MATERIA
Matemáticas II

TITULACIÓN
Grao en Enxeñaría Agrícola e Agroalimentaria

unidade didáctica 1

Ensinanzas Técnicas

Integración sobre curvas

Xerardo Casal Urcera

Área de Matemática Aplicada
Departamento de Matemática Aplicada
Escola Politécnica Superior

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

DESCATALOGADO

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

ISBN
978-84-16183-62-3

MATERIA: Matemáticas II
TITULACIÓN: Grao en Enxeñaría Agrícola e Agroalimentaria
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Integración sobre curvas
Curvas parametrizadas. Lonxitude de arco
Campos vectoriais. Campos conservativos. Rotacional e diverxencia
Integración de funcións escalares sobre unha curva
Integración de campos vectoriais sobre unha curva
Teorema de Green no plano

Unidade II. Integración sobre superficies
Superficies parametrizadas. Área dunha superficie
Integración de funcións escalares sobre unha superficie
Integración de campos vectoriais sobre unha superficie
Teorema da diverxencia
Teorema de Stokes

Unidade III. Introdución ás Ecuacións Diferenciais
Concepto e motivación das ecuacións diferenciais ordinarias (EDOs)
Clasificación das EDOs segundo a orde e a linearidade
Xeneralidades sobre as solucións dunha EDO
Problema de valor inicial asociado a unha EDO de orde n
Introdución ás ecuacións diferenciais en derivadas parciais (EDPs)

Unidade IV. Ecuacións Diferenciais Ordinarias de Primeira Orde
Solución xeral das EDOs. Problema de valor inicial das EDOs de primeira orde
EDOs de primeira orde separables
EDOs lineares de primeira orde
Aplicacións das EDOs de primeira orde

Unidade V. EDOs lineares de segunda orde. Sistemas de EDOs
Teoría xeral de EDOS lineares. Propiedades das solucións
A ecuación homoxénea de segunda orde con coeficientes constantes
A ecuación non homoxénea: métodos de variación de parámetros e coeficientes indeterminados
Introdución aos sistemas de EDOs de primeira orde
Sistemas lineares de coeficientes constantes de primeira orde. Resolución

Unidade VI. Introdución aos métodos numéricos

Conceptos básicos dos métodos numéricos

Métodos para calcular raíces de ecuacións non lineares: Dicotomía e Newton-Raphson

Resolución numérica de problemas de valor inicial de primeira orde. Método de Euler

Resolución numérica de sistemas de EDOs de primeira orde

Resolución numérica de EDOs de orde superior

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

OBXECTIVOS

METODOLOXÍA E ACTIVIDADES

AVALIACIÓN

CONTIDOS

1. Curvas parametrizadas. Lonxitude de arco
2. Campos vectoriais
3. Integral dunha función escalar sobre unha curva
4. Integral dun campo vectorial sobre unha curva
5. Integral dun campo conservativo sobre unha curva
6. Teorema de Green

ANEXOS

BIBLIOGRAFÍA

PRESENTACIÓN

Esta unidade didáctica enmárcase dentro da materia básica obrigatoria de 6 créditos Matemáticas II, que se imparte no segundo cuadrimestre do primeiro curso do grao de Enxeñaría Agrícola e Agroalimentaria. Esta materia, xunto con Matemáticas I, impartida no primeiro cuadrimestre e tamén de 6 créditos, conforman o bloque de matemáticas que contén as competencias específicas de matemáticas que debe acadar un estudante desta titulación. Neste senso a materia de Matemáticas II considérase unha continuación de Matemáticas I, na que se imparten contidos básicos de álxebra linear, cálculo diferencial e integral.

A materia Matemáticas II contén tres grandes bloques temáticos, o primeiro de Cálculo Vectorial, o segundo de Ecuacións Diferenciais e un terceiro de Cálculo Numérico. Esta unidade didáctica, dedicada á integración sobre curvas, é a primeira das dúas que constitúen o bloque de Cálculo Vectorial. Está deseñada para ser desenvolvida nunhas once horas de docencia presencial. Para abordala requírese que o estudante teña competencias en cálculo integral básico e cálculo diferencial multivariable, e que deberá ter adquirido ao cursar previamente Matemáticas I.

As curvas parametrizadas constitúen un bo modelo para a mecánica, xa que poden servir para describir traxectorias de obxectos en movemento, proporcionándonos ferramentas para calcular a posición e velocidade en cada instante. Por outra banda o cálculo integral sobre curvas é unha ferramenta que permite obter a suma dos infinitos valores dunha función sobre os infinitos puntos dunha curva. A función pode ser un campo escalar, que asigna a cada punto da curva un valor real, ou un campo vectorial, que a cada punto lle asigna un vector.

Unha función escalar representa calquera magnitude que se poda medir sobre unha curva ou obxecto unidimensional (arame, corda, etc...), por exemplo, a densidade dun arame. Neste caso a integral da función densidade sobre a curva parametrizada (o arame ou a corda), é igual á masa deste arame ou corda. No caso particular en que a función escalar sexa constante e igual a 1, o valor da integral sobre a curva é a lonxitude desta.

Os campo de forzas ou campos de velocidades, por exemplo dun fluído, poden representarse mediante un campo vectorial. No caso particular en que teñamos un obxecto, sometido a un campo de forzas, en movemento ao longo dunha determinada traxectoria (curva parametrizada), a integral deste campo sobre a curva parametrizada é o traballo realizado polo campo para mover ese obxecto ao longo da curva.

Un dos obxectivos desta materia, e tamén desta unidade didáctica, é o de que o alumno sexa capaz de formular e redactar, de forma ordenada e debidamente razoada, a resolución dun problema matemático. Para lograr este obxectivo é fundamental consultar a bibliografía recomendada. Inclúense no anexo algúns problemas resoltos que poden servir como exemplo.

O autor quere agradecer ás profesoras Isabel Lorenzo Cimadevila e Pilar Salgado Rodríguez o seu permiso para facer uso nesta unidade didáctica do material elaborado conxuntamente con elas para Matemáticas II nestes últimos cursos.

OBXECTIVOS

Nesta unidade didáctica preténdese que o alumno acade os seguintes obxectivos:

— Recoñecer e clasificar curvas paramétricas en $\mathbb{R}^2$ e en $\mathbb{R}^3$.
— Obter as ecuacións paramétricas dunha curva.
— Saber calcular a lonxitude dunha curva paramétrica.
— Recoñecer as ecuacións dun campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ e en $\mathbb{R}^3$.
— Obter o rotacional e diverxencia dun campo vectorial.
— Identificar un campo vectorial conservativo e calcular o seu potencial.
— Saber integrar campos escalares e vectoriais sobre curvas paramétricas.
— Coñecer e saber aplicar as propiedades do cálculo integral sobre curvas de campos conservativos.
— Coñecer e saber aplicar o teorema de Green.
— Formular e resolver dun xeito razoado problemas que requiran o uso das ferramentas matemáticas descritas nos contidos desta unidade didáctica.

METODOLOXÍA E ACTIVIDADES

Conforme ás indicacións metodolóxicas xerais descritas na Memoria do Título de Grao en Enxeñaría Agrícola e Agroalimentaria, a presente unidade didáctica será desenvolvida en sesións docentes distribuídas do seguinte xeito:

— **Expositivas** (8 horas). Clases de teoría, de carácter maxistral, dirixidas ao grupo completo de alumnos. Consisten na exposición dos contidos teóricos por parte do profesor. Durante a clase proxéctanse transparencias con estes contidos descritos de xeito esquemático e rigoroso, e serán facilitadas aos alumnos uns días antes da clase. Deste xeito o alumno poderá ler con anterioridade o que vai ser exposto en clase. O profesor acompañará a proxección das transparencias desenvolvendo o tema tratado, motivando a introdución de cada novo concepto e intercalando con exemplos prácticos das técnicas expostas.

— **Seminarios** (3 horas). Sesións de carácter interactivo en grupos reducidos de non máis de 20 alumnos. Estarán dedicadas á realización de exercicios e problemas onde aplicar as ferramentas matemáticas expostas nas clases expositivas. Antes de cada seminario, os alumnos dispoñerán dun boletín de exercicios e problemas sobre o cal traballar. Nos seminarios, entre alumnos e profesor, tratarase de resolver aqueles exercicios ou problemas que os alumnos propoñan e sobre os que atoparon maior dificultade. Noutras ocasións, o profesor propoñerá a resolución dun problema aos alumnos individualmente ou en grupos pequenos. Despois duns minutos para a súa resolución procurarase discutir e resolver entre todos o problema proposto, facendo especial fincapé na correcta redacción do razoamento seguido para a súa resolución. Para isto último aconséllase ao alumno que consulte a bibliografía recomendada.

— **Titorías en grupo**. Sesións de grupos reducidos de non máis de 10 alumnos. Cada alumno ten a posibilidade de acudir a dúas horas de titorías en grupo, fixadas no horario do curso, e nas que se pode traballar sobre calquera tema dos impartidos ata o momento na materia, en concreto o correspondente a esta unidade didáctica. Nestas sesións os alumnos tomarán a iniciativa e formularán as súas dúbidas e/ou problemas sen resolver para que coa axuda do profesor poidan ser resoltos coa participación dos asistentes.

— **Titorías**. Sesións individuais, inicialmente no despacho do profesor, de duración variable, e nas que se atenderán aos alumnos que desexen asistir para resolver dúbidas concretas sobre calquera aspecto ou contido da materia. As titorías virán fixadas polo profesor ao comezo do curso en seis horas semanais durante o transcurso deste.

En ocasións, no transcurso de calquera das sesións citadas, farase uso de software científico, como MATLAB, Octave ou wxMáxima, para representar curvas parametrizadas e calcular integrais.

Ademais das sesións de docencia presencial, os estudantes terán á súa disposición un curso virtual a través da plataforma da USC-Virtual. Neste curso poderán consultar e baixar as transparencias proxectadas nas clases expositivas así como os boletíns de exercicios propostos. Ofrécense ademais outros documentos e vídeos que motiven e complementen a formación recibida nas clases. Esta plataforma servirá tamén para publicar avisos de carácter colectivo ou individual. Por outra banda, os estudantes terán a oportunidade de consultar dúbidas ao profesor, mediante as titorías virtuais, e participar en foros abertos con outros estudantes.

AVALIACIÓN

Nos seminarios e titorías en grupo, así como nas titorías no despacho, terá lugar unha avaliación continua do alumno, na que o profesor promoverá a participación do alumno e analizará e corrixirá con este o traballo realizado por el. Ao remate da unidade didáctica, propoñeráselle a cada estudante, un exercicio ou problema para que resolva e entregue nunha data límite. Unha vez corrixido analizaranse os erros cometidos nalgunha das sesións interactivas (seminarios ou titorías en grupo) ou en titorías.

Non obstante, a avaliación desta unidade didáctica está integrada na avaliación global da materia. Deste xeito, o conxunto dos exercicios e problemas feitos polo alumno ao longo do curso terá un peso dun 30 por cen na cualificación global da materia. O 70 por cen restante da cualificación virá dado pola realización dun exame na data oficial proposta polo centro, e consistirá nunha proba escrita e presencial na que o alumno deberá resolver unha serie de exercicios e problemas propostos. Estes serán sempre similares aos incluídos nos boletíns proporcionados no curso virtual. En canto a aqueles relacionados con esta unidade didáctica, buscarán determinar que se alcanzaron os obxectivos detallados anteriormente.

CONTIDOS

1. Curvas parametrizadas. Lonxitude de arco

O contexto no que traballaremos ao longo desta unidade didáctica é o dos espazos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, aos que xa están habituados os alumnos. Comezamos definindo o concepto de curva plana en $\mathbb{R}^2$.

Definición 1 *Dada unha función continua* $\vec{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *con* $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, *chamamos* ***curva plana*** *ao conxunto*

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x = x(t), y = y(t) \text{ con } t \in [a,b]\right\} \in \mathbb{R}^2.$$

A función $\vec{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *é unha* ***parametrización da curva*** C, *as ecuacións*

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}$$

son as ***ecuacións paramétricas*** *da curva* C *e* $t \in [a,b]$ *o* ***parámetro***. *A parametrización da curva* C *tamén se pode escribir como*

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \text{ con } t \in [a,b]\,.$$

En cursos anteriores viuse que a gráfica dunha función real de variable real, $f:[a,b]\in\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$, definida por

$$\text{Graf}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x\in[a,b]\,,\ y=f(x)\}$$

é unha curva en $\mathbb{R}^2$. En efecto, pois

$$\text{Graf}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x=t,\ y=f(t)\text{ con } t\in[a,b]\}$$

e unha parametrización da curva $y=f(x)$ con $x\in[a,b]$ é

$$\left.\begin{array}{r} x=t \\ y=f(t)\end{array}\right\}\ t\in[a,b]\,.$$

É importante comprender ben a diferenza entre *curva* e *parametrización*. De feito, unha curva pode ter infinitas parametrizacións posibles. Para entender este aspecto propoñemos o seguinte exemplo sinxelo:

Exemplo 1 *Sexa a curva de ecuacións* $y=x^2$ *dende o punto* $(0,0)$ *ata o punto* $(1,1)$*. Unha parametrización desta curva é*

$$\left.\begin{array}{r} x=t \\ y=t^2\end{array}\right\}\ t\in[0,1]\,.$$

e outra parametrización distinta da mesma curva é

$$\left.\begin{array}{r} x=t-1 \\ y=(t-1)^2\end{array}\right\}\ t\in[1,2]\,.$$

Definición 2 *Diremos que unha parametrización* $\vec{r}:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^2$*, con* $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$*,* $t\in[a,b]$*, é:*

— ***Pechada*** *se* $\vec{r}(a)=\vec{r}(b)$*.*
— ***Simple*** *se* $\vec{r}(t_1)\neq\vec{r}(t_2)$ *para todo* $t_1,t_2\in(a,b)$*.*
— ***Suave*** *se* $x'(t)$ *e* $y'(t)$ *son funcións continuas en* (a,b) *e non se anulan á vez.*

En xeral, dise que unha curva C *é pechada, simple e/ou suave se ten unha parametrización pechada, simple e/ou suave, respectivamente.*

Cando consideremos unha curva pechada, simple e/ou suave escolleremos sempre unha parametrización da mesma que sexa pechada, simple e/ou suave. Non obstante, dita curva pode ter algunha parametrización que non sexa pechada, simple e/ou suave, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 2 *A parametrización*

$$\vec{r}(t)=(t^3,t^3)\text{ con } t\in[-1,1]$$

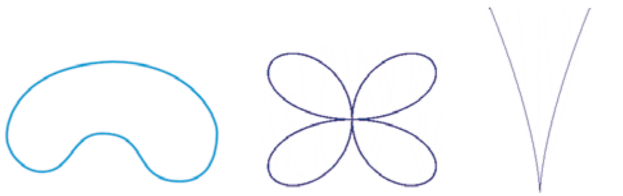
non é suave xa que $x'(0)=y'(0)=0$*, mais*

$$\vec{r}(t)=(t,t)\text{ con } t\in[-1,1]$$

é outra parametrización da mesma curva que si é suave, xa que $x'(t)=y'(t)=1\neq 0$*, para todo* $t\in[-1,1]$*.*

A representación gráfica dunha curva proporciona moita información sobre se a curva é pechada, simple e/ou suave, como se indica na seguinte observación.

Observación 1 *Unha curva simple non se corta consigo mesma. Unha curva que ten picos non é suave.*



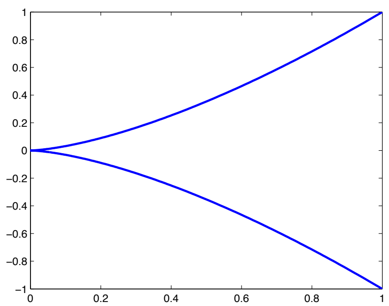
Curva simple, pechada e suave — Curva non simple, pechada e suave — Curva simple, non suave, non pechada

No seguinte exemplo usamos a representación gráfica da curva para estudar a suavidade dunha curva.

Exemplo 3 *Sexa a curva dada pola parametrización:*

$$\vec{r}(t) = (t^2, t^3) \text{ con } t \in [-1, 1] \,.$$

Se $x(t) = t^2$ *e* $y(t) = t^3$ *entón* $x'(t) = 2t$ *e* $y'(t) = 3t^2$ *son funcións continuas, pero* $x'(0) = y'(0) = 0$*, polo que se anulan á vez en* $t = 0 \in [-1, 1]$*. Deste xeito, a parametrización non é suave en* $t = 0$*. Para comprobar se a curva é suave ou non, no punto* $(0, 0)$*, deberiamos buscar unha parametrización dela suave nese punto ou demostrar que non existe ningunha parametrización que sexa suave nese punto. Mais na súa representación gráfica vemos que hai un pico en* $(0, 0)$*, o cal nos indica que non vai existir ningunha parametrización suave nese punto.*



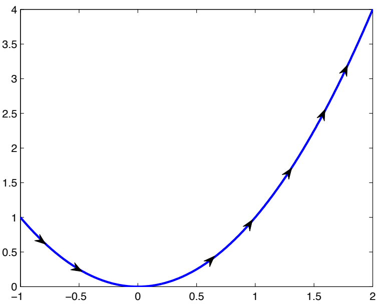
En xeral, consideraremos curvas simples e suaves, aínda que isto último non ten por que ser en sentido estrito, bastará coa suavidade a trozos que se define a continuación.

Definición 3 *Unha curva formada por un número finito de curvas suaves unidas de xeito continuo dise que é unha curva* ***suave a trozos****. Por exemplo, a curva do exemplo anterior é suave a trozos.*

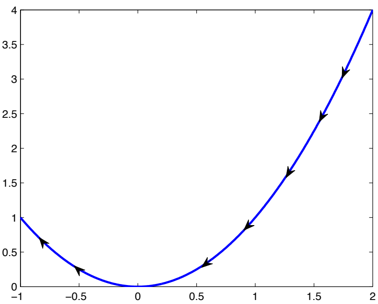
Unha curva pode ter distintas parametrizacións, que poden percorrela nun sentido ou no contrario, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 4 *Representamos as curvas coas seguintes parametrizacións:*

1. $\vec{r}(t) = (t, t^2)$ con $t \in [-1, 2]$



2. $\left.\begin{array}{c} x = 2 - t \\ y = (2-t)^2 \end{array}\right\}$ con $t \in [0, 3]$



Ambas as dúas son parametrizacións da mesma curva, mais a primeira percorre a curva dende o punto inicial $(-1, 1)$ ata o punto final $(2, 4)$, e a segunda faino en sentido contrario, dende o punto $(2, 4)$ ata o $(-1, 1)$.

Este exemplo motiva a seguinte definición.

Definición 4 *Dise que unha curva está* ***orientada*** *cando se escolle un sentido no que se percorre a curva cunha parametrización. Para definir unha orientación nunha curva basta con dar unha parametrización desta. No caso de que a curva non sexa pechada basta con indicar cal é o extremo inicial e o final da curva.*

Observación 2 *Se C é unha curva orientada nun sentido denótase por $-C$ á curva orientada en sentido oposto.*

Supoñamos que $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in [a, b]$, é unha parametrización dunha curva suave a trozos. Entón as funcións $x(t)$ e $y(t)$ son funcións derivables excepto quizáis nun número finito de valores en (a, b). Podemos considerar entón a **función derivada** $\vec{r'}(t) = (x'(t), y'(t))$ da parametrización, con $t \in (a, b)$. Para cada valor de t en (a, b), o vector $\vec{r'}(t)$ é un vector tanxente á curva no punto $(x(t), y(t))$ e, se t é o parámetro tempo, representa o vector velocidade instantánea no instante $t \in (a, b)$. Se $x'(t) \neq 0$, a pendente da curva en $t \in (a, b)$ é

$$\frac{dy}{dx}(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

O teorema seguinte permítenos obter a lonxitude dunha curva plana facendo uso do cálculo integral.

Teorema 1 ***(Lonxitude de arco)*** *Sexa $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in [a, b]$, a parametrización dunha curva suave a trozos e simple. Entón a lonxitude da curva vén dada por*

$$s = \int_a^b \left\| \vec{r'}(t) \right\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Non é dificil comprobar que a lonxitude dunha curva non depende da súa parametrización. Todo o visto ata aquí sobre curvas planas en $\mathbb{R}^2$ é válido tamén, de xeito análogo, para as curvas en $\mathbb{R}^3$, que definimos a continuación.

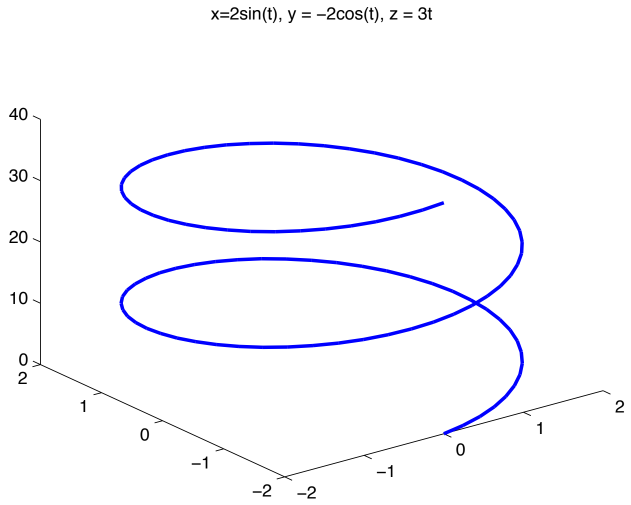
Definición 5 *Dada unha función continua $\vec{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, unha* ***curva en*** $\mathbb{R}^3$ *é o conxunto C definido por*

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = x(t), y = y(t), z = z(t) \text{ con } t \in [a, b] \right\}$$

Exemplo 5 *Representamos graficamente a curva en $\mathbb{R}^3$ definida pola parametrización*

$$\vec{r}(t) = (2 \sin t, -2 \cos t, 3t) \ \text{ con } \ t \in [0, 4\pi]$$

.



2. Campos vectoriais

De aquí en adiante supoñeremos que $n = 2$ ou $n = 3$. Os campos ou funcións escalares foron estudados en cursos anteriores. Lémbrese que un campo ou función escalar sobre unha rexión $D \subset \mathbb{R}^n$ é unha función

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Os campos vectoriais, aos que dedicaremos este apartado, constitúen unha boa ferramenta para representar campos de velocidades de fluídos ou campos de forzas.

Definición 6 *Un **campo vectorial** sobre unha rexión $D \subset \mathbb{R}^n$ é unha función*

$$\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de xeito que

— *Se $n = 2$, $\vec{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ ou $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$.*

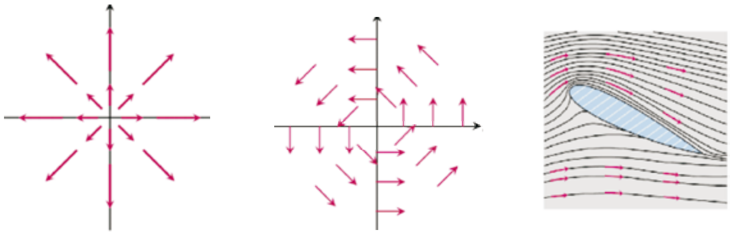
— *Se $n = 3$, $\vec{F}(x, y, z) = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z))$ ou $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$.*

onde M, N e P son funcións escalares sobre a rexión D.

Como xa comentamos anteriormente, a velocidade dun fluído pódese representar mediante un vector debuxado en cada punto do dominio do fluído. A colección de vectores que resulta é un campo vectorial, denominado *campo de velocidades* do fluído.

$$\vec{V}(x, y, z) = V_x(x, y, z)\vec{i} + V_y(x, y, z)\vec{j} + V_z(x, y, z)\vec{k}.$$

As tres gráficas seguintes representan algúns exemplos de campos vectoriais. A primeira podería ser unha forza radial centrada na orixe de coordenadas, dirixida cara ao exterior e cuxa magnitude crece a medida que nos distanciamos da orixe. A segunda gráfica podería representar o campo de velocidades dun fluido que xira arredor da orixe de coordenadas. E a terceira representa a sección dunha á de avión e o campo de velocidades do aire nun contorno da mesma.



En certo modo o alumno xa está acostumbrado a tratar con algúns campos vectoriais xa que, en cursos anteriores, definiuse o gradiente dunha función escalar, que resulta ser un campo vectorial. Por exemplo, se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función escalar tal que existen as súas derivadas parciais en D, entón o **gradiente** de f,

$$\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$$

é un campo vectorial en $D \subset \mathbb{R}^2$. Igualmente, o gradiente dunha función escalar en $\mathbb{R}^3$ é un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 6 .

1. *Se* $f(x,y) = 2x^2y - e^{x-y}$*, o gradiente*

$$\nabla f(x,y) = (4xy - e^{x-y}, 2x^2 + e^{x-y})$$

é un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$*.*

2. *Se* $f(x,y,z) = 3xz - y^2 + \cos(xy)$*, o gradiente*

$$\nabla f(x,y,z) = (3z - y\sin(xy), -2y - x\sin(xy), 3x)$$

é un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$*.*

Os campos vectoriais que son gradiente dalgunha función escalar teñen especial relevancia no cálculo integral e tamén na física. Por iso debemos dedicarlles un espazo a este tipo de campos, denominados conservativos.

Definición 7 *Dado un campo vectorial* $\vec{F}$ *sobre unha rexión* $D \subset \mathbb{R}^n$*, diremos que é* ***conservativo*** *se existe unha función escalar diferenciable en* D *tal que* $\nabla f(x) = \vec{F}(x)$*, para todo* $x \in D$*. Á función* f *chámaselle* ***función potencial*** *do campo vectorial* $\vec{F}$*.*

En física, existen campos de forzas tan importantes como o campo gravitatorio ou o electromagnético que son campos conservativos. Comprobar se un campo é ou non conservativo a partir da definición anterior carrexa un certo traballo que se pode simplificar grazas ao seguinte teorema en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 2 *(**Criterio dun campo conservativo en** $\mathbb{R}^2$).Sexan M e N dúas funcións escalares con derivadas parciais continuas nunha bola aberta $B \subset \mathbb{R}^2$. Entón o campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ é conservativo se e só se*

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) \text{ para todo } (x,y) \in B$$

Exemplo 7 *Comprobamos que o campo $\vec{F}(x,y) = (2xy, x^2)$ en $\mathbb{R}^2$ é conservativo usando o teorema anterior. Neste caso $M(x,y) = 2xy$ e $N(x,y) = x^2$, co que*

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$$

que coinciden, polo que concluímos que o campo $\vec{F}$ é conservativo. Calculamos agora o potencial do campo, é dicir, unha función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x,y) = \vec{F}(x,y)$. Deste xeito:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & x^2 \end{array}\right\}$$

Da primeira ecuación temos que

$$f(x,y) = x^2y + C(y),$$

onde $C(y)$ é unha función que depende de y. Da segunda ecuación temos que

$$x^2 + C'(y) = x^2$$

polo que $C(y) = C$, onde C é unha constante que xa non depende de ningunha variable. Así as funcións potenciais de $\vec{F}$ son

$$f(x,y) = x^2y + C, \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

Como pode verse as funcións potenciais dun campo conservativo son infinitas e difiren unicamente nunha constante.

En $\mathbb{R}^3$ existe un criterio análogo para saber se un campo é conservativo, pero fai uso dunha ferramenta, o rotacional, que debemos definir previamente.

Definición 8 *O **rotacional** dun campo vectorial*

$$\vec{F}(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z))$$

nunha rexión $D \subset \mathbb{R}^3$ é

$$\vec{\text{rot}}\ \vec{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Para simplificar notación é habitual facer uso dun operador chamado nabla. Se definimos o operador **nabla** por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

entón podemos escribir

$$\text{r}\vec{\text{o}}\text{t}\ \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

Agora xa podemos enunciar o teorema que nos proporciona un criterio para saber se un campo en $\mathbb{R}^3$ é conservativo.

Teorema 3 *(**Criterio dun campo conservativo en** $\mathbb{R}^3$) Sexan M, N e P funcións escalares con derivadas parciais continuas nunha bóla aberta $B \subset \mathbb{R}^3$. Entón o campo vectorial*

$$\vec{F}(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z))$$

é conservativo se e só se

$$\vec{\text{rot}}\ \vec{F}(x,y,z) = \vec{0} \text{ para todo } (x,y,z) \in B$$

O exercicio resolto número 1 do anexo pode servir de exemplo do estudo dun campo conservativo en $\mathbb{R}^3$ e do cálculo do seu potencial. Outro operador que usaremos máis adiante nos teoremas de cálculo integral é a diverxencia que se define a continuación.

Definición 9 *A **diverxencia** dun campo vectorial*

$$\vec{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$$

nunha rexión $D \in \mathbb{R}^2$ é

$$\text{div}\ \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}.$$

A diverxencia dun campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z))$$

nunha rexión $D \in \mathbb{R}^3$ é

$$\text{div}\ \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Se facemos uso do operador nabla, que definimos anteriormente, tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$, podemos escribir:

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

Observamos que o resultado de aplicar o rotacional sobre un campo vectorial é outro campo vectorial, e o de aplicar a diverxencia sobre un campo é unha función escalar. O seguinte teorema móstranos que ocorre se aplicamos sobre un campo vectorial o rotacional e despois a diverxencia.

Teorema 4 *Sexa $\vec{F}(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z))$ un campo vectorial nunha rexión $D \in \mathbb{R}^3$ tal que as funcións M, N e P teñen segundas derivadas parciais continuas. Entón*

$$\text{div } (\vec{\text{rot}}\ \vec{F}) = 0$$

Exemplo 8 *Calculamos a diverxencia de $\vec{F}(x,y,z) = (x, y^3z^2, xz^3)$,*

$$\text{div } \vec{F}(x,y,z) = 1 + 3y^2z^2 + 3xz^2.$$

Calculamos agora o rotacional do mesmo campo,

$$\vec{\text{rot}}\ \vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y^3z^2 & xz^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (0 - 2y^3z)\vec{i} - (z^3 - 0)\vec{j} + (0-0)\vec{k} = (-2y^3z, -z^3, 0).$$

Por último, comprobamos que

$$\text{div } (\vec{\text{rot}}\ \vec{F}(x,y,z)) = 0.$$

3. Integral dunha función escalar sobre unha curva

En ocasións temos unha función escalar definida sobre unha curva, por exemplo a función densidade sobre un fío ou un arame. Neste apartado vemos como calcular a integral dunha función escalar que toma valores sobre unha curva.

Definición 10 *Sexa $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n = 2$ ou 3) unha función escalar sobre unha rexión $D \subset \mathbb{R}^n$ que contén a unha curva C suave ou suave a trozos parametrizada por $\vec{r}(t)$ con $t \in [a,b]$. A* ***integral de f ao longo da curva*** *C é:*

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left\| \vec{r}'(t) \right\| dt$$

se existe esta última.

É importante resaltar que a integral non depende da parametrización nin da orientación da curva C. Por outra banda, se a función f é continua en D entón a integral existe. A expresión da mesma para $n=2$ é

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t)^2+y'(t)^2}dt,$$

e para $n=3$

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt.$$

Exemplo 9 *Calculamos*

$$\int_C \frac{1}{2x-y}ds$$

onde C *é a curva* $y=x$*, dende o punto* $(1,1)$ *ata o* $(2,2)$*. O primeiro é dar unha parametrización da curva, neste caso* $\vec{r}(t)=(t,t)$ *con* $t\in[1,2]$*. Temos que* $\vec{r}'(t)=(1,1)$*, polo que*

$$\int_C \frac{1}{2x-y}ds = \int_1^2 \frac{1}{2t-t}\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\ln(2).$$

Segundo o que represente a función f pode haber diversas interpretacións da integral de f sobre unha curva. Por exemplo:

— Se $f=1$, entón $\int_C f ds$ é a lonxitude de C.

— Se f é a densidade en cada punto dunha curva C, entón $\int_C f ds$ representa a masa da curva.

Exemplo 10 *Achamos a masa dun resorte que ten a forma dunha hélice circular*

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t\vec{k}),\ 0\le t\le 6\pi$$

onde a densidade do resorte é $\rho(x,y,z)=1+z$*. Neste caso a curva xa está parametrizada, e a derivada da parametrización é*

$$\vec{r}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+\vec{k}),$$

polo que

$$\left\|\vec{r}'(t)\right\| = \sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1} = \sqrt{2}.$$

E así, a masa do resorte é

$$m = \int_C \rho ds = \int_0^{6\pi}(1+t)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\Big]_0^{6\pi} = \sqrt{2}\left(6\pi+18\pi^2\right).$$

Cando a integral é sobre unha curva C formada pola unión de curvas suaves a trozos, $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots C_n$, entón

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \cdots \int_{C_n} f ds.$$

4. Integral dun campo vectorial sobre unha curva

Ocupámonos agora da integral dun campo vectorial que toma valores sobre unha curva C.

Definición 11 *Sexa $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) un campo vectorial sobre unha rexión $D \subset \mathbb{R}^n$ que contén a unha curva C suave ou suave a trozos parametrizada por $\vec{r}(t)$ con $t \in [a, b]$. A* ***integral de $\vec{F}$ ao longo da curva*** *C é:*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

onde $\vec{T} = \dfrac{r'\vec{(t)}}{\left\| r'\vec{(t)} \right\|}$ é o vector unitario tanxente en $r\vec{(t)}$.

Así pois, a integral dun campo vectorial sobre unha curva C defínese como a integral dunha función escalar, o produto escalar do campo polo vector unitario tanxente $\vec{T}$ en cada punto, xa estudada no apartado anterior. De feito, substituíndo o valor de $\vec{T}$ na integral e usando a definición 8:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_a^b \vec{F} \cdot \frac{\vec{r'}(t)}{\left\| \vec{r'}(t) \right\|} \left\| \vec{r'}(t) \right\| dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t) dt.$$

Esta última expresión é a que usaremos habitualmente para calcular a integral dun campo vectorial sobre unha curva. Neste caso a integral tampouco depende da parametrización da curva C, mais si da súa orientación. A diferenza entre escoller unha orientación da curva ou a contraria estriba no signo da integral, é dicir,

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Para $n = 2$ a expresión da integral é

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt$$

e para $n = 3$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt.$$

Exemplo 11 *Calculamos*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

sendo $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} + xy\vec{j}$*, e* C *a curva* $y = x$ *con punto inicial* $(1, 1)$ *e punto final* $(2, 2)$*. En primeiro lugar parametrizamos a curva con esa orientación:*

$$\vec{r}(t) = (t, t) \text{ con } t \in [1, 2].$$

A derivada da parametrización é $\vec{r}'(t) = (1, 1)$*, e así:*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (t^2, t^2) \cdot (1, 1) dt = \int_1^2 2t^2 dt = \frac{2}{3}\, t^3\Big]_1^2 = \frac{14}{3}.$$

Calculamos agora a integral do mesmo campo sobre a curva $-C$ *orientada en sentido contrario, é dicir,* $y = x$ *con punto inicial* $(2, 2)$ *e punto final* $(1, 1)$*. A parametrización da curva é*

$$\vec{r}(t) = (-t, -t) \text{ con } t \in [-2, -1].$$

A derivada da parametrización é $\vec{r}'(t) = (-1, -1)$*, e así:*

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-2}^{-1} (t^2, t^2) \cdot (-1, -1) dt = \int_{-2}^{-1} (-2t^2) dt = -\frac{2}{3}\, t^3\Big]_{-2}^{-1} = -\frac{14}{3}.$$

Se $\vec{F}$ é un campo de forzas sobre unha partícula que se despraza sobre a curva C entón

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

é o traballo realizado polo campo de forzas sobre a partícula ao longo da curva.

Exemplo 12 *Calculamos o traballo realizado polo campo de forzas*

$$\vec{F}(x, y, z) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{4})$$

sobre unha partícula que se move ao longo da hélice de ecuacións

$$\vec{r}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + t\vec{k}$$

dende o punto $(1, 0, 0)$ *ata o punto* $(-1, 0, 3\pi)$*. Sabemos que o traballo é a integral do campo de forzas sobre a curva:*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

Para poder calcular a integral precisamos coñecer o intervalo de variación do parámetro t*. Dado que a partícula se move dende o punto* $(1, 0, 0)$ *ata o punto* $(-1, 0, 3\pi)$ *ao longo da hélice temos que* $t \in [0, 3\pi]$*. A derivada da parametrización é* $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$*. Así, o traballo realizado é*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{3\pi} (\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{4}) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt = \int_0^{3\pi} \frac{1}{4} dt = \frac{3\pi}{4}.$$

Cando a integral é sobre unha curva C formada pola unión de curvas suaves a trozos, $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots C_n$, entón

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \cdots \int_{C_n} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

5. Integral dun campo conservativo sobre unha curva

Os campos conservativos teñen especial relevancia no cálculo integral debido en parte ao seguinte teorema.

Teorema 5 *Sexa C unha curva suave contida nunha rexión aberta D de $\mathbb{R}^n$ parametrizada por $\vec{r}(t)$,con $t \in [a, b]$. Sexa $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) un campo conservativo en D e sexa $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ o seu potencial, é dicir, $\vec{F} = \nabla f$. Se as compoñentes de $\vec{F}$ son continuas en D, entón:*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Polo tanto, a integral dun campo conservativo sobre unha curva tan so depende do valor da función potencial nos puntos inicial e final da curva. É máis, o valor da integral é o mesmo sobre calquera outra curva que una os mesmos puntos, sempre que estea orientada do punto inicial ao punto final. Este feito podémolo comprobar no seguinte exemplo.

Exemplo 13 *Sobre un punto material actúa unha forza $\vec{F}(x, y) = 4xy\vec{i} + 2x^2\vec{j}$. Calculamos primeiro o traballo realizado por dita forza cando o punto se move dende $(0, 0)$ ata $(1, 1)$ pola recta $y = x$. Unha parametrización da curva é*

$$\vec{r}(t) = (t, t) \;\; \textit{con} \;\; t \in [0, 1],$$

e a súa derivada $\vec{r}'(t) = (1, 1)$, polo que o traballo realizado é

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (4t^2, 2t^2) \cdot (1, 1)dt = \int_0^1 6t^2 dt = 2.$$

Imos agora a calcular o traballo realizado pola mesma forza $\vec{F}$ cando o punto se move dende $(0, 0)$ ata $(1, 1)$ pola curva $y = x^2$. Unha parametrización desta curva é

$$\vec{r}(t) = (t, t^2) \;\; \textit{con} \;\; t \in [0, 1],$$

e a súa derivada $\vec{r}'(t) = (1, 2t)$, polo que o traballo realizado é

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (4t^3, 2t^2) \cdot (1, 2t)dt = \int_0^1 (8t^3)dt = 2.$$

Como vemos, o resultado é o mesmo. De feito, dado que o campo F é conservativo, pois

$$\frac{\partial(2x^2(}{\partial x} = \frac{\partial(4xy)}{\partial y} = 4x,$$

e as componentes de $\vec{F}$ son continuas, podemos entón usar o teorema 5 para calcular calquera das dúas integrais. Para isto calculamos previamente o potencial de $\vec{F}$, é dicir, unha función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x,y) = \vec{F}(x,y)$. Polo tanto, buscamos $f(x,y)$ tal que:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 4xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 2x^2 \end{array}\right\}$$

Da primeira ecuación temos que

$$f(x,y) = 2x^2y + C(y),$$

onde $C(y)$ é unha función que depende de y. Da segunda ecuación temos que

$$2x^2 + C'(y) = 2x^2$$

polo que $C(y) = C$, onde C é unha constante. Así as funcións potenciais de $\vec{F}$ son

$$f(x,y) = 2x^2y + C, \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

Para $C = 0$ temos un potencial $f(x,y) = 2x^2y$ do campo $\vec{F}$ co que podemos calcular a integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1,1) - f(0,0) = 2.$$

En certas circunstancias sinxelas, o resultado do teorema 5 é unha condición equivalente a que un campo sexa conservativo. As circunstancias sinxelas ás que aludimos son que a rexión na que estea definida o campo sexa conexa, segundo a definición que damos a continuación.

Definición 12 *Dicimos que unha rexión $D \subset \mathbb{R}^n$ é* ***conexa*** *se cada dous puntos de D pódense unir por unha curva suave a trozos contida en D.*

Neste tipo de rexións cúmprese entón o seguinte teorema.

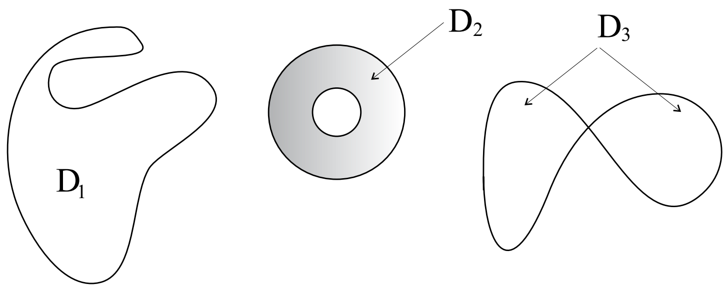
Teorema 6 *Sexa $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) un campo vectorial con derivadas parciais primeiras continuas nunha rexión aberta e conexa D. Sexa C unha curva suave o suave a trozos en D que une os puntos P_1 e P_2 en D. As seguintes condicións son equivalentes:*

1. *$\vec{F}$ é conservativo.*

2. *O valor de* $\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$ *é independente da curva* C *que una os puntos* P_1 *e* P_2.
3. $\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0$ *para toda curva pechada contida en* D.

6. Teorema de Green

Neste último apartado enunciamos un dos teoremas máis importantes do cálculo vectorial en $\mathbb{R}^2$ e que, baixo determinadas hipóteses, nos permitirá calcular unha integral dun campo vectorial sobre unha curva como unha integral dobre sobre unha rexión de $\mathbb{R}^2$. Traballaremos agora sobre unha rexión D de $\mathbb{R}^2$ tal que a súa fronteira é unha única curva C pechada, simple e suave ou suave a trozos. Por exemplo, das tres rexións representadas a continuación, a rexión D_1 é a única que nos valería neste caso, xa que a súa fronteira é unha única curva pechada, simple e suave. A rexión D_2 non vale porque a fronteira está formada por máis dunha curva, e a rexión D_3 tampouco porque a súa fronteira é unha curva que non é simple.



D_1 : Rexión limitada por unha curva simple

D_2 : Rexión limitada por dúas curvas pechadas

D_3 : Rexión limitada por unha curva non simple

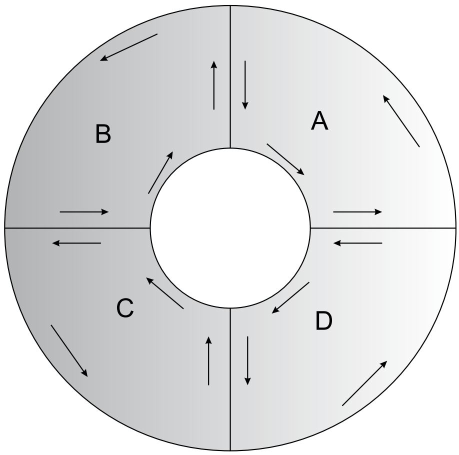
O teorema de Green é o seguinte.

Teorema 7 *Sexa* D *unha rexión de* $\mathbb{R}^2$ *tal que a súa fronteira é unha única curva* C *pechada, simple, suave ou suave a trozos. Sexa* $\vec{F}$ *un campo vectorial da forma* $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ *tal que as súas compoñentes teñen derivadas parciais continuas nunha rexión que contén a* D *e a* C*. Se a curva* C *está orientada de xeito que a rexión* D *queda á esquerda, entón:*

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int\int_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

Os exercicios 2 e 3 do anexo serven como exemplos da aplicación do teorema de Green.

Observación 3 *O teorema pódese aplicar as rexións R que se poidan descompoñer en varias rexións do tipo anterior. Nese caso aplícase o teorema de Green en cada unha das partes.*



R= A ∪ B ∪ C ∪ D

ANEXOS

1. Sexa $\vec{F} = 3z^2\vec{i} + 3y^2\vec{j} + (6xz-2)\vec{k}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$. Comproba se o campo $\vec{F}$ é conservativo e no seu caso calcula o seu potencial.

   SOLUCIÓN

   Para comprobar se o campo $\vec{F}$ é conservativo calculamos o seu rotacional:

$$\vec{\text{rot}}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3z^2 & 3y^2 & 6xz-2 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

   polo que $\vec{F}$ é un campo conservativo. Un potencial de $\vec{F}$ é unha función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z)$. Deste xeito:

$$\left.\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & = & 3z^2\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & = & 3y^2\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) & = & 6xz-2\end{array}\right\}$$

Da primeira ecuación temos que $f(x,y,z) = 3z^2x + C_1(y,z)$ onde $C_1(y,z)$ é unha función que depende de y e z. Da segunda ecuación temos que

$$\frac{\partial C_1}{\partial y}(y,z) = 3y^2$$

polo que $C_1(y,z) = y^3 + C_2(z)$, e así

$$f(x,y,z) = 3z^2x + y^3 + C_2(z),$$

onde $C_2(z)$ é unha función que depende de z. Da terceira ecuación

$$6zx + C_2'(z) = 6xz - 2$$

polo que $C_2(z) = -2z + C$, e deste xeito, as funcións potenciais de $\vec{F}$ son

$$f(x,y,z) = 3z^2x + y^3 - 2z + C$$

con $C \in \mathbb{R}$ unha constante.

$\square$

2. Sexa $\vec{\mathbf{F}} = (xy, x)$ e C a fronteira do triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,3)$ e $(2,0)$ percorrida dende $(0,0)$ no sentido das agullas do reloxo.
   a) Parametriza a curva C e calcula $\int_C \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}$ usando a parametrización de C.
   b) Comproba se é posible usar o teorema de Green para calcular $\int_C \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\mathbf{r}}$ e se é posible usa o teorema para volver a calcular a integral.

SOLUCIÓN

a) A curva C é unha curva a trozos, que podemos denotar por C_1, C_2 e C_3, sendo C_1 o segmento recto que une $(0,0)$ con $(2,3)$, C_2 o que une $(2,3)$ con $(2,0)$ e C_3 o que une $(2,0)$ con $(0,0)$. Deste xeito $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ e unha parametrización de C é:

$$C_1 :\ r_1(t) = (2t, 3t);\ \ 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2 :\ r_2(t) = (2, -3t+3);\ \ 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3: \ r_3(t) = (-2t+2, 0); \ 0 \leq t \leq 1$$

Para calcular $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}}$ precisamos a derivada da parametrización:

$$r_1'(t) = (2,3)$$

$$r_2'(t) = (0,-3)$$

$$r_3'(t) = (-2,0).$$

Deste xeito,

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \int_{C_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} + \int_{C_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} + \int_{C_3} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} =$$

$$= \int_0^1 \left((6t^2, 2t) \cdot (2,3)\right) dt + \int_0^1 ((-6t+6, 2) \cdot (0,-3))\, dt +$$

$$+ \int_0^1 ((0, -2t+2) \cdot (-2,0))\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left(12t^2 + 6t\right) dt + \int_0^1 (-6) dt + \int_0^1 0 dt = 7 - 6 + 0 = 1$$

b) A curva C é pechada e suave a trozos, mais non está orientada en sentido contrario ás agullas do reloxo. Sabemos que

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = -\int_{-C} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}}$$

e $-C$ si é unha curva pechada, suave a trozos, e orientada no sentido contrario ás agullas do reloxo, polo que podemos aplicar o teorema de Green para calcular a segunda integral e deste xeito obter tamén o valor da primeira:

$$\int_{-C} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \int\int_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

onde $M(x,y) = xy$, $N(x,y) = x$ e D ó triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,3)$ e $(2,0)$, e polo tanto
$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq y \leq (3/2)x, 0 \leq x \leq 2\right\}$. Así:

$$\int_{-C} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{dr}} = \int_0^2 \left(\int_0^{(3/2)x} (1-x)\, dy\right) dx = \frac{3}{2}\int_0^2 \left(x - x^2\right) dx =$$

$$= \frac{3}{2}(2 - \frac{8}{3}) = -1$$

e deste xeito

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -\int_{-C} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 1$$

□

3. a) Sexa C unha curva simple, pechada e suave ou suave a trozos en $\mathbb{R}^2$, e sexa $D \in \mathbb{R}^2$ a rexión que encierra. Demostra que, se C está orientada en sentido contrario ás agullas do reloxo, a área da rexión D pódese calcular como

$$A(D) = \int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

sendo $\vec{\mathbf{F}}(x, y) = (0, x)$.

b) Calcula a área do interior da elipse $\vec{\mathbf{r}} = (3\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. (**Indicación:** $\cos^2(t) = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$).

SOLUCIÓN

a) Sabemos que a área dunha rexión $D \in \mathbb{R}^2$ vén dada por

$$A(D) = \int\int_D 1\, dA$$

Por outra banda, a rexión D ten por fronteira unha curva simple pechada suave ou suave a trozos, e orientada en sentido contrario ás agullas do reloxo. Polo que podemos aplicar o teorema de Green sobre calquera campo $\vec{\mathbf{F}}$ definido en $\mathbb{R}^2$ tal que as súas componentes teñen derivadas parciais continuas nunha rexión que conteña a D e a C. En particular, o campo $\vec{\mathbf{F}}(x, y) = (0, x)$ cumpre estas hipóteses, polo que, do teorema de Green:

$$\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int\int_D 1\, dA = A(D)$$

e queda así demostrado.

b) Aplicando o apartado anterior, e tendo en conta que

$$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}(t)) = (0, 3\cos t)$$

e que

$$\vec{\mathbf{r}}'(t) = (-3\sin t, 2\cos t),$$

temos que

$$A(D) = \int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_0^{2\pi} (0, 3\cos t) \cdot (-3\sin t, 2\cos t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (6\cos^2 t)\, dt.$$

Como $\cos^2(t) = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

$$\int_0^{2\pi} (6\cos^2 t)\, dt = 3\int_0^{2\pi} (1+\cos(2t))\, dt = 3(2\pi) = 6\pi$$

$\square$

BIBLIOGRAFÍA

BRADLEY, G.L. e K.J. SMITH (2000): *Cálculo*, Prentice-Hall.

BURDEN, R. e J.D. FAIRES (2004): *Métodos numéricos*, International Thomson Editores.

CHAPRA, S.C. e R.P. CANALE (2003): *Métodos numéricos para ingenieros*, McGraw-Hill.

LARSON, R.; R. HOSTETLER e B. EDWARDS (2006): *Cálculo*, México: McGraw Hill.

MARSDEN, J. e A. TROMBA (2004): *Cálculo vectorial*, Pearson.

NAGLE, R.K.; E.B. SAFF e A.D. SNIDER (2005): *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Pearson Education.

PÉREZ, C. (2007): *MATLAB y sus aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería*, Prentice Hall.

QUINTELA, P (2000): *Matemáticas en Ingeniería con MATLAB*, Universidade de Santiago de Compostela: Servicio de Publicacións e Intercambio Científico.

STEINER, E. (2005): *Matemáticas para las ciencias aplicadas*, Editorial Reverté.

SUÁREZ, C. e A. VIEITES: *Cálculo integral y aplicaciones con MATLAB*, Pearson Prentice Hall.

THOMAS, G.B (2005-2006): *Cálculo*, México: Pearson, Addison Wesley.

ZILL, D.G. (2002): *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, Grupo Editorial Iberoamericana.

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

VICERREITORÍA DE ESTUDANTES,
CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA