MATERIA
Expresión Gráfica na Enxeñaría

TITULACIÓN
Grao en Enxeñaría Civil

unidade didáctica
11

Ensinanzas Técnicas

Fundamentos de Homoloxía e Afinidade. Aplicacións

Eduardo Zurita de la Vega
Patricia Tato Sánchez del Valle

Área de Expresión Gráfica na Enxeñaría
Departamento de Enxeñaría Agroforestal
Escola Politécnica Superior

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA

Deseño e maquetación
J. M. Gairí

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

ISBN
978-84-16183-59-3

MATERIA: Expresión Gráfica na Enxeñaría
TITULACIÓN: Grao en Enxeñaría Civil
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización dá presente unidade didáctica

MÓDULO I - SISTEMA DE PLANOS ACOUTADOS

Unidade 1. O punto e a recta

1.1. Fundamentos
1.2. Representación do punto
1.3. Representación da recta. Pendente, módulo e traza
1.4. Gradación dunha recta. Casos
1.5. Pertenza punto - recta. Obtención da cota dun punto
1.6. Posicións particulares da recta
1.7. Posicións relativas de dúas rectas

Unidade 2. O plano

2.1. Determinación e representación do plano
2.2. Rectas notables: traza, horizontais e rectas de máxima pendente
2.3. Pendente e módulo dun plano
2.4. Posicións particulares
2.5. Pertenza recta - plano
2.6. Determinación da pendente dunha recta do plano
2.7. Trazado de rectas de pendente dada pertencentes a un plano
2.8. Determinación dun plano de pendente dada que conteña a unha recta

Unidade 3.- Interseccións

3.1. Intersección de planos
3.2. Casos particulares
3.3. Intersección de recta e plano
3.4. Casos particulares
3.5. Penetración dunha recta nun polígono
3.6. Intersección de polígonos

Unidade 4.- PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

4.1. Paralelismo entre rectas
4.2. Paralelismo entre recta e plano
4.3. Paralelismo entre planos
4.4. Perpendicularidade entre recta e plano
4.5. Perpendicularidade entre rectas
4.6. Perpendicularidade entre planos

Unidade 5.- DISTANCIAS

5.1. Distancia entre dous puntos
5.2. Distancia entre punto e plano
5.3. Distancia entre punto e recta
5.4. Distancia entre rectas paralelas
5.5. Distancia entre planos paralelos

Unidade 6.- ABATEMENTOS

6.1. Abatemento dun punto pertencente a un plano
6.2. Abatemento dunha recta pertencente a un plano
6.3. Abatemento dunha figura plana

Unidade 7.- CUBERTAS E SOLEIRAS

7.1. Cubertas. Nomenclatura
7.2. Resolución de cubertas con perímetro poligonal a igual cota
7.3. Cubertas con perímetro poligonal a distintas cotas
7.4. Cubertas con beirados inclinados
7.5. Cálculo da superficie das vertentes
7.6. Determinacións complementarias
7.7. Soleiras

Unidade 8.- REPRESENTACIÓN DE TERREOS

8.1. Superficie Topográfica. Curva de nivel. Equidistancia
8.2. Singularidades do terreo: divisoria, valgada
8.3. Liña de máxima pendente
8.4. Determinación da cota dun punto do terreo
8.5. Interpolación de curvas de nivel
8.6. Superficies de noiro ou de igual pendente

Unidade 9.- INTERSECCIÓNS. EXPLANACIÓNS

9.1. Intersección dun plano cunha superficie topográfica
9.2. Perfís
9.3. Explanacións. Xeneralidades
9.4. Condicionantes
9.5. Determinación da configuración final tras unha explanación: liña de paso, planta de noiros, acordos
9.6. Caso particular de plataforma inclinada
9.7. Caso particular de bordos curvos, horizontais e inclinados

Unidade 15 .- O PLANO. INTERSECCIÓNS

15.1. Intersección de dúas rectas. Posición relativa
15.2. Intersección de dous planos
15.3. Intersección entre recta e plano
15.4. Visibilidade da recta e o plano nas interseccións
15.5. Sección plana dun sólido. Caso particular de pirámides, conos, prismas e cilindros
15.6. Intersección entre unha recta e un sólido. Caso particular de pirámides, conos, prismas e cilindros

Unidade 16.- PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

16.1. Paralelismo entre rectas
16.2. Paralelismo entre rectas e plano
16.3. Paralelismo entre planos
16.4. Teoremas da perpendicularidade
16.5. Perpendicularidade entre rectas
16.6. Perpendicularidade entre recta e plano
16.7. Perpendicularidade entre planos

Unidade 17.- DISTANCIAS

17.1. Distancia entre dous puntos
17.2. Distancia dun punto a un plano
17.3. Distancia dun punto a unha recta
17.4. Distancia entre rectas paralelas
17.5. Distancia entre planos paralelos
17.6. Distancia dunha recta a un plano paralelo

Unidade 18.- MÉTODOS AUXILIARES: ABATEMENTOS

18.1. Concepto
18.2. Obtención das posicións dun punto, dunha recta e dunha figura plana contidas no plano que se abate
18.3. Definición de afinidade plana e aplicación á resolución de problemas de abatementos
18.4. Restitución dunha forma plana abatida

Unidade 19.- POLIEDROS

19.1. Poliedros regulares convexos
19.2. Tetraedro. Exaedro ou cubo. Octaedro. Seccións principais.
19.3. Dodecaedro. Icosaedro
19.4. Poliedros arquimedianos
19.5. Pirámide
19.6. Desenvolvemento da pirámide
19.7. Prisma
19.8. Desenvolvemento do prisma

Unidade 25.-ESCALAS

25.1. Definición e emprego
25.2. Tipos de escalas. Escalas normalizadas
25.3. Escalas gráficas. Construción e utilización
25.4. Elección da escala
25.5. Uso do escalímetro

Unidade 26.- NORMALIZACIÓN DO DEBUXO TÉCNICO

26.1. Concepto de normalización: orixe e finalidade. Normas UNE e ISO. Outras normas
26.2. A normalización no debuxo Técnico
26.3. Normas sobre a presentación dos debuxos técnicos
26.4. Formatos e presentación de elementos gráficos. UNE 1026-2-83
26.5. Encartado de planos. UNE 1027-95
26.6. Escritura. Caracteres correntes. UNE 1034-1-75
26.7. Cadro de rotulación. UNE 1035.95

Unidade 27.- A NORMALIZACIÓN DA REPRESENTACIÓN

27.1. Norma UNE 1-032-82: Principios xerais de representación.
27.2. Denominación e disposición das vistas: a) Método do primeiro diedro. b) Método do terceiro diedro.
27.3. Criterios de elección das vistas
27.4. Vistas particulares, parciais e locais
27.5. Cortes e seccións
27.6. Outros convenios

Unidade 28.- ACOTAMENTO

28.1. Concepto e definicións. Norma UNE 1-039-94.
28.2. Elementos de acotamento
28.3. Inscrición das cifras de cota: métodos, particularidades
28.4. Disposición das cotas: a) Acotamento en serie. b) Acotamento a partir dun elemento común. c) Acotamento por coordenadas. d) Acotamento combinada
28.5. Acotamentos singulares: de círculos, raios, arcos, cadrados, esferas, pezas simétricas, achafranados e elementos equidistantes

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Esta unidade didáctica insírese dentro da materia Expresión Gráfica na enxeñaría, dentro do Módulo de Xeometría Proxectiva de primeiro curso do Grao en Enxeñaría Civil.

O coñecemento dos fundamentos de homoloxía e afinidade achegan ferramentas que permiten a simplificación dos problemas xeométricos en sistema diédrico ou ben formas de solución doutros que sen a súa intervención non sería posible.

A homoloxía e a afinidade crea unha referencia de simplificación doutra ferramenta que noutro momento se utilizaban de forma independente como a semellanza, a homotecia ou o investimento, así como a apertura de miras cara á xeometría gaussiana avanzando por encima formulacións máis habituais da xeometría puramente euclidiana.

Toda simplificación e síntese do coñecemento implica un avance na conceptualización xeométrica que abre portas a unha visión máis ampla e simplificada do coñecemento.

Sen o concurso do uso deste coñecemento sería imposible exporse unha forma máis simple do uso de ferramentas de cálculo gráfico á hora de realizar abatementos, ou seccións en sistema diédrico.

A duración desta unidade didáctica é de 3 horas expositivas e 6 horas interactivas, e un traballo persoal do alumno dunhas 4 horas

OS OBXECTIVOS

Coñecer os fundamentos de Xeometría Proxectiva, e as relacións entre seccións planas no espazo e a súa proxección sobre o plano.

Adquirir as habilidades básicas para resolver problemas complexos na determinación de seccións, proxeccións ou sombras.

Dispor de ferramentas alternativas á solución de problemas xeométricos.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

Metodoloxía da dinámica expositiva

A adquisición do coñecemento en Xeometría Proxectiva, parte dunha observación que permite comprender as propiedades e relacións entre distintas formas xeométricas no espazo, relacionadas co seu sistema de xeración ou posición relativa no espazo.

Esta observación é difícil, pois é complexo dispor de modelos xeométricos reais que axuden a isto, noutras épocas esixía por parte do investigador ou o estudante unhas capacidades especiais que suplisen a carencia de medios materiais cunha imaxinación espacial, difícil de adquirir e reservada a persoas especialmente dotadas para iso. A habilidade do docente para ser capaz de improvisar sobre o encerado ou papel perspectivas que ilustrasen os obxectivos de comprensión, o uso da cor e o seu efecto ou o propio grosor do trazo, algo propio de técnicas pictóricas, axudaba a que desde un debuxo plano se chegasen a imaxinar volumes, e a interacción con planos ou elementos xeométricos máis sinxelos.

Sería preciso algunha vez realizar unha merecida homenaxe a eses docentes dotados da percepción espacial e a capacidade para comunicar a través dos seus rápidos esbozos no encerado que favoreceu o avance da xeometría.

Hoxe en día dispomos doutras ferramentas e o recurso de mundos virtuais en 3D, tan habitual e cotián nos videoxogos, tamén nos dotan de ferramentas, de forma que modelos en 3D transparentes, nos permiten viralos, observalos e sobre a base da devandita observación concluír as relacións entre os distintos elementos que constitúen unha xeometría.

Utilizaremos, por tanto, unha metodoloxía demostrativa, apoiándonos en capturas de imaxes tridimensionais transparentes, ensinando aos alumnos o uso de modelos en 3D virtuais e as ferramentas que nos permiten manexalos cambiando posicións do observador sobre os mesmos ou ben, ao desenvolvemento de vídeos que nos mostren un xiro do modelo explicativo, e as propiedades que queremos mostrar.

O pasar dunha visualización dinámica a unha estática, permitiranos intuír o proceso de proxección plana, xa que esta é equivalente a unha visualización estática na que o conxunto das visuais serán paralelas e normais ao plano de proxección, é dicir algo que sen o concurso destas ferramentas é difícil de imaxinar, dispor dun observador no infinito (visuais paralelas respecto de calquera obxectivo) e cunha capacidade de zoom de achegamento ilimitado para a observación.

Os problemas resolveranse en etapas fraccionadas da execución, nas clases proxectarase os debuxos realizados con ferramentas de CAD e a cada etapa de execución, relacionada cun método, asignarase a unha capa ou nivel do debuxo de CAD de forma que se é preciso repetir algunha explicación, podemos activar ou desactivar para a súa visualización.

Todas as proxeccións diédricas empregadas levan asociadas un modelo en 3D, de forma que ao abrir ambos os arquivos se poderá conmutar a visualización en 3D coa forma proxectada diédrica, así o alumno, grazas a esta dinámica, irá asociando coa práctica a imaxe mental 3D á imaxe proxectada, aumentando desta forma a súa imaxinación espacial tan precisa para o proceso de deseño en enxeñaría.

Metodoloxía da dinámica interactiva nos seminarios

Os seminarios dedicaranse á resolución de exercicios relacionados coas sesións expositivas previas, estes exercicios realizaranse en dúas fases: unha previa na que se esixirá ao alumno unha lectura dos enunciados e un breve espazo de tempo para que fagan propostas da forma de abordar a solución. Os problemas xeométricos relacionados cunha distribución espacial de elementos teñen a dificultade engadida de que o alumno debe imaxinar as referencias espaciais do enunciado e como é frecuente que teña dificultades para iso, disporanse de modelos en 3D que reflictan o enunciado.

Tras as propostas do alumnado, realizarase por parte do profesor unha análise das mesmas, inducindo ao camiño máis adecuado para a resolución, destacando que toda solución xeométrica leva en paralelo unha execución e que esta inevitablemente, polos limitantes da mesma, leva aparellados erros inevitables relacionados coa resolución do ollo humano ou as ferramentas de trazado e escala de execución.

Se o alumnado non fixese ningunha proposta, mediante preguntas adecuadas inducirase á proposta de resolución.

Sobre a base destes limitantes, a metodoloxía máis correcta sempre será aquela, que baseada nuns fundamentos correctos de xeometría, simplifique o trazado e en consecuencia se reduzan erros, aumentando a precisión da execución.

Tras esta dinámica previa procederase á resolución por etapas do exercicio e ao final proxectarase o modelo 3D, relacionado coa solución.

En cada clase interactiva proporase un traballo relacionado co exposto, que o alumno poderá resolver persoalmente ou en grupo e que deberá presentar á semana seguinte.

Preténdese con estes exercicios (que en ningún caso se resolverán posteriormente) que o alumno manteña un ritmo de estudo continuo, e estimularase á súa realización porque este conxunto de traballos se cualifican sobre 1 punto, cuxa media final da cualificación sumarase directamente á nota final do parcial correspondente. Tendo a vantaxe engadida que un destes exercicios da colección de traballos formará parte do exame do parcial.

Preténdese por tanto desta forma, reducir o erro na cualificación relacionado coa redución de rendemento polo estrés do exame, xa que parte da proba está constituída por exercicios que puido realizar previamente, e porque o resultado do traballo persoal ao longo do curso a través da media dos traballos pode incidir como factor corrector na nota.

Metodoloxía do proceso de avaliación

A materia está composta de dous módulos de formación relacionados con Sistema de Representación Gráfica en Enxeñaría :

— Sistema Acoutado
— Sistema Diédrico

Ambos os sistemas débense de coñecer e en consecuencia só se promedia a avaliación dos coñecementos de cada módulo se se alcanza unha nota mínima de 4 puntos de media en calquera módulo.

Pola dificultade e desenvolvemento temporal, a nota media será ponderada de forma que a nota de Sistema Diédrico suporá un 55% da cualificación e a relativa a Sistema Acoutado un 45%.

Haberá un parcial previo de Sistema Acoutado ao terminar os exames do primeiro cuadrimestre. A nota deste parcial constitúe o 75 % da cualificación do módulo, o 25% restante corresponde a un traballo persoal de Curso relacionado co deseño dunha vía de transporte realizada coas ferramentas de CAD 3D, cuxa formación se imparte na materia de Debuxo Técnico por Computador. O alumno co coñecemento de Sistema Acoutado deberá testar se a saída de debuxo automático é correcta e en base á mesma adquirir unha visión critica dos limitantes que posúen o trazado manual e as ferramentas de CAD. Para facilitar o proceso de avaliación o exame estará constituído por 3 exercicios (un deles pertencente aos traballos semanais propostos) que se deseñasen para executar en 3 horas considerando a nota do traballo de Curso, como o cuarto exercicio do exame.

Tras comprobar que o alumno cumpriu polo menos co 80% da asistencia ás clase expositivas e interactivas, e realizadas as medias dos traballos propostos, esta última súmase directamente á nota media de exame e traballo de curso.

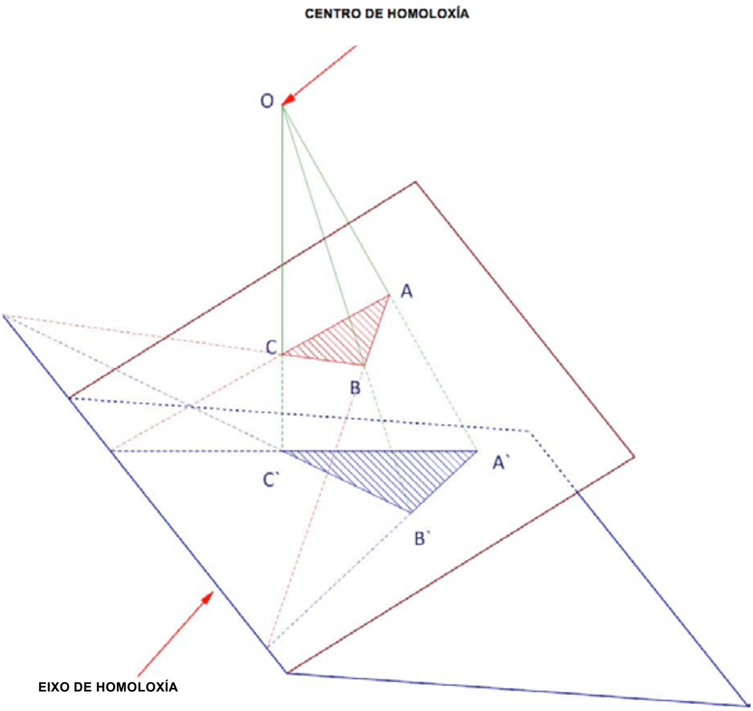
Non existirá un exame parcial de Diédrico fóra das datas de convocatoria oficiais da materia. O exame de sistema Diédrico estará constituído por tres exercicios que se deseñasen para realizar durante 3 hora (1h/exercicio), nestes exercicios o alumno deberá demostrar que posúe os seguintes coñecementos:

— Resolver problemas de maclas de poliedros e cos recursos de diédrico determinar seccións e verdadeiras magnitudes de elementos do deseño.
— Aplicar os coñecementos de homoloxía e afinidade para resolución de problema complexos de deseño.
— A representación, e intersección de superficies empenadas. Á vista do exposto a presente unidade didáctica ten un peso no proceso de avaliación do exame parcial de sistema de diédrico dun terzo da nota.
— Os contidos básicos

11.1.- Radiación de rectas. Formas homolóxicas

Se dispomos dun subconxunto de rectas dunha mesma radiación que pasan por un punto, e córtanse por dous planos, sobre devanditos planos fórmanse formas planas contidas por curvas ou formas mixtiliñas, que diremos forman unha relación de HOMOLOXÍA. Chamaremos puntos homólogos aos que pertencen a unha mesma recta que pasa polo polo da radiación e a cada un dos planos que interseca a radiación. De forma similar, as rectas que unen dúas parellas de puntos homólogos diremos que son rectas homólogas.

Figura 11.1: Elementos da homoloxía



11.2.- Eixo e Centro da homoloxía

Na figura as parellas de puntos **A- A´; B -B´ e C -C´** son homólogos e atópanse aliñados co **Centro de homoloxía** (polo da radiación).

A intersección dos planos que cortan a radiación é o que denominamos **Eixo de homoloxía**. As rectas que unen entre si 2 parellas de puntos homólogos (p.e. **AB e A´B´**) son rectas homólogas e córtanse no mesmo punto do eixo de homoloxía (observemos que son coplanarias e pertencen á mesma cara da pirámide **O A´B´C´**). En consecuencia, o eixo de homoloxía cortará nun punto ao devandito plano, punto onde se atopan as rectas homólogas.

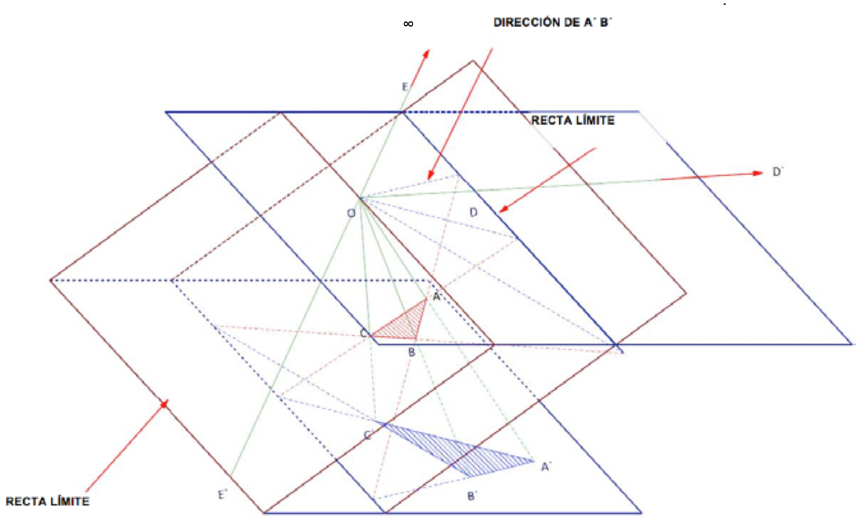
O conxunto de rectas homólogas poden delimitar polígonos que serán formas homólogas planas.

11.3.- Recta límite

Definida unha homoloxía polo polo da radiación ou centro de homoloxía e dous planos que cortan a radiación que parte do devandito centro, a recta límite será o lugar xeométrico dos puntos do espazo que terán os seus homólogos no infinito.

Establecidos dous planos que cortan a radiación, dentro de cada un deles existe unha recta límite. Para comprender isto podemos observar a través da figura 11.2 que se desde o centro de homoloxía trazamos un plano paralelo ao que contén a forma A´B´C´, este cortará ao outro plano (o que contén á forma ABC) nunha recta. Se tentamos achar o homólogo de calquera punto desta recta, a recta de aliñación co centro de homoloxía necesariamente será paralela ao plano de A´B´C´ e en consecuencia cortaría a este nun punto do infinito.

Figura 11.2: Rectas límites



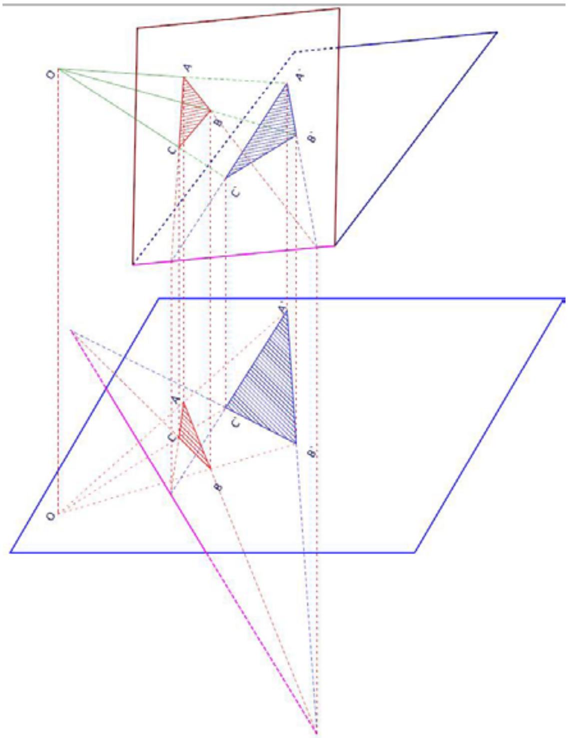
De forma similar poderiamos trazar un plano paralelo ao do triangulo ABC polo centro de HOMOLOXÍA, e cortaría ao plano do triangulo noutra recta que tamén cumpriría, de forma similar ao caso anterior, que os seus homólogos estarían no infinito.

Na figura podemos observar así mesmo a utilidade das rectas límite. Así, o plano determinado por **AB** e o centro de homoloxía cortaría aos dous planos paralelos, o que contén a **A´B´C´** e o paralelo ao mesmo por **O,** en dúas rectas paralelas. En consecuencia é equivalente a que se queremos achar a dirección da recta homóloga de **AB,** bastaríanos prolongar esta ata cortar a recta límite e unir este punto co centro de homoloxía, obtendo unha recta que necesariamente debe de ser paralela a **A´B´**.

11.4.-Proxección dunha homoloxía no espazo sobre un plano. homoloxía plana

Se proxectamos unha homoloxía no espazo sobre un plano, as formas proxectadas manteñen as mesmas relacións e propiedades que no espazo, constituíndo unha homoloxía plana.

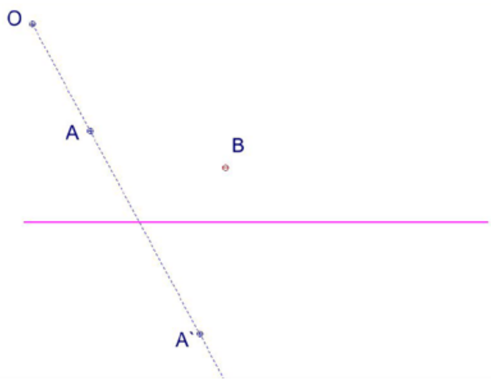
Figura 11.3: homoloxía plana



11.5.- Determinación dunha homoloxía

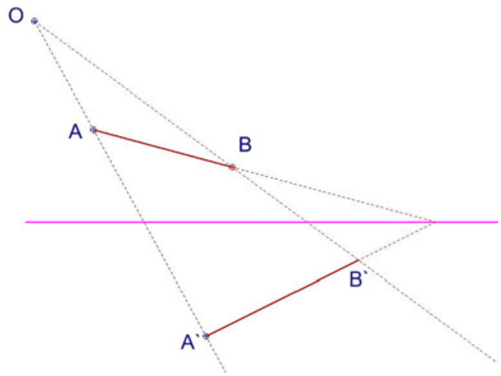
11.5.1.-Coñecidos o centro de homoloxía, eixo e unha parella de puntos homólogos

Figura 11.4: Homoloxía definida por 2 puntos e centro de homoloxía



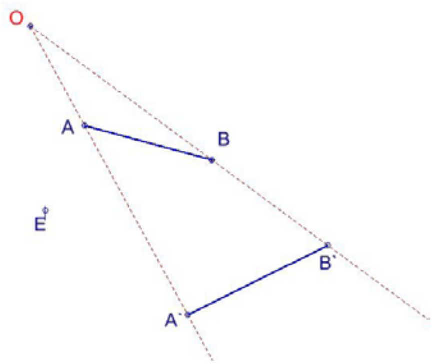
Se temos en conta que os puntos homólogos deben de estar aliñados co centro de homoloxía, o homólogo de **B** atoparase aliñado con este e o Centro de homoloxía. Doutro lado, as rectas homólogas córtanse nun mesmo punto do eixo de homoloxía. En consecuencia, se trazamos a recta que une **A** e **B** e prolongamos ata a súa intersección co eixo, teremos un punto que pertencerá á recta que a liña **A´** e **B´**.

Figura 11.5: Homoloxía definida por 2 puntos e centro de homoloxía.Solución



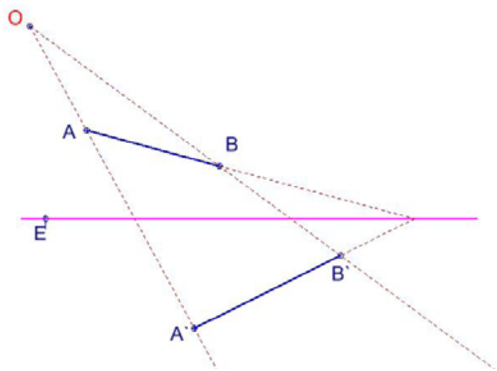
11.5.2.- Coñecidos un punto do eixo de homoloxía e dous puntos cos seus homólogos

Figura 11.6: Homoloxía definida por 2 puntos, os seus homólogos e un punto do eixo



Para achar outro punto do eixo bástanos prolongar as rectas soporte dos segmentos **AB** e **A´B´**. Unido este punto con **E** teremos o eixo e, por tanto, elementos da homoloxía suficientes para determinar o homólogo de calquera punto ao volver ao caso 11.5.1.

Figura 11.7: Homoloxía definida por 2 puntos, os seus homólogos e un punto do eixo

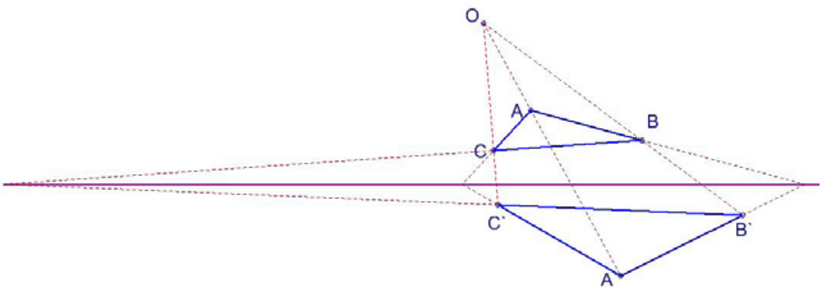


11.5.3.- Coñecidos tres puntos cos seus homólogos

As aliñacións dos puntos cos seus respectivos homólogos da lugar a que estas intersequen no centro de homoloxía.

Como as rectas homólogas se cortan no eixo, ao dispor de 3 puntos e os seus correspondentes homólogos, podemos dispor de dúas parellas de rectas homólogas que nos permitirán, a través da súa intersección, determinar dous puntos do eixo de homoloxía.

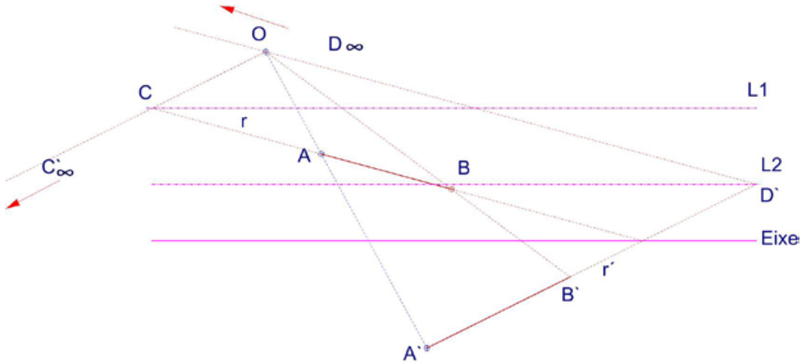
Figura 11.8: Homoloxía definida por 3 puntos e os seus homólogos



11.5.4.- Coñecidos o centro de homoloxía, eixo e unha parella de puntos homólogos, achar as rectas límites

Sabemos que as rectas límites nos permiten achar a dirección das rectas homólogas. Se temos a recta **r** do segmento **AB** e a súa homóloga **r´**de **A´B´**, podemos realizar o proceso inverso, é dicir, polo centro de homoloxía trazar unha paralela a **r´**. A intersección **C** con **r** é un punto da recta límite, xa que se buscamos o seu homólogo, a aliñación co centro de homoloxía nos daría, ao ser paralela a **r ´,** unha intersección **C´** nun punto do infinito da recta **r´**.

Figura 11.9: Determinación das rectas límite



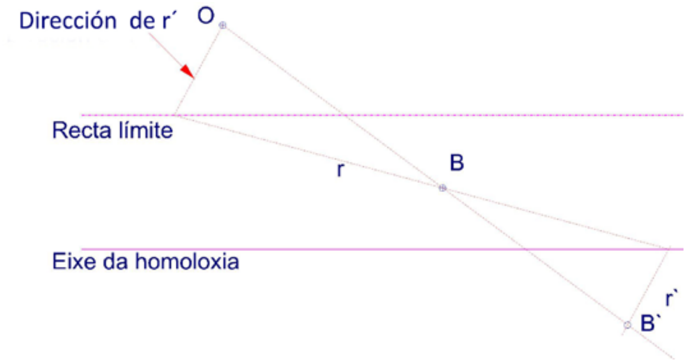
De forma análoga, se por **O** trazamos unha recta paralela a **r** e achamos a súa intersección **D´** con **r´,** o seu homólogo **D** tería que estar no infinito, onde interseca con **r** , o que nos permite concluír que **D´** é un punto doutra recta límite.

Como as rectas límites son paralelas ao eixo de homoloxía, coñecido este e un punto de cada recta límite, estas quedan determinadas.

11.5.5.- Coñecidos centro de homoloxía, eixo de homoloxía e unha recta límite

Se eliximos unha recta **r** calquera que pasase por **B**, poderiamos a través da recta límite e o eixo de homoloxía achar a súa homóloga. A intersección de **r** unida con **O** daríanos a dirección de **r´**, e a intersección de **r** co eixo daríanos un punto de **r´**.

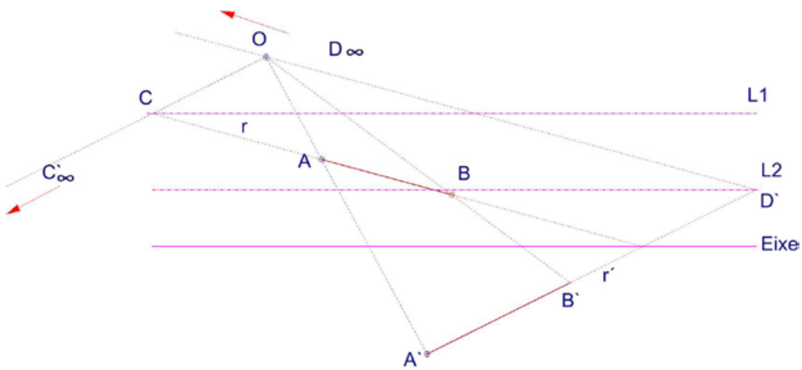
Figura 11.10: Determinación da homoloxía coñecido centro, eixo e recta límite.



Determinada **r´,** a aliñación de **B** co Centro de homoloxía permitiríanos, a través da súa intersección con **r,** determinar **B´**

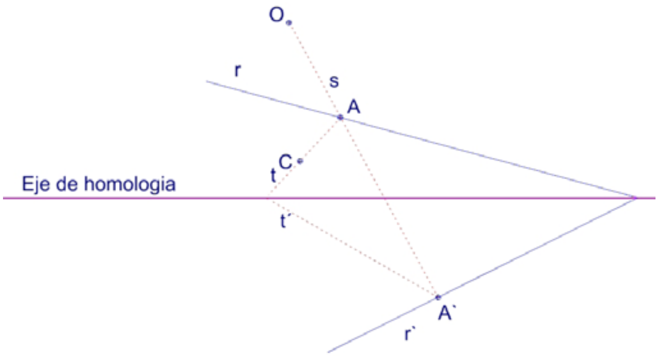
11.5.6.- Coñecidos centro de homoloxía, Eixo de homoloxía e unha parella de rectas homólogas.

Figura 11.11: Determinación da homoloxía coñecidas 2 rectas homólogas e Centro de homoloxía



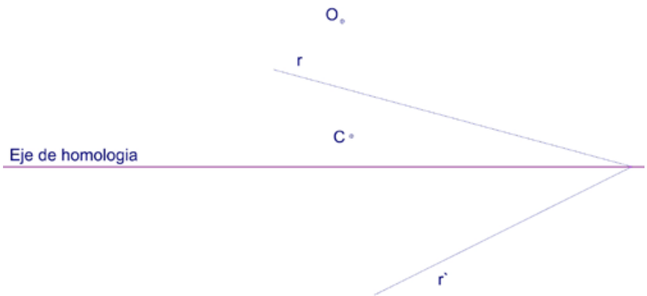
Se trazamos unha recta **s** calquera que pase polo centro de homoloxía, obteremos dous puntos homólogos **A** e **A´** a través da súa intersección con **r** e **r´**

Figura 11.12: Determinación da homoloxía coñecidas 2 rectas homólogas e Centro de homoloxía paso 1 solución



Unindo **A e C** temos a súa recta soporte **t** cuxa homóloga seria **t´**. A través da aliñación de **C** con **O** obteremos o homólogo **C´**

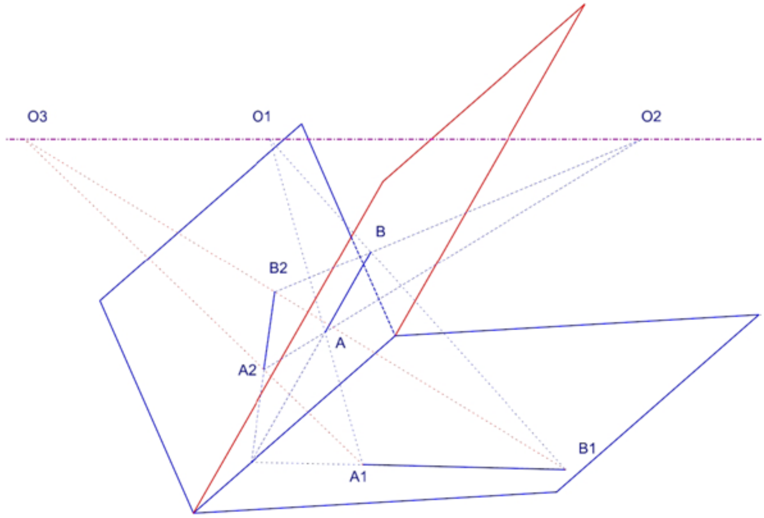
Figura 11.13: Determinación da homoloxía coñecidas 2 rectas homólogas e Centro de homoloxía paso 2 solución



11.6.- Teorema das tres homoloxías

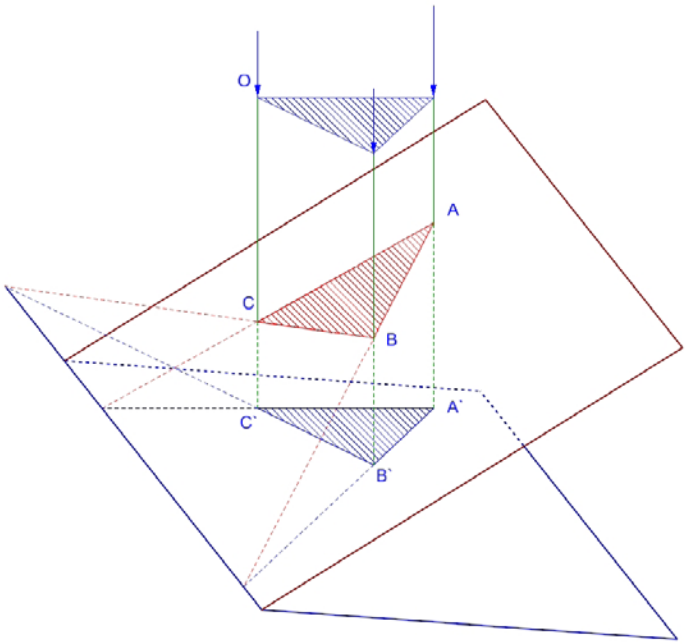
Se temos dúas homoloxías de centros **O1** (relaciona **AB e A1B1**) e **O2** (relaciona **AB e A2B2**) definidas sobre un mesmo elemento (**AB**), e que comparten o mesmo eixo, existe unha terceira homoloxía (que relaciona **A1B1 e A2B2**) de Centro **O3** , que se atopa aliñado con **O1 e O2**.

Figura 11.14: Teorema das 3 homoloxías



11.7.- Homoloxía afín. Afinidade

Figura 11.15: Homoloxía afín



Toda homoloxía de centro un punto impropio do infinito, recibe o nome de homoloxía **afín ou afinidade**. A dirección cara ao centro de afinidade denomínase **dirección de afinidade** e o eixo da homoloxía afín, **eixo de afinidade**.

As rectas límite, ao estar o centro de afinidade no infinito, pertencen a planos no infinito e non se utilizan na determinación de puntos ou rectas afíns.

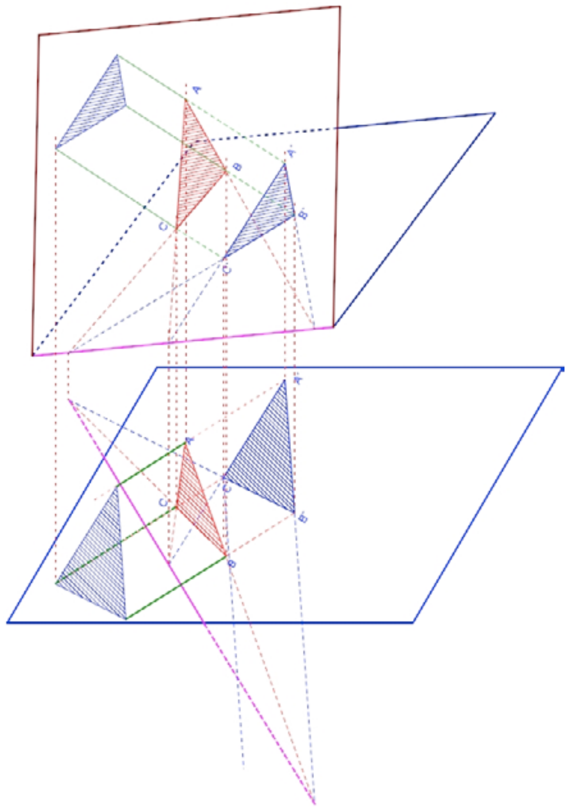
As rectas que unen parellas de puntos afíns son paralelas entre si e á dirección de afinidade, xa que pasan polo mesmo punto impropio (centro de afinidade no infinito). Pertencen por tanto a un único feixe de rectas (conxunto de rectas que se cortan no mesmo punto do infinito).

As rectas homólogas córtanse no mesmo punto do eixo de afinidade.

11.8.- Proxección dunha afinidade no espazo sobre un plano, afinidade plana.

Se proxectamos unha afinidade sobre o plano obteremos unha afinidade plana, cumpríndose as mesmas relacións entre elementos afíns, que na homoloxía no espazo.

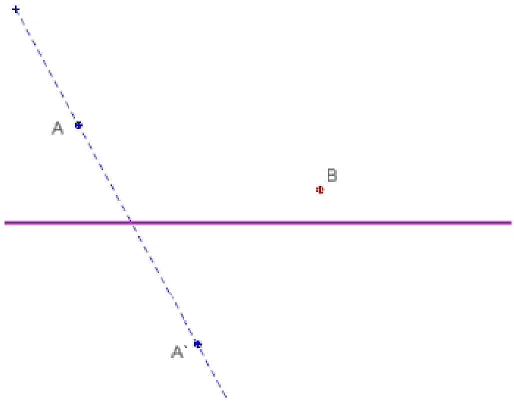
Figura 11.16: Homoloxía afín plana



11.9.- Determinación da afinidade

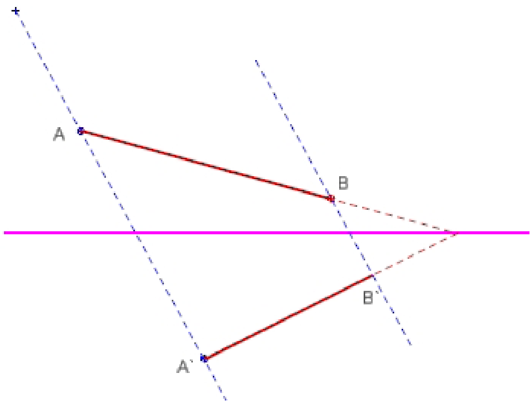
11.9.1.- Coñecida dirección de afinidade, eixo e unha parella de puntos afíns

Figura 11.17: Afinidade determinada por dous puntos afíns e eixo de afinidade



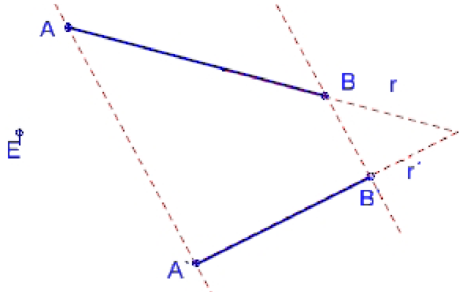
Como as rectas afíns se cortan no eixo de afinidade, a homóloga da recta **r´** que pasa por **A´** e **B´** debe pasar polo punto de intersección da recta **r** co eixo de afinidade. E posto que a dirección de afinidade é a recta soporte do e **A´**, trazando por **B** unha paralela ao segmento **A-A´** e achando a intersección con **r´** teremos o afín de **B**.

Figura 11.18: Afinidade determinada por dous puntos afíns e eixo de afinidade. Solución



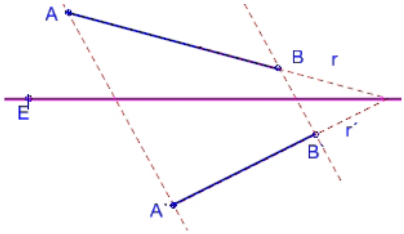
11.9.2.- Coñecidos un punto do eixo de afinidade e dous puntos afíns

Figura 11.19: Afinidade determinada por dous pares de puntos afíns e un punto do eixo de afinidade



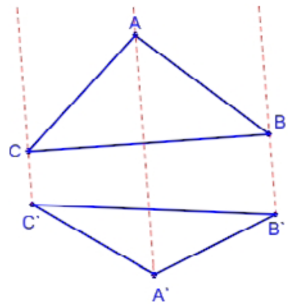
Prolongando a recta **r** ata intersecar con **r´** obteremos un punto do eixo. Coñecido este se queremos determinar o afín doutro punto volveriamos ao caso anteriormente resolto.

Figura 11.20: Afinidade determinada por dous pares de puntos afíns e un punto do eixo de afinidade



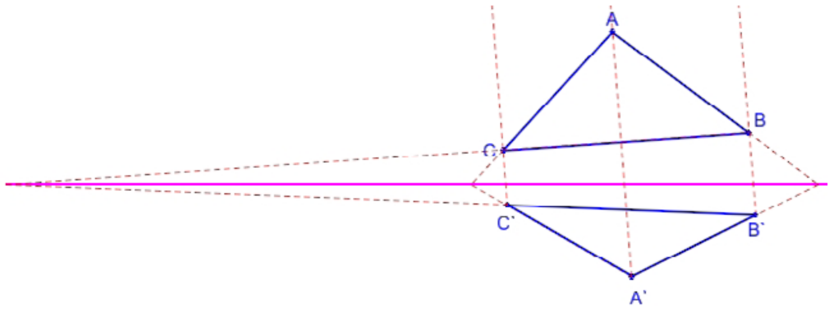
11.9.3.- Coñecidas 3 parellas de puntos afíns

Figura 11.21: Afinidade determinada por tres pares de puntos afíns



Se prolongamos os segmentos ata intersecar cos seus homólogos obteremos puntos do eixo de homoloxía, co cal para determinar o afín de calquera punto, de novo volvemos ao primeiro dos casos de determinación.

Figura 11.22: Afinidade determinada por tres pares de puntos afíns. Solución

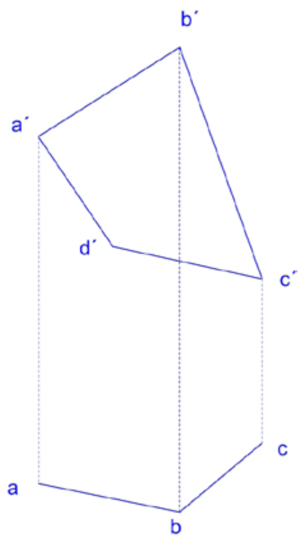


11.10.- Aplicacións de homoloxía e afinidade

11.10.1.- Afinidade entre proxeccións diédricas

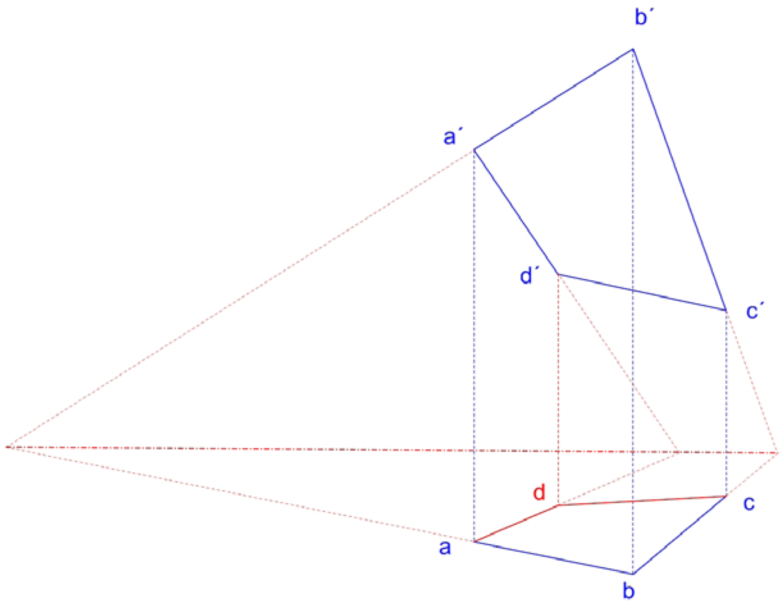
Entre as proxeccións diédricas dunha forma plana existe unha relación de afinidade, sendo a dirección de afinidade perpendicular á liña de terra e o eixo de afinidade a proxección sobre o plano de proxección da intersección do plano da forma plana co segundo bisector.

Figura 11.23: Afinidade entre proxeccións diédricas



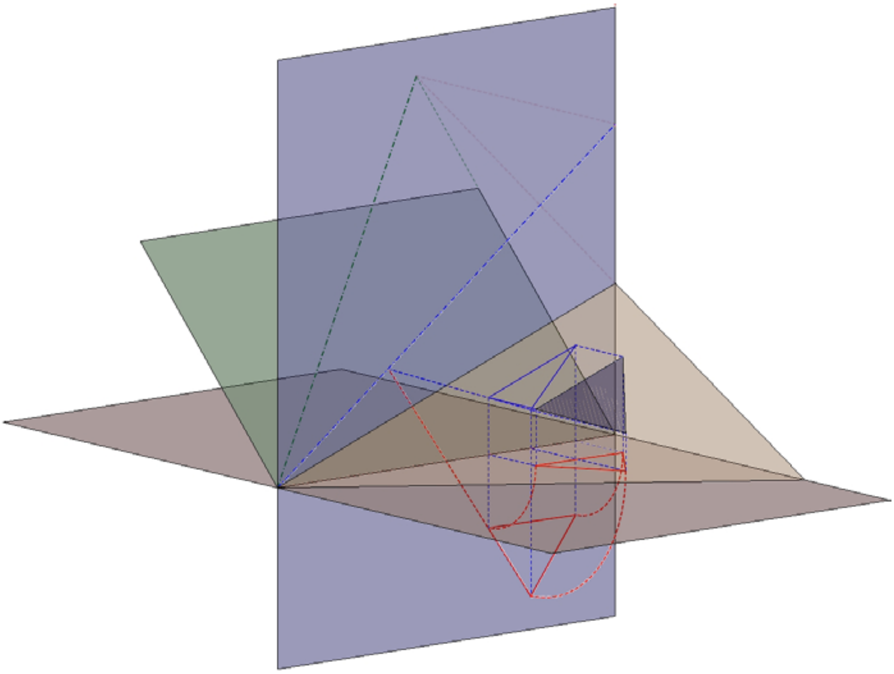
Dispomos da dirección de afinidade, que é a dirección que unen as dúas proxeccións diédricas dun mesmo punto, e tres parellas de puntos afíns. En consecuencia temos definida a afinidade como vimos anteriormente. Para achar o eixo de afinidade bastaranos determinar a intersección de dúas parellas de rectas afíns, como poderían ser os soportes dos segmentos **ab- a´b´** e **bc-b´c´**. Coñecido o eixo, trazando desde **D** unha paralela á dirección de afinidade e utilizando unha recta que pase por puntos afíns coñecidos, podemos achar o afín do punto **d´**

Figura 11.24: Afinidade entre proxeccións diédricas



A disposición espacial dos elementos que interveñen nesta homoloxía reflectímola no modelo en perspectiva da figura 11.25.

Figura 11.25: Afinidade entre proxeccións diédricas



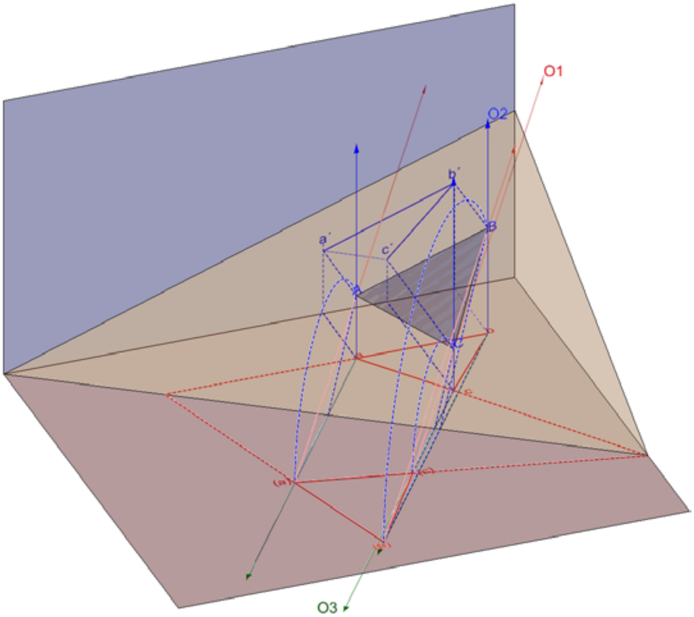
11.10.2.- Afinidade entre proxeccións diédricas e as súas formas abatidas

Existe unha relación de afinidade entre a proxección sobre un plano de proxección e a forma abatida sobre o mesmo ao redor da traza do plano da forma, co plano sobre o que se proxecta e abate. A dirección de afinidade é perpendicular á traza.

Esta afinidade é consecuencia de dúas afinidades. Como podemos observar na figura 11.26, entre a forma **ABC** e a súa proxección horizontal **abc** existe unha afinidade de centro **O2** no infinito, e eixo a traza horizontal do plano. Tamén se unimos os puntos abatidos **(a)(b)(c)** con **ABC** vemos que as rectas que os unen son paralelas. Por tanto existe unha afinidade entre a forma e a súa abatida, de eixo de novo a traza horizontal .

Ao ter dúas afinidades definidas sobre un mesmo elemento **ABC** e do mesmo eixo, existe, polo teorema das 3 homoloxías, unha afinidade coa forma proxectada. Como os centros **O1, O2 y O3** deben de estar aliñados , para que todas as rectas de aliñación das proxeccións no mesmo punto do infinito, deben de estar as distintas rectas en planos paralelos , de forma que estes cortaranse nunha recta situada no infinito. Concretamente, estes planos son paralelos ao determinado pola recta que proxecta os puntos e a recta de máxima pendente trazada desde cada punto cara á traza, dándonos desta forma o raio de xiro do abatemento.

Figura 11.26: Afinidade entre proxección e abatemento



Ao ser a traza unha horizontal de cota **0,** o expresado anteriormente sería válido para calquera horizontal e abater sobre calquera plano horizontal. Por tanto podemos achar unha horizontal auxiliar, como a que pasa **por D,** e posteriormente elixir o punto de maior afastamento (neste caso o punto **b**) polo cal trazariamos unha horizontal paralela á anterior.

Figura 11.27: Afinidade entre proxección e abatemento. Paso 1 abater un punto

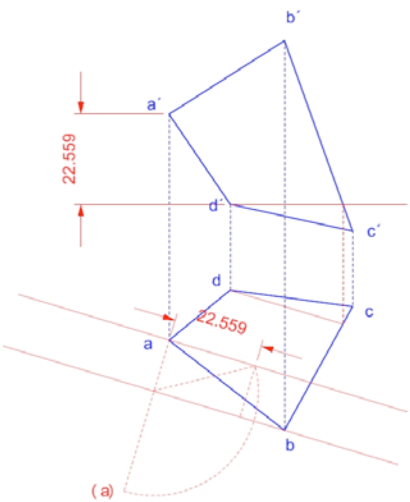
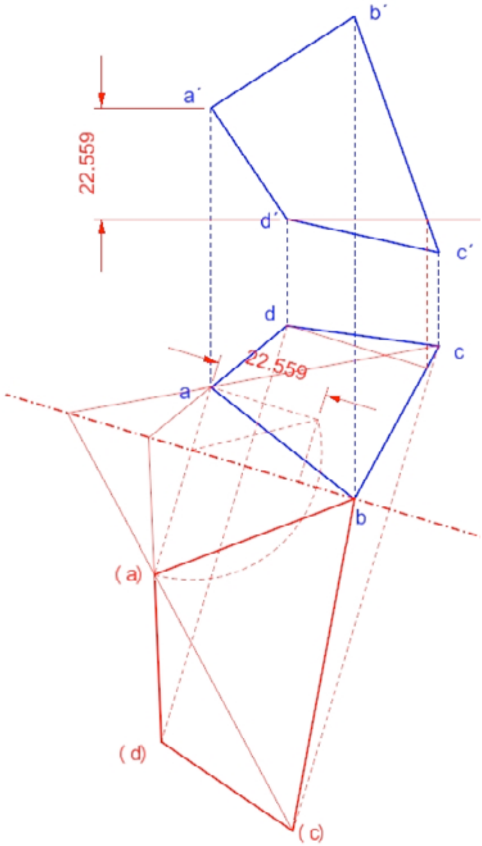


Figura 11.28: Afinidade entre proxección e abatemento. Paso 2 aplicar afinidade

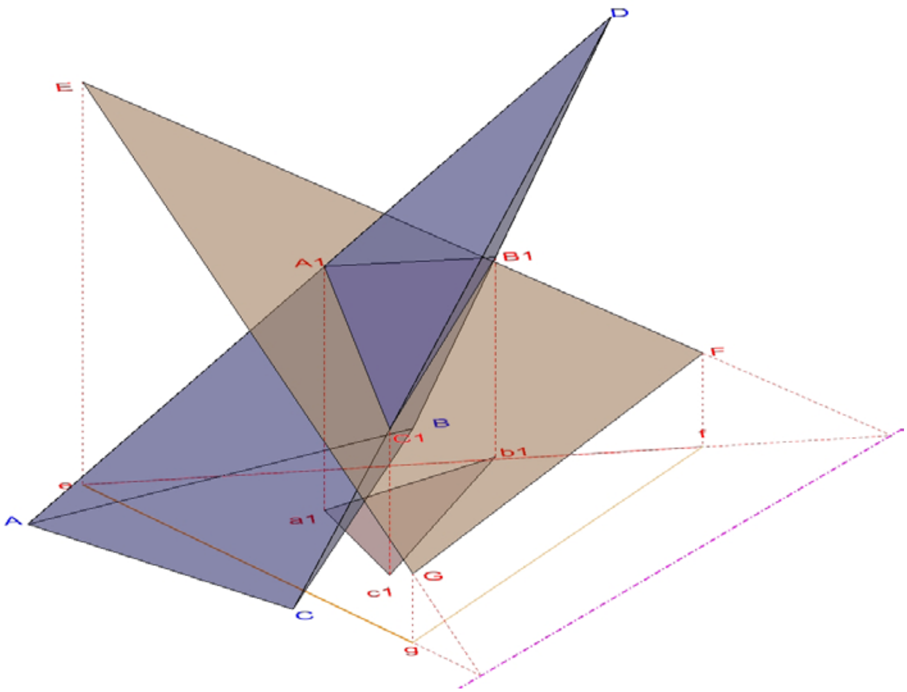


Sabendo que a dirección de afinidade é perpendicular á charnela de abatemento, a afinidade quedaría definida e poderiamos achar o resto dos puntos abatidos.

11.10.3.- Seccións planas dunha pirámide por afinidade

Un plano **P,** como podemos ver na figura, pode estar definido mediante 3 puntos **EFG**. As arestas son rectas de radiación de vértice **D**, limitadas polo plano horizontal en **ABC** e polo plano **P** en **A1B1C1.** Por tanto **ABC** e **A1B1C1** son formas homólogas de centro de homoloxía **D** e eixo a intersección do plano **P** (traza horizontal) co plano horizontal. Se proxectamos sobre o plano horizontal esta homoloxía, teremos unha homoloxía plana entre **ABC,** que se atopa sobre o plano horizontal, e **a1b1c1,** proxección horizontal da sección, e de eixo a proxección do eixo, que ao atoparse sobre o plano horizontal é coincidente coa súa proxección. O centro de homoloxía sería a proxección horizontal do vértice da pirámide

Figura 11.29: Homoloxía e Afinidade na determinación de seccións de pirámides

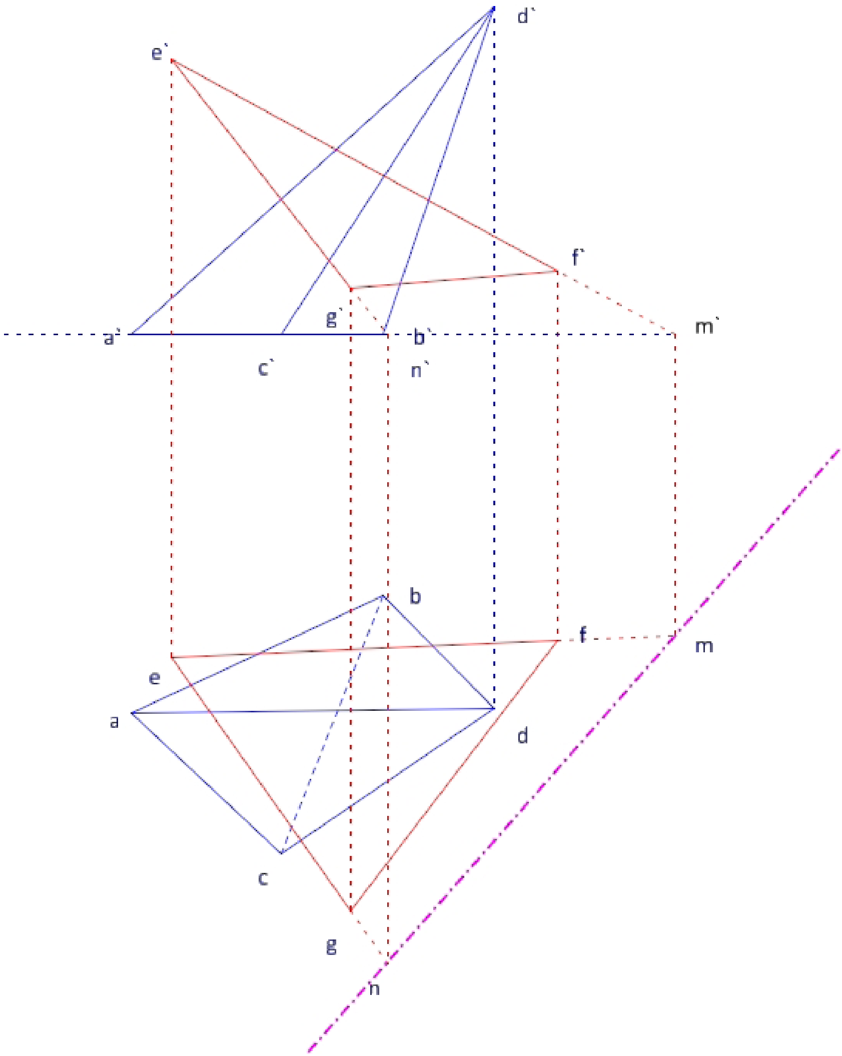


Para resolver a sección bastaríanos achar a intersección dunha das arestas co plano do triángulo **EFG** (que determina el plano), co cal teriamos definida a homoloxía, e en consecuencia o resto dos puntos da sección determinaríanse mediante homoloxía.
A determinación da sección, resólvese traballando en proxección horizontal e posteriormente elevariamos a proxección vertical da sección sobre as proxeccións verticais das arestas.

Paso 1.- Determinación de eixo de homoloxía

Coas proxeccións diédricas inicialmente determinariamos a traza horizontal do plano **P**, o que conseguiriamos determinando os puntos das rectas de **EF** e **EG** que posúen a mesma cota que a base da pirámide **M** e **N** .
A unión das proxeccións horizontais destes puntos é o eixo da homoloxía que buscamos. (figura 11.30).

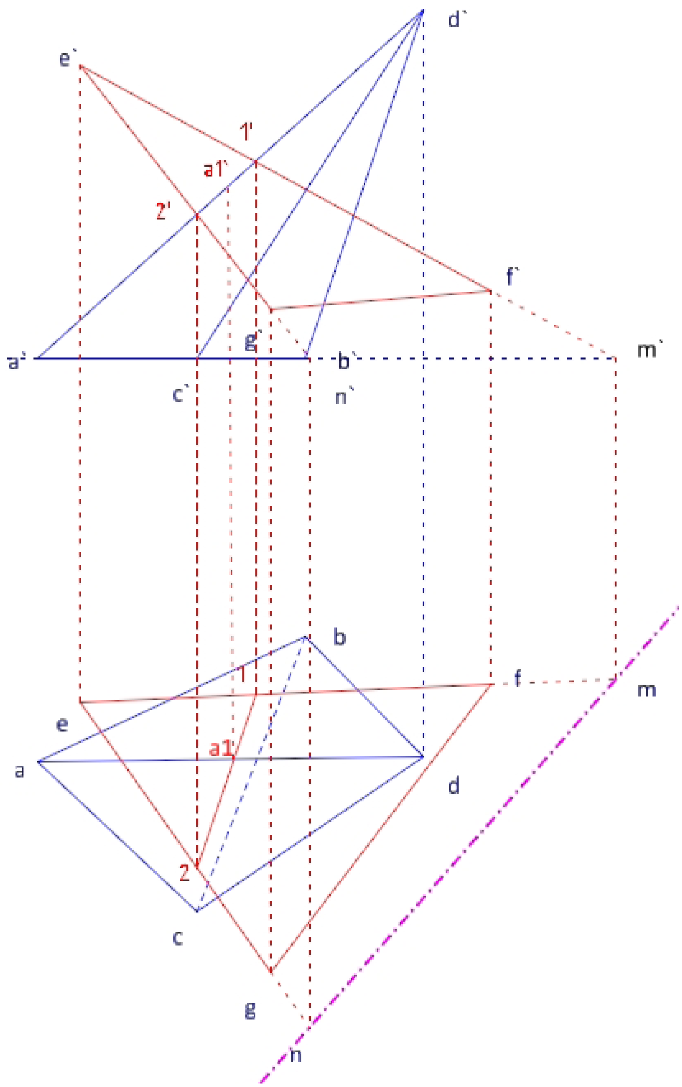
Figura 11.30: Seccións de pirámides. Paso 1 .-Determinación do eixo de homoloxía



Paso 2.- Determinación dun punto da sección

Para achar a intersección da aresta **DA** co plano P, achamos a intersección do plano proxectante vertical **Q** da devandita aresta (coincidente a súa traza coa proxección vertical de **DA**), obtendo os puntos **1´-2´,** interseccións do plano **Q** con **EF** e **EG** respectivamente. Obtidas estas proxeccións verticais determínanse as horizontais directamente. A intersección da recta **1-2** coa proxección horizontal de **AD** dános **a1**

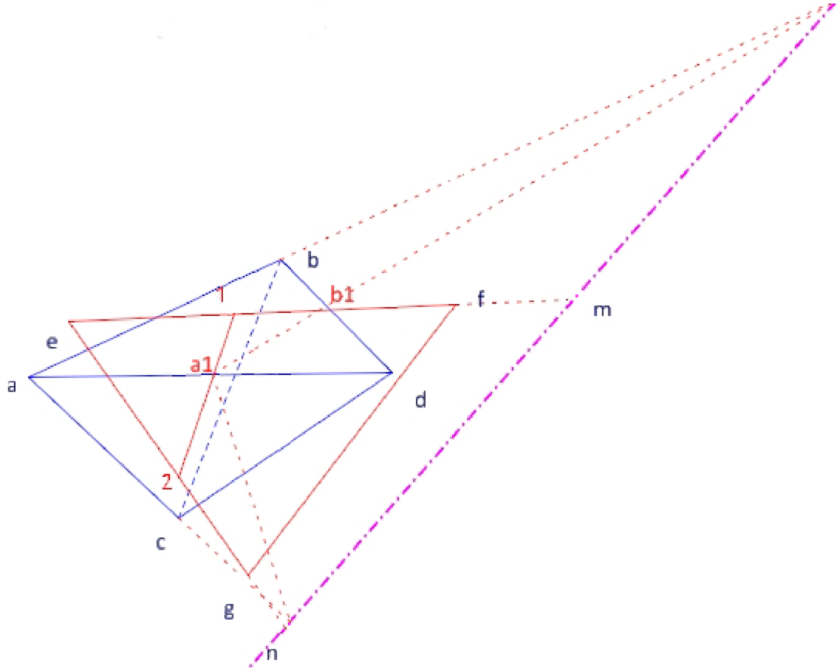
Figura 11.31: Seccións de pirámides. Paso 2. Determinación dun punto da sección



Paso 3.- Determinación de puntos da sección por homoloxía

Como as rectas homólogas córtanse no mesmo punto do eixo de homoloxía, prologamos **a-b** ata cortarse no eixo. Unindo este punto con a1 teremos unha recta que será a homóloga de **a-b** e por tanto deberá conter a **b1**, que obteremos por ser colinear con **b** e **d**

Figura 11.32: Seccións de pirámides. Paso 3 Determinación de puntos da sección por homoloxía

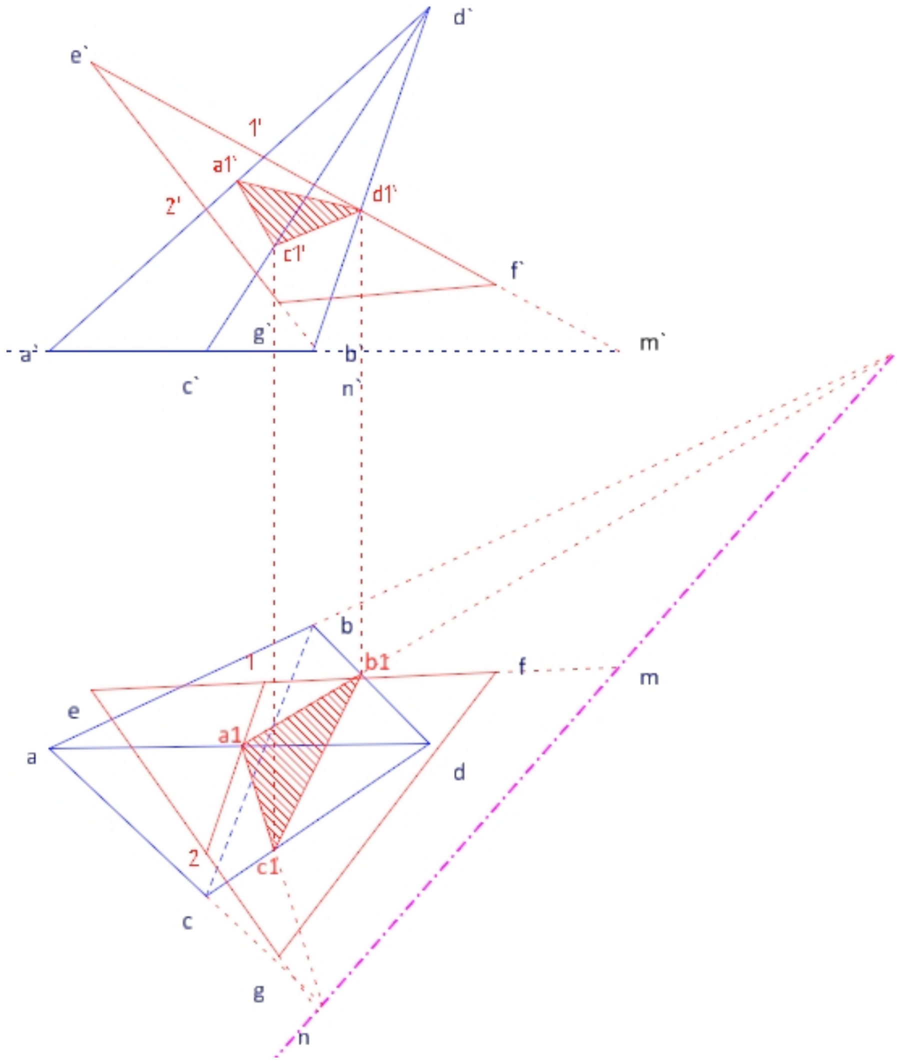


De forma similar determinamos **c1**. Unimos **a** e **c** , prolongamos ata cortar ao eixo de homoloxía (punto **n**). Unimos este último punto con **a1** e teremos a recta homóloga da asociada ao segmento **a-c**. Como **c1** debe de ser colinear con **d** e **c,** na intersección coa recta homóloga anterior teremos **c1.**

Paso 4.- Determinación da proxección vertical da sección

Unha vez que obtivemos as proxeccións horizontais da sección, obtemos a proxección vertical da mesma situando os puntos sobre as proxeccións verticais das arestas da pirámide.

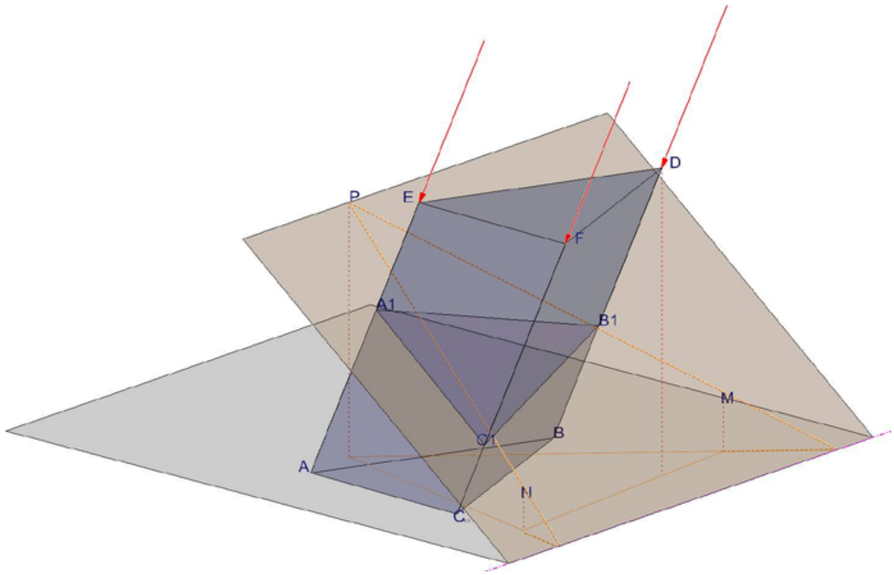
Figura 11.33: Seccións de pirámides. Determinación dun punto da sección por homoloxía



11.10.4.- Seccións planas dun prisma por afinidade

Un prisma pódese considerar como unha pirámide que posúe un dos seus vértices no infinito. Realízase unha sección sobre o mesmo, que corte ás arestas paralelas, a relación entre a base do prisma e a sección sería unha relación de afinidade, de eixo a intersección do plano que produce a sección co plano da base, sendo a dirección de afinidade a das arestas paralelas.

Figura 11.34: Seccións de prismas. Por afinidade

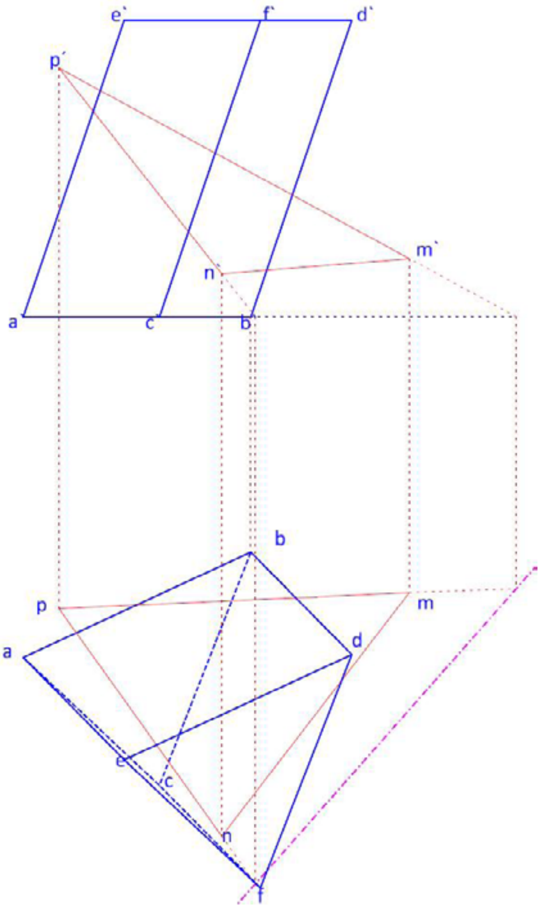


A metodoloxía será similar ao realizado no apartado anterior. En primeiro lugar determinaremos o eixo de afinidade que pasará pola intersección das rectas **P-N** e **P-M** co plano da base do prisma. Posteriormente acharemos unha das interseccións das arestas co plano do triángulo **P-N-M** que produce a sección. Realizado isto temos definida a afinidade mediante a dirección de afinidade e par de puntos afíns, co cal a partir dos puntos da base do prisma podemos determinar os seus afíns que serán a proxección horizontal da sección.

Paso 1.- Determinación de eixo de afinidade

Prolongamos as proxeccións verticais **p´-m´** e **p´-n´** ata alcanzar a cota da base **a´- b´ – c´**. Achamos a continuación a proxección horizontal deses puntos que serán puntos da intersección do plano de **P-M-N** co plano da base **A-B-C** e en consecuencia o eixo de afinidade.

Figura 11.35: Seccións de prismas. Paso 1 determinación do eixo de afinidade

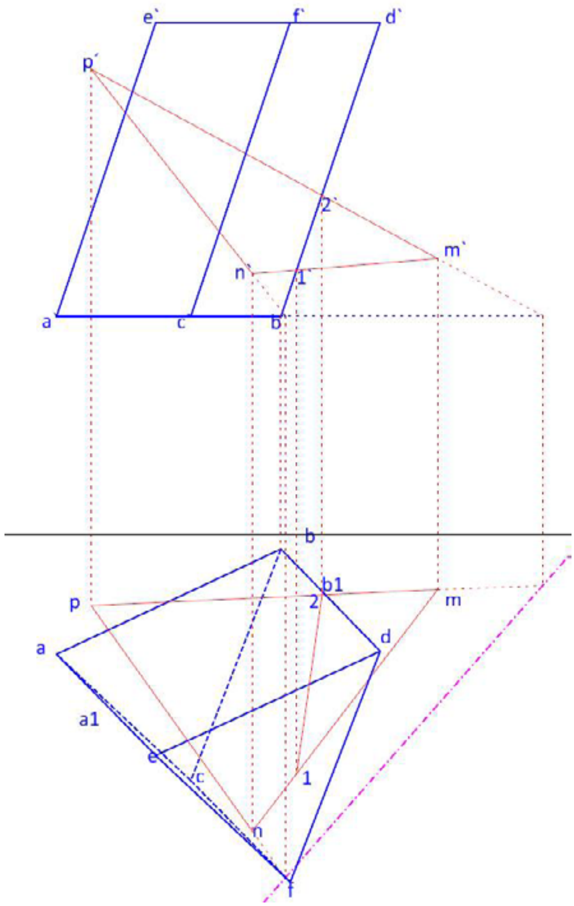


Paso 2.- Determinación dun punto da sección

Determinamos a intersección do plano proxectante vertical de **B-D,** cuxa traza vertical é coincidente coa proxección vertical **b´- d´,** cos lados do polígono **P-M** e **M-N,** que serán as interseccións de **p´-m´** e **m´- n´** con **b´-d´** os puntos **1´, 2´** respectivamente.

Ao achar as proxeccións horizontais **1- 2,** como este segmento é coplanario con **B-D,** permítenos achar o punto **B1** da sección a través da súa proxección horizontal **b1**.

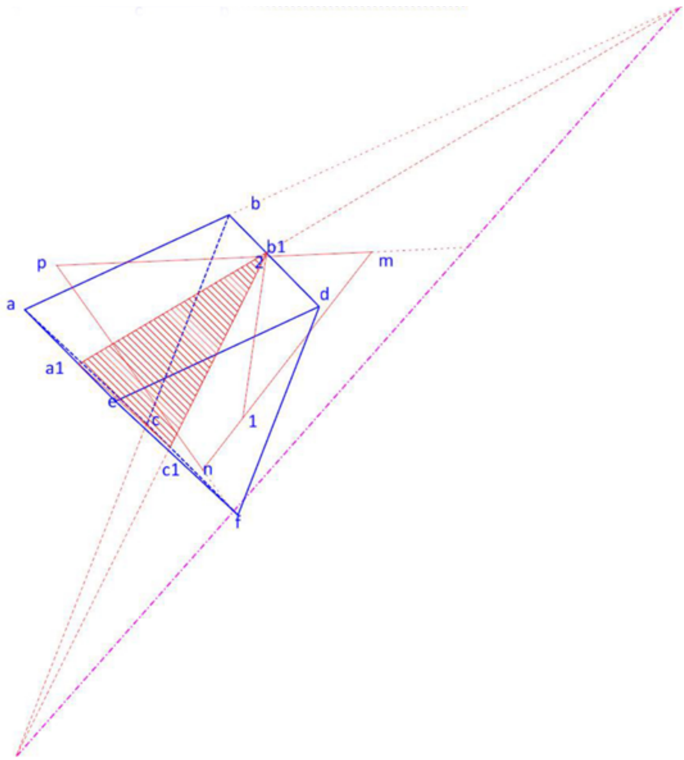
Figura 11.36: Seccións de prismas. Paso 2 determinación dun punto da sección



Paso 3.- Determinación de puntos da sección por afinidade

Como as rectas afíns se cortan no mesmo punto do eixo de afinidade, prolongamos **a-b** ata o eixo e unimos este punto con **b1,** prolongando a continuación esta recta ata cortar **a – e** , onde se situará o afín da **, a1.**
De forma similar unimos **b** e **c** e prologamos ata cortar ao eixo. Unimos posteriormente este último punto con **b1**. A intersección desta recta con **c-f** permítenos obter **c1**, co cal xa dispomos da proxección horizontal da sección.

Figura 11.37: Seccións de prismas. Paso 3 determinación de puntos da sección por afinidade



Paso 4.- Determinación da proxección vertical da sección

Unha vez que obtivemos as proxeccións horizontais da sección, obtemos a proxección vertical da mesma situando os puntos sobre as proxeccións verticais das arestas do prisma.

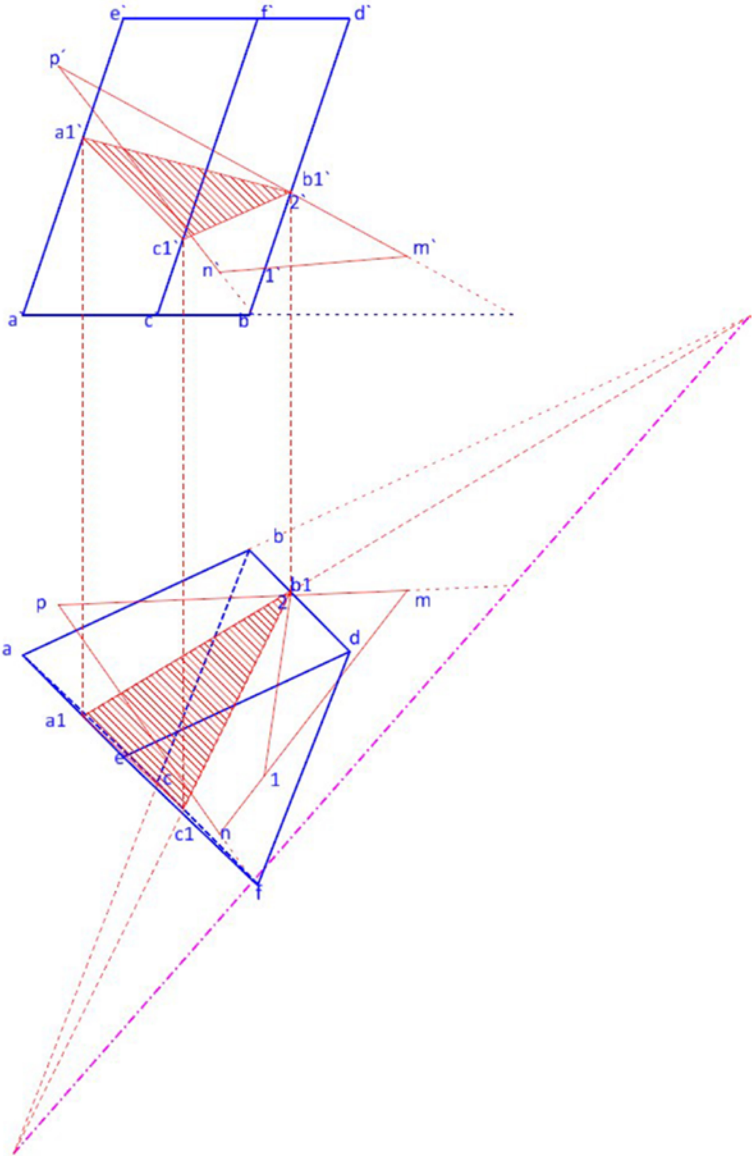
É dicir :

b1´ sobre **b**´**- d**´

c1´ sobre **c**´**- f** ´

a1´ sobre **a - e**

Figura 11.38: Seccións de prismas. Paso 4 determinación da proxección vertical da sección



BIBLIOGRAFÍA

IZQUIERDO ASENSI, Fernando:

— (2001) *Geometría Proyectiva Superior Aplicada*. Editorial Dossat

PUIG ADAM. P.(1986): *Curso de Geometría Métrica. Tomos I y II* .Editorial Euler

RENDÓN GÓMEZ, Alvaro:

— (2000) *Geometría paso a paso . Volumen I: Elementos de Geometría Métrica*. Editorial Tebar

— (2001) *Geometría paso a paso . Volumen II: Geometría Proyectiva y Sistemas de Representación*. Editorial Tebar

ZURITA DE LA VEGA, Eduardo (1990): *Fundamentos de homología y Afinidad* . Editorial Unicopia

unidadesdidácticas
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

VICERREITORÍA DE ESTUDANTES, CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA