

MATERIA
Transmisión de calor

TITULACIÓN
Grao en Enxeñería Química

unidade
didáctica
4

Conducción multidimensional de calor en estado estacionario

Héctor Rodríguez

Departamento de Enxeñería Química
Escola Técnica Superior de Enxeñería

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Esta obra atópase baixo unha licenza internacional Creative Commons BY-NC-ND 4.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-ND 4.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.gl>

© Universidade de Santiago de Compostela, 2014

Deseño e maquetación

J. M. Gairí

Edita

Edicións USC

<https://www.usc.gal/publicacions>

DOI

<https://dx.doi.org/10.15304/9788416183517>

MATERIA: Transmisión de Calor

TITULACIÓN: Grao en Enxeñaría Química

PROGRAMA XERAL DO CURSO

Localización da presente unidade didáctica

BLOQUE 1

Unidade I. Introducción

Aspectos xerais

Mecanismos de transmisión de calor

Ecuacións de velocidade

BLOQUE 2

Unidade II. Introducción á conducción

Lei de Fourier

Conductividade térmica. Difusividade térmica

Ecuación de difusión da calor. Condicións iniciais e de contorno

Unidade III. Conducción unidimensional de calor en estado estacionario

A placa plana

Sistemas radiais

Conducción con xeración de enerxía térmica

Superficies extendidas. Aletas

Unidade IV. Conducción multidimensional de calor en estado estacionario

Métodos de resolución

Factor de forma e fluxo adimensional de calor

Métodos numéricos. Método de diferenzas finitas

Unidade V. Conducción de calor en estado non estacionario

Resistencia interna desprezable

Resistencia interna non desprezable

Sólido semiinfinito

Conducción non estacionaria bi- e tridimensional. Método de diferenzas finitas

BLOQUE 3

Unidade VI. Introducción á convección

Capas límite en convección. Coeficientes de convección. Réximes laminar e turbulento

Similaridade de capa límite. Parámetros de similaridade

Unidade VII. Convección forzada: fluxo externo

O método empírico

Correlacións para a estimación de coeficientes de convección en fluxo externo

Unidade VIII. Convección forzada: fluxo interno

Consideracións hidrodinámicas. Consideracións térmicas

Correlacións para a estimación de coeficientes de convección en fluxo interno

Unidade IX. Convección natural

Consideracións físicas. Número de Grashof. Turbulencia

Correlacións para a estimación de coeficientes de convección en convección natural

Convección combinada natural e forzada

Unidade X. Ebulición e condensación

Modos de ebulición. Ebulición en masa. Ebulición por convección forzada

Correlacións

Mecanismos físicos de condensación. Condensación de película. Correlacións

BLOQUE 4

Unidade XI. Cambiadores de calor

Tipos de cambiadores de calor

Coefficiente global de transmisión de calor

Análise e deseño de cambiadores de calor: método da diferenza de temperaturas media logarítmica e método eficacia-número de unidades de transferencia

Aspectos relativos a seguridade

BLOQUE 5

Unidade XII. Radiación

Conceptos fundamentais. Intensidade de radiación. Corpo negro Superficies reais. Superficie gris. Intercambio de radiación entre superficies

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

OBJECTIVOS

METODOLOGÍA

CONTIDOS BÁSICOS

1. Introducción
2. Métodos de resolución
3. Factor de forma e fluxo de calor adimensional para conducción
 - 3.1. Factor de forma
 - 3.2. Fluxo de calor adimensional
4. Métodos numéricos. O método de diferenzas finitas
 - 4.1. Xeralidades dos métodos numéricos
 - 4.2. Método de diferenzas finitas

ACTIVIDADES PROPOSTAS

AVALIACIÓN

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

Anexo 1 – Problemas de exemplo para a discusión nas clases expositivas

Exemplo 1 (correspóndese coa sección 3 dos Contidos Básicos)

Exemplo 2 (correspóndese coa sección 3 dos Contidos Básicos)

Exemplo 3 (correspóndese coa sección 4 dos Contidos Básicos)

Anexo 2 – Boletín de problemas

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Anexo 3 – Casos para a resolución mediante o método de diferenzas finitas na sesión de aula de informática utilizando software de folla de cálculo

Caso 1

Caso 2

PRESENTACIÓN

A presente Unidade Didáctica titulada “Conducción multidimensional de calor en estado estacionario” encádrase dentro do segundo bloque da materia “Transmisión de Calor” do segundo curso do Grao en Enxeñería Química. Dentro dese bloque, dedicado á transmisión de calor mediante o mecanismo de conducción, é a terceira unidade didáctica tras unha unidade introdutoria específica para a conducción de calor e outra referida á conducción de calor en unha única dimensión. A duración desta Unidade Didáctica é de 4 h, abranguendo 2,5 h de clases expositivas e 1,5 h de clase interactivas, do total de 37 h expositivas e 12 h interactivas das que consta a materia.

Esta Unidade Didáctica 4 pretende que o alumnado se familiarice con procesos de conducción de calor nos que máis dunha dimensión espacial é relevante (en particular conducción bidimensional, con extensión ó caso tridimensional). Explorárase a forma que toma a ecuación xeral de difusión da calor para este caso concreto e discutírase a posibilidade da súa resolución rigorosa. Introdúciense o factor de forma e o fluxo adimensional de calor como posibles ferramentas para obter solucións exactas ou aproximadas en casos específicos. Finalmente, iníciase ó alumnado na aplicación de métodos numéricos, con particular énfase no método de diferenzas finitas, para a resolución numéricas de situacións de transmisión de calor por conducción a nivel bi- e tridimensional en estado estacionario.

A duración estimada para o desenvolvemento desta Unidade Didáctica é de 4 horas, incluíndo 2,5 horas de clase expositiva e 1,5 horas de clase interactiva de seminario.

OBXECTIVOS

A finalidade desta Unidade Didáctica é dotar ó alumnado dos coñecementos básicos para a análise enxeñeiril de diferentes situacións nas que se produza transmisión de calor por conducción en estado estacionario, sendo relevante máis de unha dimensión do espazo. Obxectivos específicos desta Unidade Didáctica son:

- Identificar a forma que adopta a ecuación xeral de difusión da calor a situacións de transmisión de calor bi- e tridimensional, con e sen xeración de enerxía térmica, en estado estacionario.
- Ser consciente das limitacións para a resolución analítica rigorosa da ecuación que rexe este tipo de conducción de calor.
- Coñecer o factor de forma e o fluxo adimensional de calor, e aplicalos á resolución de casos de xeometría específica nos que acontece este tipo de conducción de calor.
- Coñecer as posibilidades que ofrecen os métodos numéricos para a resolución de procesos de conducción de calor en máis de unha dimensión.
- Aplicar o método de diferenzas finitas á resolución de procesos bi- e tridimensionais de conducción de calor en estados estacionario.

METODOLOXÍA

A metodoloxía empregada na Unidade Didáctica combinará a exposición maxistral dos contidos teóricos co desenvolvemento da aplicación deses contidos en seminarios interactivos:

- Clases expositivas (2,5 horas): Expoñeranse os principios teóricos e fundamentais da Unidade Didáctica utilizando o apoio audiovisual dunha presentación. Esta presentación estará a disposición do alumnado no Campus Virtual con antelación ó desenvolvemento da Unidade Didáctica. Aínda que o desenvolvemento das clases pivotará arredor do modelo expositivo, fomentarse a participación activa do alumnado mediante a formulación de problemas-exemplos e preguntas abertas para a xeración de discusións abertas.
- Clases interactivas (1,5 horas): Desenvolverase unha sesión de 1 hora na aula de informática, na que se levará a cabo a resolución de exemplos de aplicación do método de diferenzas finitas co software de folla de cálculo. Tamén se realizará un seminario de 0,5 horas, no que se comentarán as dificultades atopadas polo alumnado na resolución de problemas dun boletín posto á súa disposición no Campus Virtual ó comezo da Unidade Didáctica.

Ademais o alumnado poderá facer uso do horario de titorías individualizadas, nas que o profesor solucionará as dúbidas que puidesen xurdir de forma personalizada.

CONTIDOS BÁSICOS

1. Introducción

A conducción de calor en dúas dimensións implica unha distribución de temperaturas que se caracteriza necesariamente por dúas coordenadas espaciais; por exemplo: $T(x,y)$. O vector de densidade de fluxo de calor \mathbf{q}'' , neste caso, estará caracterizado igualmente por dúas compoñentes direccionais; por exemplo: $\mathbf{q}'' = \mathbf{i} \cdot q_x'' + \mathbf{j} \cdot q_y''$. Os conxuntos de puntos que posúen unha mesma temperatura no espazo bidimensional configuran as diferentes isothermas. Perpendiculares ás isothermas atópanse as liñas de fluxo de calor. Estas últimas tamén se coñecen como adiabatas, xa que o fluxo de calor ó seu través no espazo bidimensional é nulo.

A ecuación de difusión da calor (véxase a Unidade Didáctica II), particularizada para o caso da conducción de calor bidimensional en estado estacionario e con condutividade térmica constante k , adopta a seguinte forma en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q_{v,g}(x,y)}{k} = 0 \quad (1)$$

onde T é a temperatura, x e y son as coordenadas espaciais, e $q_{v,g}$ é o fluxo volumétrico de xeración de calor. Para o caso específico de que non haxa xeración no proceso, a ecuación toma unha forma aínda máis simplificada:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

O indicado nesta sección para situacións bidimensionais é directamente extrapolable a situacións tridimensionais, simplemente considerando a relevancia da terceira dimensión espacial no proceso de transmisión de calor.

2. Métodos de resolución

A ecuación (1) é unha ecuación diferencial de segunda orde. Nalgúns casos concretos a súa **resolución analítica** é posible, dando lugar a unha solución exacta. Porén, na maioría dos casos a solución matemática exacta non é posible e hai que optar por algún método aproximado de resolución. En particular destacan neste último apartado os **métodos numéricos**. Estes métodos son a aproximación máis útil e versátil, xa que se adaptan a calquera xeometría e nivel de complexidade.

Un método clásico, aínda que de utilidade limitada a nivel cuantitativo e unicamente válido para casos sen xeración de calor, é o **método gráfico**. Este método consiste na construción sistemática de isoterma e isolíñas de fluxo aproximadamente perpendiculares, xerando unha malla de cadrados curvilíneos na superficie bidimensional obxecto do problema. Pode proporcionar unha estimación rápida da velocidade de fluxo de calor, pero en xeral está en desuso debido ó rápido desenvolvemento dos métodos numéricos ó abeiro dos avances computacionais das últimas décadas.

Tamén cun uso actual practicamente inexistente, aínda que interesantes desde un punto de vista conceptual, cabe mencionar os **métodos analóxicos**. Estes métodos consisten na reprodución da transmisión de calor bi- ou tridimensional mediante un dispositivo experimental funcionando en base ó transporte doutra propiedade pero que se rexa por ecuacións análogas. Un caso paradigmático é a analoxía eléctrica da transmisión de calor, onde se pode establecer unha correspondencia entre diferenza de voltaxe e diferenza de temperatura, entre intensidade eléctrica e fluxo de calor, e entre resistencia eléctrica e resistencia térmica. Así, mediante a construción dun dispositivo físico baseado nun mallado condutor da electricidade e coas apropiadas resistencias eléctricas, a aplicación dunha voltaxe dada permite a simulación analóxica do proceso de transmisión de calor nunha superficie equivalente ó mallado.

3. Factor de forma e fluxo de calor adimensional para condución

3.1. Factor de forma

A transmisión de calor bi- e tridimensional nun medio delimitado por dúas superficies isoterma (ás temperaturas T_1 e T_2) pode representarse en termos do **factor de forma** para condución (S), do seguinte xeito:

$$q = S \cdot k \cdot (T_1 - T_2) \quad (3)$$

onde q representa a velocidade de fluxo de calor e k é a condutividade térmica do medio. Nótese que S ten unidades de lonxitude.

Mediante resolución analítica, obtivéronse solucións exactas e aproximadas para os factores de forma de numerosos sistemas bi- e tridimensionais. Estes resultados acostuman presentarse tabulados, como por exemplo no texto de Incropera et al. (2005). Para cada caso, debe identificarse a xeometría apropiada e ter en conta as condicións de restrición de aplicación da expresión do factor de forma.

A partir da ecuación (3), e tendo en conta o concepto de resistencia térmica, pode obterse facilmente a expresión da resistencia térmica $R_{t,2D}$ asociada á conducción bidimensional:

$$R_{t,2D} = \frac{1}{S \cdot k} \quad (4)$$

Esta expresión pode utilizarse en combinación con outras resistencias térmicas uni- ou bidimensionais conectadas en serie ou en paralelo, para resolver problemas de conducción de calor de acordo coa estratexia de resolución de circuitos presentada na Unidade Didáctica 3.

Algúns exemplos de sistemas para os que se dispón dunha expresión para o factor de forma son os seguintes:

- Esfera isoterma soterrada nun medio semi-infinito.
- Cilindro isoterma horizontal de lonxitude L soterrado nun medio semi-infinito.
- Cilindro vertical nun medio semi-infinito.
- Conducción entre dous cilindros paralelos de lonxitude L nun medio infinito.
- Cilindro horizontal de lonxitude L a medio camiño entre dous planos paralelos de igual lonxitude e anchura infinita.
- Cilindro de lonxitude L centrado nun sólido de sección cadrada e igual lonxitude.
- Cilindro ecéntrico de lonxitude L nun cilindro de igual lonxitude.
- Conducción a través de arestas resultantes da intersección de dúas paredes.
- Conducción a través de esquinas resultantes da intersección de tres paredes.
- Disco de diámetro D sobre un medio semi-infinito.

3.2. Fluxo de calor adimensional

Para obxectos isoterms con área superficial A_s e temperatura T_1 inmersos nun medio infinito a temperatura T_2 , o fluxo de calor por conducción (q) que ocorre entre ambos pode representarse en termos do **fluxo de calor adimensional en estado estacionario** (q_{ss}^*), como segue:

$$q = q_{ss}^* \cdot k \cdot A_s \cdot \frac{T_1 - T_2}{L_c} \quad (5)$$

onde k é a condutividade térmica do medio infinito e L_c é unha lonxitude característica do obxecto, calculada mediante a seguinte expresión:

$$L_c = \sqrt{\frac{A_s}{4 \cdot \pi}} \quad (6)$$

Ó igual ca co factor de forma, obtivéronse solucións exactas e aproximadas para os fluxos de calor adimensionais en estado estacionario para unha serie de sistemas bi- e tridimensionais. As configuracións máis comúns acostuman presentarse tabuladas, como por exemplo no texto de Incropera et al. (2005).

Algúns exemplos de sistemas para os que se dispón dunha expresión para o fluxo de calor adimensional en estado estacionario son os seguintes:

- Esfera isoterma nun medio infinito.
- Disco isoterma, de grosor desprezable, nun medio infinito.
- Rectángulo de dimensións $L \times w$, de grosos desprezable, nun medio infinito.
- Paralelepípedo de base cadrada de área D^2 e altura d , nun medio infinito.

4. Métodos numéricos. O método de diferenzas finitas

4.1. Xeralidades dos métodos numéricos

Os métodos numéricos son a mellor alternativa para a resolución de problemas de conducción de calor bidimensional en xeometrías complicadas ou con condicións de contorno complicadas. De maneira cómoda, poden extenderse tamén a problemas de tipo tridimensional.

Os métodos numéricos resoven os casos de conducción de calor mencionados mediante a determinación das temperaturas unicamente nunha serie de puntos discretos, coñecidos como puntos nodais ou **nodos**. O conxunto destes puntos nodais denomínase **rede nodal**, **grella** ou **mallá**.

Cada nodo representa unha certa rexión (denominada **rexión nodal**), de xeito que a súa temperatura é unha medida da temperatura media desa rexión. A exactitude numérica dos cálculos vai depender fortemente do número de puntos nodais designados: canto máis fina sexa a mallá, máis exactas serán as solucións que se obteñan.

4.2. Método de diferenzas finitas

O método de diferenzas finitas é fácil de aplicar e constitúe unha boa introdución ás técnicas numéricas. En primeiro lugar defínese o mallado do sistema e procédese a elaborar a chamada **ecuación de diferenzas finitas** para cada nodo. Para obter a expresión matemática desta ecuación aplícase o principio de conservación da enerxía a un volume de control equivalente á rexión nodal do nodo en cuestión. É conveniente formular o balance de enerxía asumindo que tódolos fluxos de calor flúen cara ó nodo concreto desde os diferentes nodos colindantes. Circunscríbndonos ó caso bidimensional, e asumindo que a conducción ocorre exclusivamente a través de “canais” orientados ben coa dirección do eixo x ou ben coa dirección do eixo y desde cada un dos nodos colindantes, pode aplicarse facilmente unha forma simplificada

da lei de Fourier (véxanse as Unidades Didácticas 1 e 2). Nesa forma simplificadas, a derivada da temperatura co espazo é tratada como unha diferenza finita (en vez de como unha distribución continua), posto que a temperatura en toda unha rexión nodal está representada pola temperatura do seu nodo, e a distancia entre ambos nodos tamén se toma como a distancia que separa a ambas rexións nodais. De aí vén a denominación do método.

Mediante o proceso brevemente descrito no parágrafo anterior, e levando a cabo as operacións alxebraicas axeitadas, chégase á expresión da ecuación de diferenzas finitas para o nodo estudado. Repetindo o procedemento para cada nodo, obteranse tantas ecuacións como nodos no mallado. As incógnitas son as temperaturas de tódolos nodos. Polo tanto, atopámonos cun sistema de n ecuacións con n incógnitas, sendo n o número de nodos no mallado. Este sistema matemático pode resolverse de xeito doado mediante inversión matricial, ou tamén mediante métodos iterativos como os que por exemplo poden usar os softwares de folla de cálculo.

Segundo a disposición do nodo no mallado, a ecuación nodal de diferenzas finitas correspondente será diferente. En xeometrías típicas os distintos tipos característicos de nodos que se poden dar nun mallado convencional, cos nodos dispostos en filas e columnas, son:

- Nodo interior.
- Nodo en esquina interna con convección.
- Nodo en superficie plana con convección.
- Nodo en esquina exterior con convección.
- Nodo en superficie plana con radiación de calor constante.

O indicado para casos bidimensionais pode facerse facilmente extensible para casos tridimensionais, simplemente aplicando os balances axeitados nesa nova perspectiva espacial para desenvolver as correspondentes ecuacións nodais.

ACTIVIDADES PROPOSTAS

Contémplanse as seguintes actividades:

- Discusión de problemas de exemplo (véxase o Anexo 1) no marco das clases expositivas, como complemento e reforzo á exposición dos contidos teóricos. Dedicarase un tempo aproximado de 15 minutos.
- Resolución dos problemas contidos no boletín de problemas da Unidade Didáctica (véxase o Anexo 2). Esta actividade será voluntaria e realizaraa o alumnado nas súas horas de esforzo persoal asociadas á Unidade Didáctica. As solucións presentaranse e comentaranse na sesión de seminario.
- Sesión de aula de informática para o plantexamento e resolución de casos de conducción de calor bi- ou tri-dimensional en estado estacionario, mediante o método de diferenzas finitas, utilizando software de folla de cálculo (véxase o Anexo 3).

AVALIACIÓN

Considerarase unha avaliación continua e unha avaliación como parte da avaliación final conxunta da materia:

- Avaliación continua: Valorarase o nivel de participación nas clases expositivas, así como tamén o esforzo na realización dos problemas do boletín e a participación nas clases interactivas. Esta avaliación integrarase na avaliación continua conxunta da materia (20% da cualificación global).
- Avaliación final conxunta (exame teórico-práctico): O exame final da materia (70% da cualificación global) incorporará cuestións teóricas ou problemas prácticos relacionados cos contidos desta Unidade Didáctica.

BIBLIOGRAFÍA

INCROPERA, F. P. et al. (2007), *Introduction to Heat Transfer*, 5ª ed., Wiley: New York.
HOLMAN, J. P. (1998), *Transferencia de calor*, 1ª ed. en español, McGraw-Hill: Madrid.
ÇENGEL, Y. A. (2007), *Transferencia de calor y masa*, 3ª ed., McGraw-Hill: México.
MILLS, A. F. (1999), *Heat Transfer*, 2ª ed., Prentice Hall: Upper Saddle River, NJ.

ANEXOS

Anexo 1 – Problemas de exemplo para a discusión nas clases expositivas

Exemplo 1 (correspóndese coa sección 3 dos Contidos Básicos):

Unha tubería, usada para o transporte de petróleo, está soterrada na terra de xeito que o seu eixo central se atopa a unha distancia de 1,5 m baixo a superficie. A tubería ten un diámetro externo de 0,5 m e está illada cunha capa de vidro celular de 100 mm de grosor. Cal é a perda de calor por unidade de lonxitude de tubería se o petróleo que circula por ela o fai a unha temperatura de 120 °C e a superficie da terra se atopa a 0 °C?

Resolución:

Esta xeometría correspóndese co Caso 2 da táboa 4.1 do texto de Incropera et al., polo que existe unha expresión para o factor de forma S asociado á conдукión de calor bidimensional na terra. Respecto ó material illante da tubería, a conдукión de calor é unidimensional.

O fluxo de calor q pode calcularse como o cociente da diferenza total de temperaturas ($T_1 = 120$ °C para o petróleo; $T_2 = 0$ °C para a superficie da terra) e a resistencia térmica total. Desprezando a relevancia das resistencias á convection e da resistencia á conдукión na parede metálica da tubería, a resistencia total pode expresarse como a suma de dúas resistencias en serie: unha primeira resistencia correspondente á conдукión unidimensional a través do aillante, e unha segunda correspondente á conдукión bidimensional a través da terra. Matematicamente temos que:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln(D_{ins}/D_1)}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot k_{ins}} + \frac{1}{S \cdot k_{soil}}} \quad (\text{A.1})$$

onde D_{ins} é o diámetro externo do aillante, D_1 o da tubería, L a lonxitude da mesma, k_{ins} a condutividade térmica do aillante e k_{soil} a da terra. A continuación compróbase na táboa 4.1 do texto de Incropera et al. que efectivamente se cumpren as restricións para a aplicación da expresión indicada do factor de forma:

$$S = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln(4 \cdot z/D)} \quad (\text{A.2})$$

Substituíndo a ecuación (A.2) na ecuación (A.1), e dividindo ambos membros por L , obtense:

$$q' = \frac{q}{L} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln(D_{ins}/D_1)}{2 \cdot \pi \cdot k_{ins}} + \frac{\ln(4 \cdot z/D_{ins})}{2 \cdot \pi \cdot k_{soil}}} \quad (\text{A.3})$$

Na táboa A.3 do texto de Incropera et al. poden interpolarse valores das condutividades térmicas para temperaturas medias estimadas (xa que non se coñece a temperatura T_o do exterior da capa de aillante). Con iso poden substituírse os valores na ecuación (A.3) e obter un primeiro valor para q' . Esa primeira estimación de q' é válida para aplicar unha expresión equivalente á ecuación (A.1) pero restrinxida unicamente á capa de aillante, de xeito que se pode calcular unha estimación de T_o . Este valor utilizarase para recalcular as temperaturas medias para avaliación das condutividades térmicas, e o proceso deste parágrafo repetirase iterativamente ata obter valores converxentes. As perdas de calor que se obteñen finalmente son: $q' = 83 \text{ W/m}$.

Exemplo 2 (correspóndese coa sección 3 dos Contidos Básicos):

Unha mufla de forma cúbica, con dimensións externas de 0,35 m, está construída en ladrillo refractario (*fireclay*). Se o grosor da parede é de 50 mm, a superficie interna está a unha temperatura de 600 °C e a superficie externa a unha temperatura de 75 °C, calcúlense as perdas de calor da mufla.

Resolución:

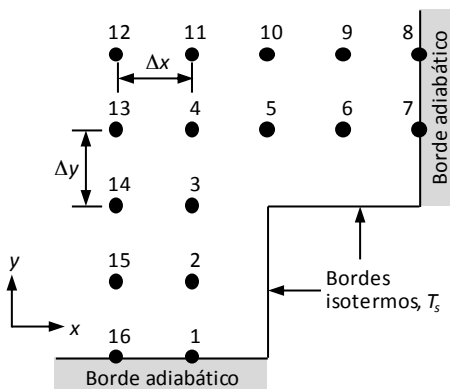
As perdas de calor poden obterse mediante a expresión da ecuación (3). A condutividade térmica do ladrillo refractario pode obterse para o valor medio de temperaturas interpolando na táboa A.3 do texto de Incropera et al. Así, o único impedimento para chegar directamente á solución do problema reside no factor de forma. A mufla cúbica pode descompoñerse en xeometrías máis simples; máis especificamente, pode entenderse como a combinación de 8 vértices, 12 arestas e 6 “paredes planas” sen intersección con outras paredes (de lado 0,25 m no canto de 0,35 m, xa que o grosor das paredes é de 0,05 m). O factor de forma global S pode descompoñerse analogamente como función dos factores de forma desas xeometrías máis simples:

$$S = 6 \times S_W + 12 \times S_E + 8 \times S_C \quad (\text{A.4})$$

onde S_w corresponde ó factor de forma das “paredes planas”, S_E ó das arestas e S_C ó das esquinas. S_w pode calcularse directamente como o cociente entre a área transversal ó fluxo de calor e o grosor da parede, a partir da lei de Fourier para unha parede plana. Pola súa banda, expresións para S_E e S_C (e as súas respectivas restricións de aplicación) poden obterse da táboa 4.1 do texto de Incropera et al., Casos 8 e 9. Substituíndo os valores nas expresións indicadas, atópase primeiro un valor de $S = 9.2$ m; e finalmente as perdas de calor da mufla: $q = 5,3$ kW.

Exemplo 3 (correspóndese coa sección 4 dos Contidos Básicos):

Considérese a grella bidimensional da figura ($\Delta x = \Delta y$) representando condicións en estado estacionario sen xeración volumétrica interna para un sistema con condutividade térmica k . Un dos bordos do sistema mantense a temperatura constante T_s , mentres que os outros son adiabáticos. Obtéñase unha expresión para o fluxo de calor, por unidade de lonxitude normal ó plano, que atravesa o bordo isoterma (T_s).



Resolución:

O fluxo de calor que atravesa o bordo isoterma será igual á suma dos fluxos de calor procedentes dos nodos 1, 2, 3, 5, 6 e 7 cara ós nodos con temperatura T_s . (Nótese que non se incluíu o nodo 4, porque non hai área transversal ó fluxo que sexa común entre este nodo e calquera dos nodos a temperatura T_s .) Aplicando a ecuación de Fourier con diferenzas finitas para cada caso, e definindo q'_s como o fluxo de calor por unidade de lonxitude normal ó plano (q/z), chégase á seguinte expresión final:

$$q'_s = k \cdot \left(\frac{T_1}{2} + T_2 + T_3 + T_5 + T_6 + \frac{T_7}{2} - 5 \cdot T_s \right) \tag{A.4}$$

Anexo 2 – Boletín de problemas

Problema 1:

Uns residuos radioactivos almacénanse temporalmente nun contenedor esférico soterrado, cuxo centro dista 10 m da superficie da terra. O diámetro externo do contenedor é 2 m e, como consecuencia do proceso de decaemento radioactivo, 500 W emítense en forma de calor. Se a temperatura da superficie da terra é de 20 °C, cal é a temperatura da superficie externa do contenedor en condicións de estado estacionario?

Solución: 93 °C

Problema 2:

Auga quente a 85 °C circula por unha tubería de cobre de 30 mm de diámetro e grosor de parede desprezable. A tubería está rodeada por unha protección cilíndrica ecéntrica que se mantén a 35 °C e ten un diámetro de 120 mm. A excentricidade, definida como a separación entre centros da tubería e da protección, é de 20 mm. O espazo entre o tubo e a protección está recheo dun material aillante cunha condutividade térmica de $0.05 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Calcúlense as perdas de calor por unidade de lonxitude do tubo e compárese o resultado coas perdas de calor asociadas a unha disposición concéntrica.

Solución: 12,5 W/m (caso ecéntrico); 11,3 W/m (caso concéntrico).

Problema 3:

Unha mufla cúbica utilizada para a fusión de vidro ten dimensións exteriores de ancho $W = 5 \text{ m}$ por cada lado e está construída en ladrillo refractario de grosor $L = 0,35 \text{ m}$ e condutividade térmica $k = 1,4 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. As caras laterais e a cara superior da mufla están expostas a aire ambiental a 25 °C, con convección natural caracterizada por un coeficiente promedio $h = 5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$. A base da mufla descansa sobre un soporte de xeito que a meirande parte da superficie está exposta a aire ambiental, e un coeficiente de convección $h = 5 \text{ W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$ pode asumirse como primeira aproximación. Baixo condicións de operación para as que gases de combustión manteñen as superficies interiores da mufla a 1100 °C, cal é a perda de calor da mufla?

Solución: 316 kW

Problema 4:

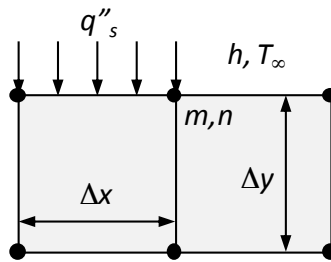
Taládrase un burato de diámetro $D = 0.25 \text{ m}$ ó longo do todo o eixo central dun bloque sólido de sección cadrada cun lado de $w = 1 \text{ m}$ e unha lonxitude $l = 2 \text{ m}$. A condutividade térmica do bloque é $k = 150 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. As superficies exteriores están expostas a aire ambiental, con $T_{\infty,2} = 25 \text{ °C}$ e $h_2 = 4 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$, mentres que polo

burato faise circular aceite quente caracterizado por $T_{\infty,1} = 300 \text{ }^\circ\text{C}$ e $h_1 = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.
 Determinélese o fluxo de calor e a temperatura das superficies.

Solución: $q = 6,2 \text{ kW}$; $T_1 = 222 \text{ }^\circ\text{C}$; $T_2 = 218 \text{ }^\circ\text{C}$.

Problema 5:

Unha das fortalezas dos métodos numéricos é a súa capacidade para manexar condicións de contorno complexas. No esquema da figura, a condición de contorno cambia de unha radiación de calor constante q''_s (cara ó sistema) a convección, exactamente no nodo m,n . Escríbase a ecuación de diferenzas finitas bidimensional en estado estacionario para este nodo, considerando que $\Delta x = \Delta y$.

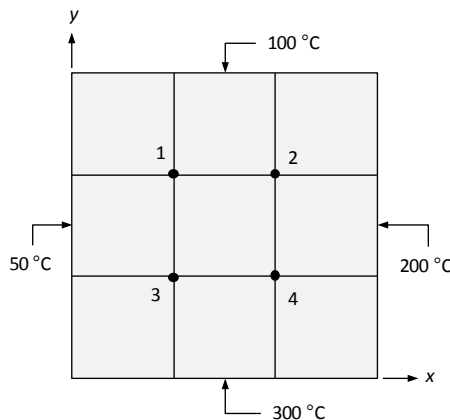


Solución: $T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + 2 \cdot T_{m,n-1} - \left(4 + \frac{h \cdot \Delta x}{k}\right) \cdot T_{m,n} + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \cdot T_\infty + \frac{q''_s \cdot \Delta x}{k} = 0$

Anexo 3 – Casos para a resolución mediante o método de diferenzas finitas na sesión de aula de informática utilizando software de folla de cálculo

Caso 1:

Considérese conducción bidimensional en estado estacionario na sección cadrada da figura, con temperaturas prefixadas nas súas superficies.



- Determínense as temperaturas nos nodos 1, 2, 3 e 4. Estímese a temperatura do punto medio.
- Reducindo o tamaño do mallado por un factor de 2, determínense as temperaturas nodais correspondentes. Compárense os resultados cos do mallado anterior.
- A partir dos resultados obtidos co mallado máis fino, represéntense graficamente isothermas para 75, 150 e 250 °C.

Solución: Para o primeiro mallado: $T_1 = 118,75$ °C, $T_2 = 156,25$ °C, $T_3 = 168,75$ °C, $T_4 = 206,25$ °C, $T_{\text{punto medio}} = 162,50$ °C. Para o segundo mallado: $T_1 = 117,42$ °C, $T_2 = 156,06$ °C, $T_3 = 168,94$ °C, $T_4 = 207,58$ °C, $T_{\text{punto medio}} = 162,50$ °C.

Caso 2:

Unha barra longa de material condutor da calor ten unha sección rectangular de dimensións 20 mm × 30 mm e unha condutividade térmica $k = 20 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Esta barra experimenta unha xeración uniforme de calor a unha velocidade $q_{\text{gen}} = 5 \times 10^7 \text{ W}\cdot\text{m}^{-3}$, mentres as súas superficies se manteñen a 300 K.

- Usando o método de diferenzas finitas cun espazado de mallado de 5 mm, determínese a distribución de temperatura na barra.
- Sen cambios no contorno, qué velocidade de xeración de calor provocará que a temperatura do punto central acade os 600 K?

Solución: $T_1 = 348$ K, $T_2 = 369$ K, $T_3 = 375$ K, $T_4 = 362$ K, $T_5 = 390$ K, $T_6 = 398$ K; $q_{\text{gen}} = 1,53 \times 10^8 \text{ W}\cdot\text{m}^{-3}$.



Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA