_2(p)g(\xi, \xi)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i, \xi, \xi, e_j)^2 \varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}. \tag{3.6.4}$$

Entonces, si $x, y \in T_pM$, la condición (3.6.4) aplicada para el vector $x + \sigma y$, con $\sigma = \pm 1$, implica que $f_2(p)g(x + \sigma y, x + \sigma y)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i, x + \sigma y, x + \sigma y, e_j)^2 \varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}$, de donde se sigue que

$$\begin{aligned} & f_2(p)\Big\{g(x, x) + g(y, y) + 2\sigma g(x, y)\Big\}^2 \\ & \quad = \sum_{i,j=1}^{n} \Big\{R(e_i, x, x, e_j) + R(e_i, y, y, e_j) + \sigma R(e_i, x, y, e_j) + \sigma R(e_i, y, x, e_j)\Big\}^2 \varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}. \end{aligned}$$

Desarrollando esta expresión obtenemos

$$\begin{aligned} & f_2(p)\Big\{g(x, x)^2 + g(y, y)^2 + 4g(x, y)^2 + 2g(x, x)g(y, y)\Big\} \\ & +4\sigma f_2(p)\Big\{g(x, x) + g(y, y)\Big\}g(x, y) \\ & = \sum_{i,j=1}^{n} \Big\{R(e_i, x, x, e_j)^2 + R(e_i, y, y, e_j)^2 + R(e_i, x, y, e_j)^2 + R(e_j, x, y, e_i)^2 \\ & \qquad +2R(e_i, x, x, e_j)R(e_i, y, y, e_j) + 2R(e_i, x, y, e_j)R(e_j, x, y, e_i)\Big\}\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j} \\ & \quad +2\sigma \sum_{i,j=1}^{n} \Big\{R(e_i, x, x, e_j) + R(e_i, y, y, e_j)\Big\} \cdot \Big\{R(e_i, x, y, e_j) + R(e_j, x, y, e_i)\Big\}\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}, \end{aligned}$$

y, sumando las expresiones que resultan al sustituir σ por 1 y -1, se sigue que

$$\begin{aligned} & f_2(p)\left\{g(x,x)^2+g(y,y)^2+4g(x,y)^2+2g(x,x)g(y,y)\right\} \\ &\quad=\sum_{i,j=1}^n\Big\{R(e_i,x,x,e_j)^2+R(e_i,y,y,e_j)^2+R(e_i,x,y,e_j)^2+R(e_j,x,y,e_i)^2 \\ &\qquad\qquad +2R(e_i,x,x,e_j)R(e_i,y,y,e_j)+2R(e_i,x,y,e_j)R(e_j,x,y,e_i)\Big\}\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}. \end{aligned}$$

Ahora, la condición (3.6.4) para los vectores x e y hace que la expresión anterior se transforme en

$$\begin{aligned} & 2f_2(p)\left\{g(x,x)g(y,y)+2g(x,y)^2\right\} \\ &\quad=\sum_{i,j=1}^n\Big\{R(e_i,x,y,e_j)^2+R(e_j,x,y,e_i)^2 \\ &\qquad\qquad +2R(e_i,x,x,e_j)R(e_i,y,y,e_j)+2R(e_i,x,y,e_j)R(e_j,x,y,e_i)\Big\}\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}, \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que $\sum_{i,j=1}^n R(e_j,x,y,e_i)^2\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}=\sum_{i,j=1}^n R(e_i,x,y,e_j)^2\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}$, de la expresión anterior se sigue que

$$\begin{aligned} & f_2(p)\left\{g(x,x)g(y,y)+2g(x,y)^2\right\} \\ &\quad=\sum_{i,j=1}^n\Big\{R(e_i,x,x,e_j)R(e_i,y,y,e_j) \\ &\qquad\qquad +R(e_i,x,y,e_j)R(e_j,x,y,e_i)+R(e_i,x,y,e_j)^2\Big\}\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}. \end{aligned}$$

Poniendo $y=e_k$, multiplicando por ε_{e_k} y sumando en $k=1,\dots,n$, se obtiene

$$\begin{aligned} & f_2(p)\sum_{k=1}^n\left\{g(x,x)\varepsilon_{e_k}+2g(x,e_k)^2\right\}\varepsilon_{e_k} \\ &\quad=\sum_{i,j,k=1}^n\Big\{R(e_i,x,x,e_j)R(e_i,e_k,e_k,e_j) \\ &\qquad\qquad +R(e_i,x,e_k,e_j)R(e_j,x,e_k,e_i)+R(e_i,x,e_k,e_j)^2\Big\}\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}, \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

y como

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k=1}^{n} R(e_i,x,x,e_j)R(e_i,e_k,e_k,e_j)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\\
&\qquad = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i,x,x,e_j)\left\{\sum_{k=1}^{n} R(e_k,e_i,e_j,e_k)\varepsilon_{e_k}\right\}\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\\
&\qquad = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i,x,x,e_j)\rho(e_i,e_j)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j},
\end{aligned}$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left\{g(x,x)\varepsilon_{e_k}+2g(x,e_k)^2\right\}\varepsilon_{e_k} &= \sum_{k=1}^{n} g(x,x)+2\sum_{k=1}^{n} g(x,e_k)g(x,e_k)\varepsilon_{e_k}\\
&= ng(x,x)+2g(x,x) \;=\; (n+2)g(x,x),
\end{aligned}$$

la expresión (3.6.5) se reduce a

$$\begin{aligned}
&f_2(p)(n+2)g(x,x)\\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i,x,x,e_j)\rho(e_i,e_j)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\\
&\quad + \sum_{i,j,k=1}^{n}\left\{R(e_i,x,e_k,e_j)R(e_j,x,e_k,e_i)+R(e_i,x,e_k,e_j)^2\right\}\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}.
\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

Ahora, como $n \neq 2$, por (i) la variedad es Einstein, con $\rho = f_1 \cdot g$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} R(e_i,x,x,e_j)\rho(e_i,e_j)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\\
&\quad = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i,x,x,e_j)f_1 g(e_i,e_j)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j} \;=\; \sum_{i=1}^{n} R(e_i,x,x,e_i)f_1\varepsilon_{e_i}\\
&\quad = f_1\rho(x,x) \;=\; f_1^2 g(x,x),
\end{aligned}$$

por lo que (3.6.6) se transforma en

$$\begin{aligned}
&f_2(p)(n+2)g(x,x)-f_1^2 g(x,x)\\
&\quad = \sum_{i,j,k=1}^{n}\left\{R(x,e_i,e_j,e_k)R(x,e_j,e_i,e_k)+R(x,e_i,e_j,e_k)^2\right\}\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}.
\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

Para simplificar esta última expresión consideramos la función bilineal simétrica

$$\Omega(t,w) = \sum_{i,j,k=1}^{n} R(t,e_i,e_j,e_k)R(w,e_i,e_j,e_k)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}. \tag{3.6.8}$$

Por la primera identidad de Bianchi se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k=1}^{n} R(x,e_i,e_j,e_k)R(x,e_j,e_i,e_k)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k} \\
&\qquad = \sum_{i,j,k=1}^{n} R(x,e_i,e_j,e_k)\Big\{ -R(e_j,e_i,x,e_k) - R(e_i,x,e_j,e_k)\Big\}\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k} \\
&\qquad = -\sum_{i,j,k=1}^{n} R(x,e_i,e_k,e_j)R(x,e_k,e_i,e_j)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k} + \sum_{i,j,k=1}^{n} R(x,e_i,e_j,e_k)^2\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k} \\
&\qquad = -\sum_{i,j,k=1}^{n} R(x,e_i,e_k,e_j)R(x,e_k,e_i,e_j)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k} + \Omega(x,x),
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} R(x,e_i,e_k,e_j)R(x,e_k,e_i,e_j)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k} = \sum_{i,j,k=1}^{n} R(x,e_i,e_j,e_k)R(x,e_j,e_i,e_k)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k},$$

se sigue que

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} R(x,e_i,e_j,e_k)R(x,e_j,e_i,e_k)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k} = \frac{1}{2}\Omega(x,x). \tag{3.6.9}$$

Además,

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} R(x,e_i,e_j,e_k)^2\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k} = \Omega(x,x). \tag{3.6.10}$$

Entonces, utilizando las expresiones (3.6.9) y (3.6.10) en la condición (3.6.7) obtenemos $f_2(p)(n+2)g(x,x) - f_1^2 g(x,x) = \frac{1}{2}\Omega(x,x) + \Omega(x,x)$, de donde

$$\Omega(x,x) = F(p)g(x,x), \tag{3.6.11}$$

siendo $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(q) = \frac{2}{3}\Big(f_2(q)(n+2) - f_1^2\Big), \quad q \in M. \tag{3.6.12}$$

Entonces, si $t, w \in T_pM$, la condición (3.6.11) aplicada al vector $t+w$ nos dice que $\Omega(t+w,t+w) = F(p)g(t+w,t+w)$, de donde

$$\Omega(t,t) + \Omega(w,w) + 2\Omega(t,w) = F(p)g(t,t) + F(p)g(w,w) + 2F(p)g(t,w),$$

y de nuevo por (3.6.11) se sigue que

$$\Omega = F(p)g, \tag{3.6.13}$$

y por lo tanto $\sum_{i=1}^{n}\Omega(e_i,e_i)\varepsilon_{e_i} = nF(p)$. Pero, por otra parte, por la definición de Ω se tiene que $\sum_{i=1}^{n}\Omega(e_i,e_i)\varepsilon_{e_i} = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R(e_i,e_j,e_k,e_l)^2\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\varepsilon_{e_l}$. Entonces, teniendo en cuenta la expresión (3.6.13) se concluye que

$$\Omega = \frac{1}{n}||R||^2 g, \tag{3.6.14}$$

siendo $||R||^2 = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R(e_i,e_j,e_k,e_l)^2\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\varepsilon_{e_l}$.

Derivando directamente la expresión (3.6.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{b=1}^{n}(\nabla_{e_b}\Omega)(e_a,e_b)\varepsilon_{e_b} \\
&\quad= \sum_{b=1}^{n}\left\{\sum_{i,j,k=1}^{n}\Big\{(\nabla_{e_b}R)(e_a,e_i,e_j,e_k)R(e_b,e_i,e_j,e_k)\right. \\
&\qquad\qquad \left.+R(e_a,e_i,e_j,e_k)(\nabla_{e_b}R)(e_b,e_i,e_j,e_k)\Big\}\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\right\}\varepsilon_{e_b} \\
&\quad= \sum_{i,j,k,b=1}^{n}(\nabla_{e_b}R)(e_a,e_i,e_j,e_k)R(e_b,e_i,e_j,e_k)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\varepsilon_{e_b} \\
&\qquad + \sum_{i,j,k=1}^{n}\left\{R(e_a,e_i,e_j,e_k)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\left(\sum_{b=1}^{n}(\nabla_{e_b}R)(e_b,e_i,e_j,e_k)\varepsilon_{e_b}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Por la segunda identidad de Bianchi se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{b=1}^{n}(\nabla_{e_b}R)(e_b,e_i,e_j,e_k)\varepsilon_{e_b} &= \sum_{b=1}^{n}(\nabla_{e_b}R)(e_j,e_k,e_b,e_i)\varepsilon_{e_b} \\
&= \sum_{b=1}^{n}\Big\{-(\nabla_{e_j}R)(e_k,e_b,e_b,e_i) - (\nabla_{e_k}R)(e_b,e_j,e_b,e_i)\Big\}\varepsilon_{e_b} \\
&= -\sum_{b=1}^{n}(\nabla_{e_j}R)(e_b,e_i,e_k,e_b)\varepsilon_{e_b} + \sum_{b=1}^{n}(\nabla_{e_k}R)(e_b,e_i,e_j,e_b)\varepsilon_{e_b} \\
&= -(\nabla_{e_j}\rho)(e_i,e_k) + (\nabla_{e_k}\rho)(e_i,e_j),
\end{aligned}$$

y por lo tanto esta expresión debe anularse (pues el tensor de Ricci es paralelo por ser la variedad de Einstein). Entonces, se sigue que

$$\sum_{b=1}^{n}(\nabla_{e_b}\Omega)(e_a,e_b)\varepsilon_{e_b} = \sum_{i,j,k,b=1}^{n}(\nabla_{e_b}R)(e_a,e_i,e_j,e_k)R(e_b,e_i,e_j,e_k)\varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\varepsilon_{e_b}. \tag{3.6.15}$$

De nuevo por la segunda identidad de Bianchi se tiene que

$$\sum_{i,j,k,b=1}^{n} (\nabla_{e_b} R)(e_a, e_i, e_j, e_k) R(e_b, e_i, e_j, e_k) \varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\varepsilon_{e_b}$$

$$= \sum_{i,j,k,b=1}^{n} \Big\{ -(\nabla_{e_a} R)(e_i, e_b, e_j, e_k) - (\nabla_{e_i} R)(e_b, e_a, e_j, e_k) \Big\} R(e_b, e_i, e_j, e_k) \varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\varepsilon_{e_b}$$

$$= \sum_{i,j,k,b=1}^{n} (\nabla_{e_a} R)(e_i, e_b, e_j, e_k) R(e_i, e_b, e_j, e_k) \varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\varepsilon_{e_b}$$

$$- \sum_{i,j,k,b=1}^{n} (\nabla_{e_i} R)(e_a, e_b, e_j, e_k) R(e_i, e_b, e_j, e_k) \varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\varepsilon_{e_b},$$

y como

$$\sum_{i,j,k,b=1}^{n} (\nabla_{e_i} R)(e_a, e_b, e_j, e_k) R(e_i, e_b, e_j, e_k) \varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\varepsilon_{e_b}$$

$$= \sum_{i,j,k,b=1}^{n} (\nabla_{e_b} R)(e_a, e_i, e_j, e_k) R(e_b, e_i, e_j, e_k) \varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\varepsilon_{e_b}$$

la expresión (3.6.15) se reduce a

$$\sum_{b=1}^{n} (\nabla_{e_b} \Omega)(e_a, e_b) \varepsilon_{e_b} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,b=1}^{n} (\nabla_{e_a} R)(e_i, e_b, e_j, e_k) R(e_i, e_b, e_j, e_k) \varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\varepsilon_{e_b}.$$

Ahora, derivando la expresión de $||R||^2$ se tiene que

$$\nabla_{e_a} ||R||^2 = 2 \sum_{i,j,k,b=1}^{n} (\nabla_{e_a} R)(e_i, e_b, e_j, e_k) R(e_i, e_b, e_j, e_k) \varepsilon_{e_i}\varepsilon_{e_j}\varepsilon_{e_k}\varepsilon_{e_b},$$

por lo que la expresión anterior se transforma en

$$\sum_{b=1}^{n} (\nabla_{e_b} \Omega)(e_a, e_b) \varepsilon_{e_b} = \frac{1}{4} \nabla_{e_a} ||R||^2. \tag{3.6.16}$$

Además, de (3.6.14) se obtiene que $\sum_{b=1}^{n} (\nabla_{e_b} \Omega)(e_a, e_b) \varepsilon_{e_b} = \frac{1}{n} \sum_{b=1}^{n} g(e_a, e_b) \varepsilon_{e_b} \nabla_{e_b} ||R||^2$, y por lo tanto

$$\sum_{b=1}^{n} (\nabla_{e_b} \Omega)(e_a, e_b) \varepsilon_{e_b} = \frac{1}{n} \nabla_{e_a} ||R||^2. \tag{3.6.17}$$

Entonces, como $n \neq 4$, las expresiones (3.6.16) y (3.6.17) implican que $\nabla_{e_a}||R||^2 = 0$ para $a = 1, \ldots, n$, por lo que $||R||^2$ debe ser constante. Esto permite concluir que f_2 es constante, pues de (3.6.13) y (3.6.14) se sigue que

$$f_2(p) = \frac{1}{n+2}\left(\frac{3}{2n}||R||^2 + f_1^2\right),$$

finalizando así la demostración del teorema. □

Teorema 3.6.2 *Sea (M, g) una variedad semi–Riemanniana conexa de dimensión mayor que 4. Si M es de Osserman en cada punto, con exactamente dos autovalores distintos, entonces la variedad es de Osserman.*

Demostración. Como la dimensión de la variedad es estrictamente mayor que 4, el teorema anterior implica que las funciones f_1 y f_2 son constantes. Ahora, teniendo en cuenta que los operadores de Jacobi R_x son autoadjuntos, de [O, pág. 260] se sigue lo siguiente: si R_x tiene dos autovalores complejos $z = \alpha + i\beta$ y $\bar{z} = \alpha - i\beta$, entonces $trR_x = (n-1)\alpha(p)$ y $tr(R_x)^2 = (n-1)(\alpha(p)^2 - \beta(p)^2)$, donde $n = dim\ M$ y, por tanto, α, β son constantes, de donde se sigue que z y $\bar{z}$ son constantes sobre M. Si los autovalores son reales, λ y μ con multiplicidades m_λ y m_μ, respectivamente, entonces $trR_x = \lambda(p)m_\lambda + \mu(p)m_\mu$ y $tr(R_x)^2 = \lambda(p)^2 m_\lambda + \mu(p)^2 m_\mu$ (independientemente de que R_x sea o no diagonalizable), de donde se sigue la constancia de λ y μ sobre la variedad. □

Nótese que existen variedades en dimensión 4 que son de Osserman en cada punto pero que no son de Osserman. Más concretamente, una variedad casi Hermítica (M, g, J) se llama *espacio complejo generalizado* si su tensor curvatura R está dado por $R = fR^0 + hR^J$, donde f y h son funciones diferenciables sobre la variedad. Es inmediato comprobar que un espacio complejo generalizado es una variedad de Osserman en cada punto (y por tanto verifica los Axiomas 1 y 2 en cada punto). Sin embargo, existen espacios complejos generalizados de dimensión 4 que no son variedades de Osserman [Ol].

Capítulo 4

Autoespacios del operador de Jacobi

4.1 Introducción

El resultado principal del capítulo anterior (Teorema 3.0.1) pone de manifiesto que, además de ciertos casos excepcionales estudiados en §3.5, las variedades de Osserman especiales se pueden agrupar en cuatro familias:

- variedades Kähler indefinidas de curvatura seccional holomorfa constante,
- variedades para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante,
- variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura seccional cuaterniónica constante y
- variedades paracuaterniónicas Kähler de curvatura seccional paracuaterniónica constante.

Vemos, pues, la importancia de la constancia de las funciones curvatura que aparecen en los distintos casos. Este hecho motiva el estudio de tal propiedad y, más concretamente, la obtención de una caracterización de dicha constancia a partir de la existencia de autoespacios distinguidos para los operadores de Jacobi. En este sentido cabe señalar que Nomizu obtiene una caracterización de la constancia de la curvatura seccional holomorfa de una variedad Kähler (con métrica definida positiva) mediante la existencia de un autoespacio distinguido asociado a cada operador de Jacobi. Más concretamente, si (M, g, J) denota una variedad Kähler, en [N1] se prueba que la curvatura seccional holomorfa es constante si y sólo si para cada vector x, Jx determina un autoespacio asociado al operador de Jacobi R_x.

Puesto que la existencia de métricas semi–Riemannianas permite distinguir entre vectores espaciales, temporales y nulos, se plantea el problema de estudiar la condición anterior de forma separada, es decir, para operadores de Jacobi asociados a vectores espaciales, temporales y nulos. Las variedades Kähler indefinidas, así como la familia más general de variedades casi Hermíticas indefinidas, y las variedades cuaterniónicas Kähler indefinidas han sido muy estudiadas, obteniéndose caracterizaciones en la línea del resultado de Nomizu (véanse [BR], [BCGH], [BCGHM], [PS] y [GV]).

Centrándonos en el marco de la geometría paracompleja, recientemente hemos analizado el caso de variedades para–Kähler, obteniendo el siguiente resultado:

Teorema 4.1.1 [GHV, Lema 3] *Sea (M, g, J) una variedad para–Kähler y $p \in M$. La curvatura seccional paraholomorfa es constante en el punto p si y sólo si se cumple una cualquiera de las condiciones siguientes:*

(i) Para cada vector espacial $x \in T_pM$, Jx es un autovector para el operador de Jacobi R_x (es decir, $R_x(Jx) \sim Jx$).

(ii) Para cada vector temporal $y \in T_pM$, Jy es un autovector para el operador de Jacobi R_y (es decir, $R_y(Jy) \sim Jy$).

(iii) Para cada vector nulo $u \in T_pM$, Ju es un autovector para el operador de Jacobi R_u con autovalor asociado cero (es decir, $R_u(Ju) = 0$).

Nótese que la condición correspondiente a vectores nulos es más restrictiva que las obtenidas en el caso de vectores espaciales o temporales. Este hecho motiva el estudio de una clase de variedades para–Kähler más amplia que la correspondiente a las variedades de curvatura seccional paraholomorfa constante, que definimos de la forma siguiente.

Definición 4.1.1 *Una variedad para–Kähler (M, g, J) se dice isotrópica si para cualquier vector nulo u tangente a M se cumple que Ju es un autovector del operador de Jacobi R_u (es decir, $R_u(Ju) \sim Ju$).*

En [GHV] (véase también [Vz]) hemos puesto de manifiesto la existencia de variedades para–Kähler isotrópicas cuya curvatura seccional paraholomorfa no es constante. Así, el producto de variedades para–Kähler $M_1(c) \times M_2(-c)$ de curvatura seccional paraholomorfa constante c y $-c$, respectivamente, proporciona una familia de ejemplos de variedades isotrópicas cuya curvatura seccional paraholomorfa no es constante (siendo $c \neq 0$). Otros ejemplos de interés serán los proporcionados por el fibrado tangente TM a una variedad para–Kähler (M, g, J) de curvatura seccional paraholomorfa constante equipado con el levantamiento completo (g^C, J^C) de la estructura para–Kähler. En este punto es importante notar que la condición de isotropía anterior define una clase invariante conforme dentro de las variedades casi para–Hermíticas (Ejemplo 4.7.4). Como consecuencia, abordaremos el estudio de esta propiedad en el ámbito más general posible de las variedades casi para–Hermíticas.

Por último, nos planteamos también un estudio análogo para la última familia que proporcionaba el Teorema 3.0.1: las variedades paracuaterniónicas Kähler. En este caso mostraremos que la condición de isotropía no amplía la familia de variedades con curvatura seccional paracuaterniónica constante (si la dimensión es ≥ 8), por lo que nos limitamos a obtener una caracterización de la constancia de dicha curvatura por medio de la existencia de autoespacios distinguidos para los operadores de Jacobi, distinguiendo entre vectores espaciales, temporales y nulos.

El capítulo está organizado de la forma siguiente. En la sección 4.2 recordamos algunos conceptos básicos necesarios para el análisis de las variedades casi para–Hermíticas. En §4.3 nos centramos en el estudio de las variedades casi para–Hermíticas de curvatura seccional paraholomorfa constante. Obtenemos la expresión del tensor curvatura de estas variedades, generalizando la correspondiente a variedades para–Kähler. Además, probamos un criterio para la constancia de la curvatura seccional paraholomorfa (cf. Teorema 4.3.1), en la línea de los obtenidos en otro tipo de variedades como indicamos anteriormente. El Teorema 4.3.1 sugiere el estudio de la condición de isotropía en el caso de variedades casi para–Hermíticas, lo que hacemos en las dos secciones siguientes. Así, en §4.4 obtenemos la expresión del tensor curvatura de las variedades pertenecientes a esta nueva clase y, utilizando esa expresión, en la sección 4.5 demostramos un resultado de clasificación local. En la §4.6 estudiamos dos problemas de acotación de la curvatura seccional paraholomorfa, mostrándose que dicha curvatura está acotada en un punto si y sólo si es constante en dicho punto. En la sección 4.7 se analizan diversos ejemplos que confirman la necesidad del estudio realizado y que, a su vez, muestran la necesidad de las condiciones impuestas en las secciones anteriores. Estos resultados se encuentran resumidos en [BCGHV1]. Por último, en §4.8 estudiamos las variedades paracuaterniónicas Kähler de dimensión ≥ 8, caracterizando la constancia de la curvatura seccional paracuaterniónica y mostrando que dicha constancia es equivalente a la condición de isotropía.

4.2 Variedades casi para–Hermíticas. Preliminares

En la primera parte del Capítulo 2 de esta memoria (subsección 2.1.2) hemos introducido las variedades casi para–Hermíticas y, como caso particular, las variedades para–Kähler, analizando algunos aspectos de la curvatura de estas últimas. En esta sección recordamos las definiciones básicas que necesitaremos en lo que sigue.

Una variedad *casi para–Hermítica* es una variedad diferenciable casi simpléctica (M, Ω) cuyo fibrado tangente se descompone en suma de Whitney de subfibrados Lagrangianos, $TM = L \oplus L'$. Equivalentemente a esta descomposición, existe un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ sobre la variedad, $J = \pi_L - \pi_{L'}$, donde π_L (resp., $\pi_{L'}$) denota la proyección sobre L (resp., sobre L'), tal que $J^2 = Id$. Además, como L y L' son Lagrangianos, se tiene que

$$\Omega(JX, JY) = -\Omega(X, Y)$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre M. Por tanto, $g(X, Y) = \Omega(X, JY)$ define un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ simétrico y no degenerado sobre M (ya que $\Omega^n \neq 0$). Se comprueba fácilmente que g es una métrica semi–Riemanniana de signatura

(n, n) y, además,

$$g(JX, JY) = -g(X, Y)$$

para cualesquiera X, Y campos de vectores en M.

Por lo tanto, identificaremos una variedad casi para–Hermítica con un triple (M, g, J), donde g y J son una métrica semi–Riemanniana y una estructura casi paracompleja, respectivamente, verificando la relación anterior.

Un caso particular de especial importancia se presenta cuando la 2–forma Ω es cerrada y los subfibrados L y L' son involutivos. Entonces, la variedad se llama *para–Kähler* y está caracterizada, equivalentemente, por la condición $\nabla J = 0$, donde ∇ denota la conexión de Levi Civita asociada a la métrica g. Las variedades para–Kähler constituyen la clase más estudiada de variedades casi para–Hermíticas. (Para más detalles sobre el estudio de estas variedades pueden consultarse, además del apartado 2.1.2 de esta memoria, las referencias [CFG], [GM1], [GHV] y [Vz]).

Un plano π se dirá *paraholomorfo* si es invariante por J (es decir, $J\pi \subset \pi$). La *curvatura seccional paraholomorfa*, H, se define como la restricción de la curvatura seccional a planos paraholomorfos no degenerados, es decir,

$$H(\pi) = \frac{R(x, Jx, Jx, x)}{g(x, x)g(Jx, Jx) - g(x, x)^2}\,. \tag{4.2.1}$$

Finalmente recordemos que, generalizando las propiedades del tensor curvatura de una variedad para–Kähler, se define una *función curvatura para–Kähler* como una aplicación multilineal F, sobre un espacio vectorial para–Hermítico $(V, \langle\ ,\ \rangle, J)$, verificando:

$$\begin{aligned}
&F(x, y, z, w) = -F(y, x, z, w) = -F(x, y, w, z),\\
&F(x, y, z, w) = F(z, w, x, y),\\
&F(x, y, z, w) + F(y, z, x, w) + F(z, x, y, w) = 0,\\
&F(x, y, Jz, Jw) = F(Jx, Jy, z, w) = -F(x, y, z, w)
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

para cualesquiera $x, y, z, w \in V$. Además, el *tensor curvatura* asociado, $\tilde{F}$, viene dado por $\langle \tilde{F}(x, y)z, w\rangle = F(x, y, z, w)$. Si F cumple sólo las tres primeras condiciones decimos entonces que es una *función curvatura* sobre V.

4.3 Constancia de la curvatura seccional paraholomorfa

El objetivo de esta sección es, en primer lugar, obtener un criterio para la constancia puntual de la curvatura seccional paraholomorfa mediante el análisis de la existencia de autoespacios distinguidos para los operadores de Jacobi y, en segundo lugar, determinar el tensor curvatura de una variedad casi para–Hermítica de curvatura seccional paraholomorfa puntualmente constante. Finalmente, utilizando la expresión obtenida para el tensor curvatura, estudiamos la relación existente entre la constancia puntual y local de la curvatura seccional paraholomorfa. Comenzamos con el siguiente teorema:

Teorema 4.3.1 *Sea (M, g, J) una variedad casi para–Hermítica y $p \in M$. La curvatura seccional paraholomorfa es constante en el punto p si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones:*

(i) $R_x(Jx) - JR_{Jx}(x) \sim Jx$, *para cualquier vector espacial* $x \in T_pM$,

(ii) $R_y(Jy) - JR_{Jy}(y) \sim Jy$, *para cualquier vector temporal* $y \in T_pM$,

(iii) $R_u(Ju) - JR_{Ju}(u) = 0$, *para cualquier vector nulo* $u \in T_pM$,

donde $\sim$ significa "es proporcional a".

Demostración. Introducimos las funciones G y L definidas por

$$G(x, y) = 2R(x, Jx, Jy, x) + 2R(x, Jx, Jx, y), \tag{4.3.1}$$

$$\begin{aligned} L(x, y) &= 2R(x, Jx, Jy, y) + 2R(x, Jy, Jx, y) \\ &\quad +R(x, Jy, Jy, x) + R(y, Jx, Jx, y), \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

a partir de las cuales se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} &R(\lambda x + \mu y, J(\lambda x + \mu y), J(\lambda x + \mu y), \lambda x + \mu y) = \lambda^3\mu G(x, y) \\ &\quad +\lambda\mu^3 G(y, x) + \lambda^2\mu^2 L(x, y) + \lambda^4 R(x, Jx, Jx, x) + \mu^4 R(y, Jy, Jy, y), \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

donde λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

En primer lugar mostraremos la necesidad de (i). Sea x un vector espacial tangente a la variedad en el punto p y tomemos cualquier vector no nulo y ortogonal a x. Considerando números reales no nulos λ, μ tales que $z = \lambda x + \mu y$ es un vector no nulo, si la curvatura seccional paraholomorfa es constante en p, con valor c, entonces $R(z, Jz, Jz, z) = -cg(z, z)^2$. Así, de (4.3.3) se obtiene que

$$\begin{aligned} -c\left(\lambda^2 g(x, x) + \mu^2 g(y, y)\right)^2 &= \lambda^4 R(x, Jx, Jx, x) + \mu^4 R(y, Jy, Jy, y) \\ &\quad +\lambda^3\mu G(x, y) + \lambda\mu^3 G(y, x) + \lambda^2\mu^2 L(x, y), \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $R(x, Jx, Jx, x) = -cg(x, x)^2$, $R(y, Jy, Jy, y) = -cg(y, y)^2$, de la expresión anterior se sigue que

$$\lambda^3\mu G(x, y) + \lambda^2\mu^2\left(L(x, y) + 2cg(x, x)g(y, y)\right) + \lambda\mu^3 G(y, x) = 0,$$

lo que implica que $G(x, y) = 0$. Entonces, de (4.3.1) se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= R(x, Jx, Jy, x) + R(x, Jx, Jx, y) \\ &= R(Jx, x, x, Jy) + R(x, Jx, Jx, y) \\ &= g(R_x(Jx), Jy) + g(R_{Jx}(x), y) \\ &= g(-JR_x(Jx) + R_{Jx}(x), y), \end{aligned}$$

lo que prueba que $-JR_x(Jx)+R_{Jx}(x) \sim x$, o lo que es lo mismo, $R_x(Jx)-JR_{Jx}(x) \sim Jx$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple (i) y probemos que la curvatura seccional paraholomorfa es constante en el punto p. Sean entonces x, y dos vectores ortonormales tangentes a M en p, verificando que $g(x, x) = 1 = -g(y, y)$. Eligiendo λ, μ números reales no nulos tales que $\lambda^2 > \mu^2$, se tiene que $z = \lambda x + \mu y$ es un vector espacial y $w = \mu x + \lambda y$ es un vector temporal ortogonal a z. Entonces, la condición (i) implica que $g(R_z(Jz) - J(R_{Jz}(z), Jw) = 0$ y, por lo tanto, $R(z, Jz, Jw, z) + R(z, Jz, Jz, w) = 0$. Equivalentemente,

$$R(\lambda x+\mu y, J(\lambda x+\mu y), J(\mu x+\lambda y), \lambda x+\mu y)+R(\lambda x+\mu y, J(\lambda x+\mu y), J(\lambda x+\mu y), \mu x+\lambda y) = 0.$$

Desarrollando esta última expresión obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \; & \lambda^4 \Big\{R(x, Jx, Jy, x) + R(x, Jx, Jx, y)\Big\} \\ & +\mu^4 \Big\{R(y, Jy, Jx, y) + R(y, Jy, Jy, x)\Big\} \\ & +3\lambda^2\mu^2 \Big\{R(x, Jx, Jx, y) + R(x, Jy, Jy, y) + R(x, Jy, Jx, x) + R(y, Jx, Jy, y)\Big\} \\ & +\lambda^3\mu \Big\{R(x, Jy, Jy, x) + R(y, Jx, Jx, y) + 2R(y, Jx, Jy, x) + 2R(x, Jx, Jy, y) \\ & \qquad +2R(x, Jx, Jx, x) \Big\} \\ & +\lambda\mu^3 \Big\{R(x, Jy, Jy, x) + R(y, Jx, Jx, y) + 2R(x, Jy, Jx, y) + 2R(y, Jy, Jx, x) \\ & \qquad +2R(y, Jy, Jy, y) \Big\}. \end{aligned}$$

Como todos los coeficientes en esta expresión deben ser nulos, si consideramos los correspondientes a $\lambda^3\mu$ y $\lambda\mu^3$, y los restamos, se tiene que $R(x, Jx, Jx, x) = R(y, Jy, Jy, y)$. Esto muestra que $H(x) = H(y)$ para cualesquiera vectores ortonormales x, y tales que $g(x, x) = -g(y, y)$.

Para mostrar la constancia de la curvatura seccional paraholomorfa en el punto p procedemos de la siguiente forma. Sean $\pi_x = \langle\{x, Jx\}\rangle$, $\pi_y = \langle\{y, Jy\}\rangle$ dos planos paraholomorfos no degenerados en T_pM. Podemos suponer que x e y son vectores espaciales. Si $\langle\{x, y\}\rangle$ es un subespacio no degenerado, elegimos un vector temporal $z \in \langle\{x, y\}\rangle^\perp$ y consideramos el plano paraholomorfo no degenerado $\pi = \langle\{z, Jz\}\rangle$. Como x, z son vectores ortonormales y, además, $g(x, x) = -g(z, z)$, se sigue que $H(\pi_x) = H(\pi)$. De forma análoga se tiene que $H(\pi_y) = H(\pi)$ y, así, $H(\pi_x) = H(\pi_y)$. Analicemos ahora el caso en que $\langle\{x, y\}\rangle$ es degenerado. Tomemos un vector espacial unitario z en el subespacio $\langle y\rangle^\perp$ y consideremos la sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ de vectores espaciales unitarios dada por

$$x_\alpha = \left[1 + \frac{1}{\alpha^2 g(x,z)^2} + \frac{2}{\alpha}\right]^{-1/2} \left\{x + \frac{1}{\alpha g(x,z)} z\right\}, \qquad \text{si } g(x,z) \neq 0,$$
$$x_\alpha = \left[1 + \frac{1}{\alpha^2}\right]^{-1/2} \left\{x + \frac{1}{\alpha} z\right\}, \qquad \text{si } g(x,z) = 0.$$

Ahora, se sigue que $\langle\{x_\alpha, y\}\rangle$ es no degenerado para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}$. Por tanto, $H(\pi_y) = H(\pi_{x_\alpha})$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}$ y, tomando límites cuando $\alpha \to +\infty$, se obtiene que $H(\pi_y) = H(\pi_x)$, lo que prueba que la curvatura seccional paraholomorfa es constante en el punto p.

La equivalencia entre (*ii*) y la constancia de H en p se obtiene de forma similar. Para finalizar la demostración, analizamos la condición (*iii*). Si la curvatura seccional paraholomorfa es constante c en el punto p, (*i*) y (*ii*) se cumplen y, entonces,

$$R_x(Jx) - JR_{Jx}(x) = \lambda_x Jx \tag{4.3.4}$$

para cualquier vector no nulo $x \in T_pM$ y para algún valor $\lambda_x \in \mathbb{R}$. Se tiene así que

$$\begin{aligned} \lambda_x g(Jx, Jx) &= g(R_x(Jx) - JR_{Jx}(x), Jx) \\ &= R(Jx, x, x, Jx) + R(x, Jx, Jx, x) \\ &= 2R(x, Jx, Jx, x) \\ &= -2cg(x, x)^2, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\lambda_x = 2cg(x, x)$. Entonces, (4.3.4) se transforma en

$$R_x(Jx) - JR_{Jx}(x) = 2cg(x, x)Jx, \tag{4.3.5}$$

expresión válida para cualquier vector no nulo $x \in T_pM$.

Si u es un vector nulo tangente a M en p, tomamos un vector x no nulo ortogonal a u y definimos $x_\alpha = \frac{1}{\alpha}x + u$. Así, la sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores no nulos que aproximan al vector nulo u y, por tanto, $R_{x_\alpha}(Jx_\alpha) - JR_{Jx_\alpha}(x_\alpha) = 2cg(x_\alpha, x_\alpha)Jx_\alpha$ se cumple para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}$. Finalmente, tomando límites cuando $\alpha \to +\infty$ se obtiene que $R_u(Ju) - JR_{Ju}(u) = 0$, lo que prueba la necesidad de (*iii*).

Recíprocamente, si se cumple (*iii*), elegimos x, y vectores unitarios ortogonales de tal forma que $g(x, x) = -g(y, y)$. Como $x \pm y$ son vectores nulos, (*iii*) implica que

$$\begin{aligned} 0 &= R_{x+y}(J(x+y)) - JR_{J(x+y)}(x+y) \\ &= R_{x-y}(J(x-y)) - JR_{J(x-y)}(x-y), \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= R(J(x+y), x+y, x+y, J(x-y)) + R(x+y, J(x+y), J(x+y), x-y) \\ &= R(J(x-y), x-y, x-y, J(x+y)) + R(x-y, J(x-y), J(x-y), x+y). \end{aligned}$$

Utilizando estas expresiones es fácil comprobar que $R(x, Jx, Jx, x) = R(y, Jy, Jy, y)$. Así, hemos probado que $H(x) = H(y)$ siempre que x e y son vectores ortonormales tales que $g(x, x) = -g(y, y)$, por lo que la demostración se concluye igual que en (i). $\square$

Nótese que el resultado del Teorema 4.3.1 se reduce al Teorema 4.1.1 en el caso particular de variedades para–Kähler. Por otra parte, puede darse una interpretación geométrica de las condiciones (i) y (ii) de la forma siguiente. Diremos que una variedad casi para–Hermítica satisface el *axioma de las esferas paraholomorfas* (resp., *de los planos paraholomorfos*) en un punto $p \in M$ si, para cualquier subespacio paraholomorfo 2–dimensional no degenerado V del espacio tangente a M en p, existe una subvariedad paraholomorfa totalmente umbílica (resp., totalmente geodésica), S, cuya curvatura media es paralela, que pasa por el punto p, de tal forma que $T_pS = V$.

Ahora, como aplicación directa del Teorema 4.3.1 y procediendo de forma análoga a [GN, Teor. 3, 4], tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.3.1 *Sea (M, g, J) una variedad casi para–Hermítica. Si M satisface el axioma de las esferas paraholomorfas (resp., de los planos paraholomorfos) en un punto $p \in M$, entonces la curvatura seccional paraholomorfa es constante en p.*

Demostración. Comenzamos recordando que si ∇ y $\tilde{\nabla}$ denotan las conexiones métricas en M y S, respectivamente, entonces la segunda forma fundamental B está definida por la expresión $\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + B(X, Y)$, para cualesquiera campos de vectores X, Y en S [YK]. Además, se define el operador de Weingarten asociado a cada vector normal ξ como $\nabla_X \xi = T_\xi X + \nabla^\perp_X \xi$, de forma que se cumple la relación $g(T_\xi X, Y) = -g(B(X, Y), \xi)$. Por último, el vector curvatura media, H, es el campo de vectores normal definido por medio de la condición $g(H, \xi) = \frac{1}{2} tr(T_\xi)$, para cualquier campo de vectores ξ normal a S.

Si R denota el tensor curvatura de M, la ecuación de Codazzi establece que la componente normal de $R(x, y)z$ se expresa como

$$(R(x, y)z)^\perp = (\nabla_x B)(y, z) - (\nabla_y B)(x, z), \tag{4.3.6}$$

siendo x, y, z vectores tangentes a la subvariedad en p.

Sea $x \in T_pM$ un vector no nulo arbitrario y denotemos por π el plano paraholomorfo no degenerado determinado por $\{x, Jx\}$. Si se cumple el axioma de las esferas paraholomorfas en p, debe existir una subvariedad S totalmente umbílica con curvatura media paralela que pase por p, de tal forma que $T_pS = \pi$. Por ser S totalmente umbílica la segunda forma fundamental está en la dirección del vector curvatura media ($B(x, y) = g(x, y)H$) y, por tanto, la ecuación de Codazzi (4.3.6) se escribe como $(R(x,y)z)^\perp = g(y,z)\nabla^\perp_x H - g(x,z)\nabla^\perp_y H$, de donde se sigue que $(R(Jx,x)x - JR(x,Jx)Jx)^\perp = g(x,x)(\nabla^\perp_{Jx}H + J\nabla^\perp_x H)$. Entonces, como el vector curvatura media es paralelo, esta última expresión implica que $R_x(Jx) - JR_{Jx}(x) \sim Jx$, por lo que el resultado se sigue del Teorema 4.3.1. (En el caso del axioma de los planos paraholomorfos el resultado se obtiene de forma similar a la anterior utilizando (4.3.6), teniendo en cuenta que, en este caso, la segunda forma fundamental es nula por ser la subvariedad S totalmente geodésica). □

La constancia de la curvatura seccional paraholomorfa ha sido estudiada previamente en [GM1] y [GHV] en el marco de las variedades para–Kähler (véase también [CFG]). La particularidad esencial de las variedades para–Kähler está ligada al hecho de que la estructura paracompleja es paralela con respecto a la conexión de Levi Civita y, como consecuencia, el tensor curvatura verifica las identidades

$$R(X,Y,JZ,JW) = R(JX,JY,Z,W) = -R(X,Y,Z,W) \tag{4.3.7}$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y, Z, W sobre la variedad (es decir, R es un tensor curvatura para–Kähler). Aunque estas identidades no son válidas, en general, para el tensor curvatura de una variedad casi para–Hermítica, es posible construir una función curvatura para–Kähler, R', de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} R'(X,Y,Z,W) &= 3R(X,Y,Z,W) - 3R(X,Y,JZ,JW) - 3R(JX,JY,Z,W) \\ &\quad +3R(JX,JY,JZ,JW) - R(X,Z,JY,JW) - R(JX,JZ,Y,W) \\ &\quad +R(X,W,JY,JZ) + R(JX,JW,Y,Z) - R(X,JW,JY,Z) \\ &\quad -R(JX,W,Y,JZ) + R(X,JZ,JY,W) + R(JX,Z,Y,JW). \end{aligned}$$

El significado de R' queda reflejado en el siguiente teorema:

Teorema 4.3.2 *Sea (M,g,J) una variedad casi para–Hermítica. Entonces, la curvatura seccional paraholomorfa es constante c en un punto $p \in M$ si y sólo si*

$$R' = 4cF_0$$

en el punto p, donde F_0 es la función curvatura dada por

$$\begin{aligned} F_0(x,y,z,w) &= g(y,z)g(x,w) - g(x,z)g(y,w) + g(Jx,z)g(Jy,w) \\ &\quad -g(Jy,z)g(Jx,w) + 2g(Jx,y)g(Jz,w). \end{aligned}$$

Demostración. Después de bastantes cálculos (aunque sencillos) se comprueba que R' verifica (4.2.2). Además, si la curvatura seccional paraholomorfa en p es constante entonces, como $R'(x,Jx,Jx,x) = 16R(x,Jx,Jx,x)$ para cualquier vector x, se sigue que la curvatura seccional paraholomorfa de R' es también constante en el punto p, e igual a 16 veces la de R. Ahora, la demostración se completa como en [GM1]. (Nótese que en la demostración de [GM1, Cor. 3.5] sólo se utilizan las propiedades (4.2.2)). □

Observación 4.3.1 Teniendo en cuenta el resultado que proporciona el teorema anterior, es importante observar que en el caso particular de variedades para–Kähler la curvatura seccional paraholomorfa determina la curvatura. Sin embargo, este resultado no es válido para variedades casi para–Hermíticas arbitrarias, ni siquiera cuando la curvatura seccional paraholomorfa sea nula (cf. Ejemplo 4.7.2).

En la última parte de esta sección obtendremos una condición equivalente a la validez del lema de Schur. Para ello, en primer lugar introducimos dos campos de tensores de tipo $(0,2)$ derivados del tensor curvatura. Uno de ellos es el tensor de Ricci usual,

$$\rho(X,Y) = \operatorname{tr}\{Z \mapsto R(Z,X)Y\}, \tag{4.3.8}$$

y el segundo es el tensor *–Ricci, definido por

$$\rho^*(X,Y) = \operatorname{tr}\{Z \mapsto -JR(Z,X)JY\}. \tag{4.3.9}$$

Ahora, si τ y τ^* denotan la curvatura escalar y la curvatura *–escalar, respectivamente, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 4.3.3 *Sea (M^{2n}, g, J) una variedad casi para–Hermítica de curvatura seccional paraholomorfa puntualmente constante. Entonces, H es constante en M si y sólo si la curvatura escalar $\tau - 3\tau^*$ es constante en M.*

Demostración. Como $R' = c(p)F_0$ en cualquier punto $p \in M$, debe cumplirse que

$$\tau' = c(p)\tau_0, \tag{4.3.10}$$

donde τ' y τ_0 denotan la curvatura escalar de las funciones curvatura R' y F_0, respectivamente. A continuación calculamos estas curvaturas escalares. Para ello, consideremos $\{e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n\}$ una base ortonormal de T_pM. Si ρ' denota el tensor de Ricci asociado a R', se tiene que

$$\tau' = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{e_i} \Big\{ \rho'(e_i, e_i) - \rho'(Je_i, Je_i) \Big\} = 2 \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{e_i} \rho'(e_i, e_i). \tag{4.3.11}$$

Ahora,

$$\rho'(e_i, e_i) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{e_k} \Big\{ R'(e_k, e_i, e_i, e_k) - R'(Je_k, e_i, e_i, Je_k) \Big\}$$

y, utilizando la primera identidad de Bianchi, de la definición de R' se sigue que

$$\begin{aligned} R'(e_k, e_i, e_i, e_k) &= 3R(e_k, e_i, e_i, e_k) + R(Je_k, e_i, e_i, Je_k) \\ &\quad + R(e_k, Je_i, Je_i, e_k) + 3R(Je_k, Je_i, Je_i, Je_k) \\ &\quad - 10R(e_k, e_i, Je_i, Je_k) + 2R(Je_k, e_i, Je_i, e_k), \\ R'(Je_k, e_i, e_i, Je_k) &= R(e_k, e_i, e_i, e_k) + 3R(Je_k, e_i, e_i, Je_k) \\ &\quad + 3R(e_k, Je_i, Je_i, e_k) + R(Je_k, Je_i, Je_i, Je_k) \\ &\quad + 2R(e_k, e_i, Je_i, Je_k) - 10R(Je_k, e_i, Je_i, e_k), \end{aligned}$$

por lo que la expresión anterior se transforma en

$$\begin{aligned}\rho'(e_i,e_i) &= 2\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{e_k}\Big\{R(e_k,e_i,e_i,e_k)-R(Je_k,e_i,e_i,Je_k)\Big\}\\ &\quad -2\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{e_k}\Big\{R(e_k,Je_i,Je_i,e_k)-R(Je_k,Je_i,Je_i,Je_k)\Big\}\\ &\quad -12\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{e_k}\Big\{R(e_k,e_i,Je_i,Je_k)-R(Je_k,e_i,Je_i,e_k)\Big\}.\end{aligned}$$

Esta expresión implica que $\rho'(e_i,e_i)=2\Big\{\rho(e_i,e_i)-\rho(Je_i,Je_i)-6\rho^*(e_i,e_i)\Big\}$ y, por tanto, de (4.3.11) se obtiene que

$$\tau' = 4(\tau - 3\tau^*). \tag{4.3.12}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que $\tau_0 = 2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{e_i}\rho_0(e_i,e_i)$, como el tensor de Ricci ρ_0 asociado a F_0 cumple que $\rho_0(e_i,e_i)=\varepsilon_{e_i}(2n+2)$, se obtiene que

$$\tau_0 = 4n(n+1). \tag{4.3.13}$$

Finalmente, utilizando las expresiones (4.3.12) y (4.3.13) en (4.3.10) se obtiene que $\tau - 3\tau^* = c(p)n(n+1)$, de donde se sigue el resultado. □

4.4 Variedades isotrópicas. Expresión del tensor curvatura

El Teorema 4.3.1 pone de manifiesto el distinto comportamiento de los vectores nulos en relación a los vectores espaciales y temporales en la caracterización de la constancia de la curvatura seccional paraholomorfa. Motivados por este hecho, a continuación introducimos las variedades isotrópicas. Esta sección se dedica al estudio de esta clase de variedades, obteniendo una expresión para el tensor curvatura de las mismas, estudio que será completado en la sección 4.5 con un resultado de clasificación local.

Definición 4.4.1 *Sea (M,g,J) una variedad casi para–Hermítica. Diremos que M es isotrópica si para cualquier vector nulo u tangente a la variedad se cumple que*

$$R_u(Ju) - JR_{Ju}(u) = c_u Ju \tag{4.4.1}$$

para algún número real c_u.

Observación 4.4.1 El resultado del Teorema 4.3.1 es válido para cualquier función curvatura definida sobre un espacio vectorial para–Hermítico (nótese que en la demostración de dicho teorema sólo se utilizan las tres primeras propiedades en (4.2.2) del tensor curvatura de la variedad). Este hecho será importante en el momento de determinar la curvatura de las variedades casi para–Hermíticas isotrópicas (cf. Teorema 4.4.1). Nótese también que una variedad casi para–Hermítica tiene curvatura seccional paraholomorfa puntualmente constante si y sólo si es isotrópica con $c_u = 0$ para cualquier vector nulo u tangente a la variedad. En la sección 4.7 mostraremos que la clase de variedades casi para–Hermíticas isotrópicas es estrictamente más amplia que la de variedades casi para–Hermíticas de curvatura seccional paraholomorfa constante (cf. Ejemplo 4.7.3).

Comenzamos probando que el carácter isotrópico de una variedad casi para–Hermítica es equivalente a la anulación de la restricción del tensor curvatura de la variedad a planos paraholomorfos degenerados. Este hecho es una condición necesaria para la posible extensión con continuidad de la función curvatura seccional paraholomorfa a toda la Grassmanniana de 2–planos paraholomorfos. Para ello necesitamos el siguiente resultado:

Lema 4.4.1 *Sea (M^{2n}, g, J) una variedad casi para–Hermítica, y consideremos un vector nulo u tangente a la variedad y un vector ξ en $\langle Ju\rangle^\perp$. Si se verifica que $g(\xi, v) = 0$ para cualquier vector nulo $v \in \langle Ju\rangle^\perp$, entonces existe un número real λ tal que $\xi = \lambda Ju$.*

Demostración. Escribiendo el vector nulo u de la forma $u = k(x + y)$, con $k \in \mathbb{R}$, siendo x, y vectores ortonormales tales que $g(x, x) = 1 = -g(y, y)$, podemos considerar una base ortonormal de la forma $\{Jx, a_2, \ldots, a_n, Jy, b_2, \ldots, b_n\}$, donde $\{Jx, a_2, \ldots, a_n\}$ son temporales y $\{Jy, b_2, \ldots, b_n\}$ son espaciales. Entonces, $\{Ju, a_2, \ldots, a_n, b_2, \ldots, b_n\}$ son $2n - 1$ vectores linealmente independientes en $\langle Ju\rangle^\perp$ y, por lo tanto, constituyen una base para este subespacio (nótese que $\langle Ju\rangle^\perp$ no puede tener dimensión $2n$ pues, en ese caso, el vector Jx sería ortogonal a Ju, lo que no es cierto pues $g(Ju, Jx) = -k \neq 0$).

Ahora, como $\xi \in \langle Ju\rangle^\perp$, se tiene que

$$\xi = \lambda Ju + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i a_i + \sum_{i=2}^{n} \beta_i b_i, \tag{4.4.2}$$

con $\lambda, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 2, \ldots, n$.

Por hipótesis, $g(\xi, v) = 0$ para todo vector nulo $v \in \langle Ju\rangle^\perp$. Aplicándolo para los vectores nulos (pertenecientes a $\langle Ju\rangle^\perp$): $a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3, \ldots, a_n \pm b_n$, se obtiene entonces que $\alpha_2 \pm \beta_2 = 0 = \alpha_3 \pm \beta_3 = \cdots = \alpha_n \pm \beta_n$ y, por lo tanto, $\alpha_i = \beta_i = 0$, $i = 2, \ldots, n$. Así, (4.4.2) se reduce a $\xi = \lambda Ju$, lo que prueba el lema. □

Proposición 4.4.1 *Sea (M, g, J) una variedad casi para–Hermítica. M es isotrópica si y sólo si*

$$R(u, Ju, Ju, u) = 0 \tag{4.4.3}$$

para cualquier vector nulo u tangente a la variedad.

Demostración. Si la variedad es isotrópica, como $g(c_u Ju, Ju) = 0$ para cualquier vector nulo u, de (4.4.1) se sigue que

$$0 = g(R_u(Ju) - JR_{Ju}(u), Ju) = R(Ju, u, u, Ju) + R(u, Ju, Ju, u) = 2R(u, Ju, Ju, u),$$

lo que prueba (4.4.3).

Recíprocamente, si se cumple (4.4.3) entonces $R_u(Ju) - JR_{Ju}(u) \in \langle Ju \rangle^\perp$. Sea ahora v cualquier vector nulo ortogonal a Ju y consideremos los vectores nulos de la forma $Ju + \lambda v$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $R(Ju + \lambda v, J(Ju + \lambda v), J(Ju + \lambda v), Ju + \lambda v) = 0$, desarrollando esta expresión se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &= 2\lambda^3 \Big\{ R(Ju, Jv, Jv, v) + R(v, u, Jv, v) \Big\} \\ &\quad + \lambda^2 \Big\{ R(Ju, Jv, Jv, Ju) + R(v, u, u, v) + 2R(Ju, u, Jv, v) + 2R(Ju, Jv, u, v) \Big\} \\ &\quad + 2\lambda \Big\{ R(Ju, u, u, v) + R(Ju, u, Jv, Ju) \Big\}. \end{aligned}$$

Entonces, deben anularse todos los coeficientes del polinomio anterior y, en particular, el correspondiente a λ, lo que implica que $R(Ju, u, u, v) + R(u, Ju, Ju, Jv) = 0$, es decir, $g(R_u(Ju) - JR_{Ju}(u), v) = 0$. Así, hemos probado que el vector $R_u(Ju) - JR_{Ju}(u)$ pertenece al subespacio $\langle Ju \rangle^\perp$ y es ortogonal a cualquier vector nulo perteneciente a ese subespacio, por lo que el resultado es consecuencia del Lema 4.4.1. □

El principal objetivo de esta sección es obtener la expresión de la curvatura de las variedades casi para–Hermíticas isotrópicas y, teniendo en cuenta que estas variedades constituyen una generalización de las variedades casi para–Hermíticas de curvatura seccional paraholomorfa constante, el resultado que obtengamos debe generalizar el resultado del Teorema 4.3.2. Una observación clave para llevar a cabo lo expuesto anteriormente es la posibilidad de construir ciertas *funciones curvatura isotrópicas*, es decir, funciones curvatura que verifiquen (4.4.1) o, equivalentemente, (4.4.3). Así, si φ es un campo de tensores simétrico de tipo $(0, 2)$ *para–Hermítico* sobre M, es decir, tal que $\varphi(JX, JY) = -\varphi(X, Y)$, definimos

$$\begin{aligned} F^\varphi(X, Y, Z, W) &= g(Y, Z)\varphi(X, W) - g(X, Z)\varphi(Y, W) + g(JX, Z)\varphi(JY, W) \\ &\quad - g(JY, Z)\varphi(JX, W) + 2g(JX, Y)\varphi(JZ, W) \\ &\quad + \varphi(Y, Z)g(X, W) - \varphi(X, Z)g(Y, W) + \varphi(JX, Z)g(JY, W) \\ &\quad - \varphi(JY, Z)g(JX, W) + 2\varphi(JX, Y)g(JZ, W). \end{aligned}$$

Después de algunos cálculos laboriosos se obtiene que F^φ es una función curvatura para–Kähler y, además, es isotrópica, es decir, para cada vector nulo u existe una constante real c_u^φ tal que el tensor curvatura $\tilde{F}^\varphi$ satisface $\tilde{F}_u^\varphi(Ju) - J\tilde{F}_{Ju}^\varphi(u) = c_u^\varphi\, Ju$.

Por lo tanto, si (M, g, J) es una variedad casi para–Hermítica isotrópica, para obtener la expresión de su curvatura será suficiente encontrar un campo de tensores simétrico, φ, de tal forma que c_u^φ coincida con c_u para cualquier vector nulo u. Para obtener el campo de tensores φ deseado, calculamos los valores de los tensores de Ricci y *–Ricci sobre vectores nulos. Comenzamos con el siguiente resultado:

Lema 4.4.2 *Sea (M, g, J) una variedad casi para–Hermítica isotrópica y z un vector no nulo. Para cada vector nulo u en $\langle\{z, Jz\}\rangle^\perp$ se cumple que*

$$\begin{aligned}2\varepsilon_z c_u &= R(u,z,z,u) - R(u,Jz,Jz,u) - R(Ju,z,z,Ju) \\ &\quad + R(Ju,Jz,Jz,Ju) - 6R(u,Ju,Jz,z).\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Demostración. Sea v un vector nulo en $\langle\{z, Jz\}\rangle^\perp$ con $g(u,v) = -\frac{1}{2}$. Entonces, el vector $w_t = \frac{1}{\sqrt{t}}(u + t\varepsilon_z v)$ es no nulo para cada $t > 0$, con $g(w_t, w_t) = -g(z,z)$ y $g(w_t, z) = 0$. Como $z \pm w_t$ son vectores nulos, y la variedad es isotrópica, se sigue que

$$R(z \pm w_t, J(z \pm w_t), J(z \pm w_t), z \pm w_t) = 0,$$

de donde, después de algunos cálculos, se sigue que

$$\begin{aligned}R(z,Jz,Jz,z) + R(w_t,Jw_t,Jw_t,w_t) &= -2R(z,Jz,Jw_t,w_t) \\ &\quad -2R(z,Jw_t,Jz,w_t) - R(z,Jw_t,Jw_t,z) - R(w_t,Jz,Jz,w_t).\end{aligned}$$

Ahora, desarrollando esta última expresión, teniendo en cuenta que la variedad es isotrópica y multiplicando por t, se sigue que

$$\begin{aligned}0 &= tR(z,Jz,Jz,z) + \varepsilon_z G(u,v) + t^2\varepsilon_z G(v,u) + tL(u,v) \\ &\quad + 2R(z,Jz,Ju + t\varepsilon_z Jv, u + t\varepsilon_z v) + 2R(z, Ju + t\varepsilon_z Jv, Jz, u + t\varepsilon_z v) \\ &\quad + R(z, Ju + t\varepsilon_z Jv, Ju + t\varepsilon_z Jv, z) + R(u + t\varepsilon_z v, Jz, Jz, u + t\varepsilon_z v).\end{aligned}$$

Entonces, tomando límites cuando $t \to 0$,

$$R(u,Jz,Jz,u) + R(Ju,z,z,Ju) + 2R(u,Ju,Jz,z) + 2R(z,Ju,Jz,u) + \varepsilon_z G(u,v) = 0.$$

Poniendo Jz en lugar de z en esta última expresión y restando se tiene que

$$\begin{aligned}0 &= 2\varepsilon_z G(u,v) + 4R(u,Ju,Jz,z) + 2R(z,Ju,Jz,u) + 2R(u,z,Jz,Ju) \\ &\quad + R(u,Jz,Jz,u) + R(Ju,z,z,Ju) - R(u,z,z,u) - R(Ju,Jz,Jz,Ju),\end{aligned}$$

y utilizando la primera identidad de Bianchi se sigue que

$$\begin{aligned}0 &= 2\varepsilon_z G(u,v) + 6R(u,Ju,Jz,z) + R(u,Jz,Jz,u) \\ &\quad + R(Ju,z,z,Ju) - R(u,z,z,u) - R(Ju,Jz,Jz,Ju).\end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $g(u,v) = -\dfrac{1}{2}$, se cumple que

$$\begin{aligned} G(u,v) &= 2R(u,Ju,Jv,u) + 2R(u,Ju,Ju,v) \;=\; 2g(R_u(Ju) - JR_{Ju}(u), Jv) \\ &= 2g(c_u Ju, Jv) \;=\; -2c_u g(u,v) \;=\; c_u, \end{aligned}$$

por lo que (4.4.4) se sigue de la expresión anterior. □

Lema 4.4.3 *Sea (M,g,J) una variedad casi para–Hermítica isotrópica y u un vector nulo. Se cumple que*

(i) $R(Jx,u,u,Jx) - R(Jy,u,u,Jy) + R(x,Ju,Ju,x) - R(y,Ju,Ju,y) = -2c_u$*,*

(ii) $R(Ju,u,x,Jx) - R(Ju,u,y,Jy) = -c_u$*,*

siendo x, y vectores ortonormales, espacial y temporal respectivamente, verificando que $u = k(x+y)$, con $k \in \mathbb{R}$.

Demostración. Por ser $u = k(x+y)$, se tiene que

$$\begin{aligned} &R(Jx,u,u,Jx) - R(Jy,u,u,Jy) + R(x,Ju,Ju,x) - R(y,Ju,Ju,y) \\ &\quad = 2k^2 \Big\{ R(Jx,x,x,Jx) - R(Jy,y,y,Jy) + R(Jx,x,y,Jx) \\ &\qquad + R(Jx,x,x,Jy) - R(Jy,y,x,Jy) - R(Jy,y,y,Jx) \Big\}. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Como la variedad es isotrópica, entonces $R_u(Ju) - JR_{Ju}(u) = c_u Ju$ y, por tanto, si $v = \dfrac{1}{k}(x-y)$ se tiene que

$$\begin{aligned} -2c_u &= g(R_u(Ju) - JR_{Ju}(u), Jv) \\ &= R(Ju,u,u,Jv) + R(u,Ju,Ju,v) \\ &= k^2 \Big\{ R(Jx+Jy, x+y, x+y, Jx-Jy) + R(x+y, Jx+Jy, Jx+Jy, x-y) \Big\}, \end{aligned}$$

Desarrollando esta expresión se obtiene que

$$\begin{aligned} -c_u &= k^2 \Big\{ R(Jx,x,x,Jx) - R(Jy,y,y,Jy) + R(Jx,x,y,Jx) \\ &\qquad + R(Jx,x,x,Jy) - R(Jy,y,x,Jy) - R(Jy,y,y,Jx) \Big\}. \end{aligned}$$

Entonces, (i) se sigue utilizando esta última igualdad en (4.4.5) y, además, esta última expresión permite probar la condición (ii), sin más que tener en cuenta que

$$\begin{aligned} &R(Ju,u,x,Jx) - R(Ju,u,y,Jy) \\ &\quad = k^2 \Big\{ R(Jx,x,x,Jx) - R(Jy,y,y,Jy) + R(Jx,x,y,Jx) \\ &\qquad + R(Jx,x,x,Jy) - R(Jy,y,x,Jy) - R(Jy,y,y,Jx) \Big\}, \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el lema. □

Lema 4.4.4 *Sea (M, g, J) una variedad casi para–Hermítica y $u \in T_pM$ un vector nulo tal que $u \neq \pm Ju$. Entonces, se cumple una de las siguientes condiciones:*

(i) Existen vectores ortonormales $x, y \in T_pM$, con $\langle\{x, Jx\}\rangle \perp \langle\{y, Jy\}\rangle$, tales que $u = k(x + y)$ para algún número real k, o

(ii) existe una sucesión $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ de vectores nulos que verifican la condición (i) de tal forma que $u = \lim_{\alpha\to\infty} u_\alpha$.

Demostración. Sean u un vector nulo y x, y vectores no nulos ortogonales tales que $u = x + y$, y consideremos el subespacio $V = \langle\{x, Jx, y, Jy\}\rangle$.

Si V es no degenerado, definimos $W_1 = \langle\{x, Jx\}\rangle$ y denotamos por W_2 su complemento ortogonal en V. Entonces, $V = W_1 \oplus W_2$, y podemos considerar una descomposición ortogonal $u = u_1 + u_2$, donde u_i es la componente de u en W_i, $i = 1, 2$. Si u_1 es no nulo, entonces u_2 también y, después de normalizar ambos vectores se obtiene la descomposición deseada, lo que prueba (i).

Si u_1 es un vector nulo (nótese que, en este caso, tanto W_1 como W_2 tienen métrica inducida de Lorentz) procedemos de la forma siguiente. Si $dim\, V = 2$, debe cumplirse que $V = \langle\{x, Jx\}\rangle = \langle\{y, Jy\}\rangle$. Entonces, $u = x \pm Jx$ y, por tanto, $Ju = \pm u$, lo que es una contradicción. Por otra parte, como V es no degenerado la dimensión de V no puede ser 3. Así, nos queda por analizar el caso $dim\, V = 4$. Elegimos vectores nulos $v_i \in W_i$, $i = 1, 2$, de tal forma que $g(u_1, v_1) = 1$ y $g(u_2, v_2) = -1$. Se sigue entonces que $u_\alpha = u_1 + u_2 + \frac{1}{\alpha}(v_1 + v_2)$ determina una sucesión de vectores nulos que aproximan a u. Además, nótese que cada vector u_α se puede escribir de la forma $u_\alpha = k_\alpha(x_\alpha + y_\alpha)$, donde x_α, y_α generan planos paraholomorfos ortogonales, para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}$, sin más que elegir

$$x_\alpha = \left[\frac{\alpha}{2}\right]^{1/2}\left\{u_1 + \frac{1}{\alpha}v_1\right\}, \quad y_\alpha = \left[\frac{\alpha}{2}\right]^{1/2}\left\{u_2 + \frac{1}{\alpha}v_2\right\}, \qquad k_\alpha = \left[\frac{2}{\alpha}\right]^{1/2}.$$

Para finalizar la demostración resta por considerar el caso en que V es un subespacio degenerado. Como $g(x, x) = 1 = -g(y, y)$, existe una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ de vectores unitarios espaciales que aproximan a x de forma que el subespacio $V_\alpha = \langle\{x_\alpha, Jx_\alpha, y, Jy\}\rangle$ es no degenerado para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}$ (véase la demostración del Teorema 4.3.1). Así, es fácil construir una sucesión de vectores nulos $\tilde{u}_\alpha$ que aproximen al vector u, verificándose además que $\tilde{u}_\alpha$ pertenece al subespacio V_α para cada $\alpha \in \mathbb{N}$. Como V_α es no degenerado para todo $\alpha \in \mathbb{N}$, se obtiene la sucesión deseada de vectores nulos que aproximan al vector u de acuerdo con (ii). □

Lema 4.4.5 *Sea (M^{2n}, g, J) una variedad casi para–Hermítica isotrópica. Entonces,*

$$\rho(u,u) - \rho(Ju,Ju) - 6\rho^*(u,u) = (2n+4)c_u \tag{4.4.6}$$

para cualquier vector nulo u tangente a la variedad.

Demostración. Probaremos (4.4.6) en dos pasos, correspondiéndose con los casos (i) y (ii) del Lema 4.4.4. En primer lugar consideramos vectores nulos u que admiten una expresión de la forma $u = k(x+y)$ para algún $k \in \mathbb{R}$, donde x, y son vectores unitarios, espacial y temporal respectivamente, tales que $\langle\{x, Jx\}\rangle \perp \langle\{y, Jy\}\rangle$.

Ahora, si u es de esa forma, elegimos $\{e_1, \ldots, e_{n-2}, Je_1, \ldots, Je_{n-2}\}$ de tal forma que $\{x, Jx, y, Jy, e_1, \ldots, e_{n-2}, Je_1, \ldots, Je_{n-2}\}$ sea una base ortonormal. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\rho(u,u) - \rho(Ju,Ju)\\
&= R(x,u,u,x) - R(y,u,u,y) + R(Jx,Ju,Ju,Jx) - R(Jy,Ju,Ju,Jy)\\
&\quad -R(Jx,u,u,Jx) + R(Jy,u,u,Jy) - R(x,Ju,Ju,x) + R(y,Ju,Ju,y)\\
&\quad +\sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_{e_i} \Big\{R(e_i,u,u,e_i) + R(Je_i,Ju,Ju,Je_i) - R(Je_i,u,u,Je_i) - R(e_i,Ju,Ju,e_i)\Big\}
\end{aligned}$$

y, por otra parte,

$$\rho^*(u,u) = R(Ju,u,x,Jx) - R(Ju,u,y,Jy) + \sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_{e_i} R(Ju,u,e_i,Je_i).$$

Ahora, como $u = k(x+y)$, es inmediato comprobar que

$$\begin{aligned}
0 &= R(x,u,u,x) - R(y,u,u,y)\\
&= R(Jx,Ju,Ju,Jx) - R(Jy,Ju,Ju,Jy),
\end{aligned}$$

lo que, junto con el Lema 4.4.3, reduce las expresiones anteriores a

$$\begin{aligned}
\rho(u,u) - \rho(Ju,Ju) &= 2c_u + \sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_{e_i} \Big\{R(e_i,u,u,e_i) + R(Je_i,Ju,Ju,Je_i)\\
&\quad -R(Je_i,u,u,Je_i) - R(e_i,Ju,Ju,e_i)\Big\}
\end{aligned}$$

y

$$\rho^*(u,u) = -c_u + \sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_{e_i} R(Ju,u,e_i,Je_i).$$

Entonces, se sigue que

$$\begin{aligned}\rho(u,u)-\rho(Ju,Ju)-6\rho^*(u,u) &= 8c_u \\ &+\sum_{i=1}^{n-2}\varepsilon_{e_i}\Big\{R(e_i,u,u,e_i)+R(Je_i,Ju,Ju,Je_i) \\ &-R(Je_i,u,u,Je_i)-R(e_i,Ju,Ju,e_i)-6R(Ju,u,e_i,Je_i)\Big\},\end{aligned}$$

por lo que (4.4.6) se obtiene a partir de esta expresión utilizando el Lema 4.4.2.

Para un vector nulo arbitrario u, si $Ju=\pm u$ el resultado es obvio. En el caso de ser $Ju\neq\pm u$, elegimos una sucesión de vectores nulos $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ que aproximen al vector u, de forma que cada vector u_α verifica la condición (i) del Lema 4.4.4. Así, (4.4.6) se cumple para cada vector nulo u_α y, por tanto, el resultado se obtiene por paso al límite. □

El lema anterior sugiere la definición de la siguiente forma bilineal simétrica,

$$\varphi(x,y):=\rho(x,y)-\rho(Jx,Jy)-3\rho^*(x,y)+3\rho^*(Jx,Jy). \tag{4.4.7}$$

Nótese que $\varphi(Jx,Jy)=-\varphi(x,y)$ y, además, $\varphi(u,u)=(2n+4)c_u$ para cualquier vector nulo u, de acuerdo con (4.4.6).

En lo que sigue F_1 denotará la función curvatura obtenida de F^φ para el caso particular de la forma φ definida por (4.4.7). A continuación probamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.4.1 *Sea (M^{2n},g,J) una variedad casi para–Hermítica. Entonces, M es isotrópica si y sólo si*

$$R'=-\frac{\tau-3\tau^*}{(n+1)(n+2)}F_0+\frac{1}{n+2}F_1. \tag{4.4.8}$$

Demostración. Es inmediato comprobar que si se cumple (4.4.8) entonces M es isotrópica, pues F_0 y F_1 son isotrópicos y $R'(u,Ju,Ju,u)=16R(u,Ju,Ju,u)$ para cualquier vector nulo u tangente a la variedad. Recíprocamente, para probar la necesidad de (4.4.8), consideramos la función curvatura $F=R-\dfrac{1}{16(n+2)}F_1$. Como $\varphi(u,u)=(2n+4)c_u$, se sigue que $\tilde F_u(Ju)-J\tilde F_{Ju}(u)=0$ y, por tanto, la función curvatura F' asociada debe ser un múltiplo de F_0 en cada punto de la variedad. Además, como F_1 satisface (4.3.7), debe cumplirse que $16F_1=F_1'$, lo que muestra que $R'-\dfrac{1}{(n+2)}F_1=CF_0$, siendo C una función diferenciable sobre M.

Resta determinar la función C, para lo que procedemos de la forma siguiente. Como $R' = CF_0 + \dfrac{1}{(n+2)}F_1$, si τ', τ_1 y τ_0 denotan las curvaturas escalares de R', F_1 y F_0 respectivamente, se tiene que $\tau' = C\tau_0 + \dfrac{1}{n+2}\tau_1$. Se cumple que $\tau' = 4(\tau - 3\tau^*)$ y $\tau_0 = 4n(n+1)$ (véase la demostración del Teorema 4.3.3). Además, de forma análoga se comprueba que $\tau_1 = 8(n+1)(\tau - 3\tau^*)$. Así, $C = -\dfrac{(\tau - 3\tau^*)}{(n+1)(n+2)}$, lo que completa la demostración. □

Como consecuencia de (4.4.6) y (4.4.8) obtenemos a continuación una condición necesaria y suficiente para que una variedad casi para–Hermítica isotrópica sea de curvatura seccional paraholomorfa puntualmente constante en términos del campo de tensores φ definido por (4.4.7).

Corolario 4.4.1 *Una variedad casi para–Hermítica isotrópica tiene curvatura seccional paraholomorfa puntualmente constante si y sólo si la forma bilineal simétrica φ es un múltiplo del tensor métrico en cada punto.*

Demostración. Si φ es un múltiplo de la métrica g, entonces c_u se anula idénticamente para cualquier vector nulo como consecuencia de (4.4.6) y, por tanto, el resultado se sigue del Teorema 4.3.1, (*iii*). Recíprocamente, si H es constante en cada punto, entonces $c_u = 0$ para cualquier vector nulo u y, así, $\varphi(u,u) = 0$ para cualquier vector nulo u. Finalmente, que φ es un múltiplo de la métrica se obtiene de [N2, Lema A]. □

4.5 Clasificación local de variedades isotrópicas

La expresión obtenida para el tensor curvatura de una variedad isotrópica en el Teorema 4.4.1 nos permitirá obtener un resultado de clasificación local para tales variedades. Comenzamos analizando, en primer lugar, el caso para–Kähler. Nótese que, en este caso, ρ y ρ^* verifican que $\rho = -\rho^*$ y, por tanto, $\tau = -\tau^*$. Entonces, la forma bilineal simétrica φ definida en (4.4.7) se reduce a $\varphi(x,y) = 8\rho(x,y)$. Además, teniendo en cuenta que el tensor R' coincide con $16R$ por ser (M,g,J) para–Kähler, como consecuencia el Teorema 4.4.1 se expresa, para estas variedades, de la forma siguiente:

Teorema 4.5.1 *Sea (M^{2n}, g, J) una variedad para–Kähler. Entonces, M es isotrópica si y sólo si*

$$R = -\frac{\tau}{4(n+1)(n+2)}F_0 + \frac{1}{2(n+2)}F_1, \qquad (4.5.1)$$

siendo F_0 y F_1 las funciones curvatura definidas por

$$\begin{aligned} F_0(x,y,z,w) &= g(y,z)g(x,w) - g(x,z)g(y,w) + g(Jx,z)g(Jy,w) \\ &\quad -g(Jy,z)g(Jx,w) + 2g(Jx,y)g(Jz,w), \\ F_1(x,y,z,w) &= g(y,z)\rho(x,w) - g(x,z)\rho(y,w) + g(Jx,z)\rho(Jy,w) \\ &\quad -g(Jy,z)\rho(Jx,w) + 2g(Jx,y)\rho(Jz,w) \\ &\quad +\rho(y,z)g(x,w) - \rho(x,z)g(y,w) + \rho(Jx,z)g(Jy,w) \\ &\quad -\rho(Jy,z)g(Jx,w) + 2\rho(Jx,y)g(Jz,w). \end{aligned}$$

El análisis de la expresión (4.5.1) motiva el estudio de las variedades para–Kähler isotrópicas en las cuales la curvatura escalar es constante. En este sentido, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.5.2 *Sea (M^{2n}, g, J) una variedad para–Kähler conexa isotrópica. Supongamos que la curvatura escalar es constante y que el tensor de Ricci es diagonalizable. Entonces,*

(a) M es un espacio de curvatura seccional paraholomorfa constante, o

(b) M es localmente isométrica a un producto $M_1 \times M_2$ de variedades para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante c y $-c$ respectivamente.

Demostración. En primer lugar mostraremos que una variedad para–Kähler es localmente simétrica si y sólo si la curvatura escalar es constante. La necesidad de esta condición es evidente. Por lo tanto, probaremos el recíproco. Como la curvatura de la variedad está dada por (4.5.1), por la segunda identidad de Bianchi se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = \ & \sigma_{(X,Y,T)} \nabla_T \Big\{ g(Y,Z)\rho(X,W) - g(X,Z)\rho(Y,W) + g(JX,Z)\rho(JY,W) \\ & -g(JY,Z)\rho(JX,W) + 2g(JX,Y)\rho(JZ,W) + \rho(Y,Z)g(X,W) - \rho(X,Z)g(Y,W) \\ & +\rho(JX,Z)g(JY,W) - \rho(JY,Z)g(JX,W) + 2\rho(JX,Y)g(JZ,W) \Big\}, \end{aligned}$$

donde $\sigma_{(X,Y,T)}$ representa la suma cíclica extendida a X, Y, T.

Sea $\{E_1, \ldots, E_{2n}\}$ una referencia local ortonormal de campos de vectores sobre M. Poniendo $T = W = E_i$, multiplicando por $\varepsilon_i = g(E_i, E_i)$ y sumando en $i = 1, \ldots, 2n$ se obtiene, después de largos cálculos,

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & -(2n+3)\Big\{(\nabla_X\rho)(Y,Z)-(\nabla_Y\rho)(X,Z)\Big\}\\
& -(\nabla_{JX}\rho)(JY,Z)+(\nabla_{JY}\rho)(JX,Z)+2(\nabla_{JZ}\rho)(JX,Y)\\
& -g(X,Z)\sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i(\nabla_{E_i}\rho)(Y,E_i)+g(JX,Z)\sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i(\nabla_{E_i}\rho)(JY,E_i)\\
& +g(Y,Z)\sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i(\nabla_{E_i}\rho)(X,E_i)-g(JY,Z)\sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i(\nabla_{E_i}\rho)(JX,E_i)\\
& +2g(JX,Y)\sum_{i=1}^{2n}\varepsilon_i(\nabla_{E_i}\rho)(JZ,E_i)-g(Y,Z)\nabla_X\tau+g(X,Z)\nabla_Y\tau.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que la curvatura escalar es constante, se sigue que (véase, por ejemplo, [O, pág. 88]) $(div\ \rho)(X)=0$ para cualquier campo de vectores X. Utilizando estas condiciones en la expresión anterior se tiene que

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & -(2n+3)\Big\{(\nabla_X\rho)(Y,Z)-(\nabla_Y\rho)(X,Z)\Big\}\\
& -(\nabla_{JX}\rho)(JY,Z)+(\nabla_{JY}\rho)(JX,Z)+2(\nabla_{JZ}\rho)(JX,Y).
\end{aligned}
\tag{4.5.2}
$$

Se sigue de (4.3.7), después de algunos cálculos, que el tensor de Ricci de una variedad para–Kähler verifica $(\nabla_X\rho)(Y,JZ)+(\nabla_Y\rho)(Z,JX)+(\nabla_Z\rho)(X,JY)=0$. Entonces, de (4.5.2) se sigue que $(\nabla_{JZ}\rho)(JX,Y)=0$, lo que muestra que el tensor de Ricci es paralelo y, por tanto, la variedad es localmente simétrica por (4.5.1).

Como M es localmente simétrica y el tensor de Ricci es diagonalizable, los autovalores del operador de Ricci son constantes y los correspondientes autoespacios definen distribuciones paralelas sobre M. Entonces, M es localmente un producto de espacios Einstein. Además, como las variedades integrales de esas distribuciones son totalmente geodésicas, necesariamente son variedades para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante. Así, M es localmente un producto $M_1(c_1)\times\cdots\times M_k(c_k)$ de variedades para–Kähler con curvatura seccional paraholomorfa constante.

Ahora, si el número de factores se reduce a uno, se tiene el caso (a). Para finalizar la demostración mostraremos que, en otro caso, M es localmente llana o el número de factores es exactamente dos, obteniéndose así (b). Supongamos que $M=M_1(c_1)\times M_2(c_2)\times M_3(c_3)$. Existen entonces campos de vectores nulos de la forma $X=(X_1,X_2,0)$, $Y=(Y_1,0,Y_3)$ y $Z=(Z_1,Z_2,Z_3)$. Así, utilizando la condición de isotropía para X e Y se sigue que $c_1=-c_2=-c_3$. Entonces, M es localmente un producto $M_1(c)\times M_2(-c)\times M_3(-c)$. De nuevo utilizando la condición de isotropía, en este caso con Z, se obtiene que $c=0$, lo que muestra que M es localmente llana. Análogamente se prueba que M es llana si el número de autovalores distintos del operador de Ricci es mayor que dos. Finalmente, en el caso de dos autovalores distintos, se obtiene (b) procediendo de forma similar a la anterior. □

Observación 4.5.1

1. Nótese que (TM, g^C, J^C) es una variedad para–Kähler isotrópica siempre que la variedad base (M, g, J) es una variedad para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante c. En tal caso, (TM, g^C, J^C) es un espacio localmente simétrico y, sin embargo, no es un espacio de curvatura seccional paraholomorfa constante ni localmente isométrico a un producto como en el teorema anterior (si $c \neq 0$). Este hecho es debido a que el tensor de Ricci en (TM, g^C, J^C) no es diagonalizable salvo que sea nulo (cf. Ejemplo 4.7.5). Por tanto, la hipótesis de que el tensor de Ricci sea diagonalizable impuesta en el teorema anterior es estrictamente necesaria.

2. Nótese que una de las propiedades particulares que se derivan de ser M para–Kähler queda reflejada en el teorema anterior en el hecho de que el tensor curvatura R' (que coincide con el tensor curvatura R de M) satisface la segunda identidad de Bianchi. Esta última propiedad no es cierta, en general, para R'.

Para finalizar esta sección establecemos un resultado similar al Teorema 4.5.2 en el caso general de una variedad casi para–Hermítica isotrópica.

Teorema 4.5.3 *Sea (M, g, J) una variedad casi para–Hermítica isotrópica y supongamos que la forma bilineal φ es paralela. Entonces, si el operador Q_φ asociado a φ, definido por $\varphi(X, Y) = g(Q_\varphi(X), Y)$, es diagonalizable, se cumple que:*

(a) M tiene curvatura seccional paraholomorfa constante, o

(b) M es localmente isométrica a un producto $M = M_1(c) \times M_2(-c)$ de dos variedades casi para–Hermíticas de curvatura seccional paraholomorfa constante.

Demostración. Como en el teorema anterior, los autoespacios de Q_φ definen distribuciones paralelas sobre M y el resultado se obtiene de forma análoga. Nótese además que la curvatura seccional paraholomorfa es globalmente constante en cada factor de la descomposición, pues por ser Q_φ paralelo se tiene asegurada la constancia de la curvatura escalar $\tau - 3\tau^*$ (véase el Teorema 4.3.3). □

4.6 Acotación de la curvatura seccional paraholomorfa

El objetivo de esta sección es el estudio de ciertas condiciones de acotación sobre la curvatura seccional paraholomorfa de variedades casi para–Hermíticas. Comenzamos analizando el caso de variedades isotrópicas, en el que tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.6.1 *Sea (M^{2n}, g, J) una variedad casi para–Hermítica isotrópica, $n \geq 3$. La curvatura seccional paraholomorfa es puntualmente constante si y sólo si la curvatura de los planos paraholomorfos no degenerados contenidos en $\langle\{z, Jz\}\rangle^\perp$ está acotada inferiormente o superiormente para cualquier vector no nulo z.*

Demostración. Sea x un vector unitario espacial y consideremos el plano paraholomorfo $\pi_1 = \langle\{x, Jx\}\rangle$. Sea ahora y un vector unitario temporal de tal forma que $\pi_1 \perp \pi_2$, siendo $\pi_2 = \langle\{y, Jy\}\rangle$. Entonces, si λ, μ son números reales no nulos, con $\lambda^2 - \mu^2 = 1$, se tiene que $\lambda x + \mu y$, $\mu x + \lambda y$ son dos vectores unitarios, espacial y temporal respectivamente.

Como $n \geq 3$ y el subespacio $\langle\{x, Jx, y, Jy\}\rangle$ es no degenerado, existe un plano paraholomorfo no degenerado $\langle\{z, Jz\}\rangle$ en el complemento ortogonal $\langle\{x, Jx, y, Jy\}\rangle^\perp$ y, por tanto, $\pi_3 = \langle\{\lambda x + \mu y, J(\lambda x + \mu y)\}\rangle$ y $\pi_4 = \langle\{\mu x + \lambda y, J(\mu x + \lambda y)\}\rangle$ son planos paraholomorfos no degenerados contenidos en $\langle\{z, Jz\}\rangle^\perp$. Si suponemos que la curvatura seccional paraholomorfa está acotada inferiormente en los planos paraholomorfos no degenerados contenidos en $\langle\{z, Jz\}\rangle^\perp$, existe N tal que

$$N \leq H(\pi_3) = -R(\lambda x + \mu y, J(\lambda x + \mu y), J(\lambda x + \mu y), \lambda x + \mu y), \tag{4.6.1}$$

y, del mismo modo,

$$N \leq H(\pi_4) = -R(\mu x + \lambda y, J(\mu x + \lambda y), J(\mu x + \lambda y), \mu x + \lambda y). \tag{4.6.2}$$

Como $g(x, x) = 1 = -g(y, y)$, los vectores $u = x \pm y$ son nulos y, teniendo en cuenta que M es isotrópica, se tiene que $R(x \pm y, J(x \pm y), J(x \pm y), x \pm y) = 0$. Linealizando estas expresiones, es fácil comprobar que las funciones G y L definidas en (4.3.1) y (4.3.2), respectivamente, verifican $G(x, y) = -G(y, x)$ y $L(x, y) = -R(x, Jx, Jx, x) - R(y, Jy, Jy, y)$. Entonces, como $\lambda^2 - \mu^2 = 1$, (4.6.1) y (4.6.2) se transforman en

$$N \leq \lambda^2 \Big\{R(y, Jy, Jy, y) - R(x, Jx, Jx, x)\Big\} - R(y, Jy, Jy, y) - \lambda\mu G(x, y) \tag{4.6.3}$$

y

$$N \leq \lambda^2 \Big\{R(x, Jx, Jx, x) - R(y, Jy, Jy, y)\Big\} - R(x, Jx, Jx, x) + \lambda\mu G(x, y), \tag{4.6.4}$$

respectivamente, para cualesquiera λ, μ con $\lambda^2 - \mu^2 = 1$.

Como la expresión (4.6.3) sigue siendo cierta si sustituye μ por $-\mu$, se tiene que $N \leq \lambda^2 \Big\{R(y, Jy, Jy, y) - R(x, Jx, Jx, x)\Big\} - R(y, Jy, Jy, y) + \lambda\mu G(x, y)$ y, si sumamos esta expresión con (4.6.3), se obtiene que

$$N \leq \lambda^2 \Big\{R(y, Jy, Jy, y) - R(x, Jx, Jx, x)\Big\} - R(y, Jy, Jy, y). \tag{4.6.5}$$

La expresión (4.6.5) es válida para cualquier número real λ y, por tanto, debe ser $R(x, Jx, Jx, x) \leq R(y, Jy, Jy, y)$. De forma análoga, de la expresión (4.6.4) se sigue que $R(y, Jy, Jy, y) \leq R(x, Jx, Jx, x)$.

Concluimos entonces que $H(x) = H(y)$ siempre que $\langle\{x, Jx\}\rangle \perp \langle\{y, Jy\}\rangle$, siendo $g(x, x) = 1 = -g(y, y)$. Ahora, si $\langle\{x, Jx\}\rangle$ e $\langle\{y, Jy\}\rangle$ son dos planos paraholomorfos no degenerados tales que $\langle\{x, Jx, y, Jy\}\rangle$ es un subespacio degenerado, se puede suponer que $g(x, x) = 1 = -g(y, y)$ y elegir una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ de vectores espaciales unitarios que aproximen al vector x, de tal forma que $\langle\{x_\alpha, Jx_\alpha, y, Jy\}\rangle$ sea no degenerado para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}$. Así, $H(y) = H(x_\alpha)$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}$, por lo que la demostración finaliza por un proceso de paso al límite. $\square$

En el caso general, si M no se supone isotrópica, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.6.2 *Sea (M^{2n}, g, J) una variedad casi para–Hermítica, con $n \geq 3$. La curvatura seccional paraholomorfa es puntualmente constante si y sólo si la curvatura de los planos paraholomorfos no degenerados contenidos en $\langle\{z, Jz\}\rangle^\perp$ está acotada inferiormente y superiormente para cualquier vector no nulo z.*

Demostración. Sea u un vector nulo. Si $Ju = \pm u$, se sigue trivialmente que la restricción del tensor curvatura $R(u, Ju, Ju, u) = 0$. En lo que sigue suponemos que u verifica (i) del Lema 4.4.4. Como $n \geq 3$, podemos elegir un vector espacial z en $\langle\{u, Ju\}\rangle^\perp$. Como u es un vector nulo en $\langle\{z, Jz\}\rangle^\perp$, y la restricción de la métrica g a $\langle\{z, Jz\}\rangle^\perp$ es no degenerada con signatura $(n-1, n-1)$, podemos elegir un vector nulo v en $\langle\{z, Jz\}\rangle^\perp$ de tal forma que $g(u, v) = -\frac{1}{2}$. Así, para cualquier número real $t > 0$, $a_t = \dfrac{u + tv}{\sqrt{t}}$ es un vector unitario temporal.

Si la curvatura de los planos paraholomorfos no degenerados contenidos en $\langle\{z, Jz\}\rangle^\perp$ está acotada por N, entonces para el plano $\pi_t = \langle\{a_t, Ja_t\}\rangle$ se tiene que $|H(\pi_t)| \leq N$ y, por tanto,

$$|R(u + tv, J(u + tv), J(u + tv), u + tv)| \leq t^2 N$$

para cualquier $t > 0$. Tomando límites cuando $t \to 0$, obtenemos $R(u, Ju, Ju, u) = 0$.

Ahora, si u es un vector nulo arbitrario, procediendo como en el Lema 4.4.4 (ii), es posible aproximarlo por medio de una sucesión de vectores nulos verificando la condición (i) en el lema mencionado. Entonces, se sigue que $R(u, Ju, Ju, u) = 0$ sin más que pasar al límite.

Concluimos entonces que la variedad M es isotrópica y, por tanto, la constancia puntual de la curvatura seccional paraholomorfa se sigue del teorema anterior. $\square$

Observación 4.6.1 Nótese que es posible construir ejemplos de variedades para–Kähler cuya curvatura seccional paraholomorfa está acotada inferiormente o superiormente pero no es constante, incluso aunque la variedad sea localmente simétrica. Véase el Capítulo 2 de esta memoria (§2.4) para más detalles sobre la construcción de tales ejemplos.

4.7 Ejemplos

En esta sección mostraremos una serie de ejemplos de variedades casi para–Hermíticas. De forma especial analizaremos ejemplos de variedades isotrópicas y también aquellos en los que las variedades son de curvatura seccional paraholomorfa puntualmente constante. Véase [CFG], y las referencias que en él se citan, para más ejemplos de variedades casi para–Hermíticas.

Ejemplo 4.7.1 *Los modelos proyectivos paracomplejos $P_n(B)$.*

Estos espacios fueron introducidos por Gadea y Montesinos en [GM1] y son los modelos de las variedades para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante no nula. (Véase [CFG, Secc. 6] y [GM2]).

Ejemplo 4.7.2 *Variedades casi para–Kähler no llanas con curvatura seccional paraholomorfa nula.*

El fibrado tangente, TM, de una variedad de Riemann (M,g) se puede equipar, de forma natural, con una estructura casi para–Kähler $(\tilde{J},\tilde{g})$ definida por Cruceanu, [Cr], de la forma siguiente:

$$\tilde{J}(X^H+Y^V)=X^H-Y^V, \qquad \tilde{g}(X^H+Y^V,U^H+W^V)=g(X,W)^V+g(Y,U)^V,$$

donde X^V y X^H denotan los levantamientos vertical y horizontal, respectivamente, del campo de vectores X al fibrado tangente respecto a la conexión métrica de (M,g) [YI]. Es inmediato comprobar que $\tilde{g}$ coincide con el levantamiento completo, g^C, de g y, además, que la 2–forma Ω definida por $(\tilde{J},\tilde{g})$ es cerrada.

La curvatura de la variedad semi–Riemanniana (TM,g^C) ha sido estudiada recientemente en [CGV], en donde encontramos el siguiente resultado:

Lema 4.7.1 [CGV, Lema 1] *Sea (M,g) una variedad Riemanniana, g^C el levantamiento completo de g, y denotemos por $\tilde{R}_\xi$ el tensor curvatura de g^C en el punto $\xi\in TM$. Entonces,*

$$\begin{aligned}\tilde{R}_\xi&\left(X_1^V+Y_1^H,X_2^V+Y_2^H\right)(X_3^V+Y_3^H)\\&=\left\{R_{\pi(\xi)}(Y_1,Y_2)Y_3\right\}^H+\left\{(\nabla_\xi R)(Y_1,Y_2)Y_3\right\}^V\\&\quad+\left\{R_{\pi(\xi)}(X_1,Y_2)Y_3+R_{\pi(\xi)}(Y_1,X_2)Y_3+R_{\pi(\xi)}(Y_1,Y_2)X_3\right\}^V\end{aligned}$$

para cualesquiera campos de vectores X_i, Y_i, $i=1,2,3$, sobre M.

Ahora, si z es un vector tangente a TM en el punto $\xi\in TM$, podemos descomponerlo mediante sus componentes vertical y horizontal, $z=x^H+y^V$. Entonces, el lema anterior implica que $\tilde{R}(z,\tilde{J}z,\tilde{J}z,z)=4\tilde{R}(x^H,y^V,y^V,x^H)=0$, lo que muestra que la curvatura seccional paraholomorfa de $(TM,g^C,\tilde{J})$ se anula idénticamente. (Nótese que, sin embargo, (TM,g^C) no es llana a menos que M lo sea. Además, en ese caso, $(TM,g^C,\tilde{J})$ es una variedad para–Kähler localmente llana).

Ejemplo 4.7.3 *Variedades casi para–Hermíticas isotrópicas con curvatura seccional paraholomorfa no constante.*

Sean (M_1, g_1, J_1) y (M_2, g_2, J_2) dos variedades casi para–Hermíticas de curvatura seccional paraholomorfa constante c y $-c$ respectivamente. Entonces, la variedad producto $M = M_1 \times M_2$, equipada con la métrica $g((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2)$ y con la estructura casi paracompleja $J(X_1, X_2) = (J_1X_1, J_2X_2)$, es una variedad casi para–Hermítica. Ahora, procediendo como en [BCGH, Ejemplo 3.1], es fácil comprobar que M es una variedad isotrópica cuya curvatura seccional paraholomorfa no es constante, a menos que $c = 0$. Además, M es para–Kähler si y sólo si ambos factores lo son.

Por otra parte, un ejemplo de aplicación del Teorema 4.5.3 es la variedad Nearly para–Kähler isotrópica con curvatura seccional paraholomorfa no constante dada por el producto $S_3^6(c) \times \tilde{S}_3^6(-c)$, donde $S_3^6(c)$ representa la pseudoesfera en $\mathbb{R}_3^7$ con la estructura Nearly para–Kähler, de curvatura seccional paraholomorfa constante c, inducida por el producto de los números de Cayley de segunda especie (véase [Be]) y $\tilde{S}_3^6(-c)$ es la misma variedad con la métrica opuesta.

Ejemplo 4.7.4 *Variedades localmente conformes a variedades casi para–Hermíticas isotrópicas.*

Sean (M_1, g_1, J_1) y (M_2, g_2, J_2) dos variedades casi para–Hermíticas localmente conformes (es decir, existe un difeomorfismo local ϕ de M_1 en M_2 de tal forma que $\phi_* J_1 = J_2 \phi_*$ y $\phi^* g_2 = e^{2\sigma} g_1$ para alguna función real σ definida sobre M_1). Existe una correspondencia entre los vectores nulos sobre M_1 y M_2, y después de algunos cálculos se sigue que $R_2(\phi_* u, J_2\phi_* u, J_2\phi_* u, \phi_* u) = e^{2\sigma} R_1(u, J_1u, J_1u, u)$ para cualquier vector nulo u en M_1. Por tanto, *la isotropía es un invariante conforme para las variedades casi para–Hermíticas.*

Ejemplo 4.7.5 *El fibrado tangente de variedades casi para–Hermíticas y de variedades para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante.*

Sea (M, g, J) una variedad casi para–Hermítica. Los levantamientos horizontales (con respecto a la conexión métrica de g) de la métrica, g^H, y de la estructura casi paracompleja, J^H, inducen una estructura casi para–Hermítica en TM. (Nótese que, como $\nabla g = 0$, entonces $g^H = g^C$. Además, si (M, g, J) es una variedad para–Kähler, entonces $J^H = J^C$, pues $\nabla J = 0$ y, por otra parte, se tiene que (M, g, J) es una variedad para–Kähler si y sólo si (TM, g^H, J^H) lo es). Utilizando el Lema 4.7.1 obtenemos el siguiente resultado:

Lema 4.7.2 *Sea (M, g, J) una variedad casi para–Hermítica. (TM, g^H, J^H) es isotrópica si y sólo si (M, g, J) es un espacio de curvatura seccional paraholomorfa puntualmente constante y, además, $g((\nabla_\xi R)(x, Jx)Jx, x) = 0$ para cualquier vector x tangente a M.*

Demostración. Sea $u \in T_\xi(TM)$ un vector nulo, y tomemos x, $y \in T_{\pi(\xi)}(M)$ vectores ortogonales tales que $u = x^H + y^V$. Entonces,

$$(4.7.1)\ \tilde{R}(u, J^H u, J^H u, u) = g((\nabla_\xi R)(x, Jx)Jx, x)^V + 2g(R(Jx, x)x - JR(x, Jx)Jx, Jy)^V.$$

Si (TM, g^H, J^H) es isotrópica, como x^H es un vector nulo para cada vector x en M, se tiene que $\tilde{R}(x^H, J^H x^H, J^H x^H, x^H) = 0$ y, por tanto, de (4.7.1) se sigue que

$$g((\nabla_\xi R)(x, Jx)Jx, x)^V = 0. \tag{4.7.2}$$

Ahora, tomemos $\{x, y\}$ vectores ortogonales en M. Entonces, $u = x^H + y^V$ es un vector nulo en TM y, así, $\tilde{R}(u, J^H u, J^H u, u) = 0$. Entonces, de (4.7.1) y (4.7.2) se sigue que $g(R(Jx, x)x - JR(x, Jx)Jx, Jy)^V = 0$ y, por tanto, $R_x(Jx) - JR_{Jx}(x) \sim Jx$. Esto muestra que la curvatura seccional paraholomorfa es puntualmente constante sobre M, sin más que tener en cuenta el Teorema 4.3.1.

Recíprocamente, sea u un vector nulo, $u \in T_\xi(TM)$, y consideremos la descomposición $u = x^H + y^V$, con $x, y \in T_{\pi(\xi)}(M)$. Como la curvatura seccional paraholomorfa es puntualmente constante, debe cumplirse que $g(R(Jx, x)x - JR(x, Jx)Jx, Jy)^V = 0$. Entonces, $\tilde{R}(u, J^H u, J^H u, u) = 0$, pues suponemos que $g((\nabla_\xi R)(x, Jx)Jx, x)^V = 0$. Esto muestra que (TM, g^H, J^H) es isotrópica. □

Nótese que la curvatura seccional paraholomorfa de (TM, g^H, J^H) no es constante a menos que sea llana.

Observación 4.7.1 En el caso especial de ser M una variedad para–Kähler, se sigue que (M, g, J) *es un variedad para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante c si y sólo si* (TM, g^H, J^H) *es una variedad para–Kähler isotrópica.* Nótese también que (M, g) es localmente simétrica si y sólo si (TM, g^H) lo es, lo que muestra que el fibrado tangente de cualquier variedad para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante es una variedad para–Kähler isotrópica localmente simétrica. Sin embargo, (TM, g^H, J^H) no se corresponde con ninguno de los casos en el Teorema 4.5.2. Esto es debido a que *el operador de Ricci correspondiente a la variedad* (TM, g^H) *no es diagonalizable con respecto a ninguna base* g^H*–ortonormal a menos que la variedad sea Ricci llana*, como mostramos a continuación.

Nótese que en caso de ser el tensor de Ricci, $\tilde{\rho}$, de (TM, g^H) diagonalizable con respecto a una base g^H–ortonormal, entonces una tal base también debe diagonalizar al endomorfismo F definido por $F = (g^H)^{-1} \circ \tilde{\rho}$. Por tanto, será suficiente mostrar que F no es nunca diagonalizable (a menos que $\tilde{\rho}$ sea nulo). Para ello, nótese que como la variedad base (M, g, J) es una variedad para–Kähler de curvatura seccional paraholomorfa constante, entonces siempre existe una base ortonormal con respecto a la cual el tensor de Ricci ρ de esta variedad es diagonalizable. Denotando por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal tal que $\rho = diag[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, con $dim\, M = n$, consideramos en $T_\xi(TM)$ la base de vectores nulos dada por $\{e_1^H, \ldots, e_n^H, e_1^V, \ldots, e_n^V\}$, de forma que la métrica g^H tiene por matriz asociada respecto a esta base la siguiente:

$$g^H = \begin{pmatrix} 0 & Id_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} \\ Id_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } Id_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} = diag[1, \overset{n/2}{\ldots}, 1, -1, \overset{n/2}{\ldots}, -1].$$

Ahora, teniendo en cuenta que el tensor de Ricci de (TM, g^H) está determinado por [CGV, Teor. 2]

$$\tilde{\rho}(x^V, y^V) = \tilde{\rho}(x^V, y^H) = 0, \qquad \tilde{\rho}(x^H, y^H) = 2\rho(x, y)^V,$$

se sigue que $\tilde{\rho} = diag[2\lambda_1, \ldots, 2\lambda_n, 0, \ldots, 0]$. Entonces, la matriz asociada a F con respecto a la base considerada está dada por

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = diag[2\lambda_1, \ldots, 2\lambda_{\frac{n}{2}}, -2\lambda_{\frac{n}{2}+1}, \ldots, -2\lambda_n].$$

Así, el polinomio característico de F es λ^{2n} y su polinomio mínimo es λ^2, lo que muestra que F nunca es diagonalizable, a menos que $\tilde{\rho}$ sea nulo.

Ejemplo 4.7.6 *Variedades casi para–Hermíticas isotrópicas localmente simétricas con operador Q_φ no paralelo.*

Sea $(\mathbb{R}^{2n+2}, \tilde{g}, \tilde{J})$ el espacio Euclídeo $(2n+2)$–dimensional con la estructura para–Kähler estándar. Sea $H_n^{2n+1}(c)$ el espacio pseudo–hiperbólico de curvatura seccional constante $c < 0$, [O]. Denotemos por N el campo de vectores unitario normal temporal y sea $\xi = \tilde{J}(N)$.

Para cada campo de vectores X en $H_n^{2n+1}(c)$ descomponemos $\tilde{J}X = \phi X + g(X, \xi)N$ en las componentes tangencial y normal, donde ϕX denota la componente tangencial de $\tilde{J}(X)$. Ahora, si $\eta(X) = g(X, \xi)$, se sigue que $\phi^2 = Id + \eta \otimes \xi$ y $\eta(\xi) = 1$. Además, si g denota la métrica inducida en $H_n^{2n+1}(c)$, es inmediato comprobar que

$$g(\phi X, \phi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y),$$

lo que muestra que $H_n^{2n+1}(c)$ tiene una estructura casi paracontacto inducida [KW].

Ahora, denotemos por $(M_i, \phi_i, \xi_i, \eta_i, g_i)$, $i = 1, 2$, los espacios pseudo–hiperbólicos de dimensión $2p+1$ y $2q+1$ con las estructuras $(\phi_i, \xi_i, \eta_i, g_i)$ construidas anteriormente. Sea M la variedad producto, $M = H_p^{2p+1}(c) \times H_q^{2q+1}(c)$, y consideremos la estructura para–Hermítica

$$J(X_1, X_2) = (\phi_1 X_1 + \eta_2(X_2)\xi_1, \phi_2 X_2 + \eta_1(X_1)\xi_2),$$

$$g\Big((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)\Big) = g_1(X_1, Y_1) - g_2(X_2, Y_2).$$

Entonces, cálculos bastante laboriosos permiten mostrar que la variedad producto (M, g, J) es una variedad para–Hermítica isotrópica. Nótese que M es un espacio localmente simétrico y, por tanto, el operador de Ricci es paralelo. Sin embargo, el operador Q_φ, dado por $g(Q_\varphi X, Y) = \varphi(X, Y)$ (φ definido por (4.4.7)), no es paralelo aunque tiene autovalores constantes $4(p+3)c$, $2(p-q)c$ y $4(q+3)c$, con multiplicidades $2p$, 2 y $2q$ respectivamente.

4.8 Variedades paracuaterniónicas de dimensión ≥ 8

Por consistencia con el estudio realizado a lo largo de esta memoria analizamos en esta última sección las variedades paracuaterniónicas Kähler de dimensión ≥ 8 cuyo operador de Jacobi presenta un autoespacio distinguido. Recordemos que en el Capítulo 2 se introdujeron las variedades paracuaterniónicas, iniciándose el estudio de la curvatura seccional paracuaterniónica (véase §2.1.4). El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado:

Teorema 4.8.1 *Sea (M, g, V) una variedad paracuaterniónica Kähler conexa de dimensión > 4. Entonces la curvatura seccional paracuaterniónica es constante en M si y sólo si $\{J_1x, J_2x, J_3x\}$ define un autoespacio del operador de Jacobi R_x, para cada vector espacial, temporal o nulo x.*

La demostración de este teorema la llevaremos a cabo en dos partes, distinguiendo los vectores espaciales y temporales de los vectores nulos, pues en este último caso se necesita un estudio más detallado.

En la primera parte de esta sección, utilizando los teoremas 2.1.11 y 2.1.13, caracterizaremos la constancia puntual de la curvatura seccional paracuaterniónica en términos de los operadores de Jacobi. Más concretamente probamos el siguiente teorema:

Teorema 4.8.2 *Sea (M^{4n}, g, V), $n \geq 2$, una variedad paracuaterniónica Kähler. La constancia de la curvatura seccional paracuaterniónica en un punto $p \in M$ es equivalente a que se cumpla una cualquiera de las siguientes condiciones:*

(i) $R_x(J_ix) \sim J_ix$ *para cualquier vector espacial* $x \in T_pM$,

(ii) $R_y(J_iy) \sim J_iy$ *para cualquier vector temporal* $y \in T_pM$,

(iii) $R_u(J_iu) = 0$, *para cualquier vector nulo* $u \in T_pM$,

donde $\{J_i;\ i = 1, 2, 3\}$ *es una base local adaptada de* V.

Demostración. Si la curvatura seccional paracuaterniónica es constante c en el punto p, entonces utilizando el Teorema 2.1.11 se obtiene fácilmente que $R_\xi J_i\xi = cg(\xi, \xi)J_i\xi$ para cualquier vector ξ y cualquier $i = 1, 2, 3$. Por tanto, se cumplen las condiciones (i), (ii) y (iii).

Suponiendo ahora (i) mostraremos que se cumple la hipótesis del Teorema 2.1.13, lo que probará la constancia de la curvatura seccional paracuaterniónica en p. Sean x, y dos vectores unitarios tangentes a M en el punto p tales que $y \in Q(x)^\perp$. Si x es espacial, entonces (i) implica que $R(J_ix, x, x, J_iy) = 0$, de donde se sigue que $R(x, J_ix, x, J_iy) = 0$. Si x es temporal, entonces J_1x es espacial, y aplicando de nuevo (i) para este vector se sigue que $R(J_1x, J_iJ_1x, J_1x, J_iJ_1y) = 0$, de donde obtenemos $R(x, J_ix, x, J_iy) = 0$.

Supongamos que se cumple (ii). Si x es un vector espacial e y es un vector ortogonal a x, entonces como J_1x es temporal la condición (ii) implica que $R(J_iJ_1x, J_1x, J_1x, J_iJ_1y) = 0$, de donde se sigue que $R(J_ix, x, x, J_iy) = 0$. Por tanto se cumple (i), por lo que la curvatura seccional paracuaterniónica debe ser constante en p.

Por último, supongamos que se cumple (iii). Igual que antes utilizaremos el Teorema 2.1.13 para probar que la curvatura seccional paracuaterniónica es constante en p. Sean entonces x e y dos vectores unitarios tales que $y \in Q(x)^\perp$. Además, podemos suponer que $g(x,x) = -g(y,y)$, de forma que $x \pm y$ son vectores nulos y la condición (iii) implica que

$$R(J_ix + J_iy, x + y, x + y, J_ix - J_iy) - R(J_ix - J_iy, x - y, x - y, J_ix + J_iy) = 0,$$

de donde se sigue que

$$R(x, J_ix, x, J_iy) - R(y, J_iy, y, J_ix) = 0. \tag{4.8.1}$$

De nuevo por (iii) se obtiene

$$R(J_ix + J_iy, x + y, x + y, J_ix + J_iy) - R(J_ix - J_iy, x - y, x - y, J_ix - J_iy) = 0,$$

de donde se sigue que

$$R(x, J_ix, x, J_iy) + R(y, J_iy, y, J_ix) = 0. \tag{4.8.2}$$

Por tanto, (4.8.1) y (4.8.2) implican que $R(x, J_ix, x, J_iy) = 0$, lo que concluye la demostración. $\square$

Observación 4.8.1 Dado un vector nulo u existen vectores ortonormales x e y, espacial y temporal respectivamente, tales que $u = \alpha(x+y)$. Además, podemos elegir esos vectores de forma que $\langle\{x, J_3x\}\rangle \perp \langle\{y, J_3y\}\rangle$, aunque $\{x, y\}$ no tienen porque generar un plano totalmente real, es decir, tal que $Q(x) \perp Q(y)$. Sin embargo, nótese que para asegurar la constancia de la curvatura seccional paracuaterniónica en un punto p es suficiente que la condición (iii) en el teorema anterior se cumpla para los vectores nulos tangentes a la variedad en p que pueden ser escritos de la forma $u = \alpha(x + y)$, siendo $\langle\{x, y\}\rangle$ un plano totalmente real.

El Teorema 4.8.2 señala la posibilidad de un comportamiento distinto de los operadores de Jacobi asociados a vectores nulos en comparación con los asociados a vectores espaciales o temporales. Este hecho motiva el estudio de las variedades paracuaterniónicas Kähler cuyo tensor curvatura cumple la condición

$$R_u(J_iu) = c_u^i J_iu, \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.8.3}$$

siendo u un vector nulo tangente a la variedad y c_u^i un número real. Debe observarse que tal condición ($R_u(J_iu) \sim J_iu$) es equivalente a la anulación del tensor curvatura sobre secciones paracuaterniónicas degeneradas (la demostración es análoga a la correspondiente a la Proposición 4.4.1):

Lema 4.8.1 *Sea* (M^{4n}, g, V), $n \geq 2$, *una variedad paracuaterniónica Kähler y* $p \in M$. *Entonces, se verifica* (4.8.3) *en el punto* p *si y sólo si* $R(u, J_i u, J_i u, u) = 0$ *para cualquier vector nulo* $u \in T_pM$ *y para* $i = 1, 2, 3$.

El objetivo de la segunda parte de esta sección es probar el siguiente teorema:

Teorema 4.8.3 *Sea* (M^{4n}, g, V), $n \geq 2$, *una variedad paracuaterniónica Kähler. La curvatura seccional paracuaterniónica es constante en un punto* $p \in M$ *si y sólo si la condición* (4.8.3) *se cumple para todo vector nulo* u *tangente a la variedad en* p.

Para demostrar este resultado necesitamos algunos lemas previos que probamos a continuación. Comenzamos determinando c_u^i $(i = 1, 2, 3)$, para lo cual utilizaremos las siguientes identidades, que se comprueban fácilmente:

Lema 4.8.2 *Sea* (M^{4n}, g, V), $n \geq 2$, *una variedad paracuaterniónica Kähler y supongamos que se cumple la condición* (4.8.3) *en un punto* $p \in M$. *Si* x, $y \in T_pM$ *son dos vectores ortogonales, con* $g(x, x) = -g(y, y)$, *entonces*

(a) $R(x, J_i x, J_i x, y) = -R(y, J_i y, J_i y, x)$,

(b) $$\begin{aligned} R(x, J_i x, J_i x, x) + R(y, J_i y, J_i y, y) &= 2R(x, J_i x, y, J_i y) + 2R(x, J_i y, y, J_i x) \\ &\quad + R(x, J_i y, x, J_i y) + R(y, J_i x, y, J_i x), \end{aligned}$$

para cualquier $i = 1, 2, 3$.

Lema 4.8.3 *Sea* (M^{4n}, g, V), $n \geq 2$, *una variedad paracuaterniónica Kähler verificando la condición* (4.8.3) *en un punto* p, *y sea* u *un vector nulo en ese punto. Si* $u = \alpha(x + y)$, *con* $\langle\{x, y\}\rangle$ *generando un plano totalmente real y* $g(x, x) = 1$, *entonces*

$$c_u^1 = 4\varepsilon_z R(z, u, u, z) + \frac{3\tau}{4n(n+2)}\varepsilon_z \left\{ g(z, J_2 u)^2 - g(z, J_3 u)^2 \right\} \tag{4.8.4}$$

para cualquier vector unitario $z \in \langle\{x, y, J_1 x, J_1 y\}\rangle^\perp$,

$$c_u^2 = 4\varepsilon_z R(z, u, u, z) + \frac{3\tau}{4n(n+2)}\varepsilon_z \left\{ g(z, J_1 u)^2 - g(z, J_3 u)^2 \right\} \tag{4.8.5}$$

para cualquier vector unitario $z \in \langle\{x, y, J_2 x, J_2 y\}\rangle^\perp$,

$$c_u^3 = -4\varepsilon_z R(z, u, u, z) - \frac{3\tau}{4n(n+2)}\varepsilon_z \left\{ g(z, J_1 u)^2 + g(z, J_2 u)^2 \right\} \tag{4.8.6}$$

para cualquier vector unitario $z \in \langle\{x, y, J_3 x, J_3 y\}\rangle^\perp$, *donde* τ *denota la curvatura escalar de la variedad.*

Demostración. Consideremos el vector nulo $v = \frac{1}{4\alpha}(y-x)$, que satisface $g(u,v) = -\frac{1}{2}$, y sea z un vector unitario en $\langle\{x, y, J_1x, J_1y\}\rangle^\perp$. Para cada número real positivo t definimos el vector $w_t = \frac{1}{\sqrt{t}}(u + t\varepsilon_z v)$. Entonces, como los vectores w_t y z son ortogonales y $g(w_t, w_t) = -g(z,z)$, el Lema 4.8.2, (b) (con $i = 1$) implica que

$$\begin{aligned} R(z, J_1z, J_1z, z) + R(w_t, J_1w_t, J_1w_t, w_t) &= 2R(z, J_1z, w_t, J_1w_t) \\ &+2R(z, J_1w_t, w_t, J_1z) + R(z, J_1w_t, z, J_1w_t) + R(w_t, J_1z, w_t, J_1z) \end{aligned}$$

y utilizando la expresión de w_t y multiplicando por t se sigue que

$$\begin{aligned} &tR(z, J_1z, J_1z, z) + \frac{1}{t}R(u + t\varepsilon_z v, J_1(u + t\varepsilon_z v), J_1(u + t\varepsilon_z v), u + t\varepsilon_z v) \\ &= 2R(z, J_1z, u + t\varepsilon_z v, J_1(u + t\varepsilon_z v)) + 2R(z, J_1(u + t\varepsilon_z v), u + t\varepsilon_z v, J_1z) \\ &\quad +R(z, J_1(u + t\varepsilon_z v), z, J_1(u + t\varepsilon_z v)) + R(u + t\varepsilon_z v, J_1z, u + t\varepsilon_z v, J_1z). \end{aligned}$$

Linealizando esta expresión y tomando límites cuando $t \to 0$, después de algunos cálculos obtenemos

$$\begin{aligned} -4\varepsilon_z R(u, J_1u, u, J_1v) &= 2R(z, J_1z, u, J_1u) + 2R(z, J_1u, u, J_1z) \\ &\quad +R(z, J_1u, z, J_1u) + R(u, J_1z, u, J_1z). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando las identidades (2.1.8) la expresión anterior se reduce a

$$c_u^1 = \varepsilon_z R(z, J_1z, u, J_1u) + 2\varepsilon_z R(z, J_1u, u, J_1z) - \frac{\tau}{4n(n+2)}\varepsilon_z \left\{g(z, J_2u)^2 - g(z, J_3u)^2\right\},$$

y la primera identidad de Bianchi implica que

$$\begin{aligned} c_u^1 &= -\varepsilon_z R(u, z, J_1z, J_1u) + 3\varepsilon_z R(z, J_1u, u, J_1z) \\ &\quad -\frac{\tau}{4n(n+2)}\varepsilon_z \left\{g(z, J_2u)^2 - g(z, J_3u)^2\right\}. \end{aligned} \tag{4.8.7}$$

Si z es un vector unitario en el subespacio $\langle\{x, y, J_1x, J_1y\}\rangle^\perp$ entonces J_1z también pertenece a ese subespacio. Así, aplicando (4.8.7) para este último vector obtenemos

$$\begin{aligned} c_u^1 &= -3\varepsilon_z R(u, z, J_1z, J_1u) + \varepsilon_z R(z, J_1u, u, J_1z) \\ &\quad -\frac{\tau}{4n(n+2)}\varepsilon_z \left\{g(z, J_2u)^2 - g(z, J_3u)^2\right\}. \end{aligned} \tag{4.8.8}$$

Restando las expresiones (4.8.7) y (4.8.8) se obtiene $R(z, J_1u, u, J_1z) = -R(u, z, J_1z, J_1u)$, y así (4.8.4) se sigue de (4.8.7). Las identidades (4.8.5) y (4.8.6) se obtienen de forma similar. $\square$

Corolario 4.8.1 *Sea* (M^{4n}, g, V)*,* $n \geq 2$*, una variedad paracuaterniónica Kähler verificando la condición* (4.8.3) *en un punto* p*. Entonces,*

$$c_u^1 = c_u^2 = -c_u^3$$

para cualquier vector nulo $u \in T_pM$ *que se escriba de la forma* $u = \alpha(x+y)$*,* $\langle\{x,y\}\rangle$ *generando un plano totalmente real, con* $g(x,x) = 1$*.*

Demostración. Si ponemos $z = J_3x$, entonces obtenemos un vector unitario en el subespacio $\langle\{x, y, J_1x, J_1y\}\rangle^\perp \cap \langle\{x, y, J_2x, J_2y\}\rangle^\perp$, por lo que el Lema 4.8.3 implica que

$$c_u^1 = 4\varepsilon_z R(z,u,u,z) + \frac{3\tau}{4n(n+2)}\varepsilon_z \left\{ g(z,J_2u)^2 - g(z,J_3u)^2 \right\}$$

y también

$$c_u^2 = 4\varepsilon_z R(z,u,u,z) + \frac{3\tau}{4n(n+2)}\varepsilon_z \left\{ g(z,J_1u)^2 - g(z,J_3u)^2 \right\}.$$

Como $z \in \langle\{J_1u, J_2u\}\rangle^\perp$ concluimos que $c_u^1 = c_u^2$. La demostración de $c_u^2 = -c_u^3$ es similar. □

Corolario 4.8.2 *Sea* (M^{4n}, g, V)*,* $n > 2$*, una variedad paracuaterniónica Kähler verificando la condición* (4.8.3) *en un punto* p*. Si* u *es un vector nulo que puede escribirse de la forma* $u = \alpha(x+y)$*,* $\langle\{x,y\}\rangle$ *generando un plano totalmente real, con* $g(x,x) = 1$*, entonces*

$$c_u^i = 4\sigma_i\varepsilon_z R(z,u,u,z), \quad i = 1,2,3,$$

donde z *es un vector unitario tal que* $Q(x) \perp z \perp Q(y)$ *(*$\sigma_1 = \sigma_2 = 1$*,* $\sigma_3 = -1$*).*

Demostración. Nótese que $z \in \langle\{x, y, J_ix, J_iy\}\rangle^\perp$ para $i = 1,2,3$. Así, el resultado se sigue del Lema 4.8.3. □

El siguiente resultado será fundamental para el estudio de la condición (4.8.3) y, por tanto, para probar el Teorema 4.8.3.

Proposición 4.8.1 *Sea* (M^{4n}, g, V)*,* $n \geq 2$*, una variedad paracuaterniónica Kähler verificando la condición* (4.8.3) *en un punto* p*. Entonces,*

$$\rho(u,u) = \sigma_i n c_u^i, \quad i = 1,2,3, \tag{4.8.9}$$

para cualquier vector nulo $u \in T_pM$ *que pueda ser escrito de la forma* $u = \alpha(x+y)$*,* $\langle\{x,y\}\rangle$ *generando un plano totalmente real, con* $g(x,x) = 1$ *(*$\sigma_1 = \sigma_2 = 1$*,* $\sigma_3 = -1$*).*

Demostración. Consideramos la descomposición

$$T_pM = Q(x) \oplus Q(y) \oplus \langle\{z_1, z_2, \dots, z_{4n-8}\}\rangle,$$

siendo $\{z_1, z_2, \dots, z_{4n-8}\}$ una base ortonormal de $(Q(x) \oplus Q(y))^\perp$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\rho(u,u) &= R(x,u,u,x) - R(y,u,u,y) \\
&\quad -\sum_{i=1}^{3}\sigma_i \left\{R(J_ix,u,u,J_ix) - R(J_iy,u,u,J_iy)\right\} \\
&\quad +\sum_{j=1}^{4n-8}\varepsilon_{z_j}R(z_j,u,u,z_j),
\end{aligned} \tag{4.8.10}$$

donde $\varepsilon_{z_j} = g(z_j, z_j)$, $j = 1, \dots, 4n-8$. Es fácil comprobar que

$$R(x,u,u,x) - R(y,u,u,y) = 0, \qquad R(J_ix,u,u,J_ix) - R(J_iy,u,u,J_iy) = -2\sigma_i c_u^i,$$

por lo que (4.8.10) se reduce a $\rho(u,u) = 2c_u^1 + 2c_u^2 + 2c_u^3 + \sum_{j=1}^{4n-8}\varepsilon_{z_j}R(z_j,u,u,z_j)$. Entonces, (4.8.9) se sigue de esta última expresión sin más que tener en cuenta los corolarios 4.8.1 y 4.8.2. □

A continuación probamos el resultado principal de la segunda parte de esta sección:

Demostración del Teorema 4.8.3. Como la variedad es Einstein (cf. Teorema 2.1.10), de (4.8.9) se sigue que $c_u^i = 0$ para $i = 1, 2, 3$ y para cualquier vector nulo $u \in T_pM$ que admite una expresión de la forma $u = \alpha(x+y)$, $\langle\{x,y\}\rangle$ generando un plano totalmente real, con $g(x,x) = 1$. Entonces, (4.8.3) implica que $R_u(J_iu) = 0$ para $i = 1, 2, 3$ y para cualquier vector nulo u que se expresa de la forma anterior. Así, el resultado se sigue del Teorema 4.8.2, (*iii*) teniendo en cuenta la Observación 4.8.1. □

Observación 4.8.2 El Teorema 4.8.3 implica que la restricción del tensor curvatura de una variedad paracuaterniónica Kähler a secciones degeneradas en un punto p se anula idénticamente si y sólo si la curvatura seccional paracuaterniónica es constante en dicho punto.

Bibliografía

[BR] M. Barros, A. Romero; Indefinite Kähler manifolds, *Math. Ann.* **261** (1982), 55–62.

[B] M. Berger; La géométrie métrique des variétés Riemanniennes, *Elie Cartan et les Mathématiques d'Aujourd'Hui*, Astérisque, N^o Hors Série, Société Mathématique de France (1985), 9–66.

[Be] C.L. Bejan; Some examples of manifolds with hyperbolic structures, *Rend. Mat.* **14** (1994), 557–565.

[BV] J. Berndt, L. Vanhecke; Two natural generalizations of locally symmetric spaces, *Diff. Geom. Appl.* **2** (1992), 57–80.

[Bl] N. Blažić; Paraquaternionic projective space and pseudo–Riemannian geometry, *Publ. Inst. Math. (Beograd)* **60** (74) (1996), 101–107.

[BB] N. Blažić, N. Bokan; Compact Riemannian surfaces with the skew–symmetric Ricci tensor, pendiente de publicación.

[BBG] N. Blažić, N. Bokan, P. Gilkey; A Note on Osserman Lorentzian manifolds, *Bull. London Math. Soc.* **29** (1997), 227–230.

[BBR] N. Blažić, N. Bokan, Z. Rakić; Characterization of 4–dimensional Osserman pseudo–Riemannian manifolds, pendiente de publicación.

[BCGH] A. Bonome, R. Castro, E. García–Río, L. Hervella; On the holomorphic sectional curvature of an indefinite Kähler manifold, *C. R. Acad. Sci. Paris* **315** (1992), 1183–1187.

[BCGHM] A. Bonome, R. Castro, E. García–Río, L. Hervella, Y. Matsushita; Null holomorphically flat indefinite almost Hermitian manifolds, *Illinois J. Math.* **39** (1995), 635–660.

[BCGHV1] A. Bonome, R. Castro, E. García–Río, L. Hervella, R. Vázquez–Lorenzo; On the paraholomorphic sectional curvature of almost para–Hermitian manifolds, *Houston J. Math.*, aceptado para su publicación.

[BCGHV2] A. Bonome, R. Castro, E. García–Río, L. Hervella, R. Vázquez–Lorenzo; Nonsymmetric Osserman indefinite Kähler manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, aceptado para su publicación.

[CGV] J. Cendan–Verdes, E. García–Río, M.E. Vázquez–Abal; On the semi–Riemannian structure of the tangent bundle of a two–point homogeneous space, *Riv. Mat. Univ. Parma*, (5) **3** (1994), 253–270.

[Ch1] Q.S. Chi; A curvature characterization of certain locally rank–one symmetric spaces, *J. Diff. Geom.* **28** (1988), 187–202.

[Ch2] Q.S. Chi; Quaternionic Kähler manifolds and a curvature characterization of two–point homogeneous spaces, *Illinois J. Math.* **35** (1991), 408–418.

[Ch3] Q.S. Chi; Curvature characterization and classification of rank–one symmetric spaces, *Pacific J. Math.* **150** (1991), 31–42.

[Cr] V. Cruceanu; Une structure parakählerienne sur le fibré tangent, *Tensor N.S.* **39** (1982), 81–84.

[CFG] V. Cruceanu, P. Fortuny, P.M. Gadea; A survey on paracomplex geometry, *Rocky Mount. J. Math.* **26** (1996), 83–115.

[DN1] M. Dajczer, K. Nomizu; On sectional curvature of indefinite metrics II, *Math. Ann.* **247** (1980), 279–282.

[DN2] M. Dajczer, K. Nomizu; On the boundedness of Ricci curvature of an indefinite metric, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **11** (1980), 25–30.

[GM1] P.M. Gadea, A. Montesinos–Amilibia; Spaces of constant para–holomorphic sectional curvature, *Pacific J. Math.* **136** (1989), 85–101.

[GM2] P.M. Gadea, A. Montesinos–Amilibia; The paracomplex projective spaces as symmetric and natural spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.* **23** (1992), 261–275.

[GB] G. Ganchev, A. Borisov; Isotropic sections and curvature properties of hyperbolic Kaehlerian manifolds, *Publ. Inst. Math. (Beograd)* **38** (52) (1985), 183–192.

[GHV] E. García–Río, L. Hervella, R. Vázquez–Lorenzo; Curvature properties of para–Kähler manifolds, *New Develop. in Diff. Geom. (Debrecen, 1994)*, 193–200, Math. Appl., **350**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

[GK1] E. García–Río, D.N. Kupeli; Null and infinitesimal isotropy in semi Riemannian geometry, *J. Geom. Phys.* **13** (1994), 207–222.

[GK2] E. García–Río, D.N. Kupeli; Four–dimensional Osserman Lorentzian manifolds, *New Develop. in Diff. Geom. (Debrecen, 1994)*, 201–211, Math. Appl., **350**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

[GKV] E. García–Río, D.N. Kupeli, M.E. Vázquez–Abal; On a problem of Osserman in Lorentzian geometry, *Differential Geom. Appl.* **7** (1997), 85–100.

[GKVVz] E. García–Río, D.N. Kupeli, M.E. Vázquez–Abal, R. Vázquez–Lorenzo; Osserman affine connections and their Riemannian extensions, pendiente de publicación.

[GV] E. García–Río, M.E. Vázquez–Abal; On the quaternionic sectional curvature of an indefinite quaternionic Kähler manifold, *Tsukuba J. Math.* **19** (1995), 273–284.

[GVVz] E. García–Río, M.E. Vázquez–Abal, R. Vázquez–Lorenzo; Nonsymmetric Osserman pseudo–Riemannian manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, aceptado para su publicación.

[Gi] P. Gilkey; Manifolds whose curvature operator has constant eigenvalues at the basepoint, *J. Geom. Anal.* **4** (1994), 155–158.

[GSV] P. Gilkey, A. Swann, L. Vanhecke; Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator, *Quart. J. Math. Oxford* **46** (1995), 299–320.

[GN] L. Graves, K. Nomizu; On sectional curvature of indefinite metrics, *Math. Ann.* **232** (1978), 267–272.

[Gr] A. Gray; *Tubes*, Addison–Wesley, Redwood City, 1990.

[GrV1] A. Gray, L. Vanhecke; Riemannian geometry as determined by the volumes of small geodesic balls, *Acta Math.* **142** (1979), 157–198.

[GrV2] A. Gray, L. Vanhecke; Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature, *Casopis pro pest. Matem.* **104** (1979), 170–179.

[GrV3] A. Gray, L. Vanhecke; The volume of tubes about curves in a Riemannian manifold, *Proc. London Math. Soc. (3)* **44** (1982), 215–243.

[H] S. Harris; A characterization of Robertson–Walker spaces by null sectional curvature, *Gen. Rel. Grav.* **17** (1985), 493–498.

[I] S. Ishihara; Quaternion Kählerian manifolds, *J. Diff. Geom.* **9** (1974), 483–500.

[KW] S. Kaneyuki, F.L. Williams; Almost paracontact and paraHodge structures on manifolds, *Nagoya Math. J.* **99** (1985), 173–187.

[Ko] L. Koch–Sen; Infinitesimal null isotropy and Robertson–Walker metrics, *J. Math. Phys.* **26** (1985), 407–410.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu; *Foundations of differential geometry I, II*, Interscience Pub., New York, 1963, 1969.

[Kn] M. KONISHI; On Jacobi fields in quaternion Kähler manifolds with constant Q–sectional curvature, *Hokkaido Math. J.* **4** (1975), 169–178.

[Ku] R.S. KULKARNI; The values of sectional curvature in indefinite metrics, *Comm. Math. Helv.* **54** (1979), 173–176.

[K1] D.N. KUPELI; On conjugate and focal points in semi–Riemannian geometry, *Math. Z.* **198** (1988), 569–589.

[K2] D.N. KUPELI; On holomorphic and anti–holomorphic sectional curvature of indefinite Kähler manifolds of real dimension ≥ 6, *Manuscripta Math.* **80** (1993), 1–12.

[K3] D.N. KUPELI; On curvatures of indefinite Kähler metrics, *New Zealand J. Math.* **24** (1995), 25–48.

[K4] D.N. KUPELI; *Singular semi–Riemannian geometry*, Math. and its Appl., **366**, Kluwer Acad. Publ. Group, Dordrecht, 1996.

[Ma] S. MARCHIAFAVA; Variétés riemanniennes dont le tenseur de courbure est celui d'un espace symétrique de rang un, *C. R. Acad. Sci. Paris* **295** (1982), 463–466.

[N1] K. NOMIZU; Conditions for constancy of the holomorphic sectional curvature, *J. Diff. Geom.* **8** (1973), 335–339.

[N2] K. NOMIZU; Remarks on sectional curvature of an indefinite metric, *Proc. Amer. Math. Soc.* **89** (1983), 473–476.

[NS] K. NOMIZU, T. SASAKI; *Affine Differential Geometry*, Cambrigde Tracts in Math., **111**, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Ol] Z. OLSZAK; On the existence of generalized complex space forms, *Israel J. Math.* **65** (1989), 214–218.

[O] B. O'NEILL; *Semi–Riemannian geometry, with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[Op] V. OPROIU; Harmonic maps between tangent bundles, *Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino* **47** (1989), 47–55.

[Os] R. OSSERMAN; Curvature in the eighties, *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 731–756.

[OS] R. OSSERMAN, P. SARNAK; A new curvature invariant and entropy of geodesic flows, *Invent. Math.* **77** (1984), 455–462.

[PS] J.D. PÉREZ, F.G. SANTOS; Indefinite quaternion space forms, *Ann. Mat. Pura Appl.* **132** (1982), 383–398.

[Ra] Z. Rakić; Rank 2 symmetric Osserman spaces, *Bull. Austr. Math. Soc.*, aceptado para su publicación.

[Sc] R. Schafer; *An introduction to nonassociative algebras*, Pure and Applied Math., **22**, Academic Press, New York, 1966.

[St] N. Steenrod; *The topology of fibre bundles*, Princeton, 1965.

[TV] F. Tricerri, L. Vanhecke; Curvature tensors on almost Hermitian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981), 365–398.

[V] I. Vaisman; *Symplectic Geometry and Secondary Characteristic Classes*, Progress in Math., **72**, Birkhäuser, Boston–Basel, 1987.

[Va] L. Vanhecke; *Geometry in Normal and Tubular Neighborhoods.* Lectures Notes, Dep. Math. Kath. Univ. Leuven., 1988, y Proc. Workshop on Diff. Geom. and Top. Cala Gonone (Sardinia) 1988, Univ. Cagliari, 73–176.

[Vz] R. Vázquez–Lorenzo; *Curvatura de variedades para–Kählerianas*, Publ. Dep. Geometría y Topología, **82**, 1994.

[W] J. Wolf; *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish, Boston, Mass., 1974.

[Wo] Y.C. Wong; Two Dimensional Linear Connexions with Zero Torsion and Recurrent Curvature, *Monatsh. Math.* **68** (1964), 175–184.

[YI] K. Yano, S. Ishihara; *Tangent and cotangent bundles*, Pure and Appl. Math., **16**, Marcel Dekker, New York, 1973.

[YK] K. Yano, M. Kon; *Structures on Manifolds*, Series in Pure Math., **3**, World Scientific, Singapore, 1984.